T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA CEBİRSEL POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan YURT

Balıkesir, Haziran-2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA CEBİRSEL POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan YURT

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali GÜVEN

Sınav Tarihi: 15.06.2011

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Ali GÜVEN (Danışman) (BAÜ)
Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun …………. tarih ………. sayılı oturumunun ….. nolu kararı ile ………………………… Mezun olmuştur.

Balıkesir, Haziran-2011

ÖZET

REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARINDA CEBİRSEL POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

Hasan YURT
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali GÜVEN)

Balıkesir, 2011

Bu çalışmanın amacı analitik fonksiyonların bazı sınıflarında yaklaşım teorisinin bazı problemlerini incelemektir.

Giriş ve sonuç bölümü dışında bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır.

2. Bölümde; Yaklaşım probleminin inceleneceği fonksiyon uzayları ve analitik fonksiyonların sınıfları tanıtılmıştır. Ayrıca, Dini – düzgün eğriler tanıtılmış ve yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Cauchy singüler operatörünün sınırlılığı ile ilgili sonuçlara değinilmiştir.

3. Bölümde; Bir Jordan eğrisinin iç ve dış bölgelerinin birim diskin dışına konform dönüşümleri ve bunların bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu dönüşümler yardımıyla yaklaşım probleminin çözümünde kullanılacak olan polinom ve rasyonel fonksiyonlar inşa edilmiştir.

4. Bölümde; Analitik fonksiyonların bazı sınıflarında cebirsel polinomlarla yaklaşım teorisinin bazı düz teoremleri ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Rearrangement invariant uzay, Faber polinomları, Faber - Laurent polinomları, Dini – düzgün eğri, Cauchy singüler operatörü, Düz teorem.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS IN REARRANGEMENT INVARIANT SPACES

Hasan YURT

Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(M.Sc. Thesis / Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali GÜVEN)

Balıkesir, 2011

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation theory in some classes of analytic functions.

Except the introductory and the conclusion chapters, the thesis consists of three main chapters.

In Chapter 2; The function spaces and some classes of analytic functions, which the approximation problems will be investigated in them were introduced. Further, Dini - smooth curves were introduced and the results about boundedness of the Cauchy singular operator, which plays an important role in Approximation theory , were introduced.

In Chapter 3; The conformal mappings of interior and exterior domains of a Jordan curve onto the exterior of the unit disk and their some properties were discussed. In this chapter, the polynomials and rational functions, which will be used in solutions of approximation problems were constructed.

In Chapter 4; In some suitable classes of Rearrangement invariant spaces, some direct theorems of approximation theory were stated and proved.

KEYWORDS: Rearrangement invariant space, Faber polynomials, Faber - Laurent polynomials, Dini - smooth curve, Cauchy singular operator, Direct theorem.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Tanımı**
$\mathbf{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbf{C}}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{T}$	Kompleks düzlemde birim çember
U	Kompleks düzlemde birim disk
Γ	Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi
S_Γ	Cauchy singüler operatörü
Γ_R	Seviye eğrisi
α_X , β_X	Alt ve üst Boyd indisleri
$X(\Gamma)$	Γ eğrisi üzerinde bir Rearrangement invariant uzay
$\wp_n$	Derecesi *n*’ yi aşmayan cebirsel polinomların kümesi

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans çalışmam boyunca bana değerli zamanını ayıran, destekleyen, bilgi ve tecrübesiyle de bu tezin oluşmasında hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ali GÜVEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans çalışmam süresince desteklerini gördüğüm, üzerimde çok emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov, Doç. Dr. Recep Şahin, Doç. Dr. Ramazan Akgün ve Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır'a çok teşekkür ederim.

Son olarak türlü zorluklara katlanarak beni yetiştiren, her zaman yanımda olan, haklarını asla ödeyemeyeceğim Annem ile Babama sonsuz teşekkürler.

Balıkesir, 2011 **Hasan YURT**

2. GİRİŞ

Matematiğin hemen hemen tüm alanlarında, araştırılması zor olan fonksiyonlara iyi özelliklere sahip olan daha basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri büyük önem taşımaktadır. Genellikle iyi özelliklere sahip olan basit fonksiyonlar olarak incelenmesi gereken temel fonksiyonlar uzayının belirli alt uzayları seçilir. Bu alt uzayların elemanlarının temel uzayın elemanlarına göre daha basit ve iyi özelliklere sahip olması gerekir. Bu açıdan baktığımızda yaklaşım teorisinde sık kullanılan alt uzaylar olarak cebirsel polinomlar, rasyonel fonksiyonlar kümesi veya trigonometrik polinomlar kümesi (periyodik durumda) alınır.

Yaklaşım teorisindeki temel problemlerden biri, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığıdır. Özel halde, alt uzaylar olarak polinomlar kümesi alındığında Banach uzaylarında en iyi yaklaşım elemanının varlığı iyi bilinmektedir. Bu problemin pozitif çözümü bir sonraki problemin, verilen fonksiyonla buna en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın, fonksiyonun belli karakteristikleri (örneğin, süreklilik modülü) yardımıyla değerlendirilmesi problemin çözümü için bir altyapı oluşturmaktadır. En iyi yaklaşım hatasının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Bunun tam tersi olan yani fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre bu fonksiyonun özellikleriyle ilgili bilgi veren problemlere ise yaklaşım teorisinin ters problemleri denir. Bu durumda, süreklilik modülü üstten en iyi yaklaşım sayısı ile değerlendirilir ve fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre hangi sınıfa ait olduğu hakkında bilgi edinme amacı güdülür. En ideal durum, belli bir sınıfta elde edilen düz ve ters teoremlerin gerek ve yeter koşul olarak ifade edilebilmesidir.

Bu tez çalışmasında Rearrangement invariant uzaylarda yaklaşım teorisinin düz problemleri incelenmiştir. Temel uzaylar olarak bakılan Rearrangement invariant uzaylar, Lebesgue uzaylarının doğal genelleştirilmeleridir. Ayrıca sınır değerleri $X(\Gamma)$ Rearrangement invariant uzayına ait olan $f \in E_1(G)$ fonksiyonlarının $E_X(G)$ sınıfları $E_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ Smirnov sınıflarının genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

$E_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ Smirnov sınıflarında yaklaşım birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. $E_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ Smirnov sınıflarında yaklaşım çalışmaları ve farklı uzaylarda yaklaşım ile ilgili bilgiler [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] ve [15] kaynaklarında bulunabilir.

Bütün bu çalışmalarda, Faber polinomları ve p – Faber polinomları kullanılmış ve yaklaşımın derecesi fonksiyonların Faber serilerine değişik toplama yöntemleri uygulanarak çalışılmıştır. Faber polinomları, 1903 yılında Alman matematikçi G. Faber tarafından tanımlanmıştır. Bu polinomlar kompleks fonksiyonların yaklaşımı teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Faber polinomlarının serileri, basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların gösterimi için kullanılmış ve analitik fonksiyonların yaklaşımı ile ilgili birçok teorem bu serilerin yardımıyla ispatlanmıştır. Faber serileri, dairesel bölgeler için mevcut olan Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgelere doğal bir genelleştirmesidir.

Rearrangement invariant uzaylarda yaklaşım problemleri çalışılırken Cauchy singüler operatörü de en az Faber polinomları kadar önemli bir rol oynamaktadır. Bu operatörün Rearrangement invariant uzaylarda sınırlılığı problemi A. Yu. Karlovich tarafından çözülmüştür [16].

Bu tez çalışmasında, Dini – düzgün eğrileri üzerinde tanımlı Rearrangement invariant uzaylarda yeni süreklilik modülleri tanımlanmıştır. Bu eğrilerle sınırlanan bölgeler üzerinde yeni fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflarda yaklaşım teorisinin düz teoremleri çalışılmıştır.

