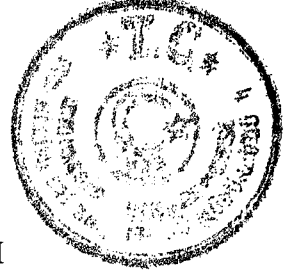


**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**



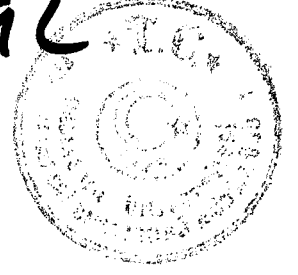
**ENDÜSTRİYEL CAMLARIN ÜRETİMİNDE
ISITMA VE SOĞUTMA İŞLEMLERİNİN ETÜDÜ**

DOKTORA TEZİ

Mak. Yük. Müh. Enver YALÇIN

Balıkesir, Mart 1998

68992



T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ENDÜSTRİYEL CAMLARIN ÜRETİMİNDE
ISITMA VE SOĞUTMA İŞLEMLERİNİN ETÜDÜ

DOKTORA TEZİ

Enver YALÇIN

Tez Danışmanı : Prof. Sabri SAVAŞ

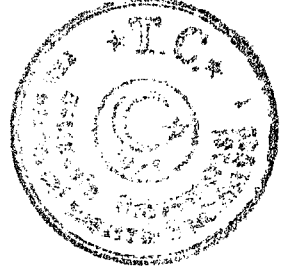
Sınav Tarihi : 26.03.1998

Jüri Üyeleri : Prof. Sabri SAVAŞ (Danışman)

: Prof. Dr. Recep YAMANKARADENİZ

: Doç. Dr. Cemal OKUYAN

Balıkesir, Mart 1998



ÖZ

**ENDÜSTRİYEL CAMLARIN ÜRETİMİNDE
ISITMA VE SOĞUTMA İŞLEMLERİNİN ETÜDÜ**

Mak. Yük. Müh. Enver YALÇIN
Bahkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Sabri SAVAS)

Bahkesir, 1998

Levha camların daha mukavemetli ve güvenli hale getirilmesi için uygulanan temperleme ve tavlama işlemi ele alınmış, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bu işlemler sırasında ve sonrasında cam kesitindeki sıcaklık dağılımları ve oluşan ısı gerilmeler belirlenmiştir.

Cam malzemeler hakkında kısaca bilgi verildikten sonra soğutma aşamasında kullanılan hava jetleri ve taşınım ile ısı transferi olayı açıklanmıştır. Sayısal çözüm yöntemleri kısaca açıklanarak, sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Hesaplamalarda çeşitli başlangıç ve sınır şartlarında değişik kalınlıklardaki camlarda sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak bilgisayar programı yapılmış, elde edilen sonuçlar yapısal teori ve viskoelastik teori ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çeşitli kalınlıktaki kesitler için elde edilen sıcaklık ve sıcaklığa bağlı olarak oluşan gerilmeler grafikler halinde gösterilmiştir. Problem çözümünde etkili olan kesit

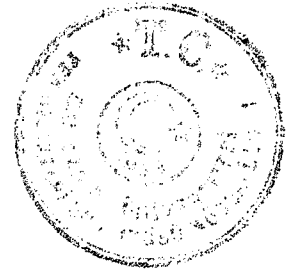


kalınlığı, ısı iletim ve ısı taşınım katsayıları, soğutma süresi gibi parametrelerin birbirleri ile olan ilişkileri grafikler halinde gösterilmiştir.

Sonuçta, çalışmada elde edilen değerler yorumlanarak sonraki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.



ANAHTAR SÖZCÜKLER : levha camlar / camların temperlenmesi ve tavlama / hava jetleri / camların soğutulması / sonlu elemanlar yöntemi



ABSTRACT

INVESTIGATION OF HEATING AND COOLING PROCESSES IN PRODUCTION OF INDUSTRIAL GLASSES

**Mechanical Engineer Enver YALÇIN, M. Sc.
Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mechanical
Engineering**

(Ph.D. Thesis / Supervisor: Prof. Sabri SAVAS)

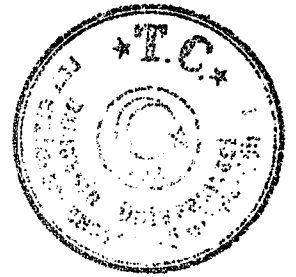
Balıkesir, 1998

In this study, tempering and annealing processes which are applied in order to strengthen plate glasses have been mentioned and heat distributions and thermal stresses in glass section, during these processes and following stages, have been determined by applying finite element method.

Following a brief information on glass materials, air jets which are used during cooling phase and convection heat transfer phenomenon have been explained . Numerical solution methods have been briefly mentioned and have been compared with finite element method.

A computer program has been developed by applying finite element method on glasses with different thickness and which have various boundary conditions. The results have been compared with those of structural theory and viscoelastic theory.

Temperatures obtained from sections with various thickness, and stresses depending on temperature have been illustrated in graphs. The relation of parameters



like section thickness which is an effective parameter in solution of problem, heat conduction and heat convection coefficients, cooling duration have been shown in graphs as well.

As a result, the values obtained in this study have been interpreted and some proposals have been presented for further studies.

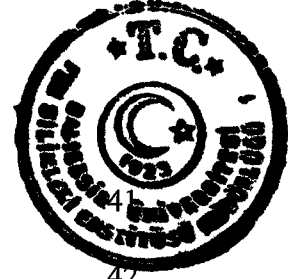


KEY WORDS : flat glasses / tempering and annealing of glasses / air jet / cooling of glasses / finite elements method



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZ, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	x
ÇİZELGE LİSTESİ	xii
ÖNSÖZ	xiii
1.GİRİŞ	1
2.CAM	3
2.1.Genel Bilgi	3
2.2 Camın Tarihçesi	3
2.3 Camı Oluşturan Ana Maddeler	4
2.3.1 Camlaşıcılar	4
2.3.2 Eriticiler	4
2.3.3 Stabilizatörler	5
2.3.4 Yardımcı Bileşenler	5
2.4 Cam Türleri	6
2.4.1 Sodakalsik Camı	6
2.4.2 Kurşun Camı (Kristal Cam)	6
2.4.3 Borosilikat Camı	7
2.4.4 Alüminosilikat Camı	7
2.4.5 Silis Camı (%96 SiO ₂)	8
2.4.6 Silis Camı (%99 SiO ₂)	8
3.HAVA JETİ İLE SOĞUTMA	9
3.1 Hidrodinamik ve Geometrik Tasarımlar	9
3.2 Taşınım Isı ve Kütle Transferi	12
4.CAM TAVLAMA VE TEMPERLEME PROSESİ	18
4.1 Tarihsel Gelişim	19
4.2 Viskoelastik Teori	23
4.3 Yapısal Teori	25
4.4 Levha Camın Temperlenmesi	33
4.5 Temperlemenin Fiziği	35



5.PROBLEMİN TARİFİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNE GİRİŞ

5.1 Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri	42
5.1.1 Değişkenlere Ayırma Yöntemi İle Çözüm	44
5.1.2 Operatörlerle (Laplace) Çözüm	49
5.2 Sonlu Farklar Yaklaşımı	52
5.3 Sonlu Elemanlar Yaklaşımı	54
5.4 Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin Karşılaştırılması	55

6.SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

6.1 Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları	59
6.2 Sonlu Elemanlar Yönteminin Isı Transferi Problemlerine Uygulanması	59
6.2.1 Isı Transferi Bağlıları	60
6.3 Problemlerin Sonlu Elemanlara Bölünmesi	65
6.4 Enterpolasyon Fonksiyonlarının Seçimi	67
6.4.1 Bir Boyutlu Basit Eleman	68
6.4.2 Bir Boyutlu Elemanın Şekil Fonksiyonları	69
6.4.3 Bir Boyutlu Elemanın Türevleri ve İntegralleri	70
6.5 İki Boyutlu Elemanlar	72
6.5.1 İki Boyutlu Üçgen Eleman Enterpolasyon Fonksiyonu	72
6.5.2 İki Boyutlu Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları	74
6.6 Sekiz-Dokuz Düğüm Noktalı Dörtgen Elemanlar İçin Şekil Fonksiyonlarının Çıkartılması ve Eleman Denklemlerinin Bulunması	78
6.6.1 Lineer Dörtgen Elemanlar İçin Fonksiyonların Bulunması	79
6.7 Zamana Bağlı Problemler	87

7.SONLU ELEMANLAR PROGRAMI

8.TEORİK ANALİZ SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

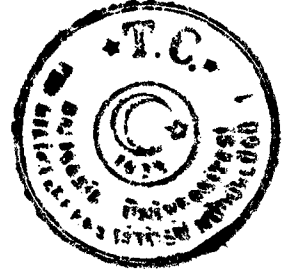
9. SONUÇ VE ÖNERİLER

EKLER :

EK A Sonlu Elemanlar Programı Akış Diyagramı 105

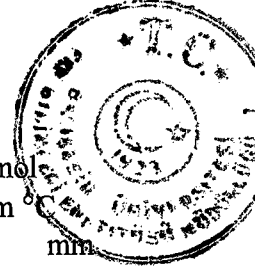
EK B Camın Isıl ve Fiziksel Özellikleri 109

KAYNAKÇA 110

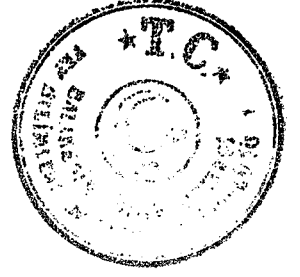


SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı	Tanımı/Değeri	Birimi
Γ	Alan sınır elemanı		
θ	Boyutsuz sıcaklık		
Φ	Boyutsuz zaman		
Ω	Hacimsel sınır elemanı		
α	Isıl genleşme katsayısı		$1/^\circ\text{C}$
γ	Poisson oranı		
Δ	Sonlu eleman olarak kullanılan üçgenin alanı		
ψ	Transfer fonksiyonu		
η	Viskozite		Poise
ρ	Yoğunluk		
$\Delta\rho$	Yoğunluk farkı		
(∞)	Eleman tanımlaması		
$\varepsilon(t)$	Mekanik denge denklemi ile tanımlanan ve x'in tüm değerleri için aynı olan t anındaki % şekil değiştirme		
σ_m	Maksimum gerilme		MPa
α_s	Yapısal genleşme katsayısı		
ΔT	Sıcaklık farkı		$^\circ\text{C}$
[D]	Türev matrisi		
$[f^{(\infty)}]$	Eleman kuvvet vektörü		
$[k^{(\infty)}]$	Eleman iletim matrisi		
{T}	Düğüm vektörü		
$A_{c,e}$	Nozul çıkışı kesit alanı		mm^2
A_{cell}	Hücrenin yüzey alanı		mm^2
A_r	Alan		mm^2
B	Bant genişliği		
$B^{(\infty)}$	Şekil fonksiyonlarının türevi		
Bi	Biot sayısı		
b_n, c_n	Enterpolasyon fonksiyonu sabitleri		
c	Birim hacimde ısı kapasitesi		
$C_{A,e}$	Konveksiyon kütle transfer katsayısı		$\text{kg}_{\text{nem}}/\text{m}^2 \text{ s } ^\circ\text{M}$
D	Çap		mm
D	Malzeme matrisi		
D_h	Hidrolik çap		mm
E	Young modülü		
Fo	Fourier sayısı		
h	Isı taşınım katsayısı		$\text{W}/\text{m}^2 \text{ K}$
H	Nozul grubunun yüzeyden mesafesi		mm

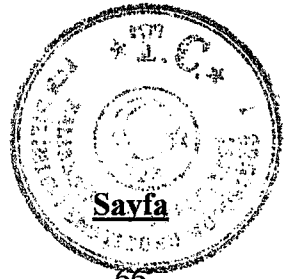


H_a	Aktivasyon enerjisi (cam için)	~600	kJ/mol
k	Isı iletim katsayısı		W/m
L	Yüzey uzunluğu		mm
$M(\xi)$	Sıcaklık değişimi için camın tepki fonksiyonu		
M_v	Hacim gevşemesi		
N	Şekil fonksiyonu		
N''	Kütle akısı		
NDOF	Bilinmeyen sayısı		
N_i	Enterpolasyon fonksiyonu		
Nu	Nusselt sayısı		
P	Islak çevre		mm
Pr	Prandtl sayısı		
q	Isı akısı		
q_n	İç ısı üretiminin n düğüm noktasındaki değeri		
R	Cam kalınlığı		mm
r	Yarıçap		mm
$R(\xi)$	Tek eksenli gevşeme fonksiyonundan elde edilen iki eksenli gerilme hali için gevşeme fonksiyonu		
Re	Reynolds sayısı		
R_g	1 mol gazın gaz sabiti		
S	Nozul hatvesi		mm
T	Sıcaklık		$^{\circ}\text{C}$
t	Zaman		s
T_0	Başlangıç sıcaklığı		$^{\circ}\text{C}$
T_B	Referans sıcaklığı		$^{\circ}\text{C}$
T_f	Hayali sıcaklık		
T_i	i. Düğüm noktasındaki yaklaşık sıcaklık değeri		
T_n	n düğüm noktasındaki sıcaklık		
v	Soğuma hızı		$^{\circ}\text{C/s}$
V_e	Nozul çıkış hava hızı		m/s
W	Genişlik		mm
x,y,z	Koordinat eksenleri		

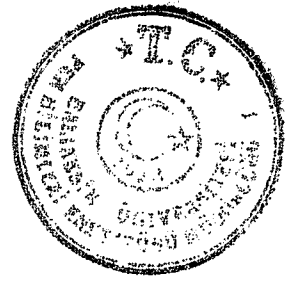


ŞEKİL LİSTESİ

Şekil Numarası	Adı	Sayfa
Şekil 3.1	Dairesel veya dikdörtgen nozul hava jeti	10
Şekil 3.2	Dikdörtgen nozul düzeni	10
Şekil 3.3	Dairesel ve dikdörtgen nozul yerleşim düzenleri	11
Şekil 3.4	Nusselt sayısının değişimi	14
Şekil 4.1	Yüzey sıcaklığı ve merkezi sıcaklığın zamana bağlı değişimi	21
Şekil 4.2	Cam başlangıç sıcaklığı ve ısı transfer katsayısının fonksiyonu olarak temper derecesinin değişimi	22
Şekil 4.3	Biot sayısının fonksiyonu olarak basınç oranının değişimi	23
Şekil 4.4	Levha camda gerilme gevşemesi ölçümleri	26
Şekil 4.5	Sıvı camın soğuma eğrisi	27
Şekil 4.6	Sabit hızla soğutulan camda yapısal ve termoelastik gerilmeler	27
Şekil 4.7	İlk sıcaklık ve ısı transfer katsayısına göre merkezi artık gerilme dağılımı	30
Şekil 4.8	Viskoelastik model, yapısal model ve ölçülen değerlerin kıyaslanması	31
Şekil 4.9	Farklı matematiksel modellerle belirlenen temper gerilmelerinin kıyaslanması	32
Şekil 4.10	Yapısal genleşme oranının ısı transfer katsayısına göre değişimi	32
Şekil 4.11	Temperlenmiş camda kesitteki yoğunluk değişimi	33
Şekil 4.12	Cam temperleme prosesi	34
Şekil 4.13	Temperleme prosesinde ısı transfer oranının kalınlığa göre değişimi	34
Şekil 4.14	Temperleme prosesi süresince viskozite değişimi	36
Şekil 4.15	Soğutma sürecinde camdaki sıcaklık ve gerilme dağılımı	38
Şekil 4.16	Camın ısıl genleşme özelliği	39
Şekil 4.17	Cam mukavemeti	39
Şekil 4.18	Çekme gerilmesi büyüklüğüne göre kırık parça sayısı	40
Şekil 5.1	Kesitteki sıcaklık dağılımı	42
Şekil 5.2	Isı iletimi problemi için başlangıç ve sınır şartları	44
Şekil 5.3	İki boyutlu iletim	56
Şekil 5.4	Karşılaştırmalı problem ve düğüm sistemleri	57
Şekil 6.1	Problemin üç düğüm noktalı üçgen elemanlara bölünmesi ve lineer enterpolasyon fonksiyonu yardımıyla bağımsız değişkenin gösterimi	66



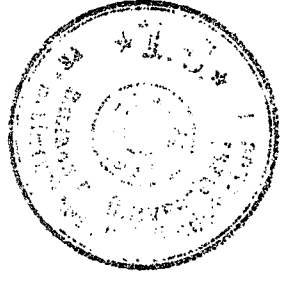
Şekil 6.2	Elemanların bölünmesi	66
Şekil 6.3	Bir boyutlu eleman için enterpolasyon fonksiyonu	68
Şekil 6.4	Dörtgen eleman	79
Şekil 6.5	Koordinat sistemi	81
Şekil 6.6	Ortak kenarlı elemanlar	81
Şekil 6.7	Kuadratik eleman	83
Şekil 6.8	Eleman sınır fonksiyonları	83
Şekil 6.9	Eğri kenarlı eleman	84
Şekil 6.10	Bir boyutlu zamana bağlı problem için çözüm bölgesi	90
Şekil 6.11	Geri farklar yöntemi için hesaplanan düğümler	91
Şekil 6.12	İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı iletim problemi	92
Şekil 7.1	Levha cam	96
Şekil 7.2	X görünümü	96
Şekil 7.3	Sonlu elemanlar ağı	97
Şekil 8.1	Temperlemede gerekli güç ihtiyacı	98
Şekil 8.2	Kalınlığa bağlı olarak soğuma zamanının değişimi	99
Şekil 8.3	Kesitteki sıcaklık dağılımı	100
Şekil 8.4	Kesitteki gerilme dağılımı	100



ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge No	Adı	Sayfa
Çizelge 2.1	Cam türleri ve bileşimleri	6
Çizelge 5.1	İncelenen iki boyutlu karşılaştırmalı problemin sonuçları	57
Çizelge 6.1	Uzunluk koordinatlarının integralleri	72
Çizelge 6.2	İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı iletim probleminin değişik zaman adımlarında elde edilen iki elemanlı ileri farklar çözümlerinin tam çözümle kıyaslanması	93





ÖNSÖZ

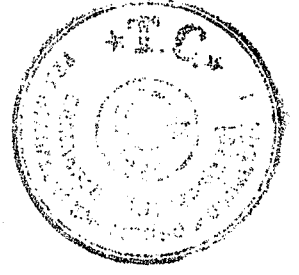
Başlangıçta, çalışma konusu itibariyle tedirginlik ve belirsizlik duygularının hakim olduğu bir ruh halindeydim. Zamanla literatürde konuyla alakalı çalışmaları inceledikçe konunun sınırları ve yöntemi belirginleşti. Bu aşamada iken konunun netleşmesinde ve çalışma yönteminin oluşturulmasında ışık tutan, örnek aldığım danışman hocam Prof. Sabri SAVAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimimden bu yana her yönden desteğini esirgemeyen ve değerli zamanlarını harcayarak ilgi ve alakasını gördüğüm değerli hocam Prof. Dr. Recep YAMANKARADENİZ'e içtenlikle teşekkür ederim.

Desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma ve bu güne kadar dayanağım olan sevgili aileme minnettarım.

Balıkesir, 1998

Enver YALÇIN



1. GİRİŞ

Günlük yaşamda, bir çok iş kolunda yaygın bir şekilde kullanılan cam malzeme hem yapısal olarak hem de elde edilmiş şekli ile çok ilginç bir malzemedir. İç yapısı amorf olan cam aşırı soğutulmuş bir sıvı olarak nitelendirilebilir.

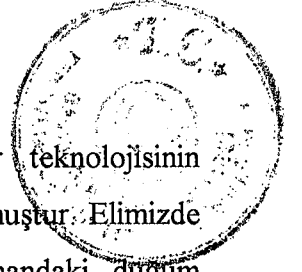
Isıtma ve soğutma teknolojisi bakımından ele alındığında, pota içerisinde erimiş camın soğuma veya ısıtma gradyanı ve bu esnadaki yapısal ve termodinamik değişimler, soğutma şekline bağlı olarak cebri veya doğal ısı transferi işlemi uygulanması durumundaki fiziksel ve ısıl davranışı ayrı ayrı kendi başına bir inceleme konusudur.

Bu çalışmada, levha halinde üretilmiş camlarda uygulanan temperleme ve tavlama dediğimiz ısıl işlemler esnasında camdaki ısıl ve fiziksel özelliklerindeki değişimler inceleme konusu olarak ele alınmaktadır.

Günlük hayatta sık sık karşımıza çıkan ön gerilmeli ve güvenlik camları (oto camları gibi) bu yöntemlerle elde edilen cam türleridir. Temperleme işlemi uygulanarak camın mukavemeti artırılabilen ve kırılma sırasında adi cam gibi çatallara ayrılma şeklinde değil de tuz-buz halinde kırılması sağlanabilmektedir.

Standartlarda bu kırılma şeklinin alt ve üst sınırları, basınç emniyet mukavemeti sınırları belirlenmiş ve uygulamada bu sınırlar içinde üretim yapılması şartı getirilmiştir.

Temperleme işlemi esnasında cam kesitinde oluşan sıcaklık gradyanı sınır şartlarına bağlı olarak çeşitli yöntemlerle belirlenebilmektedir. Bu yöntemlere, ilerideki bölümlerde açıklık getirilecektir.

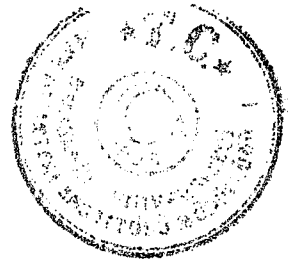


Çalışmada kullanılan sonlu elemanlar yöntemi, bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile bir çok alanda kullanılan ve tercih edilen bir yöntem olmuştur. Elimizde bulunan malzeme sonlu sayıda elemana bölünerek her bir elemandaki düğüm noktalarında istenen değerler elde edilebilmektedir. Eleman sayısı arttıkça çözüm hassasiyeti artmaktadır, problemin çözüm zamanının uzaması sorunu da günümüzde artık ortadan kalkmıştır.

Malzeme kesitindeki sıcaklık gradyanını ve dolayısıyla oluşan gerilme değerlerini etkileyen parametreler; malzeme fiziksel özellikleri, ısı transfer şekli, ısı taşınım katsayısı, malzeme kalınlığı, başlangıç ve sınır şartları gibi parametrelerdir.

Bu parametrelerin etkisi hesaplamalarda ayrı ayrı ele alınacaktır.





2. CAM

2.1 Genel Bilgi

Cam, sabit bir erime noktası olmayan amorf bünyeli bir silikat bileşimi olarak tanımlanmaktadır. Ana maddelerinin ısıtılarak eritilmesi, biçimlendirilmesi hamurun kristalleşme olmaksızın soğuması sonucunda cam elde edilmektedir. Erime derecesi, bileşime giren maddelere göre değiştiği için belirli sıcaklıkta eriyen metal ve benzeri malzemeler gibi camın sabit bir erime derecesi mevcut değildir.

Malzemeciler camı aşırı soğutulmuş bir sıvıya benzetirler. Gerçekten de cam ısıtılmaya başlandıktan sonra sıcaklığın artmasına paralel olarak önce yumuşar ve daha sonra da akıcı hale gelir. Bu hali ile adeta bir sıvı gibidir.

2.2 Camın Tarihçesi

Camın ilk kez M.Ö. 3000 yıllarında Mezopotamya ve Mısır'da üretildiği biliniyor. Denizci bir kavim olan Fenikelilerin ilk camı ürettikleri de bu bilgiler arasındadır. Bugünkü anlamda cam üretimi ve yapıda kullanılması çok eskilere dayanmamaktadır. Evlerde pencerelere cam koyma düşüncesinin Romalılar'dan geldiği sanılıyor. Nitekim, Pompei antik kentinde bulunan bronz pencerelere yerleştirilmiş bulunan 30/60 cm boyutundaki camlar bunu kanıtlamaktadır. Yeterince büyüklükte levha cam yapılması ancak 11.yy da şişirilmiş silindir yöntemi ile gerçekleştirilebilmiştir. Bu yöntemde demir boru ile alınan erimiş cam, borudan hava üflenerek ve döndürülerek silindir hale getiriliyor; silindirin alt ve üst kısımları kesilip alındıktan sonra silindir, ayırıtı (jeneratrisi) boyunca kesiliyor ve düzlem bir zemin üzerinde düzeltilerek levha haline getiriliyordu. Levha cam elde edilmesine karşın bu yöntemde elde edilen cam levha yeterli büyüklükte elde edilemediği gibi yüzey olarak çok düzgün olmuyordu. Bu amaçla 16.yy'da Plateau yöntemi denilen daha basit bir



yöntem denenmiş ise de elde edilen camların kenarları ince ortaları kalın; ancak yüzeyleri daha düzgün oluyordu. Bu yöntem sakıncaları nedeniyle kısa süre sonra terk edildi.

Levha cam üretiminde büyük aşama 20.yy başlarında uygulanan yeni teknolojilerle gerçekleşmiş, nitelik ve nicelik olarak daha üstün levha camlar elde edilmiştir.

Ülkemizde cam üretimi Selçuklular döneminde başlamış, Osmanlılar döneminde büyük bir gelişme göstermiştir. 19.yy'da Beykoz'daki kristal cam fabrikasının ürünleri (özellikle çeşm-i bülbüller) büyük beğeni kazanmıştır

2.3 Camı Oluşturan Ana Maddeler ve Cam Türleri

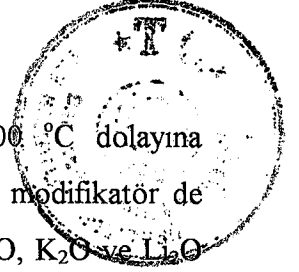
Camı oluşturan ana maddelerden söz edildiğinde adi camın bileşimine giren üç grup madde akla gelir. Bunlar cam haline gelebilen oksitler, eriticiler ve stabilizatörler denilen maddelerdir. Adi camın bileşimine giren maddelerin dışında cama önemli özellikler kazandıran ve üretiminde bazı yararlar sağlayan yardımcı bileşenler de bir grup olarak ele alınmaktadır. Bu bölümde camı oluşturan ana maddeler ve yardımcı bileşenler incelenecektir

2.3.1 Camlaşıcılar

Camlaşıcılar, genelde ağ oluşturan bazı oksitlerdir. Doğal cam olarak nitelenebilecek olan kuvars kumu ağ oluşturan oksitlerin başında gelmektedir. Ağ oluşturan oksitler içinde en önemlileri SiO_2 , B_2O_3 ve P_2O_5 dir.

2.3.2 Eriticiler

Eriticiler ağ oluşturan ve cam haline gelebilen oksitlerin erimelerini kolaylaştırmak amacı ile cam bileşimine katılan maddelerdir. Eriticiler denilen bu gruptaki maddeler camlaşıcıların erime sıcaklık derecesini düşürerek erimeyi



kolaylaştırır. Özellikle 1713 °C eriyen silisin erime derecesi 1500 °C dolayına indirilebilir. Eriticiler ağ içine girerek onu değiştirdiği için eriticilere modifikatör de denmektedir. Eritici olarak adlandırılan bu maddelerin başlıcaları Na₂O, K₂O ve Li₂O dur.

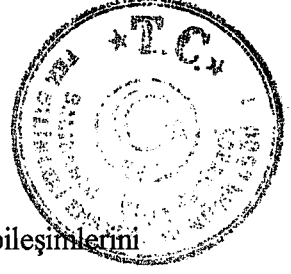
2.3.3 Stabilizatörler

Stabilizatörler eriticiler gibi özellikle camın kimyasal dayanımı, kırma indisi, dielektrik özellikleri üzerinde etki yapan maddelerdir. Formülüne stabilizatör ilave edilmemiş bir cam su karşısında stabil değildir. Bu tür camlara su camı adı verilir. Stabilizatör olarak adlandırılan maddelerin başlıcaları CaO, BaO, PbO, MgO, ve ZnO dur. CaO kireç taşının (CaCO₃), MgO ise dolomitin (MgCO₃) cam formülüne katılması ile sağlanmış olur. Zira CaCO₃ ve MgCO₃ ün ısıtılması ile bünyelerindeki CO₂ çıkar ve geriye CaO ve MgO kalır.

2.3.4 Yardımcı Bileşenler (İkincil Bileşenler)

Yardımcı bileşen ya da ikincil bileşen olarak adlandırılan maddeler genelde adi camın formülüne girmeyen, ancak, çoğunlukla değişik camlarda değişik etkiler sağlamak üzere kullanılan oksitlerdir. İkincil bileşenler ve sağladıkları etkiler aşağıda gösterilmiştir.

Arsenik	As ₂ O ₃	Renk verici, saflaştırıcı
Fluorin	CaF ₂	Opaklaştırıcı
Sülfür	Na ₂ SO ₄	Redükleyici
Fosfor	P ₂ O ₅	Sodyum, kalsiyum camlarını opaklaştırıcı
Kobalt	CO ₂ O ₃	Renk verici, renk giderici
Zirkonyum	ZrO ₂	Viskozite arttırıcı



2.4 Cam Türleri

Silikat camlarının çok değişik türleri vardır. Bu camların kimyasal bileşimlerini gösteren aşağıdaki tablodan da görüleceği gibi hepsinin bileşiminde SiO_2 vardır. Bu nedenle de bu camlara 'silikat camları' adı verilmektedir.

2.4.1 Sodakalsik Camı

Tüm dünyada üretilen camların %90'ı sodakalsik camıdır denilebilir. Ucuz olması, kolayca eritilebilmesi gibi önemli niteliklerine karşın ısıl şoklara mukavemet ve kimyasal kararlılık gerektirmeyen haller dışında hemen her yerde kullanılabilen bir cam türüdür. Bileşim türleri pek fazla olan bu cam türü normal elektrik ampülü, floresan ampuller, pencere camları vb. malzemelerin üretiminde kullanılır. Ayrıca, bu cam viskozite karakteristikleri nedeniyle hava-gaz karışımı şalümo alevinde kolaylıkla çalışma olanağı verir.

Çizelge 2.1 Cam türleri ve bileşimleri [1-2]

N O	CAM TÜRÜ	%								
		SiO_2	B_2O_3	Al_2O_3	CaO	MgO	BaO	PbO	Na_2O	K_2O
1	SODAKALSİK CAMI	73.3	-	-	5.2	3.6	-	-	16.0	0.6
2	KURŞUN CAMI	56.6	-	1.4	-	-	-	30.0	4.0	8.0
3	KURŞUN CAMI	6.0	13.0	-	-	-	-	81.0	-	-
4	BOROSİLİKAT CAMI	80.5	12.9	2.2	-	-	-	-	3.8	0.4
5	BOROSİLİKAT CAMI	67.3	24.6	1.7	-	0.2	-	-	4.6	1.4
6	BOROSİLİKAT CAMI	68.9	21.4	2.3	-	-	-	0.2	2.8	4.4
7	ALİMNOSİLİKATCAMI	57.0	4.0	20.5	5.5	12.0	-	-	1.0	-
8	SİLİS CAMI	96.3	2.9	0.4	-	-	-	-	0.2	0.2
9	SİLİS CAMI	99.3	-	-	-	-	-	-	-	-

2.4.2 Kurşun Camı (Kristal Cam)

Sodakalsik camındaki kireç yerine PbO geçtiğinde geniş bir uygulama alanı olan kurşun camı elde edilmiş olur. Sodakalsik camında %15 oranı ile sınırlı olan CaO yerine geçen kurşun oksit %80 oranının bile bazı hallerde üstüne çıkabilir. Kurşun oksit, camın erime noktasını düşürerek yumuşama noktasını CaO'li camlarınkinin de



altına düşürür. Ayrıca cama kolay işlenebilme, ışığı yansıtma ve yayma özelliği kazandırır. Bütün bu nedenlerle üç yüz yıldan fazla bir zamandan beri kurşun camları sanatsal cam üretiminde kullanılmaktadır. Tablodaki 2 numaralı bileşim daha çok boşluk tekniğinde kullanılır. 3 numaralı bileşim ise düşük erime sıcaklığından ötürü cam kaynağı işlerinde kullanılır. Kurşun oksit miktarının %80'i aştığı kurşun camı özellikle ve X ışınlarından korunmak için kullanılmaktadır. Kurşun camlarının pahalı oluşları nedeniyle günümüzde bu camların yerine mümkün olduğu ölçüde baryum oksitli camların kullanılma eğilimi artmıştır.

2.4.3 Borosilikat Camı

Borosilikat camlarının nispeten yüksek bir yumuşama noktası vardır. Buna karşın, ısıl şoklara karşı büyük bir mukavemet sağlayan büyük bir genişleme katsayısı, su ve asitlere karşı çok iyi mukavemet göstermesi ve üstün elektriksel özellikleri ile dikkat çekicidir. Bütün bu özellikler borosilikat camlarının laboratuvar cam eşyası (teknik cam), mutfak eşyası (pyrex), büyük boyutlu astronomik aynaların yapımında kullanılmasını sağlamıştır. Üstün elektriksel özellikleri sayesinde ateşe dayanıklı alaşımlarla (tungsten-molibden, demir-nikel-kobalt) birlikte kullanılabilir.

2.4.4 Alüminosilikat Camı

Bu camlar %20'den biraz fazla alümin, az miktarda bor, bir miktar kireç ve manyezi ile çok az alkali içerirler. Bazı hallerde alkali formüle girmeyebilir. Ancak alkali bulunmaması durumunda bu camların eritilmesi ve işlenmesi borosilikat camlarından daha güç hale gelir. Yumuşama noktasının yüksek ve dilatasyon katsayısının küçük olması bu camların termometre, yanma tüpleri ile alevle doğrudan temas edecek her türlü parçanın yapımında özellikle kullanılmasını sağlamaktadır. Boşluk tekniğinde, yumuşama noktasının yüksekliği nedeniyle projeksiyon ampulleri ve saydam fosforlu katot tüplerinde, ayrıca yüksek sıcaklıkta dielektrik kayıplarının küçüklüğü ve yine yumuşama noktasının yüksekliği nedenleriyle kullanılmaktadır. Diğer bir kullanım alanı ise yüksek güçlü verici lambalarıdır.

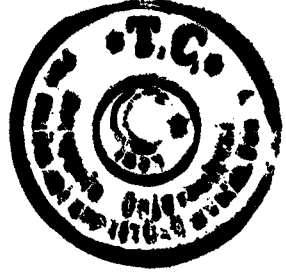


2.4.5 Silis Camı (%96 SiO₂)

Özellikleri yönünden saf silis camına benzeyen %96 silis içeren bu cam fabrikasyon tekniği yönünden büyük hüner gerektirir. Geleneksel camların bir kısmı ile gerçekleştirilebilen presleme ve üfleme yöntemleri ile şekillendirme bu camlara da uygulanır. Dilatasyon katsayısı daha evvelce açıklanan camlardan daha küçüktür. Boşluk tekniğinde bu cama ilgi gösterilmesi, bu camın ateşe dayanıklılığına, dilatasyon katsayısının küçük oluşuna ve malzeme seçiminden kaynaklanan üretim olanaklarına bağlı bulunmaktadır. Bu cam çok saydam oluşu nedeniyle U.V. ışınlarını çok iyi geçirir.

2.4.6 Silis Camı (%99 SiO₂)

Bu cam, çok saf kuvars kumunun herhangi bir eritici madde olmadan eritilmesi ile elde edilir. Bu camın üretimi ve özellikle biçimlendirilmesi çok yüksek sıcaklıkta (yaklaşık 1750 °C) çalışmayı gerektirdiği için çok zordur. Bu nedenle üretilecek mamüllerin şekilleri ve boyutları sınırlı olmak zorundadır. Genleşme katsayısının çok küçük olması, yumuşama noktasının çok yüksek oluşu ve U.V. ışınlarını çok iyi geçirmesi gibi olumlu özellikleri vardır. Mevcut camlar içinde ısıl şoklara karşı mukavemeti en yüksek olan camdır.



