T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS BÖLGELERDE TANIMLI FONKSİYON UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NESLİHAN CÖMERT

BALIKESİR, HAZİRAN-2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS BÖLGELERDE TANIMLI FONKSİYON UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NESLİHAN CÖMERT

BALIKESİR, HAZİRAN-2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Neslihan CÖMERT tarafından hazırlanan **"KOMPLEKS BÖLGELERDE TANIMLI FONKSİYON UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 19.06.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd. Doç. Dr. Burçin OKTAY	....
Üye Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

KOMPLEKS BÖLGELERDE TANIMLI FONKSİYON UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NESLİHAN CÖMERT

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. BURÇİN OKTAY)

BALIKESİR, 2013

Bu çalışmanın amacı analitik fonksiyonların bazı sınıflarında yaklaşım teoresinin bazı problemlerini incelemektir.

Giriş ve sonuç bölümleri dışında bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde; önce ileri ki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiş, daha sonra yaklaşımın incelendiği bazı fonksiyonel uzaylar ve bu uzaylardaki en iyi yaklaşım sayısı tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde; önce yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşaası için önemli olan Faber polinomları araştırılmıştır. Daha sonra Faber polinomlarının asimptotik özellikleri, Faber serileri ve analitik fonksiyonların Faber serileri, karmaşık düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; karmaşık düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde Bernstein & Walsh düz ve ters teoremleri ve Faber serilerinin maksimal yakınsaklık teoremleri araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: fonksiyonel uzaylar, Faber polinomları, Faber serileri, Riemann konform dönüşümü, maksimal yakınsaklık teoremleri

ABSTRACT

APPROXIMATION PROBLEMS ON THE FUNCTION SPACES DEFINED ON COMPLEX DOMAINS
MSC THESIS
NESLIHAN COMERT
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. BURCIN OKTAY)

BALIKESİR, JUNE 2013

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation theory in some classes of analytic functions.

Except the introduction and the conclusion chapters, the thesis consists of three main chapters.

In the second chapter; basic definitions and theorems which are used in the following chapters are given. After that, some functional spaces in which the approximantion is investigated and the best approximant number in these spaces is defined.

In the third chapter; firstly, Faber polynomials which have been important in the construction of approximant polynomials in approximation theory are investigated. Secondly, asymptotic properties of Faber polynomials, Faber series and Faber series of analytic functions are investigated on the simply connected domains of the complex plane.

In the forth chapter; the direct and the inverse theorems of Bernstein & Walsh and maximal convergence theorems of Faber series are investigated on the simply connected domains of the complex plane.

KEYWORDS: functional spaces, Faber polynomials, Faber series, Riemann conformal mapping, theorems of maximal convergence

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\boldsymbol{\Gamma}$	Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu eğri
$\boldsymbol{G}$	Sınırı Γ olan sınırlı basit bağlantılı bölge
$\boldsymbol{G^-}$	$\bar{G}$**'** nin tümleyeni
$\boldsymbol{D}$	Kompleks düzlemde birim disk
$\boldsymbol{T}$	Birim diskin sınırı
$\boldsymbol{D^-}$	Birim diskin kapanışının tümleyeni
$\boldsymbol{\varphi}$	G^- den D^- üzerine konform dönüşüm
$\boldsymbol{\psi}$	φ' nin tersi
$\boldsymbol{\Phi_k}(\boldsymbol{z})$	$\bar{G}$ için k. dereceden Faber polinomları
$\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\Gamma})$	Γ üzerinde Lebesgue Uzayı
$\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{G})$	G üzerinde Smirnov Sınıfı
$\boldsymbol{\Gamma_R}$	Seviye Eğrisi
$\boldsymbol{G_R}$	Γ_R eğrisinin içi
$\boldsymbol{G_R^-}$	Γ_R eğrisinin dışı
$\wp_{\boldsymbol{n}}$	Derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomların kümesi
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G_R})$	G_R'de analitik olan fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{K}$	$G \cup \Gamma$

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmamın başından sonuna kadar değerli bilgileriyle bana ışık tutan, önümde yeni ufuklar açan, ilgisini ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim saygıdeğer danışman hocam ***Yrd. Doç. Dr. Burçin OKTAY'***a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Bilgi ve tecrübelerini benimle her zaman paylaşan ve desteğini esirgemeyen hocam ***Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE'***ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bana her zaman inanan, güvenen ve destek olan sevgili anneme, babama ve ablalarıma sonsuz teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Faber polinomları, kompleks değişkenli fonksiyonlar için yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynar. Faber polinomlarının serisi, basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların gösterimi için kullanılır ve analitik fonksiyonların yaklaşımı üzerine pek çok teorem bu serilerin yardımıyla ispatlanır. Bilindiği gibi $|z - z_0| < R$ diskinde analitik bir fonksiyon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.1}$$

Taylor serisine açılabilir. Ve bu seri diskin her kompakt altkümesi üzerinde düzgün olarak yakınsar. Faber serileri, birim disk durumunda ifade edilen Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgeler durumuna genelleştirilmesidir.

Faber ilk kez 1903 yılında sınırlı, basit bağlantılı keyfi bir G bölgesi için bu bölgede analitik olan ve bazı ek koşulları sağlayan $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z), \qquad z \in G \tag{1.2}$$

biçimindeki bir seriye açılabilecek şekilde $\{\Phi_n(z)\}$ polinomlar sistemini belirleme problemini araştırmıştır. (1.2) serisindeki $\{a_n\}$ katsayıları G bölgesine bağlı olup $f(z)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Faber, bu problemin çözümünde G bölgesinin Γ sınırının regüler analitik eğri olduğu durumu düşünmüştür. Faber'in oluşturduğu $\{\Phi_n(z)\}$ polinomlar sistemi bugün Faber polinomları olarak bilinmektedir.

Faber ilk makalesinde K kontinyumunun regüler analitik bir Γ sınırına sahip basit bağlantılı bir G bölgesinin kapanışı olduğunda, G bölgesinde analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun (1.2) deki Faber serisine açılabildiğini, bu serinin G bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsaklığını elde etmiş. Bu açılımın katsayılarını

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)\varphi'(\varsigma)}{\varphi^{n+1}(\varsigma)} d\varsigma$$

formülü ile ifade etmiştir. Burada Γ_ρ, $\varphi(z)$ konform dönüşümü altında $|w| = \rho$ çemberinin ters görüntüsüdür. Ve $\rho < 1$, $|w| \geq \rho$ bölgesinde $\psi(w)$ analitik olacak şekilde seçilmiştir. Faber başka bir makalesinde $f(z)$ fonksiyonunun bağlantılı tümleyene sahip sınırlı kontinyum üzerinde analitik olması durumunda (1.2) deki açılımın sağlandığını ispatlamıştır. Bu durumda (1.2) deki seri, K kontinyumu üzerinde mutlak ve düzgün olarak yakınsaktır. Faber, 1920 yılında üçüncü makalesinde ilk kez kapalı bir bölgede analitik fonksiyonların düzgün yaklaşımı üzerine çalışmış, Faber serilerinin yardımıyla en iyi yaklaşım için değerlendirmeler elde etmiştir.

Faber' den sonra W. Sewell, A.I, Markushevich, S. Y. Alper, S. N. Mergelyan, V. K. Dzyadyk, V. S. Rogozhin, G. M. Goluzin, V. I. Smirnoz and N. A. Lebedev gibi birçok matematikçi G bölgesinin çeşitli geometrik koşulları altında Faber serilerinin yardımıyla düz ve ters yaklaşım teoremleri elde etmişlerdir. Faber serileriyle yaklaşım problemleri günümüzde de pek çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Bu tez çalışmasında yaklaşım teorisinin önemli bir alt dalı olan maksimal yakınsaklık teoremleri üzerine çalışılmıştır. Faber serilerinin kanonik bölgelerde yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. $f(z)$ fonksiyonu G_R, $R > 1$, kanonik bölgesinde analitik fonksiyon olmak üzere $f(z)$ fonksiyonuna Faber serisinin kısmi toplamı ile yaklaşım hızı G_ρ, $1 < \rho < R$, bölgesinde araştırılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım: $[a, b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir *eğri* denir. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya *kapalı eğri*; γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ'ya *Jordan eğrisi*; γ' türevi var ve sürekli ise γ'ya *diferansiyellenebilir eğri*; diferansiyellenebilir γ eğrisi için eğer, $\forall t \in [a, b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ oluyorsa γ' ya *düzgün eğri* denir [4].

