T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KARMAŞIK DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN DÜZ VE TERS TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSA DOĞAN

BALIKESİR, ARALIK - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KARMAŞIK DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN DÜZ VE TERS TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSA DOĞAN

BALIKESİR, ARALIK - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

İSA DOĞAN tarafından hazırlanan "**KARMAŞIK DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN DÜZ VE TERS TEOREMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 09.12.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman PROF. DR. DANIYAL M. İSRAFİLZADE	....
Üye DOÇ. DR. BURÇİN OKTAY	....
Üye DOÇ.DR. YUNUS EMRE YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR ....

ÖZET

KARMAŞIK DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN DÜZ VE TERS TEOREMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSA DOĞAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ, FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL M. İSRAFİLZADE)
BALIKESİR, KASIM-2013

Bu çalışmanın amacı Ağırlıklı Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin bazı problemlerini incelemektir.

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, yaklaşım teorisi hakkında temel bilgiler içermektedir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde fonksiyon sınıfları ve düzgünlük modülleri tanımlarına, Cauchy singüler integrali tanımına ve bu integral ile ilgili önemli teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Faber polinomları ve p-Faber polinomları incelenmiştir. Ayrıca $L^p(\Gamma)$ uzayı ve $L^p(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı uzayında p-Faber Laurent rasyonel fonksiyonları tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, Ağırlıklı Smirnov sınıflarında bazı düz teoremler incelenmiştir

Beşinci bölüm, bu tezden elde edilen sonuçların özetini oluşturmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Faber polinomları, p-Faber polinomları, p-Faber Laurent rasyonel fonksiyonları, Cauchy singüler integrali, Smirnov sınıfı, ağırlıklı Smirnov sınıfı, düzgünlük modülü, düz teorem

ABSTRACT

DIRECT AND CONVERS THEOREMS OF APPROXIMATION THEORY
MSC THESIS
İSA DOĞAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR : PROF. DR. DANİYAL M. İSRAFİLZADE)
BALIKESİR, KASIM 2013

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation theory in the Weighted Smirnov classes.

This thesis consists of five chapters.

The first chapter includes some basic concepts about the approximation theory.

The second chapter is assigned for basic definitions and theorems related to other chapters. Furthermore, it contains the definition of function spaces and modulus of continuity, definition of Cauchy singüler integrals and important theorems about this integral.

In The third chapter , Faber polynomials and p-Faber polynomials are studied. Besides p-Faber Laurent rational functions of the functions belonging to $L^p(\Gamma)$ and $L^p(\Gamma,\omega)$ are defined.

The fourth chapter, some direct theorems in the weighted Smirnov class is investigated.

The fifth chapter, provides the summary of all result obtained in the thesis.

KEYWORDS: Faber polynomials, p-Faber polynomials, and p-Faber Laurent rational functions, Cauchy Singular integrals, Smirnov class, weighted Smirnov class, modulus of continuity, direct theorem

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

C: Kompleks sayılar kümesi

$\overline{C}$: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi

R: Reel sayılar kümesi

T: Kompleks düzlemde birim çember

U: Kompleks düzlemde birim disk

Γ: Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi

S_Γ: Cauchy singüler operatörü

Γ_R: Seviye eğrisi

$|\Gamma|$: Γ Eğrisinin uzunluğu

$\overline{A}$: A kümesinin kapanışı

∂A : A kümesinin sınırı

N : Doğal sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca bana değerli zamanını ayıran, destekleyen, bilgi ve tecrübesiyle bu çalışmanın oluşmasında hiçbir yardımını esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Değerli yardımlarından dolayı ,üzerimde çok emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Ali GÜVEN ve Doç. Dr. Ramazan AKGÜN'e çok tesekkür ederim.

Hayatımda her adımımda arkamda duran ve beni bu yaşlara getiren, maddi manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem ile babama ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Genellikle yaklaşım teorisinde araştırılması zor olan bazı fonksiyonlara daha iyi özelliklere sahip olan daha basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. İyi özelliklere sahip olan basit fonksiyonlar sınıfı olarak, incelenmesi gereken temel fonksiyonlar uzayının belirli bir alt uzayı seçilir. Seçilen bu alt uzayın elemanları temel uzayın elemanlarına göre daha basit ve daha iyi özelliklere sahip olması gerekir.

Basit ve iyi özelliklere sahip oldukları için polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar kümesi bu şekildeki alt uzaylar olarak düşünülebilir.

Yaklaşım teorisindeki temel problemlerin ilki yaklaşımın hızının değerlendirilmesi diğeri ise fonksiyonlara yaklaşımın hızı hakkında bilgi varsa bu bilgiden hareketle fonksiyonların özelliklerinin araştırılmasıdır.

Temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşımın hızının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri ve bununla ilgili teoremlere ise yaklaşım teorisinin düz teoremleri denir. Bunun tam tersi olan fonksiyonun yaklaşım hızı ve yaklaşım özelliklerine göre fonksiyonun özellikleriyle ilgili bilgi veren problemlere yaklaşım teorisinin ters problemleri ve bununla ilgili teoremlere yaklaşım teorisinin ters teoremleri denir. Burada en ideal durum belirli bir fonksiyon sınıfında düz ve ters teoremlerin gerek ve yeter koşul olarak ifade edilebilmesidir. Bu gibi durumlarda incelenen fonksiyonlar sınıfının konstraktif karakterizasyonu elde edilmiştir denir.

Bu çalışmada Ağırlıklı Smirnov Sınıflarında yaklaşımın bazı düz teoremleri incelenmiştir.

$E^p(G), p \geq 1$ Smirnov sınıfında polinomlarla yaklaşımın hızı daha önce birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Sınırı analitik eğri olan, basit bağlantılı ve sınırlı G bölgesi için $E^p(G)$ sınıfındaki düz teoremler Walsh ve Russel tarafından 1959 yılında ispatlanmıştır [16].

Γ düzgün Jordan eğrisi, I ise Γ eğrisinin uzunluğu ve $z = z(s)$ bu eğrin yay uzunluğuna göre parametrizasyonu, $\vartheta(s)$, $0 \le s \le 1$, Γ üzerinde s parametresine karşılık gelen noktadaki teğet ile reel eksenin pozitif yönü arasındaki açı olsun. ϑ fonksiyonunun $\Omega(\vartheta, s)$ süreklilik modülünün

$$\int_0^{\mathrm{I}} \frac{\Omega(\vartheta, s)}{s} ds < \infty, \qquad \mathrm{I} > 0, \tag{1.1}$$

koşulunu sağladığında $E^p(G)$ sınıfında düz ve ters teoremler Al'per tarafından ispatlanmıştır [17].

Al'per in sonuçları 1969 yılında $p > 1$ için Kokilashvili [18], $p \ge 1$ için 1977 yılında Anderson [19] tarafından genelleştirilmiştir.

[20]'de regüler sınırlı bölgeler için $f \in E^p(G)$ nin p-Faber serisinin n. kısmi toplamı kullanılarak yaklaşan polinomlar inşa edilmiş ve bazı yaklaşım problemleri incelenmiştir. Daha sonra aynı metot [9]'da kullanılarak $L^p(\Gamma)$ de p-Faber Laurent rasyonel fonksiyonlarının n.kısmi toplamı kullanılarak yaklaşım teorisinin düz teoremleri ispatlanmıştır. G nin Sınırı regüler Jordan eğri olduğunda G deki analitik fonksiyonların ağırlıklı Smirnov sınıflarında yani $E^p(G, \omega)$ de p-Faber seri açılımının yaklaşım özellikleri [2]'de incelenmiştir. Bu çalışmada $E^p(G, \omega)$ ağırlıklı Smirnov sınıfında polinomlarla yaklaşımın hızı, fonksiyonların Faber seri toplamları kullanılarak incelenmiştir. Vurgulayalım ki daha önce G bölgesinin sınırı regüler Jordan eğri olduğunda p-Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarının $E^p(G, \omega)$ ve $L^p(G, \omega)$ uzaylarındaki yaklaşım özellikleri İsrafilov tarafından [1]'de incelenmişti. $E^p(G, \omega)$ sınıflarında yaklaşım teorisinin uygun ters teoremleri ise İsrafilov ve Güven tarafıdan [22]'de ispatlanmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde ise [1] çalışmasındaki düzgünlük modülü yerine Ky tarafından [3]'de tanımlanmış olan $\Omega^*_{p,\omega,r}(f, \delta)$ düzgünlük modülü kullanılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Metin içinde geçen $c, c_1, c_2, \ldots$, farklı bağıntılarda genelde farklı olan ve tanım ve teoremlerdeki esas parametrelere bağlı olmayan sabitlerdir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım: Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık kümeye bir bölge; bağlantılı ve kapalı bir kümeye de kontinyum denir [5, s.1].

2.1.2 Tanım: $[a,b]\subset R$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma:[a,b]\to C$$

fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları; bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a)=\Gamma(b)$ oluyorsa Γ ya kapalı eğri; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için $\Gamma'(t)\neq 0, \forall t\in[a,b]$ oluyorsa Γ ya düzgün eğri; bir Γ eğrisi için sadece $t_1=t_2$ durumunda $\Gamma(t_1)=\Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ ya Jordan eğrisi denir [11].

2.1.3 Tanım : $[a,b]\subset R$ olmak üzere

$$\Gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayı olduğunda

$$t_1=a<t_2<t_3<\dots<t_{n+1}=b$$

koşulunu sağlayan $\forall t_1,t_2,t_3,\dots,t_{n+1}$ değerleri için

$$\sum_{k=1}^{n}\left|z(t_{k+1})-z(t_k)\right|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir. Başka bir ifade ile , Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ ya sonlu uzunluklu eğri denir [4,s.417].