Metin içinde geçen c, c_1, c_2,…, farklı bağıntılarda genelde farklı olan ve tanım ve teoremlerdeki esas parametrelere bağlı olmayan sabitlerdir.

2. UZAYLAR VE EĞRİLER

2.1. Fonksiyon Uzayları

Tanım 2.1. Kompleks düzlemde, bağlantılı ve açık bir kümeye bölge, bağlantılı ve kapalı bir kümeye de kontinyum denir [17].

Γ, kompleks düzlemde bir eğri olsun. Eğer Γ bir çembere homeomorfik ise buna bir Jordan eğrisi denir. Γ eğrisinin sınırlı değişimli bir parametrizasyonu var ise, bu eğriye sonlu uzunluklu eğri adı verilir.

Tanım 2.2. Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Γ üzerinde tanımlı ve

$$\| f \|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p \, |dz| \right)^{1/p}$$

koşulunu sağlayan $f : \Gamma \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının kümesini $L_p(\Gamma)$ ile gösterilir. $L_p(\Gamma)$, $\| \cdot \|_{L_p}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Gamma)$ Banach uzayına Lebesgue uzayı denir.

Γ**,** kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Γ eğrisinin $|d\tau|$ (Lebesgue yay uzunluğu) ölçüsü ile donatıldığını kabul edelim.

$\mathbf{M}(\Gamma)$ ile, ölçülebilir bütün $f : \Gamma \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının kümesini ve $\mathbf{M}^{+}(\Gamma)$ ile $\mathbf{M}(\Gamma)$ kümesinin $[0,\infty]$ aralığında değer alan elemanlarının kümesini gösterelim.

Bir ρ:$\mathbf{M}^+(\Gamma) \to [0,\infty]$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $f, g, f_n \in \mathbf{M}^+(\Gamma)$ ($n\in\mathbf{N}$) fonksiyonları, her $a \geq 0$ sabiti ve ölçülebilir her $E \subset \Gamma$ kümesi için aşağıdakiler sağlanıyorsa ρ dönüşümüne bir *fonksiyon normu* adı verilir:

(i) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *h.h.* (*hemen her yerde*),

$\rho(af) = a\rho(f)$,

$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

(ii) $0 \leq g \leq f$ *h.h.* $\Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$

(iii) $0 \leq f_n \uparrow f$ *h.h.* $\Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$

(iv) $\rho(\chi_E) < \infty$,

$$\int_E f|d\tau| \leq C_E\, \rho(f) .$$

Burada $C_E \in (0,\infty)$ E ve ρ 'ya bağlı fakat f fonksiyonuna bağlı olmayan bir sabittir.

ρ bir fonksiyon normu ise

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_\Gamma f(\tau)g(\tau)|d\tau| : f \in \mathbf{M}^+(\Gamma),\ \rho(f) \leq 1\right\}$$

dönüşümü de bir fonksiyon normu olur. Buna ρ fonksiyon normunun *eşlenik* normu adı verilir.

ρ bir fonksiyon normu olsun. $\rho(|f|) < \infty$ biçiminde bütün $f \in \mathbf{M}(\Gamma)$ fonksiyonlarının kümesini $X(\Gamma)$ ile gösterelim. $X(\Gamma)$ bir lineer uzaydır. Buna bir *Banach fonksiyon uzayı* adı verilir. $f \in X(\Gamma)$ fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{X(\Gamma)} = \rho(|f|)$$

olarak tanımlanırsa, $X(\Gamma)$ bir Banach uzayı olur.

ρ , ρ' fonksiyon normunun eşlenik normu olsun. ρ′ ile üretilen Banach fonksiyon uzayına $X(\Gamma)$ uzayının *eşlenik uzayı* denir ve $X'(\Gamma)$ ile gösterilir. Her $X(\Gamma)$ Banach fonksiyon uzayı, ikinci eşlenik uzayı ile çakışır, yani, $X(\Gamma) = X''(\Gamma)$ olur. Ayrıca, her $f \in X(\Gamma)$ için

$$\|f\|_{X(\Gamma)} = \|f\|_{X''(\Gamma)}$$

olur. Böylece

$$\|f\|_{X(\Gamma)} = \sup\left\{\int_{\Gamma} |f(\tau)g(\tau)|\,|d\tau| : g \in X'(\Gamma),\ \|g\|_{X'(\Gamma)} \leq 1\right\} \tag{2.1}$$

ve

$$\|g\|_{X'(\Gamma)} = \sup\left\{\int_{\Gamma} |f(\tau)g(\tau)|\,|d\tau| : f \in X'(\Gamma),\ \|f\|_{X(\Gamma)} \leq 1\right\} \tag{2.2}$$

elde edilir [18].

Teorem 2.4. $X(\Gamma)$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $X'(\Gamma)$ bu uzayın eşlenik Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $f \in X(\Gamma)$ ve $g \in X'(\Gamma)$ ise,

$$\int_{\Gamma} |f(\tau)g(\tau)|\,|d\tau| : \|f\|_{X(\Gamma)}\|g\|_{X'(\Gamma)} \tag{2.3}$$

Hölder eşitsizliği sağlanır [18].

$\mathbf{M}_0(\Gamma)$ ve $\mathbf{M}_0^+(\Gamma)$, sırasıyla $\mathbf{M}(\Gamma)$ ve $\mathbf{M}^+(\Gamma)$ ’ nın hemen her yerde sonlu fonksiyonlarının sınıfları olsunlar. Bir $f \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ fonksiyonun *dağılım* (*distribution*) fonksiyonu,

$$m_f(\lambda) = \left|\{z \in \Gamma : |f(z)| > \lambda\}\right|, \lambda \geq 0$$

olarak tanımlanır. Eğer $f, g \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ fonksiyonları için

$$m_f(\lambda) = m_g(\lambda), \lambda \geq 0$$

oluyorsa, f ve g fonksiyonlarına *eş-ölçülebilir* (*equimeasurable*) fonksiyonlar denir.

Tanım 2.5. *Eğer her f, $g \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ eş-ölçülebilir fonksiyon çifti için $\rho(f) = \rho(g)$ oluyorsa, ρ fonksiyon normuna rearrangement invariant fonksiyon normu denir. Bu durumda, ρ ile üretilen Banach fonksiyon uzayına bir rearrangement invariant (R. I.) uzay adı verilir.*

Bir $X(\Gamma)$ Banach fonksiyon uzayının R. I. olması için yeterli koşul, bunun $X'(\Gamma)$ eşlenik uzayının R. I. olmasıdır [18].

$X(\Gamma)$ R. I. uzayı için

$$L_\infty \subset X(\Gamma) \subset L_1(\Gamma) \tag{2.4}$$

olur.

$f \in \mathbf{M}_0(\Gamma)$ olsun.

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : m_f(\lambda) \leq t\}, t \geq 0$$

biçiminde tanımlanan f^* fonksiyonuna, f fonksiyonunun *azalan rearrangementi* denir.

$X(\Gamma)$, sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisi üzerinde bir R. I. uzay olsun. Luxemburg gösterim teoremine göre [18], $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ üzerinde, her $f \in \mathbf{M}_0^+(\Gamma)$ için ,

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*)$$

olacak şekilde bir $\bar{\rho}$ R. I. fonksiyon normu vardır. $\mathbf{R}_+$ üzerinde $\bar{\rho}$ ile üretilen R. I. uzayı $\bar{X}$ ile gösterelim.