2.1.2 Tanım: f, $[a, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon,

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve Q, $[a, b]$ aralığının tüm P parçalanmalarının kümesi olsun. f'nin $[a, b]$ üzerindeki toplam salınımı,

$$V_a^b(f) := \sup_{P \in Q} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

olarak belirlenir.

Eğer, $V_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonu $[a, b]$ *sınırlı salınımlıdır* denir [5].

2.1.3 Tanım: Eğer, $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ise bunun belirttiği γ eğrisine *sonlu uzunluklu eğri* denir [4].

2.1.4 Tanım: Kompleks düzlemde, bağlantılı ve kapalı bir kümeye *kontinyum*, bağlantılı ve açık kümeye de *bölge* denir [2].

2.1.5 Tanım: A, $\mathbb{C}$'de bir bölge olsun. Eğer, A bağlantılı ve A içindeki her γ eğrisi yine A içinde sabit bir z_0 noktasına homotop ise A'ya *basit bağlantılı bölge* denir [4].

2.1.6 Tanım: B, $\mathbb{C}$'de bir bölge olmak üzere $f: B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0'da bir *konform dönüşümdür* denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f, B de *konformdur* denir [4].

2.1.7 Tanım: γ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Eğer bir U çemberini γ'ya resmeden ve U çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa γ eğrisine *analitik eğri* denir [13]. Her analitik eğri bir Jordan eğrisidir.

2.1.8 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı analitik bir eğri ise, G bölgesinin D bölgesine her konform dönüşümü, $\bar{G}$'yi kapsayan belirli bir bölgeye birebir ve analitik olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G'nin sınırı analitik eğri ise, $\mathbb{C}\bar{G}$ bölgesinin $\mathbb{C}\bar{D}$'ye olan her konform dönüşümü $\mathbb{C}G$'yi kapsayan bir bölgeye birebir ve analitik olarak genişletilebilir [6].

2.1.9 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, G bölgesinin D bölgesine her konform dönüşümü, $\bar{G}$'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G'nin sınırı Jordan eğrisi ise, $\mathbb{C}\bar{G}$ bölgesinin $\mathbb{C}\bar{D}$'ye olan her konform dönüşümü $\mathbb{C}G$'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir [6].

2.1.10 Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini D' ye,

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [1].

2.1.11 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip sınırlı kontinyum olsun. Bu durumda, $\mathbb{C}G$ bölgesini $\mathbb{C}\overline{D}$'ye,

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü vardır [1].

2.1.12 Teorem (Weierstrass M-Testi): $A \subset \mathbb{C}$ ve g_k, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Gerçel sayıların aşağıdaki özelliklerini sağlayan bir M_n dizisi varsa, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$, A üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(i) $M_n \geq 0$ için, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ yakınsak,
(ii) Her $z \in A$ için, $|g_k(z)| \leq M_k,\ k = 1,2, ...$ dir [5].

2.1.13 Teorem (Sınırsız Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü): G sonlu uzunluklu Jordan eğrisiyle sınırlanmış bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. Eğer, $\mathbb{C}G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & ; z \in \mathbb{C}\overline{G} \\ f(\infty) & ; z \in G \end{cases}$$

olur [9].

2.2 Bazı Fonksiyonel Uzaylar

2.2.1 Tanım: G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğriyle sınırlı bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Γ'da Lebesgue ölçülebilir ve $|f|^p$ nin yay uzunluğuna göre Lebesgue integrallenebilir olduğu kompleks değerli f fonksiyonların kümesine *Lebesgue uzayı* denir ve $L_p(\Gamma)$ ile gösterilir [10].

2.2.2 Tanım: G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğriyle sınırlı bir bölge ve f, G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \leq M, \qquad 1 \leq p < \infty$$

olacak şekilde G içinde G'nin kompakt altkümelerini sınırlayan ve Γ eğrisine yaklaşan $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ sonlu uzunluklu Jordan eğrilerinin bir dizisi varsa f fonksiyonu *Smirnov uzayındandır* denir. Smirnov uzayı $E_p(G)$ ile gösterilir [7].

$\forall f \in E_p(G)$ fonksiyonu Γ üzerinde hemen her yerde açısal limite sahiptir ve eğer f'nin açısal limiti için aynı notasyonu kullanırsak $f \in L_p(\Gamma)$ dir.

Özel halde G bölgesi bir birim disk ise $E_p(G)$ uzayları, bilinen $H_p(D)$ Hardy uzayları olur.

2.2.3 Uyarı: $L_p(\Gamma)$ ve $E_p(G)$ uzayları $p \geq 1$ olduğunda,

$$\|f\|_{E_p(G)} = \|f\|_{L_p(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdırlar.

2.2.4 Teorem (Hölder Eşitsizliği): $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise $fg \in L_1$ dir ve

$$\int_{\Gamma} |\mathrm{fg}||\mathrm{dz}| \leq \left\{\int_{\Gamma} |\mathrm{f}|^{\mathrm{p}}|\mathrm{dz}|\right\}^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \left\{\int_{\Gamma} |\mathrm{g}|^{\mathrm{q}}|\mathrm{dz}|\right\}^{\frac{1}{\mathrm{q}}} = \|\mathrm{f}\|_{\mathrm{p}}\|\mathrm{g}\|_{\mathrm{q}}$$

olur [8].

2.3 En İyi Yaklaşım Sayısı

Kompleks düzlemde derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomların kümesini $\wp_n$ ile gösterelim.

2.3.1 Tanım: $p > 1$ olmak üzere $f \in E_p(G)$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$E_n^{(p)}(f;G) := \inf_{P_n \in \wp_n} \|f - P_n\|_{E_p(G)}$$

sayısına f fonksiyonunun $\wp_n$ sınıfında *en iyi yaklaşım sayısı* denir.

3. FABER POLİNOMLARI VE FABER SERİLERİ

Konform dönüşümün varlığı kullanılarak konform dönüşümün yaklaşım teorisinde geniş uygulama alanlarının olduğu özel polinomların elde edilebilirliğinden görülür. Bilindiği gibi $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ kuvvetleri birim diskte analitik olan fonksiyonlar sınıfında bir tam sistem oluşturur. Yani birim diskte analitik olan her fonksiyon bu sistem üzerinde yakınsak kuvvet serisine açılabilir. Diğer taraftan her yakınsak kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi mutlaka bir disk olacağından diskten farklı basit bağlantılı bölgede tanımlı analitik fonksiyonun bir kuvvet serisine açılabileceğini iddia edemeyiz. Bu tip bölgelerde fonksiyonun kuvvet serisinden farklı seri açılımlarının elde edilmesi gerekir. Bu seri açılımlarından bir tanesi Faber seri açılımı olarak bilinmektedir. Faber seri açılımını tanımlamadan önce Faber polinomlarının tanımını verelim.

3.1 Faber Polinomları

Kompleks düzlemde Γ ile sınırlı, basit bağlantılı G bölgesi verilsin. G^-, $z=\infty$ noktasını içeren, $\bar{G}=G\cup\Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni olan basit bağlantılı bir bölge, $D:=D(0,1)$, $T:=\partial D$ ve $D^-:=\mathbb{C}\overline{D}$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoremine göre G^- bölgesini D^- bölgesine,

$$\varphi(\infty)=\infty \ \text{ ve } \ \varphi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}=\gamma>0 \tag{3.1}$$

koşulları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü vardır.

(3.1) deki bağıntılardan $\varphi(z)=w$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitik ve $w=\varphi(z)$ fonksiyonu ∞ noktasında bir basit kutba sahiptir. Bu nedenle, φ fonksiyonunun ∞ noktasının çıkarılmış komşuluğundaki Laurent açılımı,

$$w=\varphi(z)=\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\cdots+\frac{\gamma_k}{z^k}+\cdots$$

şeklindedir.

$n = 0,1,2,...$ için**,**

$$[\varphi(z)]^n = \left(\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \cdots\right)^n$$

$$= \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \cdots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

$$+ \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \cdots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \cdots$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte z'nin pozitif kuvvetlerinden oluşan ve n+1 tane terim içeren grubu,

$$\Phi_n(z) := \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \cdots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

z 'nin negatif kuvvetlerinden oluşan ve sonsuz terim içeren grubu da,

$$-E_n(z) := \frac{b_1^{(n)}}{z} + \cdots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \cdots$$

gösterirsek,

$$[\varphi(z)]^n = \Phi_n(z) - E_n(z) \qquad , \quad z \in G^- \tag{3.2}$$

eşitliği elde edilir. $[\varphi(z)]^n$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında n dereceli bir kutba sahiptir. Bu nedenle, (3.2) eşitliğinde $\Phi_n(z)$, n dereceli bir polinom, $E_n(z)$ fonksiyonu ise G^- bölgesinde analitik olup $E_n(\infty) = 0$ dır.