2.1.4 Tanım: $\Gamma \subset C$ kapalı bir eğri olsun. D(z,r), r yarıçaplı z merkezli açık disk ve $|\Gamma \cap D(z,r)|$, $\Gamma \cap D(z,r)$ nin uzunluğu olsun. Eğer her r>0 için

$$\operatorname*{Sup}_{z\in\Gamma}\{\ |\Gamma \cap D(z,r)|\ \} \leq cr$$

olacak biçimde Γ ya bağlı $c > 0$ sabiti varsa Γ ya regüler eğri denir ve regüler eğriler sınıfı S ile gösterilir [1].

2.1.5 Tanım: G, sınırı bir Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, $z_0 \in \Gamma$ ve Γ nın z_0 da bir tek teğeti var olsun ve de z_0 ın komşuluğunda Γ eğrisi normalin her iki yanı üzerinde bulunsun. Bu durumda, eğer G içinde bulunan ve z_0 noktasında son bulan sürekli bir ℓ eğrisinin, z_0 ın bir komşuluğundaki kısmı, köşesi z_0 da bulunan, büyüklüğü π den daha küçük olan ve açıortayı Γ ya içten normal ile çakışan bir açı içinde kalıyorsa bu ℓ eğrisine açısal yol denir. Eğer G içinde analitik olan bir f*(z)* fonksiyonu, z, Γ üzerindeki bir z_0 noktasına Γ içindeki keyfi bir açısal yol boyunca yaklaşırken bir a değerine yaklaşıyorsa, kısaca, *f(z)* açısal yollar üzerinden a değerini alır veya *f(z)* Γ üzerinde açısal limite sahiptir, diyeceğiz [4].

2.1.6 Teorem(Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy Teoremi): G , sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlandırılmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f , CG bölgesinde analitik bir fonksiyon ise ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) : z \in C - \overline{G} \\ f(\infty) \qquad\quad : z \in G \end{cases}$$

olur [6, s.486].

2.1.7 Teorem(Riemann Konform Dönüşüm Teoremi): G kompleks düzlemde sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini U ya

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [15, s.8].

2.1.8 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, G nin U ya her konform dönüşümü $\overline{G}$ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G nin sınırı bir Jordan eğrisi ise , $C\overline{G}$ nin $C\overline{U}$ ye her konform dönüşümü CG ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir.[5, s.24]

2.2 Fonksiyon Sınıfları

2.2.1 Tanım: Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Γ üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonu ve bir $p \in (1,\infty)$ için

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulu sağlayan fonksiyonlar kümesi $L^p(\Gamma)$ ile gösterilir. $L^p(\Gamma)$, $\|\cdot\|_{L^p(\Gamma)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.2.2 Tanım: G, basit bağlantılı bir bölge, $\Gamma = \partial G$ ve f fonksiyonu G de analitik olsun. $p \geq 1$ alalım. G de yerleşen ve $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir (Γ_n) dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| < M$$

olacak biçimde n'den bağımsız $M = M(f)$ sayısı bulunabiliyorsa $f \in E^p(G)$ dir denir. $E^p(G)$ uzayına Smirnov sınıfı denir [4, s.438].

2.2.3 Tanım: Γ sonlu uzunluklu bir eğri olsun. Eğer $\omega:\Gamma\to[0,\infty]$ ölçülebilir fonksiyonu için $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin ölçümü 0 ise ω fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir.

2.2.4 Tanım: ω, Γ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $p>0$ olsun. Eğer

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int_{\Gamma\cap D(z,r)}\omega(\zeta)|d\zeta|\right)\left(\frac{1}{r}\int_{\Gamma\cap D(z,r)}[\omega(\zeta)]^{\frac{-1}{(p-1)}}|d\zeta|\right)^{p-1}<\infty$$

oluyorsa ω, Γ üzerinde A_p-Muckenhoupt koşulunu sağlıyor denir ve $\omega\in A_p(\Gamma)$ ile gösterilir [1].

2.2.5 Tanım: $L^p(\Gamma,\omega):=\left\{f\in L^1(\Gamma):|f|^p\,\omega\in L^1(\Gamma)\right\}$ uzayına ω ağırlıklı L^p uzayı denir [2].

2.2.6 Tanım: $E^p(G,\omega):=\left\{f\in E^1(G):f\in L^p(\Gamma,\omega)\right\}$ uzayına G içindeki analitik fonksiyonların p. dereceden ω Ağırlıklı Smirnov sınıfı denir [2].

2.2.7 Teorem(Hölder Eşitsizliği): $p,q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $f(z)\in L^p(\Gamma)$ ve $g(z)\in L^q(\Gamma)$ ise $f(z)g(z)\in L^1(\Gamma)$ ve

$$\left|\int_\Gamma f(z)g(z)dz\right|\le\left(\int_\Gamma|f(z)|^p dz\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma|g(z)|^q dz\right)^{1/q}$$

olur [4, s.338].

2.2.8 Teorem(Minkowski Eşitsizliği): $p>1$ için $f(z), g(z) \in L^p(\Gamma)$ ise

$$\left(\int_{\Gamma}\left|f(z)+g(z)\right|^p dz\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Gamma}\left|f(z)\right|^p dz\right)^{1/p} + \left(\int_{\Gamma}\left|g(z)\right|^p dz\right)^{1/p}$$

olur [4, s.389].

2.2.9 Tanım: $g \in L^p([0,2\pi],\omega)$ ve $p \in (0,\infty)$ için ,

$$E_{n,p}(g,\omega) := \inf_{T\in\Pi_n} \left\|g(e^{i\theta}) - T(\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

sayısına derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar üzerinden g fonksiyonunun en iyi yaklaşım hatası denir. Burada Π_n derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar sınıfıdır.

2.2.10 Tanım : Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $f \in L^p(\Gamma)$, $1<p<\infty$ olmak üzere

$$M(f)(z) := \sup_{Q\ni z}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|dt$$

fonksiyonuna Hardy-Littlewood Maximal fonksiyonu, $M: f \to M(f)$ operatörüne Hardy-Littlewood Maximal operatörü denir. Buradaki supremum C deki tüm Q diskleri üzerinden alınmaktadır. [7, s.117].

Burada eğer $f \in L^p(\Gamma,\omega)$, $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $M(f)(z)$ bir Hardy-Littlewood Maximal fonksiyonu ise bu durumda ağırlıklı fonksiyon uzayları için [12]'deki sonuç 3 kullanılarak f den bağımsız bir c sabiti için

$$\left\|M(f)(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq c\left\|f(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \tag{2.1}$$

olduğu görülür [3].

2.3 Düzgünlük Modülleri

$f \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. $L^p(T,\omega)$ uzayı, genellikle $f(z) \in L^p(T,\omega)$ iken $f(z+h) \in L^p(T,\omega)$ olmadığından dolayı, genel shift operatörüne göre invaryant değildir. Bu sebeple biz $f \in L^p(T,\omega)$ için aşağıda yeni bir shift operatörü tanımlayalım.

[3]'te Nguyen Xuan Ky tarafından tanımlanan modülde genel durumu bozmadan $w+st$ yerine we^{ist} kullanılarak,

$$\Delta_t^r f(w) := \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s+1} \binom{r}{s} f(we^{ist})$$

olmak üzere σ_h^r operatörünü

$$\sigma_h^r f(w) := \frac{1}{h} \int_0^h \left| \Delta_t^r f(w) \right| dt$$

şeklinde tanımlayalım.

2.3.1 Tanım: $f \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. Bu durumda $p \in (0,\infty)$ olmak üzere $L^p(T,\omega)$ uzayında f fonksiyonu için r. dereceden düzgünlük modülü

$$\Omega_{p,\omega,r}^{*}(f,\delta) := \underset{|h|\leq\delta}{Sup} \left\| \sigma_h^r f(w) \right\|_{L^p(T,\omega)}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Burada $\Omega_{p,\omega,r}^{*}(f,\delta)$ fonksiyonu sürekli, negatif olmayan ve azalmayandır ve her $f \in L^p(T,\omega)$ için [3]'teki Teorem 1 kullanılırsa

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega_{p,\omega,r}^{*}(f,\delta) = 0$$

olduğu görülebilir. Bununla birlikte $\forall\, f_1, f_2 \in L^p(T,\omega)$ için

$$\Omega_{p,\omega,r}^{*}(f_1+f_2,\delta) \leq \Omega_{p,\omega,r}^{*}(f_1,\delta) + \Omega_{p,\omega,r}^{*}(f_2,\delta) \tag{2.2}$$

olduğu

$$\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f_1+f_2,\,\delta)=\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\sigma_h^r(f_1+f_2)(w)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$=\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\left|\Delta_t^r(f_1+f_2)(w)\right|dt\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$=\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}(f_1+f_2)(we^{ist})\right|dt\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$=\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}(f_1)(we^{ist})+\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}(f_2)(we^{ist})\right|dt\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$=\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\left|\Delta_t^r(f_1)(w)+\Delta_t^r(f_2)(w)\right|dt\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$\le\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\left|\Delta_t^r(f_1)(w)\right|dt+\frac{1}{h}\int_0^h\left|\Delta_t^r(f_2)(w)\right|dt\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$=\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\sigma_h^r(f_1)(w)+\sigma_h^r(f_2)(w)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$\le\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\sigma_h^r(f_1)(w)\right\|_{L^p(T,\omega)}+\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\sigma_h^r(f_2)(w)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$=\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f_1,\,\delta)+\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f_2,\,\delta)$$

şeklinde gösterilebilir.

Ayrıca $L^p(T,\omega)$ ağırlıklı uzayında (2,1) gereği; eğer $\omega\in A_p(T)$ ise $\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f,\delta)$ modülü $L^p(T,\omega)$ uzayında sınırlı ve p'ye bağlı olup f den bağımsız bir c sabiti için;

$$\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f,\delta)\le c\left\|f\right\|_{L^p(T,\omega)},\qquad 1<p<\infty$$

şeklinde değerlendirilebilmektedir [3].