$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_+)$ üzerinde, $x > 0$ için

$$E_x(f)(t) = \begin{cases} f(xt), & xt \in [0, |\Gamma|] \\ 0, & xt \notin [0, |\Gamma|] \end{cases}, \quad t > 0$$

biçiminde tanımlanan E_x operatörünü göz önüne alalım. $\mathbf{B}(\bar{X})$ ile $\bar{X}$ üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini gösterelim. Her $x > 0$ için $E_{1/x} \in \mathbf{B}(\bar{X})$ olur [18]. $h_X(x)$ ile $E_{1/x}$ operatörünün operatör normunu gösterelim, yani,

$$h_X(x) = \| E_{1/x} \|_{\mathbf{B}(\bar{X})}$$

olsun.

$$\alpha_X = \sup_{0<x<1} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

ve

$$\beta_X = \inf_{0<x<\infty} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

biçiminde tanımlanan α_X ve β_X sayılarına $X(\Gamma)$ R. I. uzayının sırasıyla alt ve üst *Boyd indisleri* denir. Boyd indisleri,

$$0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$$

eşitsizliklerini sağlar. Eğer

$$0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$$

ise, Boyd indisleri *nontrivial* 'dir denir.

2.2. Analitik Fonksiyonların Bazı Sınıfları

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $0 < p < \infty$ olsun. Jordan eğri teoremine göre, her Jordan eğrisi, kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız olan ve bu eğriyi ortak sınır kabul eden iki basit bağlantılı bölgeye ayırır. G ile Γ eğrisinin iç bölgesini ve G^- ile Γ eğrisinin dış bölgesini gösterelim.

Ayrıca $U = \{ z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$olsun.

Γ_r , $0< r < 1$, U diskinin G bölgesi üzerine bir konform dönüşümü altında $\{ w : |w| = r, 0< r < 1 \}$ çemberinin görüntüsü olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $E_p(G)$ ile gösterelim. $E_p(G)$ sınıflarına *Smirnov sınıfları* denir.

Her $f \in E_p(G)$ $(0 < p < \infty)$ fonksiyonun Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır ve bu limit değerleri için yine f gösterimini kullanırsak $f \in L_p(\Gamma)$ olur [19].

Smirnov sınıflarının önemli bir özelliği Cauchy integral gösterimidir [19].

Teorem 2.6. *$f \in E_1(G)$ ise*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \begin{cases} f(z), & z \in G \\ 0, & z \in G^- \end{cases} \tag{2.5}$$

olur.

$E_p(G^-)$ Smirnov sınıfıda benzer şekilde tanımlanır ve $E_p(G)$ ile aynı özelliklere sahiptir. Cauchy integral teoremi ise, $f \in E_1(G^-)$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \begin{cases} f(\infty) - f(z), & z \in G^- \\ f(\infty), & z \in G \end{cases} \tag{2.6}$$

biçimini alır.

$X(\Gamma)$, Γ üzerinde bir R. I. uzay olsun. $f \in X(\Gamma)$ biçimindeki $f \in E_1(G)$ fonksiyonlarının kümesini $E_X(G)$ ile ve $f \in X(\Gamma)$ biçimindeki $f \in E_1(G^-)$ fonksiyonlarının kümesini de $E_X(G^-)$ ile gösterelim :

$$E_X(G) = \{ f \in E_1(G) \ : \ f \in X(\Gamma) \}$$

$$E_X(G^-) = \{ f \in E_1(G^-) : f \in X(\Gamma) \} .$$

Kompleks düzlemde, derecesi en fazla $n \in \mathbf{N}$ olan cebirsel polinomların kümesini $\wp_n$ ile gösterelim.

Tanım 2.7. $f \in E_X(G)$ olsun. $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere

$$E_n^X(f, G) := \inf_{p \in \wp_n} \| f - p \|_{X(\Gamma)}$$

sayısına f fonksiyonunun $\wp_n$ sınıfında en iyi yaklaşım sayısı denir.

2.3. Eğriler ve Cauchy Singüler Operatörü

h , $[0,2\pi]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. h fonksiyonun süreklilik modülü

$$\omega(t,h) := \sup\{|h(t_1) - h(t_2)| : t_1, t_2 \in [0,2\pi], |t_1 - t_2| \le t \} , \quad t \ge 0$$

olarak tanımlanır.

h fonksiyonu,

$$\int_0^{\pi} t^{-1}\omega(t,h)dt < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon Dini süreklidir denir [20].

Tanım 2.8. Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Γ eğrisinin φ_0' Dini sürekli ve $\varphi_0'(\tau) \neq 0$ biçiminde bir

$$\Gamma : \varphi_0(\tau), \qquad 0 \leq \tau \leq 2\pi$$

parametrizasyonu varsa, Γ eğrisine Dini - düzgün eğri denir [20].

Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $t \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için, Γ eğrisinin t merkezli ve ε yarıçaplı açık disk içinde kalan parçasını $\Gamma(t,\varepsilon)$ ile gösterelim, yani,

$$\Gamma(t,\varepsilon) = \{ \tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon \}$$

olsun.

Tanım 2.9. Eğer

$$C_\Gamma = \sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{|\Gamma(t,\varepsilon)|}{\varepsilon} < \infty$$

koşulunu sağlanıyor ise Γ eğrisine bir *Carleson eğrisi* denir [10].

Bu tanımdaki C_Γ sayısına Carleson sabiti adı verilir. Bazı kaynaklarda Carleson eğrilerine Ahlfors regüler eğri, David regüler eğri ya da Ahlfors-David eğrisi de denmektedir [21].

Carleson eğrileri sınıfı çok geniş bir eğriler sınıfıdır. Dini- düzgün eğriler, Lyapunov eğrileri ve Lavrentiev eğrileri Carleson eğrileridir. Carleson eğrisi örnekleri [21] numaralı kaynakta bulunabilir.

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi, $G = Int\Gamma$ ve $G^{-} = Ext\Gamma$ olsun. $f \in L_1(\Gamma)$ için

$$f^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma\,, \quad z \in \mathrm{G} \qquad (2.7)$$

ve

$$f^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma\,, \quad z \in \mathrm{G}^{-} \qquad (2.8)$$

biçiminde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları, sırasıyla G ve G^{-} bölgelerinde analitiktir ve $f^{-}(\infty) = 0$ olur.

$f \in L_1(\Gamma)$ fonksiyonunun bir $z \in \Gamma$ noktasındaki *Cauchy singüler integrali,*

$$S_{\Gamma}(f)(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma(t,\varepsilon)} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\, d\varsigma$$

olarak tanımlanır. Bu limit hemen her $z \in \Gamma$ için mevcuttur [21].

Bir $f \in L_1(\Gamma)$ için, f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarından birinin Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri varsa, $S_{\Gamma}(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarından diğerinin de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır. Tersine olarak, $S_{\Gamma}(f)(z)$

Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcut ise, f^+ ve f^- fonksiyonlarının Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır. Her iki durumda da hemen her $z \in \Gamma$ için

$$f^+(z) = S_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2} f(z) \tag{2.9}$$

ve

$$f^-(z) = S_\Gamma(f)(z) - \frac{1}{2} f(z) \tag{2.10}$$

eşitlikleri sağlanır [22] ve böylece Γ üzerinde hemen her yerde

$$f = f^+ - f^- \tag{2.11}$$

olur.

$f \in L_1(\Gamma)$ fonksiyonuna, Γ üzerinde hemen her yerde $S_\Gamma(f)(z)$ değerini alan $S_\Gamma(f)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu şekilde tanımlanan S_Γ lineer operatörüne *Cauchy singüler operatörü* denir.

S_Γ lineer operatörünün sınırlılığı, yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu operatörün $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzayı üzerinde sınırlılığı problemi G. David tarafından çözülmüştür [23]. Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında ise sınırlılık problemi Muckenhoupt ağırlıkları kullanılarak çözülmüştür. A. Yu. Karlovich, David' in teoremini ve Boyd interpolasyon teoremini kullanarak, S_Γ operatörünün Orlicz uzayları üzerinde sınırlılığı problemi çözmüştür [24]. Bu teoremlerin ayrıntılı ispatları ve Cauchy singüler integrali ile ilgili geniş bilgi [21] numaralı kitabında bulunabilir.

