T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan Çetintaş

Balıkesir, Temmuz 2010

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan Çetintaş

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır

Sınav Tarihi : 05.07.2010

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır (Danışman- BAÜ)

Doç. Dr. Özden Koruoğlu (BAÜ)

Doç. Dr. Ramazan Akgün (BAÜ)

Balıkesir, Temmuz 2010

ÖZET

FABER OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Ramazan ÇETİNTAŞ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Fanışmanı : Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR)

Balıkesir, 2010

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca Cauchy tipli integrallerin limit değerleri ile Cauchy Singüler integrali arasındaki ilişki ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, Faber polinomlarının tanımı ve temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle Faber operatörleri tanımlanmış ve sınır özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, H_P Hardy uzayından, $E_P(G)$ Smirnov uzayına tanımlanan Faber operatörlerinin normlarının değerlendirmeleri verilmiş ve bu değerlendirmelerin yaklaşım teorisindeki uygulamaları incelenmiştir.

Son bölümde, bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar Orlicz uzaylarına genelleştirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Faber polinomu / Faber operatörü / Hardy uzayı / Smirnov uzayı / Orlicz uzayı / Faber operatör normu

ABSTRACT

BOUNDEDNESS OF FABER OPERATORS

Ramazan ÇETİNTAŞ

Balıkesir University, Institue of Science ,

Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR)

Balıkesir 2010

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some basic definitions and theorems are given. Moreover, the relation between the limit values of Cauchy type integrals and Cauchy Singular integral is stated.

In the second chapter, the definition and the basic properties of Faber polynomials are given.

In the third chapter, firstly, Faber operators are defined and their boundary behaivour is investigated. Then, estimates of the norms of Faber operators from H_P to $E_P(G)$ are given and the application of these estimates in the theory of approximation is considered.

In the final chapter, the results obtained in the previous chapter is generalized to the Orlicz spaces.

KEY WORDS: Faber polynomial / Faber operator / Hardy space / Smirnov space /

Orlicz space / The norm of Faber operator

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\mathbf{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	Gerçel sayılar kümesi
G	Sınırlı basit bağlantılı bölge
Γ	G bölgesinin sınırı
Γ_R	Kapalı ve bağlantılı bir bölgenin seviye çizgisi
G_R	Γ_R seviye çizgisinin içi
D_R	Γ_R seviye çizgisinin dışı
$D(z_0, r)$	$\{z \in \mathbf{C} : \lvert z - z_0 \rvert < r\}$ kümesi
$\overline{D}(z_0, r)$	$\{z \in \mathbf{C} : \lvert z - z_0 \rvert \leq r\}$ kümesi
T	$\{z \in \mathbf{C} : \lvert z \rvert = 1\}$ kümesi (birim çember)
U	$\{z \in \mathbf{C} : \lvert z \rvert < 1\}$ kümesi (açık birim disk)
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
CG	G bölgesinin tümleyeni
$\lvert\Gamma\rvert$	Γ eğrisinin uzunluğu

ÖNSÖZ

Faber operatörlerinin sınır özelliklerini incelediğim bu çalışmam boyunca bana zaman ayıran, engin matematik bilgisini ve deneyimlerini benden esirgemeyen değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır'a teşekkürlerimi sunarım.

Gerek lisans gerekse yüksek lisans eğitimim sürecinde matematiği sevmemde ve kendimi geliştirmemde büyük katkıları olan, değerli hocalarım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov, Doç. Dr. Ali Güven, Doç. Dr. Ramazan Akgün ve Doç. Dr. Özden Koruoğlu'ya teşekkür ederim.

Ayrıca, benim bu noktaya gelmemde büyük emekleri olan, maddi ve manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim sevgili anne ve babama da teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2010

Ramazan Çetintaş

1.ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1 Tanım: Karmaşık düzlemde bağlantılı ve açık bir kümeye **bölge**, bağlantılı ve kapalı bir kümeye de **kontinyum** denir $[1, \mathrm{s}{:}\ 1]$.

1.1.2 Tanım: $[a, b] \subset \mathbf{R}$ olmak üzere bir

$$\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$$

fonksiyonuna karmaşık düzlemde bir **eğri** denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin **başlangıç** ve **bitim noktaları** denir. Bir Γ eğrisi verildiğinde

$\Gamma(a) = \Gamma(b)$ ise Γ'ya **kapalı eğri**; bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ'ya **Jordan eğrisi** ; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ'ya **diferansiyellenebilir eğri**; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için eğer, $\Gamma' \neq 0$ oluyorsa Γ'ya **düzgün eğri** denir$[2, \mathrm{s}{:}\ 126]$.

1.1.3 Tanım: $[a, b] \subset \mathbf{R}$ olmak üzere

$$\Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayı olduğunda

$$t_1 = a < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n+1} = b$$

koşulunu sağlayan $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}$ değerlerinin keyfi bir dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n} |z(t_{n+1}) - z(t_k)|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine **sonlu uzunluklu eğri** denir. Başka bir değişle, Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ ya sonlu uzunluklu eğri denir$[5, \mathrm{s}: 417]$.

1.1.4 Tanım: Γ sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Eğer her $\mathrm{r} > 0$ için

$$\sup\{|\Gamma \cap \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{z}, \mathrm{r})| : \mathrm{z} \in \Gamma\} \leq \mathrm{K}(\Gamma)\mathrm{r}$$

koşulunu sağlayan sadece Γ ya bağlı bir $\mathrm{K}(\Gamma) > 0$ sabiti varsa Γ ya **regüler eğri** denir$[1, \mathrm{s}: 2]$. Burada $|\Gamma \cap \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{z}, \mathrm{r})|$, $\Gamma \cap \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{z}, \mathrm{r})$ nin uzunluğudur.

1.1.5 Tanım: B karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere $\mathrm{f}: \mathrm{B} \to \mathbf{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $\mathrm{z}_0 \in \mathrm{B}$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $\mathrm{f}(\gamma_1)$ ve $\mathrm{f}(\gamma_2)$ resim eğrileri de $\mathrm{f}(\mathrm{z}_0) = \mathrm{w}_0$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir **konform dönüşümdür** denir$[2, \mathrm{s}: 309 - 310]$.

1.1.6 Tanım: Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $\mathrm{D}(\mathrm{z}_0, \delta)$, $\delta > 0$, komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, $\mathrm{z}_0{}'$da **analitiktir** denir$[2, \mathrm{s}: 100]$.

1.1.7 Tanım: Γ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Eğer bir T çemberini Γ'ya resmeden ve T çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa Γ eğrisine **analitik eğri** denir$[3, \mathrm{s}: 20]$.

1.1.8 Teorem(Riemann Konform Dönüşüm Teoremi): $\mathrm{G} \subset \mathbf{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $\mathrm{z}_0 \in \mathrm{G}$ olsun. Bu durumda, G bölgesini

U birim diskine $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır $[4, s{:}\,8]$.

1.1.9 Teorem: $E \subset \mathbf{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda, CE bölgesini $C\overline{U}$ ya

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \Phi^{'}(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek Φ konform dönüşümü vardır$[4, s{:}\,104]$.

1.1.10 Tanım: $R > 1$ olmak üzere, merkezi 0 ve yarıçapı R olan çemberin Φ fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$$\Gamma_R = \{z{:}\,|\Phi(z)| = R, R > 1\} \qquad \text{olsun.}$$

Γ_R eğrilerine E kontinyumunun **seviye çizgileri** denir$[5, s{:}\,34]$.

1.1.11 Teorem(Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Teoremi): G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlandırılmış bir sınırlı bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun.

f , G bölgesinin tümleyeninde yani CG de analitik ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \begin{cases} f(\infty) - f(z), & z \in C\overline{G} \\ f(\infty), & z \in G \end{cases}$$

olur$[6, s{:}\,486]$.

1.1.12 Tanım: G, sınırı bir Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, $z_0 \in \Gamma$ ve Γ nın da z_0 da bir tek değeri var olsun ve de z_0 ın bir komşuluğunda Γ eğrisi normalin her iki yanı üzerinde bulunsun. Bu durumda, eğer G içinde bulunan ve z_0 noktasında son bulan sürekli bir ℓ eğrisinin, z_0 ın bir komşuluğundaki kısmı, köşesi z_0 da bulunan, büyüklüğü π den daha küçük olan ve açıortayı Γ ya içten normal ile çakışan bir açı içinde kalıyorsa bu ℓ eğrisine **açısal yol** denir. Eğer G içinde analitik olan bir f(z) fonksiyonu; z, Γ üzerindeki bir z_0 noktasına Γ içindeki keyfi bir açısal yol boyunca yaklaşırken bir a değerine yaklaşıyorsa, kısaca f(z) açısal yollar boyunca a değerini alır veya f(z), Γ üzerinde açısal limit değerine sahiptir denir[7, s: 428].

1.1.13 Tanım: p bir doğal sayı ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, eğer

$$\Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

fonksiyonu p+1 defa sürekli diferansiyellenebilir ve $z^{(p+1)}(t) \in \mathrm{Lip}\alpha$ ise Γ eğrisi $C(p+1,\alpha)$ sınıfına aittir denir ve $\Gamma \in C(p+1,\alpha)$ şeklinde gösterilir.

1.1.14 Lemma: Eğer $\Gamma \in C(p+1,\alpha)$ ise,

$$\psi(t,w) = \frac{\psi(t) - \psi(w)}{t - w}, \quad |t| > 1, |w| > 1$$

fonksiyonu, $|t| \geq 1$ kapalı bölgesinde t değişkenine göre p defa sürekli diferansiyellenebilirdir;ayrıca bu durumda $|t| \geq 1$ için $\psi_t^{(p)}(t,w) \in \mathrm{Lip}\alpha$ dır ve Lipschitz koşulundaki sabit $|w| = 1$ çemberine bağlı değildir.

1.2 Bazı Fonksiyon Sınıfları

1.2.1 Tanım: Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Γ üzerinde tanımlı ve $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların sınıfı $L^P(\Gamma)$ ile gösterilir [8, s: 1]. Göstermek mümkündür ki, $L^P(\Gamma)$, $\|\,.\,\|_{L^P(\Gamma)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

1.2.2 Teorem(Hölder Eşitsizliği) : Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. $p > 1, q > 1$ ve

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $f \in L^P(\Gamma)$ ve $g \in L^q(\Gamma)$ ise $f.g \in L^1(\Gamma)$ ve

$$\left|\int_{\Gamma} f(x).g(x)dx\right| \leq \left(\int_{\Gamma} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma} |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur[7, s: 388].

1.2.3 Teorem(Minkowski Eşitsizliği): $p > 1$ için $f, g \in L^P(\Gamma)$ ise

$$\left(\int_{\Gamma} |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Gamma} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Gamma} |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur[7, s: 389].

1.2.4 Tanım: U içinde analitik olan ve bu disk içinde

$$f(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\psi(\zeta)}$$

şeklinde iki analitik fonksiyonun oranı formunda yazılabilen fonksiyonların oluşturduğu sınıfa **Nevanlinna Sınıfı** denir ve **N** ile gösterilir[7, s: 369].