2.4 Cauchy Singüler İntegrali

Γ kompleks düzlemde kapalı sonlu uzunluklu bir Jordan eğri olsun.

Bu durumda

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Cauchy integralini ele alalım. $z \notin \Gamma$ olduğunda bu integral analitik bir fonksiyon belirtir. Γ üzerinde bulunan bir z_0 noktasını göz önüne alalım.

Şimdi $z_o \in \Gamma$ ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\Gamma_{\varepsilon} := \Gamma - \bar{D}(z_0, \varepsilon)$ olsun.

Eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

limiti varsa bu limite Cauchy Singüler integrali denir ve

$$S_{\Gamma} f(z_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad \text{veya}$$

$$S_{\Gamma} f(z_0) := (P.V.) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

şeklinde gösterilir.

2.4.1 Teorem: Eğer Cauchy integrali Γ üzerinde hemen her yerde Γ nın bir tarafı üzerinde bulunan bütün açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve Cauchy integrali Γ nın diğer tarafı üzerinden Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcutsa Cauchy integrali Γ nın her iki tarafı üzerinden de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir [4, s.431].

Şimdi G, Γ sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun. Genel durumu bozmadan 0 orijininin G içinde olduğunu kabul edelim.

Eğer $f \in L^p(\Gamma)$ ise

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ , \qquad z \in G$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ , \qquad z \in G^-$$

şeklinde tanımlanan $f^+ : G \to C$ ve $f^- : G^- \to C$ fonksiyonları sırasıyla G ve G^- içinde analitiktirler ve $f^-(\infty) = 0$ dır.

En son teorem kullanılırsa f^+ ve f^- Cauchy integrallerinden biri Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde vardır ve f^+ ve f^- Cauchy integrallerinden diğeri de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde varsa f^+ ve f^- Cauchy integralleri Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Γ nın her iki tarafı üzerinde bulunan açısal yollar üzerinden limit alarak, Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f^+(z) = S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2} f(z) ,$$

$$f^-(z) = S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2} f(z) ,$$

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z) \tag{2.3}$$

bağıntılarını elde ederiz [4, s.2].

2.4.2 Lemma: Eğer $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ ise bu durumda her $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ için $f^+ \in E^p(G, \omega)$ ve $f^- \in E^p(G^-, \omega)$ olur [2].

2.5 Yardımcı Teoremler

Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Jordan eğri teoremine göre her Jordan eğrisi kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız iki basit bağlantılı bölgeye ayırır.

G ile Γ eğrisinin iç bölgesini, G^- ile Γ eğrisinin dış bölgesini gösterelim. Yani $G := Int\Gamma$ ve $G^- := Ext\Gamma$ olsun. Genel durumu bozmadan $0 \in G$ alalım. Ayrıca $T := \{z \in C : |z| = 1\}$ veya $T := (0, 2\pi)$ olmak üzere $U := IntT$ ve $U^- := ExtT$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoremine göre G^- den U^- ye

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ konform dönüşümü vardır.

Riemann Konform Dönüşüm teoremine göre G den U^- ye

$$\varphi_1(0) = \infty, \quad \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ_1 konform dönüşümü vardır.

φ dönüşümünün tersi ψ ile, φ_1 dönüşümünün tersi ψ_1 ile gösterilsin.

2.5.1 Teorem: $L \in S$, $1 < p < \infty$ ve ω, Γ de bir ağırlık fonksiyonu ve $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ olsun. Bu durumda

$$\|S_\Gamma(f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq c \|f\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p(\Gamma)$ şartının sağlanmasıdır [14].

2.5.2 Lemma: $f \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her k doğal sayısı ve $\zeta \in T$ için, $\varphi(\zeta,w) := e^{i[\arg(\zeta - w) - \arg(d\zeta)]}$ olmak üzere

$$\sigma_h^r[S_T(f)(w)] \leq S_T\left[\sigma_h^r(f)\varphi(\zeta,w)\right](w)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\sigma_h^r\,[S_T(f)(w)] = \frac{1}{h}\int_0^h \left|\Delta_t^r(S_T f(w))\right| dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s} S_T f(we^{ist})\right| dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left((P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - we^{ist}}\, d\zeta\right)\right| dt$$

Burada $\zeta = \zeta e^{ist}$ ve $d\zeta = e^{ist} d\zeta$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\int_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - we^{ist}}\, d\zeta = \int_T \frac{f(\zeta e^{ist})e^{ist}}{\zeta e^{ist} - we^{ist}}\, d\zeta$$

olacağından;

$$\sigma_h^r\,[S_T(f)(w)] = \frac{1}{h}\int_0^h \left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left((P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\zeta e^{ist})e^{ist}}{(\zeta - w)e^{ist}}\, d\zeta\right)\right| dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left|(P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s} f(\zeta e^{ist})}{\zeta - w}\, d\zeta\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left((P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s} f(\zeta e^{ist})\right|}{|\zeta - w|}\, |d\zeta|\right) dt$$

$$= (P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \left(\frac{\frac{1}{h}\int_0^h \left| \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s+1} \binom{r}{s} f(\zeta e^{ist}) \right| dt}{|\zeta - w|} \right) |d\zeta|$$

$$= (P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \left(\frac{\frac{1}{h}\int_0^h \left| \Delta_t^r f(\zeta) \right| dt}{|\zeta - w|} \right) |d\zeta|$$

$$= (P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \left(\frac{\sigma_h^r f(\zeta)}{|\zeta - w|} \right) |d\zeta|$$

$(\zeta - w) = |\zeta - w|(e^{i\arg(\zeta - w)})$ ve $d\zeta = e^{i\arg(d\zeta)}|d\zeta|$ eşitlikleri için $|\zeta - w| = (\zeta - w)(e^{-i\arg(\zeta - w)})$ ve $|d\zeta| = e^{-i\arg(d\zeta)}d\zeta$ kullanılırsa;

$$\sigma_h^r [S_T(f)(w)] \le (P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \left(\frac{\sigma_h^r f(\zeta) e^{-i\arg(d\zeta)}}{(\zeta - w)e^{-i\arg(\zeta - w)}} \right) d\zeta$$

$$= (P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \left(\frac{\sigma_h^r f(\zeta) e^{i\arg(\zeta - w) - i\arg(d\zeta)}}{(\zeta - w)} \right) d\zeta$$

$$= (P.V.)\frac{1}{2\pi i}\int_T \left(\frac{\sigma_h^r f(\zeta)\varphi(\zeta, w)}{(\zeta - w)} \right) d\zeta$$

$$= S_T\left[\sigma_h^r(f)\varphi(\zeta, w)\right](w)$$

$\sigma_h^r [S_T(f)(w)] \le S_T\left[\sigma_h^r(f)\varphi(\zeta, w)\right](w)$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2.5.3 Lemma: $f \in L^p(T, \omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_{p,\omega,r}^*(S_T(f), \cdot) \le c\Omega_{p,\omega,r}^*(f, \cdot)$$

olur.

İspat: $\Omega^{*}_{p,\omega,r}(S_T(f),\cdot) = \underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\sigma^{r}_{h}\left[S_T(f)\right]\right\|_{L^p(T,\omega)}$

$$\le \underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|S_T\left[\sigma^{r}_{h}(f)\varphi(\zeta,w)\right]\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$\le \underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|c\sigma^{r}_{h}(f)\varphi(\zeta,w)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$\left(\left\|\varphi(\zeta,w)\right\|_{L^p(T,\omega)} = \left\|e^{i[\arg(\zeta-w)-\arg(d\zeta)]}\right\|_{L^p(T,\omega)} = 1\right)$ olduğundan,

$$\Omega^{*}_{p,\omega,r}(S_T(f),\cdot) \le \underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|c\sigma^{r}_{h}(f)\varphi(\zeta,w)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$= c\,\underset{|h|\le\delta}{Sup}\left\|\sigma^{r}_{h}(f)\right\|_{L^p(T,\omega)},$$

$= c\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f,\delta)$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2.5.4 Lemma: $f \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ ise

$$\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f^{+},\cdot) \le \left(c+\tfrac{1}{2}\right)\Omega^{*}_{p,\omega,r}(f,\cdot)$$

olur.

İspat: T üzerinde hemen her yerde $f^{+} = \dfrac{f}{2} + S_T(f)$ olduğundan bağıntı (2.2) ve Lemma 2.5.3'den

$$\Omega^*_{p,\omega,r}(f^+,\cdot)=\Omega^*_{p,\omega,r}((\frac{f}{2}+S_T(f)),\cdot)$$

$$\leq \Omega^*_{p,\omega,r}(\frac{f}{2},\cdot)+\Omega^*_{p,\omega,r}(S_T(f),\cdot)$$

$$\leq \frac{1}{2}\Omega^*_{p,\omega,r}(f,\cdot)+c\Omega^*_{p,\omega,r}(f,\cdot)$$

$$=(\frac{1}{2}+c)\Omega^*_{p,\omega,r}(f,\cdot)$$

elde edilir.

2.5.5 Lemma: $g\in L(U,\omega)$ ve $\omega\in A_p(T)$ olsun. Eğer g fonksiyonunun orijindeki Taylor açılımının n. kısmi toplamı $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k$ ise bu durumda her n doğal sayısı için

$$\left\| g(w)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(T,\omega)}\leq c(r)\Omega^*_{p,\omega,r}(g,\frac{1}{n})$$

olacak biçimde $c(r)>0$ sabiti vardır.