Rearrangement invariant uzaylar üzerinde Cauchy singüler operatörünün sınırlığı problemi yine A. Yu Karlovich tarafından çözülmüştür [16]:

Teorem 2.10. $X(\Gamma)$ *nontrivial Boyd indislerine sahip bir R. I. Uzay olsun.* S_Γ *lineer operatörünün* $X(\Gamma)$ *uzayı üzerinde sınırlı olması için, yani*

$$\| S_\Gamma(f)\|_{X(\Gamma)} \leq c \, \| f \|_{X(\Gamma)}, \; f \in X(\Gamma)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul, Γ *eğrisinin bir Carleson eğrisi olmasıdır.*

.

3. YAKLAŞAN POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLAR

3.1. Konform Dönüşümler

$\mathbf{T} = \{ z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, $U = Int\mathbf{T}$ ve $U^- = Ext\mathbf{T}$ olsun.

Teorem 3.1 (Riemann Dönüşüm Teoremi). $G \subset \mathbf{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini U üzerine

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşüm vardır [25].

Teorem 3.2. Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, G'nin U üzerine her konform dönüşümü $\bar{G}$ kapalı bölgesine birebir ve sürekli olarak genişletilebilir [17].

Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi, $G = Int\Gamma$ ve $G^- = Ext\Gamma$ olsun. Genelliği kaybetmeden $0 \in G$ olduğunu varsayalım.

Riemann konform dönüşüm teoreminden aşağıdakiler elde edilir:

(1) G^- bölgesinin, U^- üzerine

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ konform dönüşümü vardır.

(2) G bölgesinin, U^- üzerine

$$\varphi_1(0) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ_1 konform dönüşümü vardır.

φ dönüşümünün tersini ψ ve φ_1 dönüşümünün tersine de ψ_1 ile gösterelim.

Γ bir Jordan eğrisi olduğundan, φ ve φ_1 dönüşümlerinin Γ üzerine, ψ ve ψ_1 dönüşümlerinin de **T** üzerine homoemorfik genişlemeleri vardır. Ayrıca Γ sonlu uzunluklu olduğundan $\varphi' \in E_1(G^-)$, $\varphi_1' \in E_1(G)$ ve ψ', $\psi_1' \in E_1(U^-)$ olur [22]. Böylece, φ' ve φ_1' fonksiyonları Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptirler ve bu limit değerleri $L_1(\Gamma)$ uzayına aittirler. Aynı şekilde, ψ' ve ψ_1' fonksiyonlarının da **T** üzerinde hemen her yerde açısal limitleri vardır ve bu değerler $L_1(\mathbf{T})$ uzayına aittir.

k negatif olmayan bir tamsayı olsun. $[\varphi(z)]^k$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında k dereceli bir kutbu vardır. Bu nedenle

$$[\varphi(z)]^k = F_k(z) - E_k(z)\,,\ \ z \in G^-$$

olacak şekilde, derecesi k olan bir $F_k(z)$ polinomu ve G^- bölgesinde analitik olan ve $E_k(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan bir $E_k(z)$ fonksiyonu vardır.

$F_k(z)$ ($k = 0,1,2,\ldots$) polinomlarına G bölgesinin *Faber polinomları* denir.

Cauchy integral formülü kullanılır ve $\varsigma = \psi(t)$ dönüşümü yapılırsa, her $z \in G$ ve $k = 0,1,2,\ldots$ için

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{[\varphi(\varsigma)]^k}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{t^k\,\psi'(t)}{\psi(t)-z}\, dt$$

elde edilir.

Yukarıdaki formül kullanılarak Faber polinomları için

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \quad z \in G \text{ ve } t \in U^- \tag{3.1}$$

bağıntısı elde edilir [26].

$[\varphi_1(z)]^k$ fonksiyonu $G \setminus \{0\}$ kümesinde analitiktir ve 0 noktasında k dereceli bir kutbu vardır. Bu fonksiyonun 0 noktasındaki esas kısmını $\tilde{F}_k(1/z)$ ile gösterelim. Bu durumda G bölgesinde analitik olan ve her $z \in G \setminus \{0\}$ için

$$[\varphi_1(z)]^k = \tilde{F}_k(1/z) - \tilde{E}_k(z)$$

olacak şekilde bir $\tilde{E}_k(z)$ fonksiyonu vardır. $\tilde{F}_k(1/z)$ ($k = 0,1,2,\ldots$) esas kısımlarına, G bölgesinin *Faber - Laurent polinomları* adı verilir.

Cauchy integral formülü kullanılır ve $\varsigma = \psi_1(t)$ dönüşümü yapılırsa, her $z \in G^-$ ve $k = 0,1,2,\ldots$ için

$$-\tilde{F}_k(1/z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[\varphi_1(\varsigma)]^k}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t^k \psi_1'(t)}{\psi_1(t)-z} dt$$

elde edilir.

Yukarıdaki formül kullanılarak Faber - Laurent polinomları için

$$\frac{\psi_1'(t)}{\psi_1(t)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}_k(1/z)}{t^{k+1}} \quad z \in G^- \text{ ve } t \in U^- \tag{3.2}$$

bağıntısı elde edilir [26].

K, $D := \overline{\mathbf{C}} \setminus K$ tümleyeni bağlantılı olan sınırlı bir kontinyum ve f, K da analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z), \quad z \in K \tag{3.3}$$

Faber açılımı K üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır [26].

$$R_n(z,f) := f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z), \quad z \in K \tag{3.4}$$

ve

$$\Gamma_R := \{ z \in D : |\varphi(z)| = R \}$$

olsun. Burada $R > 1$ ve $G_R := Int\Gamma_R$ olsun. (3.3) serisinde katsayılar

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

olarak tanımlanır ve (3.4) den

$$R_n(z,f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} f(\psi(t)) \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right\} dt$$

olduğu görülür. Eğer $P_n \in \wp_n$ ise

$$R_n(z,f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \left\{ f(\psi(t)) - P_n\left(\psi(t)\right) \right\} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right\} dt \tag{3.5}$$

olur. Diğer yandan

$$F_k(z) = [\varphi(z)]^k + E_k(z), \; z \in K$$

olduğundan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(z)}{t^{k+1}} \tag{3.6}$$

olur ve (3.5) ve (3.6) göz önüne alındığında

$$|R_n(z,f)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(t))}{t^{k+1}}\right||dt| \tag{3.7}$$

elde edilir.

$$F(\tau,w):=\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\quad,\ |\tau|>1\ ,|w|>1$$

olmak üzere

$$E_k(\psi(t))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tau^k F(\tau,w)\,d\tau\,,|w|\geq r>1 \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}|F(\tau,w)||\ d\tau|\leq\left(\frac{r^2}{r^4-1}\log\frac{r^2}{r^2-1}\right)^{1/2},\ r>1,|w|\geq r>1 \tag{3.9}$$

değerlendirmeleri bilinmektedir [26, s. 63,205].

3.2. Yaklaşan Polinom ve Rasyonel Fonksiyonlar

$n=1,2,\ldots$ için, $\quad K_n(\theta)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_m^{(n)}e^{im\theta}$, negatif olmayan, çift ve her n için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)d\theta\ =\ 1 \tag{3.10}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \theta K_n(\theta)d\theta \leq \frac{c}{n} \tag{3.11}$$

koşullarını sağlayan bir trigonometrik polinom olsun. Bu tür trigonometrik polinomlara örnek olarak

$$J_n(\theta) = \frac{3(\sin^{n\theta}/_2)^4}{n(2n^2+1)(\sin^{\theta}/_2)^4}$$

biçiminde tanımlanan Jackson çekirdekleri verilebilir [27, s. 203-204].