3.1.1 Tanım: $\Phi_n(z)$ $(n = 0,1,2,...)$ polinomlarına G bölgesinin n. dereceden *Faber polinomları* denir.

$z \in G^-$ için (3.2) eşitliğinden,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z)$$

ve

$$E_n(z) = \Phi_n(z) - [\varphi(z)]^n$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\Gamma_R := \{z \in G^- : |\varphi(z)| = R > 1\}$$

olsun.

Γ_R eğrilerine G^- bölgesinin seviye eğrileri denir. $w = \varphi(z)$ dönüşümü konform ve univalent olduğundan, Γ_R kapalı analitik bir eğridir. Bu nedenle Γ_R seviye eğrisi $\mathbb{C}$ düzlemini iki bölgeye ayırır. Bu bölgelerden biri Γ_R ile sınırlı olan sınırlı bölgedir. Bu bölgeyi G_R ile gösterelim. Diğer bölge ise sınırı Γ_R olan sonsuzluğu içeren bir bölgedir. Bunu ise G_R^- ile gösterelim. G_R ve G_R^- bölgelerine kanonik veya doğal bölgeler denir.

$z \in G_R$ için (3.2) eşitliğinin her iki tarafının Γ_R boyunca integralini alırsak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$

eşitliği elde edilir.

Burada $z \in G_R$ olduğundan sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = 0$$

ve Cauchy integral teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \Phi_n(z)$$

olur. Dolayısıyla $z \in G_R$ için,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir.

$z = \psi(w)$ fonksiyonu $w = \varphi(z)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, ψ fonksiyonu D^- bölgesini G^- bölgesine konform ve univalent olarak resmeder.

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\psi(\infty) = \infty \text{ ve } \psi'(\infty) = \frac{1}{\varphi'(\infty)} = \frac{1}{\gamma} = \beta > 0$$

dir. O halde, ψ fonksiyonu D^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında bir basit kutba sahiptir. Bu durumda ψ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı,

$$z = \psi(w) = \beta w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{w^k} + \cdots \quad , \qquad |w| > 1$$

şeklindedir. (3.3) integralinde $\varsigma = \psi(t)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} \frac{t^n \psi'(t)}{\psi(t) - z} dt \,, \qquad z \in G_R$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikten görüldüğü gibi $\{\Phi_n(z)\}$ Faber polinomları, $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonunun ∞ noktasının çıkarılmış komşuluğundaki Laurent açılımının Laurent katsayılarıdır. O halde,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \qquad z \in G_R \ \ ve \ \ |t| > R$$

elde edilir.

3.1.2 Tanım : $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonuna $\{\Phi_n(z)\}$ Faber polinomlarının *üreteç fonksiyonu* denir.

3.2 **Faber Polinomlarına Örnekler**

3.2.1 Örnek: Eğer G bölgesi $|z - z_0| < R_0$ diski ise bu diskin dışını birim diskin dışına, $\varphi(\infty) = \infty$ ve $\varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$ koşulları altında resmeden konform dönüşüm

$$w = \varphi(z) = \frac{z - z_0}{R_0}$$

dir. Bu durumda her n doğal sayısı için,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{{R_0}^n}(z - z_0)^n$$

olur. Görüldüğü gibi $|z - z_0| < R_0$ diski için Faber polinomları, konform dönüşüm fonksiyonunun negatif olmayan tam kuvvetleridir ve $E_n(z) \equiv 0$ dir.

3.2.2 Örnek: $G:=\{z\in C:|z|<1\}$ olması durumunda, diskin dışını birim diskin dışına $\varphi(\infty)=\infty$ ve $\varphi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ koşulları altında resmeden konform dönüşüm $\varphi(z)=z$ şeklindedir. O halde $\psi(t)=t$ olduğundan,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse G bölgesinin birim disk olması durumunda $\Phi_n(z)=z^n$ dır.

Faber polinomlarının tanımından görüldüğü G bölgesi ile $\bar{G}$ bölgesinin Faber polinomları aynıdır. Buna göre çoğu zaman G bölgesinin Faber polinomları yerine $\bar{G}$ kompaktlığının ifadesi kullanılır. Bu açıdan bakıldığında bazı özel kompakt kümeler için Faber polinomları tanımlanabilir.

3.2.3 Örnek: $K=[-1,1]$ olsun. K kontinyumunun dışının $|w|>1$ bölgesine,

$$\varphi(\infty)=\infty \text{ ve } \varphi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}1+\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}>0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümü,

$$w=\varphi(z)=z+\sqrt{z^2-1}\ , \qquad z\notin[-1,1]$$

şeklindedir. Karakök fonksiyonunun,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}=1$$

koşulunu sağlayan dalını seçelim. Bu durumda K kompaktının dışı birim diskin dışına resmedilir. (Diğer dal durumunda ise K kompaktının içi birim diskin içine resmedilir.)

φ fonksiyonunun tersi,

$$z = \psi(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \qquad |w| > 1$$

Zhukovskii fonksiyonu olur. $R > 1$ olmak üzere,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \qquad z \in G_R \ ve \ |t| > R$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 - 2tz + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$$

veya

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2tz + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^n}, \qquad |t| > R, \qquad |\varphi(z)| < R$$

bulunur. $t = \frac{1}{w}$ denirse,

$$\frac{1 - w^2}{1 - 2wz + w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \, \Phi_n(z), \qquad |w| < 1$$

elde edilir.

Diğer yandan ortogonal polinomlar teorisinden bilinen,

$$T_n(z) = \cos\,(narccosx)\;(n = 0,1,2, \dots)$$

biçiminde tanımlı Chebyshev polinomları için,

$$\frac{1 - w^2}{1 - 2wz + w^2} = T_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} w^n \, T_n(z)$$

olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\Phi_0(z) = T_0(z) = 1$$

ve n≥ 1 için,

$$\Phi_n(z) = 2T_n(z)$$

eşitliği elde edilir.

3.3 Faber Polinomlarının Asimptotik Özellikleri

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi $|\varphi(z)| = R > 1$ için her Γ_R seviye eğrisi, bu eğrinin içi G_R ve dışı G_R^- olmak üzere iki doğal bölge tanımlar. $E_n(z)$ fonksiyonu $\overline{G_R^-}$ kapalı bölgesinde analitik ve $E_n(\infty) = 0$ olduğundan Γ_R pozitif yönlü olmak üzere sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülüne göre her $z \in G^-$ için,

$$E_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, \qquad z \in G_R^-$$

yazılabilir.

$$E_n(z) = \Phi_n(z) - [\varphi(z)]^n$$

olduğundan,

$$E_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(\varsigma) - [\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma, \qquad z \in G_R^-$$

olur. $\Phi_n(z)$, G_R bölgesinde analitik olduğundan Cauchy integral teoreminden,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = 0$$

dır. Bu durumda,

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma, \qquad z \in G_R^- \tag{3.4}$$

eşitliği bulunur.

Böylece,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma\ , \qquad z \in G_R$$

ve

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma, \qquad z \in G_R^-$$

şeklinde benzer iki bağıntıya sahip olmuş oluruz.

K bağlantılı tümleyene sahip sınırlı kontinyum olsun. Amacımız Faber polinomlarını K kontinyumunda değerlendirmektedir.