İspat: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k e^{ik\theta}$, $g\in E^p(U,\omega)$ fonksiyonunun ∂U sınırındaki sınır değerlerine göre yazılmış Fourier serisi, $S_n(g,\theta):=\sum_{k=-n}^{n}\beta_k e^{ik\theta}$ bu serinin n. kısmi toplamı olsun ve $\alpha_k(g)$ ile $g\in E^p(U,\omega)$ fonksiyonunun Taylor katsayılarını gösterelim. $g\in E^1(U)$ olduğundan $k<0$ için $\beta_k=0$ olur ve bununla beraber $k\geq 0$ için $\beta_k=\alpha_k(g)$ elde edilir [8, s.38].

Dolayısıyla

$$\left\| g(w)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(T,\omega)}=\left\| g(e^{i\theta})-S_n(g,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \qquad (2.4)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $g(e^{i\theta})$ nin $L^p([0,2\pi],\omega)$ üzerindeki derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımını $T_n^*(\theta)$ ile gösterilsin. Yani

$$E_{n,p}(g,\omega) := \inf\left\{\left\|g(e^{i\theta}) - T_n(\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} : T \in \Pi_n\right\}$$

derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların g'ye en iyi yaklaşımının minimum hatası olarak tanımlansın ve

$$\left\|g(e^{i\theta}) - T_n^*(\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} = E_{n,p}(g,\omega) \tag{2.5}$$

olsun.

Bu durumda (2.4) kullanılırsa

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(g) w^k\right\|_{L^p(T,\omega)} \le \left\|g(e^{i\theta}) - T_n^*(\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} + \left\|S_n(g - T_n^*,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \tag{2.6}$$

elde edilir.

Diğer yandan eğer $\omega \in A_p(T)$ ise [13] çalışmasından hareketle $\forall g \in L^p([0,2\pi],\omega)$ için

$$\left\|\sup_{n\ge 0}\left|S_n(g,\theta)\right|\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \le c_1 \left\|g\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik $g - T_n^*$ fonksiyonuna uygulanarak (2.5) ile (2.6) bağıntıları kullanılırsa

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(g) w^k\right\|_{L^p(T,\omega)} \le \left\|g(e^{i\theta}) - T_n^*(\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} + \left\|S_n(g - T_n,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

$$\le E_{n,p}(g,\omega) + \left\|S_n(g - T_n,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

$$\le E_{n,p}(g,\omega) + c_1\left\|g - T_n^*\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

$$\le E_{n,p}(g,\omega)+c_1E_{n,p}(g,\omega)$$

$$\le (c_1+1)E_{n,p}(g,\omega)$$

olur ve

$$\left\| g(w)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k \right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le (c_1+1)E_{n,p}(g,\omega) \tag{2.7}$$

elde edilir.

[3] çalışmasında ispatlanan Teorem 2'ye göre

$$E_{n,p}(g,\omega)\le c_2(r)\Omega^*_{p,\omega,r}(g,\tfrac{1}{n})$$

olduğundan sonuncu eşitsizlikten

$$\left\| g(w)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k \right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le c(r)\Omega^*_{p,\omega,r}(g,\tfrac{1}{n})$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. Burada $c(r):=c_2(r)(c_1+1)$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega\in A_p(\Gamma)$ ağırlık fonksiyonu olsun ve

$$f_0(w):=f[\psi(w)](\psi'(w))^{\frac{1}{p}}\ ,\ \omega_0(w):=\omega[\psi(w)] \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlansın.

$f\in L^p(\Gamma,\omega)$ olduğunda

$$\|f(z)\|_{L^p(\Gamma,\omega)}=\left(\int_\Gamma |f(z)|^p\,\omega(z)|dz|\right)^{1/p}<\infty$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $z=\psi(w)$ dönüşümü yapılır, $f_o(w)$ ve $\omega_0(w)$ tanımları kullanılırsa

$$\|f(z)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p \,\omega(z)|dz| \right)^{1/p} = \left(\int_{T} |f[\psi(w)]|^p \,\omega(\psi(w))|\psi'(w)dw| \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{T} \left| f[\psi(w)](\psi'(w))^{1/p} \right|^p \omega(\psi(w))|dw| \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{T} |f_0(w)|^p \,\omega_0(w)|dw| \right)^{1/p} = \|f_0(w)\|_{L^p(T,\omega_0)}$$

elde ederiz ki buradan $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ise $f_0 \in L^p(T,\omega_0)$ olduğu görülür.

Diğer yandan $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ ağırlık fonksiyonu için

$$f_1(w) := f[\psi_1(w)](\psi_1'(w))^{\frac{1}{p}} w^{\frac{2}{p}}, \quad \omega_1(w) := \omega[\psi_1(w)] \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlandığında, $Z = \psi_1(w)$ dönüşümü yapılır $f_1(w)$ ve $\omega_1(w)$ tanımları kullanılırsa $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ iken $f_1 \in L^p(T,\omega_1)$ olduğu benzer şekilde görülür.

Buradan $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ise $f_0 \in L^p(T,\omega_0)$ ve $f_1 \in L^p(T,\omega_1)$ olduğundan, $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $\omega_0, \omega_1 \in A_p(T)$ koşulları sağlandığında,

$$\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0,\delta) \quad \text{ve} \quad \Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\delta)$$

modüllerinin iyi tanımlandıkları görülür.

3. FABER SERİLERİ, GENELLEŞTİRİLMİŞ p-FABER LAURENT SERİLERİ ve p-FABER LAURENT RASYONEL FONKSİYONLARI

3.1 Faber Polinomları

Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Jordan eğri teoremine göre her Jordan eğrisi kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız iki basit bağlantılı bölgeye ayırır.

G, Γ eğrisi ile sınırlanan sınırlı bölgeyi, G^- ise Γ ile sınırlanan sınırsız bölgeyi göstermiş olsun. Yani $G := Int\Gamma$ ve $G^- := Ext\Gamma$ olsun. Genel durumu bozmadan $0 \in G$ alalım. Ayrıca $T := \{z \in C : |z| = 1\}$ veya $T := (0, 2\pi)$ olmak üzere, $U := IntT$ ve $U^- := ExtT$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoremine göre G^- den U^- ye

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ konform dönüşümü vardır.

Benzer şekilde Riemann konform dönüşüm teoremine göre G den U^- ye

$$\varphi_1(0) = \infty, \quad \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ_1 konform dönüşümü vardır.

φ dönüşümünün tersi ψ ile φ_1 dönüşümünün tersi ψ_1 ile gösterilsin.

Teorem 2.1.8 den Γ Jordan eğrisi olduğunda φ ve φ_1 dönüşümlerinin Γ üzerine, ψ ve ψ_1 dönüşümlerinin ise T üzerine homeomorfik genişlemeleri vardır.

φ fonksiyonu G^- de $z=\infty$ noktası hariç analitiktir ve $z=\infty$ noktasında basit kutup yeri vardır. Bu sebeple $z=\infty$ noktasının çıkarılmış komşuluğunda

$$\varphi(z)=\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z^1}+\frac{\gamma_2}{z^2}+...+\frac{\gamma_k}{z^k}+...,$$

şeklinde Laurent serisine açılabilir.

Şimdi negatif olmayan bir k tamsayısı için

$$[\varphi(z)]^k=\left(\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z^1}+\frac{\gamma_2}{z^2}+...+\frac{\gamma_k}{z^k}+...\right)^k$$

açılımını ele alalım. Dikkat edilirse bu açılımın $z=\infty$ noktasında k. dereceden kutup yeri vardır. Bu açılımdaki kuvveti negatif olmayan terimlerin toplamını $F_k(z)$, diğer terimlerin toplamını $E_k(z)$ ile ifade edersek,

$$[\varphi(z)]^k=F_k(z)+E_k(z)$$

elde ederiz. Burada $E_k(z)$, G^- de analitik olup $E_k(\infty)=0$ koşulunu sağlar. Bu son eşitlikten $z\in G$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{E_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

yazılabilir. Buradan sınırsız bölgeler için Cauchy teoremi gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{E_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=E_k(\infty)=0$$

ve Cauchy integral formülü gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=F_k(z)$$

olur. Şimdi $\zeta=\psi(w)$ dönüşümü yapılırsa her $z\in G$ ve $k=0,1,2,...$, için

$$F_k(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{w^k\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw$$

integral gösterimi elde edilir.

Bu son formülden

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}\,,\quad z\in G\,,\quad w\in U^-$$

bağıntısı elde edilebilir [10].

3.1.1 Tanım: $F_k(z)$ polinomuna G bölgesinin k. dereceden Faber polinomu denir.

$\varphi_1(z)$ fonksiyonunu düşünürsek G de $z=0$ noktası hariç analitiktir ve $z=0$ noktasında basit kutup yeri vardır. Bu sebeple $z=0$ noktasının çıkarılmış komşuluğunda Laurent serisine açılabilir.

Negatif olmayan k tamsayısı için, $[\varphi_1(z)]^k$ fonksiyonu $G-\{0\}$ kümesinde analitiktir ve $z=0$ noktasında k. dereceden kutbu vardır. $[\varphi_1(z)]^k$ açılımını düşünelim. Bu açılımda esas kısmı $\tilde{F}_k(\frac{1}{z})$ ile gösterelim.

Bu durumda G bölgesinde analitik olan ve

$$[\varphi_1(z)]^k=\tilde{F}_k(1/z)+\tilde{E}_k(z)\qquad z\in G$$

olacak biçimde bir $\tilde{E}_k(z)$ fonksiyonu vardır.

Bu son eşitlikten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{F}_k(1/\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{E}_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

yazılabilir. $z\in G^-$ için Cauchy teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{E}_k(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0$$

ve sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden $z \in G^-$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{F}_k(1/\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \tilde{F}_k(\infty) - \tilde{F}_k(\frac{1}{z}) = -\tilde{F}_k(\frac{1}{z})$$

olur. $\zeta = \psi_1(w)$ dönüşümü yapılırsa her $z \in G^-$ ve negatif olmayan k tamsayısı için

$$-\tilde{F}_k(1/z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^k}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{w^k\psi_1'(w)}{\psi(w) - z}dw$$

elde edilir.