N sınıfını karakterize etmenin başka bir yolu şu teoremle verilir.

1.2.5 Teorem: Bir $f(\boldsymbol{\zeta})$ fonksiyonunun N sınıfından olması için gerekli ve yeterli koşul $0 < r < 1$ için

$$\int_{o}^{2\pi} \log^{+}\left|f(re^{i\theta})\right|^{p} d\theta$$

integralinin r den bağımsız bir M sabitiyle sınırlı olmasıdır[7, s: 394].

Burada $\log^{+}$ gösterimi

$$\log^{+} = \begin{cases} \log a : & a \geq 1 \\ 0 & : 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

N sınıfına ait fonksiyonların sınır özellikleri için de şu teorem geçerlidir.

1.2.6 Teorem: Eğer bir $f(\zeta)$ fonksiyonu N sınıfına ait ise bu fonksiyon birim çember üzerinde hemen her yerde bütün açısal yollar boyunca belirli $f(e^{i\theta})$ limit değerlerine sahiptir[7, s: 395].

1.2.7 Tanım: U birim disk olmak üzere; U içinde analitik olan ve $0 < r < 1$ ve $p > 0$ için

$$\int_{0}^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^{p} d\theta$$

integralinin r den bağımsız bir M sayısıyla sınırlı olması özelliğine sahip $f(\boldsymbol{\zeta})$ fonksiyonlarının sınıfına **Hardy Sınıfı** denir ve $\mathbf{H_p}$ ile gösterilir[7, s: 402].

Açık olarak U içinde analitik ve sınırlı olan bütün fonksiyonlar keyfi $p > 0$ H_p sınıfındandır. Bununla beraber $0 < p' < p$ ve bütün $x \geq 0$ için $x^{p'} < 1 + x^{p}$ eşitsizliği sağlandığından $H_p \subset H_{p'}$ kapsamasının gerçeklendiği kolayca görülebilir. Ayrıca , keyfi $p > 0$ ve $x \geq 0$

için

$$\log^{+} x = \frac{1}{p} \log^{+} x^{p} \leq \frac{x^{p}}{p}$$

olduğundan her $p > 0$ için $H_p \subset N$ kapsamasının sağlandığını görürüz. Bu son kapsama dolayısıyla diyebiliriz ki bir $f(\boldsymbol{\zeta}) \in H_p$ fonksiyonu $p > 0$ için birim çember üzerinde hemen her yerde açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahiptir ve bunlar bir $f(e^{i\theta})$ limit fonksiyonu formundadır.

Şimdi daha genel bir fonksiyon sınıfını tanımlayalım. G, kompleks düzlemde sınırı kapalı sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. $\zeta = \chi(z)$ ile G bölgesini konform olarak U ya dönüştüren bir fonksiyonu gösterelim. $z = \omega(\zeta)$, χ nin ters fonksiyonu olsun. Γ_r ile $z = \omega(\zeta)$ dönüşümü altında $|\zeta| = r$ $r< 1$, çemberine karşılık gelen G içindeki eğrileri gösterelim.

1.2.8 Tanım: G içinde analitik olan $0 < r < 1$ ve $p > 0$ için

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz|$$

integralinin r den bağımsız bir M sayısıyla sınırlı olması özelliğine sahip f(z) fonksiyonlarının sınıfına **Smirnov** sınıfı denir ve $\mathbf{E_P(G)}$ ile gösterilir[7, s: 438].

Bu tanımda geçen

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz|$$

integralinde $z = \omega(\zeta)$ dönüşümü yapılarak

$$f(z) \in E_P(G) \Leftrightarrow f(\omega(\zeta))\sqrt[p]{\omega'(\zeta)} \in H_P$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla eğer f(z) fonksiyonu $E^P(G)$ sınıfına ait ise; bu fonksiyon Γ üzerinde hemen her yerde bütün açısal yollar boyunca belirli $f(z')$ limit değerlerine sahiptir; $|f(z')|^P$, Γ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{r\to 1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p\, |dz| = \int_{\Gamma} |f(z')|^p |dz'|$$

olur[7]. $E^P(G)$ sınıfının konform dönüşümden bir bağımsız tanımı da verilebilir.

1.2.9 Tanım: G içinde analitik olan ve G içindeki $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir Γ_n dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz|$$

integralinin n den bağımsız sonlu bir sayıyla sınırlı olması özelliğine sahip fonksiyonların sınıfına **Smirnov sınıfı** denir[7, s: 438].

1.2.10 Teorem: f(z), G içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun Γ üzerinde hemen her yerde açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahip olması ve G içinde her yerde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

Cauchy formülünün sağlanması için gerekli ve yeterli koşul f(z) fonksiyonunun $E_1(G)$ sınıfından olmasıdır. Ayrıca $f(z) \in E_1(G)$ ise Cauchy integral teoremi

$$\int_{\Gamma} f(z')\, dz' = 0$$

şeklinde sağlanır[7, s: 439].

1.2.11 Tanım: Sürekli ve konveks bir $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$M(0) = 0,$$

$$M(x) > 0\,, \quad \forall x > 0\ i\c{c}in\ ,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{M(x)}{x} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona bir **N-fonksiyonu (Young Fonksiyonu)** denir.

M bir N-fonksiyon olsun.

$$N(y) := \max \{ xy - M(x) : x \geq 0\} \quad , \; y \geq 0$$

fonksiyonuna M fonksiyonunun **tümleyen fonksiyonu** denir.

1.2.12 Tanım: $\alpha > 0$ için

$$\int_{\Gamma} M[\alpha|f(z)|]\,|dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların lineer uzayını $L_M(\Gamma)$ ile göstereceğiz. $L_M(\Gamma)$ uzayı

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)} := \sup\left\{ \int_{\Gamma} |f(z)g(z)||dz| : g \in L_N(\Gamma); \rho(g;N) \leq 1 \right\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Burada N, M Young fonksiyonunun tümleyen fonksiyonudur ve

$$\rho(g;N) := \int_{\Gamma} N[|g(z)|]\,|dz|$$

dir. Buradaki $\|f\|_{L_M(\Gamma)}$ normuna **Orlicz normu** ve $L_M(\Gamma)$ Banach uzayına da **Orlicz uzayı** denir.

1.2.13 Teorem (Hölder Eşitsizliği) : $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, M bir Young fonksiyonu ve N bunun tümleyen fonksiyonu olsun. $\forall f \in L_M$ ve $\forall g \in L_N$ için

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_M \|g\|_N$$

olur.

1.2.14 Tanım: $M : [-\infty,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ Young fonksiyonu olmak üzere bir

U birim diskinde analitik ve r ye göre düzgün olarak

$$\int_0^{2\pi} M\left[\left|f(re^{it})\right|\right] dt < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına **Hardy-Orlicz** sınıfı denir ve $\mathbf{H_M}$ ile gösterilir.

H_M sınıfından olan f fonksiyonlarının $|t| = 1$ üzerinde hemen her yerde açısal sınır değerleri vardır ve $f \in L_M(|t| = 1)$ dir.

H_M sınıfına ait bir f fonksiyonunun normu;

$$\|f\|_{H_M} = \sup\left\{ \int_{|t|=1} |f(t)g(t)||dt| : g \in L_N(|t| = 1), \int_{|w|=1} N[|g(w)|]\,|dw| \leq 1 \right\}$$

şeklindedir. Bu norma göre H_M bir Banach uzayıdır.

1.2.15 Tanım: U, $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ birim diskinin iç bölgesi olsun. G , kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olan Γ eğrisinin iç bölgesi olsun. Γ_r ise; $r < 1$ için seviye çizgileri olsun ve M de bir Young fonksiyonu olsun.

G de analitik olan ve r ye göre düzgün olarak

$$\int_{\Gamma_r} M[|f(z)|]\,|dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına **Smirnov-Orlicz** sınıfı denir ve $\mathbf{E_M(G)}$ ile gösterilir.

Smirnov-Orlicz sınıfı bilinen Smirnov sınıfının genelleşmiş bir halidir.

Özel olarak eğer $M(x) := x^p$, $1 < p < \infty$ olursa bu durumda Smirnov-Orlicz sınıfı $E_M(G)$, Smirnov sınıfı $E_P(G)$ ile çakışır.

$E_M(G) \subset E^1(G)$ olduğundan $E_M(G)$ sınıfındaki her fonksiyon, Γ üzerinde hemen her yerde açısal sınır değerlerine sahiptir ve sınır değer fonksiyonu da $L_M(\Gamma)$ ya aittir. Bu yüzden $E_M(G)$ normu;

$\|f\|_{E_M(G)} := \|f\|_{L_M(\Gamma)}$, $f \in E_M(G)$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{E_M(G)} = \sup\left\{\int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| : g \in L_N(\Gamma), \int_\Gamma N[|g(z)|]\,|dz| \leq 1\right\}$$

şeklindedir. Bu norma göre $E_M(G)$ bir Banach uzayı olur.

1.3 Cauchy Tipli İntegrallerin Limit Değerleri

1.3.1 Tanım: Γ , kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun.

$$\int_\Gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

Cauchy tipli integralini göz önüne alalım. $z \notin \Gamma$ olduğunda bu integral bir analitik fonksiyon tanımlar. Şimdi Γ üzerinde bulunan bir z_0 noktasını göz önüne alalım. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$\Gamma_\varepsilon := \Gamma - \overline{D}(z_0, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun **Cauchy Singüler İntegrali** denir ve

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

veya

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \frac{1}{2\pi i} (P.V.) \int_\Gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem,Cauchy integralinin Γ üzerindeki limit değerleriyle, Cauchy singüler integralinin varlığı arasında bir ilişki kurar.

1.3.2 Teorem(Sokhotskii): Eğer Cauchy integrali Γ üzerinde hemen her yerde Γ nın bir tarafı üzerinde bulunan bütün açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve Cauchy integrali Γ nın diğer tarafı üzerinden Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcutsa Cauchy integrali Γ nın her iki tarafı üzerinden de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir.Burada

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'-z}dz' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \pm \frac{1}{2}f(z_0)$$

formülü Γ üzerinde hemen her yerde sağlanır. Bu formülde sol taraftaki limit açısal yollar boyunca alınır. Sağ tarafta pozitif işaret açısal yol eğrinin solunda; negatif işaret ise yol eğrinin sağında kaldığı zaman alınır.

2-FABER POLİNOMLARI

2.1 Faber Polinomlarının Tanımı

Kompleks düzlemde Γ ile sınırlı, basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. D, $z = \infty$ noktasını içeren,$\overline{G} = G \cup \Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni olan basit bağlantılı bölge olsun. Riemann Konform Dönüşüm Teoremi'ne göre D bölgesini, $|w| > 1$ bölgesine konform ve ünivalent olarak dönüştüren bir $w = \Phi(z)$ konform dönüşümü vardır ve

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \Phi^{'}(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \gamma > 0 \tag{2.1}$$

koşulları altında Φ konform dönüşümü tektir.