Bunun için, eğer $z \in K$ ise yeteri kadar küçük sabit $\varepsilon > 0$ sayısı için (3.3) ifadesinde $R = 1 + \varepsilon$ alınabilir. Bu durumda,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \ , \qquad z \in G_R$$

integralinden,

$$|\Phi_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{|\varphi(\varsigma)|^n}{|\varsigma - z|} |d\varsigma|$$

$$= \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{|d\varsigma|}{|\varsigma - z|}$$

elde edilir. Burada, K kontinyumunun $\Gamma_{1+\varepsilon}$ seviye eğrisine olan uzaklığını $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$ olarak ve $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğunu da $l(\Gamma_{1+\varepsilon})$ olarak işaretleyelim. $\Gamma_{1+\varepsilon}$ kapalı ve K kümesi kompakt olduğundan aralarındaki $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$ uzaklığı sıfırdan büyüktür. Ayrıca $\varsigma \in \Gamma_{1+\varepsilon}$ ve $z \in K$ olduğundan $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon}) < |\varsigma - z|$ olur. O halde,

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} |d\varsigma| = \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})}\, l(\Gamma_{1+\varepsilon}), \qquad (3.5)$$

eşitsizliği elde edilir. $c_1(\varepsilon) := \frac{l(\Gamma_{1+\varepsilon})}{2\pi\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})}$ olsun. $c_1(\varepsilon)$ sayısı, yalnızca ε sayısına bağlı ve $\varepsilon \to 0$ için artan bir sabit olmak üzere (3.5) eşitsizliğini,

$$|\Phi_n(z)| \leq c_1(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n, \qquad z \in K, \qquad (3.6)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.6) ifadesinin her iki tarafının n. dereceden kökü alınırsa, $n \to \infty$ için limit durumunda

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \leq 1 + \varepsilon, \ \ z \in K$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte ε yeteri kadar küçük keyfi bir sabit ve sol taraf ε'a bağlı olmadığından,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \leq 1\,, \qquad z \in K \qquad (3.7)$$

limit bağıntısı elde edilir.

r ve R , $1 < r < R$ olacak şekilde iki sayı olsun. Bu durumda $\overline{G_R^-}$ kapalı kümesi üzerinde $E_n(z)$ fonksiyonunu belirleyebiliriz. (3.4) ifadesinden tüm $z \in \overline{G_R^-}$ için,

$$|E_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \frac{|\varphi(\varsigma)|^n}{|\varsigma - z|} |d\varsigma|$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \frac{|d\varsigma|}{|\varsigma - z|}$$

olur. Γ_r ve Γ_R seviye eğrileri arasındaki $\rho(\Gamma_r, \Gamma_R)$ uzaklığını δ ile işaretleyelim. $\overline{G_R^-}$ kapalı ve Γ_r kompakt olduğundan aralarındaki uzaklık sıfırdan büyüktür. Ayrıca $z \in G_R^-$ ve $\varsigma \in \Gamma_r$ olduğundan $\delta \leq |\varsigma - z|$ olur. Buradan,

$$|E_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi\delta} l(\Gamma_r), \tag{3.8}$$

değerlendirilmesi elde edilir. $c_2(R, r) \coloneqq \frac{l(\Gamma_r)}{2\pi\rho(\Gamma_r, \Gamma_R)}$ alınırsa,

$$|E_n(z)| \leq c_2(R, r) r^n$$

elde edilir. Böylece,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z), \qquad z \in G^-$$

bağıntısından , Faber polinomları için en basit asimptotik formülü,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n), \qquad z \in \overline{G_R^-}, \qquad 1 < r < R \tag{3.9}$$

şeklindedir.

(3.9) ifadesinin sağ tarafının hızı $z \in \Gamma_R$ ise $|\varphi(z)|^n = R^n$ dir. Fakat sağ taraftaki ikinci terimin sonsuza gitme hızı r^n değerinin sonsuza gitme hızından büyük değildir.

Hemen belirtelim ki, (3.8) ifadesinde $\delta(z) = \rho(z, \Gamma_r)$ alırsak $z \to \infty$ için, (3.8) ifadesinin sağ tarafı sıfıra yakınsar.

$R > 1$ olmak üzere bir $z \in \Gamma_R$ alalım. Bu durumda, $1 < r < R$ olmak üzere,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n) = [\varphi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{[\varphi(z)]^n}\right]$$

$$= [\varphi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{O(R^n)}\right] = [\varphi(z)]^n \left[1 + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$$\frac{\Phi_n(z)}{[\varphi(z)]^n} - 1 = O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da,

$$\left|\frac{\Phi_n(z)}{[\varphi(z)]^n} - 1\right| \leq c_3 \frac{r^n}{R^n}$$

ve dolayısıyla,

$$1 - c_3 \frac{r^n}{R^n} \leq \frac{|\Phi_n(z)|}{|\varphi(z)|^n} \leq 1 + c_3 \frac{r^n}{R^n}$$

bağıntısı elde edilir. $c_4(R) \coloneqq 1 - c_3 \frac{r^n}{R^n}$ ve $c_5(R) \coloneqq 1 + c_3 \frac{r^n}{R^n}$ alınırsa,

$$c_4(R) \leq \frac{|\Phi_n(z)|}{|\varphi(z)|^n} \leq c_5(R), \qquad z \in \Gamma_R$$

$$c_4(R)|\varphi(z)|^n \leq |\Phi_n(z)| \leq c_5(R)|\varphi(z)|^n$$

$$c_4(R)R^n \leq |\Phi_n(z)| \leq c_5(R)R^n, \qquad z \in \Gamma_R \tag{3.10}$$

olur. (3.10) eşitsizliğinin n. dereceden kökü alınıp, $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} = |\varphi(z)|, \quad z \in G^-$$

eşitsizliğini buluruz ki, burada yakınsama G^- deki her kompakt küme üzerinde düzgündür. Yani G^- bölgesinde kapsanan her sınırlı kapalı F kümesi üzerinde yakınsama düzgün olur.

Eğer $z \in \Gamma_R$ ise bu durumda n+1 ve n için (3.9) ifadesi,

$$\frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \frac{[\varphi(z)]^{n+1}(z) + O(r^{n+1})}{[\varphi(z)]^n(z) + O(r^n)}$$

$$= \varphi(z)\left[\frac{1+O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)}{1+O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}\right]$$

$$= \varphi(z)\left[1+\frac{O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)-O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}{1+O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}\right]$$

$$= \varphi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda G^- bölgesindeki her F kompakt kümesi üzerinde düzgün yakınsayan ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \varphi(z), \qquad z \in G^-$$

limitini veren

$$\frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \varphi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right), \qquad z \in \Gamma_R, \qquad n \to \infty$$

asimptotik bağıntısını yazabiliriz.

3.4 Faber Serileri

3.4.1 Tanım: $\Phi_n(z)$' ler K kontinyumunun Faber polinomları olsun.(c_n) bir karmaşık sayı dizi olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(z)$$

biçimindeki serilere K kontinyumuna göre Faber serileri denir.

3.4.2 Teorem: (c_n) bir karmaşık sayı dizisi ve $\Phi_n(z)$'ler K kontinyumunun Faber polinomları olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < 1$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ Faber serisi, G_R bölgesinde mutlak yakınsak, G_R bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak ve $\overline{G_R^-}$ bölgesinde ıraksaktır.

İspat: $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N doğal sayısı vardır ki, $n \geq N$ için,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R} + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon R}{R}$$

olur. $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ alınırsa, $n \geq N$ için,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R-\varepsilon_0}$$

eşitsizliği elde edilir. $1 < r < R$ olmak üzere (3.10) bağıntısından her $z \in \Gamma_r$ için,

$$a_1(r) r^n \leq |\Phi_n(z)| \leq a_2(r) r^n$$

olduğunu biliyoruz. ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde alalım. Bu durumda, $n \geq N$ için,

$$|c_n \Phi_n(z)| \leq a_2(r) \frac{r^n}{(R-\varepsilon_0)^n}$$

olur. $q := \frac{r}{R-\varepsilon_0}$ alınırsa, $0 < q < 1$ ve $\forall z \in \Gamma_r$ için,

$$|c_n \Phi_n(z)| \leq a_2(r) q^n$$

elde edilir. $\forall z \in G_R - K$ için $z \in \Gamma_r$ olacak şekilde $r \in (1, R)$ sayısı bulanabileceğinden bu eşitsizlik $\forall z \in G_R - K$ için geçerli olur.

K kompakt olduğundan $K \subset \overline{G_r}$ olacak şekilde bir $r \in (1, R)$ sayısı vardır ki $\forall z \in K$ için,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi \rho(\Gamma_{r,} K)} l(\Gamma_r) = c(r) r^n$$

elde edilir. ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde seçelim. $p := \frac{r}{R-\varepsilon_0}$ alınırsa $0 < p < 1$ ve $\forall z \in K$ için,

$$|c_n \Phi_n(z)| \leq c(r) p^n$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \Phi_n(z)|$ serisi, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ serisi yakınsak olduğundan her $z \in G_R - K$ için, $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ serisi yakınsak olduğu içinde $\forall z \in K$ için yakınsaktır. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ serisi G_R üzerinde mutlak yakınsaktır.