Γ Kompleks düzlemde bir Dini-düzgün eğri olsun. $f \in X(\Gamma)$ olsun. (2.4)' ten $f \in L_1(\Gamma)$ elde edilir. Γ Dini-düzgün bir eğri olduğundan $f \circ \psi$, $f \circ \psi_1 \in L_1(\mathbf{T})$ olur. Bu durumda,

$$f_0(w) := f(\psi(w))$$

ve

$$f_1(w) := f(\psi_1(w))$$

biçiminde tanımlanan f_0 ve f_1 fonksiyonları **T** üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olurlar. f_0 ve f_1 fonksiyonlarının Fourier serileri

$$f_0(w) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \tag{3.12}$$

ve

$$f_1(w) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k w^k \tag{3.13}$$

olsun.

$\varsigma \in \Gamma$ ve $\theta \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere

$$\varsigma_\theta = \psi[\varphi(\varsigma)\, e^{i\theta}],\ \ \varsigma_{1\theta} = \psi_1[\varphi(\varsigma)\, e^{i\theta}]$$

noktalarını tanımlayalım. ς_θ ve $\varsigma_{1\theta}$ noktalarının Γ eğrisi üzerinde olduğu açıktır.

$$I(\theta, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varsigma - z}\, d\varsigma, \quad z \in G, \ \ \theta \in [-\pi, \pi] \qquad (3.14)$$

integralini göz önüne alalım. $\varsigma = \psi(e^{it})$ dönüşümü uygulanırsa,

$$I(\theta, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(e^{i(t-\theta)}))\, \frac{\psi'(e^{it})e^{it}}{\psi(e^{it}) - z} dt$$

elde ederiz. $I(\theta,z)$ hemen her $\theta \in [-\pi, \pi]$ için mevcuttur ve $I(\theta,z) \in L_1([-\pi, \pi])$ olur [28]. (3.1) ile (3.12) bağıntılarını hesaba katarsak,

$$I(\theta, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) e^{-ik\theta}$$

yazabiliriz. $I(\theta,z) \in L_1([-\pi, \pi])$ ve $K_n(\theta)$ sınırlı değişimli olduğundan, genelleştirilmiş Parseval özdeşliği [28, s. 225-228] kullanarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) I(\theta, z) d\theta = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} a_k F_k(z) e^{-ik\theta}$$

bağıntısı elde edilir ve bu (3.14) ile birlikte düşünüldüğünde, $z \in G$ için

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta \int_\Gamma \frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varsigma - z}\, d\varsigma = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} a_k F_k(z) e^{-ik\theta}$$

bulunur. Böylece her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$P_n(z, f) := \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta \int_\Gamma \frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varsigma - z}\, d\varsigma, \qquad z \in G$$

ifadesinin n. dereceden bir cebirsel polinom olduğu görülmektedir.

Şimdi $z \in G^{-}$ ve $\theta \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere

$$I_1(\theta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma_{1(-\theta)})}{\varsigma - z}\, d\varsigma, \tag{3.15}$$

integralini göz önüne alalım. $\varsigma = \psi_1(e^{it})$ dönüşümü yapılırsa

$$I_1(\theta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi_1(e^{i(t-\theta)})) \frac{\psi_1'(e^{it})e^{it}}{\psi_1(e^{it}) - z} dt$$

$I_1(\theta,z)$ hemen her $\theta \in [-\pi, \pi]$ için mevcuttur ve $I_1(\theta,z) \in L_1([-\pi, \pi])$ olur [28]. (3.2) ile (3.13) bağıntılarını hesaba katarsak,

$$I_1(\theta, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) e^{-ik\theta}$$

yazabiliriz. $I_1(\theta,z) \in L_1([-\pi, \pi])$ ve $K_n(\theta)$ sınırlı değişimli olduğundan, genelleştirilmiş Parseval özdeşliği kullanarak [28, s. 225-228]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) I_1(\theta, z) d\theta = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{1k}^{(n)} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) e^{-ik\theta}$$

bağıntısı elde edilir ve bu (3.15) ile birlikte düşünüldüğünde, $z \in G^{-}$ için

$$\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma_{1(-\theta)})}{\varsigma - z} d\varsigma = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{1k}^{(n)} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) e^{-ik\theta}$$

bulunur. Buradan, her n doğal sayısı için

$$\tilde{Q}_n(1/z, f) := \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma_{1(-\theta)})}{\varsigma - z} d\varsigma, \qquad z \in G^{-}$$

ifadesinin $1/z$ 'nin derecesi n olan bir polinomu olduğu görülmektedir.

$K_n(\theta)$ çift bir fonksiyon olduğundan, $z \in G$ için

$$P_n(z,f) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(\theta)d\theta \int_{\Gamma} [\, f(\varsigma_{\theta}) + f(\varsigma_{-\theta})\,] \frac{d\varsigma}{\varsigma - z}$$

ve $z \in G^{-}$ için

$$\widetilde{Q}_n(1/_z, f) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(\theta)d\theta \int_{\Gamma} [f(\varsigma_{1\theta}) + f(\varsigma_{1(-\theta)})] \frac{d\varsigma}{\varsigma - z}$$

olduğu görülür.

4. REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM

4.1. Giriş ve Ana Sonuçlar

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $X(\Gamma)$, Γ üzerinde bir R. I.uzay olsun. $X(\Gamma)$ üzerinde, $\theta \in [-\pi, \pi]$ olmak üzere, $f \in X(\Gamma)$ ve $\varsigma \in \Gamma$ için

$$T_\theta(f)(\varsigma) = f(\varsigma_\theta) \tag{4.1}$$

ve

$$T_{1\theta}(f)(\varsigma) = f(\varsigma_{1\theta}) \tag{4.2}$$

biçimde tanımlanan T_θ ve $T_{1\theta}$ operatörlerini tanımlayalım.

Özel $\Gamma \equiv \mathbf{T}$ ise, $T_\theta(f)(w) = f(we^{i\theta})$, $T_{1\theta}(f)(w) = f(we^{-i\theta})$ ve böylece $T_\theta f \in X(\Gamma)$ ve $T_{1\theta} f \in X(\Gamma)$ olur.

Γ eğrisi bir Dini-düzgün eğri olsun. Bu durumda c_1, c_2, c_3, c_4 sabitler olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır [29]:

$$0 < c_1 \leq |\varphi'| \leq c_2 < \infty \qquad z \in \Gamma \tag{4.3}$$

ve

$$0 < c_3 \leq |\varphi_1'| \leq c_4 < \infty \qquad z \in \Gamma. \tag{4.4}$$

Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak $f \in X(\Gamma)$ için $T_\theta f \in X(\Gamma)$ ve $T_{1\theta} f$

$\in X(\Gamma)$ olur.

Buradan hareketle, $f \in X(\Gamma)$ olmak üzere $\delta \geq 0$ için,

$$\omega_X(\delta, f) = \sup_{|\theta| \leq \delta} \| f - T_\theta f \|_{X(\Gamma)},$$

ve

$$\omega_{1X}(\delta, f) = \sup_{|\theta| \leq \delta} \| f - T_{1\theta} f \|_{X(\Gamma)}$$

biçiminde $\omega_X(\delta, f)$ ve $\omega_{1X}(\delta, f)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$\omega_X(\delta, f)$ fonksiyonu,

(1) $\omega_X(0, f) = 0$,

(2) $\delta > 0$ için $\omega_X(\delta, f) > 0$,

(3) $\lim_{\delta \to 0} \omega_X(\delta, f) = 0$,

(4) Her $f, g \in E_X(G)$ için $\omega_X(\delta, f+g) \leq \omega_X(\delta, f) + \omega_X(\delta, g)$,

(5) $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere, $\omega_X(n\delta, f) \leq n\omega_X(\delta, f)$

özelliklerine sahiptir.

Aynı şekilde $\omega_{1X}(\delta, f)$ fonksiyonu da aynı özelliklere sahiptir.