Bu koşul gösterir ki D böldesinde $z = \infty$ noktası dışında analitik olan $w = \Phi(z)$ fonksiyonu $z = \infty$ noktasında basit bir kutba sahiptir. Bu yüzden Φ fonksiyonunun $z = \infty$ noktasının komşuluğunda Laurent açılımı vardır ve

$$\Phi(z) = \gamma.z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \cdots$$

biçimindedir.

Not: $\Phi(z)$ nin açılımında pozitif kuvvetli bir tek z olmalıdır.Aksi halde $z \to \infty$ iken

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \infty$$

olur.

Negatif olmayan bir n tamsayısı için;

$$\Phi^n(z) = \left(\gamma.z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \cdots\right)^n$$

$$= \gamma^n z^n + a_{n-1}{}^{(n)}.z^{n-1} + a_{n-2}{}^{(n)}.z^{n-2} + \cdots + a_1{}^{(n)}z + a_0{}^{(n)}$$

$$+ \frac{b_1{}^{(n)}}{z} + \frac{b_2{}^{(n)}}{z^2} + \cdots + \frac{b_k{}^{(n)}}{z^k} + \cdots \tag{2.2}$$

olduğu görülmektedir. Burada negatif üslü sonsuz terim vardır. Burada

$$F_n = \gamma^n z^n + a_{n-1}{}^{(n)}.z^{n-1} + a_{n-2}{}^{(n)}.z^{n-2} + \cdots + a_1{}^{(n)}z + a_0{}^{(n)} \tag{2.3}$$

polinomuna G bölgesi için n.dereceden **Faber Polinomu** denir.

(2.3) ifadesindeki z nin negatif kuvvetlerini içeren terimlerin toplamı için;

$$-E_n(z) = \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \cdots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \cdots$$

gösterimini kullanacağız.

Sonuç olarak sonsuzun delinmiş komşuluğunda geçerli

$$\Phi^n(z) = F_n(z) - E_n(z)$$

formülü yazılabilir. Buradan da

$$E_n(z) = F_n(z) - \Phi^n(z)$$

yazılabilir. $\Phi(z)$ sadece ∞ nun delinmiş komşuluğunda değil, G nin tümleyeninde her yerde tanımlıdır. $F_n(z)$ bir polinomdur. Dolayısıyla son yazdığımız eşitlik G nin tümleyenindeki sınırsız bileşenin her yerinde tanımlıdır.

2.2 Üreteç Fonksiyonu

$z = \psi(w)$ fonksiyonu $w = \Phi(z)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. Yani, $z = \psi(w)$ fonksiyonu $\psi : |w| > 1 \to C\overline{G}$ şeklinde tanımlıdır ve bu fonksiyon konformdur.

$\Phi : C\overline{G} \to |w| = R > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$ ve $\Phi'(\infty) = \gamma > 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa;

$\psi(\infty) = \infty$ ve $\psi'(\infty) = \frac{1}{\Phi'(\infty)} = \frac{1}{\gamma} = \beta > 0$ elde edilir. Ayrıca bu fonksiyon

$$z = \psi(w) = \beta w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{w^k} + \cdots, |w| > 1$$

şeklinde seri açılımına sahiptir.

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi(\xi)]^n}{\xi - z}\, d\xi, \qquad z \in G_r$$

nin integralinde $\xi = \psi(t)$ dönüşümü yapılırsa

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} t^n \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt, \qquad z \in G_r$$

Burada $z \in G_r$ ve $|t| > R$ için $A(t,z) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ denilirse son durumda ;

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} t^n A(t,z)\, dt$$

elde edilir.

Sonuncu eşitlikten de görüşdüğü gibi $F_n(z)$ Faber Polinomları, $A(t,z)$ fonksiyonlarının $t = \infty$ noktasının delinmiş komşuluğundaki Laurent açılımının Laurent katsayılarıdır.

Dolayısıyla;

$$A(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad z \in G_r \;,\quad |t| > R$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi $F_n(z)$ polinomları , $A(t,z)$ fonksiyonlarının yardımıyla üretilmiş oldu. Buradaki $A(t,z)$ fonksiyonuna Faber polinomunun **üreteç fonksiyonu** denir.

Şimdi de bazı önemli kümelerin Faber polinomlarını verelim.

2.2.1 Örnek: G bölgesi yerine birim disk olması durumunda, $\Phi(z) = z$ ve buna karşılık da $\psi(t) = t$ dönüşümleri geçerlidir. Bunlardan hareketle;

$$\Phi(t,z) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{t}} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{t^{n+1}}$$

elde edilir. Öyleyse birim disk durumunda $F_n(z) = z^n$ olur.

2.2.2 Örnek: Eğer G bölgesi $|z - z_0| < R_0$ diski ise, bu diskin dışının $|w| > 1$ bölgesine , $\Phi(\infty) = \infty$ ve $\Phi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü

$$w = \Phi(z) = \frac{z - z_0}{R_0}$$

dir. Bu durumda her n doğal sayısı için

$$F_n(z) = \frac{1}{R_0}(z - z_0)^n$$

olur. Görüldüğü gibi $|z - z_0| < R_0$ diski için Faber polinomları, konform dönüşüm fonksiyonunun negatif olmayan tam kuvvetleridir ve $E_n(z) \equiv 0,\ n = 0,1,2, \ldots$

2.2.3 Örnek: $K = [-1,1]$ olsun. Bu durumda K kontinyumunun dışının $|w| > 1$ bölgesine, $\Phi(\infty) = \infty$ ve $\Phi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ koşulları altında konform dönüşümü

$$w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

şeklindedir. Karekök fonksiyonunun

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z}\sqrt{z^2 - 1} = 1$$

koşulunu sağlayan dalını seçtiğimizde Φ fonksiyonunun tersi

$$z = \psi(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \quad |w| > 1$$

Zhukovskii fonksiyonu olur. Bu fonksiyonu

$$A(t, z) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}}, \quad z \in G_R, \quad |t| > R$$

formülünde yerine yazarsak

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 - 2tz + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}}$$

olur. Buradan

$$\frac{t^2 - 1}{(t^2 - 2tz + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^n}, \quad |t| > R, |\Phi(z)| < R$$

elde edilir. $t = \frac{1}{w}$ dersek

$$\frac{1 - w^2}{(1 - 2wz + w^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n F_n(z), \quad |w| < 1$$

olduğu görülür.

Diğer yandan ortogonal polinomlar teorisinde ispatlanmıştır ki ;

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ biçiminde tanımlı Chebyshev polinomları için

$$\frac{1 - w^2}{(1 - 2wz + w^2)} = T_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} w^n T_n(z)$$

açılımı geçerlidir. Böylece

$F_0(z) = T_0(z)$ ve $F_n(z) = 2\, T_n(z), \quad n \geq 1$

elde edilir.

2.2.4 Örnek: $R > 1$ olmak üzere düzlemde odakları ± 1, yarı eksenleri

$$a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$$

olan elips verilsin. Bu elipsin denklemi

$$z = \frac{1}{2}\left(Re^{i\theta} + \frac{1}{Re^{i\theta}}\right), \qquad 0 < \theta \leq 2\pi$$

şeklinde yazılabilir. Böylece konform dönüşüm fonksiyonu

$$z = \psi(w; R) = \frac{1}{2}\left(Rw + \frac{1}{Rw}\right),$$

$$w = \Phi(z; R) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

formülleri ile tanımlanabilir. Bu elips için Faber polinomları

$$F_n(z; R) = \frac{1}{R^n} F_n(z) = \frac{2}{R^n} T_n(z), \qquad n \geq 1$$

şeklinde bulunur.

2.2.5 Örnek: K kontinyumu

$$\left|z^p + a_{p-1}z^{p-1} + a_{p-2}z^{p-2} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \leq a$$

koşulunu sağlayan noktalar kümesinin belirlediği p odaklı lemniscate olsun.

Bu durumda konform dönüşüm fonksiyonu

$$w = \Phi(z) = \frac{z}{a}\left(1 + \frac{a_{p-1}}{z} + \frac{a_{p-2}}{z^2} + \cdots \frac{a_1}{z^{p-1}} + \frac{a_0}{z^p}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad z \in D$$

dir. Kökün temel değerini alırsak,yani

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(1 + \frac{a_{p-1}}{z} + \frac{a_{p-2}}{z^2} + \cdots \frac{a_1}{z^{p-1}} + \frac{a_0}{z^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 1$ olacak şekilde;

$$\Phi^{mp}(z) = \frac{1}{a^{mp}}\left(z^p + a_{p-1}z^{p-1} + a_{p-2}z^{p-2} + \cdots + a_1 z + a_0\right)^m, \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$F_{mp}(z) = \frac{1}{a^{mp}}\left(z^p + a_{p-1}z^{p-1} + a_{p-2}z^{p-2} + \cdots + a_1 z + a_0\right)^m, \quad m = 1,2,\ldots$$

olur.

Bu örnekte m=1,2,… iken mp mertebeli bütün Faber polinomları hesaplanır. Özellikle eğer iki odaklı $|z^2 - 1| \leq 1$ lemniscate verilirse

$F_{2n}(z) = (z^2 - 1)^n$elde edilir. Üstelik

$$\Phi(z) = z\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^3} - \frac{1}{16z^5} + \cdots$$

formülüne dayanarak küçük derecelerin tek Faber polinomları hesaplanabilir. Örneğin

$$F_1(z) = z, \qquad F_1(z) = z^3 - \frac{3}{2}z$$

elde ederiz.

3- FABER OPERATÖRLERİ

3.1. Faber Operatörlerinin Tanımı

G, bir Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun. Ve $\varphi(t)$ fonksiyonu $|t| < 1$ diskinde analitik ve $|t| = 1$ çemberi üzerinde hemen her yerde açısal sınır değerlerine sahip olsun.

$\varphi(\Phi(\xi))$ fonksiyonunun Γ üzerinde integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Yani;

$$\int_{\Gamma} |\varphi(\Phi(\xi))|\, d\xi = \int_{|t|=1} |\varphi(t)|\, |\psi'(t)||dt| < \infty \tag{3.1}$$

koşulunun sağladığını kabul edelim. ($\Phi(\xi) = t$ dönüşümü yaptık.)

Bu durumda

$$F_0(z,\varphi) = f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G \tag{3.2}$$

Cauchy - tipli integralini gözönüne alabiliriz. Eğer $\psi'(t)$ türevi $|t| > 1$ bölgesinde H_2 sınıfından ise (3.1) koşulu $|t| < 1$ bölgesinde H_2 sınıfından olan herhangi bir $\varphi(t)$ fonksiyonu için sağlanır.

(3.1) deki integrale Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak;

$$\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\, |\psi'(t)||dt| \le \left(\int_{|t|=1} |\varphi(t)|^2 |dt|\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_{|t|=1} |\psi'(t)|^2 |dt|\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağındaki her iki ifade de integrallenebilir olduğundan bu iki integralin çarpımı da integrallenebilir ve dolayısıyla sonludur.Yani;

$$\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\, |\psi'(t)||dt| < \infty$$

olur. Dolayısıyla bu koşullar altında (3.2) formülü her $\varphi(t) \in H_2$ fonksiyonuna G bölgesinde analitik bir $f(z)$ fonksiyonu karşılık gelir. Böylece H_2

fonksiyonlarının kümesi üzerinde bir integral operatörü tanımlanır. Bu operatöre G bölgesi için **Faber Opreatörü** denir. Bu operatörü

$$F_0 = F_0(z, \varphi)$$

ile gösterirsek (3.2) eşitliğini

$$f(z) = F_0(z, \varphi), \quad z \in G \tag{3.3}$$

biçiminde de ifade edebiliriz.