F, G_R'nin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $F \in \overline{G_{r_0}}$ olacak şekilde bir $1 < r_0 < R$ sayısı vardır. $r_0 < r < R$ olmak üzere, her $z \in F$ için

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olduğunu biliyoruz. F ve Γ_r kapalı olduklarından $\forall z \in F$ ve $\forall \varsigma \in \Gamma_r$ için

$$|\varsigma - z| \geq \rho(\Gamma_r, F) > 0$$

olur. Buradan $\forall z \in F$ için,

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi \rho(\Gamma_r, F)} l(\Gamma_r) = c(r) r^n$$

elde edilir. Bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ diyelim ve ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde alalım. $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ olduğundan, $n \geq N$ için $|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R-\varepsilon_0}$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. O halde, $n \geq N$ için ve her $z \in F$ için

$$|c_n \Phi_n(z)| \leq c(r) \frac{r^n}{(R - \varepsilon_0)^n}$$

olur. $M_n = c(r) \frac{r^n}{(R-\varepsilon_0)^n}$ alınırsa $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak olacağından Weierstrass-M testi gereğince

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$$

serisi F üzerinde düzgün yakınsak olur.

$z \in G_R^-$ olsun. $R_0 = |\varphi(z)|$ alınırsa, $R_0 > R$ ve $z \in \Gamma_{R_0}$ olur. Bu durumda,

$$b_1(R_0) {R_0}^n \leq |\Phi_n(z)| \leq b_2(R_0) {R_0}^n$$

olduğu bilinmektedir.

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

olduğundan, $\forall\varepsilon > 0$ için (c_n) dizisinin, $\left|c_{n_k}\right|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{R} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon R}{R}$ olacak şekilde bir $\left(c_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır. $\varepsilon_1 = \frac{1}{(1-\varepsilon R)^2}$ alınırsa,

$$\left|c_{n_k}\right|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1-\varepsilon R}{R} = \frac{1}{R+\varepsilon_1}$$

olur. ε sayısını, $R+\varepsilon_1 < R_0$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda,

$$\left|c_{n_k}\Phi_{n_k}(z)\right| > \frac{b_1(R_0){R_0}^{n_k}}{(R+\varepsilon_1)^{n_k}} = b_1(R_0)\left(\frac{R_0}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$$

elde edilir. $\frac{R_0}{R+\varepsilon_1} > 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$ serisi ıraksak olur. Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(z)$ serisinin ıraksak olduğu çıkar.

3.5 Analitik Fonksiyonların Faber Serileri

Bu bölümde analitik olan $f(z)$ fonksiyonunun Faber serisine açılabileceği durumu inceleyeceğiz.

3.5.1 Teorem: G basit bağlantılı ve sınırlı bir bölge ve $\Gamma = \partial G$ analitik bir eğri olsun. Bu durumda G bölgesinde analitik olan her f fonksiyonu $K = G \cup \Gamma$ kontinyumunun Faber polinomları serisine açılabilir ve bu açılım G'nin kompakt altkümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: Γ analitik bir eğri olduğundan $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü Γ sınırından G'nin içine belirli bir yere kadar analitik ve birebir olarak genişletilebilir. φ konform dönüşümü belirli bir $0 < \rho_0 < 1$ için $G_{\rho_0}^{-}$ bölgesinde birebir ve analitik olur. Bu durumda, $z = \psi(w)$ fonksiyonu $|w| > \rho_0$ bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında basit kutbu vardır.

f, G'de analitik bir fonksiyon ve $z \in G$ olsun. $\rho_0 < \rho < 1$ ve $z \in G_\rho$ olacak şekilde bir ρ sayısı vardır. Cauchy formülünden,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} f\big(\psi(t)\big)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt, \qquad (3.11)$$

olur.

$z \in G_\rho$ ve $|t| \geq \rho$ için ψ fonksiyonu analitik olduğundan, $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonu $|t| \geq \rho$ için analitik olur. Ayrıca,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} \frac{t^n \psi'(t)}{\psi(t) - t} dt$$

olduğundan $|t| \geq \rho$ için,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}, \quad z \in G_\rho \tag{3.12}$$

olur. F, G_ρ bölgesinin kapalı alt kümesi olmak üzere (3.12) açılımı $|t| \geq \rho$ koşulunu sağlayan t'ler için ve F kompakt kümesine ait olan z noktaları için düzgün yakınsaktır. Gerçekten, F$\subset G_\rho$ bir kompakt kümesi olmak üzere $z \in F$ olsun. Bu durumda $\rho_0 < r < \rho$ ve $F \subset \overline{G_r}$ olacak şekilde bir r sayısı vardır. Bu durumda $\Phi_k(z)$ Faber polinomları için,

$$c_1(r)r^n \leq |\Phi_n(z)| \leq c_2(r)r^n, \qquad z \in \Gamma_r$$

dir. Bundan dolayı, $|t| \geq \rho$ ve $z \in F$ için,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\Phi_n(z)|}{|t|^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_2(r)\frac{r^n}{\rho^{n+1}}$$

$$= \frac{c_2(r)}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n < \infty$$

olduğundan Weierstrass-M testi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$ serisi $|t| \geq \rho$ için düzgün yakınsaktır.

(3.12) açılımını (3.11) de dikkate alırsak,

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varphi^{n+1}(\varsigma)}\varphi'(\varsigma)d\varsigma, \tag{3.13}$$

olmak üzere,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} f\big(\psi(t)\big)\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\rho} f\big(\psi(t)\big) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}} \right\} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\rho} \frac{f\big(\psi(t)\big)}{t^{n+1}} dt \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z), \qquad z \in G \tag{3.14}$$

açılımı elde edilir.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ yakınsamasının G'nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün olduğunu gösterelim.

F, G'nin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $F \subset G_{r_0}$ olacak şekilde bir $r_0 < 1$ sayısı vardır. $r_0 < r < 1$ olmak üzere

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

ve F ile Γ_r kapalı olduklarından, $\forall z \in F$ için

$$|\Phi_n(z)| \leq d(r) r^n$$

elde edilir.

$r < R_1 < 1$ biçiminde bir R_1 sayısı seçelim. $\forall z \in F$ için $z \in G_{R_1}$ olur. Bu durumda $\forall z \in F$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R_1}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R_1} f\big(\psi(t)\big) \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt$$

ve

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}, \quad |t| = R_1, \qquad z \in F$$

açılımı düzgün yakınsak olduğundan $\forall z \in F$ için,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt$$

olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$$

olur. $M \coloneqq max\{|f(z)|: z \in \overline{G_{R_1}}\}$ olarak alınırsa

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

olacağından $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall z \in F$ için

$$|a_n \Phi_n(z)| \leq d(r) M \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} d(r) M \left(\frac{r}{R}\right)^n$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass- M testi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ serisi F üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olur. ■

3.5.2 Tanım: (3.13) formülüyle ifade edilen, (3.14) serisindeki $\{a_n\}$ katsayılarına K kontinyumunda analitik olan f fonksiyonunun *Faber katsayıları* denir.

3.5.3 Teorem: K kontinyumunda analitik olan her $f(z)$ fonksiyonu K kontinyumunda düzgün yakınsayan bir Faber serisine açılabilir.

İspat: Bu teoremde K, sınırlı ve bağlantılı tümleyene sahip olup sınırı için herhangi bir koşul yoktur. $R = 1 + \varepsilon > 1$ olmak üzere, f fonksiyonu K da analitik ve K kapalı olduğundan f fonksiyonu analitik olarak belirli bir G_R bölgesine genişletilebilir. $1 < \rho < R$ olacak şekilde bir ρ sayısı alalım. $\forall z \in K$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f(\psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt, \qquad (3.15)$$

dir. $z \in K$ ve $|t| \geq \rho$ için,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$$

açılımı özel olarak $|t| = \rho$ çemberi üzerinde yakınsak olduğundan bunu (3.15) eşitliğinde dikkate alırsak $n = 1,2, \ldots$ için a_n Faber katsayıları olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z) \ , \qquad z \in K$$

açılımı elde edilir. ■

4. FABER SERİLERİNİN MAKSİMAL YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

4.1 Bernstein & Walsh Düz Teoremler

K basit bağlantılı G^- tümleyenine sahip sınırlı kontinyum olsun. f fonksiyonu K kontinyumunda analitik ise bir $R > 1$ için G_R kanonik bölgesine analitik olarak genişletilebilir. Şimdi f fonksiyonunun K kontinyumundaki cebirsel polinomlarla düzgün yaklaşımı araştıralım.