Bu son formül kullanılarak

$$\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{F}_k(1/z)}{w^{k+1}}, \; z \in G^-, \; w \in U^-$$

bağıntısı elde edilebilir [10].

3.1.2 Tanım: $\tilde{F}_k(\frac{1}{z})$ rasyonel fonksiyonuna G bölgesinin $\frac{1}{z}$ kuvvetlerine göre k. dereceden Faber esas kısmı denir.

3.2 Genelleştirilmiş p-Faber Laurent Serileri

Teorem 2.1.8'den Γ Jordan eğrisi olduğunda φ ve φ_1 dönüşümlerinin Γ üzerine, ψ ve ψ_1 dönüşümlerinin T üzerine sürekli genişlemeleri vardır. Yine φ', G^- içinde; φ_1', G içinde; ψ' ve ψ_1' fonksiyonları da U^- içinde sıfırdan farklıdır.

k negatif olmayan bir tamsayı olsun. $\varphi(z)$ fonksiyonu G^- de $z = \infty$ noktası hariç analitiktir ve

$$\varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

olduğundan $z = \infty$ noktasında $[\varphi(z)]^k \sqrt[p]{\varphi'(z)}$ fonksiyonunun k. dereceden kutup yeri vardır. Bu sebeple $z = \infty$ daki Laurent açılımını düşünürsek her $z \in G^-$ için

$$[\varphi(z)]^k \sqrt[p]{\varphi'(z)} = F_{k,p}(z) + E_{k,p}(z)$$

olacak biçimde k. dereceden $F_{k,p}(z)$ polinomu ve $E_{k,p}(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan G^- de analitik $E_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır.

Bu son eşitlikten $R>1$ ve her $z \in G$ için

$$\Gamma_R = \{\zeta \in G^- : |\varphi(\zeta) = R|\}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G$$

yazılabilir. Buradan sınırsız bölgeler için Cauchy teoremi gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = E_{k,p}(\infty) = 0$$

ve Cauchy integral formülü gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F_{k,p}(z), \qquad z \in G$$

olur. Buradan $R>1$ ve her $z \in G$ için

$$F_{k,p}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

integral gösterimi elde edilir ve $\zeta = \psi(w)$ dönüşümü yapılırsa her $z \in G$ ve $k=0,1,2,\ldots$, için

$$F_{k,p}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^k \left[\psi'(w)\right]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w) - z} dw$$

integral gösterimi elde edilir.

3.2.1 Tanım: $F_{k,p}(z)$ polinomuna G bölgesinin k. dereceden p-Faber polinomu denir.

3.2.2 Lemma: Her $z \in G$ ve $w \in U^-$ için

$$\frac{\left[\psi'(w)\right]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}} \tag{3.1}$$

olur.

İspat: $z \in G$ olsun.

$\dfrac{\left[\psi'(w)\right]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w) - z}$ fonksiyonu U^- içinde analitik,

$$\psi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{w \to \infty} \frac{\psi(w)}{w} > 0$$

olduğundan, bu fonksiyon U^- nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün olarak yakınsayan

$$\frac{\left[\psi'(w)\right]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

şeklinde bir tek Laurent serisine sahiptir. Bu eşitlik kullanılarak $R > 1$ ve $n \in Z^+$ için,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^n \left[\psi'(w)\right]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w) - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{k,p}(z)}{w^{k+1}} \right) dw$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^n}{w^{k+1}}dw\right)A_{k,p}(z)$$

bulunur. Buradan $F_{n,p}(z)=A_{n,p}(z)$ olduğu görülür.

3.2.3 Lemma: n bir doğal sayı ve $\Gamma_{1+1/n}:=\{\zeta\in G^-:|\varphi(\zeta)|=1+1/n\}$ olsun.

Eğer $z\in G^-$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_{1+1/n}}\frac{[\varphi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma}\frac{[\varphi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur [15].

Bu sonuç [15]'den elde edilir. Tezin tam olması açısından ispat [15]'deki gibi aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir.

İspat: $d(z,\Gamma_{1+1/n}):=\inf\{|\zeta-z|:\zeta\in\Gamma_{1+1/n}\}$ diyelim ve $n_0, 1+1/n<|\varphi(z)|$ koşulunu sağlayan en küçük doğal sayı olsun. Bu durumda $n\geq n_0$ özelliğindeki her doğal sayı için

$$d(z,\Gamma_{1+1/(n+1)})>d(z,\Gamma_{1+1/n})\geq d(z,\Gamma_{1+1/n_0})$$

olur. $q>1$ için, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise

$$\int_{\Gamma_{1+1/n}}\frac{[\varphi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\vartheta}\left[\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)-z}i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta$$

elde ederiz. Açık olarak, $n\geq n_0$ için

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\vartheta}\left[\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)-z}i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right|^q d\vartheta$$

$$\leq\frac{2^{q(k+1)-1}}{d^q(z,\Gamma_{1+1/n_0})}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta$$

olur. Bu durumda,

$$\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta\leq B(\Gamma)$$

olacak biçimde B sabitinin varlığı ispatlanabilir. Son iki eşitsizlik

$$\left\{\int_0^{2\pi}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\vartheta}\left[\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)-z}i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right|^q d\vartheta\right\}$$

dizisinin $n\geq n_0$ için düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Buradan ,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\vartheta}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi'\left(e^{i\vartheta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}\right)-z}i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\vartheta}\left[\psi'\left(e^{i\vartheta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(e^{i\vartheta}\right)-z}ie^{i\vartheta}d\vartheta=\int_\Gamma\frac{w^k\left[\psi'(w)\right]^{1/q}}{\psi(w)-z}dw=\int_\Gamma\frac{[\varphi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

3.2.4 Lemma: Eğer $z \in G^{-}$ ise

$$F_{k,p}(z) := [\varphi(z)]^k \sqrt[p]{\varphi'(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[\varphi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: $z \in G^{-}$ olsun. Eğer $R > 1$ ise yeterince büyük seçilen bir n doğal sayısı için z, $\Gamma_R \cup \Gamma^{-}_{1+1/n}$ ile sınırlı bölgenin bir iç noktası olur. Dolayısıyla, Cauchy integral formülü gereğince,

$$[\varphi(z)]^k \sqrt[p]{\varphi'(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R \cup \Gamma^{-}_{1+1/n}} \frac{[\varphi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{[\varphi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

ve Lemma 3.2.3 kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi $[\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\varphi_1'(z)}$ fonksiyonu dikkate alalım. Bu fonksiyon $G - \{0\}$ kümesinde analitiktir ve $z = 0$ noktasında k. dereceden kutbu vardır. Eğer bu fonksiyonun $z = 0$ daki Laurent açılımında esas kısmı $\tilde{F}_{k,p}(\frac{1}{z})$ ile gösterirsek her $z \in G - \{0\}$

$$[\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\varphi_1'(z)} = \tilde{F}_{k,p}(1/z) + \tilde{E}_{k,p}(z)$$

olacak biçimde G içinde analitik olan bir $\tilde{E}_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır.

Bu son eşitlikten $R>1$ ve $z \in G^{-}$ için

$$\tilde{\Gamma}_R = \{\zeta \in G : |\varphi_1(\zeta) = R|\}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

yazılabilir. Cauchy integral teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0$$

ve sınırsız bölgeler için Cauchy teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \tilde{F}_{k,p}(\infty) - \tilde{F}_{k,p}(1/z) = -\tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

elde edilir. Dolayısıyla R>1 ve her $z \in G^-$ için

$$\tilde{F}_{k,p}(1/z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta$$

integral gösterimini elde ederiz. Bu integralde $\zeta = \psi_1(w)$ dönüşümü yapılırsa

$$\tilde{F}_{k,p}(1/z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^{k-\frac{2}{p}}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w) - z}dw$$

elde edilir.

3.2.5 Tanım: $\tilde{F}_{k,p}(\frac{1}{z})$ rasyonel fonksiyonuna G bölgesinin $\frac{1}{z}$ nin kuvvetlerine göre *k.* Dereceden p-Faber esas kısmı denir.

3.2.6 Lemma: Her $z \in G^-$ ve $w \in U^-$ için

$$\frac{w^{-\frac{2}{p}}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/z)}{w^{k+1}} \qquad (3.2)$$

olur.

İspat: $\dfrac{w^{-\frac{2}{p}}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w)-z}$ fonksiyonu U^- içinde analitik ve ∞ da ikinci kerteden bir sıfıra sahip olduğundan onun U^- içindeki Laurent serisi açılımı

$$\frac{w^{-\frac{2}{p}}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{\tilde{A}_{k,p}(z)}{w^{k+2}}$$

formundadır. Sağ taraftaki seri U^- nin kompakt alt kümleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla eğer $R>1$ ve n doğal sayı ise

$$-\tilde{F}_{n,p}(1/z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^{n-2/p}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w)-z}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}w^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{A}_{k,p}(z)}{w^{k+2}}\right)dw$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^n}{w^{k+2}}dw\right)\tilde{A}_{k,p}(z)$$

olur. Buradan

$$-\tilde{F}_{n,p}(1/z)=\tilde{A}_{n-1,p}(z)$$

olduğu görülür. $\tilde{F}_{0,p}(1/z)=0$ olduğundan

$$\frac{w^{-\frac{2}{p}}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/z)}{w^{k+1}}$$

elde edilir.

3.2.7 Lemma: n bir doğal sayı ve $\tilde{\Gamma}_{1+1/n}:=\{\zeta\in G:|\varphi_1(\zeta)|=1+1/n\}$ olsun.

Bu durumda her $z\in G$ için

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{\Gamma}_{1+1/n}}\frac{[\varphi(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma}\frac{[\varphi(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur [15].