Cauchy-tipli integraller Γ nın içinde bir analitik fonksiyon belirtir.

$$F_0 : H_2 \to A(G)$$

($A(G)$: G de analitik fonksiyonlar uzayı)

3.2 Faber Operatörlerinin Bazı Özellikleri

1- Bir G bölgesi için Faber operatörü $|t| < 1$ diskinde analitik fonksiyonların bir kümesini, G bölgesinde analitik fonksiyonların bir kümesine dönüştürür.

2- Faber operatörünün temel özelliklerinden biri,bu operatörün birim diskte tanımlı her polinomu bir G bölgesinde tanımlı bir polinoma dönüştürmesidir.

Ayrıca (3.2) deki Faber operatörü $\varphi(\Phi(\xi))$ dağıtım fonksiyonu ile birlikte bir Cauchy-tipli integraldir. Bu yüzden Cauchy operatörünün tüm özellikleri, (3.2) deki operatör için de sağlanır.

3- Bir G bölgesindeki (3.2) deki Cauchy Tipli integrali gibi aynı $\varphi(\Phi(\xi))$ dağıtım fonksiyonu ile $z \in \mathrm{Ext}\Gamma := D$ koşulu altında bir Cauchy Tipli integral göz önüne alınabilir. Yani;

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D \tag{3.4}$$

olur. D bölgesinde tanımlanan bu Cauchy Tipli integrali (3.2) deki Cauchy tipli integralinin bütün özelliklerine sahiptir ve $f_1(\infty) = 0$ dır.

4- Eğer (3.1) koşulu sağlanıyorsa, f(z) ve $f_1(z)$ fonksiyonlarının Γ üzerinde hemen her yerde açısal sınır değerleri için Sokhotskii formülü geçerlidir.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z_0} d\xi \pm \frac{1}{2}\varphi(\Phi(z_0)).$$

Burada

$z \in G$ ise $\quad f(z_0) = S_\Gamma\varphi(\Phi(z_0)) + \frac{1}{2}\varphi(\Phi(z_0)),$

$z \in D$ ise $\quad f_1(z_0) = S_\Gamma\varphi(\Phi(z_0)) - \frac{1}{2}\varphi(\Phi(z_0)),$

olur ve Γ üzerinde hemen her yerde

$f(z_0) - f_1(z_0) = \varphi\big(\Phi(z_0)\big)$, yani

$f(z_0) = \varphi\big(\Phi(z_0)\big) + f_1(z_0)$

elde edilir.

3.3 Faber Operatörlerinin Sınır Özellikleri

Öncelikle Γ eğrisinin dışında Faber tipli integralin sınır özelliklerini inceleyelim.

$\varphi(\Phi(\xi))$ dağıtım fonksiyonu ve $z \in \mathrm{Ext}\Gamma := D$ olmak üzere

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi\big(\Phi(\xi)\big)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D \tag{3.4}$$

ile göstermiştik. Bu formülde $z = \psi(w)$ dönüşümü yapalım. Ayrıca $\xi = \psi(t)$ dir.

$\Phi^{-1} = \psi$, $\xi = \psi(t) \Rightarrow d\xi = \psi'(t)dt$ olur. Elde edilenleri yukarıdaki integralde yerine yazarsak;

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi\big(\Phi(\xi)\big)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\varphi(t).\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)\left[\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)} - \frac{1}{t-w}\right] dt \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)F(t,w)\, dt \quad \text{olur.}$$

Burada

$$F(t,w) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)} - \frac{1}{t-w}\,, \qquad |t| \geq 1\,, |w| > 1. \tag{3.6}$$

(3.5) ifadesinde $\varphi(t)$ fonksiyonu diskte analitik olduğundan Taylor açılımı vardır.

Ayrıca $\left|\frac{t}{w}\right| < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{t-w} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{w^{k+1}} \quad \text{olur.} \quad \text{Dolayısıyla,}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)\frac{1}{t-w} dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{w^{k+1}}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\left(\frac{1}{w} + \frac{t}{w^2} + \frac{t^2}{w^3} + \cdots\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \left(\frac{a_0}{w} + \frac{a_0 t}{w^2} + \frac{a_0 t^2}{w^3} + \cdots + \frac{a_1 t}{w} + \frac{a_1 t^2}{w^2} + \frac{a_1 t^3}{w^3} + \cdots\right) dt = 0$$

şeklindedir.

Çünkü $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} t^n\, dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 1, & n = -1 \end{cases}$ dir.

$$\psi(t,w) := \frac{\psi(t)-\psi(w)}{t-w}, \qquad |t|>1\,, |w|>1$$

gösterimini kullanarak (3.6) fonksiyonunu $\psi(t,w)$ ile çarpıp bölersek;

$$F(t,w) = \frac{\left(\psi'(t) - \frac{\psi(t)-\psi(w)}{t-w}\right)\frac{1}{t-w}}{\frac{\psi(t)-\psi(w)}{t-w}} = \frac{\psi'_t(t,w)}{\psi(t,w)} \tag{3.7}$$

gösterimini elde ederiz.

$\Gamma \in C(p+2,\alpha)$ olsun. Bu durumda ispatlanmıştır ki, $\psi(t,w) \neq 0$ ve $|t| \geq 1\,, |w| \geq 1$ kapalı bölgesinde w değişkenine göre p+1 defa sürekli türevlenebilir.

$\psi'_t(t,w)$ türevi , $|t| \geq 1\,, |w| \geq 1$ bölgesinde w'ya göre p defa türevlenebilir.

(3.7) deki fonksiyon da benzer özelliklere sahiptir. Dolayısıyla eğer

$\varphi(t) \in H_1(|t|<1)$ ise;

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \varphi(t)\, F_w{}^{(p)}(t,w)dt\,, \quad |w| \geq 1 \tag{3.8}$$

integrali $|w| \geq 1$ için düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla (3.5) ile ifade ettiğimiz $f_1(z)$ fonksiyonu $\overline{D}$ kapalı bölgesinde p defa sürekli diferansiyellenebilirdir. Ayrıca $\varphi(t)$ fonksiyonu, $|t|<1$ diskinde yalnızca H_1 sınıfındandır. Yine φ ve Γ üzerine başka koşullar koyularak da (3.8) integrali düzgün yakınsak yapılabilir.

Örneğin, eğer Γ bir analitik eğri ise (3.6) fonksiyonu $|w| \geq 1$ ve $|t| \geq 1$ kapalı bölgesinde analitiktir. Dolayısıyla (3.5) eşitliğinin sağındaki integralde $|t|=1$ yerine $|t|=\rho$ $(\rho<1)$ yazılabilir. (Analitikliğinin sonucu)

Bu koşul altında $f_1(z)$ fonksiyonu $\overline{D}$ kapalı bölgesinde analitiktir.

Sonuç olarak bir D bölgesinde Faber integralinin sınır özellikleri tamamiyle Γ nın düzgünlük derecesine bağlıdır. Ve $\varphi(t) \in H_1$ ($|t| < 1$) koşulu altında φ fonksiyonunun özelliklerinden bağımsızdır.

Şimdi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z} d\xi, \qquad z \in G \tag{3.9}$$

fonksiyonunun sınır özelliklerine bakalım.

$$f(z) = \varphi[\Phi(z)] + f_1(z), \quad z \in \Gamma \tag{3.10}$$

Sokhotskii formülüne göre , Γ eğrisi yeterince düzgün olduğunda f(z) nin özelliklerinin $|t| = 1$ çemberi üzerinde $\varphi(t)$ nin özelliklerine benzer olduğu görülür.

Örneğin; eğer $\varphi(t)$ fonksiyonu $|t| = 1$ çemberi üzerinde sürekli ise, f(z) fonksiyonu da Γ eğrisi üzerinde süreklidir.

Eğer $\varphi(t)$ fonksiyonu $|t| = 1$ çemberi üzerinde p defa sürekli diferansiyellenebilir ise, f(z) fonksiyonu da Γ eğrisi üzerinde p defa sürekli diferansiyellenebilirdir.

Benzer şekilde $\varphi(t) \in L_p(|t| = 1) \Rightarrow f(z) \in L_p(\Gamma)$ olur.

Bütün bu iddialar (3.10) dan görülür. Eğer, Γ eğrisi yeterince düzgün olursa, $f_1(z)$ fonksiyonu $\overline{D}$ kapalı bölgesinde uygun mertebeden sürekli diferansiyellenebilirdir.

Ayrıca (3.9) ile ifade ettiğimiz Faber Operatörü bir $\varphi(t) \in H_1$ fonksiyonunu, G bölgesinde analitik bir f(z) fonksiyonuna dönüştürür.

Kolayca gösterilebilir ki, şayet Γ eğrisi yeterince düzgün olursa,

$f(z) \in E_1(G)$ olur. Gerçekten, öyle koşullar kabul edelim ki; bu koşullar altında $f_1(z)$ fonksiyonu $\overline{D}$ kapalı bölgesinde sürekli olsun. Buradan (3.10) formülünden , $z \in G$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi) - f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral Formülü gereğince

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$ olur. Öyleyse;

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi) - f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ dir.

Böylece f(z) fonksiyonu, Γ eğrisi üzerindeki açısal sınır değerleri kullanılarak bir Cauchy integrali ile gösterilebilir. Bu f(z) nin $E_1(G)$ sınıfından olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, ispatlanmıştır ki; $1 < p < \infty$ için;

$\varphi(t) \in H_p \Rightarrow f(z) \in E_p(G)$ ve $F : H_p \to E_p$ dir.

Tüm bu sonuçlar da gösteriyor ki,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G$$

Faber operatörü $|t| < 1$ diskinde analitik bir $\varphi(t)$ fonksiyonunu, G deki analitik bir f(z) fonksiyonuna sınır özelliklerini koruyarak dönüştürür. Ayrıca sınır özellikleri noktasal (yerel) olarak da korunur. Yani örneğin, $\varphi(t)$ fonksiyonu çember üzerinde bir t_1 noktasında sürekli ise, bu durumda f(z) fonksiyonu da benzer bir nokta olan $z_1 = \varphi(t_1)$ noktasında süreklidir. Ve eğer $\varphi(t)$ fonksiyonu bir t_2 noktasında sınırlı değilse, f(z) fonksiyonu da $z_2 = \varphi(t_2)$ noktasında benzer özelliğe sahiptir.