Bir $P_n(z)$ cebirsel polinomunun K kontinyumunda analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşımının ölçüsünü ,

$$\|f - P_n(z)\| = \max_{z \in K} |f(z) - P_n(z)| \tag{4.1}$$

olarak tanımlayalım. Bu norma düzgün norm denir.

$$E_n(f, K) = \inf_{P_n \in \wp_n} \|f - P_n\| \tag{4.2}$$

sayısını tanımlayalım. Burada infimum $P_n \in \wp_n$ polinomları üzerinden alınır. $E_n(f, K)$ sayısına, f fonksiyonunun *düzgün normda en iyi yaklaşım sayısı* denir. $\wp_n$ sınıfında

$$\|f - Q_n\| = \max_{z \in K} |f(z) - Q_n(z)| = E_n(f, K) \tag{4.3}$$

koşulunu sağlayan bir tek $Q_n(z)$ cebirsel polinomu vardır. Bu $Q_n(z)$ polinomuna, K kontinyumunda $f(z)$ fonksiyonuna *düzgün normda en iyi yaklaşan polinom* denir. Yaklaşım teorisinde gösterilir ki $\{E_n(f)\}$ dizisi n' ye göre göre monoton azalandır ve

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f, K) = 0 \tag{4.4}$$

dir. Bu dizinin monoton azalan olduğu açıktır. Limitin sıfıra eşitliği ise yaklaşım teorisinde yapılmış olan bir dizi araştırmaların sonucudur. (4.4) koşulunun sağlanması için f fonksiyonunun ve yaklaşımının gerçekleştirildiği K kontinyumu üzerine konulan koşullar aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

4.1.1 Teorem (S. N. Mergelyan, M. V. Keldysh, M. A. Lavrentiev): Kompleks düzlemde verilmiş bir $K \subset \mathbb{C}$ alt kümesinde $E_n(f) = E_n(f, K)$ sayıları için $\lim_{n\to\infty} E_n(f)$=0 bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter koşul K kümesinin sınırlı, kapalı bir küme olması ve düzlemi bölmesidir. Bu eşitlik sadece ve sadece K kontinyumunun iç noktalarında analitik ve K kontinyumunda sürekli olan fonksiyonlar için geçerlidir.

$f(z)$ fonksiyonu G_R bölgesinde analitik ise $\{E_n(f,K)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin sıfıra yaklaşım hızının R ile doğru orantılı şekilde arttığını gösteren, S.N. Bernstein ve J. Walsh tarafından ispatlanan aşağıdaki düz teoremi verelim.

4.1.2 Teorem (S.N. Bernstein, J. Walsh): $f(z)$ fonksiyonu $R > 1$ için G_R kanonik bölgesinde analitik ise her $\varepsilon > 0$ için $\exists c_1(\varepsilon)$ sabiti vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$E_n(f,K) \le \frac{c_1(\varepsilon)}{(R-\varepsilon)^n}, \qquad (R - \varepsilon > 1) \tag{4.5}$$

olur.

İspat: $f(z)$ fonksiyonu K kontinyumunda analitik olduğundan $\forall z \in K$ için,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Phi_k(z) \quad , \quad z \in K$$

Faber serisine açılabilir. (4.1) formülüne göre $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşan $P_n(z)$ polinomunu olarak bu fonksiyonun Faber serisinin,

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \Phi_k(z)$$

biçimindeki kısmi toplamını alalım. O halde K kontinyumunda,

$$R_n(z,f) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, \Phi_k(z), \quad z \in K \tag{4.6}$$

Faber serilerinin kalan terimini değerlendirmemiz yeterlidir.

$\varepsilon_1 > 1$ sayısını yeterince küçük seçtiğimizde,

$$|\Phi_k(z)| \leq c_2(\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1)^k, \qquad z \in K \tag{4.7}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan $\varepsilon_2 > 0$ ise $c_3(\varepsilon_2)$, $\Gamma_{R-\varepsilon_2}$ eğrisi üzerinde tanımlı olan $f(z)$ fonksiyonunun modülünün en büyük değeri olmak üzere a_k Faber katsayıları için,

$$|a_k| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R-\varepsilon_2} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt\right| \leq \frac{c_3(\varepsilon_2)}{(R-\varepsilon_2)^k} \tag{4.8}$$

bağıntısı yazılabilir. ε_1 ve ε_2 sayıları yeterince küçük seçildiğinden $1+\varepsilon_1 < R-\varepsilon_2$ eşitsizliğinin her zaman sağlandığı görülür. Bu durumda (4.6), (4.7) ve (4.8) den,

$$|R_n(z,f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\,\Phi_k(z)\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_3(\varepsilon_2)}{(R-\varepsilon_2)^k} c_2(\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1)^k$$

$$\leq c_4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon_1)^k}{(R-\varepsilon_2)^k} = c_4 \frac{(\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2})^{n+1}}{1-\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2}}$$

$$\leq c_5(\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2})^n \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. ε_1 ve ε_2 sayıları yeterince küçük seçilebildiğinden,

$$\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2} = \frac{1}{R-\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_2+\varepsilon_1 R}{1+\varepsilon_1} \tag{4.10}$$

eşitsizliklerindeki ε değeri yeterince küçük sabitlenmiş değer olarak alınabilir. O halde (4.9) bağıntısından,

$$R_n(z,f) \leq \frac{c_6(\varepsilon)}{(R-\varepsilon)^n}, \qquad z \in K$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Benzer şekilde, $\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2} = \frac{1}{R} + \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 R+\varepsilon_2}{R^2-\varepsilon_2 R}$ alınırsa (4.5) eşitsizliğini,

$$E_n(f,K) \leq c_7 \left(\frac{1}{R} + \varepsilon_0\right)^n, \qquad \frac{1}{R} + \varepsilon_0 < 1 \tag{4.11}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. (4.5) ve (4.11) eşitsizlikleri G_R de analitik olan $f(z)$ fonksiyonu için $\{E_n(f,K)\}$ dizisinin genel terimi $q := \frac{1}{R}$ sayısına çok yakın bir oranla sıfıra gittiğini gösterir. (4.11) bağıntısında,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R} + \varepsilon_0$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon_0 > 0$ sayısı yeterince küçük olduğundan ve bu eşitsizliğin sol tarafı ε_0'a bağlı olmadığından $\varepsilon_0 \to 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R} \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (Bu tip değerlendirmelere asimptotik değerlendirmeler denir.)

Sonuç olarak; $f(z)$ fonksiyonu, $R > 1$ olmak üzere G_R bölgesinde analitik ise f fonksiyonunun K kontinyumu üzerinde en iyi düzgün yaklaşımları için (4.12) bağıntısı sağlanır. Bu teorem, $K = [-1,1]$ olduğunda Bernstein tarafından 1911 yılında ispatlanmıştır. 1926 yılında da Walsh tarafından bu teoremin genel durumu araştırılmıştır.

4.2 Bernstein & Walsh Ters Teoremler

Bir önceki bölümde $f(z) \in A(G_R)$ olduğunda,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}$$

olduğu ispatlandı. Bu bölümde de,

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}$$

olduğunda $f(z) \in A(G_R)$ olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle Bernstein & Walsh lemması olarak bilinen lemmayı verelim.

4.2.1 Lemma (S. N. Berstein, J.Walsh): Derecesi $\leq n$ olan $P_n(z)$ cebirsel polinomu K kontinyumunda

$$\max_{z\in K}|P_n(z)| \leq M \tag{4.13}$$

koşulunu sağlıyorsa bu polinom $\forall R > 1$ için,

$$|P_n(z)| \leq M\, R^n, \qquad z \in \overline{G_R}\,, R > 1 \tag{4.14}$$

eşitsizliğini sağlar.

Görüldüğü gibi bu lemmada cebirsel polinomun K kontinyumundaki maksimal değerine göre polinomun daha geniş bölgede artış hızı, R ve n derecesine bağlı olarak değerlendirilmektedir.