İspat: 3.2.3 Lemmanın ispatı gibidir [15].

3.2.8 Lemma: Eğer $z \in G \setminus \{0\}$ ise

$$\tilde{F}_{k,p}(1/z) := [\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\varphi_1'(z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: Eğer ε yeterince küçük seçilirse ve n yeterince büyük alınırsa $z \in G \setminus \{0\}$ noktası $\tilde{\Gamma}_{1+1/n} \cup \partial D^-(0,\varepsilon)$ eğrisiyle sınırlı bölgenin bir iç noktası olur ve $[\varphi_1(\zeta)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}$ fonksiyonu bu bölgede analitik olur. Dolayısıyla, Cauchy integral formülünden,

$$[\varphi_1(z)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\varphi_1'(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_{1+1/n}} \frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)} \frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

elde ederiz. $E_{k,p}(\zeta)/(\zeta - z)$ fonksiyonu $D(0,\varepsilon)$ da analitik olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)} \frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\varphi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)} \frac{\tilde{F}_{k,p}(1/\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)} \frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

olduğu görülür. Bu, ispatı tamamlar.

3.3 $L^p(\Gamma)$ Uzayındaki Fonksiyonların p-Faber Laurent Rasyonel Fonksiyonları

$f \in L^p(\Gamma)$ olsun. Daha önce bölüm 2.4 te tanımladığımız $f^+ \in E^p(G)$ $f^- \in E^p(G^-)$ fonksiyonlarının her birisini

$$f_0(w) := f[\psi(w)](\psi'(w))^{\frac{1}{p}}$$

$$f_1(w) := f[\psi_1(w)](\psi_1'(w))^{\frac{1}{p}} w^{\frac{2}{p}}$$

şeklinde tanımlanan f_0 ve f_1 fonksiyonları cinsinden ifade edelim.

$z \in G$ için

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan $\zeta = \psi(w)$ dönüşümü yapılır ve $f_0(w) := f[\psi(w)](\psi'(w))^{\frac{1}{p}}$ kullanılırsa

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f[\psi(w)](\psi'(w))}{\psi(w) - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f[\psi(w)](\psi'(w))^{1/p}(\psi'(w))^{1-1/p}}{\psi(w) - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T f_0(w) \frac{(\psi'(w))^{1-1/p}}{\psi(w) - z} dw$$

elde edilir.

Benzer şekilde $z \in G^-$ için

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan $\zeta = \psi_1(w)$ dönüşümü yapılır ve $f_1(w) := f[\psi_1(w)](\psi_1'(w))^{\frac{1}{p}} w^{\frac{2}{p}}$ kullanılırsa

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f[\psi_1(w)]\left(\psi_1'(w)\right)}{\psi_1(w) - z}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f[\psi_1(w)](\psi_1'(w))^{1/p}\left(\psi_1'(w)\right)^{1-1/p}}{\psi(w) - z}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f[\psi_1(w)](\psi_1'(w))^{1/p}\, w^{2/p}\left(w^{-2/p}\psi_1'(w)\right)^{1-1/p}}{\psi(w) - z}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_T f_1(w)\frac{w^{-2/p}\left(\psi_1'(w)\right)^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z}dw$$

elde edilir. Böylece sırasıyla

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(w)\frac{[\psi'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w) - z}dw, \qquad z \in G$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_T f_1(w)\frac{w^{-2/p}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w) - z}dw, \qquad z \in G^-$$

integral gösterimleri elde edilmiş olur.

$z \in \Gamma$ için hemen hemen her yerde $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ olduğundan (3.1) ve (3.2) gereğince $f \in L^p(\Gamma)$ fonksiyonuna

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} -\tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

şeklinde gösterilen bir p-Faber Laurent serisi karşılık gelir.

Burada tanımlanan a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots,$$

$$\tilde{a}_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,...,$$

ile tanımlanır ve bu katsayılara $f \in L^p(\Gamma)$ fonksiyonunun p-Faber-Laurent katsayıları denir.

$f_0, f_1 \in L^p(T)$ olduğundan, $f_0^+, f_1^+ \in E^p(U)$ ve $f_0^-(\infty)=0$, $f_1^-(\infty)=0$ olmak üzere T üzerinde hemen her yerde

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w)$$

ve

$$f_1(w) = f_1^+(w) - f_1^-(w)$$

olur.

Bunlar kullanılarak $k=0,1,2,...$ için,

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0^-(w)}{w^{k+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}dw$$

$$\tilde{a}_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1^+(w)}{w^{k+1}}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1^-(w)}{w^{k+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1^+(w)}{w^{k+1}}dw$$

elde edilir.

Yani a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları sırasıyla $f_0^+, f_1^+ \in E^p(U)$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır.

3.3.1 Tanım: $f \in L^p(\Gamma)$ ve a_k, $\tilde{a}_k$ f fonksiyonunun p-Faber Laurent katsayıları olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} -\tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

serisine f fonksiyonunun n.dereceden p-Faber-Laurent seri açılımı denir.

3.4 $L^p(\Gamma,\omega)$ Uzayındaki Fonksiyonların p-Faber Laurent Rasyonel Fonksiyonları

Şimdi en sondaki tanıma benzer bir tanımı $L^p(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı uzayı için verelim. $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ olsun. Bu durumda $p \in (1,\infty)$ için

$$\left(\int_\Gamma |f(z)|^p\,\omega(z)|dz|\right)^{1/p} < \infty$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun.

$$\int_\Gamma |f(z)|dz = \int_\Gamma \left(|f(z)|(\omega(z))^{1/p}\frac{1}{(\omega(z))^{1/p}}\right)dz$$

Eşitliğini düşünelim. Burada Hölder eşitsizliğini ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ şartını kullanırsak

$$\int_\Gamma |f(z)|dz \le \left(\int_\Gamma \left(|f(z)|(\omega(z))^{1/p}\right)^p dz\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma \left(\frac{1}{(\omega(z))^{1/p}}\right)^q dz\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_\Gamma |f(z)|^p(\omega(z))dz\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma (\omega(z))^{-q/p}dz\right)^{1/q}$$

$$= c_1\left(\int_\Gamma (\omega(z))^{-q/p}dz\right)^{1/q}$$

$$= c_1\left(\int_\Gamma (\omega(z))^{-1/p-1}dz\right)^{1/q}$$

$$= c_1c_2 = c$$

bulunur ki bu $f \in L^1(\Gamma)$ olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ ise $f \in L^1(\Gamma)$ olur.

Böylece $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ise $f \in L^1(\Gamma)$ olacağından

$$f^+ : G \to C, \qquad f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$f^- : G^- \to C, \qquad f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

fonksiyonlarını tanımlayabiliriz ve Γ üzerinde hemen her yerde $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ dir. Burada Lemma 2.4.2 den $f^+ \in E^p(G,\omega)$ ve $f^+ \in E^p(G^-,\omega)$ olur ve bu fonksiyonların her biri daha önce tanımladığımız f_0 ve f_1 fonksiyonları cinsinden sırasıyla

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(w)\frac{[\psi'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w)-z}dw, \qquad z \in G$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_T f_1(w)\frac{w^{-\frac{2}{p}}[\psi_1'(w)]^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w)-z}dw, \qquad z \in G^-$$

şeklindeki integral gösterimine sahip olduğunu bölüm 3.3'de gösterdik.

Dolayısıyla (3.1) ve (3.2) gereğince $L^p(\Gamma,\omega)$ fonksiyonu

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} -\tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

şeklinde genelleştirilmiş bir p-Faber- Laurent serisine karşılık gelir.

Burada tanımlanan a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots,$$

$$\tilde{a}_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

ile tanımlanır ve bu katsayılara $f \in L^p(\Gamma)$ fonksiyonunun p-Faber Laurent katsayıları denir.

$f_0 \in L^p(\Gamma,\omega_0)$ olduğundan Lemma 2.4.2 den

$$f_0^+(w) \in E^p(U,\omega_0)\ ,\ f_0^- \in E^p(U^-,\omega_0)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $f_1 \in L^p(\Gamma,\omega_1)$ olduğundan Lemma 2.4.2 den

$$f_1^+(w) \in E^p(U,\omega_1)\ ,\ f_1^- \in E^p(U^-,\omega_1)$$

elde edilir ve T üzerinde hemen her yerde

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w) \tag{3.3}$$

ve

$$f_1(w) = f_1^+(w) - f_1^-(w) \tag{3.4}$$

eşitlikleri sağlanır. Bunlar kullanılarak

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}dw \ \text{ ve } \ \tilde{a}_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_1^+(w)}{w^{k+1}}dw$$

elde ederiz ki bu katsayılar sırasıyla $f_0^+ \in E^p(U,\omega_0)$ ve $f_1^+ \in E^p(U,\omega_1)$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır. Dolayısıyla Lemma 2.5.5 ve Lemma 2.5.4 ardı ardına uygulanırsa

$$\left\| f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \right\|_{L^p(T,\omega_0)} \leq c\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0,\tfrac{1}{n})$$

$$\left\| f_1^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{\alpha}_k w^k \right\|_{L^p(T,\omega_0)} \leq c\Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\tfrac{1}{n})$$

elde ederiz

3.4.1 Tanım: $f \in L^p(\Gamma,\omega)$, a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları f fonksiyonunun p-Faber – Laurent katsayıları olsun.

bu durumda,

$$R_{n,p}(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=1}^{n} -\tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

rasyonel fonksiyonuna f fonksiyonunun n. dereceden p-Faber –Laurent rasyonel fonksiyonu denir.