Şimdi de

$$\varphi(w) = \left(F_0^{-1} f\right)(w) = f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f[\psi(t)]}{t - w} dt, \quad |w| < 1 \qquad (3.11)$$

ters Faber operatörünü inceleyelim. Burada $f(z) \in E_1(G)$ ve Γ sonlu uzunluklu ve düzgünlüğün bir koşulunu sağlayan bir eğridir. Bu koşullar altında (3.11) operatörü, G deki analitik f(z) fonksiyonunu $|w| < 1$ diskinde analitik olan $\varphi(w)$ fonksiyonuna sınır özelliklerini koruyarak dönüştürür.

Bu operatör aşağıdaki hipotez altında da vardır;

$$\int_{|t|=1} |f[\psi(t)]||dt| = \int_{\Gamma} |f(\xi)||\Phi'(\xi)||d\xi| < \infty$$

Eğer $|w| > 1$ ve Γ eğrisi yeterince düzgün ise, (3.5) formülüne benzer bir sonuç elde ederiz ki bu da;

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f[\psi(t)]}{t-w} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} f[\psi(t)] F(t,w)\, dt \qquad (3.12)$$

dir. Bunların hepsi (3.5) in sağındaki integralden söylenebilir.

Göstermek mümkündür ki (3.11) operatörü, (3.9) operatörünün tersidir.

(3.10) formülünde $z = \psi(t)$ değişken değiştirme yapalım. Öyleyse;

$$f\big(\psi(t)\big) = \varphi(t) + f_1\big(\psi(t)\big), \quad |t| = 1 \qquad (3.13)$$

geçerlidir. Bu eşitlikte $f_1\big(\psi(t)\big)$ fonksiyonu $|t| > 1$ bölgesinde analitiktir ve Γ eğrisi

üzerinde bazı hipotezler altında H_1 sınıfındandır. (3.13) eşitliğindeki $f_1\big(\psi(t)\big)$ değerini, (3.11) deki integralde yerine koyarsak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t) + f_1\big(\psi(t)\big)}{t-w} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-w} dt = \varphi(w) \quad , |w| < 1$$

elde edilir. Buradan da elde edilir ki (3.9) ve (3.11) operatörleri karşılıklı olarak terstirler. Bu da (3.9) ile ifade ettiğimiz Faber operatörünün, $|t| < 1$ diskinde analitik bir $\varphi(t)$ fonksiyonunu, G de analitik bir f(z) fonksiyonuna dönüştürmesi anlamındadır ve (3.11) operatörü de f(z) fonksiyonunu $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonuna dönüştürür. Sonuç olarak ters Faber operatörünü F_1 ile gösterecek olursak bu operatör şöyle tanımlanır:

$$F_1 : E_P(G) \rightarrow H_P(|t| < 1).$$

Lineerlik özelliğinden, Faber operatörü analitik fonksiyonların uzayları arasında bir izomorfizm oluşturur. Ve eğer operatör normu sınırlı ise, bu izomorfizm sadece cebirsel değil aynı zamanda topolojiktir.

3.4 Faber Operatörlerinin Normlarının Değerlendirmeleri

Varsayalım ki, belirlenen koşullar altında , Γ nın dışında bir Faber tipli integralle tanımlanan $f_1(z)$ fonksiyonu, kapalı $\overline{D}$ bölgesinde sürekli olsun. Bu durumda

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \varphi(t) \left[\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - \psi(w)} - \frac{1}{t-w}\right] dt$$

formülü $z = \psi(w)$ için

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \varphi(t)\, F(t, w) dt \quad , |w| \geq 1 \tag{3.14}$$

şeklini alır. Bu eşitlikten, $f_1(z)$ değerini (3.10) daki Sokhotskii formülünde yerine yazarsak,

$$f\big(\psi(w)\big) = \varphi(w) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \varphi(t)\, F(t, w) dt \quad , \qquad |w| = 1 \tag{3.15}$$

elde ederiz.

Şimdi de Faber operatörünü düşünelim. Belirli fonksiyon uzayları için Faber operatörü

$$f(z) = F_0(z,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\Phi(\xi))}{\xi - z} d\xi, \qquad z \in G \tag{3.16}$$

şeklindedir.

Şimdi (3.16) daki Faber operatörünün ,$H_p(|t| < 1)$ fonksiyonlar kümesini $p > 1$ için $E_p(G)$ fonksiyonlar kümesine dönüştürmesi durumunu düşünelim. Daha önceden

$$f(\psi(w)) = \varphi(w) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)\, F(t,w)dt \ , \qquad |w| = 1$$

eşitliğini elde etmiştik. Bu eşitlikte $z = \psi(w)$ dönüşümü yapalım. Öyleyse;

$$f(z) = \varphi(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)\, F(t,\Phi(z))dt \tag{3.17}$$

elde edilir. Buradan

$$|f(z)| = \left|\varphi(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)\, F(t,\Phi(z))dt\right|$$

$$\Rightarrow |f(z)|^p = \left|\varphi(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t)\, F(t,\Phi(z))dt\right|^p$$

Şimdi de her iki tarafı Γ üzerinden integralleyelim;

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^p|dz| = \int_{\Gamma} \left|\varphi(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} [\ \varphi(t)].F(t,\Phi(z))\ dt\right|^p |dz|$$

$$\left[\int_{\Gamma} |f(z)|^{\,p}\, |dz|\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\Gamma} \left|\varphi(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} [\ \varphi(t)].F(t,\Phi(z))\ dt\right|^p |dz|\right]^{\frac{1}{p}}$$

Yukarıdaki eşitliğe önce Minkowski eşitsizliğini uygulayalım; bu durumda

$$\left[\int_{\Gamma} |f(z)|^{p} |dz|\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Gamma} \left|\varphi\big(\Phi(z)\big)\right|^{p} |dz|\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1} |\varphi(t)| \left|F\big(t,\Phi(z)\big)\right| |dt|\right]^{p} |dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Şimdi de eşitsizliğin sağındaki ikinci integrale Hölder eşitsizliğini uygulayalım;

$$\left[\int_{\Gamma} |f(z)|^{p} |dz|\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Gamma} \left|\varphi\big(\Phi(z)\big)\right|^{p} |dz|\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left[\left(\int_{|t|=1} |\varphi(t)|^{p}|dt|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|t|=1} \left|F\big(t,\Phi(z)\big)\right|^{q}|dt|\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{p} |dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$\Phi(z) = w$ dönüşümü yapalım. Öyleyse ;

$\Phi'(z)dz = dw \;\Rightarrow\; dz = \frac{1}{\Phi'(z)} dw$ olur. $\Phi = \psi^{-1}$ olduğundan

$dz=\psi'(w)dw$ olur. Buradan da $|dz| = |\psi'(w)|\,|dw|$ elde edilir.

Elde ettiğimiz bu ifadeleri yukarıdaki eşitsizliğin sağındaki ilk integralde yerine yazarsak;

$$\left[\int_{\Gamma} |f(z)|^{p} |dz|\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{|w|=1} \left|\varphi(w)\right|^{p} |\psi'(w)|\,|dw|\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{|t|=1} |\varphi(t)|^{p}|dt|\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1} \left|F\big(t,\Phi(z)\big)\right|^{q}|dt|\right]^{\frac{p}{q}} |dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Burada $m_0(\Gamma) = \sup_{|w|=1} |\psi'(w)|$ ve

$$M_{pq}(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1}\left|F\big(t,\Phi(z)\big)\right|^{q}|dt|\right]^{\frac{p}{q}}|dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

denilirse son durumda;

$$\left[\int_{\Gamma}|f(z)|^{p}\,|dz|\right]^{\frac{1}{p}} \le \|\varphi\|_{Hp}[m_0(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} + \|\varphi\|_{Hp}M_{pq}(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \|f\|_{Ep} \le \|\varphi\|_{Hp}[m_0(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} + \|\varphi\|_{Hp}M_{pq}(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \|f\|_{Ep} \le \|\varphi\|_{Hp}\left([m_0(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} + M_{pq}(\Gamma)\right)$$

elde edilir. Öyleyse Faber operatör normu şu şekilde değerlendirilmiş olur:

$$\|F_0\| \le [m_0(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} + M_{pq}(\Gamma)$$

$F_0\ :\ H_P(|t| < 1) \to E_P(G)$.

Benzer şekillerde, Faber operatör normlarının değerlendirmeleri, bu operatörlerin tanım ve değer fonksiyon uzayları değiştirilerek de yapılabilir. Örneğin Faber operatörü için

$B(|t| < 1) \to E_P(G)$ veya

$H_P(|t| < 1) \to B(G)$ veya

$H_P(|t| < 1) \to E_q(G)$ veya başka durumlar da olabilir. Bu ve benzeri durumlarda da değerlendirmeler çoğaltılabilir. Bunlara ek olarak ters Faber operatörleri için de benzer değerlendirmeler yapılabilir.

Ayrıca Faber operatörünün sınırlı bir norma sahip olması durumunda, analitik fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım için yapılacak değerlendirmeler veya elde edilecek çeşitli sonuçlar, birim diskten, yeterince düzgün bir eğri ile sınırlı keyfi bir bölge üzerine taşınabilir.

3.4.1 Teorem: Birim diskte tanımlı, derecesi n yi aşmayan (φ_n) polinomlarının, F_0 Faber operatörü altında görüntüleri G bölgesinde tanımlı derecesi n yi aşmayan (P_n) polinomları olsun. Bu durumda

$$\|f - P_n\|_{Ep(G)} \le \|F_0\|_{Hp} \cdot \|\varphi - \varphi_n\|_{Hp}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$|t| < 1$ diskinde analitik fonksiyonların kümesini düşünelim.

Bir $\varphi(t) \in H_p$ $(|t| < 1)$ için $\varphi(t)$'ye yakınsayan bir $\{\varphi_n(z)\}$ polinomlar dizisi vardır.

(3.16) daki Faber operatörü t değişkenli n. dereceden $\varphi_n(t)$ polinomunu, n.dereceden z değişkenli $P_n(z)$ polinomuna dönüştürür. Ayrıca f(z) fonksiyonu eğer Γ eğrisi yeterince düzgün ise (3.10) daki Sokhotski formülü gereğince Γ üzerinde süreklidir.

(3.15) numaralı formülü hem f(z) hem de $P_n(z)$ için ele alırsak

$$f(z) - P_n(z) = \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z))$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}[\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt \qquad (3.18)$$

elde edilir.

Varsayalım ki Faber operatörü H_p $(|t| \le 1)$ sınıfından sınırlı bir norma sahip olsun. Bu, Γ eğrisinin yeterince düzgün olması durumunda olur. Bu durumda $\|F_0\|$ Faber operatörünün normu sınırlı olur.