Eğer $f \in E_X(G)$ veya $f \in E_X(G^-)$ ise $T_\theta f \in X(\Gamma)$ ve $T_{1\theta} f \in X(\Gamma)$ olacağı açıktır.

ω_X ve ω_{1X} , yukarıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonlar, Γ bir Dini-düzgün eğri ve $X(\Gamma)$, Γ üzerinde tanımlı nontrivial Boyd indislerine sahip bir R. I. olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremler geçerlidir.

Teorem 4. 1. $G \subset \mathbf{C}$ Dini-düzgün bir Γ eğrisi ile sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. $f \in E_X(G)$ ise her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\left\| f - P_n(.,f) \right\|_{X(\Gamma)} \leq c\, \omega_X(1/n, f)$$

olacak şekilde bir $P_n \in \wp_n$ vardır.

Teorem 4. 2. $G^- \subset \mathbf{C}$ Dini-düzgün bir Γ eğrisi ile sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. $f \in E_X(G^-)$ ise her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\left\| f - \tilde{Q}_n(1/z, f) \right\|_{X(\Gamma)} \leq c\, \omega_{1X}(1/n, f)$$

olacak şekilde bir $\tilde{Q}_n \in \wp_n$ vardır.

$f \in X(\Gamma)$ ise $f^+ \in E_X(G)$ ve $f^- \in E_X(G^-)$ olacağından aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4. 3. $f \in X(\Gamma)$ ise her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\left\| f - H_n(.,f) \right\|_{X(\Gamma)} \leq c \left\{ \omega_X(1/n, f^+) + \omega_{1X}(1/n, f^-) \right\}$$

olacak şekilde bir

$$H_n(z,f) = \sum_{k=-n}^{n} b_k z^k$$

rasyonel fonksiyonu vardır. Burada

$$b_k = \begin{cases} a_k\,, & k \geq 0 \\ \tilde{a}_k\,, & k < 0 \end{cases}$$

dir.

Burada *c*, pozitif ve *n* sayılarından bağımsız sabiti göstermektedir.

$X(\Gamma)$, Γ üzerinde bir R. I. uzay olsun. $f \in X(\Gamma)$ biçimindeki $f \in E_1(G_R)$ fonksiyonlarının kümesini $E_X(G_R)$ ile gösterelim ($R > 1$).

Teorem 4. 4. $f \in E_X(G_R)$ ise

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c}{R^{n+1}(R-1)} E_n^X(f, G_R)\sqrt{n\log n}\,,\ z \in K$$

sağlanır. Burada $c > 0$ sabiti n ve z den bağımsızdır.

Sonuç 4. 5. *K*, bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum ve R > 1 ise her $f \in E_X(G_R)$ için

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c}{R^{n+1}(R-1)} \omega_X(1/n, f)\sqrt{n\log n}\,,\ z \in K$$

olur. Burada $c > 0$ n sayılarına bağlı olmayan bir sabittir.

4.2. Ana Sonuçların İspatı

Teorem 4. 1 in İspatı:

$f \in E_X(G)$ olsun. $z' \in G$ alalım.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta = 1$$

eşitliğinin her iki yanını,

$$f(z') = f^{+}(z')$$

olduğu da dikkate alınarak, $f^{+}(z')$ ile çarparsak

$$f(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{+}(z')K_n(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2f^{+}(z')K_n(\theta)d\theta$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.1) , (2.7) eşitlikleri ve $P_n(.,f)$ polinomu ile birlikte düşünüldüğünde

$$f(z') - P_n(z',f)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left\{2f^{+}(z') - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[f(\varsigma_\theta) + f(\varsigma_{-\theta})]\frac{d\varsigma}{\varsigma - z}\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left\{2f^{+}(z') - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[T_\theta f(\varsigma) + T_{(-\theta)}f(\varsigma)]\frac{d\varsigma}{\varsigma - z}\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\{2f^{+}(z') - [(T_\theta f)^{+}(z') + (T_{(-\theta)}f)^{+}(z')]\}d\theta$$

elde edilir.

Γ eğrisinin iç tarafındaki bütün açısal yollar üzerinden $z' \to z \in \Gamma$ için limit alınırsa ve (2.9) kullanılırsa, hemen her $z \in \Gamma$ için

$$f(z) - P_n(z,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\Big[2S_\Gamma f(z) + f(z) - S_\Gamma(T_\theta f)(z) - \frac{1}{2}T_\theta f(z)$$

$$- S_\Gamma(T_{(-\theta)}f)(z) - \frac{1}{2}T_{(-\theta)}f(z)\Big]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)[S_\Gamma(f - T_\theta f)(z) + S_\Gamma(f - T_{(-\theta)}f)(z)]d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)[(f-T_\theta f)(z)+(f-T_{(-\theta)}f)(z)\,]d\theta$$

bulunur. Bu eşitlik, (2.1) formülü ve Fubini teoremi kullanılır ve supremum integral işareti içine alınırsa,

$$\|f(z)-P_n(.,f)\|_{X(\Gamma)}=\sup\int_\Gamma |f(z)-P_n(z,f)||g(z)|\,|dz|$$

$$\leq \sup\int_\Gamma \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)[S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)+S_\Gamma(f-T_{(-\theta)}f)(z)]d\theta\right||g(z)||dz|$$

$$+\sup\int_\Gamma \left|\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)[(f-T_\theta f)(z)+(f-T_{(-\theta)}f)(z)]d\theta\right||g(z)||dz|$$

$$\leq \sup\int_\Gamma \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left[|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)|+|S_\Gamma(f-T_{(-\theta)}f)(z)|\right]d\theta\right\}|g(z)||dz|$$

$$+\sup\int_\Gamma \left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left[|(f-T_\theta f)(z)|+|(f-T_{(-\theta)}f)(z)|\right]d\theta\right\}|g(z)||dz|$$

$$\leq \sup\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left\{\int_\Gamma\left[|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)|+|S_\Gamma(f-T_{(-\theta)}f)(z)|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$+\sup\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left\{\int_\Gamma\left[|(f-T_\theta f)(z)|+|(f-T_{(-\theta)}f)(z)|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left\{\sup\int_\Gamma\left[|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)|+|S_\Gamma(f-T_{(-\theta)}f)(z)|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(\theta)\left\{\sup\int_\Gamma\left[|(f-T_\theta f)(z)|+|(f-T_{(-\theta)}f)(z)|\right]|g(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|S_\Gamma(f - T_\theta f)\right\|_{X(\Gamma)}+\left\|S_\Gamma(f - T_{(-\theta)}f)\right\|_{X(\Gamma)}\right]d\theta$$

$$+\ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|f - T_\theta f\right\|_{X(\Gamma)}+\left\|f - T_{(-\theta)}f\right\|_{X(\Gamma)}\right]d\theta$$

elde edilir. Burada supremum $\| \ g \ \|_{X'(\Gamma)} \leq 1$ biçimindeki bütün $g \in X'(\Gamma)$ fonksiyonları üzerinden alınmıştır. Teorem 2.10 dan

$$\left\|f(z) - P_n(.,f)\right\|_{X(\Gamma)} = c\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left\{\left\|f - T_\theta f\right\|_{X(\Gamma)}+\left\|f - T_{(-\theta)}f\right\|_{X(\Gamma)}\right\} d\theta$$

bulunur. $\omega_X(.,f)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\left\|f(z) - P_n(.,f)\right\|_{X(\Gamma)} \leq c\int_0^{\pi} K_n(\theta)\,\omega_X(\theta,f)\,d\theta$$

$$\leq c\,\omega_X(1/n, f)\int_0^{\pi} K_n(\theta)(n\theta + 1)\,d\theta$$

elde edilir. K_n trigonometrik polinomunun (3.10) ve (3.11) özellikleri

$$\| \ f - P_n(.,f) \ \|_{X(\Gamma)} \leq c\,\omega_X(1/n, f)\,,$$

olduğunu verir. □

Teorem 4. 2 in İspatı:

$f \in E_X(G^-)$ olsun. $z' \in G^-$ alalım.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta \ = \ 1$$

eşitliğinin her iki yanını,

$$f(z') = f^{-}(z')$$

olduğu da dikkate alınarak, $f^{-}(z')$ ile çarparsak

$$f(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-}(z')K_n(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2f^{-}(z')K_n(\theta)d\theta$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.2) , (2.8) eşitlikleri ve $\tilde{Q}_n(1/_z, f)$ polinomu ile birlikte düşünüldüğünde

$$f(z') - \tilde{Q}_n(1/_z, f)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left\{2f^{-}(z') - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[f(\varsigma_{1\theta}) + f(\varsigma_{1(-\theta)})]\frac{d\varsigma}{\varsigma - z}\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left\{2f^{-}(z') - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[T_{1\theta}f(\varsigma) + T_{1(-\theta)}f(\varsigma)]\frac{d\varsigma}{\varsigma - z}\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\{2f^{-}(z') - [(T_{1\theta}f)^{-}(z') + (T_{1(-\theta)}f)^{-}(z')]\}d\theta$$

elde edilir.