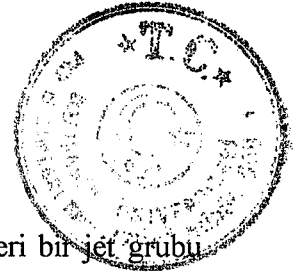
3. HAVA JETİ İLE SOĞUTMA

Bir yüzeye dik olarak çarpan bir hava jeti veya hava jeti grubu taşınımıyla ısıtma, soğutma veya kurutma katsayıları artışını elde etmek için kullanılabilir. Uygulama alanları; camın temperlenmesi, metal çubukların tavllanması, tekstil ve kağıt ürünlerinin kurutulması, gaz türbinlerinde ısınan parçaların soğutulması ve aircraft sistemlerin buzlanan kısımlarının çözülmesi.

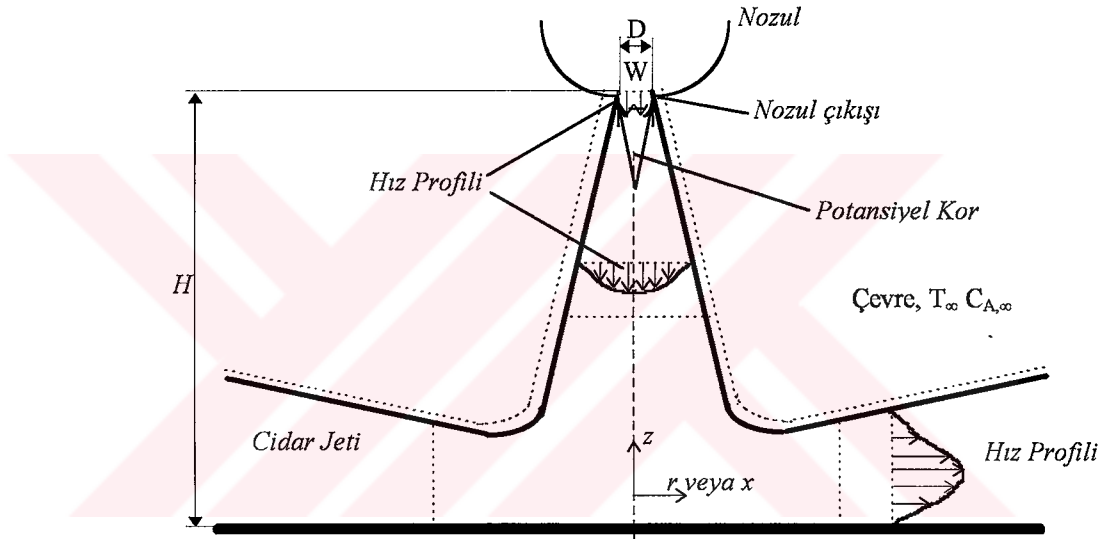
3.1 Hidrodinamik ve Geometrik Tasarılar

Hava jetleri, D çapındaki veya W genişliğindeki dikdörtgen bir nozuldan durgun çevreye tipik olarak boşalması ile oluşur, nozul çıkışında türbülanslı olan jet üniform bir hız profili ile karakterize edilir. Bununla birlikte, çıkıştan itibaren mesafe artışıyla, hava jeti ve çevre arasındaki momentum değişimi hava jetinin serbest sınırının genişlemesine ve üniform çıkış hızını muhafaza eden potansiyel kor oluşturur. Aşağıya doğru akan potansiyel korun hız profili hava jeti kesiti boyunca üniform değildir ve merkezde maksimum olan hız nozul çıkışından itibaren mesafe arttıkça azalır. Çarpma yüzeyinin etkisinin olmadığı şartlara sahip akış bölgesi serbest jet olarak adlandırılır.

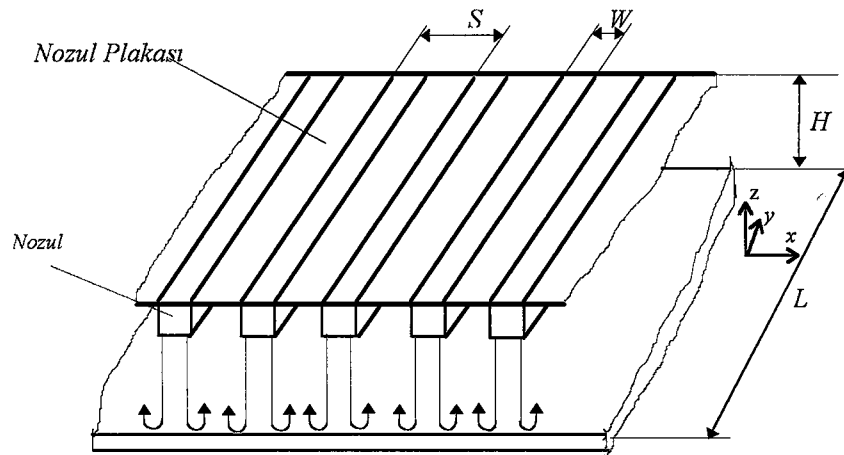
Durgun olan bölge veya çarpma bölgesi içinde, hedef yüzey akışa etki eder ve hızlı bir şekilde hız azalır ve z yönünde ivme kazanır ve sırasıyla r veya x doğrultusunda transfer edilir. Bununla birlikte, akışın çevreden sıfır momentuma doğru gitmesinden dolayı yatay ivmelenme belirsiz bir şekilde devam edemez ve ivmelenen akış durgun bölgede yavaşlayan cidar jetine dönüşür. Bundan sonra, r veya x 'in artmasıyla yüzeye paralel hız bileşenleri sıfır değerinden maksimum bir değere kadar artar ve müteakiben sıfıra iner. Cidar jeti içindeki hız profilleri çarpma ve serbest yüzeylerin her ikisinde de sıfır hız olarak karakterize edilmiştir. Eğer $T_s \neq T_e$ (sırası ile yüzey ve hava sıcaklıkları) ve/veya $C_{A,s} \neq C_{A,e}$ (yüzeyde ve nozul çıkışı konsantrasyonu) ise, durgun bölge ve cidar jeti bölgesinin her ikisinde konveksiyonla ısı ve/veya kütle transferi oluşur.



Pek çok çarpma biçiminde (cebri) ısı (kütle) transfer düzenleri bir jet grubu düzenini içerir, örneğin, Şekil. 3.2’de görülen kanal şeklindeki jet grubu. Her bir nozuldun ortaya çıkan serbest jet, durgun bölge ve cidar jet bölgelerindeki akışa ilave olarak, yanyana olan cidar jetlerinin kesişiminden ikincil durgun bölgeler ortaya çıkar. Bu gibi pek çok düzende, jetler meydana gelen hedef yüzey ve nozul plakası ile sınırlandırılmış hacim içine boşalır. Isı (kütle) transferi toplam hızı, nozul çıkışı ve çarpma yüzeyi ile ortak değerler arasındaki sıcaklığa sahip sistemden ayrılan gazın tarzına son derece bağlıdır.

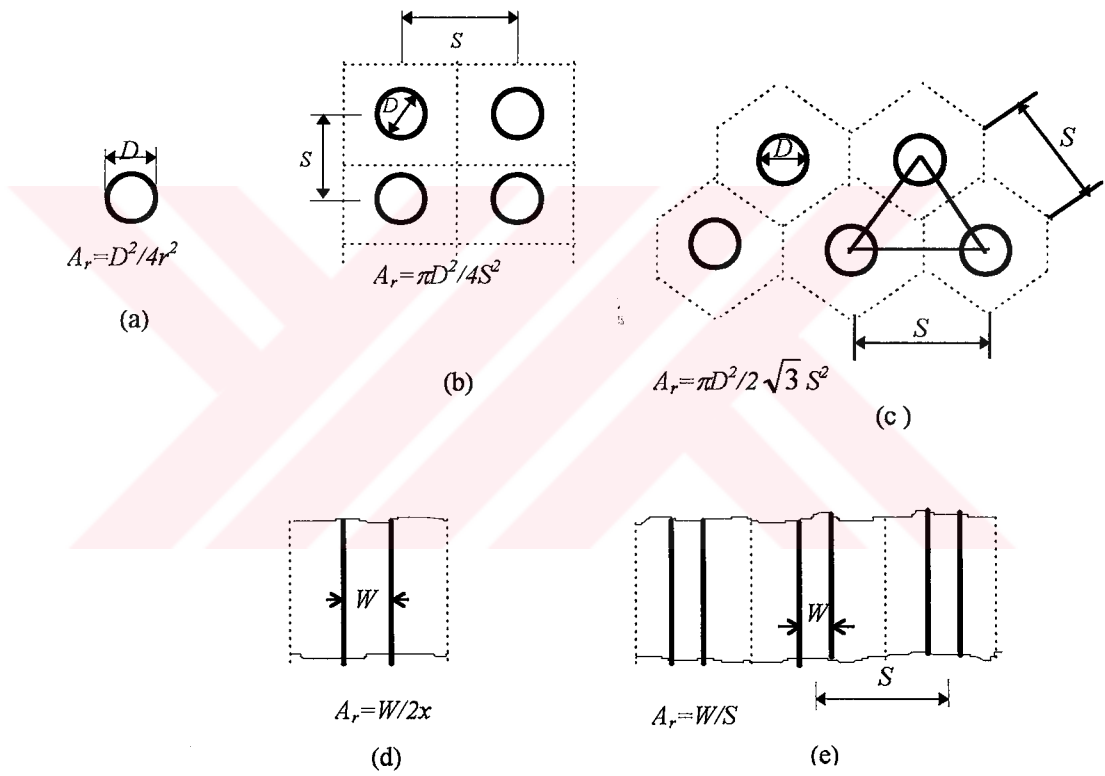


Şekil 3.1 Dairesel veya dikdörtgen nozul hava jeti [3]



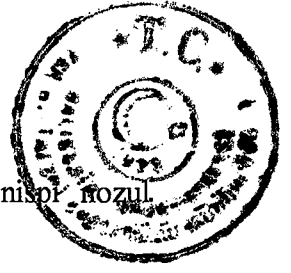
Şekil 3.2 Dikdörtgen nozul düzeni [3].

Şekil 3.2'nin uygulanması durumunda, geçen gazların nozullar arasında yukarıya doğru çıkmayabilir, fakat $\pm y$ yönünde simetrik olarak zeminde akmalıdır. Gazın sıcaklığı (yüzey soğutma) veya faz türü (yüzey buharlaşması) $|y|$ 'nin artışıyla artmasına göre tabii taşınımında bir düşüşe sebep olan lokal yüzey ile gaz sıcaklığı veya konsantrasyon farkının düşüşü değişir. Tercih edilen durum, sürekli olarak yukarı doğru akışa imkan sağlamasından ve gazın direkt olarak boşalmasından dolayı çevreye açılan komşu nozullar arasında boşluk olmasıdır.



Şekil 3.3 Dairesel ve dikdörtgen nozul yerleşim düzenleri [3].

Şekil 3.3'te dairesel ve dikdörtgen nozullar ve yerleşim düzenleri gösterilmiştir. Şekil.3.3a ve d şekilleri için, lokal ve ortalama taşınım katsayıları $r > 0$ ve $x > 0$ durumları için ifade edilmiştir. Nozul grupları için, her bir birim hücrenin denge bölgesi ve ortalama değerleri kesikli hatlarla gösterilmiştir. Şekil 3.3b'de nozullar kare hücreler içine yerleştirilmiştir. Şekil 3.3c'de dengeli bir şekilde



hekzagonal olarak yerleştirilmiştir. A_r , uygun geometrik parametresi nispetli nozul alanıdır,

$$A_{r,e} = \frac{A_{c,e}}{A_{cell}} = \frac{\text{Nozul. çıkışı kesit alanı}}{\text{Hücrenin yüzey alanı}} \quad (3.1)$$

s: İki nozul arası mesafe (hatve)

3.2 Taşınım Isı ve Kütle Transferi

Aşağıdaki sonuçlarda, nozuldaki havanın V_e üniform hızda, T_e sıcaklığında ve $C_{A,e}$ konsantrasyonunda olduğu kabul edilmiştir. Taşınım ile ısı ve/veya kütle transferi üniform sıcaklıkta ve özel kompozisyondaki çarpma yüzeyinde meydana gelirken çevre ile ısı ve bileşik dengede olduğu kabul edilmiştir.

$$T_e = T_\infty, \quad C_{A,e} = C_{A,\infty} \quad (3.2)$$

$$T_s \neq T_e, \quad C_{A,s} \neq C_{A,e} \quad (3.3)$$

Newton'un Soğuma Kanunu, yüzeyle akışkan arasındaki ısı akısı için;

$$q'' = h(T_s - T_e) \quad (\text{W/m}^2) \quad (3.4)$$

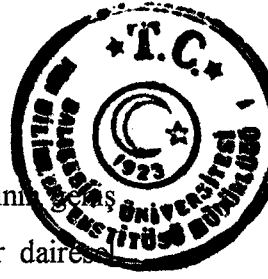
h: ısı taşınım katsayısı ($\text{W/m}^2\text{K}$)

Kütle transferi analogu,

$$N''_A = h_m(C_{A,s} - C_{A,e}) \quad (3.5)$$

h_m : taşınım kütle transfer katsayısı (m/s)

Nozul çıkışında türbülans seviyesinin etkisiz olduğu ve yüzeyin durgun olduğu kabul edilmiştir. Bununla birlikte, jet çarpma hızından çok daha düşük olan yüzey hızları için toleranslı olmaya ihtiyaç duyulabilir.



Çarpma şeklindeki hava jetleri için mevcut taşınım katsayıları datalarını bir şekilde incelenmesi Martin [3] tarafından gerçekleştirilmiştir ve tek bir dairesel nozul veya dikdörtgen nozul için karakteristik formlara sahip lokal Nusselt sayısı dağılımları incelenmiştir. Karakteristik uzunluk nozulun hidrolik çapıdır.

$$D_h = \frac{4A_{c,e}}{P} \quad (3.6)$$

$A_{c,e}$: Kesit alanı

P: Islak çevre

L : Dikdörtgen nozul boyu olmak üzere, buradan, dairesel nozulun çapı karakteristik uzunluk ve $L \gg W$ kabul ederek, dikdörtgen nozulun karakteristik uzunluğu genişliğin iki katıdır.

Dairesel nozul için,

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad (3.7)$$

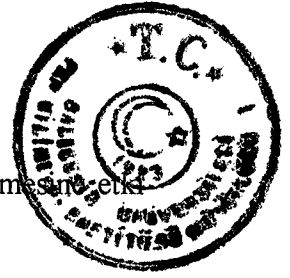
Dikdörtgen nozul için,

$$Nu = \frac{h2W}{k} \quad (3.8)$$

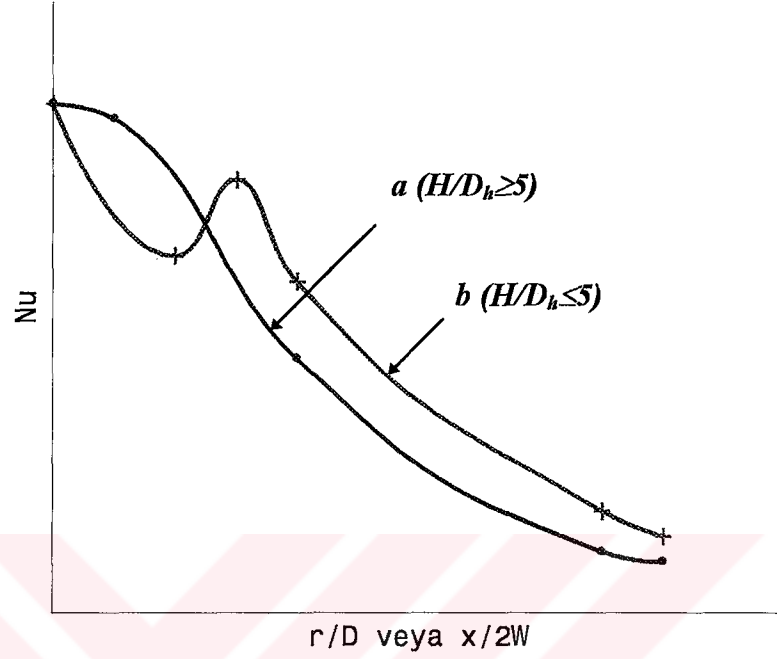
Geniş nozul-levha dağılımları için, Şekil 3.4a, dağılım ölü noktada maksimum olan bir değerden monoton bir şekilde azalan Nu değerleri için çan eğrisi şeklinde karakterize edilmiştir.

$$\frac{r}{D} \text{ veya } \frac{x}{2W} = 0 \quad (3.9)$$

Küçük ayrılmalar için, Şekil 3.4b, hava jeti hızı ile Reynolds sayısının artışıyla artan ve ilk maksimum değeri aşabilen ikinci bir maksimum değer ile dağılım karakterize edilmiştir. İkinci maksimum değer bulduğu noktanın altında kalan $H/D \approx 5$ başlangıç ayırımı, potansiyel kor uzunluğu ile birleşmektedir (Şekil 3.1). İkinci maksimum değer ortaya çıkışı ivmelenen sabit bölge akışından yavaşlayan cidar jetine geçişin bir arada olduğu türbülans seviyesinde keskin bir artış neden ile olur.



İlave maksimum değer türbülanslı cidar jetine geçiş kadar girdap şekillenmesine etki etmekte ve uygunluk göstermektedir.



Şekil 3.4 Nu sayısının değişimi [3].

Ortalama Nusselt (Sherwood) sayıları uygun yüzey alanı üzerindeki lokal sonuçların integrasyonu ile elde edilebilir. Tek bir nozul için, uygun ısı transfer bağıntıları;

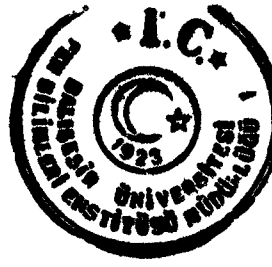
$$Nu = f(Re, Pr, r(\text{veya } x) / D_h, H / D_h) \quad (3.10)$$

$$Nu = \frac{h D_h}{k} \quad (3.11)$$

$$Re = \frac{V_e D_h}{\nu} \quad (3.12)$$

ν : kinematik viskozite (m^2/s)

$$D_h = D \text{ veya } D_h = 2W \quad (3.13)$$



Tek bir dairesel nozul için, [3]

$$\frac{Nu}{Pr^{0.42}} = G\left(\frac{r}{D}, \frac{H}{D}\right)F_1(Re) \quad (3.14)$$

$$F_1 = 2 Re^{1/2} (1 + 0.005 Re^{0.55})^{1/2} \quad (3.15)$$

$$G = \frac{D}{r} \frac{1 - 1.1D/r}{1 + 0.1(H/D - 6)D/r} \quad (3.16a)$$

$$\frac{D}{r} = 2 A_r^{1/2}$$

$$G = 2 A_r^{1/2} \frac{1 - 2.2 A_r^{1/2}}{1 + 0.2\left(\frac{H}{D} - 6\right) A_r^{1/2}} \quad (3.16b)$$

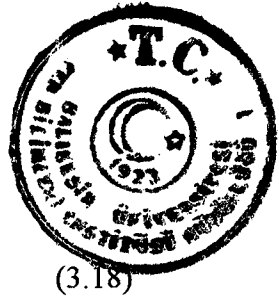
Yürürlükte olan geçerli aralık [3];

$$\left[\begin{array}{l} 2000 \leq Re \leq 400\,000 \\ 2 \leq \frac{H}{D} \leq 12 \\ 2.5 \leq \frac{r}{D} \leq 7.5 \\ \text{veya} \\ 0.04 \geq A_r \geq 0.004 \end{array} \right]$$

$r < 2.5 D$ ($A_r > 0.04$) için \overline{Nu} değerleri grafik formunda mevcuttur [3].

Tek bir dikdörtgen nozul için [3];

$$\frac{Nu}{Pr^{0.42}} = \frac{3.06}{\frac{x}{W} + \frac{H}{W} + 2.78} Re^m \quad (3.17)$$



Re sayısı üsteli m [3];

$$m = 0.695 - \left[\left(\frac{x}{2W} \right) + \left(\frac{H}{2W} \right)^{1.33} + 3.06 \right]^{-1} \quad (3.18)$$

Yürürlükte olduğu aralık,

$$\left[\begin{array}{l} 3000 \leq \text{Re} \leq 90\,000 \\ 2 \leq \frac{H}{W} \leq 10 \\ 4 \leq \frac{x}{W} \leq 20 \end{array} \right]$$

Birinci yaklaşım olarak, (3.17), ölçülen sonuçların %40'ı içinde olan sabit nokta için ($x=0$) elde edilen sonuçlar, $\frac{x}{W} < 4$ için kullanılmış olabilir.

Dairesel nozul grupları için,

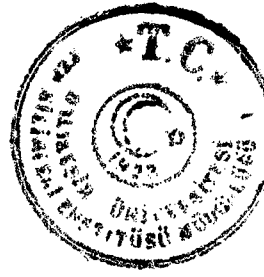
$$\frac{Nu}{\text{Pr}^{0.42}} = K \left(A_r, \frac{H}{D} \right) G \left(A_r, \frac{H}{D} \right) F_2(\text{Re}) \quad (3.19)$$

$$K = \left[1 + \left(\frac{H/D}{0.6/A_r^{1/2}} \right) \right]^{-0.05} \quad (3.20)$$

$$F_2 = 0.5 \text{Re}^{2/3} \quad (3.21)$$

(3.16b) ile verilen G değeri tek bir nozul fonksiyonudur. K fonksiyonu, $H/D \geq 0.6A_r^{1/2}$ için hesaplanır, ortalama Nu sayısı tek bir nozul için hesaplanan değere göre nozul grupları için H/D'nin artışıyla çok daha hızlı bir şekilde düşer.

$$\left[\begin{array}{l} 2000 \leq \text{Re} \leq 100\,000 \\ 2 \leq \frac{H}{D} \leq 12 \\ 0.004 \leq A_r \leq 0.04 \end{array} \right]$$



Dairesel nozul grupları için belirlenen bağıntı [3],

$$\frac{Nu}{Pr^{0.42}} = \frac{2}{3} A_{r,0}^{3/4} \left(\frac{2 Re}{A_r / A_{r,0} + A_{r,0} / A_r} \right)^{2/3} \quad (3.22)$$

$$A_{r,0} = \left[60 + \left(\frac{H}{2W} - 2 \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.23)$$

Gaz akış şartlarına ilişkin bağıntılar Şekil 3.2 $\pm y$ doğrultuları ile sınırlanmıştır ve çıkış alanı $\frac{S^* H}{W^* L} \geq 1$ şartını sağlamak için yeterli büyüklüktedir. İlave sınırlamalar,

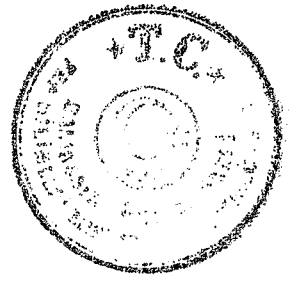
$$\left[\begin{array}{l} 1500 \leq Re \leq 40\,000 \\ 2 \leq \frac{H}{W} \leq 80 \\ 0.008 \leq A_r \leq 2.5 A_{r,0} \end{array} \right]$$

Optimal bir nozul düzeni, hedef alınan birim yüzey alanı için toplam gaz akış hızı için en büyük \overline{Nu} değerini ortaya çıkaran H, S ve D_h değerleri olacaktır. Sabit bir H değeri ve dairesel ve dikdörtgen nozul grupları için optimal D_h ve S değerleri literatürde bulunabilir [3].

$$D_{h,op} = 0.2 H \quad (3.24)$$

$$S_{op} = 1.4 H \quad (3.25)$$

$(D_h/H)^{-1} \approx 5$ optimum değeri potansiyel kor uzunluğu ile yaklaşık olarak birlikte gerçekleşir. Potansiyel kor ötesinde, orta hattaki hava jeti hızı konveksiyon katsayısındaki düşüşle azaldığı anlaşılmaktadır.



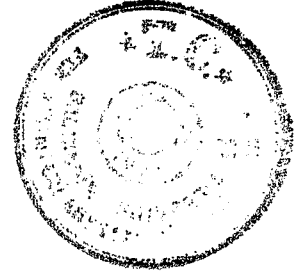
4. CAM TAVLAMA VE TEMPERLEME PROSESİ

Tavlama işleminin pratik olarak önemi cam eşyaların ilk üretiminden itibaren fark edilmiştir. Kavanoz gibi cam eşyaları ve küçük şişeleri kırılğan hale getiren veya levha halindeki camın kesilebilmesini imkansızlaştıran artık gerilmelerden kaçınmak için tavlamanın gerekli olduğu bulunmuştur. Özellikle tavlama işleminin, optik camda kırılma indisi ve ışığın kollara ayrılması gibi yüksek dereceli homojenlik gerektiren hallerde daha da önem kazanmaktadır. Bu işlem ile günümüzde şişe ve levha halinde düz cam üretiminde bir süreklilik sağlanmıştır [4].

Tavlama işleminin tersi olan temperleme işlemi, cama mukavemet kazandıran ön gerilmeli bir sistem oluşturur. Bu işlem 1929'dan bu yana otomobil camlarına uygulanmış ve cam levhaların ısıtma, şekillendirme ve temperlemeye başlamadan önce kesildiği ve kenar çapaklarından temizlendiği özel üretim hatlarında endüstriyel olarak gerçekleştirilmiştir [5-6].

Yapı endüstrisi ve mukavemetli cam eşyalar için takviyeli cam üretim tekniği geliştirilmiştir. Sözü edilen durumda, temperleme işlemi camı şekillendiren soğutma artikelleri olmaksızın üretim hattında doğrudan gerçekleştirilir.

Tavlama ve temperleme prosesinin tarihine bakıldığında, bilimselliğe dayanan bir endüstri haline gelmeden önce uzun süre mimari açıdan ele alınması cam teknolojisi açısından oldukça ilginçtir. Bu proseslerin ve uygulamaların gelişimi esas alınan fiziksel kuralların çok önceden tespit edilmiş olması ile garanti altına alınmıştır. Bu ısıtma işlemlerinin etki kapsamının tarihsel analizi özellikle olayın tasviri ile ilgilidir ki bu ısıtma, sıvı halden camsı hale geçiş süresince maddenin maruz kaldığı değişimin anlaşılmasındaki farklı gelişme aşamaları ile yakından alakalıdır.



4.1 Tarihsel Gelişim

17.yy. başlarında bilim adamları, Prens Rubert'in büyük miktarda erimiş cam damlalarını suya daldırma yöntemi ile temperleme işleminin ilk önemli izlenimlerini edinmişlerdir. Bünyesinde artık gerilmeler bulunduran cam kırıldığı zaman tuz buz haline gelir ve bu cam yüksek mekanik dirence sahiptir. 18.yy. da artık gerilmelerin yüzeyden itibaren iç kısımlardaki katılaşma hareketinden dolayı oluştuğu tahmin edilmekteydi.

Tavlama işleminde, Lebedev'in çalışması [4] ısı işlem sonucu kırılma indisinin nasıl değiştiğini optik cam ile uğraşanlara ispatlamış ve yapısal açıdan homojen bir cam elde etmek için alınması gereken önlemleri işaret etmiştir. Diğer taraftan, pencere camı veya cam kap üreticilerini bu artık gerilmeler kaygılandırmaktadır. Bu nedenle tavlama işlemi her iki grup için de aynı öneme sahiptir.

1920'de Lebedev ile aynı dönemde yaşayan Adams ve Williamson, üniform hızda düz camın soğutulması ile elde edilen gerilme orijini hakkında bir teori sunmuşlardır. Bu teoremin klasikleşmiş hale gelmiş olmasından dolayı [4], temel prensipleri özetlenmiştir. Düz bir cam sabit bir hızda soğutulursa, sıcaklık dağılımı paraboliktir ve merkezi ile yüzey arasındaki sıcaklık farkı;

$$\Delta T = \frac{l^2 v c}{8k} \quad (4.1)$$

l: camın kalınlığı mm

v:soğutma hızı

c:birim hacim için ısı kapasitesi

k:ısıl iletkenlik

Sıcaklık gradyanında şekil değişikliği olmadığı zaman soğutma hızının sabit olduğu anlaşılmaktadır. Buna göre, eğer başlangıç sıcaklığı tüm gerilmeleri ortadan kaldıracak yeterli yükseklikte ise cam gerilmelerden arınmış olarak tavlamaya



gececektir. Soğutma hızına bağlı olarak camın sıcaklığı oda sıcaklığına yaklaştıkça sıcaklık gradyanı da azalacaktır. Sonuç olarak, elastik hale gelen cam içinde soğumadan dolayı sürekli gerilmeler oluşmaya başlayacaktır. Termoelastik teoriye göre sürekli gerilme dağılımı;

$$\sigma_{(x)} = \frac{E \alpha}{1 - \gamma} \left[\bar{T}(x) - T(x) \right] \quad (4.2)$$

Bu durumda, sıcaklık dağılımının parabolik olduğu yerde merkezdeki maksimum gerilme,

$$\sigma_m = \frac{E \alpha}{3(1 - \gamma)} \Delta T \quad (4.3)$$

$$\sigma_m = \frac{E \alpha c}{24(1 - \gamma)} l^2 v \quad (4.4)$$

E: Young modülü (MPa)

γ : Poisson oranı

α : Lineer ısı genleşme katsayısı ($1/^\circ\text{C}$)

Camın fiziksel özelliklerini belirleyen Adams ve Williamson aşağıdaki eşitliği elde etmişlerdir [4].

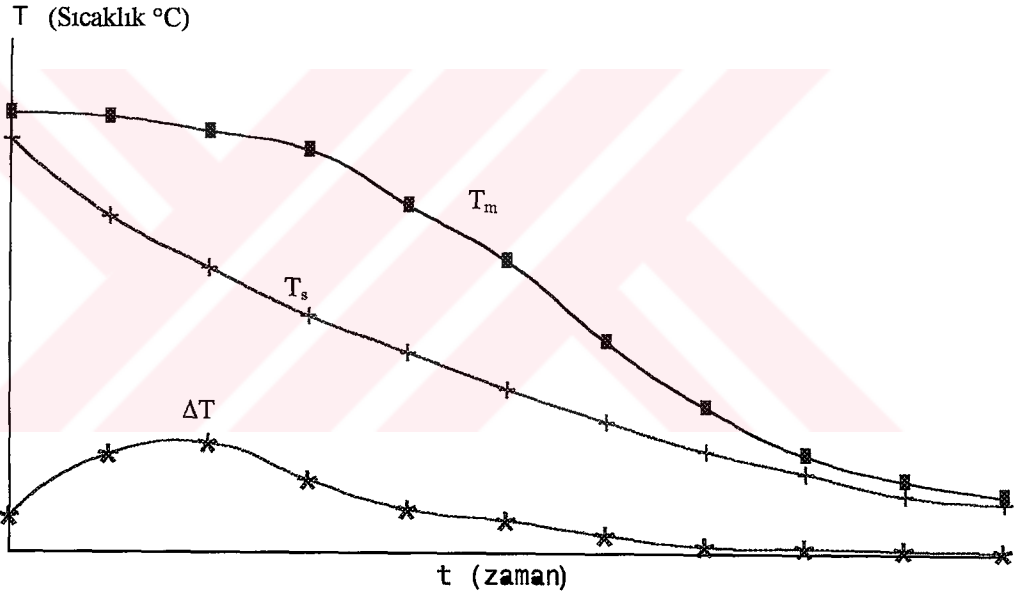
$$\sigma_m = A l^2 v \quad (4.5)$$

A: Deneysel olarak belirlenen bir sabit.

Bu basit bağıntı deneysel değerlerle oldukça iyi bir uyum içindedir ve halen pratikte yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Adams ve Williamson sonuçları genelleştirmişler ve '*camda ortaya çıkan sürekli gerilmeler, soğutma başlangıcında ortadan kalkmış gerilmelere eşit ve ters işaretlidir*' ifadesi prensip olarak benimsenmiştir [4].

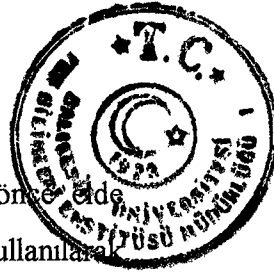


Tavlama işlemine oldukça iyi adapte edilebilen Adams ve Williamssoğutma hızının temperleme için uygulamada yetersiz olduğu tesbit edilmiştir. Tavlama periyodesuresince sabit bir soğuma hızı elde etmek için tavlama işleminin belirli (programlanmış) bir sıcaklıktaki fırın kullanılması gerekir. Diğer taraftan, temperleme işleminde homojen sıcaklığa sahip cam, soğutma hızının zamanla ve camın kalınlığına bağlı olarak değişmesinden dolayı sabit sıcaklıktaki soğuk ortamla temasa geçirilir, sıcaklık gradyanı da maksimum bir değerden başlayarak azalan şekilde oluşur (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Yüzey sıcaklığı ve merkezi sıcaklığın zamana bağlı değişimi [4]

Bartenev [4] bu durumu hesaplamaya ilk teşebbüs edendir. Çalışması üç karakteristik durumu içermektedir. Transformasyon sıcaklığının üzerinde gerilme gevşemesinin ani olarak meydana geldiğini kabul ederek reolojik davranışını şematize etmiştir fakat camın tamamen elastik hale geldiği transformasyon sıcaklığının altında bunu gerçekleştirmek imkansızdır. Bu *ani donma* hipotezidir. Daha da ötesi sıcaklık dağılımı ile ilgili hesaplamaları basitleştirmek için soğutmanın başlangıcından itibaren uzun süre donmanın nispi olarak oluştuğunu kabul etmiştir.

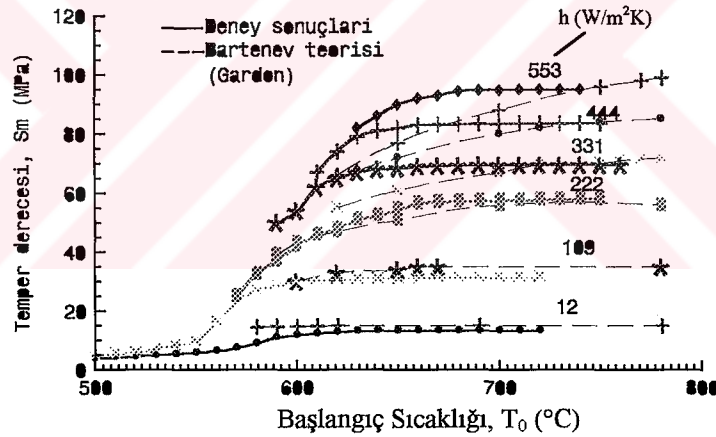


Oldukça önemli olan maksimum sıcaklık gradyanı katılaşmadan önce elde edilir. Bu yüksek bir başlangıç sıcaklığına dalalet eder. Aşağıdaki eşitlik kullanılarak katılaşmada, farklı cam katmanlarında T gerçek sıcaklık gradyanından elde edilen $\phi_{(x)}$ tahmini sıcaklık dağılımının azalmasından ortaya çıkan sürekli gerilmeler hesaba katılmıştır.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dT}{dx} \Big|_{T=T_g} \quad (4.6)$$

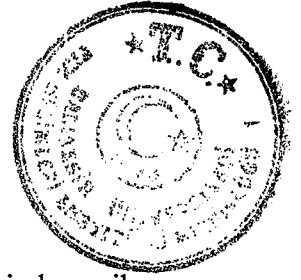
$$\sigma_{(x)} = \frac{E \alpha}{1 - \gamma} [\bar{\Phi}_{(x)} - \Phi_{(x)}] \quad (4.7)$$

Bartenev'in en büyük katkısı, son derece uygun büyüklük düzenine sahip artık gerilme değerlerini hesaplayabildiği bu model olmuştur. Şekil 4.2, Gardon [7] tarafından elde edilen deneysel sonuçlarla Bartenev teorisinin karşılaştırılmasıdır.