Şimdi (3.18) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alalım.

$$|f(z) - P_n(z)| =$$
$$\left|\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}[\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt\right|$$

$$\Rightarrow |f(z) - P_n(z)|^p =$$

$$\left| \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} [\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt \right|^p$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} |f(z) - P_n(z)|^p\,|dz| =$$

$$\int_{\Gamma} \left| \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} [\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt \right|^p |dz|$$

$$\Rightarrow \left[\int_{\Gamma} |f(z) - P_n(z)|^p\,|dz| \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\int_{\Gamma} \left| \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} [\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt \right|^p |dz| \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Yukarıdaki eşitliğe önce Minkowski sonra da eşitliğin sağındaki ikinci integrale Hölder eşitsizliğini uygulayalım;

$$\left[\int_{\Gamma} |f(z) - P_n(z)|^p\,|dz| \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Gamma} \left| \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) \right|^p |dz| \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma} \left[\int_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,\left|F(t,\Phi(z))\right| |dt| \right]^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left[\int_{\Gamma} |f(z) - P_n(z)|^p\,|dz| \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Gamma} \left| \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) \right|^p |dz| \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma} \left[\left(\int_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|t|=1} \left|F(t,\Phi(z))\right|^q |dt| \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \|f-P_n\|_{E_p} \le \left[\int_\Gamma \left|\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z))\right|^p |dz|\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\left(\int_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}} \int_\Gamma \left(\int_{|t|=1} \left|F(t,\Phi(z))\right|^q |dt|\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p |dz|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Buradan

$$\|f-P_n\|_{E_p} \le \left[\int_\Gamma \left|\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z))\right|^p |dz|\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\left(\int_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \left[\int_\Gamma \left(\int_{|t|=1} \left|F(t,\Phi(z))\right|^q |dt|\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p |dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \|f-P_n\|_{E_p} \le \left[\int_\Gamma \left|\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z))\right|^p |dz|\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|^p|dt|\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_\Gamma \left[\int_{|t|=1} \left|F(t,\Phi(z))\right|^q |dt|\right]^{\frac{p}{q}} |dz|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$\Phi(z) = w$ dönüşümü yapalım. Öyleyse ;

$\Phi'(z)dz = dw \;\Rightarrow\; dz = \frac{1}{\Phi'(z)} dw$ olur. $\Phi = \psi^{-1}$ olduğundan

$dz=\psi'(w)dw$ olur.Buradan da $|dz| = |\psi'(w)|\,|dw|$ elde edilir.

Elde ettiğimiz bu ifadeleri yukarıdaki eşitsizliğin sağındaki ilk integralde yerine yazarsak

$$\|f - P_n\|_{E_p} \leq \left[\int\limits_{|w|=1} \left|\varphi(w) - \varphi_n(w)\right|^p |\psi'(w)|\,|dw| \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int\limits_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|^p |dt| \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{\Gamma} \left[\int\limits_{|t|=1} \left|F\big(t, \Phi(z)\big)\right|^q |dt| \right]^{\frac{p}{q}} |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$$

olur. Burada

$$m_0(\Gamma) = \sup_{|w|=1} |\psi'(w)|$$

ve

$$M_{pq}(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int\limits_{\Gamma} \left[\int\limits_{|t|=1} \left|F\big(t, \Phi(z)\big)\right|^q |dt| \right]^{\frac{p}{q}} |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$$

ile gösterilip eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\|f - P_n\|_{E_p} \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{H_p} [m_0(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} + \|\varphi - \varphi_n\|_{H_p} M_{pq}(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \|f - P_n\|_{E_p} \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{H_p} \left([m_0(\Gamma)]^{\frac{1}{p}} + M_{pq}(\Gamma) \right)$$

bulunur ve

$$\|f - P_n\|_{E_p} \leq \|F_0\|_{H_p} \,.\, \|\varphi - \varphi_n\|_{H_p} \,, \quad F_0 : H_P \to E_P$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Daha önce elde ettiğimiz

$$F_1 \colon P_n \to \varphi_n$$

ters Faber operatörünün normunun sınırlılığı ile ilgili şu teorem verilebilir

3.4.2 Teorem: Birim diskte tanımlı, derecesi n yi aşmayan (φ_n) polinomlarının, F_1 ters Faber operatörü altında görüntüleri G bölgesinde tanımlı derecesi n yi aşmayan (P_n) polinomları olsun. Bu durumda,

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp} \le \|F_1\|_{Ep}\|f-P_n\|_{Ep}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$$\varphi(w)=F_1(t,w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f[\psi(t)]}{t-w}\,dt, \qquad |w|<1$$

Faber tipli integralin sınır değerleri için $|w|=1$ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$\varphi(w)=f[\psi(w)]+\varphi_1(w), \qquad |w|=1$$

Sokhotski formülü elde edilir. Burada

$$F(t,w)=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)}-\frac{1}{t-w}\,, \qquad |t|\ge 1\,, |w|>1$$

olmak üzere

$$\varphi_1(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f[\psi(t)]}{t-w}\,dt=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}f[\psi(t)].\;F(t,w)\,dt$$

ile gösterilebilir. Bu formül yardımıyla

$$\varphi(w)=f[\psi(w)]-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}f[\psi(t)].\;F(t,w)\,dt$$

elde edilir.

Bu eşitlikten polinomlar için elde edilecek benzer eşitlik çıkarıldığında;

$\varphi(w)-\varphi_n(w) = \{f[\psi(w)]-P_n[\psi(w)]\}$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\big[f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]\big]\,F(t,w)\,dt$$

Her iki tarafın mutlak değerini aldığımızda;

$$|\varphi(w)-\varphi_n(w)\ | =$$

$$\left|\{f[\psi(w)]-P_n[\psi(w)]\}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\big[f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]\big]\,F(t,w)\,dt\right|$$

$$\Rightarrow |\varphi(w)-\varphi_n(w)\ |^p=$$

$$\left|\{f[\psi(w)]-P_n[\psi(w)]\}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\big[P_n[\psi(t)]-f[\psi(t)]\big]\,F(t,w)\,dt\right|^p$$

Şimdi de her iki tarafı $|w|=1$ üzerinden integrallersek;

$$\int\limits_{|w|=1}|\varphi(w)-\varphi_n(w)\ |^p|dw| =$$

$$\int\limits_{|w|=1}\left|\{f[\psi(w)]-P_n[\psi(w)]\}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\big[P_n[\psi(t)]-f[\psi(t)]\big]\,F(t,w)\,dt\right|^p|dw|$$

buradan da

$$\left\{\int\limits_{|w|=1}|\varphi(w)-\varphi_n(w)\ |^p|dw|\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left\{\int\limits_{|w|=1}\left|\{f[\psi(w)]-P_n[\psi(w)]\}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\big[P_n[\psi(t)]-f[\psi(t)]\big]\,F(t,w)\,dt\right|^p|dw|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğe önce Minkowski eşitsizliği uygulayalım;

$$\left\{\int_{|w|=1} |\varphi(w)-\varphi_n(w)\ |^p|dw|\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_{|w|=1} |\ f[\psi(w)]-P_n[\psi(w)]\ |^p|dw|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{|w|=1}\left[\int_{|t|=1}|f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]||F(t,w)||dt|\right]^p|dw|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$\psi(w)=z$ dönüşümü yapalım $\Rightarrow\ \psi'(w).\,dw=dz\ \Rightarrow dw=\frac{1}{\psi'(w)}dz$

$\Rightarrow\ \Phi=\ \psi^{-1}$ olduğundan

$dw=\Phi'(z)dz$ olur.Buradan da $|dw|=|\Phi'(z)\,||dz\,|$ elde edilir.

Elde edilen ifadeleri eşitsizliğin sağındaki ilk integralde yerine yazıp norm tanımını da kullanırsak

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\leq\left\{\int_{\Gamma}|\ f(z)-P_n(z)\ |^p|\Phi'(z)\ ||dz\ |\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1}|f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]||F(t,\Phi'(z))||dt|\right]^p|\Phi'(z)\ ||dz\ |\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Eşitsizliğin sağındaki ikinci integrale Hölder eşitsizliğini uygulayalım

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\leq\left\{\int_{\Gamma}|f(z)-P_n(z)\ |^p|\Phi'(z)\ ||dz\ |\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left[\left(\int_{|t|=1}\left|f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]\right|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|t|=1}|F(t,\Phi'(z))|^q|dt|\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Burada bazı düzenlemeler yaparsak

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\le\left\{\int_{\Gamma}|f(z)-P_n(z)|^p|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\left(\int_{|t|=1}\left|f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]\right|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}}\int_{\Gamma}\left(\int_{|t|=1}|F(t,\Phi'(z))|^q|dt|\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\le\left\{\int_{\Gamma}|f(z)-P_n(z)|^p|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{|t|=1}\left|f[\psi(t)]-P_n[\psi(t)]\right|^p|dt|\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{\Gamma}\left(\int_{|t|=1}|F(t,\Phi'(z))|^q|dt|\right)^{\frac{p}{q}}|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

$\psi(t)=z$ dönüşümü yapılırsa

$\psi'(t)dt=dz \quad \Rightarrow dt=\frac{1}{\psi'(t)}dz \;\Rightarrow\; |dt|=|\Phi'(z)||dz|$ elde edilir.

Bu ifadeleri yukarıdaki eşitsizliğin sağındaki ikinci integralde yerine yazarsak

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\le\left\{\int_{\Gamma}|f(z)-P_n(z)|^p|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left|f(z)-P_n(z)\right|^{p}|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{\Gamma}\left(\int_{|t|=1}|F(t,\Phi'(z))|^{q}|dt|\right)^{\frac{p}{q}}|\Phi'(z)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Burada

$$m_1(\Gamma)=\sup_{\Gamma}|\Phi'(z)|$$

ve

$$M_{pq}(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{\Gamma}\left(\int_{|t|=1}|F(t,\Phi'(z))|^{q}|dt|\right)^{\frac{p}{q}}|dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

ile gösterip eşitsizlikte yerine yazarsak

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\leq\|f-P_n\|_{Ep}[m_1(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}+\|f-P_n\|_{Ep}[m_1(\Gamma)]^{\frac{2}{p}}M_{pq}(\Gamma)$$

$$\leq\|f-P_n\|_{Ep}[m_1(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}\left[1+[m_1(\Gamma)]^{\frac{1}{p}}M_{pq}(\Gamma)\right]$$

elde edilir. Burada $\varphi(w)=F_1(t,w)$ Faber operatörü olduğundan

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{Hp}\leq\|F_1\|_{Ep}\|f-P_n\|_{Ep}$$

olur ve ispat biter.

4. ANA SONUÇLAR

4.1 Teorem: $f(z) = F_0(z, \varphi)$ Faber operatörü için

$$\|f\|_{E_M(G)} \leq \|F_0\|_{H_M} \|\varphi\|_{H_M}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat: H_M uzayını $E_M(G)$ uzayına dönüştüren

$$f(z) = F_0(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi[\Phi(\xi)]}{\xi - z}\, d\xi, \qquad z \in G$$

Faber operatörünü göz önüne alalım.

$$f(z) = \varphi[\Phi(z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \varphi(t)\; F\big(t, \Phi(z)\big)dt \tag{3.17}$$

eşitliğinin her iki tarafını bir $g(z) \in L_N(\Gamma)$ fonksiyonu ile çarpalım:

$$f(z)\, g(z) = \varphi[\Phi(z)]\, g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \varphi(t)\; F\big(t, \Phi(z)\big)dt\, g(z).$$

Buradan önce her iki tarafın mutlak değerini alıp sonra üçgen eşitsizliği uygularsak

$$|f(z)\, g(z)| = \left| \varphi[\Phi(z)]\, g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \varphi(t)\; F(t, \Phi(z))\; dt\, g(z) \right|$$

$$\Rightarrow |f(z)\, g(z)| \leq |\varphi[\Phi(z)]\, g(z)| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \varphi(t)\; F(t, \Phi(z))\; dt\, g(z) \right|$$

$$\Rightarrow |f(z)\, g(z)| \leq |\varphi[\Phi(z)]\, g(z)| + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} |\varphi(t) g(z)|\; |F(t, \Phi(z))\,||dt|$$

olur.