4. AĞIRLIKLI SMİRNOV SINIFLARINDA p-FABER LAURENT RASYONEL FONKSİYONLARIYLA YAKLAŞIM

4.1 Ana Sonuçlar

4.1.1 Teorem: $\Gamma \in S$ ve $f \in E^p(G,\omega)$ $1<p<\infty$, $r \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $\omega_0 \in A_p(T)$ ise her n doğal sayısı ve

$$P_n(z,f) := \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k$$

polinomu için,

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq c\,\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0, \frac{1}{n})$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradaki c, n'den bağımsız bir sabittir ve $P_n(z,f)$ fonksiyonu f fonksiyonunun p-Faber serisinin n. kısmi toplamı olarak elde edilmiştir.

4.1.2 Teorem: $\Gamma \in S$ ve $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ $1<p<\infty$, $r \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve ω_0, $\omega_1 \in A_p(T)$ ise her n doğal sayısı için $c > 0$ sabiti ve

$$R_n(z,f) := \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} z^k$$

rasyonel fonksiyonu vardır ki,

$$\|f - R_n(\cdot, f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq c\left[\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0, \frac{1}{n}) + \Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1, \frac{1}{n})\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $R_n(z,f)$ fonksiyonu f fonksiyonunun p-Faber Laurent serisinin n.kısmi toplamı olarak elde edilmiştir.

Şimdi bu son teoremden $f \in E^p(G^-,\omega)$ durumu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.3 Teorem : $\Gamma \in S$ ve $f \in E^p(G^-,\omega)$ $1<p<\infty$, $r\in$N olsun. Eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $\omega_1 \in A_p(T)$ ise her n doğal sayısı ve

$$R_n(z,f) := \sum_{k=-n}^{0} a_k^{(n)} z^k$$

rasyonel fonksiyonu için,

$$\|f - R_n(\cdot\,,f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le c\,\Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\frac{1}{n})$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada c, n den bağımsız bir sabittir ve $R_n(z,f)$ rasyonel fonksiyonu f fonksiyonunun p-Faber Laurent serisinin n. kısmi toplamı olarak elde edilmiştir.

Dikkat edilirse eğer Γ yeterince düzgün eğri ise $\omega \in A_p(T)$, $\omega_0 \in A_p(T)$ ve $\omega_1 \in A_p(T)$ koşulları denktir. Bu durumda aşağıdaki teorem sağlanır.

4.1.4 Teorem: Γ düzgün ve (1.1) koşulunu sağlayan eğri , $f \in L^p(\Gamma,\omega)$, $1<p<\infty$ ve $r\in$N olsun. Eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$ ise her n doğal sayısı için bir

$$R_n(z,f) := \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} z^k$$

rasyonel fonksiyonu vardır ki,

$$\|f-R_n(\cdot,f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le c\left[\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0,\frac{1}{n})+\Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\frac{1}{n})\right]$$

eşitsizliğini sağlar.

Buradaki c, n den bağımsız bir sabittir ve $R_n(z,f)$ rasyonel fonksiyonu f in p-Faber Laurent serisinin n. kısmi toplamı olarak elde edilmiştir.

4.2 Ana Sonuçların İspatları

Teorem 4.1.1 ispatı: $f_o\in L^p(T,\omega_0)$ olduğu açıktır. f_0^+ ve f_0^- foksiyonlarını

$$f_0^+(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}d\zeta,\qquad w\in U$$

ve

$$f_0^-(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}d\zeta,\qquad w\in U^-$$

şeklinde ifade edelim.

$f\in E^p(G,\omega)$ fonksiyonunun k. dereceden p-Faber katsayıları $a_k(f)$ ile gösterilsin. Lemma 2.4.2'den $f_0^+\in E^p(U,\omega_0)$ ve $f_0^-\in E^p(U^-,\omega_0)$, bununla beraber $f_0^-(\infty)=0$ ve T üzerinde hemen her yerde $f_0=f_0^+-f_0^-$ olur. Buradan

$$a_k(f):=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_0(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta$$

olduğunda,

$$a_k(f):=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_0^+(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta$$

elde edilir.

Dikkat edilirse $f\in E^p(G,\omega)$ nin k. p-Faber katsayıları , $f_0^+\in E^p(U,\omega_0)$ nin orijindeki k. Taylor katsayılarıdır.

Diğer yandan $f \in E^p(G,\omega)$ ise $z' \in G^-$ için

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta = 0$$

sağlanır ve T üzerinde hemen her yerde sağlanan $f_0 = f_0^+ - f_0^-$ eşitliğinden Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(\zeta) = (f_0^+(\varphi(\zeta)) - f_0^-(\varphi(\zeta)))\varphi'(\zeta)^{1/p} \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanır.

$z' \in G^-$ olsun. Lemma 3.2.4 ve son eşitlik yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)F_{k,p}(z') = (\varphi'(z'))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)\varphi^k(z')$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi'(\zeta))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)\varphi^k(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$= (\varphi'(z'))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)\varphi^k(z') + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi'(\zeta))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)\varphi^k(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi'(\zeta))^{1/p} f_0^+(\varphi(\zeta))}{\zeta - z'}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi'(\zeta))^{1/p} f_0^-(\varphi(\zeta))}{\zeta - z'}d\zeta$$

elde edilir.

Buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi'(\zeta))^{1/p} f_0^-(\varphi(\zeta))}{\zeta - z'}d\zeta = -(\varphi'(z'))^{1/p} f_0^-(\varphi(z'))$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)F_{k,p}(z') = (\varphi'(z'))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(f)\varphi^k(z')$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi'(\zeta))^{1/p}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}(f)\varphi^k(\zeta)-f_0^-(\varphi(\zeta))\right]}{\zeta-z'}d\zeta$$

$$-(\varphi'(z'))^{1/p}f_0^-(\varphi(z'))$$

elde edilir.

Γ dışından açısal yollar üzerinden $z'\to z$ limiti alınırsa hemen her yerde geçerli olan

$$\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}(f)F_{k,p}(z)=\frac{1}{2}(\varphi'(z))^{1/p}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}(f)\varphi^k(z)-f_0^+(\varphi(z))\right]$$

$$+\left[f_0^+(\varphi(z)-f_0^-(\varphi(z))\right](\varphi'(z))^{1/p}$$

$$+S_\Gamma\left[(\varphi')^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}(f)\varphi^k-f_0^+\circ\varphi\right)\right](z)$$

eşitliği Γ de sağlanır. Bağıntı (4.1), Minkowski eşitsizliği ve Teorem 2.5.1 kullanılarak

$$\left\|f-S_L(f,\cdot)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le(c_1+\tfrac{1}{2})\left\|f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}(f)w^k\right\|_{L^p(\Gamma,\omega_0)}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 2.5.5 ve Lemma 2.5.4 kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2 ispatı: $R_n(z,f):=\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p}(z)+\sum_{k=1}^{n}-\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)$ rasyonel fonksiyonunun Teoremdeki gerekli eşitsizliği sağladığını ispatlayacağız.

$f(z)=f^+(z)-f^-(z)$ eşitliği Γ da hemen hemen her yerde sağlandığından dolayı

$$\left\| f^{-}(z)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq c\Omega^{*}_{p,\omega_1,r}(f_1,\frac{1}{n}) \tag{4.2}$$

ve

$$\left\| f^{+}(z)-\sum_{k=1}^{n}a_kF_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq c\Omega^{*}_{p,\omega_0,r}(f_0,\frac{1}{n}) \tag{4.3}$$

eşitliklerinin elde edilebildiğini gösterelim.

$f_0(w)$ ve $f_1(w)$ fonksiyonlarının (2.8) ve (2.9) teki notasyonlarında w yerinde sırasıyla $\varphi(z)$ ve $\varphi_1(z)$ yazılır daha sonra burada (3.3) ve (3.4) kullanılırsa Γ da

$$f(z)=\left[f_0^{+}(\varphi(z))-f_0^{-}(\varphi(z))\right](\varphi'(z))^{1/p} \tag{4.4}$$

ve

$$f(z)=\left[f_1^{+}(\varphi_1(z))-f_1^{-}(\varphi_1(z))\right](\varphi_1(z))^{-2/p}(\varphi_1'(z))^{1/p} \tag{4.5}$$

elde edilir.

Önce (4.2) deki eşitsizliği ispatlayalım . $z'\in G$ olsun. Lemma 3.2.8 ve (4.5) bağıntısını kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z') &= (\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta \\
&= (\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^{+}(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(\zeta)-f_1^{+}(\varphi_1(\zeta))\right]}{\zeta-z'}d\zeta \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^{-}(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^{+}(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^+(\varphi_1(\zeta))\in E(G,\omega) \text{ ve } (\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^-(\varphi_1(\zeta))\in E(G,\omega)$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^+(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta=(\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}f_1^+(\varphi_1(z'))$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}f_1^-(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta=(\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}f_1^-(\varphi_1(z'))$$

elde ederiz.

Böylece bu son eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z')&=(\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z')+f^+(z')\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(\varphi_1'(\zeta))^{1/p}(\varphi_1(\zeta))^{-2/p}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(\zeta)-f_1^+(\varphi_1(\zeta))\right]}{\zeta-z'}d\zeta\\&-2(\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}f_1^+(\varphi_1(z'))+(\varphi_1'(z'))^{1/p}(\varphi_1(z'))^{-2/p}f_1^-(\varphi_1(z'))\end{aligned}$$

elde edilir.