Şekil 4.2 Cam başlangıç sıcaklığı ve ısı transfer katsayısının fonksiyonu olarak temper derecesinindeğişimi. (Kalınlık=6 mm) [4].

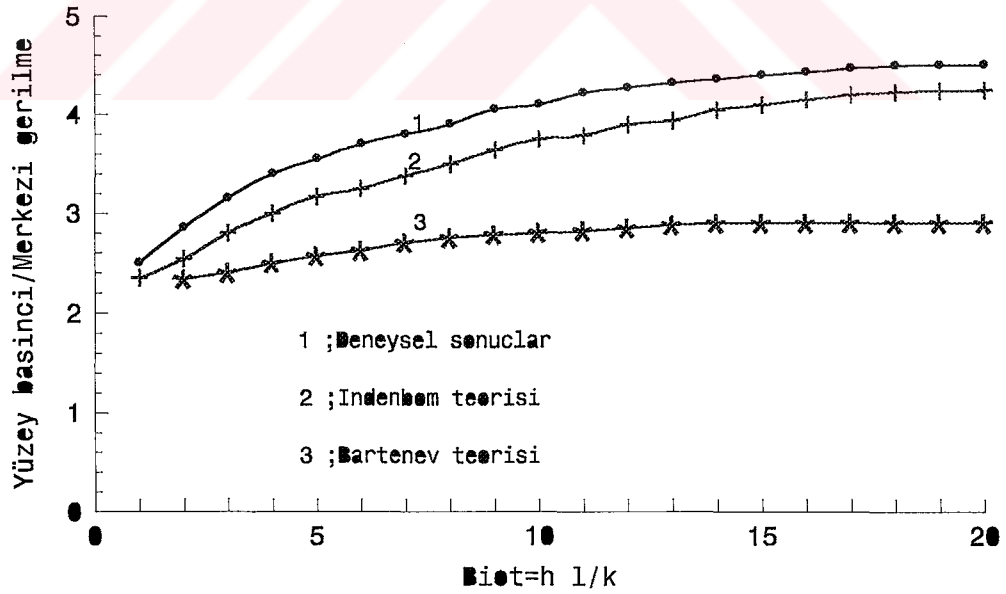
Deneysel sonuçları, başlangıç sıcaklığı yeterli ise verilen ısı transfer katsayısı için ulaşılan artık gerilme seviyesinin max olduğunu göstermektedir. Bartenev teorisi sadece düşük ısı transfer katsayıları için bu artık gerilmelerin varlığını ortaya koymaktadır. 1954'de Indenbom, gerilme hesaplamalarında Bartenev teorisini genişleterek bu farklılıkları azaltmıştır (Şekil 4.3).



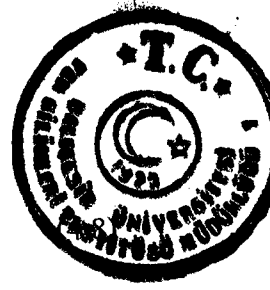
4.2 Viskoelastik Teori

Ani donma hipotezinin en büyük dezavantajı temperleme prosesinde gerilme oluşumunu tam olarak tanımlamaya müsaade etmemesidir. Bununla birlikte, 1950'de Acloque [4] tarafından gerilme oluşumunun deneysel sonuçları polarize ışık ile gösterilmiştir. O dönemde, transformasyon aralığında camın viskoelastik davranışı önemli noktalarda deneysel olarak incelenmiştir. De Bast ve Gilard [4] bir tarafta da Kurkjian [4] gevşeme zamanı spektrumu ile lineer viskoelastik malzeme olan stabilize camı elde etmişlerdir (Şekil.4 4). Gevşeme eğrileri farklı sıcaklıklarda zamana göre türetilmiştir. Bu durum, 'Termoreolojik Basitleştirme' olarak adlandırılır. Logaritmik zaman aralığındaki geçiş genliği $\Psi(T)$ transfer fonksiyonu ile belirlenmiştir.

T_B referans sıcaklığından bir T sıcaklığına değişim söz konusu olduğunda, bu değişim



Şekil 4.3 Biot sayısının fonksiyonu olarak basınç oranının değişimi [4]



$$\ln \psi_{(T)} = -\ln \frac{\eta}{\eta_B} = -\frac{H}{R_G} \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_B} \right]$$

η :viskozite (Poise)

H:aktivasyon enerjisi (~600 kJ/mol cam için)

R_G :1 mol gazın gaz sabiti

Sayısal yöntemlerin gelişimi, temperleme ve tavlamanın daha detaylı bir modelinde viskoelastik davranışın sonuçlarının alınmasını mümkün kılmıştır. Boltzman'ın süperpozisyon prensibi sıcaklık değişim değerlerinin sürekli olarak belirlenmesinde kullanılmıştır. 1965'de Lee et al [4] 'azalan zaman' (ξ) ifadesini kullanarak eşitliklerde 'termoreolojik basitleştirme' ifadesine bir giriş yapmıştır.

$$\xi = \int_0^t \psi_{(T)} dt \quad (4.9)$$

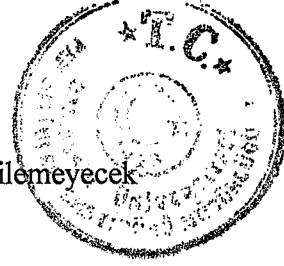
Geçiş gerilmesi için elde edilen ifade;

$$\sigma(x, t) = 3 \int_0^t R[\xi(x, t) - \xi(x, t')] \frac{\partial}{\partial t'} [\varepsilon(t') - \alpha t(x, t')] dt' \quad (4.10)$$

$\varepsilon(t)$: Mekanik denge denklemi ile tanımlanan ve x 'in tüm değerleri için aynı olan t anındaki % şekil değiştirmedir.

$R(\xi)$: Tek eksenli gevşeme fonksiyonundan elde edilen iki eksenli gerilme hali için gevşeme fonksiyonu

Gardon, Acloque gibi polarize ışık kullanarak farklı ısı transfer katsayıları ve başlangıç sıcaklıkları için temperleme süresince gerilme değişimine göre bir kaç dizi sonuç elde etmiştir [4]. Böylece, Narayanaswamy ve Gardon [4] deneylerle teoriyi



karşılaştırabilmişlerdir. Özellikle düşük sıcaklıklarda bulunan ihmal edilemeyecek farklılıklar viskoelastik yaklaşımın sınırlarını belirtmişlerdir.

4.3 Yapısal Teori

1970’de, Gardon ve Narayanaswamy [4-7] tavlama çalışmasına geri dönmüşler ve tavlama süresince sabit hızda soğutulan camdaki gerilme değişimini belirlemek için kullanılan polarize ışık sinematografisinin artık klasik bir deney olduğunu göstermişlerdir.

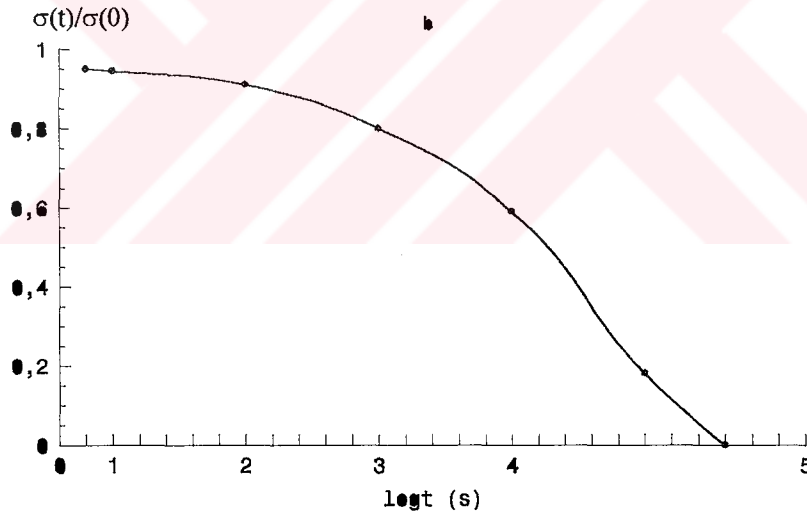
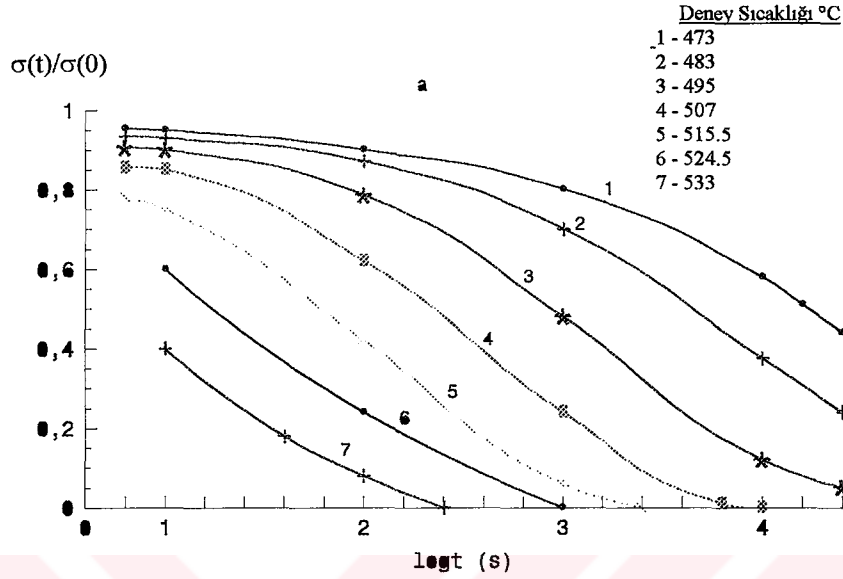
Adams ve Williamson’a göre sıcaklık gradyanı değişmediğinden bu faz süresince gerilmesiz hal mevcuttur. Bunun yanında, Gardon ve Narayanaswamy gerçekte gerilmenin olduğunu tesbit etmişlerdir. Bu davranışın yazarlara göre yorumunda, yapısal hali karakterize etmek için 1946’da Tool [4-7] tarafından giriş yapılan hayali sıcaklık kavramı kullanılarak yapısal gevşeme kavramı temel alınmıştır.

Şekil 4.5’de soğuma süresince şekillendirilen sıvı camdaki hacim değişimi gösterilmiştir. Faz değiştirme aralığında, her sıcaklıkta denge haline ulaşmak için madde için yeterli zaman fazla uzun değildir. Tanımlama yapacak olursak, bir camın T_f hayali sıcaklığı problemdeki cam gibi aynı yapıda olan sıvının sıcaklığıdır. Örneğin cam fazına uyan hayali sıcaklık, P paralelinden camın hacimsel genişmesine bir hat çizilerek ve sıvının hacim genişmesine karşılık gelen hat ile kesişimini alarak elde edilen P' noktası ile gösterilmiştir. P katı fazı ile P' sıvı fazı arasındaki hacim farkı, ani olarak oluştuğu kabul edilen ısı değişiminden dolayıdır.

Şekil 4.6, gerilmenin ortaya çıkışının iki adımda nasıl açıklandığını şematik olarak göstermektedir. Gerilme sadece gerçek sıcaklık gradyanında değil hayali sıcaklık gradyanında da ortaya çıkar. Gerçek sıcaklık gradyanının azalmasıyla ortaya çıkan gerilmelerin hepsinin farkı süreklidir, öyle ki, hayali sıcaklık gradyanının azalmasıyla ortaya çıkan gerilmelerin sadece yaklaşık 1/3’i kalacaktır. Geriye kalan kısım faz değişim aralığında cam viskoelastikliğinden dolayı gevşeyecektir. Hayali sıcaklık kavramının girişi, temperleme ve tavlama işlemlerinin her ikisi için de

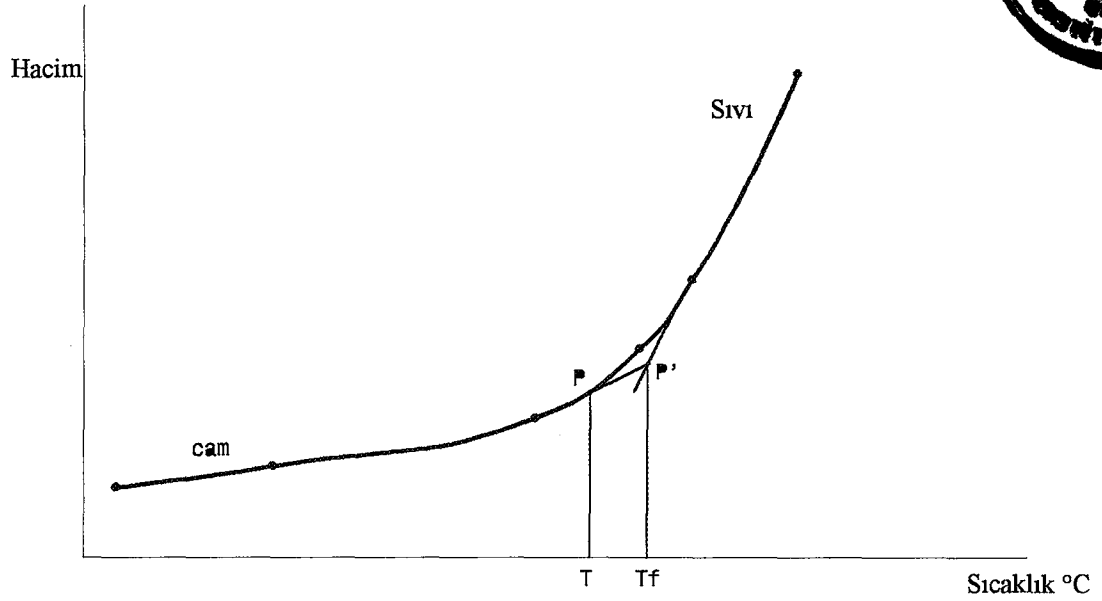
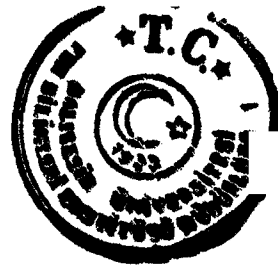


uygulanabilen ve viskoelastik teorisini genişlemesini sağlayan yapısal teorisinin hazırlanmasını mümkün kılmıştır.



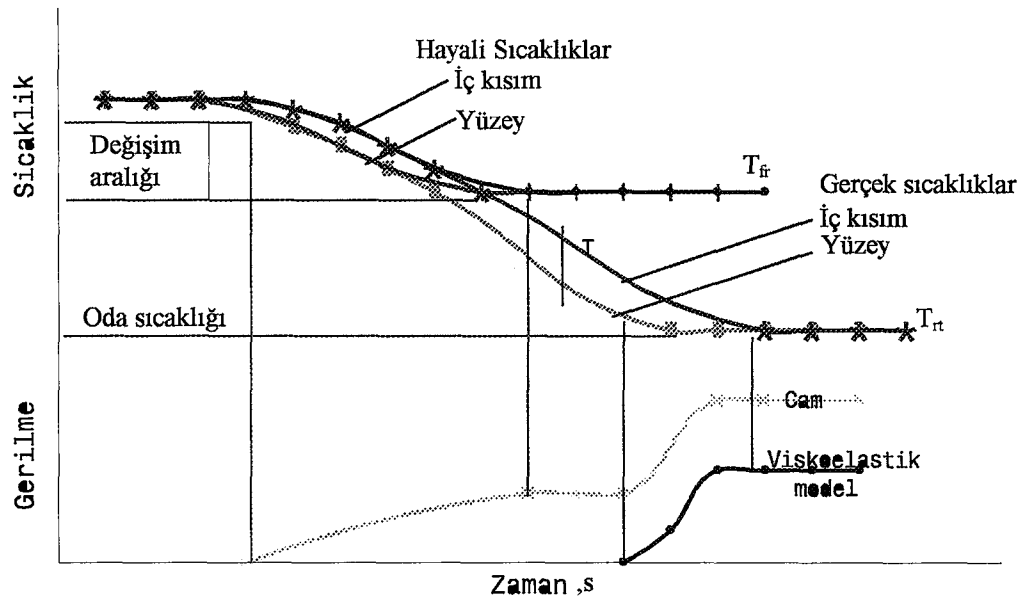
Şekil 4.4 Levha camda gerilme gevşemesi ölçümleri [4]

Yapısal teori sadece sıcaklıkla değil ısı zamanla da değişen madde özelliklerini daha kapsamlı bir yolla karakterize eder. Camdaki gerilmeleri hesaplamak için sabit olmayan etkiyi göz önüne alırken süperpozisyon prensibinin kullanımının sürekli olması önemlidir. Narayanaswamy ψ transfer fonksiyonuna hayali sıcaklık ifadesini yerleştirmeyi ve gerçek sıcaklık gibi aynı rolü oynamasını başarmıştır.

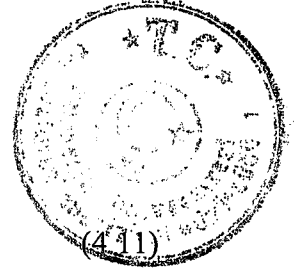


Şekil 4.5 Sıvı camın soğuma eğrisi [4]

De Bast ve Gilard [4-7-8], pratikte eşit olan iki ifadeden oluşan viskozite değişimine uygun toplam aktivasyon enerjisini önceden ifade etmişlerdir. Birisi sıcaklıkla diğeri yapısal düzenle ilgilidir. Böylece Narayanaswamy aşağıdaki ψ transfer fonksiyonunu bulmuştur [4].



Şekil 4.6 Sabit hızla soğutulan camda yapısal ve termoelastik gerilmeler. [4]



$$\ln \psi(T, T_f) = -\ln \frac{\eta}{\eta_B} = -\frac{H}{2R_G} \left[\frac{1}{T} + \frac{1}{T_f} - \frac{2}{T_B} \right] \quad (4.11)$$

$$\xi(x, t) = \int_0^t \psi(T, T_f) dt \quad (4.12)$$

$$T_f(\xi) = T(\xi) - \int_0^\xi M(\xi - \xi') \frac{dT}{d\xi'} d\xi' \quad (4.13)$$

$M(\xi)$: Küçük sıcaklık değişimi için camın tepki fonksiyonudur. Bu değer gevşeme deneylerinden elde edilen ölçülebilir bir değerdir.

Narayanaswamy, Rekhson ve Mazurin [4-9] tarafından elde edilen aşağıdaki M_v hacim gevşemesi amprik ifadeden elde edilen sonuçları kullanmıştır.

$$M_v(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi}{t_v}\right)^{0.68} \quad (4.14)$$

t_v : 6345 s (soda-lime cam için strain noktasındaki değer)

$$\sigma(x, t) = 3 \int_0^t R[\xi(x, t) - \xi(x, t')] \frac{\partial}{\partial t'} [\varepsilon(t') - \alpha_g T(x, t') - \alpha_s(x, t')] dt' \quad (4.15)$$

$\alpha_s = \alpha_L - \alpha_g$: Yapısal genleşme katsayısı. Sıvı ile katı camın genleşme katsayıları arasındaki farktır.

$$\alpha_s = 20 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

Temperlenmiş camın orta kısmındaki sürekli gerilme şiddetinin değerlendirilmesiyle yapısal teori ile deney sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4.7, bu



modelde kullanılan fiziksel özelliklerin kesin olmayan değerlerini hesaba katılarak elde edilen oldukça iyi sonuçları göstermektedir. Buna ilave olarak, Gardon [7] tarafından elde edilen sinematografik kayıtlarla hesaplanmış geçici gerilmelerin karşılaştırılmasıyla, yapısal modelin viskoelastik modelden üstünlüğü kanıtlanmıştır.

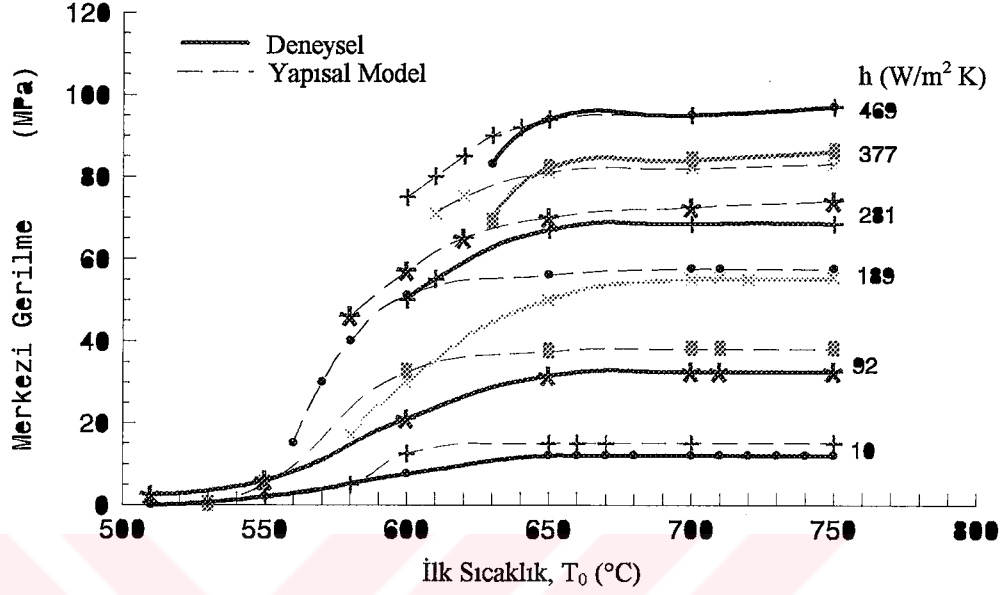
Viskoelastik modeli gösteren Şekil 4.8, yapısal modelin yeterli derecede değişimini önceden belirtmekle birlikte, geçici gerilmelerin açıklamasında yetersizdir. Yapısal teori, diğer teoride ihmal edilen iki etkinin hesabını içermesi ile viskoelastik teoriden ayrılır. Bu etkiler;

1.Eşitlik.9'da α_s katsayılı hal için hesaplanan yapı ile hacim değişimi.

2.Eşitlik.6'da T kadar T_f 'in de mevcut olduğu durumda hesaplanan yapı ile viskozite değişimi.

Bu iki olayın hangisinin daha önemli olduğunu görmek ilginçtir. Narayanaswamy, 1. simülasyonda (9) nolu eşitlikteki $\alpha_s=0$ alarak bu kıyaslamayı yapmıştır, 2. simülasyonda (4.6) nolu eşitlikte $T_f = T$ kabul ederek hacim değişimini ortadan kaldırmış, buradan da viskozite değişimini ortadan kaldırmıştır. Son olarak 3.simülasyonda viskoelastik teori hipotezlerine varan her iki işlemi birleştirmiştir. Sürekli gerilme değerleri ile ilgili bu kıyaslamamanın sonuçları Şekil 4.9'da gösterilmiştir [4].

Viskozitenin yapısal değişimlerinin etkisi hemen hemen ihmal edilebilirken, hacmin yapısal değişimlerinin artık gerilmelere en büyük etkiyi yaptığı görülebilir. Viskoelastik modelde kullanılan genleşme katsayısı değerini uygun hale getirerek hacmin yapısal değişiminin sürekli gerilme üzerine olan etkisini ölçmek mümkündür, öyle ki böylece hesaplanan sürekli gerilmeler yapısal modelde elde edilen sonuçlara eşittir. α_{eff} efektif genleşme katsayısı camın α_g değerinden daha büyük bir değerde elde edilebilir ve ısı transfer katsayısının bir fonksiyonu olarak aşağıdaki değerlerin değişiminden elde edilebilir (Şekil 4.10).



Şekil 4.7 İlk sıcaklık ve ısı transfer katsıyısına göre merkezi artık gerilme dağılımı [4].

Yavaş soğumanın sürekli gerilmeye yapısal katkısının daha yüksek olduğu görülebilir. Tipik olarak, tavlama için gerekli soğutma şartlarında $\alpha_{\text{eff}}/\alpha_g = 1.20$ 'dir. Daha sonraları, Mazurin ve Fridkin [4] hacim gevşemesi ortalama zamanının viskozite gevşemesine oranının daha düşük, $\alpha_{\text{eff}}/\alpha_g$ 'nin daha yüksek olduğunu göstermişlerdir. Camın ısıl işlem sonuçları üzerine yapılan yayınlarda cam işleyicileri ve optisyenlerin yapısal teoride uzlaşabildiklerine işaret edilmiştir.

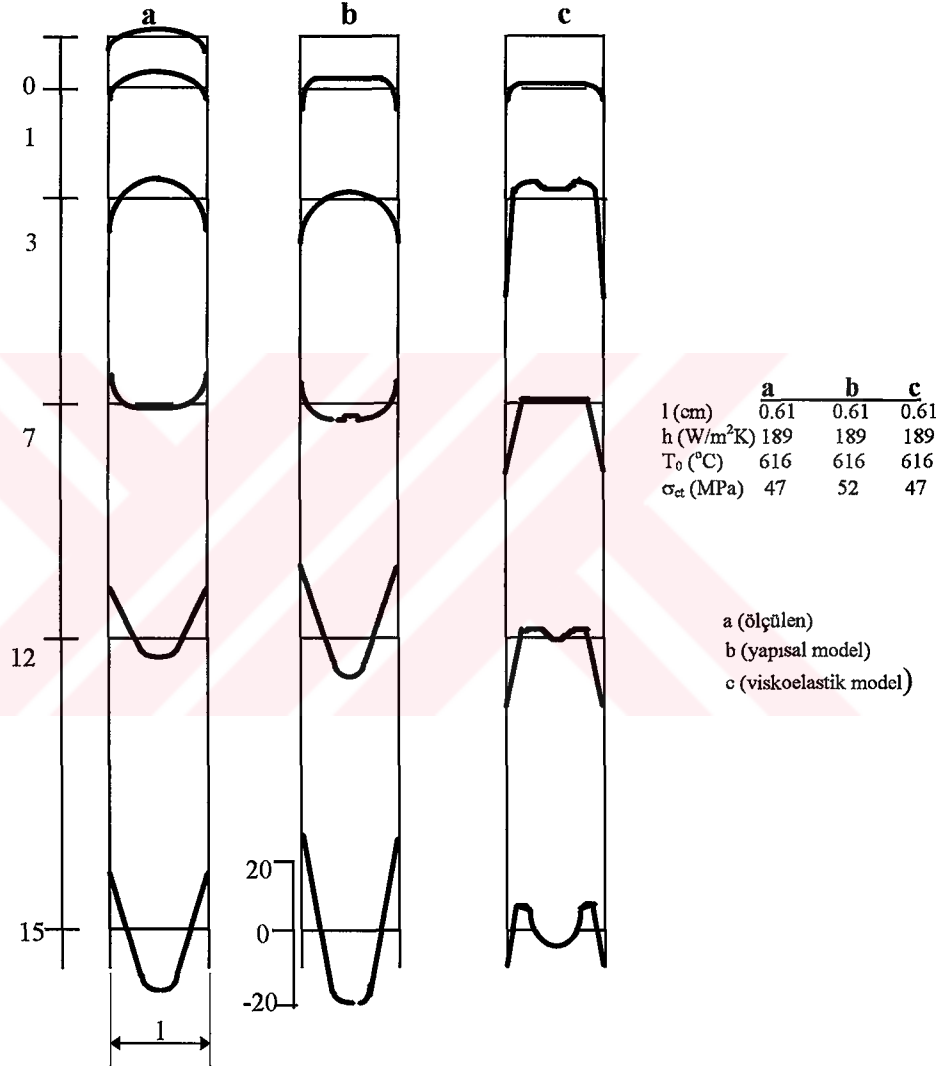
Aslında camın tüm kalınlığı için $\Delta\rho/\rho$ yoğunluk gradyanı ΔT_f hayali sıcaklık gradyanı ile alakalıdır.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -3\alpha_s\Delta T_f \quad (4.15)$$

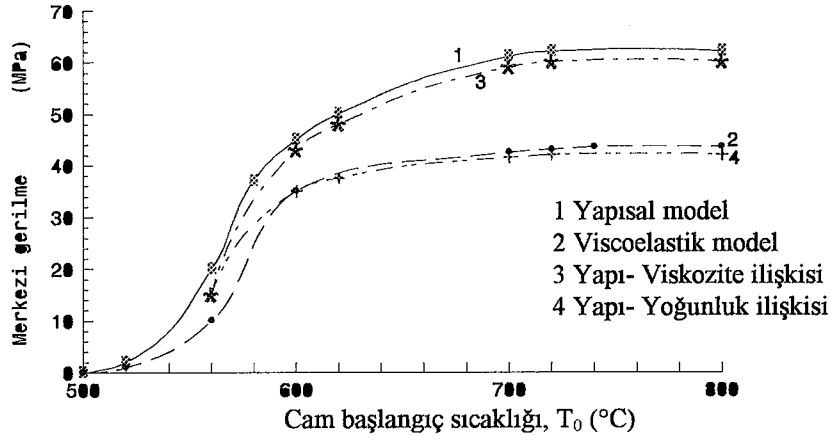
T_f , (4.6), (4.8) nolu eşitlikten elde edilir. Gardon [4-7], artık gerilme etkisini ortadan kaldırdıktan sonra temperlenmiş optik cam örneğinin kesitinde yoğunluk gradyanını deneysel olarak belirlemeyi başarmıştır. Narayanaswamy yapısal teori ile belirlenen



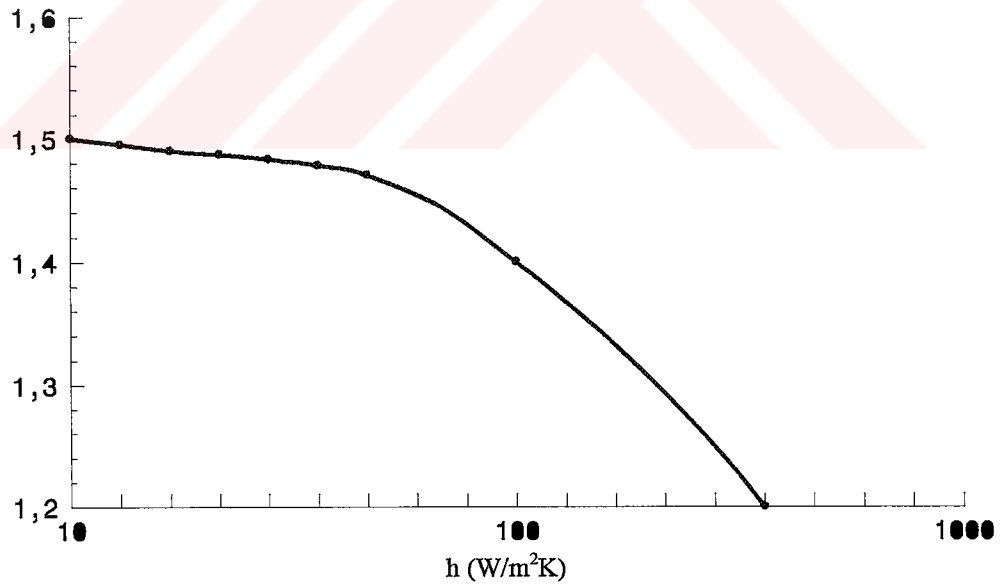
değerlerle Gardon'un sonuçlarını karşılaştırmış ve iyi bir uyum gözlemlemiştir (Şekil.4.11). Böylece yapısal teorinin, ısı işlemlerden dolayı ortaya çıkan homojen olmayan değerlerin hesaplanabilir olduğu ortaya çıkmıştır.



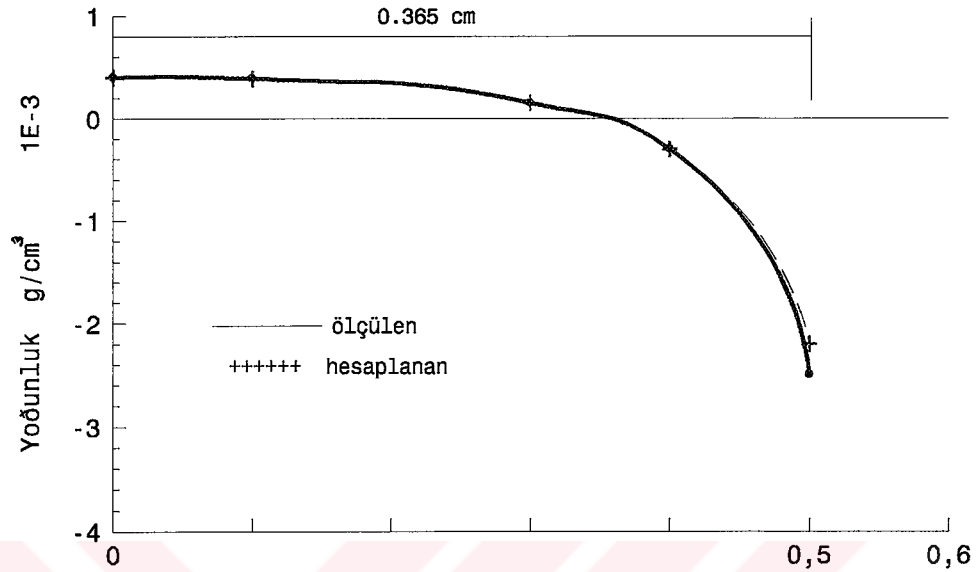
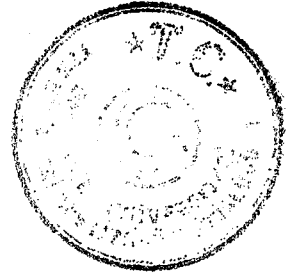
Şekil 4.8 Viskoelastik model ve yapısal model ile ölçülen değerlerin kıyaslanması [4].



Şekil 4.9 Farklı matematiksel modellerle belirlenen temper gerilmelerinin kıyaslanması. (Kalınlık=6.1 mm, $h=188 \text{ J/m}^2\text{Ks}$) [4].



Şekil 4.10 Yapısal genişleme oranının ısı taşınım katsayısına göre değişimi.



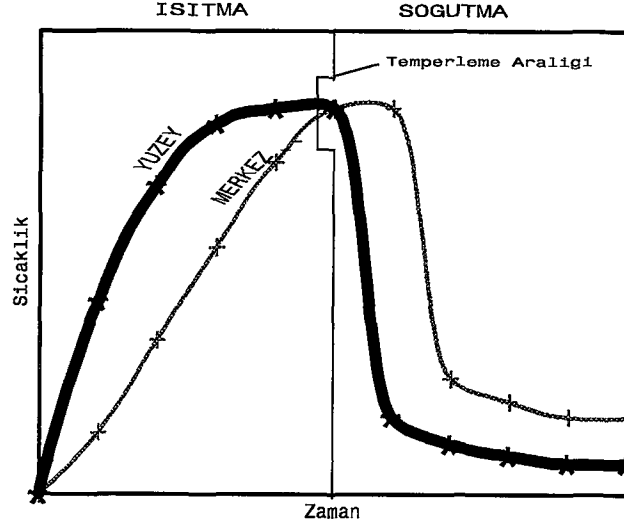
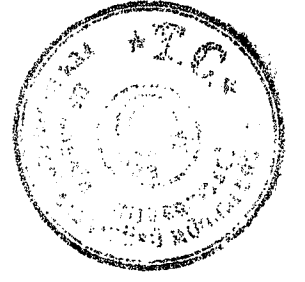
Şekil 4.11 Temperlenmiş camda kesitteki yoğunluk değişimi.