Her iki tarafı Γ üzerinden integrallersek,

$$\int_{\Gamma} |f(z)\, g(z)|\, |dz| \leq \int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(z)]\, g(z)|\, |dz|$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\ \ |g(z)||F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz| \qquad (4.1)$$

elde edilir. Şimdi (4.1) eşitsizliğinin sağındaki birinci integrali ele alalım.

Bu integralde $\varphi(z) = w$ dönüşümü yapalım. Öyleyse;

$\Rightarrow\ \varphi'(z).\, dz= dw\ \Rightarrow dz = \frac{1}{\varphi'(z)}dw \Rightarrow dz=\psi'(w)dw$ olur. Buradan da

$|dz| = |\ \psi'(w)||dw\ |$ elde edilir. Bu ifadeleri (4.1)de birinci integralde yerine yazarsak;

$$\int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(z)]\, g(z)|\, |dz| = \int_{|w|=1} |\varphi(w)|\, |g(\psi(w))||\ \psi'(w)||dw\,|$$

Burada

$$m_0(\Gamma) = \sup_{|w|=1} |\psi'(w)\ |$$

ile ifade edip integralde supremuma geçersek;

$$\int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(z)]\, g(z)|\, |dz| \leq m_0(\Gamma).\sup\left\{\int_{|w|=1} |\varphi(w)|\, \big|g\big(\psi(w)\big)\big||dw\,|:\right.$$

$$\left. g(\psi(w)) \in\ L_N(|w| = 1),\ \int_{|w|=1} N[|g(\psi(w))|]\, |dw\,| \leq 1\right\}$$

olur.

Burada $g(z) \in\ L_N(\Gamma)$ olduğundan $g(\psi(w)) \in\ L_N(|w| = 1)$ olur. Gerçekten de;

$$\int_{|w|=1} N[|g(\psi(w))|]\, |dw\,|$$

integralinde $\psi(w) = z$ dönüşümü yapalım $\Rightarrow$ $\psi'(w).\,dw = dz$

$\Rightarrow |dz| = |\psi'(w)||dw|$

$\Rightarrow |dw| = |\Phi'(z)||dz|$

Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazarsak

$$\int_{|w|=1} N[|g(\psi(w))|]\,|dw| = \int_{\Gamma} N[|g(z)|]\,|\Phi'(z)||dz|$$

elde edilir. Burada

$$m_1(\Gamma) = \sup_{\Gamma}|\Phi'(z)|$$

denirse son durumda integral

$$\int_{\Gamma} N[|g(z)|]\,|\Phi'(z)||dz| \leq m_1(\Gamma)\int_{\Gamma} N[|g(z)|]\,|dz|$$

olur. $g(z) \in L_N(\Gamma)$ ve

$$\int_{\Gamma} N[|g(z)|]\,|dz|$$

integrali sonlu olduğundan

$$\int_{|w|=1} N[|g(\psi(w))|]\,|dw|$$

intagrali de sonludur ve $g(\psi(w)) \in L_N(|w| = 1)$ dir.

Son durumda

$$\int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(z)]\,g(z)|\,|dz| \leq m_0(\Gamma).\sup\left\{\int_{|w|=1} |\varphi(w)|\,\big|g\big(\psi(w)\big)\big||dw| : \right.$$

$$\left. g(\psi(w)) \in L_N(|w| = 1),\ \int_{|w|=1} N[|g(\psi(w))|]\,|dw| \leq 1\right\}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(z)]\, g(z)|\,|dz| = m_0(\Gamma).\,\|\varphi\|_{H_M} \tag{4.2}$$

elde edilir.

Şimdi de (4.1) eşitsizliğinin sağındaki birinci integrali inceleyelim:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\ \ |g(z)||F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz| =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} |g(z)|\left[\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\ \ |F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz|$$

yazılabilir.

İçerideki integralde Hölder eşitsizliğini uygularsak son durumda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} |g(z)|\left[\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\ \ |F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} |g(z)|\,.\,\|\varphi\|_{H_M}.\,\|F(t,\Phi(z))\|_{H_N}|dz|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} |g(z)|\left[\int_{|t|=1} |\varphi(t)|\ \ |F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz|$$

$$\leq \|\varphi\|_{H_M}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} |g(z)|\,.\,\|F(t,\Phi(z))\|_{H_N}|dz|$$

Burada

$$m_2(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} |g(z)|\,.\,\|F\|_{H_N}|dz|$$

ile gösterirsek

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\int_{|t|=1}|\varphi(t)|\ |g(z)||F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz| = \|\varphi\|_{H_M} m_2(\Gamma) \qquad (4.3)$$

elde edilir.

(4.1) eşitsizliğinde (4.2) ve (4.3) ifadelerini yerlerine yazarsak;

$$\int_{\Gamma}|f(z)\ g(z)|\ |dz| \le m_0(\Gamma).\ \|\varphi\|_{H_M} + \|\varphi\|_{H_M} m_2(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \|f\|_{E_M(G)} \le \|\varphi\|_{H_M}\big(m_0(\Gamma) + m_2(\Gamma)\big)$$

Burada $f = F_0(z,\varphi)$ bir Faber operatörü olduğundan;

$$\|f\|_{E_M(G)} \le \|F_0\|_{H_M}\|\varphi\|_{H_M}$$

elde edilir ve ispat biter.

4.2 Teorem: Birim diskte tanımlı, derecesi n yi aşmayan (φ_n) polinomlarının, F_0 Faber operatörü altında görüntüleri G bölgesinde tanımlı derecesi n yi aşmayan (P_n) polinomları olsun. Bu durumda

$$\|f - P_n\|_{E_M(G)} \le \|F_0\|_{H_M}\|\varphi - \varphi_n\|_{H_M}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $|w| < 1$ diskinde analitik fonksiyonların kümesini düşünelim.

Bir $\varphi(t) \in H_M\ (|w| < 1)$ için $\varphi(t)$'ye yakınsayan bir $\{\varphi_n(z)\}$ polinomlar dizisi vardır.

$$f(z) = F_0(z,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi[\Phi(\xi)]}{\xi - z}\,d\xi, \qquad z \in G$$

Faber operatörü t değişkenli n. dereceden $\varphi_n(t)$ polinomunu, n.dereceden z değişkenli $P_n(z)$ polinomuna dönüştürür. Ayrıca f(z) fonksiyonu eğer Γ eğrisi yeterince düzgün ise (3.10) daki Sokhotskii formülü gereğince Γ üzerinde süreklidir.

Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f(z) = \varphi\big(\Phi(z)\big) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi(t).F\big(t,\Phi(z)\big)dt , \qquad z \in \Gamma$$

formülünü $P_n(z)$ için de yazalım;

$$P_n(z) = \varphi_n\big(\Phi(z)\big) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi_n(t).F\big(t,\Phi(z)\big)dt , \qquad z \in \Gamma .$$

Bu iki formülü taraf tarafa çıkarırsak;

$$f(z) - P_n(z) = \varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} [\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt \qquad (4.4)$$

elde edilir.

Varsayalım ki Faber operatörü H_M ($|t| \le 1$) sınıfından sınırlı bir norma sahip olsun. Bu Γ eğrisinin yeterince düzgün olması durumunda olur. Bu durumda $\|F_0\|$ Faber operatörünün normu sınırlı olur.

Şimdi de (4.4) eşitliğinin her iki tarafını bir $g(z) \in L_N(\Gamma)$ fonksiyonu ile çarpalım;

$$\big(f(z) - P_n(z)\big)g(z) =$$

$$\left(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} [\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt\right) g(z).$$

Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa;

$$\left|\big(f(z) - P_n(z)\big)g(z)\right| =$$

$$\left|\left(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} [\,\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt\right) g(z)\right|$$

$$\Rightarrow \left|\big(f(z) - P_n(z)\big)g(z)\right| =$$

$$\left|(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)))\, g(z) + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|t|=1} [\,\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt\right) g(z)\right|$$

Üçgen eşitsizliğini uygularsak;

$$\left|\big(f(z) - P_n(z)\big)g(z)\right| \le |(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)))\, g(z)|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\, g(z)\int_{|t|=1} [\,\varphi(t) - \varphi_n(t)].F(t,\Phi(z))\,dt\,\right|$$

Şimdi de her iki tarafı Γ üzerinden integralleyelim;

$$\int_{\Gamma} \left|\big(f(z) - P_n(z)\big)g(z)\right| |dz| \le \int_{\Gamma} |(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)))\, g(z)|\, |dz|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[|g(z)|\int_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\ |F(t,\Phi(z))|\,|dt|\right]|dz| \qquad (4.5)$$

(4.5) eşitsizliğinin sağındaki birinci integrali ele alalım.

Bu integralde $\Phi(z) = w$ dönüşümü yapalım. Öyleyse ;

$\Phi'(z)dz = dw \;\Rightarrow\; dz = \frac{1}{\Phi'(z)}dw$ olur. $\Phi = \psi^{-1}$ olduğundan $dz=\psi'(w)dw$ olur.

Buradan da $|dz| = |\psi'(w)|\,|dw|$ elde edilir.

Elde ettiğimiz bu ifadeleri (4.5) deki birinci integralde yerine yazarsak;

$$\int_{\Gamma} |(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)))\, g(z)|\, |dz| =$$

$$\int_{|w|=1} \left|(\varphi(w) - \varphi_n(w))\ \left(g(\psi(w))\right)\right| \left|\psi'(w)\right| |dw|$$

olur. Burada

$$m_0(\Gamma) = \sup_{|w|=1} \left|\psi'(w)\right|$$

ile ifade edilip integralde işleme sokarsak;

$$\int_{\Gamma} |(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)))\ g(z)|\ |dz| \leq$$

$$m_0(\Gamma) \int_{|w|=1} \left|(\varphi(w) - \varphi_n(w))\ \left(g(\psi(w))\right)\right| |dw|$$

olur.

Buradan da supremuma geçersek;

$$\int_{\Gamma} |(\varphi(\Phi(z)) - \varphi_n(\Phi(z)))\ g(z)|\ |dz| \leq m_0(\Gamma) \sup \left\{ \int_{|w|=1} \left|(\varphi(w) - \varphi_n(w))\ \left(g(\psi(w))\right)\right| |dw| : \right.$$

$$\left. g(\psi(w)) \in L_N(|w| = 1), \int_{|w|=1} N[|g(\psi(w))|]\ |dw| \leq 1 \right\}$$

elde ederiz.