İspat:

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}, \qquad z \in G^- \tag{4.15}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $F(z)$ fonksiyonu G^- bölgesinde analitiktir ve a_n, $P_n(z)$ polinomunun başkatsayısı ve γ , (3.1) bağıntısında tanımlanan değer olmak üzere,

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{\varphi(z)}\right)^n \left(\frac{P_n(z)}{z^n}\right) = \frac{a_n}{\gamma^n}$$

dir. $1 < \rho < R$ olmak üzere Γ_ρ eğrisi üzerinde,

$$\max_{\varsigma\in\Gamma_\rho}|F(\varsigma)| = \frac{1}{\rho^n}\max_{\varsigma\in\Gamma_\rho}|P_n(\varsigma)| = \frac{1}{\rho^n}\left|P_n(\varsigma_\rho)\right|$$

eşitliğini yazabiliriz. $F(z)$ fonksiyonu G_ρ bölgesinde analitiktir. (4.15) bağıntısından

$$|F(z)| = \left|\frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}\right| \leq \max_{\varsigma\in\Gamma_\rho}|F(\varsigma)| = \frac{1}{\rho^n}\left|P_n(\varsigma_\rho)\right| \tag{4.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $z \in \Gamma_R$ ve $\varsigma_\rho \in \Gamma_\rho$ noktaları için,

$$|P_n(z)| \leq \frac{R^n}{\rho^n}\left|P_n(\varsigma_\rho)\right| \tag{4.17}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliğin sol tarafı ρ dan bağımsızdır. Şimdi monoton azalarak 1'e yaklaşan (ρ_k) dizisini alalım. Bu diziye uygun olarak $\left(\varsigma_{\rho_k}\right)$ noktalar dizisini alalım. Bu $\left(\varsigma_{\rho_k}\right)$ dizisi sınırlı olduğundan $\left(\varsigma_{\rho_k}\right)$ dizisinin yakınsak (ς_m) alt dizisi vardır. Bu alt dizinin limiti ς_0 olsun. Bu limit noktası $\partial K = \Gamma$ sınırı üzerinde olmak zorundadır. $|P_n(\varsigma)|$ fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty}|P_n(\varsigma_m)| = |P_n(\varsigma_0)|, \qquad \varsigma_0 \in \Gamma \subset K \tag{4.18}$$

dir. Diğer taraftan (4.13) bağıntısından $|P_n(\varsigma_0)| \leq M$ dir. (4.17) bağıntısını (ς_m) dizisi için tekrar yazarsak,

$$|P_n(z)| \leq \frac{R^n}{\rho_m^n}|P_n(\varsigma_m)|, \qquad |\varphi(\varsigma_m)| = p_m$$

eşitsizliğini elde ederiz. $m \to \infty$ için bu eşitsizliğin limitini alırsak (4.17) bağıntısından,

$$|P_n(z)| \leq M\,R^n, \qquad \forall z \in \Gamma_R$$

eşitsizliği elde edilir.■

Şimdi Bernstein & Walsh ters teoremini verelim.

4.2.2 Teorem(S.N. Berstein, J.Walsh): $f(z)$ fonksiyonu K kontinyumunda sürekli ve K kontinyumunun iç noktalarında analitik bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R} < 1 \tag{4.19}$$

ise $f(z)$ fonksiyonu G_R bölgesinde analitiktir.

İspat: (4.19) koşuluna göre $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n > n_0$ olduğunda,

$$E_n(f,K) \leq \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n, \qquad n > n_0$$

eşitsizliğinden $c_1(\varepsilon)$ sabiti ve $\forall n$ için

$$E_n(f,K) \leq c_1\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n, \qquad n \geq 1$$

olur. Bu eşitsizliğe göre öyle bir $\{P_n(z)\}$ polinomlar dizisi vardır ki bu dizi için,

$$|f(z) - P_n(z)| \leq E_n(f, K) \leq c_1 \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n, \qquad z \in K \tag{4.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\{P_n(z)\}$ dizisinin G_R bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Yani $\{P_n(z)\}$ dizisinin G_R bölgesinin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsadığını gösterelim. Bunun için,

$$P_0(z) + [P_1(z) - P_0(z)] + \cdots + [P_n(z) - P_{n-1}(z)] + \cdots \tag{4.21}$$

serisinin G_R bölgesinde düzgün yakınsadığını göstermek yeterli olacaktır. $F \subset G_R$ kompakt kümesini alalım. Buna göre $F \subset \overline{G_\rho}$ olacak şekilde $\rho < R$ vardır. Öte yandan (4.20) bağıntısından $\forall z \in K$ için,

$$\begin{aligned} |P_n(z) - P_{n-1}(z)| &\leq |P_n(z) - f(z)| + |f(z) - P_{n-1}(z)| \\ &\leq c_1(\varepsilon) \left[\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n + \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^{n-1}\right] \\ &\leq c_2(\varepsilon) \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n \end{aligned} \tag{4.22}$$

dir. Şimdi $P_n(z) - P_{n-1}(z)$ polinomuna Bernstein & Walsh lemmasını uygulayalım. Bu polinom (4.22) eşitsizliğini sağladığından $\forall z \in \overline{G_\rho}$ için,

$$|P_n(z) - P_{n-1}(z)| \leq c_2(\varepsilon) \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n \rho^n \tag{4.23}$$

ifadesini yazabiliriz. $\rho < R$ olduğundan $q = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)\rho = \frac{\rho}{R} + \varepsilon\rho < 1$ olacak şekilde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. $\forall z \in G_\rho$ olduğundan (4.23) eşitsizliğine göre (4.21) serisi $c_2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ düzgün yakınsak serisine göre değerlendirilmiş olur. Sonuç olarak (4.21) serisi ve $\{P_n(z)\}$ dizisi G_R bölgesinde düzgün yakınsaktır. Fakat $\{P_n(z)\}$ dizisi K kontinyumunda $f(z)$ fonksiyonu için düzgün yakınsaktır. O halde K kontinyumundan G_R bölgesine kadar $f(z)$ fonksiyonu analitik olarak genişletilebilir.■

Bernstein & Walsh Ters ve Düz Teoremlerini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

$f(z)$ fonksiyonunun G_R kanonik bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f, K)} \leq \frac{1}{R}$$

olmasıdır. Şimdi bu sonuncu eşitsizlikteki eşitlik durumunu inceleyim.

4.2.3 Tanım: K basit bağlantılı tümleyene sahip bir kontinyum olsun. $f(z)$ fonksiyonu G_R kanonik bölgesinde analitik ve G_R kanonik bölgesinin sınırının en az bir noktasında $f(z)$ fonksiyonu aykırı noktaya sahip olsun. Bu durumda bu koşulu sağlayan G_R bölgelerinin en küçüğüne $f(z)$ fonksiyonunun *en büyük doğal analitiklik bölgesi* denir.

4.2.4 Teorem: $R > 1$ olmak üzere G_R kanonik bölgesinin $f(z)$ fonksiyonunun en büyük doğal analitiklik bölgesi olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$$

olmasıdır.

İspat:

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$$

ise (4.12) eşitsizliği sağlanır. Bernstein & Walsh ters teoremine göre $f(z)$ fonksiyonu G_R bölgesinde analitiktir.

Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonunun Γ_R eğrisi üzerinde aykırı noktası olmasın. O halde $R_1 > R$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu G_{R_1} bölgesinde analitiktir. Bernstein & Walsh düz teoreminden,

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} \le \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R}$$

olur. Fakat bu eşitsizlik $\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$ eşitliği ile çelişir. O halde $f(z)$ fonksiyonu Γ_R eğrisi üzerinde aykırı noktaya sahiptir. Bundan dolayı G_R bölgesi $f(z)$ fonksiyonunun en büyük analitiklik bölgesi olur. Teoremin yeterlilik koşulu ispatlanmış olur.

$f(z)$ fonksiyonu G_R bölgesinde analitik ve Γ_R üzerinde en az bir aykırı noktaya sahip olsun. Bernstein & Walsh düz teoreminden,

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{E_n(f,K)} \le \frac{1}{R}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik $R_1 > R$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonunun G_1 bölgesinde analitik olması durumunda geçerli değildir. Çünkü $f(z)$ fonksiyonu Γ_R üzerinde en az bir aykırı noktaya sahiptir. ■

4.3 Kanonik Bölgelerde Maksimal Yakınsaklık Teoremleri

K; bağlantılı tümleyene sahip sınırlı kontinyum ve $f(z)$, K da analitik bir fonksiyon olsun.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Phi_k(z), \quad z \in K \tag{4.24}$$

Faber serisine açılabilir. Bu Faber seri açılımı K kontinyumunda mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(\varsigma)\varphi'(\varsigma)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)}d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt\ , \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{4.25}$$

Faber katsayıları olmak üzere,

$$R_n(z,f) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, \Phi_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, \Phi_k(z) \tag{4.26}$$

olarak tanımlanırsa $f(z)$ Faber serisinin n. kalan terimi elde edilir. (4.25) ve (4.26) eşitliklerden,

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t))\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right\}dt \tag{4.27}$$

eşitliğini yazabiliriz. $P_n(z)$, $\overline{G_R}$ bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna düzgün normda en iyi yaklaşan polinom olsun. Bu durumda (4.27) bağıntısından,

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} \{f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right\}dt \tag{4.28}$$

olur. Diğer yandan

$$\Phi_k(z) = [\varphi(z)]^k + E_k(z), \quad z \in K$$

olduğundan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{t^{k+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(z)}{t^{k+1}} \tag{4.29}$$

olur. (4.28) , (4.29) bağıntıları ve $z=\psi(w)$ olduğu göz önüne alındığında

$$|R_n(z,f)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\big(\psi(t)\big)-P_n\big(\psi(t)\big)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\big(\psi(t)\big)-P_n\big(\psi(t)\big)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k\big(\psi(w)\big)}{t^{k+1}}\right||dt| \tag{4.30}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$F(\tau,w):=\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)}-\frac{1}{\tau-w},\qquad |\tau|>1,\qquad |w|>1$$

olmak üzere

$$E_k\big(\psi(w)\big)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho}\tau^kF(\tau,w)d\tau\,,\qquad |w|\geq\rho>1 \tag{4.31}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho}|F(\tau,w)||d\tau|\leq\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}} \tag{4.32}$$

değerlendirmeleri bilinmektedir [3].