($T_0=677$ °C, $h=197$ W/m² K, kalınlık=7.3 mm) [4]

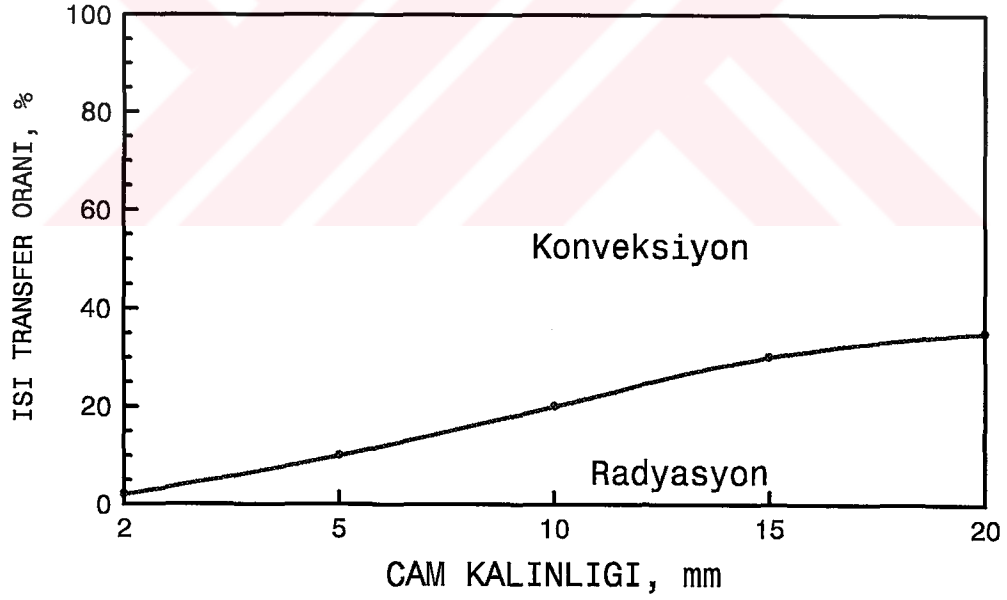
4.4 Levha Camın Temperlenmesi

Temperleme prosesi süresince, düz cam önce ısıtılır ve daha sonra hızlı bir şekilde soğutulur ve soğutulur (Şekil 4.12). Prosesin ısıtma bölümü, esas ısıtma modu elektrikli ısıtıcılar ile cam arasındaki ısı alışverişinin radyant enerji şeklinde olan modern fırında cam kalınlığının her milimetresi için yaklaşık 40 s alır. Cam sıcaklığı temperleme sıcaklığına ulaştığı zaman, ki yaklaşık olarak 620 C ile 640 C arasındadır, fırından alınır ve üfleme bölümüne girer ve çevre ile hava jeti arasındaki ısı alışverişini vasıtasıyla hızlı bir şekilde soğutulur.

Isı kaybının ana şekli cebri konveksiyon ile olur (Şekil 4.13). Tüm camın temperlenmesinde gerekli olan ısı transfer katsayısı kalınlıkla ters orantılıdır; ince cam kalın cama göre daha yüksek ısı transfer hızını gerektirir, ısı transfer katsayısı nozul düzeninin, tipinin, büyüklüğünün ve hava basıncının bir fonksiyonudur.



Şekil 4.12 Cam temperleme prosesi [10-11].



Şekil 4.13 Temperleme prosesinde ısı transfer oranının kalınlığa göre değişimi [8-10-11].

Camı tam olarak temperlemek için cam kalınlığı ile ters orantılı olarak hava gücüne ihtiyaç vardır; sonuç olarak ince camı temperlemek için kalın cama göre daha fazla güce ihtiyaç vardır.

Tam temperlemeyi başarmak için cam kalınlığına bağılı olarak belirli bir soğutma zamanına ihtiyaç vardır, ki kalın cam ince camdan daha uzun üfleme zamanına ihtiyaç gösterir. Eğer soğutma zamanı çok kısa olursa, artık gerilme oluşma olasılığını ortaya çıkarır ve tam temperleme başarılmaz. Genelde soğutma işlemi, camın soğukluğu uygun kullanım sıcaklığına veya daha düşük sıcaklığa gelinceye kadar devam eder.

Temperleme prosesi cam yatay veya düşey konumda gerçekleştirilir. Temperlenmiş cam kalınlığı ticari olarak 2.8 ile 19 mm arasındadır. Temperleme prosesi süresince camın düzgün kalması ve çarpılmanın en aza indirgenmesi için camın her iki yüzeyinin aynı oranda ısıtılması ve soğutulması çok önemlidir.

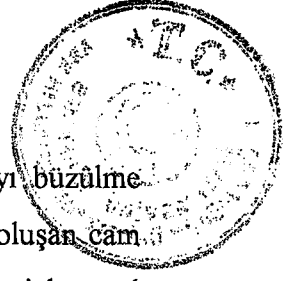
Temperleme sıcaklığının üst sınırında cam kolayca bükülebilecek yeterli yumuşaklıktadır, alt sınırdaki iken ise soğutma süresince gevreklikten dolayı zarar görebilir. Bu nedenle ticari temperleme proseslerinde çarpılmanın meydana gelmeyeceği yer iyi tesbit edilmelidir.

4.5 Temperlemenin Fiziği

Cam her ne kadar katı kristal bir malzemenin tipik özelliklerini sergilese de gerçekte amorfür, aşırı soğutulmuş sıvı gibi kristal olmayan bir malzemedir. Sıcaklık artışı ile camın davranışı viskozite ifadesi ile tanımlanmıştır (Şekil 4.14).

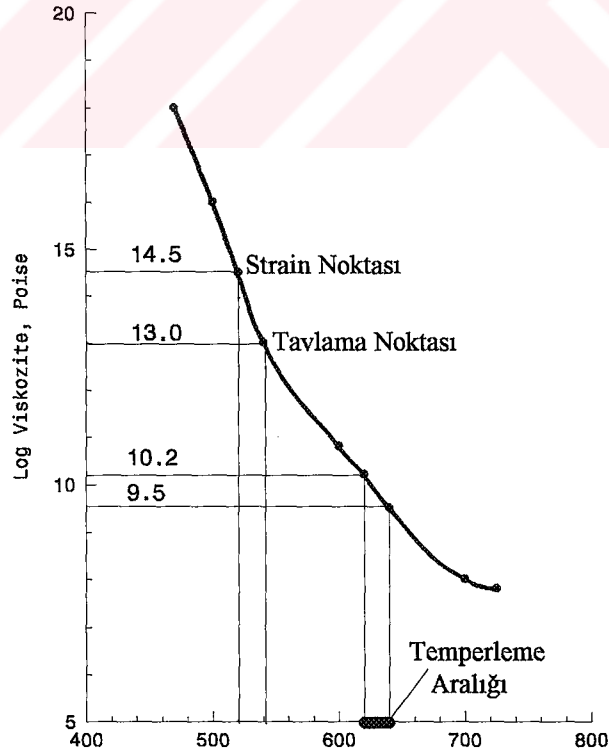
Şekil değiştirme noktasının üzerindeki (520 °C) camda herhangi bir gerilme 1 saat veya daha fazla bir süre içinde ortadan kalkacaktır. Tavlama noktasında (540°C), herhangi bir gerilme birkaç dakikada gevşer. Temperleme aralığının en alt ve en üst sınırları arasında (620 °C - 640 °C) gerilmeler birkaç saniyede ortadan kalkar. Sonuç olarak, temperleme aralığı içinde ısıtılmış olan cam zamanla gerilmelerden büyük ölçüde arındırılır, cam kesitinde hala bir sıcaklık gradyanı mevcut olsa bile.

Temperleme prosesinin soğutma bölümü süresince (Şekil 4.15), cam yüzeyi iç kısımdan daha hızlı soğur ve kesitte parabolik bir sıcaklık gradyanı meydana gelir.



Belirlenen sıcaklık gradyanı gibi, camın ısıl genişleme özelliğinden dolayı büzülme gradyanı da oluşur. Gerilme noktasının mümkün olduğu kadar üzerinde oluşan cam sıcaklığı, gevşeme için ısıl büzülme gradyanının ortaya çıkardığı gerilmeleri kontrol altında tutar.

Zamanla yüzey sıcaklığı gerilme noktasına ulaşır (1.5 s), ısıl gradyanı belirlenen değerinden çok daha geniştir. Gerilme noktası sıcaklığının yüzeylerden orta kısma doğru ilerlemesi iki durum ortaya çıkarır; iç kısım gerilmelerden kurtulur, dış kısımda ısıl gradyanı tarafından ortaya çıkan gerilmelere karşılık yeni gerilmeler ortaya çıkar. Cam yüzeyinde sözü edilen sonuçların ikincisi, gerilme noktası sıcaklığının altındaki camın tümünde artan öneme haiz basınç hali mevcuttur. Gerilme noktası sıcaklığı camın orta kısmına ulaştığı anda (12 s), cam şimdiye kadar olan sıcaklık geçmişinin doğurduğu ısıl gradyan ve gerilme dağılımı ile birlikte elastik haldedir. Camın daha fazla soğutulması halinde, sıcaklık gradyanı halihazırda belirlenmiş olan gerilme gradyanına ilave olarak bir strain gradyanına dönüştürülür.



Şekil 4.14 Temperleme prosesi süresince viskozite değişimi [10].



Camın tamamı oda sıcaklığına ulaştığı zaman, sıcaklık gradyanı tamamen artık gerilme dağılımına dönüştürülür. Artık gerilme dağılımı parabolik şekildedir, bu nedenle yüzey basıncı orta kısımdaki gerilmenin iki katıdır, artık gerilme ve basınç gerilmeleri toplamı eşitlikte sıfır olmalıdır.

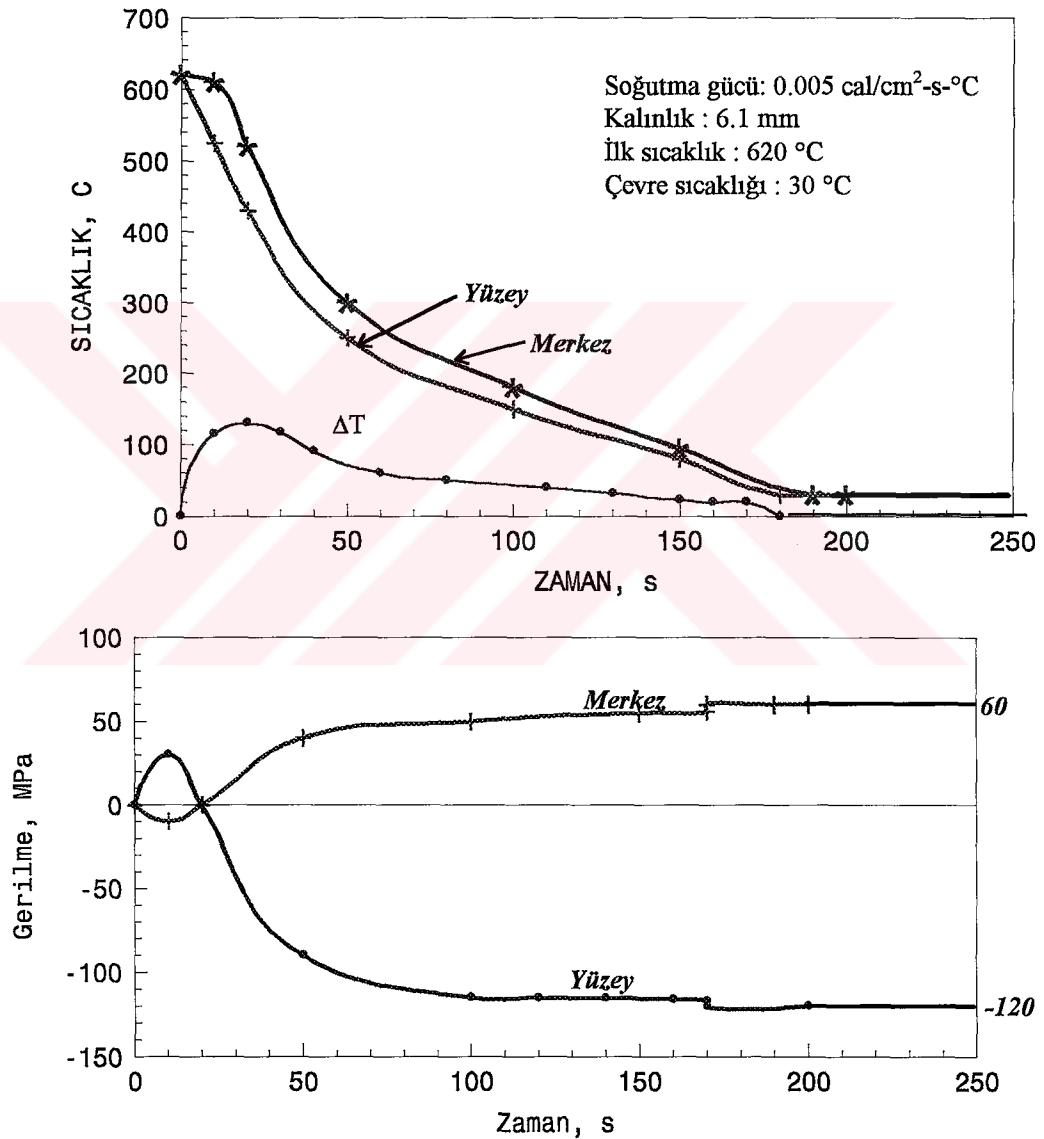
Camın bir özelliği de ne kadar hızlı soğutulduğuna bağlı olarak sıvı fazdan katı faza geçişte ısı genleşme özelliğidir (Şekil 4.16). Sıvı fazda, yeterli hareket kabiliyetine sahip cam atomları sıcaklık düşüşüne göre çok daha fazla atomik yapı düzenlerini meydana getiren yeni atom dizilişlerini oluşturabilir; bu nedenle uzunluk veya hacim ve sıcaklık arasındaki ilişki özellik arzeder (B-B hattı). Cam sıcaklığı geçiş skalasında gerilme noktasına doğru azalmakla beraber atomların hareket kabiliyeti katı haldeki camın moleküler yapısı içinde hapsolmuş haldeki atomlar gibi ısı titreşiminden dolayı zaptedilmiş hale gelir. Cam kesiti ve sıvı genleşme hatları geçiş veya hayali sıcaklığı belirler.

Viskozite artışı, soğutma hızına bağlı olarak sıcaklıkla genleşme miktarına göre daha fazla verimli moleküler yapının oluşmasını engeller. Soğutma hızı artışına göre eğrinin eğimi, genleşme katsayısı vb. değişmese de verilen sıcaklıkta boyuna genleşme oluşur (A-A, A'-A', A''-A'' hatları). Sonuç olarak, artık gerilme bölgesinden sorumlu olan, yüzeyi iç kısımdan daha az yoğunluktaki temperlenmiş camda bir yoğunluk gradyanı mevcuttur. Temperlenmiş camdaki artık gerilmeler daha sonra " yapısal " orijinin bir bölümü mümkün olduğu kadar yukarıda tanımlandığı üzere, "viskomekanik " orijindir. Hayali bir sıcaklıkta, soğutulan bir camın ısı genleşme karakteristiğinden bir başka yönü, sıvı halden katı faza geçişinin ani bir olay olmadığıdır, fakat değişim aralığında yavaş yavaş meydana gelir. Bu durum, strain noktasına ulaşıncaya kadar viskomekanik gerilmeler ve yapının gevşemesinin sonuçlarıdır.

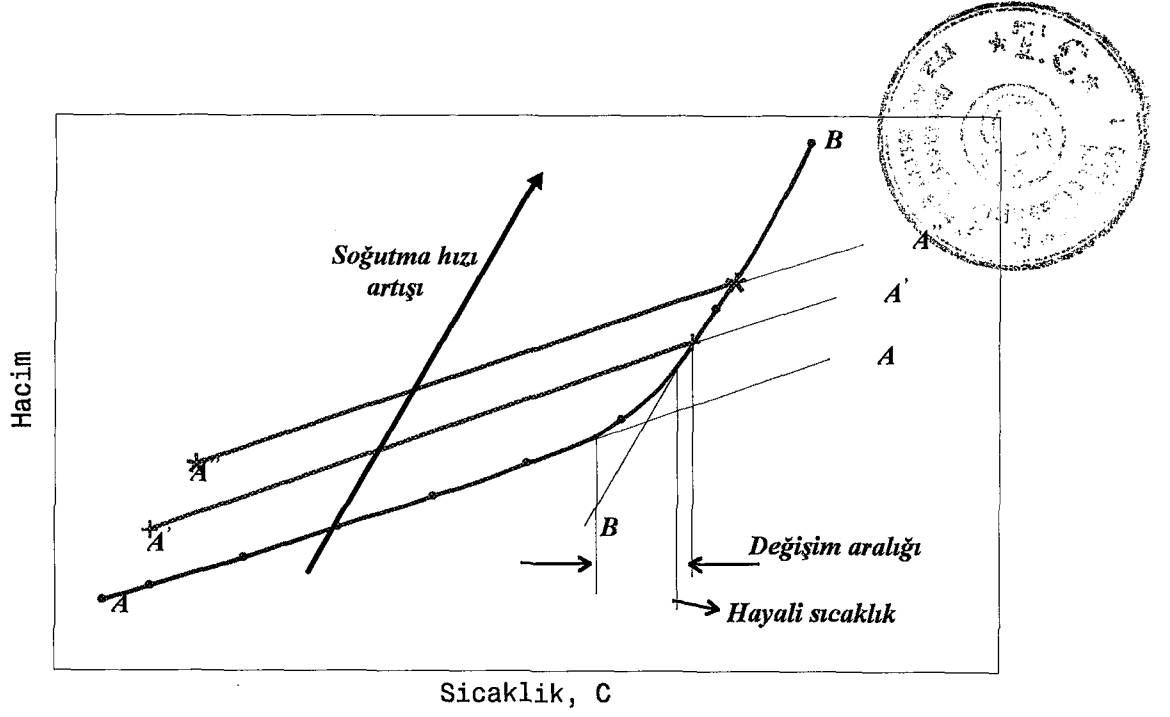
Cam gevrek bir malzemedir. Çatlak oluştuğu zaman, bu olay ani bir şekilde ve camın her yerinde meydana gelir. Camın maksimum mukavemeti yüzey şartlarında çok fazla cam kimyasına bağlı değildir (cam kimyasının bir fonksiyonu değildir). Çatlak olmayan bozulmamış cam lifleri yaklaşık 14000 MPa gerilme direncine sahiptirler.



Bununla birlikte günümüz alelade camı asla eski bozulmamış şartta değildir. Özellikle levha cam yüzeyleri elle işleme, kesme, çekme, temperleme işlemlerinde olduğu gibi yüzdürme tekniği ile cam imalatı süresince mikroskopik ölçüde kümülatif olarak hasarlıdır. Sonuç olarak, gerilme testleri uygulanan cam örneklerinden alınan sonuçlar çok geniş bir kapsamdadır. Tavlanmış levha camın gerilme mukavemetinin en düşük sınırı yaklaşık 30 Mpa alınabilir.

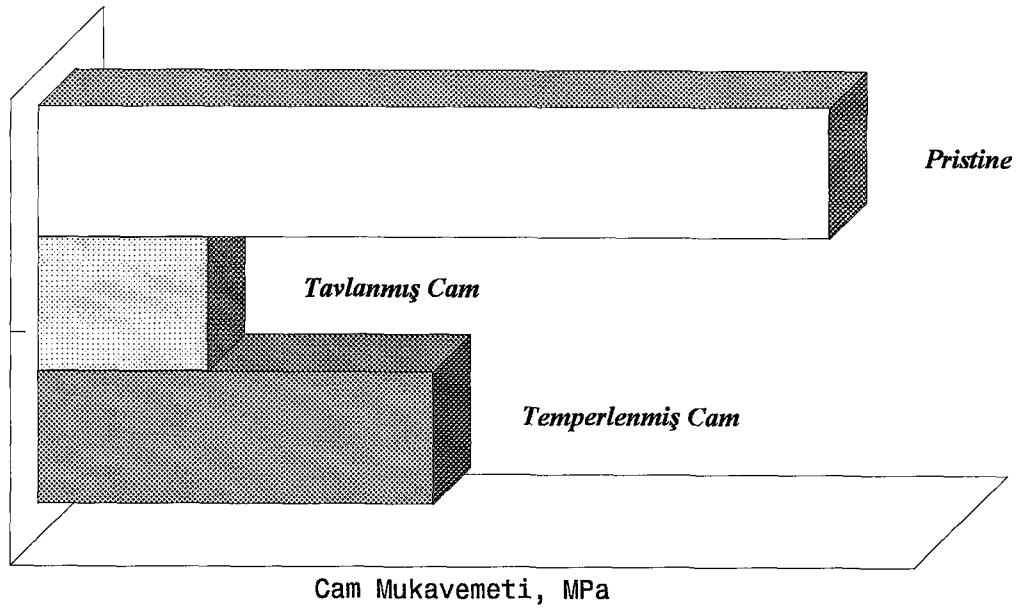


Şekil 4.15 Soğutma sürecinde camdaki sıcaklık ve gerilme dağılımı [10].

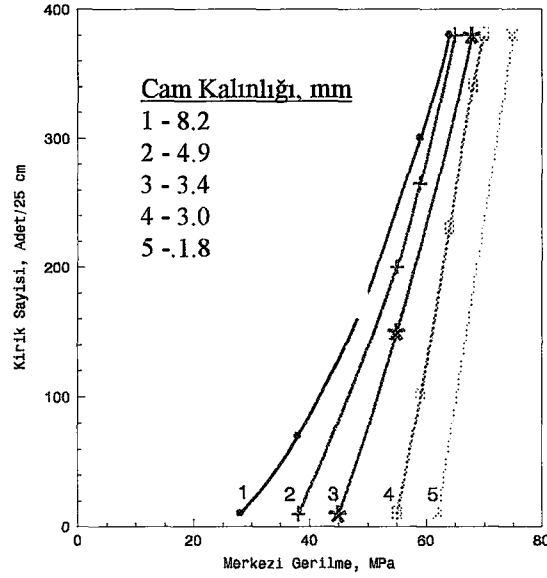
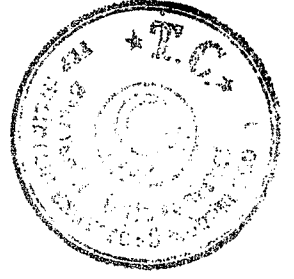


Şekil 4.16 Camın ısı genleşme özelliği [10].

Temperlenmiş camın mukavemet artışı temperlenmiş camın yüzey basıncı ile çatlakların kapanması ile meydana gelir (çatlakların kapatılması mukavemeti artırır). Tam olarak temperlenmiş ince bir camın yüzey basıncı yaklaşık 120 Mpa dır; bu yüzden, temperlenmiş camın gerilme mukavemeti yaklaşık $30 + 120 = 150$ Mpa dır. Temperlenmiş camın mukavemeti tavlanmış camın 5 katı düzeyinde artırılmış olur. Temperlenmiş camın yüzey basıncı, yüzeyde çerpma sonucu ortaya çıkan çatlakların ilerlemesini engelleme kabiliyetini artırır.



Şekil 4.17 Cam Mukavemeti [10].



Şekil 4.18 Çekme gerilmesi büyüklüğüne göre kırık parça sayısı [10].

Temperlenmiş cam kırıldığında ortaya çıkan kırık örneği, arıza noktasında başlayan virtüel olarak ani bir şekilde hareket eden ve iki kola ayrılan çatlakların sonucudur. Kırık örneğinin artması için gerekli enerji iç kısımdaki artık çekme gerilmelerinin oluşturduğu şekil değiştirme enerjisinden sağlanır. Orta bölgedeki gerilme değerinin çoğalan kırık örnekleri için başlangıçtaki değer üzerinde olması gerektiği ispatlanmıştır (Şekil 4.18). Başlangıçtaki değerden ne kadar büyük olduğuna bağlı olarak, temperlenmiş camın kırık örnekleri ince taneli hale gelir.



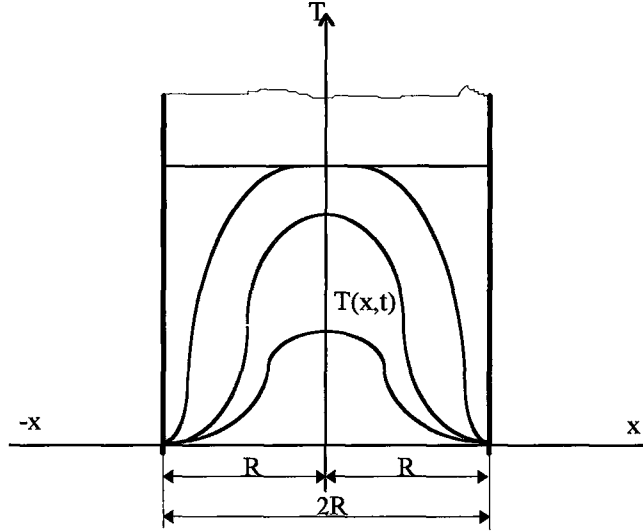
5. PROBLEMİN TARİFİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNE GİRİŞ

Analitik çözüm incelenen ortam içindeki herhangi bir noktada aranan bir bilinmeyen değeri veren matematiksel bir ifadedir ve ortam içinde bulunan sonsuz sayıdaki diğer noktalarda da geçerlidir. Kartezyen, silindirik veya küresel koordinatlarla kolayca tanımlanan problemlerin analitik çözümü mümkün olmakla birlikte genellikle kompleks geometrik şekilli problemlerin analitik çözümü zor ve çoğunlukla imkansızdır. Böyle bir problemle karşılaşan çözümleyici doğal olarak sayısal adı verilen çözüme başvuracaktır. Sayısal çözüm yöntemlerinde bilinmeyen yaklaşık değeri sadece sistem içindeki belirli noktalarda elde edilir. Kabul edilebilir hassaslıkta bir çözüm eğer makul bir zaman harcayarak elde edilebiliyorsa sayısal çözüm tercih edilmelidir.

Bir levha camdaki temperleme işlemi ele alınmaktadır. Hava jeti soğutma işlemi gerçekleştirilmekte olup, ısı transferinin büyük bir kısmı taşınım ile gerçekleşmektedir. Tüm proses boyunca yüzeyde homojen bir sıcaklık dağılımı olduğu yani tüm yüzeyde aynı oranda soğutma yapıldığı kabul edilmektedir. Bu da optimal bir nozul düzeneği ve uygun basınç ve sıcaklıkta havanın yüzeye püskürtüldüğü anlamına gelir. Bundan yola çıkarak levha kesitindeki sıcaklık dağılımı ve ortaya çıkan ısı gerilmeler incelenecektir.

'Levha kesitindeki sıcaklık dağılımı bir $f(x)$ fonksiyonu ile ifade edilir. Başlangıçta, sınır yüzeyler soğutma prosesi süresince sabit bir T_a sıcaklığına ani bir şekilde soğutulur. Levha kesitindeki herhangi bir anda sıcaklık dağılımı ve ısı transfer oranı bulunacaktır.'

Levha cam için bir boyutlu zamana bağlı ısı iletiminin genel denkleminde şu ifade yazılabilir;



Şekil 5.1 Kesitteki sıcaklık dağılımı [12]

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad t > 0 \text{ ve } -R < x < R \quad (5.1)$$

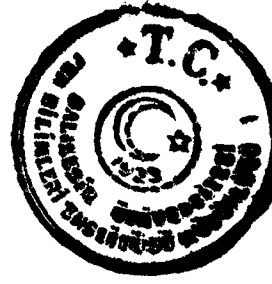
Sınır şartları;

$$T(x,0) = f(x), \quad T(+R,t) = T(-R,t) = T_a \quad (5.2)$$

5.1 Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Bir diferansiyel denklemin çözümü deyimiyle türev hariç bağımlı ve bağımsız değişkenleri arasındaki bağıntıyı gösteren eşitlik anlaşılır. Değişkenlerin ayrışması, serilerle çözüm, Laplace transformasyonları sonlu farklar, sonlu elemanlar kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden bazılarıdır. Bu yöntemlerin birbirlerine üstünlükleri probleme ve sınır şartlarına göre değişir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin sonsuz sayıda çözümleri olmasına rağmen verilmiş olan sınır şartları ve zamana bağlı problemler için başlangıç şartını sağlayan çözümü tektir. Constantinidis;



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

şeklindeki tek boyutlu zamana bağlı ısı iletim denklemi yardımıyla (T sıcaklık, t zaman, x koordinat, a ısı difüzyon katsayısı) kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır şartlarını, Dirichlet, Cauchy ve Robbins şartları olmak üzere üç kategoriye (Şekil 5.2) ayırarak incelenmiştir.

1. Başlangıç Şartları - Özellikle zamana bağlı ısı transferi probleminin çözümü için herhangi bir zamanda (genellikle işlemin başlangıcı olan $t=0$ anında) cisim içersindeki sıcaklık dağılımı verilmeli ve bu şart sistemin her noktasında gerçekleşmelidir.

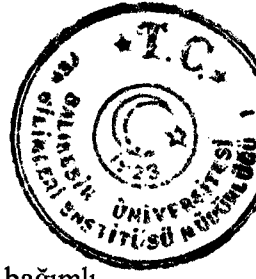
2. Birinci Çeşit (Dirichlet) Sınır Şartları - Cismi sınırlayan yüzeylerin sıcaklığının belirli olmasıdır. Sınırdaki sıcaklık sabit, zamanın ve koordinatların bir fonksiyonu, yalnız koordinatların veya yalnız zamanın bir fonksiyonu olabilir. Buna göre Dirichlet sınır şartları;

Başlangıç şartları,	$t = 0$	ve	$0 \leq x \leq l$ 'de	$T = f(x)$	
	veya	$t = 0$	ve	$0 \leq x \leq l$ 'de	$T = t_0$
Sınır şartları,	ve	$t > 0$	ve	$x = 0$ 'da	$T = f(t)$
	ve	$t < 0$	ve	$x = l$ 'de	$T = T_1$

olarak ifade edilir (Şekil 5.2a).

3. İkinci Çeşit (Neumann) Sınır Şartları - Cismi sınırlayan yüzeylerdeki ısı akısının belirli olmasıdır. Sınırdaki ısı akısı dağılımı sabit, zamanın ve koordinatların bir fonksiyonu, yalnız koordinatların veya yalnız zamanın fonksiyonu olabilir. Yüzeyde ısı kaybı yok ise adyabatik durum söz konusudur:

$$x = l \quad \text{ve} \quad t \geq 0 \text{ da} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

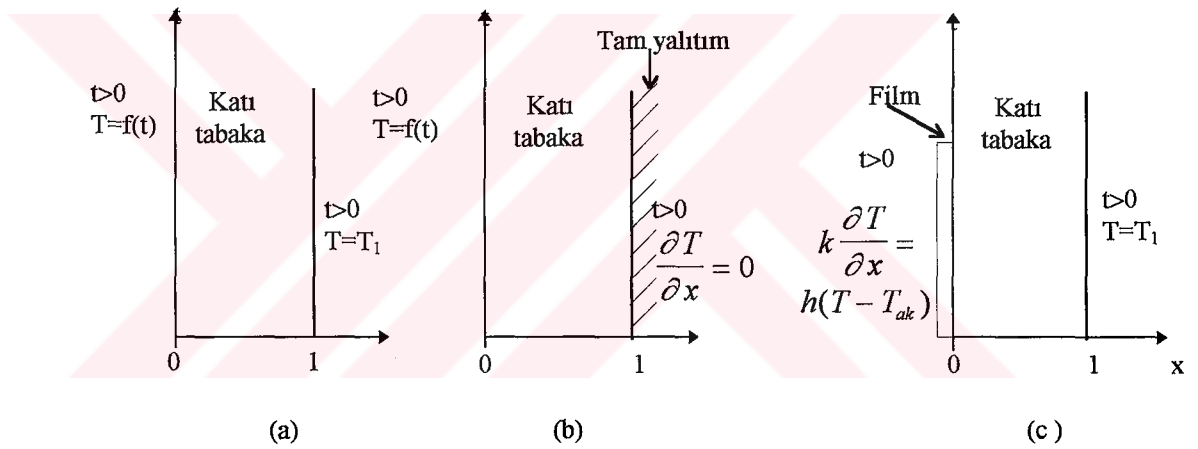


Bu şart sağ sınırdaki sıcaklık gradyanının sıfır olduğunu belirler (Şekil 5.2b).

4. Üçüncü Çeşit (Robbins) Sınır Şartları - Bağımlı değişkenin türevinin bağımlı değişkenin fonksiyonu olarak verilmesidir. Isı iletim probleminde katı-akışkan arayüzdeki sıcaklık ve akışkan sıcaklığı arasındaki farkla ilişkilendirilebilir. Yani;

$$x = 0 \text{ ve } t \geq 0 \text{ da } k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_{akışkan})$$

5. Cauchy Şartları - Bir problem Dirichlet ve Neumann şartlarının ikisini de içeriyorsa bu Cauchy şartları olarak adlandırılır (Şekil 5.2b).



Şekil 5.2 Isı İletim Problemi İçin Başlangıç ve Sınır Şartları [13]

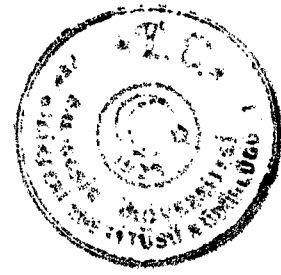
- (a) Dirichlet Şartları
(b) Cauchy (Dirichlet ve Neumann) Şartları
(c) Robbins Şartları

5.1.1 Değişkenlere Ayırma Yöntemi İle Çözüm

Simetri özelliğinden dolayı,

$$f(x) = f(-x) \text{ olduğu için,}$$

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$



Sınır şartları;

$$T(R,t) = T_a \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$$

Sözü edilen sınır şartları herhangi bir andaki sıcaklık dağılım eğrisinin simetri şartının bir sonucudur, soğutma prosesi süresince böyle olmalıdır, yani yüzeylerden ısı transferi üniform olarak gerçekleşmelidir. (5.1) denkleminin özel çözümü;

$$T(x,t) = C \cdot \sin kx \cdot e^{-ak^2t} + D \cdot \cos kx \cdot e^{-ak^2t} \quad (5.4)$$

Simetri özelliğinden;

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} (kC \cos kx - kD \sin kx) e^{-ak^2t}$$

$$= kC e^{-ak^2t} = 0$$

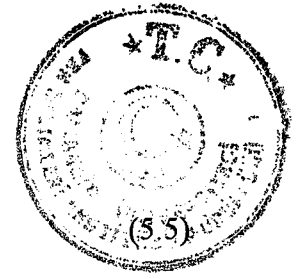
$e^{-ak^2t} \neq 0$, çünkü; soğutma prosesi süresince, $0 < t < \infty$, dolayısıyla $C=0$

Bu sonuç levhaya uygulanan fiziksel şartların analiz edilmesi ile elde edilebilir. Sıcaklık dağılımı koordinat eksenleri ile simetrik olarak orantılı olmalıdır, sonuç olarak, sıcaklık dağılımı $\cos kx$ fonksiyonu ile tanımlanmalıdır, $\sin kx$ ihmal edilir.