Burada $g(\psi(w)) \in L_N(|w| = 1)$ olan bir fonksiyondur. Dolayısıyla

$$\int_{\Gamma} \left|\left(\varphi\left(\Phi(z)\right) - \varphi_n(\Phi(z))\right) g(z)\right| |dz| \leq m_0(\Gamma). \|\varphi - \varphi_n\|_{H_M} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Şimdi de (4.5) eşitsizliğinin sağındaki ikinci ifadeyi inceleyelim.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[|g(z)|\int_{|t|=1}|\varphi(t)-\ \varphi_n(t)|\ |F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz|$$

ifadesinde içerideki integralde Hölder eşitsizliğini uygulayalım:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[|g(z)|\int_{|t|=1}|\varphi(t)-\ \varphi_n(t)|\ |F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}|g(z)|\,.\,\|\varphi-\ \varphi_n\|_{H_M}.\,\|F(t,\Phi(z))\ \|_{H_N}|dz|$$

elde edilir. Burada

$$m_2(\Gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}|g(z)|\,.\,\|F\|_{H_N}|dz|$$

denilip yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[|g(z)|\int_{|t|=1}|\varphi(t)-\ \varphi_n(t)|\ |F(t,\Phi(z))\ ||dt|\right]|dz|=\|\varphi-\ \varphi_n\|_{H_M}m_2(\Gamma) \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.6) ve (4.7) değerlerini (4.5) ifadesinde yerine yazarsak;

$$\int_{\Gamma}\left|\big(f(z)-P_n(z)\big)g(z)\right||dz|\leq m_0(\Gamma).\,\|\varphi-\varphi_n\|_{H_M}\quad+\|\varphi-\ \varphi_n\|_{H_M}m_2(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \|f-P_n\|_{E_M(G)}\leq \left\|\varphi-\ \varphi_n\right\|_{H_M}\big(m_0(\Gamma)+m_2(\Gamma)\big)$$

olur.Burada $f=F_0(z,\varphi)$ bir Faber operatörü olduğundan;

$$\|f-P_n\|_{E_M(G)}\leq \|F_0\|_{H_M}\|\varphi-\varphi_n\|_{H_M}$$

elde edilir ve ispat biter.

4.3 Teorem: Birim diskte tanımlı, derecesi n yi aşmayan (φ_n) polinomlarının, F_1 ters Faber operatörü altında görüntüleri G bölgesinde tanımlı derecesi n yi aşmayan (P_n) polinomları olsun. $F_1 : P_n \to \varphi_n$ olmak üzere

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{H_M} \leq \|F_1\|_{E_M} \|f - P_n\|_{E_M}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$$\varphi(w) = F_1(t, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \quad dt, \qquad |w| < 1$$

Faber tipli integralin sınır değerleri için;

$$\varphi(w) = f[\psi(w)] + \varphi_1(w), \qquad |w| = 1$$

Sokhotskii formülü elde edilir. Burada

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f[\psi(t)]}{t - w} \, dt = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} f[\psi(t)].\ F(t, w)\, dt$$

ile gösterilebilir. Bu formül yardımıyla

$$\varphi(w) = f[\psi(w)] = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} f[\psi(t)].\ F(t, w)\, dt$$

elde edilir. Bu formülden yararlanılarak polinomlar için de benzer olarak

$$\varphi_n(w) = P_n[\psi(w)] - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} P_n[\psi(t)] F(t, w)\, dt$$

elde edilir. Elde edilen bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$$\varphi(w) - \varphi_n(w) = \{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \big[f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]\big] F(t, w) dt \tag{4.8}$$

elde edilir. Şimdi ise (4.8) eşitliğinin her iki tarafını bir $g(w) \in L_N(|w| = 1)$ fonksiyonu ile çarpalım;

$$\big(\varphi(w) - \varphi_n(w)\big)\big(g(w)\big)$$

$$= \left(\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \big[f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]\big] F(t, w)dt \right) \big(g(w)\big)$$

$$= \{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w) + g(w).\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \big[f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]\big] F(t, w)dt$$

Şimdi de her iki tarafın mutlak değerini alıp üçgen eşitsizliği uygularsak;

$$\big|\big(\varphi(w) - \varphi_n(w)\big)\big(g(w)\big)\big|$$

$$\leq |\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w)| + \left| g(w).\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \big[f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]\big] F(t, w)dt \right|$$

olur. Her iki tarafı $|w| = 1$ üzerinden integralleyelim;

$$\int_{|w|=1} \big|\big(\varphi(w) - \varphi_n(w)\big)\big(g(w)\big)\big||dw| \leq \int_{|w|=1} |\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w)|\,|dw|$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \left[|g(w)| \int_{|t|=1} |f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]|\,|F(t, w)||dt| \right] |dw| \qquad (4.9)$$

elde edilir.

(4.9) eşitsizliğinin sağındaki birinci integrali ele alalım. Bu integralde $\psi(w) = z$ dönüşümü yapalım .

$\Rightarrow\ \psi'(w).\,dw = dz\ \Rightarrow dw = \frac{1}{\psi'(w)}dz$

$\Rightarrow \ \Phi = \psi^{-1}$ olduğundan

dw=$\Phi'(z)$dz olur. Buradan da $|dw| = |\Phi'(z)||dz|$ elde edilir.

Elde edilen ifadeleri incelediğimiz bu integralde yerine yazarsak;

$$\int_{|w|=1} |\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w)|\,|dw| = \int_{\Gamma} |\{f(z) - P_n(z)\}g(\Phi(z))||\Phi'(z)||dz|$$

elde edilir. Burada

$$m_1(\Gamma) = \sup_{\Gamma} |\Phi'(z)|$$

denilip integralde yerine yazılırsa son durumda integral;

$$\int_{|w|=1} |\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w)|\,|dw| = m_1(\Gamma)\int_{\Gamma} |\{f(z) - P_n(z)\}g(\Phi(z))||dz|$$

olur. Buradan da supremuma geçersek;

$$\int_{|w|=1} |\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w)|\,|dw| \leq m_1(\Gamma)\sup\left\{\int_{\Gamma} \left|\{f(z) - P_n(z)\}g\big(\Phi(z)\big)\right||dz| : \right.$$

$$\left. g\big(\Phi(z)\big) \in L_N(|w| = 1), \int_{\Gamma} N[|g(\psi(w))|]\,|dw| \right\}$$

$$\int_{|w|=1} |\{f[\psi(w)] - P_n[\psi(w)]\}g(w)|\,|dw| \leq m_1(\Gamma).\|f - P_n\|_{E_M} \qquad (4.10)$$

Burada $g\big(\Phi(z)\big) \in L_N(|w| = 1)$ dir.

Şimdi de (4.9) eşitsizliğinin sağındaki ikinci integrali inceleyelim. Bu integralde $\psi(t) = z$ dönüşümü yapalım $\Rightarrow \psi'(t).dt = dz \Rightarrow dt = \frac{1}{\psi'(t)}dz$

$\Rightarrow \ \Phi = \psi^{-1}$ olduğundan

dt=$\Phi'(z)$dz olur.Buradan da $|dt| = |\Phi'(z)||dz|$ elde edilir. Burada $t = \Phi(z)$ olur.

Ayrıca $\psi(w) = z$ idi. Öyleyse; $w = \Phi(z)$ olur. Bu değeri incelediğimiz integralin içindeki integralde $F(t, w)$ değerinde ve yukarıdaki dönüşüm sonuçlarını integralde yerine yazarsak son durumda;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left[|g(w)|\int_{|t|=1}|f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]|\,|F(t,w)||dt|\right]|dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left[|g(w)|\int_{\Gamma}|f(z) - P_n(z)|\,|F(t,\Phi(z))||\Phi'(z)||dz|\right]|dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi i}.m_1(\Gamma)\int_{|w|=1}\left[|g(w)|\int_{\Gamma}|f(z) - P_n(z)|\,|F(t,\Phi(z))||dz|\right]|dw|$$

elde edilir. İçerideki integralde Hölder eşitsizliğini uygularsak integralin değeri;

$$\leq \frac{1}{2\pi i}.m_1(\Gamma)\int_{|w|=1}|g(w)|\,.\,\|f - P_n\|_{E_M}.\|F(t,\Phi(z))\|_{E_N}|dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi i}.m_1(\Gamma).\|f - P_n\|_{E_M}\int_{|w|=1}|g(w)|\,.\,\|F(t,\Phi(z))\|_{E_N}|dw| \qquad \text{olur.}$$

Burada

$$m_2(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}|g(w)|\,.\,\|F(t,\Phi(z))\|_{E_N}|dw|$$

denilip integralde yerine yazılırsa son durumda;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left[|g(w)|\int_{|t|=1}|f[\psi(t)] - P_n[\psi(t)]|\,|F(t,w)||dt|\right]|dw|$$

$$= \|f - P_n\|_{E_M}.m_1(\Gamma).m_2(\Gamma) \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) ifadelerini (4.9) de yerine yazarsak;

$$\int_{|w|=1} \left|\left(\varphi(w) - \varphi_n(w)\right)\left(g(w)\right)\right||dw| \leq \|f - P_n\|_{E_M}.\, m_1(\Gamma) + \|f - P_n\|_{E_M}.\, m_1(\Gamma).\, m_2(\Gamma)$$

$$\int_{|w|=1} \left|\left(\varphi(w) - \varphi_n(w)\right)\left(g(w)\right)\right||dw| \leq \|f - P_n\|_{E_M}.\, m_1(\Gamma)[1 +.\, m_2(\Gamma)]$$

$\Rightarrow \ \|\varphi - \varphi_n\|_{H_M} \leq \|f - P_n\|_{E_M}.\, m_1(\Gamma)[1 +.\, m_2(\Gamma)]$ elde edilir.

$\varphi(w) = F_1(t, w)$ Faber operatörü olduğundan

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{H_M} \leq \|F_1\|_{E_M} \|f - P_n\|_{E_M}$$

elde edilir ve ispat biter.

SONUÇ

Tezde elde edilen teoremler yardımıyla ortalamada en iyi yaklaşımın düz ve ters teoremleri, birim diskten , yeterince düzgün sınıra sahip bölgelere taşınabilir.

Hardy uzaylarıyla, Smirnov uzayları arasında tanımlanan Faber ve ters Faber operatörlerinin normlarının sınırlılığı problemi incelenmiş ve bu operatörlerin Hardy Orlicz ve Smirnov Orlicz uzayları tanımlanmaları durumunda da normların sınırlılığı ile ilgili yeni teoremler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Pommerenke, C., Univalent finctions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).

[2] Başkan, T., Kompleks fonksiyonlar teorisi, Vipaş A.Ş., Bursa, (2000).

[3] Lehto, O. and Virtanen, K., Quasiconformal mappings in the plane, Springer-Verlag (1973).

[4] Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable III, Chealsea Publishing Company, New York, (1977).

[5] Suetin, P. K., Series of Faber polynomials, Gordon and Breach Science Publishers (1988).

[6] Gonzalez, M. O., Classical complex analysis, Marcel Dekker, Inc (1922).

[7] Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a Complex Variable, Translations of Mathematical Monographs, Vol.26, Amer.Math.Soc (1969).

[8] Çavuş, A., Israfilov, D. M., Approximation by Faber – Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L^P(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$, Approximation Theory App., Vol. 11, No.1 (1995), pp 105-118