Γ eğrisinin dış tarafındaki bütün açısal yollar üzerinden $z' \to z \in \Gamma$ için limit alınırsa, (2.10) dan hemen her $z \in \Gamma$ için

$$f(z) - \tilde{Q}_n(1/_z, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\Big[2S_\Gamma f(z) - f(z) - S_\Gamma(T_{1\theta}f)(z) + \frac{1}{2}T_{1\theta}f(z)$$

$$- S_\Gamma(T_{1(-\theta)}f)(z) + \frac{1}{2}T_{1(-\theta)}f(z)\Big]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)[S_\Gamma(f - T_{1\theta}f)(z) + S_\Gamma(f - T_{1(-\theta)}f)(z)]d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)[(T_{1\theta}f - f)(z) + (T_{1(-\theta)}f - f)(z)]d\theta$$

bulunur. Bu eşitlik, (2.1) formülü ve Fubini teoremi kullanılır ve supremum integral işareti içine alınırsa,

$$\left\|f(z)-\tilde{Q}_n(1/_z,f)\right\|_{X(\Gamma)} = \sup\int_{\Gamma}\left|f(z)-\tilde{Q}_n(1/_z,f)\right||h(z)|\,|dz|$$

$$\leq \sup\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)[S_\Gamma(f-T_{1\theta}f)(z)+S_\Gamma(f-T_{1(-\theta)}f)(z)]d\theta\right||h(z)||dz|$$

$$+\sup\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)[(T_{1\theta}f-T_{1\theta}f)(z)+(T_{1(-\theta)}f-f)(z)]d\theta\right||h(z)||dz|$$

$$\leq \sup\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left|S_\Gamma(f-T_{1\theta}f)(z)\right|+\left|S_\Gamma(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\right|\right]d\theta\right\}|h(z)||dz|$$

$$+\sup\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left|(f-T_{1\theta}f)(z)\right|+\left|(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\right|\right]d\theta\right\}|h(z)||dz|$$

$$\leq \sup\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{\int_{\Gamma}\left[\left|S_\Gamma(f-T_{1\theta}f)(z)\right|+\left|S_\Gamma(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\right|\right]|h(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$+\sup\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{\int_{\Gamma}\left[\left|(f-T_{1\theta}f)(z)\right|+\left|(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\right|\right]|h(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left\{\sup\int_{\Gamma}\left[\left|S_\Gamma(f-T_{1\theta}f)(z)\right|+\left|S_\Gamma(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\right|\right]|h(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\ \sup\left\{\int_{\Gamma}\left[\left|(f-T_{1\theta}f)(z)\right|+\left|(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\right|\right]|h(z)||dz|\right\}d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left\|S_\Gamma(f-T_{1\theta}f)\right\|_{X(\Gamma)}+\left\|S_\Gamma(f-T_{1(-\theta)}f)\right\|_{X(\Gamma)}\right]d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\left[\left\|f-T_{1\theta}f\right\|_{X(\Gamma)}+\left\|f-T_{1(-\theta)}f\right\|_{X(\Gamma)}\right]d\theta$$

elde edilir. Burada supremum $\| h \|_{X'(\Gamma)} \leq 1$ biçimindeki bütün $h \in X'(\Gamma)$ fonksiyonlar üzerinden alınmıştır. Teorem 2.10 dan

$$\|f(z) - \tilde{Q}_n(1/z, f)\|_{X(\Gamma)} = c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\{\|f - T_{1\theta}f\|_{X(\Gamma)} + \|f - T_{1(-\theta)}f\|_{X(\Gamma)}\}\, d\theta$$

eşitsizliği sağlanır. $\omega_{1X}(., f)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\|f(z) - \tilde{Q}_n(1/z, f)\|_{X(\Gamma)} \leq c \int_0^{\pi} K_n(\theta)\, \omega_{1X}(\theta, f)\, d\theta$$

$$\leq c\, \omega_{1X}(1/n, f) \int_0^{\pi} K_n(\theta)(n\theta + 1)\, d\theta$$

elde edilir. K_n trigonometrik polinomunun (3.10) ve (3.11) özellikleri

$$\| f - \tilde{Q}_n(1/z, f)\|_{X(\Gamma)} \leq c\, \omega_{1X}(1/n, f),$$

olduğunu verir. □

Teorem 4. 4 ün İspatı:

$z \in \Gamma_r$, $1 < r < R$ ve P_n , $f \in E_X(G_R)$ fonksiyonuna derecesi n yi aşmayan polinomlar sınıfından en iyi yaklaşan polinom olsun.

$$\tilde{I}_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{|t| = R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

ve

$$\tilde{I}_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|t| = R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(t))}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

olarak tanımlandığında (3.7) den

$$\left| R_n(z,f) \right| \leq \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \tag{4.5}$$

olduğu görülür. (4.3) ve (2.3) ü kullanarak

$$\tilde{I}_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| f(\varsigma) - P_n(\varsigma) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\varsigma)]^{k+1}} \right| \left| \varphi'(\varsigma) \right| \left| d\varsigma \right|$$

$$\leq \frac{c}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| f(\varsigma) - P_n(\varsigma) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\varsigma)]^{k+1}} \right| \left| d\varsigma \right|$$

$$\leq \frac{c}{2\pi} \left\{ sup \int_{\Gamma_R} \left| f(\varsigma) - P_n(\varsigma) \right\| u(\varsigma) \| d\varsigma \right| \right\} \sup \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\varsigma)]^{k+1}} \left| v(\varsigma) \right\| d\varsigma \right| \right\}$$

bulunur. Burada, supremumlar sırasıyla, $\| u \|_{X(\Gamma)} \leq 1$ koşulunu sağlayan bütün $u \in X(\Gamma)$ ve $\| v \|_{X'(\Gamma)} \leq 1$ koşulunu sağlayan bütün $v \in X'(\Gamma)$ fonksiyonlar üzerinden alınmıştır. Böylece

$$\tilde{I}_1 \leq \frac{c\, E_n^X(f, G_R)}{2\pi} \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\varsigma)]^{k+1}} \right\| v(\varsigma) \| d\varsigma \right| ; \|v\|_{X'(\Gamma)} \leq 1 \right\}$$

$$\leq \frac{c\, E_n^X(f, G_R)}{2\pi} \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \frac{|\varphi(z)|^{n+1}}{|\varphi(\varsigma)|^{n+1} \, |\varphi(\varsigma) - \varphi(z)|} \left| v(\varsigma) \right\| d\varsigma \right| ; \|v\|_{X'(\Gamma)} \leq 1 \right\}$$

$$\leq \frac{c\, E_n^X(f, G_R)}{2\pi} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \left| v(\varsigma) \right\| d\varsigma \right| ; \|v\|_{X'(\Gamma)} \leq 1 \right\}$$