İkinci sınır şartını ele alırsak; hesaplamaları basitleştirmek için $T_a = 0$ kabul ediyoruz.

$$T(R,t) = D \cos kR e^{-ak^2t} = 0$$

$$kR = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \quad \text{için} \quad \cos kR = 0$$



$$k_n R = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

k ; tek bir değere sahip değildir, sonsuz sayıdadır. Sonuç olarak, genel çözüm özel çözümlerin toplamıdır.

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(2n - 1) \frac{\pi x}{2R} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 at}{4R^2}} \quad (5.6)$$

Her bir özel çözümdeki D_n sabitleri Eigen değerlerine sahip olacaktır, herhangi bir andaki özel sıcaklık dağılımlarının toplamı gerçek sıcaklık dağılımını tanımlar. Bu yüzden, \cos eğrilerinin süperpozisyonu başlangıç sıcaklık dağılımını içeren gerçek sıcaklık dağılımını vermelidir. $t=0$ kabul edilerek verilen $f(x)$ fonksiyonu elde edilir.

$$T(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos k_n x \quad (5.7)$$

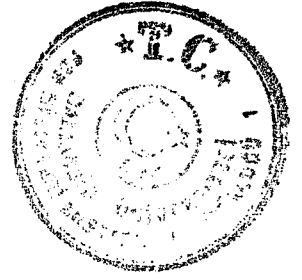
$\cos kx$ ve $\sin kx$ trigonometrik fonksiyonları ortogonal sistem fonksiyonlarıdır. $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ sistem fonksiyonları olmak üzere;

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0 \quad i \neq j \quad (5.8)$$

Örneğin $\cos k_n x$ sistem fonksiyonları;

$$I = \int_{-R}^{+R} \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx \begin{cases} = 0, & m \neq n \text{ ise} \\ > 0, & m = n \text{ ise} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$



$$I = \frac{\sin(k_m - k_n)R}{k_m - k_n} + \frac{\sin(k_m + k_n)R}{k_m + k_n}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Sonuçta;

$$I = \frac{2[k_m \sin k_m R \cos k_n R - k_n \cos k_m R \sin k_n R]}{(k_m^2 - k_n^2)} \quad (5.10)$$

$$k_m R = (2m - 1) \frac{\pi}{2}, \quad k_n R = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

Buradan; $m=n$ ise $\cos k_m R = \cos k_n R = 0$

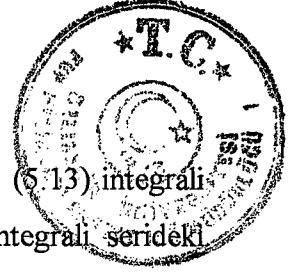
$$m \neq n \text{ ise} \quad I = \int_{-R}^{+R} \cos^2 k_n x \, dx = 2 \left[\frac{R}{2} + \frac{\sin 2k_n R}{4k_n} \right] = R \neq 0 \quad (5.11)$$

Yukarıda ifade edilen formüller D_n sabitlerini bulmak için kullanılır. (5.7)'nin her iki tarafı $\cos k_n x$ ile çarpar ve $-R$ ile $+R$ arasında integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} T(x,0) \cos k_m x \, dx &= \int_{-R}^{+R} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos k_n x \cos k_m x \, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-R}^{+R} D_n \cos k_n x \cos k_m x \, dx \end{aligned} \quad (5.12)$$

(5.9)'a göre bu eşitliğin sağ tarafı sıfırdır, $m=n$ durumunda $I_{m=n}=R$

$$D_n = \frac{1}{R} \int_{-R}^{+R} T(x,0) \cos k_n x \, dx = \frac{2}{R} \int_0^R T(x,0) \cos k_n x \, dx \quad (5.13)$$



Türevde kesin olmayan iki durum sözkonusudur; 1. durumda, (5.13) integrali sonlu ve belirli bir değere sahiptir, 2. durumda, sonsuz serilerin integrali serideki terimlerin ayrı ayrı integrallerinin toplamıdır. Bu kabuller Dirichlet şartını ifade etmektedir; 1. durumda belirli integraldeki $f(x)$ fonksiyonu tek ve integre edilebilir bir değere sahip olmalıdır, 2. durumda $f(x)$ fonksiyonu maksimumu ve minimumu olan sonlu sayıda çözüme sahip olmalıdır, 3. durumda süreksiz bir sayıya sahip olmalıdır. Buradan (5.6) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{\left[-\mu_n^2 \frac{at}{R^2}\right]} \frac{2}{R} \int_0^R f(x) \cos \mu_n \frac{x}{R} dx \quad (5.14)$$

$$\mu_n = k_n R = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

Bu çözüm aynı zamanda $l=R$ ($0 < x < l$) kalınlığındaki bir sonsuz levha kesitindeki sıcaklık dağılımını belirlemektedir. ($x=0$ durumunda $\partial T(0, t)/\partial x=0$ olarak ısı akısı sıfırdır), diğer yüzey $x=l$ 'de sıcaklık sıfırda tutulmaktadır.

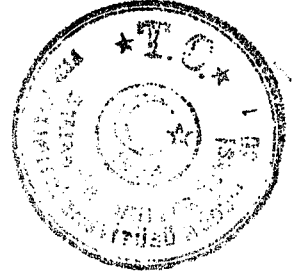
Başlangıç anındaki sıcaklık dağılımı herhangi bir formdaki $f(x)$ fonksiyonu ile verilebilir, fakat Dirichlet şartlarına uygun bir fonksiyon olmalıdır. $f(x)$ fonksiyonu tek ise (5.1)'in, (5.2) ve (5.3) sınır şartlarında çözümü ($T_a=0$) benzer bir yolla elde edilebilir.

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \mu_n \frac{x}{R} e^{\left(-\mu_n^2 \frac{at}{R^2}\right)} \frac{2}{R} \int_0^R f(x) \sin \mu_n \frac{x}{R} dx \quad (5.15)$$

$$\mu_n = n\pi$$

Başlangıçta sıcaklık dağılımı üniform ise, $T(x, 0)=T_0=sabit$

(5.15) soğutma için de kullanılabilir. Başlangıçtaki sıcaklık dağılımı üniform ise, $T(x, 0)=T_0=sabit$, (5.13) aşağıdaki gibi hesaplanabilir;



$$\begin{aligned}\frac{2}{R} \int_0^R T_0 \cos \mu_n \frac{x}{R} dx &= \frac{2T_0}{\mu_n} \sin \mu_n \frac{x}{R} \Big|_0^R = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} T_0 \\ &= \frac{2T_0}{\mu_n} (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

$$\sin \mu_n = \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} = \pm 1$$

n çift ise -1

n tek ise 1

$$\frac{T(x,t)}{T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{(-\mu_n^2 \frac{at}{R^2})} \quad (5.16)$$

Yüzey sıcaklıkları sıfır değil de bir T_a sıcaklığında ise;

$$\theta = \frac{T(x,t) - T_a}{T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{(-\mu_n^2 Fo)} \quad (5.17)$$

5.1.2 Operasyonel (İşlem) Metoduyla Çözüm

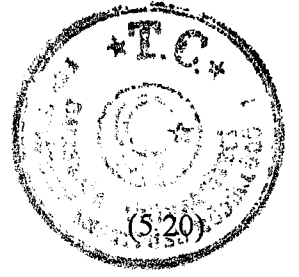
Diferansiyel ısı iletim eşitliği (Laplace Transformasyonu);

$$T''(x,s) - \frac{s}{a} T(x,s) + \frac{T_0}{a} = 0 \quad (5.18)$$

Başlangıç şartı;

$$T(x,0) = T_0 = \text{sabit}$$

$$T(R,s) = \frac{T_a}{s} \quad T'(0,s) = 0 \quad (5.19)$$



$$T(x,s) - \frac{T_0}{s} = A \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} x$$

A ve B sınır şartlarına göre belirlenen sabitlerdir. Simetri şartı varsa; $B=0$

$$T'(0,s) = \sqrt{\frac{s}{a}} A \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} x + \sqrt{\frac{s}{a}} B \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{s}{a}} B$$

1. sınır şartından;

$$T(R,s) = \frac{T_0}{s} + A \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} R = \frac{T_a}{s}$$

$$A = -\frac{T_0 - T_a}{s} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} R$$

$$\frac{T_0}{s} - T(x,s) = \frac{(T_0 - T_a) \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} R} = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)} \quad (5.21)$$

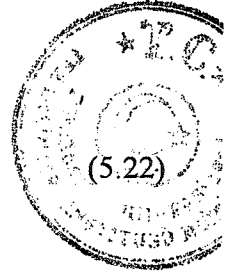
$$\varphi(s) = (T_0 - T_a) \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x$$

$$= (T_0 - T_a) \left(1 + \frac{x^2}{2!a} s + \frac{x^4}{4!a^2} s^2 + \dots \right)$$

$$\psi(s) = s \left(1 + \frac{R^2}{2!a} s + \frac{R^4}{4!a^2} s^2 + \dots \right)$$

$\psi(s)$ polinomu bir sabit içermediği için (1.terim= s) genişleme teoreminin tüm şartları mevcuttur ve (5.21)'in çözümünde tersine çözüme geçerken kullanılabilir.

Genleşme teoremi;



$$L^{-1} \left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} \right] = \sum_{n=1}^n \frac{\varphi(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{(s_n t)} \quad (5.22)$$

s_n ; $\psi(s)$ polinomunun alt indisidir.

$$i \sqrt{\frac{s_n}{a}} R = \mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (5.23)$$

$$s_n = -\frac{a\mu_n}{R^2} = -\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{4R^2} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \frac{sR}{2\sqrt{as}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} + \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} R \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{a}} R \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} + \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} R \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \psi'(s) = 1$$

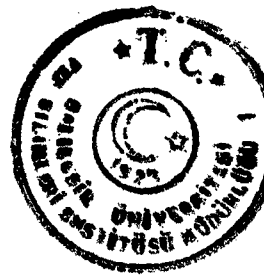
$$\lim_{s \rightarrow s_n} \psi'(s) = \frac{1}{2} i \mu_n \sinh \mu_n = -\frac{1}{2} \mu_n \sin \mu_n = \psi'(s_n)$$

$$\sin \mu_n = (-1)^{n+1}$$

$$\varphi(0) = T_0 - T_a$$

$$\varphi(s_n) = (T_0 - T_a) \cosh \sqrt{\frac{s_n}{a}} x$$

$$= (T_0 - T_a) \cos \mu_n \left(\frac{x}{R} \right)$$



Sonuçta;

$$L^{-1}\left(\frac{T_0}{s}\right) - T(x, s) = L^{-1}\left[\frac{(T_0 - T_a) \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} R}\right]$$

$$T_0 - T(x, t) = (T_0 - T_a) - (T_0 - T_a)x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{\left[-\frac{\mu_n^2 at}{R^2}\right]}$$

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_a}{T_0 - T_a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{\left[\mu_n^2 Fo\right]} \quad (5.26)$$

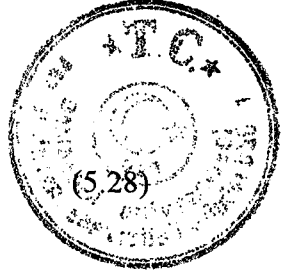
$$Fo = \frac{at}{R^2} \quad \text{Fourier sayısı}$$

5.2 Sonlu Farklar Yaklaşımı

Isı iletimi problemlerinin sonlu farklar yöntemi ile formülasyonunda temel prensip, sürekli sıcaklık dağılımını gösteren diferansiyel denklemi, katı cisim içerisinde belirli noktalarda sıcaklık dağılımını sağlayan sonlu farklar denklemi cinsinden yazmaktır. Örnek olarak Şekil 5.3a'da gösterildiği gibi x ve y yönünde kafeslere bölünmüş iki boyutlu katı cisim göz önüne alalım. İç ısı üretiminin olduğu kararlı hal iki boyutlu ısı iletiminin kartezyen koordinatlarda diferansiyel denklemi;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q = 0 \quad (5.27)$$

şeklindedir. Burada k_x ve k_y sırasıyla x ve y yönündeki ısı iletim katsayıları, q ise birim hacimdeki iç ısı üretimidir ve bunlar x ve y koordinatlarının bilinen fonksiyonudurlar. Bu denklemi sonlu farklar cinsinden yazabilmek için türevlerin (sıcaklık basamaklarının) ayrı ayrı sonlu farklar cinsinden ifade edilmesi gerekir. Buna göre Şekil 5.3a'da gösterilen m, n noktasında $\partial T / \partial x$ türevi, ileri sonlu fark cinsinden;



$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T(x + \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x}$$

olarak yazılır (Şekil 5.3c). Şekil 5.3a'da görüleceği gibi, x yönünde Δx artımlarının sayısını m , y yönünde Δy artımlarının sayısını da n ile gösterirsek (5.28) türevini genel olarak;

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\frac{m+1}{2}, n} \approx \frac{T(x + \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x} = \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x} \quad (5.29)$$

ve geri fark cinsinden ise;

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\frac{m-1}{2}, n} \approx \frac{T_{m, n} - T_{m-1, n}}{\Delta x} \quad (5.30)$$

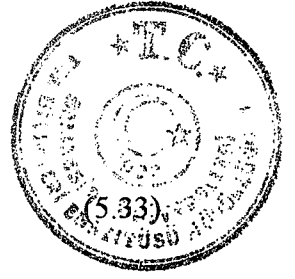
olarak yazabiliriz (Şekil 5.3c). İkinci türevin tanımından $\partial^2 T / \partial x^2$ ise merkezi fark cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\frac{m+1}{2}, n} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\frac{m-1}{2}, n} \right] \quad (5.31)$$

Yukarıda elde edilen (5.29) ve (5.30) ifadeleri (5.31)'de yerine yazılır ve düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{m+1, n} - 2T_{m, n} + T_{m-1, n}}{(\Delta x)^2} \quad (5.32)$$

elde edilir. Benzer şekilde,



$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

yazılır. Hesapları kolaylaştırmak için $k_x=k_y=k$ ve $\Delta x=\Delta y$ seçilip, (5.32) ve (5.33) denklemleri (5.27) diferansiyel denkleminde yerine konur ve düzenlenirse;

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + \frac{q(\Delta x)^2}{k} - 4T_{m,n} = 0 \quad (5.34)$$

elde edilir. Bu denklem katı cisim içersindeki kafesin her kesim noktası için geçerlidir. Sınırlara yaklaştıkça sınır sıcaklıklarının hesabı için sınır şartlarının da bilinmesi gerekir.

5.3 Sonlu Elemanlar Yaklaşımı

Sonlu elemanlar yönteminde de amaç sonlu farklar yönteminde olduğu gibi kısmi diferansiyel denklemleri cebirsel denklemler haline getirmektir. İncelenen ortam sonlu farklar yaklaşımında noktalar kümesinin çözümü olarak alınırken sonlu elemanlar yönteminde problem sonlu eleman denilen küçük elemanlarla temsil edilir. Böylece elemanlara bölünmeden önce sonsuz çözümü olan problem sonlu sayıda bilinmeyeni olan bir probleme dönüşür.

Sonlu farklar yönteminde elde edilen çözümle karşılaştırma yapabilmek amacıyla burada da kararlı iki boyutlu ısı iletim denkleminin (5.27) sonlu elemanlar çözümü kısaca verilecektir. Bu yöntemde herbir eleman içindeki sıcaklık dağılımı;

$$T^{(\infty)}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) T_i = [N] \{T\}^{(\infty)} \quad (5.35)$$

olarak kabul edilir. Burada n incelenen (∞) elemanındaki düğüm sayısı, T_i i düğüm noktasındaki yaklaşık sıcaklık değeri, N_i ise enterpolasyon fonksiyonudur. Galerkin yaklaşımı yardımıyla ve çözüm bölgesinde üç düğüm noktalı üçgen sonlu eleman



kullanılması ve $k_x=k_y=k$ kabulünün yapılmasıyla (5.27) denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü aşağıda verilmiştir [13-14-15];

$$\frac{k}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ smyt & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta q_i}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

burada Δ sonlu eleman olarak kullanılan üçgenin alanı, b_n ve c_n enterpolasyon fonksiyonuyla ilgili olan sabitler, q_n iç ısı üretiminin n düğüm noktasındaki değeri, T_n ise sıcaklığın n düğümündeki değeridir. Görüldüğü gibi yine (5.27) kısmi diferansiyel denklemi yerine eleman enterpolasyon fonksiyonunun seçilmesiyle iki boyutlu elemanın sıcaklık dağılımı, her bir eleman için yazılan (5.36) denkleminin birleştirilmesiyle oluşturulacak cebirsel denklem takımının çözülmesiyle belirlenebilir.

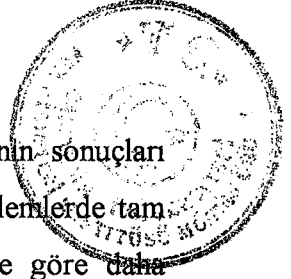
5.4 Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Son yıllarda her iki yöntemde de özellikle bilgisayar olanaklarının gelişmesi ve kullanımının yaygınlaşmasının paralelinde diğer sayısal çözüm yöntemlerine göre çok büyük gelişmeler kaydedilmiştir. Çözümü zor olarak bilinen problemler bu yöntemlerle daha kolay çözülebilmektedir. Her iki yöntemin karşılaştırılmasıyla ilgili olarak çok sayıda yayın mevcuttur. Bunlardan Myers, Şekil 5.4a'da gösterilen üniform enerji üretimi olan kare bölgede, malzeme özelliklerinin her yerde aynı olduğu ve z yönünde sıcaklık değişiminin olmadığı kabulüyle ve;

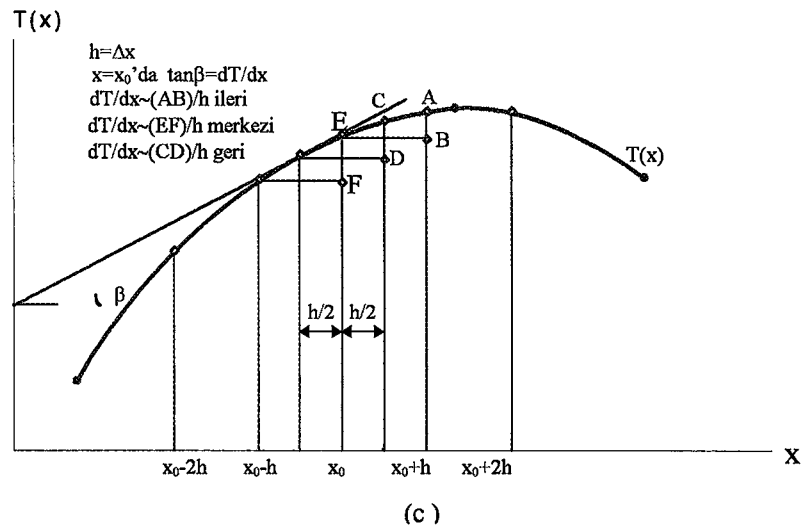
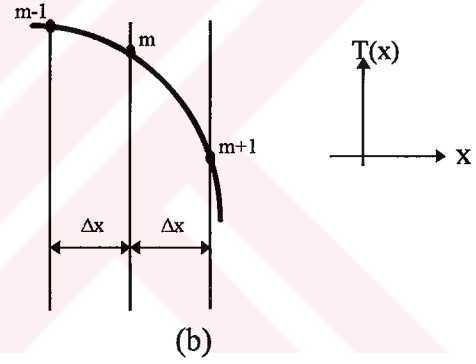
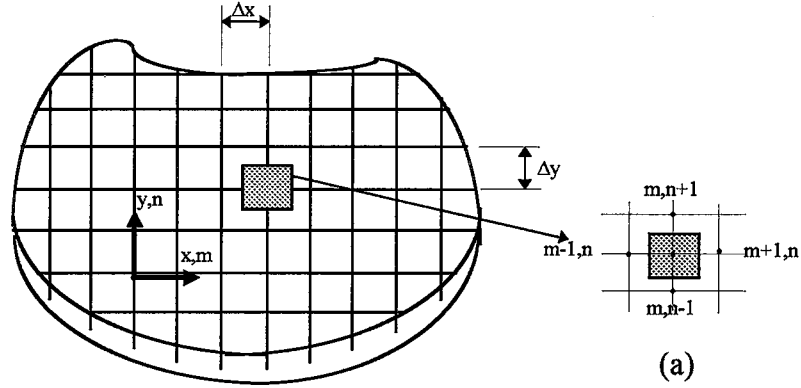
$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

$$T(L, y) = T_0 \quad T(x, L) = T_0$$

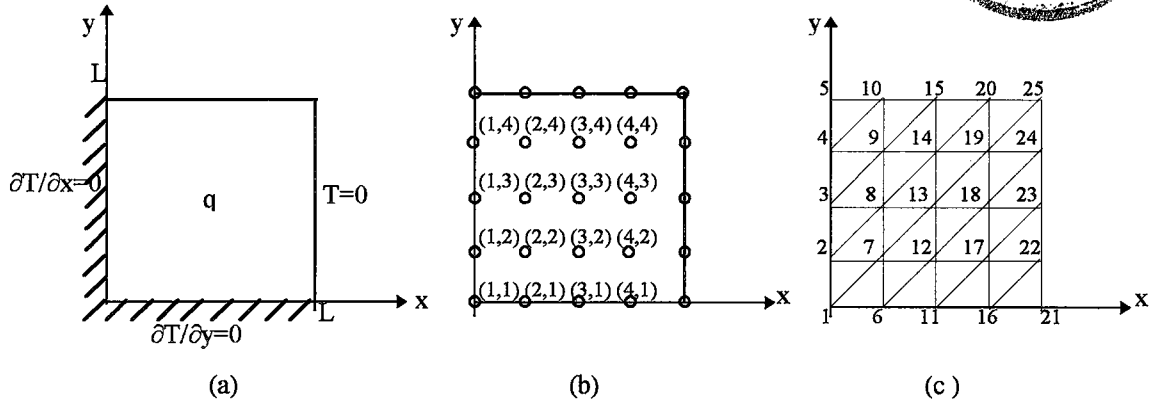
sınır şartlarını da kullanarak sıcaklık dağılımının hesaplanması probleminde Şekil.5.4b'de gösterilen düğüm sistemiyle sonlu farklar ve Şekil 5.4c'de gösterilen düğüm sistemiyle de sonlu elemanlar çözümünü incelemiştir. Tez konusunda



kullanılan yöntemin seçimine katkıda bulunması nedeniyle bu çalışmanın sonuçları Tablo 5.1'de özetlenmiştir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi bu tip problemlerde tam çözüme yaklaşımda sonlu elemanlar yöntemi sonlu farklar yöntemine göre daha etkilidir.



5.3 İki Boyutlu İletim. (a) Düğüm şebekesi, (b) Sonlu fark, (c) 1. Türev yaklaşımı



Şekil 5.4 Karşılaştırmalı problem ve düğüm sistemleri [14]

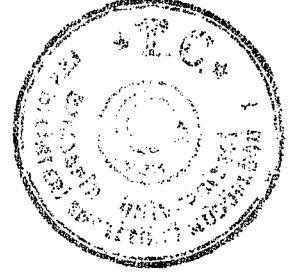
- (a) İncelenen problem
- (b) Sonlu farklar sistemi
- (c) Sonlu elemanlar düğüm sistemi

Tablo 5.1 İncelenen iki boyutlu karşılaştırmalı problemin sonuçları [14].

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ				SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ			
Düğüm No	Tam Çözüm	SFY Çözüm \bar{u}	Hata Tam-SFY $\times 10^{-4}$	Düğüm No	Tam Çözüm	SEY Çözüm \bar{u}	Hata Tam-SEY $\times 10^{-4}$
1,1	0.2927	0.2911	36	1	0.2947	0.3013	-66
1,2	0.2789	0.2755	34	2	0.2789	0.2805	-16
1,3	0.2293	0.2266	27	3	0.2293	0.2292	1
1,4	0.1397	0.1381	16	4	0.1397	0.1392	5
2,1	0.2789	0.2755	34	6	0.2789	0.2805	-16
2,2	0.2642	0.2609	33	7	0.2642	0.2645	-3
2,3	0.2178	0.2151	27	8	0.2178	0.2172	6
2,4	0.1333	0.1317	16	9	0.1333	0.1327	6
3,1	0.2293	0.2266	27	11	0.2293	0.2292	1
3,2	0.2178	0.2151	27	12	0.2178	0.2172	6
3,3	0.1811	0.1787	24	13	0.1811	0.1801	10
3,4	0.1127	0.1110	17	14	0.1127	0.1117	10
4,1	0.1397	0.1381	16	16	0.1397	0.1392	5
4,2	0.1333	0.1317	16	17	0.1333	0.1327	6
4,3	0.1127	0.1110	17	18	0.1127	0.1117	10
4,4	0.0728	0.0711	17	19	0.0728	0.0715	13

Σ Hata= 0.0384
 Σ Mutlak hata= 0.0384

Σ Hata= -0.0022
 Σ Mutlak hata= 0.0180



6. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

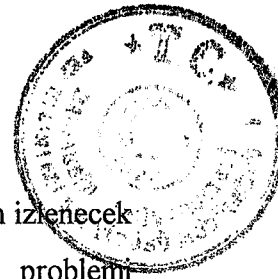
Sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık otuz yıldır mühendisler ve araştırmacılar tarafından kullanılan bir matematiksel yöntemdir. Günümüzde gelişmelere paralel olarak mühendislik alanındaki gelişmelerle beraber kompleks problemlere uygulanmakta ve güvenilir sonuçlar vermektedir. Sonlu elemanlar yöntemi üç ana adımdan oluşmaktadır.

Birinci adımda, analizi yapılacak problem tanımlanır. Sistem sonlu sayıda elemanlara bölünür ve bu elemanlar üzerinde düğüm noktası denilen noktalar oluşturulur.

İkinci adımda analizi yapılacak problem tespit edilen eleman üzerinde diferansiyel denklemlerle belirlidir. Bu diferansiyel denklemlerden elde edilen varyasyonel ifade her eleman için yazılarak cebirsel denklem takımı oluşturulur. Denklem takımının çözümü aranılan büyüklüğün dağılımını verir.

Üçüncü adımda ise elde edilen bu sonuçların değerlendirilmesi ve bunların yorumlanmasıdır. Sonuçların anlaşılabilmesini sağlayacak bir ifade kullanılmalıdır. Buradaki amaç elde edilen bir çok sayıyı doğru şekilde yorumlamayı kolaylaştırmaktır. Herhangi bir problemin çözümünün bu üç adıma 'preprocessing - processing - postprocessing' denir.

Sonlu elemanlar yöntemi uygulanırken, eleman tipine, eleman geometrisine, eleman sayısına, düğüm noktası numaralandırmasına ve boyut seçimine dikkat edilmelidir. Boyut seçimi problemin yapısına bağlı olarak değişir. Örneğin simetrik bir parçanın düzgün yayılı yük altındaki durumu inceleniyorsa problemi üç boyutlu analiz etmeye gerek yoktur.



Sonlu elemanlar yönteminin bir diğer avantajı da bir çok problem için izlenecek adımların büyük bir kısmının aynı olmasıdır. Isı transferi veya akış problemi çözümünde kullanılacak bir çok yöntem, rijid cisimler veya sürekli ortamlar mekaniği için de kullanılabilir.

6.1 Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları

1-Her eleman için farklı malzeme özellikleri tanımlamak mümkündür. Bu da kompozit malzemelere başarı ile uygulanmasını sağlar.

2-Düzgün olmayan sınırlara sahip şekiller, eğri kenarlı elemanlar kullanılarak elemanlara ayrılabilir. Sadece düzgün geometrili parçalar değil bütün parçalarda analiz yapılabilir.

3-Eleman büyüklükleri serbestçe belirlenebilir. Böylece önemli değişiklikler beklenen bölgelerde daha küçük elemanlar kullanılarak hassas işlemler yapılabilirken aynı parçanın diğer bölgeleri büyük elemanlara bölünerek işlem hızı artırılabilir.

4-Noktasal yükler veya sınır koşulları uygulanabileceği gibi ilk şartlarda istenildiği gibi verilebilir.

5-Sadece tek bir duruma değil birçok probleme uygulanabilecek bir yöntem geliştirilebilir.

6.2 Sonlu Elemanlar Yönteminin Isı Transferi Problemlerine Uygulanması

Birçok ısı transferi mühendislik probleminin çözümünde bir cisim üzerindeki sıcaklık dağılımı aranır. Sıcaklık dağılımı biliniyorsa ısı akısı hesaplanabilir ve bu sıcaklık dağılımının sebep olabileceği ısıl gerilmeler bulunabilir.



6.2.1 Isı Transferi Bağlıları

Katı bir cisim için ısı iletim denklemi kartezyen koordinatlarda ve sürekli rejimde aşağıda verilmiştir.

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = 0 \quad (6.1)$$

Eğer sınır şartı olarak bir bölgenin sıcaklığı biliniyorsa;

$$T = T_0 \quad (6.2)$$

Sınır şartı olarak, taşınım ile geçen ısı miktarını yahut ısı akısı biliniyorsa;

$$K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} n_y + K_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} n_z + h(T - T_\infty) + q = 0 \quad (6.3)$$

q ısı akısı dışarı doğru ise pozitif alınır. Isı akısı ve taşınım ile geçen ısı terimlerinden biri olabilir. Taşınım ısı transferi varsa q ısı akısı sıfırdır.

(6.1) ve (6.3) nolu denklemi iki boyutlu problem için yeniden yazarsak;

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0 \quad (6.4)$$

$$K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} n_y + h(T - T_\infty) + q = 0 \quad (6.5)$$

n, yüzeye dik vektör olmak üzere; yalıtılmış sınır hali (taşınım ile ısı geçişi yok);

$$\frac{dT}{dn} = 0 \quad (6.6)$$



Sonlu elemanlar yöntemine göre problemi ifade eden denklemi minimize eden fonksiyon aranır. Bu denklemin iki boyutlu ifadesi;

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0 \quad (6.6a)$$

$$\Gamma_1 \text{ sınır şartı; } T = T_0 \quad (6.7)$$

$$\Gamma_2 \text{ sınır şartı; } K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} n_y + h(T - T_\infty) + q = 0 \quad (6.8)$$

K_{xx} ve K_{yy} q ve T 'den bağımsızdır.

İki boyutlu varyasyonel ifade;

$$\frac{\partial P}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial T_y} \right) = 0 \quad (6.9)$$

Problemi ve sınır koşullarını içeren ifade;

$$P = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2TQ \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[qT + \frac{h}{2} (T - T_\infty)^2 \right] d\Gamma \quad (6.10)$$

(6.10) numaralı fonksiyonel T 'ye göre minimize edilirse;

$$\{g\}^T = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (6.11)$$

$$D = \begin{vmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{vmatrix} \quad (6.12)$$



(6.11) ve (6.12) tanımlamalarını kullanarak (6.10) denklemini yeniden yazılırsa;

$$P = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\{g\}^T [D] \{g\} - 2TQ \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} Tq d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{h}{2} (T^2 - 2TT_{\infty} + T^2) d\Gamma \quad (6.13)$$

P fonksiyonu bütün alan elemanlara ayrıldığı için tüm cisim üzerinde süreksizdir. Bu nedenle elemanlar üzerinde $T^{(\infty)}$ lar tanımlıdır.