4.3.1 Tanım : $f(z)\in E_p(G_R)$ ise $p>1$ olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonunun n. dereceden p ortalamada en iyi yaklaşım sayısını

$$E_n^{(p)}(f;\Gamma_R):=\inf_{P_n\in\wp_n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}|f(\varsigma)-P_n(\varsigma)|^p|\varphi'(\varsigma)||d\varsigma|\right]^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlayalım.

Bu bölümde araştıracağımız problem;

$$\Gamma_\rho := \{z \in G^- : |\varphi(z)| = \rho, \qquad 1 < \rho < R\}$$

olmak üzere $p > 1$ için $f(z) \in E_p(G_R)$ ve $z \in \overline{G_\rho}$ olduğunda $f(z)$ fonksiyonunun Faber serisinin kısmi toplamının yaklaşım hızını değerlendirmektir.

Şimdi esas teoremi ve ispatını verelim.

4.3.2 Teorem : $p > 1$ için $f(z) \in E_p(G_R)$ ve $z \in \overline{G_\rho}$ olduğunda,

$$|R_n(z,f)| \le c^* \left(\frac{\rho}{R}\right)^n E_n^{(p)}(f, \Gamma_R) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=R} \frac{|dt|}{|t-\rho|^q}\right]^{\frac{1}{q}} \sqrt{\mathrm{n}\ln n}\ , \qquad n > 1$$

dir. Burada $c^* > 0$ sabiti n ve z den bağımsızdır.

İspat: $z \in \Gamma_{\rho'}$, $\rho < \rho' < R$ ve $P_n(z)$, $f(z) \in E_p(G_R)$ fonksiyonuna derecesi $\le n$ olan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olsun.

$$I_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

ve

$$I_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

olarak tanımlandığında (4.30) bağıntısından,

$$|R_n(z,f)| \le I_1 + I_2 \tag{4.33}$$

olduğu görülür.

$$I_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

eşitliğine $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$I_1 \le \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right|^p |dt|\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right|^q |dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+2}}+\frac{w^{n+2}}{t^{n+3}}+\cdots\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+2}}\left(1+\frac{w}{t}+\left(\frac{w}{t}\right)^2\ldots\right)\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+2}}\frac{t}{t-w}\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+1}}\right|^q\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t-w|^q}|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{c_1^*\rho^{n+1}}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t-\rho|^q}|dt|\right\}^{\frac{1}{q}},\qquad |t|=R,|w|=\rho$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$I_1\leq\frac{c_1^*\rho^{n+1}}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t-\rho|^q}|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}\tag{4.34}$$

bulunur. Şimdi I_2 integralini hesaplayalım. $|w|\geq\rho'>\rho$ olduğundan

$$I_2:=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|$$

eşitliği için (4.31) bağıntısından

$$I_2:=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho'}\frac{F(\tau,w)\tau^k}{t^{k+1}}d\tau\right||dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))\right|\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\tau|=\rho'}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right|\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\tau|=\rho'}\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+2}} + \frac{\tau^{n+2}}{t^{n+3}} + \cdots\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right|\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\tau|=\rho'}\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+2}}(1 + \frac{\tau}{t} + \cdots)\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right|\left\{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\tau}{t}\right|^{n+1}\int\limits_{|\tau|=\rho'}\left|\frac{1}{t-\tau}\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

bulunur . Fubini teoremine göre,

$$I_2 \leq \frac{{\rho'}^{n+1}}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|\tau|=\rho'}|F(\tau,w)|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right|\frac{|dt|}{|t-\tau|}\right\}|d\tau|$$

olup Hölder eşitsizliğinden

$$I_2 \leq \frac{{\rho'}^{n+1}}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|\tau|=\rho'}|F(\tau,w)|\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-\tau|^q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}|d\tau|$$

$$\leq \frac{{\rho'}^{n+1}}{2\pi R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\int\limits_{|\tau|=\rho'}|F(\tau,w)|\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-\tau|^q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}|d\tau|$$

elde edilir. (4.32) bağıntısından,

$$I_2 \leq \frac{{\rho'}^{n+1}}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\sqrt{\frac{{\rho'}^2}{{\rho'}^4-1}\ln\frac{{\rho'}^2}{{\rho'}^2-1}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-\rho|^q}\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad (4.35)$$

elde edilir. (4.33), (4.34) ve (4.35) eşitsizliklerinden,

$$|R_n(z,f)| \leq {c_2}^*\left(\frac{\rho'}{R}\right)^{n+1}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\sqrt{\frac{{\rho'}^2}{{\rho'}^4-1}\ln\frac{{\rho'}^2}{{\rho'}^2-1}}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-\rho|^q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte, $z \in \overline{G_\rho}$ ve $\rho' := \rho + \frac{1}{n}$ alınırsa

$$|R_n(z,f)| \leq c_3{}^* \left(\frac{\rho}{R}\right)^n E_n^{(p)}(f,\Gamma_R) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \frac{|dt|}{|t-\rho|^q}\right]^{\frac{1}{q}} \sqrt{\mathrm{n}\ln n}, \qquad n > 1$$

eşitsizliği elde edilir.■

Yukarıdaki teorem özel halde $\rho = 1$ olması durumunda $z \in K$ için P. K. Suetin tarafından ispatlanmıştır [3].

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında; Faber polinomları, bu polinomların asimptotik özellikleri, Faber serileri ve bu serilerin maksimal yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

$f(z)$ fonksiyonunun G_R, $R > 1$, kanonik bölgesinde analitik olması koşulu altında G_ρ, $1 < \rho < R$, bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna, Faber serisinin kısmi toplamı ile yaklaşım hızı değerlendirilmiştir. Bu değerlendirme, aynı koşul altında Suetin tarafından elde edilen Faber serisinin kısmi toplamının $f(z)$ fonksiyonuna K kontinyumu üzerindeki yaklaşımı veren sonucun bir genelleştirilmesidir.

6. KAYNAKLAR

[1] Markushevich, A. I. , *Theory of Functions of a Complex Variable III* , Prentice Hall, Inc., 8-104, (1967).

[2] Pommerenke, C. , *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1, (1975).

[3] Suetin, P. K. , *Series of Faber Polynomials.*, Gordon and Breach, 33-208, (1998).

[4] Başkan, T. , *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Vipaş A. Ş., Bursa,126-313, (2000).

[5] Balcı, M. , *Reel Analiz*, Ankara, 125, (2000).

[6] Pommerenke, Ch. , *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, Heidenberg, NewYork, 24-41, (1992).

[7] Duren, P.L. , *Theory of* H_p *Space,*. New York, San Francisco, London, 169, (1970).

[8] Aliprantis, C.D. and Burkinsow O. , *Principlesof real analysis, New York,* (1998).

[9] Goluzin, G. M. , *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 26, Amer. Math. Sac, 388, (1969).

[10] De Vore, R. A. and Lorentz, G. G. , *Constructive Approximation*, Springer-Verlag , (1993)

[11] Güven, A. , "*Faber Polinomları ve Onların Yaklaşım özellikleri*" , Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Ana Bilim Dalı, Balıkesir, (2000).

[12] Krosnoselskii, M. A. and Ruticki, Ya. , B. , *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd. , Groningen, (1961).

[13] Lehto, O. and Virtanen, K. , *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, (1973).