ve (2.3) yardımıyla

$$\sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \left| v(\varsigma) \right\| d\varsigma \right| ; \|v\|_{X'(\Gamma)} \leq 1 \right\} \leq \|v\|_{X'(\Gamma)} \, \|1\|_{X(\Gamma)} \leq c \tag{4.6}$$

elde edilir. Dolasıyla,

$$\tilde{I}_1 \leq \frac{c\, E_n^X(f, G_R)\, r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} \tag{4.7}$$

bulunur. Şimdi $\tilde{I}_2$ integralini değerlendirelim. (3.8) kullanılırsa

$$\tilde{I}_2 := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} F(\tau, w) d\tau \right| |dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=r} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} \right| |F(\tau, w)| |d\tau| \right\} |dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=r} \left| \frac{\tau^k}{t^{k+1}(t-\tau)} \right| |F(\tau, w)| |d\tau| \right\} |dt|$$

bulunur ve Fubini teoremine göre

$$\tilde{I}_2 \leq \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int\limits_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \frac{|dt|}{|t-\tau|} \right\} |d\tau|$$

elde edilir. Sonra, en son integralde değişken değişimi yapılıp (2.3) te verilen Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\tilde{I}_2 \leq \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int\limits_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} |f(\varsigma) - P_n(\varsigma)| \frac{|\varphi'(\varsigma)|}{|\varphi(\varsigma) - \varphi(z)|} |d\varsigma| \right\} |d\tau|$$

$$\tilde{I}_2 \leq \frac{r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int\limits_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ \|f(\varsigma) - P_n(\varsigma)\|_{X(\Gamma_R)} . \left\| \frac{|\varphi'(.)|}{|\varphi(.) - \varphi(z)|} \right\|_{X(\Gamma_R)} \right\} |d\tau|$$

$$\leq \frac{c\, r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int\limits_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ E_n^X(f, G_R) \left\| \frac{|\varphi'(.)|}{|\varphi(.) - \varphi(z)|} \right\|_{X(\Gamma_R)} \right\} |d\tau|$$

$$\leq \frac{c\, r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} \int\limits_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \Big[E_n^X(f, G_R) \times$$

$$\sup\left\{\int_{\Gamma_R} |\, V(\varsigma) \,\|\, d\varsigma| \,;\, \|V\|_{X'(\Gamma)} \leq 1 \right\}\Big]|d\tau|$$

bulunur. Son eşitsizlikte (4.6) daki gibi bir değerlendirme göz önüne alınıp (3.9) kullanılırsa

$$\tilde{I}_2 \leq \frac{c\, r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} E_n^X(f, G_R)\left(\frac{r^2}{r^4-1} \log \frac{r^2}{r^2-1}\right)^{1/2} \tag{4.8}$$

çıkar. (4.5), (4.7) ve (4.8) eşitsizliklerinden

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c\, r^{n+1} E_n^X(f, G_R)}{2\pi R^{n+1}(R-r)}\left(\frac{r^2}{r^4-1} \log \frac{r^2}{r^2-1}\right)^{1/2}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte, $z \in K$ ve $r := 1+1/n$ alınarak

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c}{R^{n+1}(R-1)} E_n^X(f, G_R)\sqrt{n\log n}$$

elde edilir. □

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, elde edilen yeni sonuçlar dördüncü bölümde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi belirtilebilir.

Dini – düzgün bir eğri üzerinde tanımlı Rearrangement invariant uzayların bazı alt sınıfları ve bu alt sınıflara ait fonksiyonların polinom ve rasyonel fonksiyonlar ile yaklaşımının bazı düz teoremleri süreklilik modülüne göre elde edilmiştir. Faber serilerinin maksimal yakınsaklık özelliği ile ilgili bir teorem ispatlanmıştır.

Yaklaşım probleminin çözümünde kullanılan polinom ve rasyonel fonksiyonlar, bazı trigonometrik polinomlar, Faber polinomları ve Faber – Laurent rasyonel fonksiyonları kullanılarak inşa edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Al'per, S. Y., "Approximation in the Mean of Analytic Functions of class E_p" *Gosudarstv. Izdat. Fiz-Mat. Lit., Moscow*, (1960), 273.

[2] Kokilashvili, V. M., "Approximation in the mean of analytic functions of class E_p ", *Sov. Math., Dokl*., 8 (1967), 1393.

[3] Kokilashvili, V. M., "On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes", *Studia Math.,* 31 (1968), 43.

[4] Kokilashvili, V. M., "A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials", *Sov. Math., Dokl.,* 10 (1969), 411.

[5] Ibragimov, I. I. and Mamedhanov, D. I., "Constructive characterization of a certain class of functions", *Sov. Math., Dokl.,* 16, (1975), 820.

[6] Andersson, J. E., "On the degree of polynomial approximation in $E_p(D)$", *J. Approximation theory,* 19, (1977), 61.

[7] Israfilov, D. M., "Approximate properties of generalized Faber series in an integral metric", *Izv. Akad. Nauk. Az SSR, Ser. Fiz. - Tekh. Mat. Nauk,* 2 (1987),10.

[8] Cavus, A., and Israfilov, D. M., "Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of class $L_p(\Gamma)$ with $1<p<\infty$", *Approximation Theory Appl*., 11/1, (1995), 105.

[9] Israfilov, D. M., "Approximation by *p*-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E_p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials", *Constr. Approx.,* 17/3 (2001), 335.

[10] Guven, A. and Israfilov, D. M., "Polynomial approximation in Smirnov-Orlicz classes", *Comput. Methods and Function Theory,* 2/2 (2002), 509.

11] Israfilov, D. M., "Approximation by *p*-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces", *Czechoslovak Math. J*., 54 (2004), 751.

[12] Israfilov, D. M., Oktay, B. and Akgun, R. , “Approximation in Smirnov-Orlicz classes”, *Glasnik Matematički*, 40/1, (2005), 87.

[13] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Rational Approximation in Orlicz Spaces on Carleson Curves”, *Bull. Belg. Math. Soc*., 32/4 (2005), 223.

[14] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Approximation in Rearrangement invariant spaces on Carleson curves”, *East J. Approx.*, 12/4 (2006), 381.

[15] Israfilov, D. M., and Akgün, R., “Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes”, *J. Math. Kyoto Univ.*, 46/4 (2006), 755.

[16] Karlovich, A. Y., “Singular integral operators with piecewise continuous coefficients in reflexive Rearrangement invariant spaces”, *Integr. Equat. Oper. Theory*, 32/4 (1998), 436.

[17] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).

[18] Bennet, C. and Sharpley, R., Interpolation of operators, Academic Pres (1988).

[19] Duren, P. L., Theory of H_p spaces, Academic Press, 38, New York, (1970).

[20] Pommerenke, Ch., Boundary behaviour of conformal maps, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[21] Böttcher, A. and Karlovich, Y. A., Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators, Birkhauser Verlag (1997).

[22] Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Translation of Mathematical Monographs, 26, AMS, Providence (1969).

[23] David, G., Operateurs Integraux Singuliers sur Certaines Courbes du Plan Complexe, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 17, (1984), 157.

[24] Karlovich, A. Y., “Algebras of singular integral operators with piecewise continious coefficients in reflexive Orlicz spaces”, *Math. Nachr.*, 179 (1996), 187.

[25] Markushevich, A.I., Theory of Functions of a Complex Variable III, Prentice Hall, Inc. 1967.

[26] Suetin, P. K., Series of Faber Polynomials, Gordon and Breach (1998).

[27] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, (1993).

[28] Bary, N. K., A Treatise on Trigonometric Series, Volume I, Pergamon Press, Oxford, (1964).

[29] Warschawski, S. E., "Über das ranverhalten der Ableitung der Abildungsfunktion bei konformer Abbildung", *Math. Z.*, 35 (1932), 321.