İntegrali tüm elemanlar için genişletirsek;

$$P = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(\infty)}\}^T [D^{(\infty)}] \{g^{(\infty)}\} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} T^{(\infty)} Q^{(\infty)} d\Omega + \int_{\Gamma^{(\infty)}} T^{(\infty)} q^{(\infty)} d\Gamma + \int_{\Gamma^{(\infty)}} \frac{h^{(\infty)}}{2} [T^{(\infty)} T^{(\infty)} - 2T^{(\infty)} T + T^2] d\Gamma \quad (6.14)$$

(6.14) bağıntısı F fonksiyonlarının her bir eleman için hesaplanacağını göstermektedir. Yani;

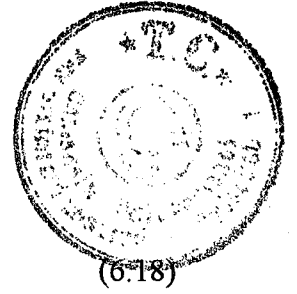
$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots + P^{(E)} = P^{(\infty)} \quad (6.15)$$

(6.15) bağıntısı minimize edilmesi için türevi alınırsa;

$$\frac{\partial P}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E P^{(\infty)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial P^{(\infty)}}{\partial \{T\}} = 0 \quad (6.16)$$

$\frac{\partial P^{(\infty)}}{\partial \{T\}}$ nin türevini alabilmek için (6.14) bağıntısı $\{T\}$ cinsinden yazılır.

$$T^{(\infty)} = [N^{(\infty)}] \{T\} \quad (6.17)$$



$$\{g^{(\infty)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T^{(\infty)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(\infty)}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(\infty)}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{(\infty)}}{\partial x} \cdots & \frac{\partial N_1^{(\infty)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(\infty)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(\infty)}}{\partial y} \cdots & \frac{\partial N_1^{(\infty)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ \cdot \\ T \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

$B^{(\infty)}$ şekil fonksiyonlarının türevi olmak üzere;

$$\{g^{(\infty)}\} = [B^{(\infty)}]\{T\} \quad (6.19)$$

(6.14) denklemini yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} P^{(\infty)} = & \int_{\Omega^{(\infty)}} \frac{1}{2} \{T\}^T [B^{(\infty)}]^T [D^{(\infty)}] [B^{(\infty)}] \{T\} d\Omega - \int_{\Omega^{(\infty)}} Q [N^{(\infty)}] \{T\} d\Omega + \\ & \int_{\Gamma^{(\infty)}} q [N^{(\infty)}] \{T\} d\Gamma + \int_{\Gamma^{(\infty)}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N^{(\infty)}]^T [N^{(\infty)}] \{T\} d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma^{(\infty)}} h T_{\infty} [N^{(\infty)}] \{T\} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{h}{2} T^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (6.20)$$

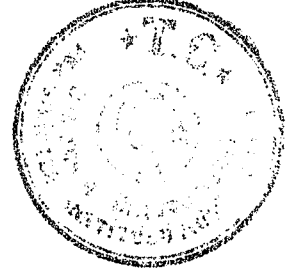
(6.20) denklemindeki Q, q, T ve h değerleri bilinen ve elemandan elemana değişebilen değerlerdir. (6.20) denkleminin türevi alınırsa;

ilk terim

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{\Omega^{(\infty)}} \frac{1}{2} \{T\}^T [B^{(\infty)}]^T [D^{(\infty)}] [B^{(\infty)}] \{T\} d\Omega = \int_{\Omega^{(\infty)}} [B^{(\infty)}]^T [D^{(\infty)}] [B^{(\infty)}] \{T\} d\Omega \quad (6.20a)$$

ikinci terim

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{\Omega^{(\infty)}} Q [N^{(\infty)}] \{T\} d\Omega = \int_{\Omega^{(\infty)}} Q [N^{(\infty)}]^T d\Omega \quad (6.20b)$$



üçüncü terim

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{\Gamma^{(\infty)}} q [N^{(\infty)}] \{T\} d\Gamma = \int_{\Gamma_1^{(\infty)}} q [N^{(\infty)}]^T d\Gamma \quad (6.20c)$$

dördüncü terim

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{\Gamma^{(\infty)}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N^{(\infty)}]^T [N^{(\infty)}] \{T\} d\Gamma = \int_{\Gamma^{(\infty)}} h [N^{(\infty)}]^T [N^{(\infty)}] \{T\} d\Gamma \quad (6.20d)$$

beşinci terim

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{\Gamma^{(\infty)}} \frac{h}{2} T_{\infty}^2 = 0 \quad (6.20e)$$

Yukarıda ayrı ayrı yazılmış terimler bir ifade içinde toplanırsa;

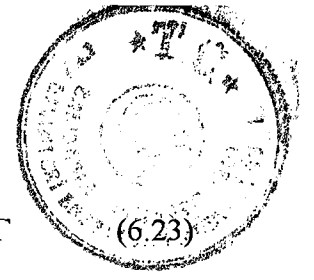
$$\frac{\partial P^{(\infty)}}{\partial \{T\}} = \left[\int_{\Omega} [B^{(\infty)}]^T [D^{(\infty)}] [B^{(\infty)}] d\Omega + \int_{\Gamma} h [N^{(\infty)}]^T [N^{(\infty)}] d\Gamma \right] \{T\} - \int_{\Omega^{(\infty)}} Q [N^{(\infty)}]^T d\Omega + \int_{\Gamma^{(\infty)}} q [N^{(\infty)}]^T d\Gamma - \int_{\Gamma^{(\infty)}} h T_{\infty} [N^{(\infty)}]^T d\Gamma \quad (6.21)$$

Bu denklem kısa bir şekilde yazılacak olursa;

$$\frac{\partial P^{(\infty)}}{\partial \{T\}} = [k^{(\infty)}] \{T\} + \{f^{(\infty)}\} \quad (6.22)$$

$[k^{(\infty)}]$ matrisi: Eleman iletim matrisi (stiffness)

$\{f^{(\infty)}\}$ vektörü: Eleman kuvvet vektörüdür.



$$[k^{(\infty)}] = \int_{\Omega^{(\infty)}} [B^{(\infty)}]^T [D^{(\infty)}] [B^{(\infty)}] d\Omega + \int_{\Gamma^{(\infty)}} h [N^{(\infty)}]^T [N^{(\infty)}] d\Gamma \quad (6.23)$$

$$[f^{(\infty)}] = - \int_{\Omega^{(\infty)}} Q [N^{(\infty)}]^T d\Omega + \int_{\Gamma^{(\infty)}} q [N^{(\infty)}]^T d\Gamma - \int_{\Gamma^{(\infty)}} h T_{\infty} [N^{(\infty)}]^T d\Gamma \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(\infty)}] \{T\} + \{f^{(\infty)}\}) = 0 \quad (6.25)$$

$[k] \{T\} = \{F\}$ alınırsa;

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(\infty)}] \quad (6.26a)$$

$$[F] = - \sum_{e=1}^E [f^{(\infty)}] \quad (6.26b)$$

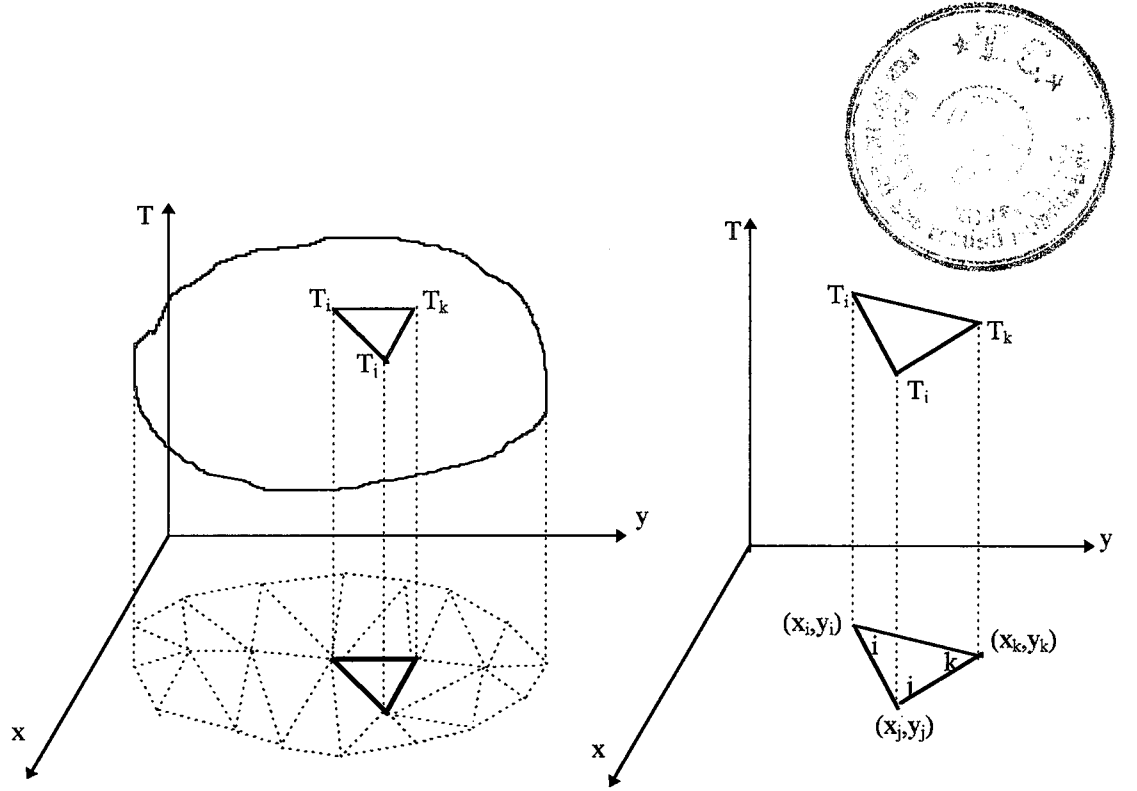
6.3 Problemin Sonlu Elemanlara Bölünmesi

Analizi yapılacak alanın elemanlara ayrılması işlemi iki önemli aşamadan meydana gelir.

1-Şekli uygun bir şekilde uygun elemanlar kullanarak bölmek,

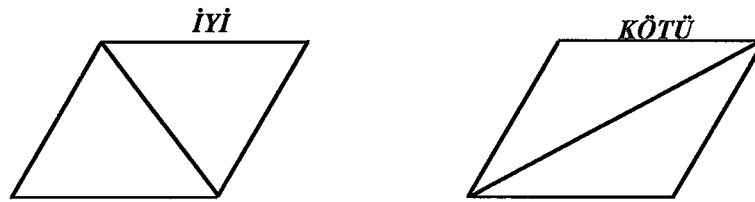
2-Bu elemanlar üzerindeki düğüm noktalarını en uygun şekilde numaralandırmak.

İki boyutlu bir şekli en basit olarak üçgen elemanlara bölebiliriz. Bunun için şekil önce dört kenarlı elemanlara sonra da bu dörtgen elemanlar üçgenlere ayrılırlar. İkinci ayrıştırma sırasında geometrik değişiklikler, yük uygulanan yerler ve malzeme özelliklerinin değişiklik gösterdiği bölgeler göz önünde tutulur. Eğer ele alınan cismin kenarları doğrusal değil ise bu eğrilik küçük elemanlar kullanılarak bir yaklaşıklıkla ifade edilebilir.



Şekil 6.1 Problemin Üç Düğüm Noktalı Üçgen Elemanlara Bölünmesi ve Linear Enterpolasyon Fonksiyonu Yardımıyla Bağımsız Değişkenin Gösterimi

Cisim dört kenarlı elemanlara ayrıldıktan sonra bu elemanlar kendi aralarında üçgenlere bölünürken kısa diyagonalin kullanılmasına dikkat edilir.



Şekil 6.2 Elemanların bölünmesi

Sonlu elemanlar yönteminde birbirinden farklı büyüklükte elemanlar kullanılacağı gibi düğüm noktaları arasındaki uzaklıklarda farklı olabilir. Ani sıcaklık farkları, gerilmelerin yoğun olduğu yerler gibi değişimleri daha iyi izleyebilmek için böyle değişikliklerin beklenildiği bölgelere daha küçük ve fazla sayıda eleman yerleştirilir. Fakat yine de bir şeklin ne tür elemanlar kullanılarak ve nasıl kaç elemana bölüneceğine dair kesin kurallar yoktur. Bu yüzden bu aşama genellikle analizi yapanın

problem ve yöntem hakkındaki tecrübesine dayanılarak gerçekleştirilir. Eleman üzerine yerleştirilen düğüm noktalarının numaralanması hesaplama hassasiyeti üzerinde etkilidir. Çünkü sonlu elemanlar yönteminde çözülecek denklemler (matris) bir çok sıfır eleman içerir. Sıfırdan farklı elemanlar ise bir köşegen üzerine sığdırılabilir. Sadece bu köşegendeki terimleri hafızada saklamak, hafızayı etkin bir şekilde kullanmaya izin verir. Bu yüzden diagonalin, bant genişliğinin (B) dar olması programlama açısından bir avantajdır.

$$\begin{bmatrix} C & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & C & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & C & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & C & C \end{bmatrix}$$

Bant genişliği B olmak üzere;

$$B = (R+1)NDOF$$

dir. R bir eleman içindeki nod numaraları arasındaki en büyük fark ve NDOF bilinmeyen sayısını göstermektedir. Bant genişliğini alt seviyede tutmak için R küçültülmeye çalışılır.

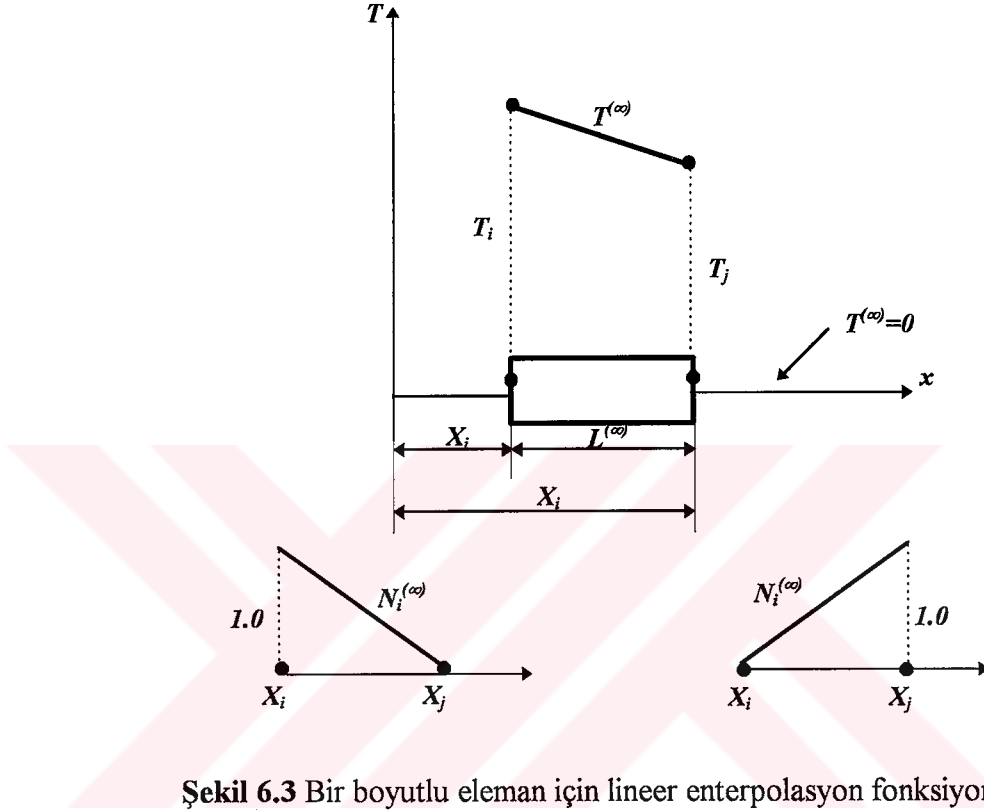
6.4 Enterpolasyon Fonksiyonlarının Seçimi

Problemin sonlu elemanlara bölünmesinden sonra her bir eleman içinde bağımsız değişkene (sıcaklık, nem, basınç,...) enterpolasyon fonksiyonları yardımıyla yaklaşılabilir. Bu yaklaşımda integralini ve türevini almak kolay olduğundan lineer polinom gibi basit bir enterpolasyon fonksiyonu kullanılabilir. Polinomun derecesi



elemanın düğüm sayısına, her bir düğümdeki eleman sayısına ve düğüm ve eleman sınırındaki bazı süreklilik ihtiyacına bağlı olarak değişir.

6.4.1 Bir Boyutlu Basit Eleman

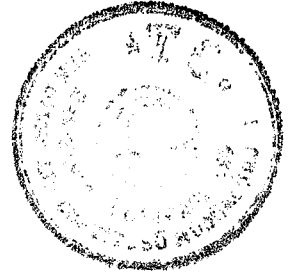


Şekil 6.3 Bir boyutlu eleman için lineer enterpolasyon fonksiyonu

$L^{(\infty)}$ eleman uzunluğu, $T^{(\infty)}$ sıcaklık için eleman enterpolasyon fonksiyonu olmak üzere birinci düğüm koordinatı $x=x_i$ ve ikinci düğüm koordinatı $x=x_j$ 'dir. Düğüm noktalarına ait alan değişkenleri ise; T_i birinci düğüm noktası sıcaklığı, T_j ikinci düğüm noktası sıcaklığıdır. T_i ve/veya T_j değerleri sonlu eleman çözümüyle elde edilebileceği gibi sınır şartı olarak da verilebilir.

$$T^{(\infty)} = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x & x_i \leq x \leq x_j \\ 0 & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (6.27)$$

olarak belirlenir. Burada α_1 ve α_2 aşağıda belirlenecek olan sabitlerdir. Eleman içinde, enterpolasyon fonksiyonu lineer, eleman dışında sıfırdır. Lineer polinom her iki düğüm noktasından geçmelidir.



$$\begin{aligned} x = x_i \text{ için} & \quad T^{(\infty)} = T_i \\ x = x_j \text{ için} & \quad T^{(\infty)} = T_j \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{aligned} \quad (6.28)$$

elde edilir. Bu denklemler α_1 ve α_2 için çözümlerse;

$$L^{(\infty)} = x_j - x_i$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{L^{(\infty)}} (x_j T_i - x_i T_j) \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{L^{(\infty)}} (T_i - T_j) \end{aligned}$$

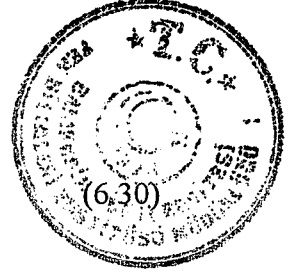
bulunur. Bu ifadelerin (6.27) denkleminde yazılıp düzenlenmesi ile aşağıdaki ifade elde edilir.

$$T^{(\infty)} = \frac{x_i - x}{L^{(\infty)}} T_i + \frac{x - x_j}{L^{(\infty)}} T_j, \quad x_i \leq x \leq x_j \quad (6.29)$$

Görüldüğü gibi eleman enterpolasyon polinomu düğüm koordinatları, eleman uzunluğu ve düğüm noktası sıcaklıklarının fonksiyonu olmasının yanı sıra x 'in de lineer fonksiyonudur.

6.4.2 Bir Boyutlu Şekil Fonksiyonları

Lineer enterpolasyon fonksiyonunun (6.29) bağıntısıyla verilen formu yerine şekil fonksiyonu olarak adlandırılan ve kullanımı daha uygun olan;



$$T^{(\infty)} = N_i^{(\infty)} T_i + N_j^{(\infty)} T_j$$

bağıntısı daha sık kullanılır.

$$\begin{aligned} N_i^{(\infty)} &= \frac{x_i - x}{L^{(\infty)}} \\ N_j^{(\infty)} &= \frac{x - x_i}{L^{(\infty)}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

olarak verilir. Bu denklemlerdeki x değeri için birincisinde x_i , ikincisinde x_j alınır ve yerlerine yazılırsa N değerleri 1.0 olur.

Şekli nedeniyle N fonksiyonları 'piramit fonksiyonları' olarak da adlandırılır.

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{L} (a_i + b_i x), & \begin{cases} a_i = x_i \\ b_i = -1 \end{cases} \\ N_j &= \frac{1}{L} (a_j + b_j x), & \begin{cases} a_j = -x_j \\ b_j = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.32)$$

şeklinde yazılır.

6.4.3 Bir Boyutlu Eleman Türevleri ve İntegralleri

$$T^{(\infty)} = N_i T_i + N_j T_j$$

ise bu fonksiyonun türevi;

$$\frac{dT^{(\infty)}}{dx} = \frac{dN_i}{dx} T_i + \frac{dN_j}{dx} T_j$$

olur. Yukarıda verilen N tanımından x türevleri;



$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{1}{L} b_i, \quad \frac{dN_j}{dx} = \frac{1}{L} b_j$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{L} (b_i T_i + b_j T_j) \quad (6.34)$$

şeklinde yazılır. Çoğu kez bu ifadeler aşağıdaki gibi matris formunda kullanılır.

$$T^{(\infty)} = [N]\{T\} \quad (6.35)$$

Burada şekil fonksiyonu satır matrisi;

$$[N] = [N_i \quad N_j]$$

ve düğüm vektörü;

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}$$

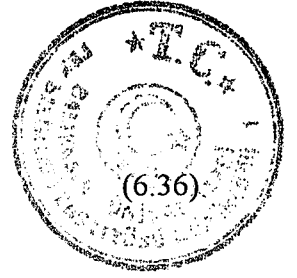
şeklindedir. Öte tandan eleman türev matrisi [D] ise;

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} \end{bmatrix}$$

olarak yazılırsa enterpolasyon fonksiyonunun türevi;

$$\frac{\partial T^{(\infty)}}{\partial x} = [D]\{T\}$$

şeklini alacağından, (6.33) denkleminde;



$$[D] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} b_i & b_j \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eleman üzerindeki integral, şekil fonksiyonlarının integralini içereceğinden ve şekil fonksiyonunun üçgen şeklinden dolayı (tabanı L, yüksekliği 1.0);

$$\int_L N_i dx = \int_L N_j dx = \frac{1}{2} L \quad (6.37)$$

olur ve böylece;

$$\int_L T^{(\infty)} dx = \int_L (N_i T_i + N_j T_j) dx$$

ifadesi;

$$\int_L T^{(\infty)} dx = \frac{L}{2} (T_i + T_j) \quad (6.38)$$

şeklini alır. α ve β tamsayı olmak üzere;

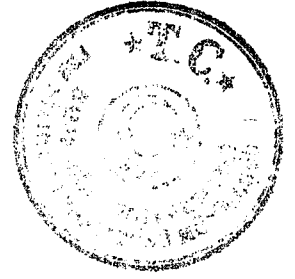
$$\int_L N_i^\alpha N_j^\beta dx = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} L \quad (6.39)$$

yazılır. Bu bağıntı ile karşılaşılabilecek bazı α ve β değerleri için elde edilebilecek katsayılar Tablo.6.1’de verilmiştir.

Tablo 6.1 Uzunluk koordinatlarının integralleri

α	β	$\alpha+\beta$	A	B
0	0	0	1	1
1	0	1	1	2
2	0	2	2	6
1	1	2	1	6

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{L} \int_L N_i^\alpha N_j^\beta dx = \frac{A}{B}$$



6.5 İki Boyutlu Elemanlar

6.5.1 İki Boyutlu Üçgen Eleman Enterpolasyon Fonksiyonu

İki boyutlu elemanda eğer bağımsız değişken T (sıcaklık veya probleme bağlı olarak başka bir değişken), x ve y koordinatlarının fonksiyonu ise en basit sonlu eleman kenarları doğru ve düğüm noktaları köşede olan üçgen sonlu elemandır (Şekil 6.1). Bu elemanda;

A: eleman alanı

$T^{(\infty)}$: bağımsız değişken için eleman enterpolasyon fonksiyonu

olsun. Şekil 6.1'de görüldüğü gibi düğüm noktaları için numaralama sistemi i, j, k saat ekseninin dönüş yönü tersine göre yapılmıştır. Düğüm noktalarının veya köşelerin koordinatları; (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) , (X_k, Y_k) ; sırasıyla, 1., 2., 3. düğüm koordinatları şeklindedir. Düğüm noktalarındaki bağımsız değişkenin değerleri; T_i, T_j, T_k ; sırasıyla, 1., 2., ve 3. düğüm sıcaklığı olarak yazılır. Doğal olarak T_i, T_j, T_k değerleri sınır şartı olarak da verilebilir.

İki boyutlu problemde lineer enterpolasyon polinomu;

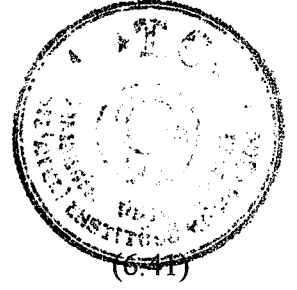
$$T^{(\infty)} = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y & (A \text{ içinde}) \\ 0 & (A \text{ dışında}) \end{cases} \quad (6.40)$$

şeklinde olmalıdır. Burada (∞) üst indisi A içindeki bölgeyi ifade etmektedir. Her bir düğüm noktasındaki düğüm sıcaklığı;

$$x=X_i, \quad y=Y_i \text{ 'de} \quad T^{(\infty)}=T_i$$

$$x=X_j, \quad y=Y_j \text{ 'de} \quad T^{(\infty)}=T_j$$

$$x=X_k, \quad y=Y_k \text{ 'da} \quad T^{(\infty)}=T_k$$



olduğundan;

$$\begin{aligned}T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k\end{aligned}\tag{6.41}$$

elde edilir. Bu denklem takımı α_1 , α_2 ve α_3 için çözülürse;

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2A} \left[(X_j Y_k - X_k Y_j) T_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) T_j + (X_k Y_j - X_j Y_i) T_k \right] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} \left[(Y_j - Y_k) T_i + (Y_k - Y_i) T_j + (Y_i - Y_j) T_k \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} \left[(X_k - X_j) T_i + (X_i - X_k) T_j + (X_j - X_i) T_k \right]\end{aligned}\tag{6.42}$$

bulunur. Burada A üçgenin alanıdır ve;

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \left[(X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j X_i - Y_k X_i) + (X_k Y_i - X_j Y_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}\end{aligned}\tag{6.43}$$

şeklinde. Eğer elemanın düğüm noktası numaralandırması saat ibresinin dönüş yönünde yapılırsa determinanın değeri negatif işaretli olacaktır.

6.5.2 İki Boyutlu Şekil Fonksiyonları

$$T^{(\infty)} = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k\tag{6.44}$$

(6.44) bağıntısı şekil fonksiyonu olarak adlandırılır.



$$T^{(\infty)} = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} T_i + \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2A} T_j + \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2A} T_k$$

Burada N_i , N_j , N_k üçgen eleman için aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), & \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases} \\ N_j &= \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y), & \begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases} \\ N_k &= \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y), & \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases} \end{aligned} \quad (6.45)$$

ve

$$2A = b_i c_j - b_j c_i \quad (6.46)$$

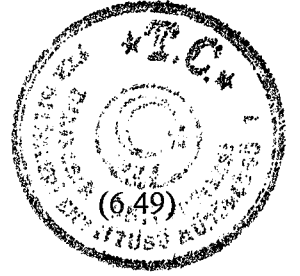
Düğüm noktası sıcaklıkları;

$$T^{(\infty)} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} \quad (6.47)$$

Gradient matrisi;

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Malzeme özellikleri matrisi;



$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} d\Omega \quad (6.50)$$

dA eleman alanı ve eleman kalınlığı birim kalınlık alınırsa, $d\Omega=dA$ olur.

$$\int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = [B]^T [D] [B] \int_{\Gamma} dA = A [B]^T [D] [B] \quad (6.51)$$

$$[k^{(\infty)}] = \frac{k_{xx}}{4A} [B] + \frac{k_{yy}}{4A} [C] \quad (6.52)$$

$$\int_{\Gamma} h [N]^T [N] d\Gamma = h \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

N şekil fonksiyonları x ve y'ye bağlı olduklarından integral dışına alınamazlar.

Alan koordinatları kullanılırsa;

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j, \quad L_3 = N_k$$

yazılabilir. L_1 uzunluğu boyunca ısı taşınımı olduğu kabul edilirse;

$$\int_{\Gamma} h [N]^T [N] d\Gamma = h \int_{L_y} \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_1 L_2 & 0 \\ L_2 L_1 & L_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dL \quad (6.54)$$



$d\Gamma = t.dL$ olmak üzere elde edilir.

$$\int_{L_y} L_1^2 dL = \int_{L_y} L_1^2 L_2 dL = \frac{2!.0!}{(2+0+1)!} L_{ij} = \frac{L_{ij}}{3}$$

$$\int_{L_y} L_1 L_2 dL = \frac{1!.1!}{(1+1+1)!} L_{ij} = \frac{L_{ij}}{6}$$

$$\int_{L_y} L_2^2 dL = \int_{L_y} L_1^2 dL \quad (6.55)$$

$$h \int_{L_y} [N]^T [N] d\Gamma = h \frac{L_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.56a)$$

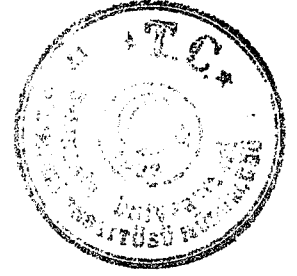
$$h \int_{L_y} [N]^T [N] d\Gamma = h \frac{L_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.56b)$$

$$h \int_{L_y} [N]^T [N] d\Gamma = h \frac{L_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.56c)$$

Q=Sabit ise;

$$Q \int_{\Omega} [N]^T d\Omega = Q \int_{\Omega} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{Q\Omega}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.57)$$

bağıntısı yazılabilir.



Birinci (Γ_1) ve ikinci (Γ_2) sınırları boyunca;

$$\int_{\Gamma_1} [N]^T q d\Gamma \quad \text{ve} \quad \int_{\Gamma_2} [N]^T h T_\infty d\Gamma$$

ifadeleri aynı formda ifade edilebilirler ve sadece bir tanesinin hesaba katılması yeterlidir.

$$\int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (6.58)$$

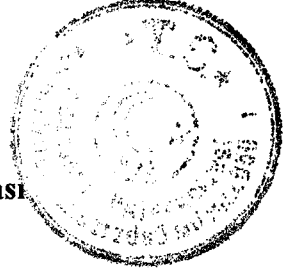
$q = \text{sabit}$ ise bu denklemin yazılabileceği üç ayrı form vardır.

$$h T_\infty \int_{\Gamma} [N]^T d\Gamma = \begin{cases} \left. \begin{matrix} h T_\infty \frac{L_{ij}}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} & (a) \\ \left. \begin{matrix} h T_\infty \frac{L_{ij}}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} & (b) \\ \left. \begin{matrix} h T_\infty \frac{L_{ij}}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} & (c) \end{cases} \quad (6.59)$$

(6.43) ve (6.59) denklemleri için iki kenar boyunca ısı akışı veya taşınım ısı transferi sözkonusu ise bu denklemler her iki kenar için yazılıp toplanırlar.

6.6 Sekiz Düğüm Noktalı Dörtgen Elemanlar İçin Şekil Fonksiyonlarının Çıkarılması ve Eleman Denklemlerinin Bulunması

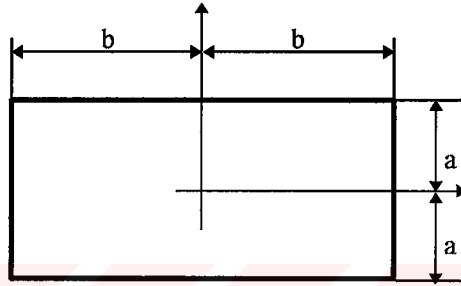
Bu elemanlar için şekil fonksiyonlarını çıkartmadan önce daha basit ve bunlara temel teşkil eden lineer ve 4 düğüm noktası olan elemanlar için şekil fonksiyonlarının bulunması konuyu tanıtıcı bir giriş olacaktır.



6.6.1 Lineer Dörtgen Elemanlar İçin Fonksiyonların Bulunması

Dört kenarlı en basit eleman 4 düğüm noktalı ve lineer elemanlardır. Böyle bir eleman için enterpolasyon polinomu;

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (6.60)$$



Şekil 6.4 Dörtgen Eleman

Her 4 düğüm noktası için genel polinom yazılır ve α için çözülürse;

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{4} \quad (6.61)$$

$$\alpha_2 = \frac{-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4}{4b} \quad (6.62)$$

$$\alpha_3 = \frac{-\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{4a} \quad (6.63)$$

$$\alpha_4 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4}{4ab} \quad (6.64)$$

bulunur.

Şekil fonksiyonları;



$$\Phi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + N_4\Phi_4 = [N]\{\Phi\} \quad (6.65)$$

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) \quad (6.66)$$

$$N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) \quad (6.67)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y) \quad (6.68)$$

$$N_4 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) \quad (6.69)$$

olarak elde edilir. Sonuçları genelleştirebilmek için uzunluk oranları; x/b ve y/a kullanılırsa;

$$\frac{x}{b} = \psi \quad \text{ve} \quad \frac{y}{a} = \eta$$

$$-1 \leq \frac{x}{b} \leq 1 \quad \text{ve} \quad -1 \leq \frac{y}{a} \leq 1$$

olmak üzere şekil fonksiyonları boyutsuz koordinatlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\psi)(1-\eta) \quad (6.70)$$

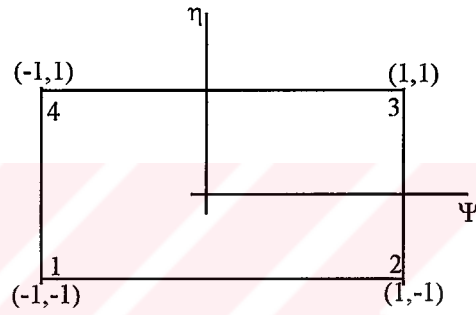
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\psi)(1-\eta) \quad (6.71)$$



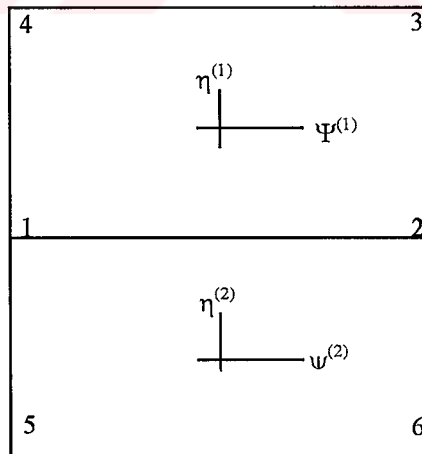
$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \psi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \psi)(1 + \eta) \quad (6.73)$$

Bu koordinat sisteminin düz kenarlı olması şartı yoktur, kenarlar eğri olabilir. Eğri kenarlı elemanlar için koordinat sisteminin orijini kenar ortayların kesim noktasıdır.

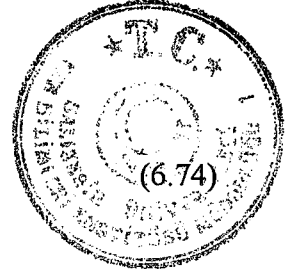


Şekil 6.5 Koordinat sistemi



Şekil 6.6 Ortak kenarlı elemanlar

Her eleman için enterpolasyon polinomları yazılırsa;



$$\Phi^{(1)} = N^{(1)}\Phi_1 + N^{(1)}\Phi_2 + N^{(1)}\Phi_3 + N^{(1)}\Phi_4 \quad (6.74)$$

$$\Phi^{(1)} = N^{(2)}\Phi_5 + N^{(2)}\Phi_6 + N^{(2)}\Phi_2 + N^{(2)}\Phi_1 \quad (6.75)$$

Şekil fonksiyonlarında $\eta^{(1)}=-1$ ve $\eta^{(2)}=1$ yazılırsa, şekil fonksiyonları aşağıdaki hale gelirler.

$$N_1^{(1)} = \frac{1}{2}[1 - \psi^{(1)}]$$

$$N_1^{(2)} = 0 = N_2^{(2)}$$

$$N_2^{(1)} = \frac{1}{2}[1 + \psi^{(1)}]$$

(6.76)

$$N_3^{(2)} = \frac{1}{2}[1 + \psi^{(2)}]$$

$$N_3^{(1)} = 0 = N_4^{(1)}$$

$$N_4^{(2)} = \frac{1}{2}[1 - \psi^{(2)}]$$

$$\Phi^{(1)} = N^{(1)}\Phi_1 + N^{(1)}\Phi_2$$

(6.77)

$$\Phi^{(2)} = N^{(2)}\Phi_1 + N^{(2)}\Phi_1$$

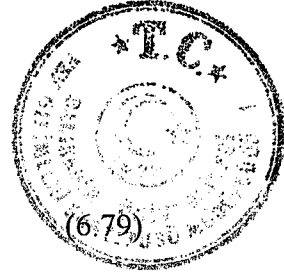
(6.77) denklem takımı açık bir şekilde yazılacak olursa;

$$\Phi^{(1)} = \frac{1}{2}[[1 - \psi^{(1)}]\Phi_1 + [1 + \psi^{(1)}]\Phi_2]$$

(6.78)

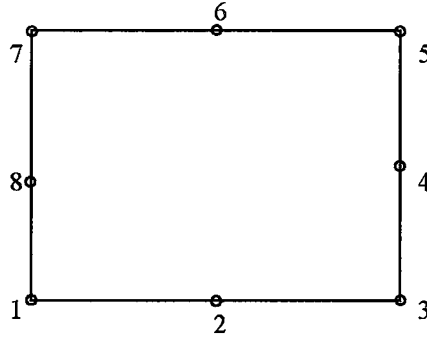
$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2}[[1 + \psi^{(2)}]\Phi_2 + [1 - \psi^{(2)}]\Phi_1]$$

Elemanlar arasındaki ortak sınır boyunca;



$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \left[[1 + \psi^{(2)}] \Phi_2 + [1 - \psi^{(2)}] \Phi_1 \right]$$

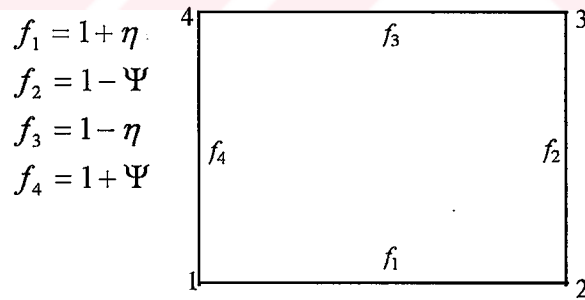
Sekiz düğüm noktasına sahip elemanlar, ifade eden polinomlar kuadratik olduğu için kuadratik elemanlardır.



Şekil 6.7 Kuadratik eleman

Şekil fonksiyonlarının çıkarılması için önceki basit elemanlarda olduğu gibi denklem takımlarının çözülmesi gerekir. Kuadratik şekil fonksiyonu;

$$N_{\beta} = (\alpha_1 + \alpha_2 \Psi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \Psi \eta) (a_1 + a_2 \Psi + a_3 \eta) \quad (6.80)$$

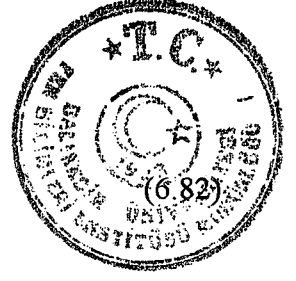


$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + \eta \\ f_2 &= 1 - \Psi \\ f_3 &= 1 - \eta \\ f_4 &= 1 + \Psi \end{aligned}$$

Şekil 6.8 Eleman sınır fonksiyonları

$$F_i = \begin{cases} f_k ; \beta \text{ nolu düğüm noktası } k \text{ üzerinde değil} \\ 1 ; \beta \text{ nolu düğüm noktası } k \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (6.81)$$

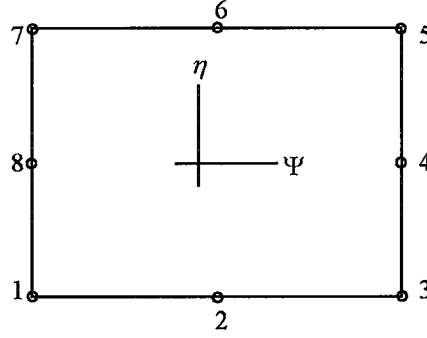
olarak tanımlanır. Böylece şekil fonksiyonu;



$$N_{\beta} = \left[\prod_{j=1}^4 F_j \right] (a_1 + a_2 \Psi + a_3 \eta + a_4 \Psi^2 + a_5 \eta^2)$$

olarak bulunur.