L üzerinde teğetsel olmayan yollar üzerinden $z'\to z$ limiti alınırsa hemen hemen her yerde geçerli olan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)-f^-(z)&=(\varphi_1'(z))^{1/p}(\varphi_1(z))^{-2/p}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)\\&-S_\Gamma\left[(\varphi_1')^{1/p}(\varphi_1)^{-2/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k-f_1^+\circ\varphi_1\right)\right](z)\\&-\frac{1}{2}(\varphi_1'(z))^{1/p}(\varphi_1(z))^{-2/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)\\&-2(\varphi_1'(z))^{1/p}(\varphi_1(z))^{-2/p}f_1^+(\varphi_1(z))+(\varphi_1'(z))^{1/p}(\varphi_1(z))^{-2/p}f_1^-(\varphi_1(z))\\&+\left[f_1^+(\varphi_1(z))-f_1^-(\varphi_1(z))\right](\varphi_1(z))^{-2/p}(\varphi_1'(z))^{1/p}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bu son eşitlikte (2.3) ve (4.5) kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)-f^-(z)=\frac{1}{2}(\varphi_1'(z))^{1/p}(\varphi_1(z))^{-2/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$

$$-S_\Gamma\left[(\varphi_1')^{1/p}(\varphi_1)^{-2/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k-f_1^+\circ\varphi_1\right)\right](z)$$

elde edilir.

Burada Minkowski eşitsizliği ve Teorem 2.5.1 uygulanırsa

$$\left\|f^-(z)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le c_1\left\|f_1^+(w)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k\right\|_{L^p(T,\omega_1)}$$

elde edilir.

Son olarak Lemma 2.5.5 ve Lemma 2.5.4'den dolayı

$$\left\|f^-(z)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le c_1\Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\frac{1}{n})$$

elde ederiz.

Benzer şekilde Lemma 3.2.4 ve (4.4) kullanılır ve Γ üzerinde teğetsel olmayan yollar üzerinden limit alınarak

$$\left\|f^+(z)-\sum_{k=1}^{n}a_kF_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le c_2\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0,\frac{1}{n})$$

olduğu görülür. $R_n(\cdot\,,f)$ nin tanımı, son iki eşitsizlik ve (2.2) kullanılarak

$$\|f-R_n(\cdot\,,f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le\left\|f^+(z)-f^-(z)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kF_{k,p}(1/z)+\sum_{k=1}^{n}-\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)\right)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$\le\left\|f^+(z)-\sum_{k=1}^{n}a_kF_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}+\left\|f^-(z)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$\le c_2\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0,\frac{1}{n})+c_1\Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\frac{1}{n})$$

$$=c_3\left(\Omega^*_{p,\omega_0,r}(f_0,\frac{1}{n})+\Omega^*_{p,\omega_1,r}(f_1,\frac{1}{n})\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3 ispatı: Eğer $f \in E^p(G^-,\omega)$ ise Teorem 4.1.2 yi $f_* := f - f(\infty)$ fonksiyonuna uygularız. $R_n(z,f)$ rasyonel foksiyonun yaklaşımı $f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$ alınarak inşa edilir.

Teorem 4.1.4 ispatı: Koşul (1.1) altında $\omega \in A_p(L)$ $\omega_0 \in A_p(T)$ $\omega_1 \in A_p(T)$ bağıntılarının birbirine denk olduğu gösterelim.

ω ve ω_0'ın denk olduklarını göstermemiz yeterlidir. ω_0 ve ω_1'ın denk oldukları benzer şekilde gösterilir.

L düzgün bir eğri olduğundan $\omega \in A_p(L)$ ise her $\mathrm{I} \subset L$ için

$$\left(\frac{1}{|\mathrm{I}|}\int_{\mathrm{I}} \omega(\zeta)|d\zeta|\right) \Big/ \left(\frac{1}{|\mathrm{I}|}\int_{\mathrm{I}} [\omega(\zeta)]^{\frac{-1}{(p-1)}} |d\zeta|\right)^{p-1} \leq c < \infty \qquad (4,6)$$

yazılabilir.

Diğer yandan [21]'deki L üzerindeki kısıtlayıcı koşuldan her $|w| \leq 1$ için

$$0 < c_1 \leq |\psi'(w)| \leq c_2 < \infty$$

yazılabilir.

Buradan her $\mathrm{I} \subset T$ için

$$|\psi(\mathrm{I})| = \int_{\mathrm{I}} |\psi'(w)||dw| \leq c_2 \text{ ve}$$

$$|\mathrm{I}| = \int_{\psi(\mathrm{I})} |\varphi'(z)||dz| \leq \frac{|\psi(\mathrm{I})|}{c_1}$$

elde edilir. (4,6)'da $\zeta = \psi(z)$ yazılırsa son üç bağıntıdan $\omega \in A_p(L)$ ve $\omega_0 \in A_p(T)$ koşullarının denkliği elde edilmiş olur.

Bundan dolayı Teorem 4.1.4'ün ispatı Teorem 4.1.2'nin ispatına benzer şekilde ilerler.

Uyarı: 4.1.1 ve 4.1.3. teoremlerinin ters durumları aynı bölge sınıflarında elde edilebilir. Bu ters teoremlerin ispatında [22] çalışmasında kullanılan yöntem uygulanabilmektedir.

Elde edilecek bu ters ve tezde ispatlanan düz teoremleri özel halde Lipschitz fonksiyonları sınıfı için yazdığımızda bu sınıflarda konstraktif karakterizasyon probleminin çözülebilirliğini görmüş oluruz.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, ağırlıklı Smirnov sınıfı $E^p(G,\omega)$ deki polinomlarla yaklaşımın hızı incelenmiş ve bazı düz teoremler ispatlanmıştır.Yaklaşım probleminin çözümünde kullanılan polinom ve rasyonel fonksiyonlar, Faber polinomları ve Faber Laurent rasyonel fonksiyonları kullanılarak inşa edilmiştir.Elde edilen yeni sonuçlar dördüncü bölümde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi belirtilebilir.

1. $\Gamma \in S$ ve $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $\omega_0 \in A_p(T)$ olduğu durumda yaklaşım teorisinin p-Faber serilerinin n.kısmi toplamı yardımıyla yaklaşımın gerçekleştirildiği düz teorem ispatlanmıştır.

2. $\Gamma \in S$ ve $f \in L^p(\Gamma,\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve ω_0 , $\omega_1 \in A_p(T)$ olduğu durumda yaklaşım teorisinin p-Faber Laurent rasyonel fonksiyonları yardımıyla yaklaşımın gerçekleştiği düz teorem ispatlanmıştır.

3. $\Gamma \in S$ ve $f \in E^p(G^-,\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. Benzeri problemler regüler Jordan eğri ile sınırlı, sınırsız bölgelerde tanımlı ağırlıklı Smirnov uzaylarında da incelenmiş ve benzer teoremler elde edilmiştir

4. Γ düzgün (1.1) koşulunu sağlayan eğri ve $f \in L^p(\Gamma,\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve Γ eğrisinin yeterince düzgün eğri olduğu durumda ω, ω_0 ve ω_1 fonksiyonlarının üzerine konulan koşullar tek bir koşul olarak ifade edilerek yaklaşım teorisinin düz teoremi ifade edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Israfilov, D. M., "Approximation by p-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces", *Czechoslovak Math.* J. 54, 751, (2004).

[2] Israfilov, D. M., "Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class Ep (G,ω) and the Bieberbach polynomials", *Constr. Approx.*, 17/3, 335, (2001).

[3] Ky, N. X., "Moduli of Mean Smoothness and Approximation with A_p-weight", *Ann. Univ. Sci. Budap.*, 40, 37-48, (1997).

[4] Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable Translation of Mathematical Monographs, 26, AMS, Providence, (1969).

[5] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprect, (1973).

[6] Gonzalez,M.O., Classical Complex Analysis, Marcel Dekker, Inc. (1992).

[7] Bennet, C. and Sharpley, R., Interpolation of operators, Academic Pres (1988).

[8] Duren, P.L, Theory of H^p-Spaces, Academic Press(1970).

[9] A. Çavuş and D. M. Israfilov, "Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of class Lp(Γ) with 1<p<∞," *Approximation Theory and its Applications,* 11, (1), 105–118, (1995).

[10] Suetin, P. K., Series of Faber Polynomials, Gordon and Breach (1998).

[11] Markushevich, A.I., Theory of Functions of a Complex Variable III, Prentice Hall, Inc. (1967).

[12] A. Böttcher and Yuri. I. Karlovich, Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplitz operators, Birkhauser-Verlag, (1997).

[13] Hunt, R.A. and Young, W.S., A Weighted Norm İnequalities For Fourier Series, Bull. *Amer.Soc.*, 80, (2), (1974).

[14] David, G., "Operateurs integraux singulers sur certaines courbes du plan complexe". *Ann.Sci. Ecol. Norm. Super.* (4) ,(1984)

[15] Israfilov, D. M ve Yıldırır Y. E., "L^p Uzaylarında Polinom ve Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşım", *Balıkesir,* (2001).

[16] Walsh, J.H., ve Russel, H. C.,"İntegrated continuity condition and degree of approximation by polynomials or by bounden analytic functions", *Trans.Amer. Math. Soc.* 92, 355-370, (1959).

[17] Al'per, L. Y., "Approximation in the mean of analytic fuctions of class E^p", *Gos. Izdat. Fiz-Mat. Lit.* 272-286, (1960).

[18] Kokilashvili, V. M., "A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials", *Soviet Math. Dokl.* 10, 411-141, (1969).

[19] Andersson, J. E., "On degree of polynomial approximation in $E^p(G)$", *Journal of Approximation Theory*, 19 ,(1) , 61-68, (1977).

[20] Israfilov D. M., "Approximate properties of the generalized Faber series in an integral metric ", *Izv. Akad. Nauck Az. SSr, Ser. Fiz. Tekh. Nauk*, (2) , 10-14, (1987).

[21] Warschawski, S., "Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktionen bei konformer abbildung". *Math.Z.*, 35, 321-456, (1932)

[22] Israfilov, D. M. ve Güven A.,"Approximation in Weighted Smirnov Classes", *East J. Approx.* 11 (2005), 91-102.