Sekiz düğüm noktasına sahip eğri kenarlı bir eleman için aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 6.9 Eğri kenarlı eleman

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1 - \Psi)(1 - \eta)(\Psi + \eta + 1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \Psi^2)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \Psi)(1 - \eta)(\Psi - \eta - 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \Psi)$$

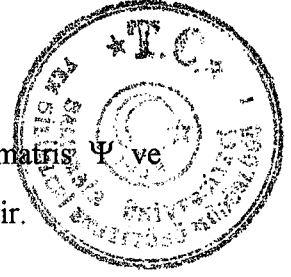
$$N_5 = \frac{1}{4}(1 + \Psi)(1 + \eta)(\Psi + \eta - 1)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \Psi^2)(1 + \eta)$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1 - \Psi)(1 + \eta)(\Psi - \eta + 1)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \Psi)$$

(6.83)



Şekil fonksiyonlarının türevleri aşağıdaki gibi alınır. Jacobien matris Ψ ve η 'nin fonksiyonudur. Transformasyon eşitliği (6.85) bağıntısında verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \Psi} \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Psi} & \frac{\partial y}{\partial \Psi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

$$x = R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_3 X_3 + R_4 X_4 \quad (6.85)$$

X : Eleman köşelerinin x koordinatları

R : Eleman şeklini tanımlayan fonksiyonlar

x ve R'lerin türevi alınır;

$$\frac{\partial x}{\partial \Psi} = \frac{\partial R_1}{\partial \Psi} X_1 + \frac{\partial R_2}{\partial \Psi} X_2 + \frac{\partial R_3}{\partial \Psi} X_3 + \frac{\partial R_4}{\partial \Psi} X_4 \quad (6.86)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki terimler aşağıda açık şekilde tanımlanmıştır.

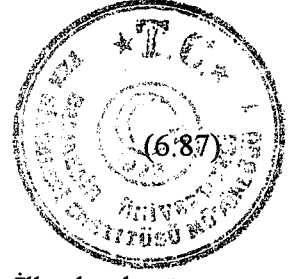
$$\frac{\partial R_1}{\partial \Psi} = -\frac{1-\eta}{4}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \Psi} = \frac{1-\eta}{4}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \Psi} = \frac{1+\eta}{4}$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial \Psi} = -\frac{1+\eta}{4}$$

Bu tanımlamalar (6.86) denkleminde uygulanırsa, (6.87) denklemi elde edilir.



$$\frac{\partial x}{\partial \Psi} = \frac{-(1-\eta)X_1 + (1-\eta)X_2 + (1+\eta)X_3 - (1-\eta)X_4}{4}$$

Eleman denklemlerinin elde edilmesi için aşağıdaki yol izlenir. İlk olarak yüzey ve hacim integrallerinin alınması gerekir.

$$[k^{(\infty)}] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega + \int_{\Gamma_1} h [N]^T [N] d\Gamma$$

$$\{f^{(\infty)}\} = \int_{\Gamma_2} h T_{\infty} [N]^T d\Gamma \quad (6.88)$$

$$[c^{(\infty)}] = \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega =: \det[J] : t d\Psi d\eta$$

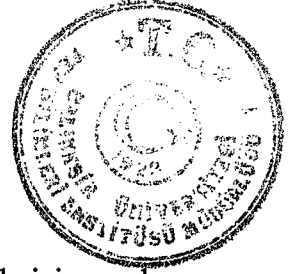
Böylece hacim integral terimi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] : \det[J] : d\eta d\Psi$$

(6.89)

$$\int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T [N] : \det[J] : d\eta d\Psi$$

İntegralin Ψ ve η cinsinden yazılabilmesi entegrasyon sınırlarının basitleşmesi sonucunu getirir.



6.7 Zamana Bağlı Problemler

Şimdiye kadar incelenen problemlerde alan değişkenlerinin yalnızca koordinatlara bağlı olarak değiştiği göz önüne alınmıştı ama bazı mühendislik problemlerinde alan değişkenleri (sıcaklık, nem, basınç,...) zamana bağlı olarak da değişir. Bu durumlarda, belirli bir noktada alan değişkeni veya alan değişkeni değerlerinin potansiyel farkı nedeniyle oluşan akılar da zamana bağlı olarak değişir. Bu tür problemlere zamana bağlı problemler denir. Ani soğutma işlemine tabi tutulan bir üründeki sıcaklık ve gerilme değişimi, içten yanmalı bir motor silindirindeki sıcaklığın periyodik değişimi sonucu cidardaki sıcaklık dağılımı zamana bağlı problem örnekleridir.

Zamana bağlı problemlerin çözümü için, herhangi bir zamanda (genellikle işlemin başlangıç anı olan $t=0$ anında) problemin başlangıç sınır şartı verilmeli ve bu şart incelenen sistemin her noktasında gerçekleşmelidir.

Zamana bağlı ısı transfer denklemini ele alacak olursak iki boyutlu problemde;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q = k_c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.90)$$

Başlangıç şartı;

$$t=0 \text{ anında } T=T_0(x,y) \quad (6.91)$$

Sınır şartları;

$$T=T_0(x,y,t) \quad (6.92)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + j_q + h(T - T_\infty) = 0 \quad (6.93)$$

olarak yazılır. $k_c = \rho c_p$ şeklinde olup, ρ özgül kütle, c_p ısı kapasitesidir. Burada verilen dört denklemle açıklanan problem için varyasyonel denklem olmadığından sonlu eleman denklemini türetmek için Galerkin yaklaşımına başvurulur ve bu yapılırken koordinat ifadelerinde sonlu eleman, zaman ifadelerinde sonlu farklar yaklaşımı kullanılır. Bir eleman içindeki sıcaklık değişimi;

$$T^{(\infty)} = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) T_i(t) = [N] \{T\}^{(\infty)} \quad (6.94)$$



olduğu kabul edilir. Burada n , elemandaki düğüm sayısıdır. Galerkin yaklaşımından zamanın herhangi bir anında;

$$\int_{\Omega^{(\infty)}} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q - k_c \frac{\partial T}{\partial t} \right] d\Omega^{(\infty)} = 0 \quad (6.95)$$

yazılır. Burada $\Omega^{(\infty)}$, (∞) elemanı bölgesini gösterir. Bu denklemlere daha önceden açıklanan standart işlemler uygulanır ve

$$\int_{\Omega^{(\infty)}} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] d\Omega^{(\infty)} = 0$$

ifadesi kısmi entegrasyon kuralıyla çözülür ve sınır şartları da eklenirse eleman denklemleri;

$$[K_T]^{(\infty)} \{T\}^{(\infty)} - [K_c] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^{(\infty)} = \{q\}^{(\infty)} - \{j_q\}^{(\infty)} - [K_h]^{(\infty)} \{T\}^{(\infty)} + \{K_\infty\}^{(\infty)} \quad (6.96)$$

olarak yazılır, bu denklem;

$$-[K_c] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^{(\infty)} \quad (6.97)$$

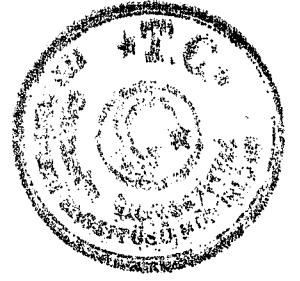
Buradaki $[K_c]$ matrisinin değeri Tablo 6.1'deki bilgiler yardımıyla ve üçgen sonlu eleman için aşağıdadır;

$$K_{c_{ij}} = \int_{\Omega^{(\infty)}} k_c N_i N_j dx dy = \frac{k_c^{(\infty)} \Delta^{(\infty)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

Benzer ifadeleri bir boyutlu problem için de elde etmek amacıyla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k_c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.99)$$

diferansiyel denklemini;



$$t = 0 \text{ anında } T = T_0$$

$$x = x_0 \text{ ve } t > t_0 \text{ anında } T = T_{x_0} \text{ veya } k_{x_0} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (6.100)$$

$$x = x_L \text{ ve } t > t_0 \text{ anında } T = T_{x_L} \text{ veya } k_{x_L} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla çözecek olursak yine;

$$-[K_c] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^{(\infty)} \quad (6.101)$$

terimi dışında kararlı, bir boyutlu problemin sonlu eleman denklemlerine ulaşılır:

$$[K_T]^{(\infty)} \{T\}^{(\infty)} - [K_c] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^{(\infty)} = \{q\}^{(\infty)} \quad (6.102)$$

Buradaki K_c matrisinin değeri ise lineer çizgi eleman için Tablo 6.1'deki bilgiler yardımıyla;

$$K_{c_{ij}} = \int_{L^{(\infty)}} k_c N_i N_j dx = \frac{k_c^{(\infty)} L^{(\infty)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi zamana bağlı problemleri genel olarak;

$$[K]\{T\} + [C]\{T'\} + \{J\} = 0 \quad (6.104)$$

matris denklemleri formunda yazmak mümkündür. Böylece kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilen problem çözümü daha kolay olan adi diferansiyel denklem formuna dönüştürülmüş olur. Bu denklemlerde alan değişkeni olan T 'nin zaman içinde ilerletilmesi hem koordinat hem de zaman adımlarına bağlıdır.



Zaman adımlarının belirlenmesinde ileri, geri, merkezi, farklar kullanıldığından tüm bu yaklaşımları içine alan ve (6.104) denkleminin zaman içinde ilerletilmesini sağlayan denklem aşağıdadır.

$$\theta \{T\}_{n+1} + (1 - \theta) \{T\}_n = \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \quad (6.105)$$

Burada Δt zaman aralığı, θ ilerlemenin türünü gösteren 0 ile 1 arasında bir katsayı, n ise zaman düzeyidir. Bu bağıntı;

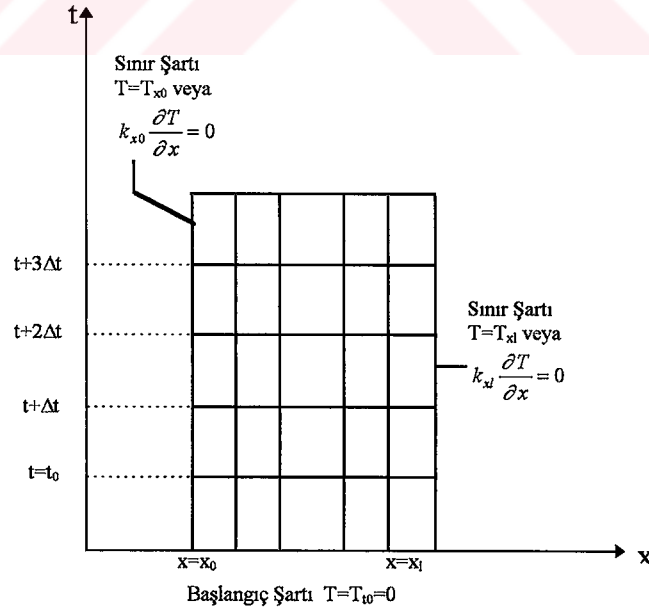
$\theta = 0$ ise; ileri farklar (Euler veya tam açık)

$\theta = 1$ ise; geri farklar (tam kapalı)

$\theta = 1/2$ ise; merkezi farklar (Crank-Nicolson veya yarı açık-yarı kapalı)

$\theta = 2/3$ ise; Galerkin

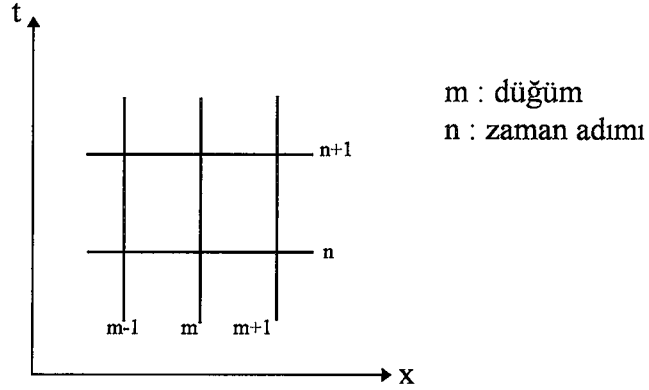
yöntemine dönüşür. Denklem (6.104) ve (6.105)'den görüleceği gibi başlangıç şartının verilmesinden sonra herhangi bir noktada $t + \Delta t$ zamanındaki sıcaklık, iki komşu noktada t zamanındaki sıcaklıklar yardımıyla hesaplanır. Örnek olarak geri farklar yöntemiyle bu durum tek bir düğüm için Şekil 6.11 de gösterilmiştir.



Şekil 6.10 Bir boyutlu zamana bağlı problem için çözüm bölgesi



Buradan görüleceği gibi sonucun hassasiyeti koordinat ve zaman adımlarına bağlıdır. Bu adımların büyük seçilmesi çözümün kısa zamanda elde edilmesini sağlar ama bu hem sonuçların hassasiyetini azaltır hem de çözümde osilasyonların oluşmasına yol açar. Allaire [13], Şekil 6.12’de verilen ve tam çözümü;



Şekil 6.11 Geri farklar yöntemi için hesaplanan düğümler

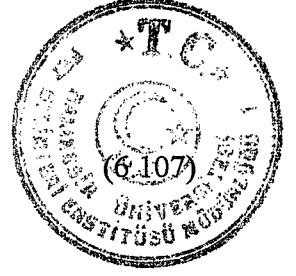
$$T = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{\left[\frac{k(2n+1)^2 \pi^2 t}{\rho c L^2} \right]} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \quad (6.106)$$

olan bir boyutlu zamana bağlı;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

şeklindeki ısı transferi probleminin çözümünde Δt 'nin etkisini incelemiş ve Δt 'nin 800, 400, 200 ve 100 saniye seçildiği dört ayrı zaman adımı için sonuçları tam çözüm sonuçlarıyla karşılaştırmıştır (Tablo 6.2).

Görüldüğü gibi zaman adımının 800 s alındığı durum için çözümde osilasyonlar oluşturmuştur ki bu arzu edilmeyen bir durumdur. Ancak zaman adımlarının çok küçük seçilmesi durumunda hesaplama zamanı artacağından bu değer olabildiğinden de küçük seçilmemesi gerekir. Ancak bilgisayar kapasitesi ve işlem hızı günümüzde hızla arttığından küçük zaman adımlarının seçimi büyük sorun yaratmaz. Literatürde [13] zaman adımı kriteri olarak bir boyutlu problemlerde;



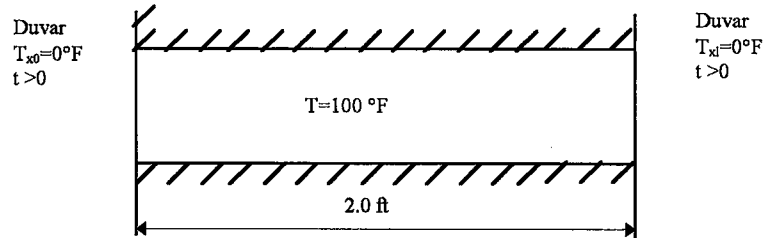
$$\Delta t \leq \left(\frac{L^2 k_c}{2 k_x} \right)$$

iki boyutlu problemlerde;

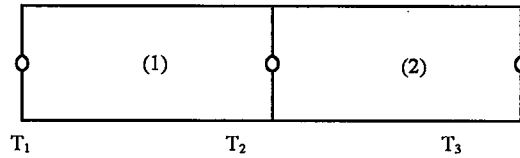
$$\Delta t \leq \left(\frac{L^2 k_c}{4 k_x} \right) \quad (6.108)$$

bağıntısı verilmiştir.

Zienkiewicz yukarıda verilen (6.108) bağıntısı ile ifade edilen iterasyon yönteminin $\theta \geq 1/2$ değerleri için şartsız olarak dengeli bir yöntem olacağını gösterdiğinden bu yöntemler arasında en yaygın olarak kullanılan Crank-Nicolson yöntemi olmuştur ama bu yöntemde de Δt zaman aralığının büyük seçilmesi durumunda çözümde osilasyonların olabileceği unutulmamalıdır. Bu tür osilasyonların söndürülmesi amacıyla Wood ve Lewis tarafından değişik yöntemler ileri sürülmüştür. Bu yöntemler ortalama bir çözüm ile çözüme devam etme esasına dayalı olup, söz konusu osilasyonları kısmen söndürebilme niteliğindedir. Osilasyonların ortaya çıkmasına rağmen bunların Crank-Nicolson yönteminde olduğu kadar etkin olmadığı bir yöntem Zienkiewicz tarafından θ sayısı $2/3$ alınarak kullanılmıştır. Bu yöntem de Crank-Nicolson yöntemi kadar olmasa bile şartsız olarak dengeli olması nedeniyle yaygın biçimde kullanılmaktadır.



(a)



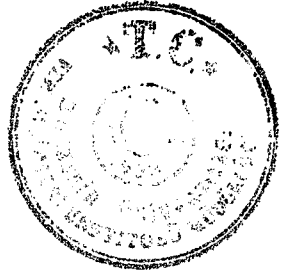
(b)

Şekil 6.12 İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı iletim problemi [13]



Tablo 6.2 İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı iletim probleminin değişik zaman adımlarında elde edilen iki elemanlı ileri farklar çözümlerinin tam çözümle kıyaslanması [13]

Zaman s	Durum 1 $\Delta t=800$	Durum 2 $\Delta t=400$	Durum 3 $\Delta t=200$	Durum 4 $\Delta t=100$	Tam Çözüm
100				89.61	94.35
200			79.23	70.99	75.83
300				56.24	58.96
400		58.45	46.30	44.55	45.65
500				35.30	35.36
600			27.06	27.96	27.35
700				22.15	21.16
800	16.89	9.87	15.82	17.55	16.37
900				13.90	12.67
1000			9.24	11.02	9.81
1100				8.73	7.59
1200		1.67	5.40	6.91	5.87
1300				5.48	4.54
1400			3.16	4.34	3.52
1500				3.44	2.72
1600	-11.18	0.28	1.85	2.72	2.11
1700				2.16	1.63
1800			1.08	1.71	1.26
1900				1.35	0.98
2000		0.05	0.63	1.07	0.76
2100				0.85	
2200			0.37	0.67	
2300				0.53	
2400	7.41	0.01	0.22	0.42	



7. SONLU ELEMANLAR PROGRAMI

Problemin çözümü aşağıdaki kabuller ve sınır şartları altında yapılmıştır.

1- Soğutma başlangıcında malzemenin tümü sabit bir sıcaklık dağılımına sahiptir.

2- Optimal nozul düzeni sağlanarak tüm yüzeyde ısı taşınım katsayısı sabit bir değerdedir.

3- Malzeme yatay pozisyonda ve hareketsiz durmaktadır.

4- Hem üstten hem de alttan uygulanan soğutma miktarı birbirine eşit olduğundan malzeme simetriktir.

5- Isıtma bölümünden soğutma bölümüne geçişte ısı kaybı yoktur.

Çeşitli kalınlıklara sahip levha camlar 88 dörtgen ve 176 üçgen elemana bölünerek hem üçgen hem de dörtgen elemanlar için çözümleme yapılmıştır. Sıcaklık farkının büyük olduğu yüzeye yakın kesit bölümleri daha sık elemanlara bölünerek sıçramalar engellenmiştir.

Sonlu elemanlar programı modüler olarak hazırlanmıştır. Hesaplama adımları değişik alt programlara bölünerek program kontrolünde ve aksaklıkların belirlenmesinde kolaylık sağlanmıştır.

Programın çalışması ve algoritması aşağıdaki gibidir.



1- Eleman tipi, elemandaki düğüm noktası sayısı, problem tipi, taşınım ile ısı transferi olup olmadığını belirten parametre, zaman parametresi ve eleman rijitlik matrisi parametresi data dosyasından okunur.

2- Sonlu elemanlar ağı otomatik olarak oluşturulacak ise X ve Y yönündeki eleman sayıları ve eleman boyları; sonlu elemanlar ağını kendimiz oluşturuyor isek sonlu eleman sayısı, düğüm noktası sayısı, konnektivite tablosu ve düğüm noktası koordinatları data dosyasından okunur.

3- Isı transfer katsayıları, film katsayısı, hava sıcaklığı ve ısı kaynağı parametresi data dosyasından okunur.

4- Taşınım ile ısı transferi olan eleman sayısı ve koordinatları, zaman adımı, zaman parametresi ve zaman sonu data dosyasından okunur ve giriş bilgileri sonuç dosyasına yazdırılır.

5- Başlangıçtaki düğüm noktası sıcaklıkları okunur.

6- Entegrasyon noktalarındaki şekil fonksiyonları ve türevleri okunur.

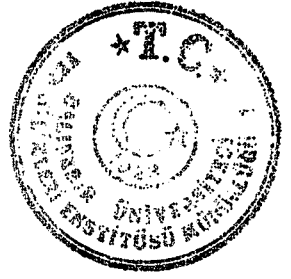
7- Her eleman için iletim ve taşınım değerleri matrisi hesaplanır.

8- Hesaplanan eleman matrisi global matrise ilave edilir.

9- Sınır şartlarının tanımlandığı düğüm noktaları elemanlar için sınır koşulları okunur.

10- Sınır şartlarına göre sistem denklem takımlarının yeniden düzenlenerek çözülmesi.

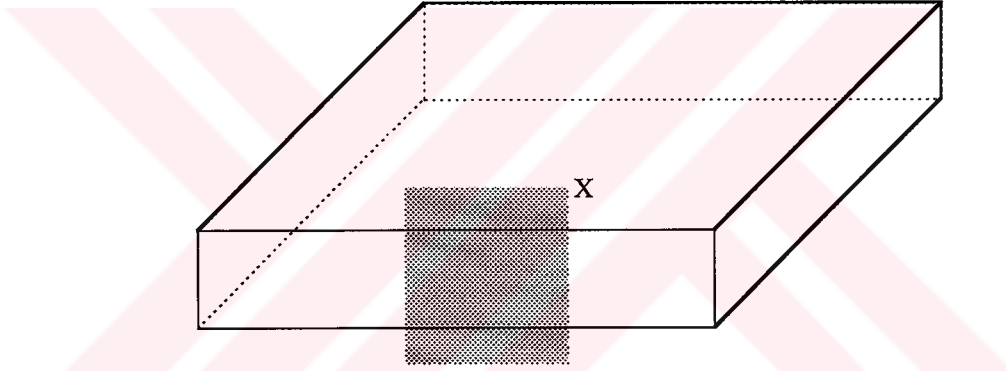
11- Zaman ilerlemesi ile bir önceki hesaplanan değerler dikkate alınarak işlemin tekrarlanması.



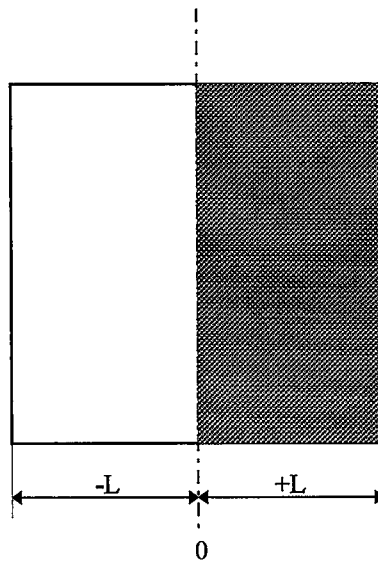
12- Sonuçların sonuç dosyasına yazılması.

Soğutma işlemi uygulanan malzeme yüzeyinde homojen bir soğutma elde edildiği varsayıldığından, kesitteki sıcaklık dağılımları ön plana çıkmaktadır. Şekil 7.1 ile gösterilen malzemedeki gölgeli alan göz önüne alınmaktadır. Simetri özelliğinden dolayı da yarı kesit hesaplaması yapmak da yeterli olacaktır (Şekil 7.2).

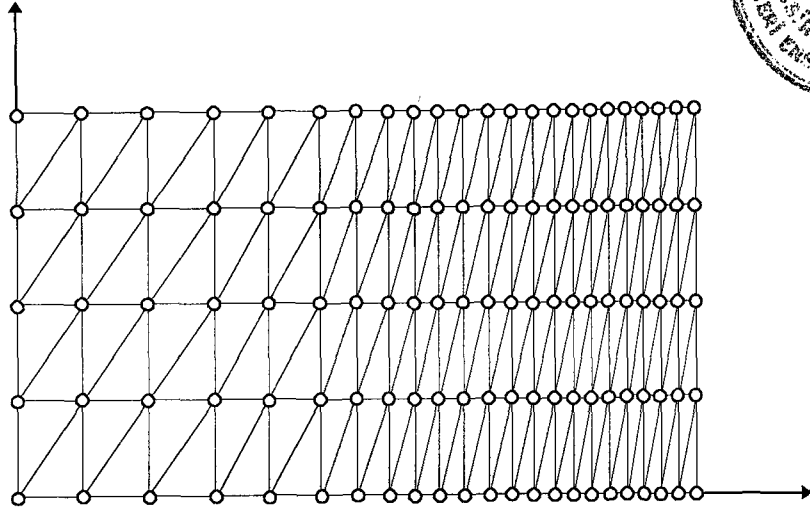
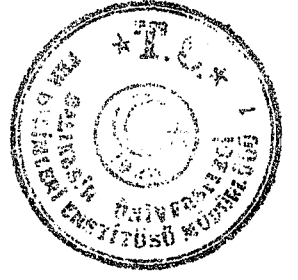
Kesitteki sıcaklık ve gerilme dağılımının bulunması için malzeme sonlu sayıda üçgen veya dörtgen elemanlara bölünerek sonlu elemanlar ağı teşkil edilmiş ve hesaplamalar yapılmıştır (Şekil 7.3).



Şekil 7.1 Levha cam

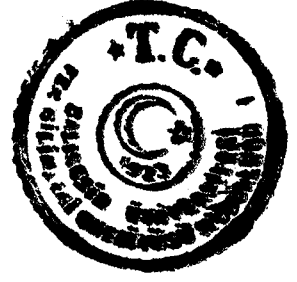


Şekil 7.2 X görünümü



Şekil 7.3 Sonlu elemanlar ağı

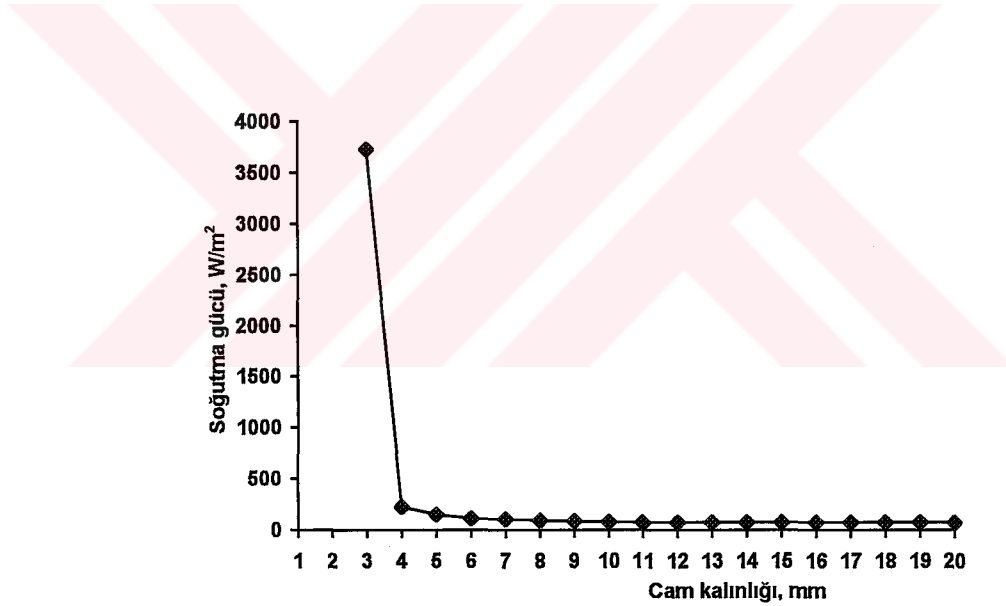




8. TEORİK ANALİZ SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

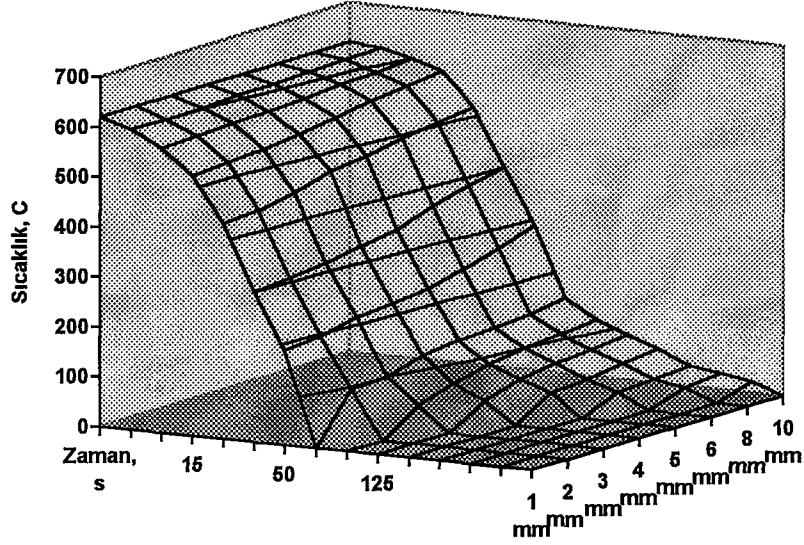
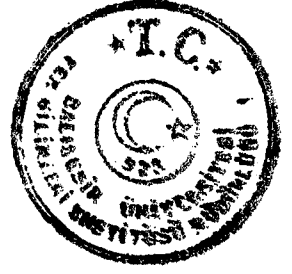
Elde edilen sayısal değerler incelenirse aşağıdaki neticelere varılabilir.

Farklı kesit kalınlıklarına sahip levha camlara soğutma işlemi uygulandığında kesit kalınlığı azaldıkça işlem süresi kısıtlı hale geldiğinden az zamanda çok fazla ısı çekme zorunluluğu vardır. Buna bağlı olarak aşırı güç ihtiyacına gereksinim ortaya çıkacaktır. Görüleceği üzere, kesit kalınlığı ile soğutma gücü ters orantılı olarak değişmektedir (Şekil 8.1).



Şekil 8.1 Temperlemede gerekli güç ihtiyacı

İstenilen ısı ve mekanik özelliklere sahip mamul elde edilmesi için ani soğuma gerektiğinden dolayı işlemin kısa sürede gerçekleştirilmesi zorunluluğu vardır. Kesit kalınlığı arttığı müddetçe kullanılabilir zaman aralığı artmaktadır. Yani levha cam kalınlığı ile işlem zamanı doğru orantılı olarak değişmektedir (Şekil 8.2).

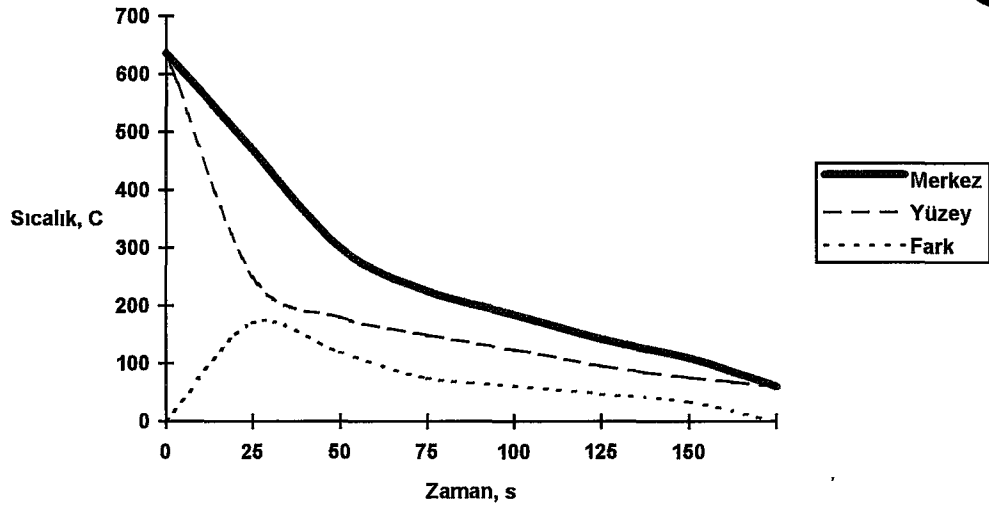
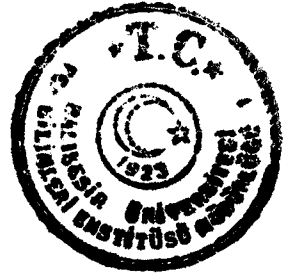


Şekil 8.2 Kalınlığa bağlı olarak soğuma zamanının değişimi

Yüzeyden havaya ısı transferi oldukça büyük olduğundan dolayı yüzeydeki düğüm noktası sıcaklıkları iç kısımdaki düğüm noktası sıcaklıklarına göre oldukça düşüktür. Gerçek proseste de aynı durum söz konusudur (Şekil 8.2).

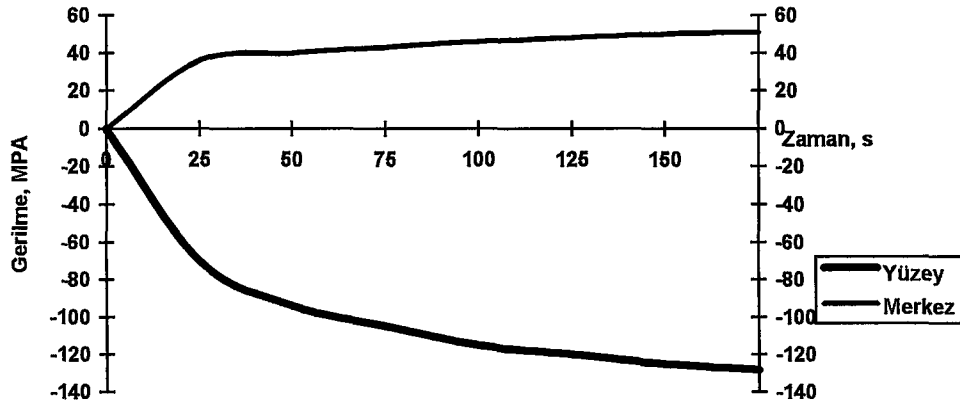
Malzeme kesitinde merkeze doğru ilerledikçe düğüm noktaları sıcaklıkları artmaktadır. Yani yüzeye yakın kısımlar daha soğuktur. Bunun nedeni de taşınım ile ısı transferi oranının iletim ısı transferi oranından oldukça büyük olmasıdır (Şekil 8.3).

Ani soğutma işleminde sıcaklık farkına bağlı olarak ısıl genişleme özelliğine göre oluşan ısıl gerilmeler yüzeyde farklı iç kısımlarda farklı şekilde oluşmaktadır. Başlangıçta gerilmemiş hal mevcut iken zamanla bu değerler tersine dönmekte ve yüzeyde basınç gerilmeleri iç kısımda çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Sıcaklık gradyanının ani bir şekilde düşmesi nedeni ile gerilme oluşumları da ona paralel olarak soğutmanın ilk anlarında oluşmaktadır (Şekil 8.4).

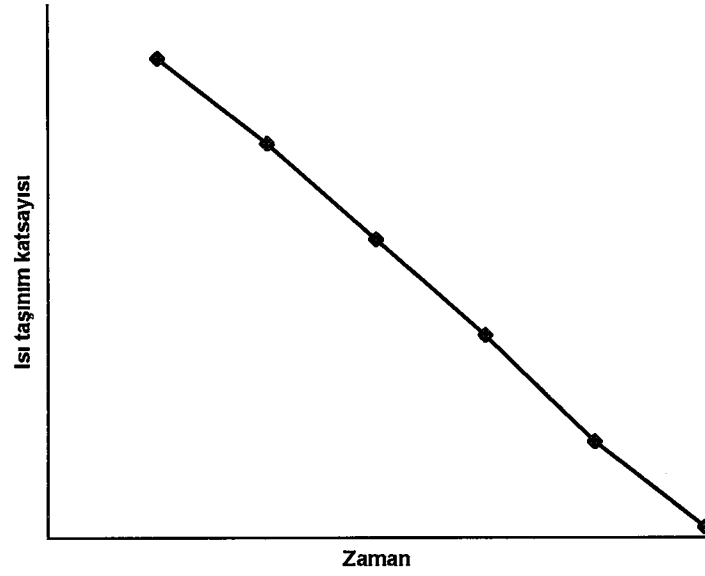
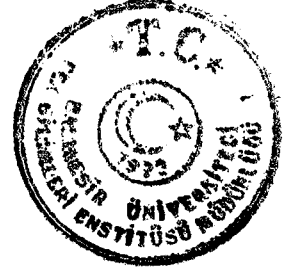


Şekil 8.3 Kesitteki sıcaklık dağılımı (kalınlık=6 mm)

Yatay pozisyonda tutulan cam alttan ve üstten aynı oranda soğutulduğu için levha cam kesitinde simetri özelliği mevcuttur. Bu nedenle yarı kesit hesaplaması yapmak yeterlidir. Elde edilen sonuçlar diğer yarı kesit için de geçerlidir.



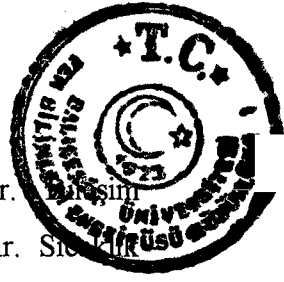
Şekil 8.4 Kesitteki gerilme dağılımı (kalınlık=6 mm)



Şekil 8.5 Soğuma zamanına bağlı olarak ısı taşınım katsayısının değişimi

Temperleme işlemi uygulanan cam kalınlığı, soğutma zamanı ile ilişkili olarak, ısı transfer miktarını ve buna bağlı olarak da ısı taşınım katsayısını belirlemektedir. Kesit kalınlığı küçük olan camlarda kalın kesitli camlara nazaran daha kısa zamanda soğutmanın yapılması gerekmektedir. Dolayısıyla yüksek ısı taşınım katsayılarının elde edilmesi gerekmektedir. Soğutma zamanı fazla ise daha düşük ısı transfer katsayılarında işlem gerçekleştirilebilir (Şekil 8.5).

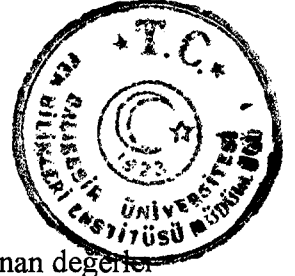
Isı taşınım katsayıları değerleri büyük olması durumunda oluşan malzeme gerilmeleri değerleri de büyük olmaktadır. Isıl şok miktarı sınır değerleri aşması durumunda malzemede bozulmalar oluşacaktır. Bozulmanın şekli ani ve patlama şeklinde olmaktadır. Kullanılan yarı mamül malzemenin fiziksel ve ısıl özellikleri camın hammaddenin eritilip üretilmesi ve soğutulması sırasında tam bir homojenlik elde edilememesi nedeniyle bu kırılma sınırlarını tam tespit etmek mümkün değildir. Bu nedenle kimyasal bileşimlerine göre belirli sınır değerler içinde tecrübi değerlerle bu noktalar yaklaşık değerler olarak verilebilir.



Malzemenin ısı genleşme katsayıları sıcaklıkla değişmektedir. maddeleri ve oranları da ısı genleşme katsayıları ile yakından alakalıdır. Sıcaklık değeri 650-670 °C'nin üzerine çıktığında fazla bir değişim olmamaktadır. Temperleme aralığı da 620-640 °C sıcaklık değeri başlangıç sıcaklığı alınarak saptanmaktadır. Ani soğutma işlemi uygulandığında yüzeydeki büzülme oranı iç kısımlardan daha fazla olduğu için ısı şok nedeniyle oluşan mikro çatlaklar sıkıştırılmakta ve böylece malzeme yüzeyinde ön basınç gerilmeleri oluşurken iç kısımda da çekme gerilmeleri oluşmaktadır.

Kesit kalınlığı arttıkça ısı taşınım katsayılarının sahip olduğu değerler arasında küçük farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Hesaplanan malzeme kesitindeki sıcaklık dağılımları pratikteki değerlerden bir miktar büyük çıkmaktadır. Bunun nedeni de kalınlık artışı ile radyasyon ısı transfer oranının artmasıdır.

Çözümleme yapılan malzemedeki eleman sayısı arttıkça çözüm hassasiyeti artmaktadır. Eleman uzunlukları ve zaman adımları büyük seçilirse değerler arasında büyük farklılıklar oluşmakta ve hatta osilasyonlar oluşmaktadır. Bu nedenle elemanları mümkün mertebe küçük ve çok sayıda seçmekte fayda vardır.



9 SONUÇ VE ÖNERİLER

Belirlenen sınır şartları ve başlangıç şartlarında sayısal olarak bulunan değerler yapısal model tarafından hesaplanmış olan [4-10] değerlerle karşılaştırıldığında oldukça yakın değerlere ulaşıldığı görülmektedir.

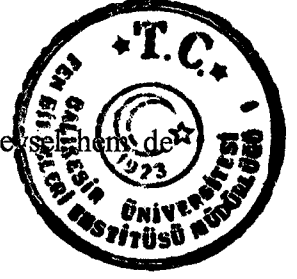
Modelimizde ele alınan malzeme levha halinde homojen özelliklere sahiptir. İki boyutlu analiz yapılması yeterlidir. Levhanın her iki yüzeyinde homojen bir soğutma yapıldığı kabul edildiği için orta kesite paralel hatlardaki sıcaklık ve gerilme değerlerinin birbirine eşit olması gerekir. Bu nedenle zaman parametresi ortadan kaldırılırsa problem tek boyuta indirilebilir. Ancak bunun doğruluğunu ispat için iki boyutta ve zamana bağlı olarak yapılan hesaplamalarda doğruluğu görülmüştür.

Levha malzemelerde iki boyutlu analiz yapmak yeterli olmakla birlikte değişken kesitli elemanlarda iki boyutlu analiz yeterli olmayacaktır. Daha kesin sonuçlar elde edebilmek için üç boyutlu analiz yapmak yararlı olacaktır.

Soğutma aşamasında pratikte soğutma havası ile birlikte SO_2 ve N_2 gazıda kullanılmaktadır. Bu gazların soğutmaya olan etkisi ihmal edilmiştir.

Çalışmanın olumsuz yönlerini ifade edecek olursak; yapılan hesaplamalar literatürdeki çalışmalarla kıyaslanmıştır. Deneysel ölçümlerle hesaplamaların doğruluğunun teyit edilememiş olması bir eksik noktadır. Ancak elde edilen sayısal değerler mevcut çalışmalarla uyum içindedir. Soğutma esnasında ısı transferinin büyük bir kısmı taşınım yoluyla olmaktadır. Bu da ısı taşınım katsayısının önemini ortaya çıkarmaktadır. Problemin çözümünde belirli ısı taşınım katsayıları ile hesaplama yoluna gidilmiştir.

Soğutma işleminde kullanılan nozul düzeni istenilen ısı taşınım katsayılarının elde edilebilmesi açısından çok önemlidir. Optimal nozul düzeni sağlanamaz ise homojen bir soğutma gerçekleştirilemez. Bu nedenle de tam temperleme sağlanamaz.



Optimal nozul düzeninin elde edilmesinde etkili parametreler hem deneysel hem de sayısal olarak incelenebilir.

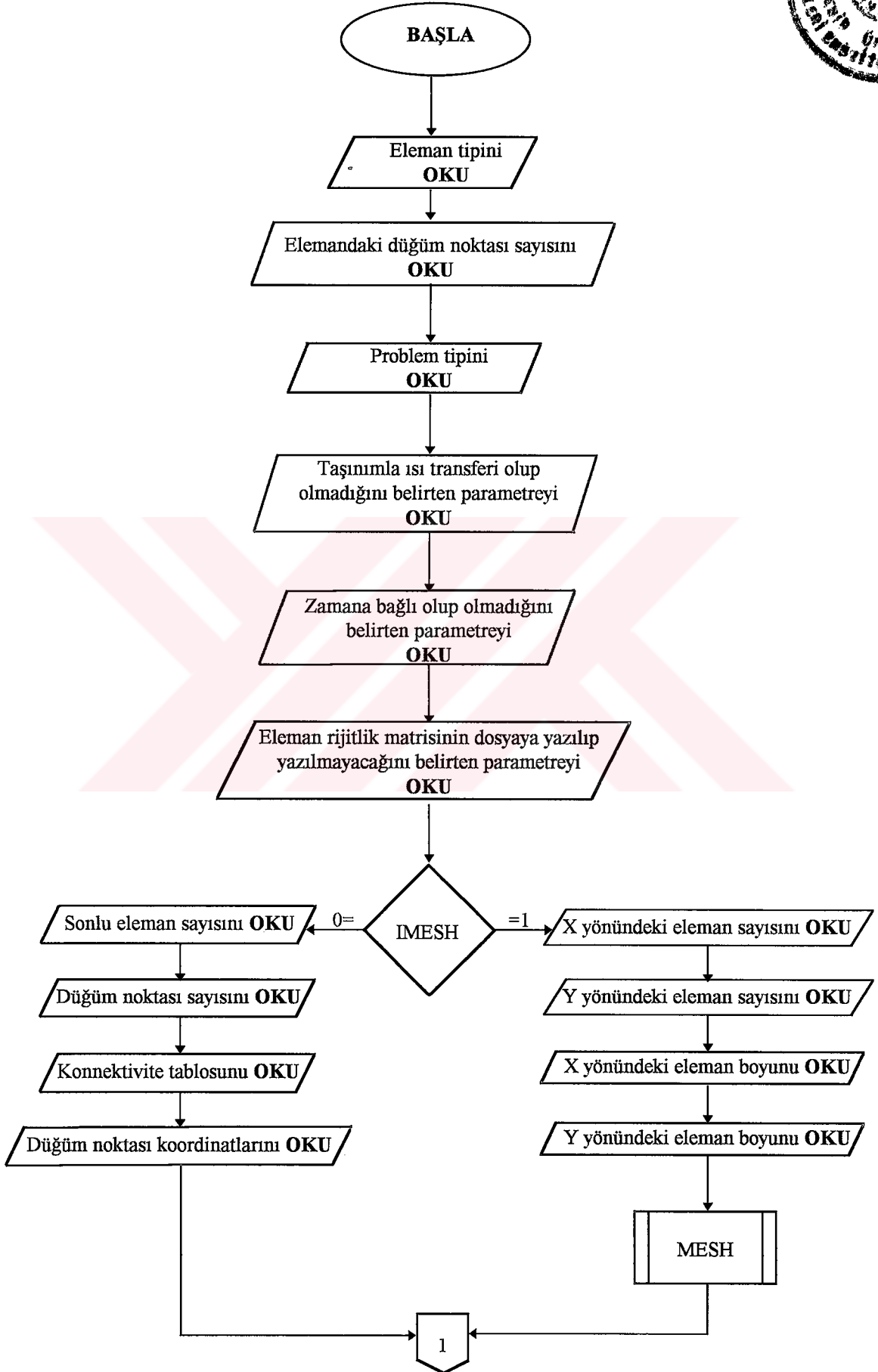
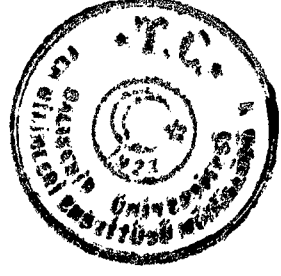
Isı taşınım katsayısı nozul düzeninin, hava basıncının dolayısıyla hava hızının ve hava sıcaklığının bir fonksiyonudur. Bahsi geçen bu parametreler dikkate alınarak optimal nozul düzenini sağlayacak hesaplamaların yapılması ve pratik ölçümlerin alınması yararlı olacaktır.

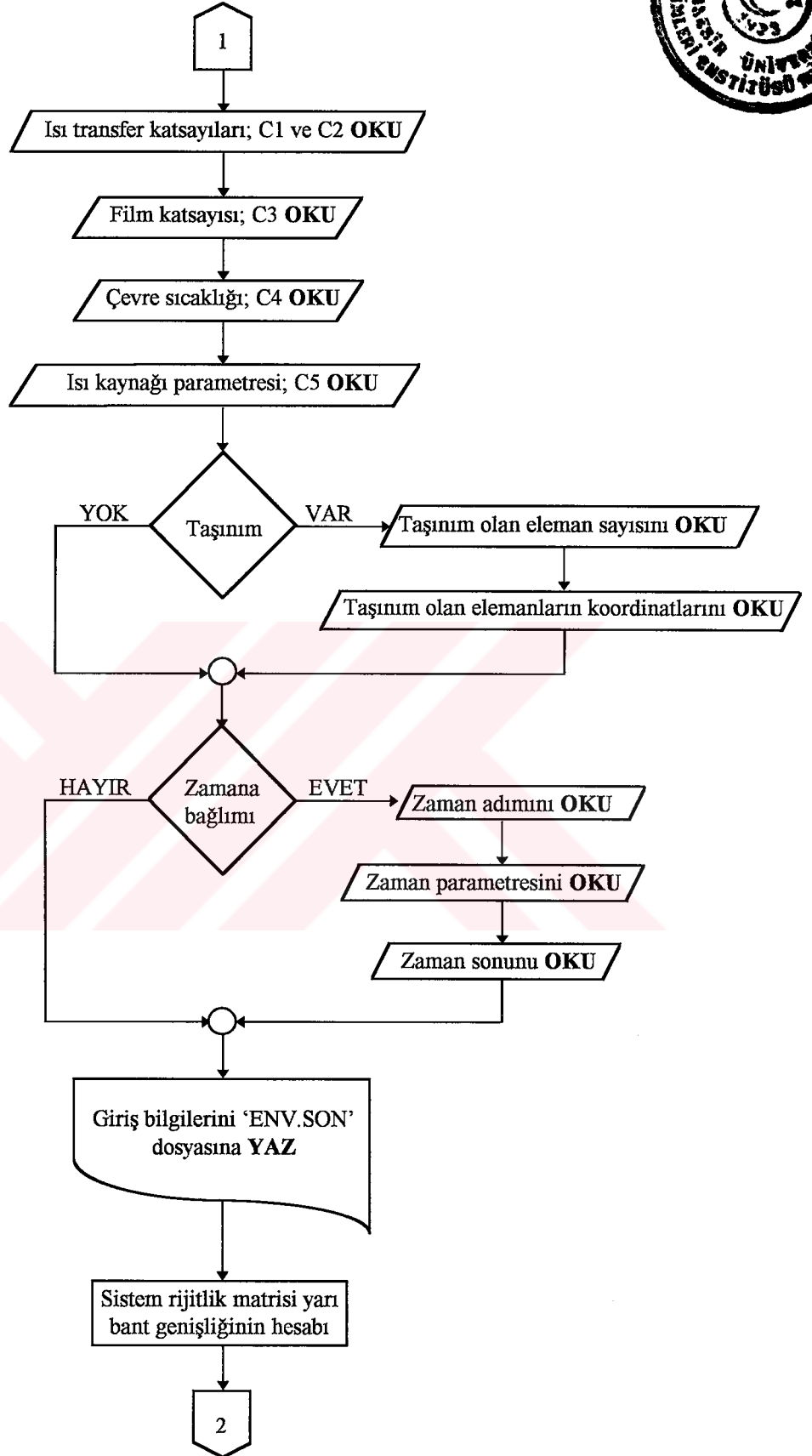
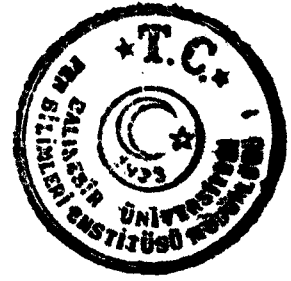
Bunun yanında nozul gruplarında komşu nozullar arasında ölü noktalar oluşmaktadır. Bu noktalarda homojen soğutma gerçekleştirilememektedir. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırma yolları araştırılabilir.

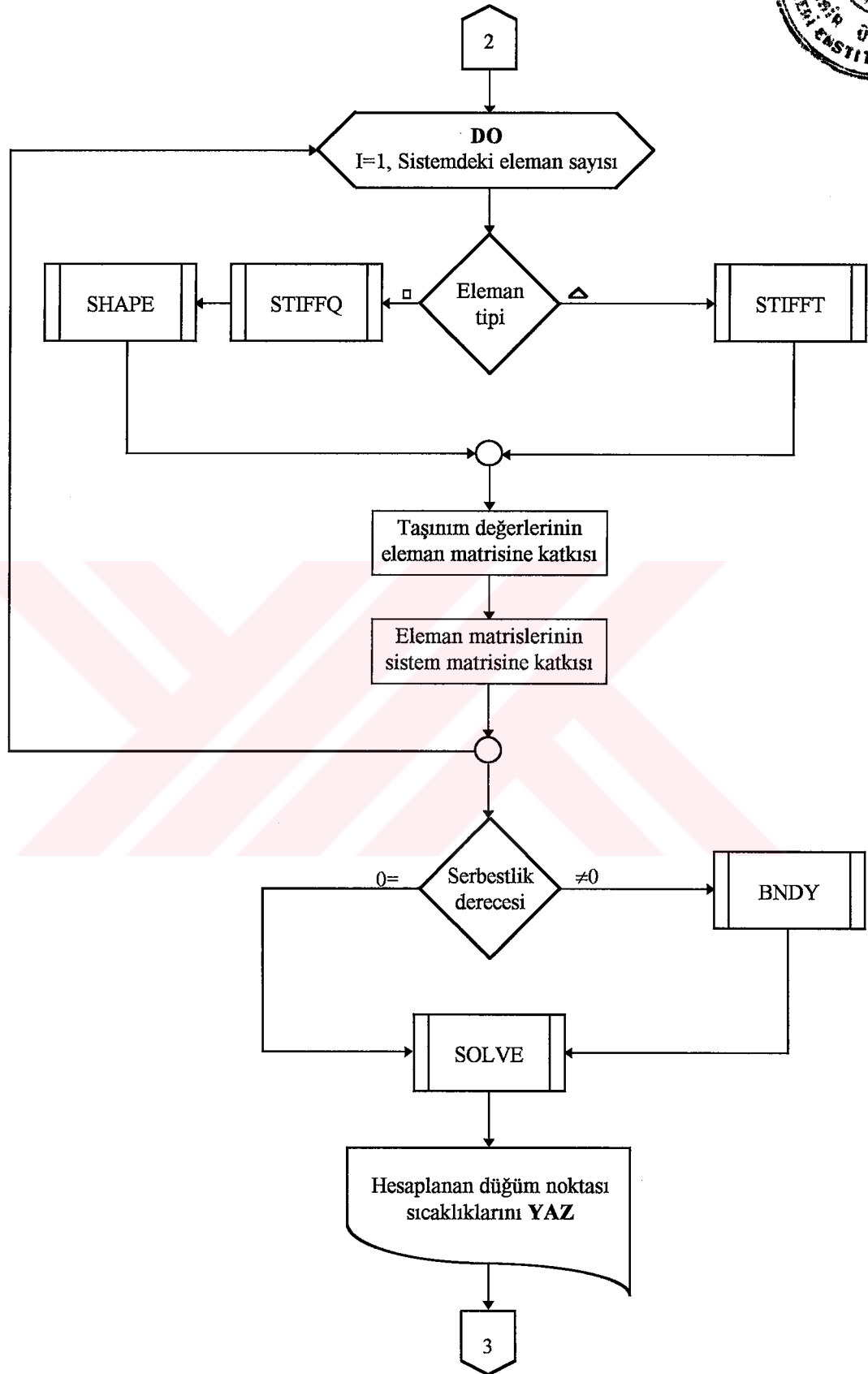
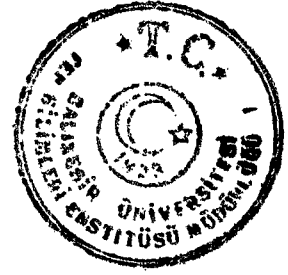
Levha camdaki ısı ve fiziksel değerlerin tespitinde zamana bağlı iki boyutlu hesaplama yoluna gidilmiştir. Malzememiz levha ve simetrik şartlarda olduğu için iki boyutlu çözüm yeterlidir. Ancak farklı geometrik yapıdaki ve değişken kesitli malzemelerde iki boyutlu çözüm yetersiz kalacaktır. Bu nedenle problemin çözümünde üç boyutlu analiz yapılarak bilgisayar programının buna göre oluşturulması gerekmektedir.

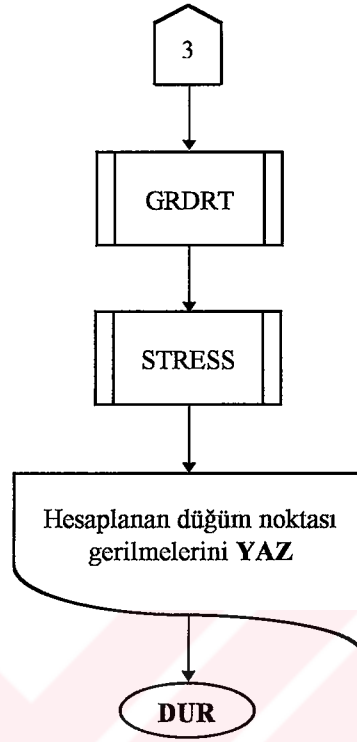
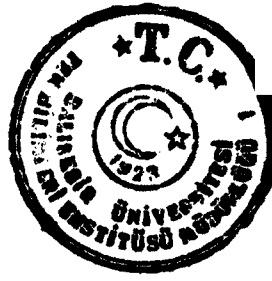
Temperleme işleminde cam malzeme düşey veya yatay pozisyonda işleme tabi tutulmaktadır. Günümüzde tercih edilen durum ise camın yatay pozisyonda olmasıdır. Cam malzeme seramik rulolar üzerinde hareket etmekte ve ısıtma veya soğutma işlemi uygulanmaktadır. Hesaplamalarda malzeme durgun yani hareketsiz kabul edilmiştir. Pratikte malzemenin hareketli olması nedeniyle hesaplamalarda dinamik analiz yapılarak hareket denklemlerinin de hesaba katılması uygun olacaktır.

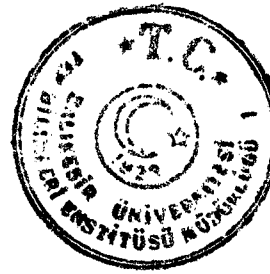
EK A Sonlu Elemanlar Programı Akış Diyagramı







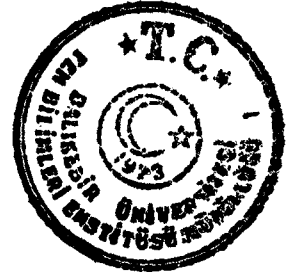




EK B Camın Isıl ve Fiziksel Özellikleri

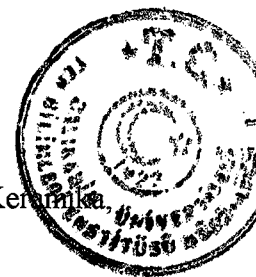
Cam Özellikleri

	Pyroceram	% 96 Silica	Borosilikat	Glass lining
Özgül ağırlık, 77F	2.60	2.18	2.23	2.56
Su absorb., %	0.00	0.00	0.00	----
Gaz geçirgenliği	Geçirmez	Geçirmez	Geçirmez	----
Yumuşama sıcaklığı, °C	1250	1500	1820	----
Özgül ısı, J/kg K	775	746	779	----
Ort. özgül ısı, J/kg K	0.230	0.224	0.233	----
Isıl iletkenlik, W/m K	3.6	----	1.1	----
Lin. ısıl genişleme, $1/°C \cdot 10^{-6}$	5.8	0.79	3.2	----
Elastisite modülü $MPa \cdot 10^3$	119	66	66	40-60
Knoop sertliği, 100 g	698	592	481	480
Knoop sertliği, 500 g	619	477	442	----
Poisson oranı	0.245	0.170	0.20	----
Aşınma direnci, MPa				35-70
Max. işlem sıcak. °C				260
Isıl şok direnci, sıcaklık farkı, °C				152



KAYNAKÇA

- [1] Toydemir, N., Cam (Cam yapı malzemeleri), (İstanbul 1990).
- [2] Kuşçuluoğlu, S., Yücesoy, D., Cam teknolojisine giriş cilt.1-2, Şişecam teknik yayınları, (Nisan 1993).
- [3] Incropera, Frank P. and De Witt, David P., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley and Sons, (1990).
- [4] Guilleminot C., Annealing and Tempering of Glass, Journal of Non-Crystalline Solids, 123, (1990), 415-426, Elsevier Science Publishers B. V., North Holland
- [5] Shutov, A.I., Cooling capacity of water-air mixtures in the process of thin glass quenching, Steklo i Keramika, n.6, (June 1995), 16-18.
- [6] Legoshin, G.M., Prospects of strengthening thin and ultra thin glasses, Steklo i Keramika, n.7, (July 1995), 8-10.
- [7] Gardon, R., Ceramic Bulletin, 66, No.11, (1987), 1594-1599.
- [8] Anon, Overcoming the difficulties in tempering low-E glass, Glass Industry, vol.76, n.2, (February 1995), 14-15.
- [9] Rekhson, S. M., Rekhson, M., Ducroux, J.-P. and Tarakanov, S., Heat transfer effects in glass processing, Ceramic Engineering and Science Proceedings, vol.16, n.2, (March-April 1995), 19-37.
- [10] McMaster, R.A., Flat Glass Tempering-How It Works, Glass Industry, (1989).
- [11] Anon, Dual bending and toughening system meets multiple needs, Glass International, (December 1994), 43.
- [12] Luikov, A. V., Analytical Heat Diffusion Theory, Academic Press, (1968).
- [13] Güneş, M., Bilgisayar destekli olarak çeşitli geometrik şekillere sahip gözenekli ortamlarda kurutma prosesinin incelenmesi, Doktora Tezi, Eylül 1994.
- [14] Reddy, J. N.; An Introduction To The Finite Element Method, McGraw-Hill International Editions, (1989).
- [15] Günay, D., Mühendisler için sonlu elemanlar metodunun temelleri, Sakarya Üniversitesi Yayını, n.003, (1993).
- [16] Shutov, A. I. and Mamatov, A. V., Optimization of glass heating in hardening, Khimicheskie Volokna, n.4, (July-August 1994), 3-4.

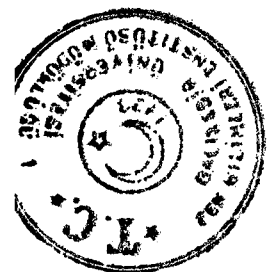


- [17] Shutov, A. I., Solving the problems of thin glass quenching, *Steklo i Keramika*, n.4, (April 1993), 8-9.
- [18] Shutov, A. I., Lalykin, N. V. and Ovchinnikov, A. V., Modification of toughening stresses curve in sheet glass, *Steklo i Keramika*, n.11-12, (November-December 1992), 22-23.
- [19] Shutov, A. I., Lalykin, N. V. and Akhtyamov, A. V., Considering non-linearities of physical constants in algorithm of quenching stress calculation, *Steklo i Keramika*, n.6, (June 1992), 8-9.
- [20] Yamaguchi, T. and Shinagawa, M., Effect of glass addition and quenching on the relation between inductance and external compressive stress in Ni-Cu-Zn ferrite-glass composites, *Journal of Materials Science*, vol.30, n.2, (January 1995), 504-508.
- [21] Land, S., Radical quench system for compact toughener, *Glass*, vol.71, n.9, (September 1994), 346.
- [22] Mauch, F. and Jackle, J., Thermoviscoelastic theory of freezing of stress and strain in a symmetrically cooled infinite glass plate, *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol.170, n.1, (May 1994), 73-86.
- [23] Lee, S. J., Lee, J. H., Lee, D. and Greif, R., Heat transfer from a plate to a fully developed axisymmetric impinging jet, *Enhanced Cooling Techniques for Electronics Applications American Society of Mechanical Engineers, Heat Transfer Division*, vol.263, (1993), ASME, New York, 11-18.
- [24] Kramer, C., and Becker, G., Horizontal toughening design features convective heating, *Glass International*, (September 1993), 51,53-54.
- [25] Miihkinen, V., How heat strengthening differs from tempering, *Glass Digest*, vol.71, n.12, (December 1992), 48-50.
- [26] Anon, Mathematical model of glass toughening optimization, *Steklo i Keramika*, n.1, (January 1993), 16-18.
- [27] Kramer, C., Quenching system for single pane safety glass, *Glass*, vol.69, n.10, (October 1992), 435, 437-438.
- [28] Legoshin, G. M., Glass toughening diagram, *Steklo i Keramika*, n.9, (September 1992), 14-16.
- [29] Gerhardt, S. P., What every modular framer should know about glass, *Ford Motor Co., SAE Transactions*, vol.100, (1991), 689-694.



- [30] Belousov, Yu. L., Firsov, V. A. and Shutov, F. I., Temperature dependence of industrial glasses' modulus of elasticity, *Steklo i Keramika*, n.2, (February 1991), 12-13.
- [31] Shutov, A. I. and Lalykin, N. V., Algorithm of determining instantaneous and residual quenching stresses, *Steklo i Keramika*, n.11, (November 1991), 15-16.
- [32] Shutov, A. I., and Sakulina, E. P., Guaranteed heat transfer coefficients in quenching glass, *Glass and Ceramics* (English translation of *Steklo i Keramika*), vol.43, n.5-6, (January 1992), 239-241.
- [33] Granasy, L., Simplified treatment of transient nucleation in case of rapid quenching, *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol.136, n.3, (December 1991), 266-268.
- [34] Legoshin, G. M., Glass thermal treatment efficiency criterion, *Steklo i Keramika*, n.5, (May 1991), 15-16.
- [35] Boow, J. and Turner, W. E. S., Viscosity and working characteristics of glasses, *Journal of The Society Glass Technology*, (1941).
- [36] Petropoulos, J., Heat transfer through glass and mould during the glass forming process, *Glass International*, (1981).
- [37] Perry, R. H. and Green, D., *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill International Edition, vol.3, 52.
- [38] Shutov, A.I., Potapov, V.I. and Agibalov, V.I., *Economical Cooling Modes in Air-Jet Thin Glass Quenching*, (1989), Plenum Publishing Corporation, Grishmanov All-Union Building Glass Technology Research Inst., Translated from *Steklo i Keramika*, No.12, December, (1988), 4-6.
- [39] Gutzow, I. and Dobreva, A., Structure, Thermodynamic Properties and Cooling Rate of Glasses, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 129, (1991), 266-275.
- [40] McLellan, G.W. and Shand, E.B., *Glass Engineering Handbook*, McGraw-Hill, (1984).
- [41] Maschio, R.Dal and Soraru, G.D., Influence of a thermal tempering process on radial crack formation by indentation in plate glass, *Physics and Chemistry of Glasses*, Vol. 30, No.2, (April 1989).
- [42] Weinberg, M.C., Zelinski, B.J. and Uhlmann, D.R., Critical Cooling Rate Calculations for Glass Formation, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 123, (1990), 90-96, North Holland.

- [43] Clavaguera-Mora, M.T., Baro, M.D., Surinach, S., Saurina, J., Enthalpy recovery in Se rich Ge-Se glasses during isothermal annealing and continues heating, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 131-133, (1991), 479-482, North Holland.
- [44] Ovchinnikov, A.A., Shamovsky, I.L. and Onischuk, V.A., The model of plane rotators: instant cooling and the 'crystal-glass' transition, *Journal of Non-Crystalline Solids* 126, (1990), 216-223, North Holland.
- [45] Ichikava, K., The effect of annealing on the structure of Ge₂₀Te₈₀ glass: atomic-scale imaging using a scanning tunnelling microscope, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 150, (1992), 435-439, North Holland.
- [46] Tkacheva, O.N., Gorbatenko, V.E. and Tkachev, A.G., *New Method for Producing Glass Matrices for Heat-Resistant Glass-Enamel Coatings*, Plenum Publishing Corporation, (1991), Translated from *Steklo i Keramika*, No.6, 7-8, June (1990).
- [47] Senapati, H. and Angell, C.A., Glass formation and anomalous annealing effects in the mixed oxyanion system AgI-Ag₂SO₄-Ag₂WO₄, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 130, (1991), North Holland.
- [48] Sellger, R. and Löser, W., Influence of Cooling Characteristics on Glass Formation of Metallic Systems, *Materials Science and Engineering*, 97, (1988), 203-206.
- [49] Clavaguera-Mora, M. T., Baro, M.D., Surinach, S., Saurina, J. and Clavaguera, N., Enthalpy recovery in Se rich Ge-Se glasses during isothermal annealing and continuous heating, *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol.131-33, (June 1991), 479-482.
- [50] Such, R., Heat-up/cool down operations, *Glass*, vol.68, n.1, (January 1991), 7-8.
- [51] Lanotte, L., Kaczkowski, Z., Luponio, C., Influence of annealing time at 395-400 °C on the Delta E effect, *International Journal of Applied Electromagnetics in Materials*, vol.4, n.1, (June 1993), 59-64.
- [52] Asayama, E., Takebe, H., Morinaga, K, Critical cooling rates for the formation of glass for silicate melts, *ISIJ International*, vol.33, n.1, (1993), 233-238.
- [53] Loyd, D., Andersson, G., Karlson, M., Heat conduction in thermocouple shielding-influence from heating and cooling, *Conduction, Radiation and Phase Change Second Int. Conf. Adv. Comput. Method Heat Transfer*. Publ. by Computational Mechanics Inc., Billerica, MA, USA, 25-39.
- [54] Kasa, S., Lisy, A., Randak, R., Glass annealing process in laboratory conditions and its control, *Ceramics-Silikaty*, vol.36, n.4, (1992), 187-198.



- [55] Priven, A. I., Determination of the boundaries of the temperature interval of annealing of a glass on the basis of the relaxation model of the glass transition, Soviet Journal of glass Physics and Chemistry, vol.15, n.6, (September 1991), 482-487.
- [56] Uoochi, Y., Tabuchi, A., Furumuro, Y., Spin-on glass curing by rapid thermal annealing, Journal of the Electromechanical Society, vol.137, n.12, (December 1990), 3923-3925.
- [57] Gloesener, D., Rivas, G., Goffin, B., Coppee, J. L., Van de Wiele, F., One step annealing for dopants activation, silicide resistivity lowering and glass flow by rapid thermal processing, 1988 Proc. 5. Int. IEEE Service Cent., NJ, USA, (1988), 43-50.

