T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORLICZ UZAYLARINDA FOURIER SERİLERİ İLE YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet ARSLAN

Balıkesir, Temmuz-2010

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORLICZ UZAYLARINDA FOURIER SERİLERİ İLE YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet ARSLAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali GÜVEN

Sınav Tarihi: 06. 07. 2010

Jüri üyeleri: Doç. Dr. Ali GÜVEN (Danışman)
Doç. Dr. Ramazan AKGÜN
Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR

Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih .... sayılı oturumunun ..... nolu kararı ile ....mezun olmuştur.

Balıkesir, Temmuz-2010

ÖZET

ORLICZ UZAYLARINDA
FOURIER SERİLERİ İLE YAKLAŞIM

Mehmet ARSLAN
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali GÜVEN)

Balıkesir, 2010

Bu çalışma, trigonometrik Fourier serilerinin Nörlund ve Riesz ortalamalarının ağırlıklı Orlicz uzaylarındaki bazı yaklaşım özelliklerinden oluşmaktadır.

Bu çalışma giriş bölümü dışında üç ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bu çalışmada kullanılan fonksiyon uzaylarının tanımları ve temel özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde, trigonometrik yaklaşımın temel taşı olan Fourier serilerinin tanımı verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmı, Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının tanımı ile ana teoremlerde kullanılacak bazı tanımlardan oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, elde edilen sonuçlar, bu sonuçların ispatları ve bu ispatlarda kullanılan bazı lemmalar verilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise Nörlund ortalamasının bir genelleştirmesi olan matris dönüşümleri ile yaklaşım konusunda tanım ve sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Young fonksiyonu / ağırlıklı Orlicz Uzayları / Boyd indisleri / Muckenhoupt sınıfları / Lipschitz sınıfları / Fourier serileri / Nörlund ortalaması / Riesz ortalaması / matris dönüşümü

ABSTRACT

APPROXIMATION BY FOURIER SERIES
IN ORLICZ SPACES

Mehmet ARSLAN

Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(M.Sc. Thesis / Supervisor : Assoc. Prof. Ali GÜVEN)

Balıkesir, 2010

This work consists of some approximation properties of Nörlund and Riesz means of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz spaces.

This work consists of three main chapters except for introduction chapter.

In the first chapter, the definitions and basic properties of function spaces used in this work are given.

In the second chapter, the definition of Fourier series, which is crucial point of trigonometric approximation is given. The second part of this chapter consists of definitions of Cesàro, Nörlund and Riesz means and some definitions that is going to use in main results.

In the third chapter, the results we obtained, the proofs of these results and some lemmas that are used in proofs of the results are given. In the last part of this chapter, the definitions and the results about approximation by matrix transforms, which are generalizations of Nörlund means are given.

KEY WORDS : Young function / weighted Orlicz spaces / Boyd indices / weight function / Muckenhoupt classes / Lipschitz classes / Fourier series / Nörlund mean / Riesz mean / matrix transform /

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Tanımı**
C	Karmaşık sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
h.h.	Hemen her yerde
$\|J\|$	J aralığının uzunluğu
$\widetilde{f}$	f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu
Π_n	Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi
$[\cdot]$	Tam değer fonksiyonu

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam süresince karşılaştığım küçük büyük her sorunu kendi sorunuymuş gibi addedip yüksek lisansa devam edebilmemde büyük pay sahibi olan, bilgi ve tecrübesiyle de bu tezin oluşmasında hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ali GÜVEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca üzerimde çok emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov, Doç. Dr. Recep Şahin, Doç. Dr. Ramazan Akgün, Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır, Yrd. Doç. Dr. Fırat Ateş'e çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans çalışmam süresince desteğini gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e ve şu anda yüksek lisansını sürdüren arkadaşım Ahmet EMİN'e içtenlikle teşekkür ederim.

Son olarak her zaman yanımda olan, haklarını asla ödeyemeyeceğim Anneme, Babama, Kardeşlerime ve Kübra'ya çok teşekkür ediyorum.

Balıkesir, 2010 **Mehmet ARSLAN**

1. GİRİŞ

Trigonometrik Fourier serilerinin Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamaları ve matris dönüşümleri ile yaklaşım problemi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Cesàro ortalamasının Lebesgue uzaylarında bazı yaklaşım özellikleri Quade tarafından incelenmiştir ([1]). Daha sonra, Cesàro ortalamasının genelleştirmeleri olan Nörlund ve Riesz ortalamalarının L^p uzaylarında yaklaşım özellikleri Mohapatra ve Russell ([2]), Chandra ([3]) ve Leindler ([4]) tarafından çalışılmıştır. Mittal, Rhoades, Mishra ve Singh ise Fourier serilerinin bazı matris dönüşümlerinin L^p uzaylarında yaklaşım özellikleri ilgili sonuçlar elde etmişlerdir ([5]).

Güven, Chandra'nın ağırlıklı L^p uzaylarına genelleştirmelerini ispatlamış ([6]), Güven ve İsrafilov ise Chandra ve Leindler'in sonuçlarının benzerlerini genelleştirilmiş Lebesgue uzaylarında elde etmişlerdir ([7]). Mittal, Rhoades, Mishra ve Singh'in sonuçlarını genelleştirilmiş Lebesgue uzaylarındaki benzerleri yine Güven tarafından ispatlanmıştır ([8]).

Ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri Güven ve İsrafilov tarafından elde edilmiştir ([9]).

Bu çalışmada trigonometrik Fourier serilerinin Nörlund ve Riesz ortalamaları ile bazı matris dönüşümlerinin ağırlıklı Orlicz uzaylarındaki yaklaşım özellikleri incelenmiş, özel halde [3], [4] ve [5] çalışmalarında elde edilen sonuçların bu uzaylardaki benzerleri ispatlanmıştır.

2. FONKSİYON UZAYLARI

2.1 Lebesgue Uzayları

2.1.1 Tanım: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $f : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $L^p\left([0,2\pi]\right) = L^p$ ile gösterilir.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{ve} \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x),\ \alpha \in \mathbf{C} \tag{2.1}$$

işlemleri altında L^p bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu L^p üzerinde bir normdur. L^p bu norma göre bir Banach uzayıdır.

2.1.2 Tanım: $\exists\, \mathrm{M} > 0$ sayısı için

$$|f(x)| \leq \mathrm{M} \ \ h.h.$$

şartını sağlayan $f : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $L^\infty\left([0,2\pi]\right) = L^\infty$ ile gösterilir. Aynı şekilde (2.1) işlemleri altında L^∞ bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_{\infty} := \inf \{ \text{M}>0 : |f(x)| \le \text{M} \;\; h.h.$$

fonksiyonu L^{∞} üzerinde bir normdur. L^{∞} bu norma göre bir Banach uzayıdır.

2.1.3 Tanım: $1 \le p \le \infty$ olmak üzere L^p Banach uzayına *Lebesgue uzayı* denir.

2.2 Orlicz Uzayları

2.2.1 Tanım: $A \subset \mathbf{R}$ bir küme olsun. $\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ oluyorsa A kümesine bir *konveks* küme denir.

2.2.2 Tanım: $A \subset \mathbf{R}$ konveks bir küme olsun. $M : A \to \mathbf{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$M(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha M(x) + (1-\alpha)M(y)$$

şartını sağlıyorsa M fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir.

2.2.3 Tanım: $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ konveks ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer M fonksiyonu

i) $M(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{M(x)}{x} = 0$

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{M(x)}{x} = \infty$

koşullarını sağlıyorsa M fonksiyonuna bir *Young fonksiyonu* denir.

2.2.4 Örnekler:

i) $M(x)=\dfrac{x^p}{p}$, $1<p<\infty$

ii) $M(x)=e^x-x-1$

iii) $M(x)=e^{x^\delta}-1$, $\delta>1$

iv) $M(x)=\dfrac{x^p}{\ln(e+x)}$, $p\geq 2$

fonksiyonları birer Young fonksiyonudur.

2.2.5 Teorem: M bir Young fonksiyonu ise

$$N(y)=\max\{xy-M(x),\, x\geq 0\} \tag{2.2}$$

fonksiyonu da bir Young fonksiyonudur.

2.2.6 Örnek: $1<p<\infty$ ve $1/p+1/q=1$ olmak üzere

$$M(x)=\frac{x^p}{p}$$

ise

$$N(y)=\frac{y^q}{q}$$

olur.

2.2.7 Tanım: M bir Young fonksiyonu olsun. (2.2) şeklinde tanımlı Young fonksiyonuna M fonksiyonunun *tümleyen Young* fonksiyonu denir.

2.2.8 Tanım: M bir Young fonksiyonu ve

$$\rho_M(f)=\int_0^{2\pi} M(|f(x)|)dx$$

olmak üzere $\exists\alpha>0$ için

$$\rho_M(\alpha f)<\infty$$

koşulunu sağlayan $f:[0,2\pi]\to\mathbf{C}$ ölçülebilir fonksiyonlarının kümesi $L^M\ ([0,2\pi])=L^M$ ile gösterilir. Aynı şekilde (2.1) işlemleri altında L^M bir vektör uzayıdır. L^M uzayı

$$\|f\|_M:=\sup\left\{\ \left|\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx\right| : g\in L^N,\ \ \rho_N(g)\le 1\ \right\}$$

Orlicz normu ve

$$\|f\|_{(M)}:=\inf\left\{\lambda>0:\rho_M\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\}$$

Luxemburg normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. L^M Banach uzayına $[0,2\pi]$ üzerinde M ile üretilen *Orlicz uzayı* denir [10, s. 69].

2.2.9 Teorem: L^M bir Orlicz uzayı olmak üzere $\forall f\in L^M$ için

$$\|f\|_{(M)} \leq \|f\|_M \leq 2\,\|f\|_{(M)}$$

eşitsizliği vardır. Böylece $\|\,.\,\|_M$ ve $\|\,.\,\|_{(M)}$ normları denktir [10, s. 80].

2.2.10 Teorem: $M(x) = \dfrac{x^p}{p}$, $1 < p < \infty$ olarak alınırsa

$$L^M \sim L^p$$

olur.

Orlicz uzayları ile ilgili daha kapsamlı bilgi [10], [11] ve [12] numaralı kaynaklardan sağlanabilir.

2.2.11 Tanım: M bir Young fonksiyonu olsun.

$$h(t) := \limsup_{x\to\infty} \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)} \text{ , } t > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\alpha_M := \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\log(h(t))}{\log t}\right) \quad \text{ve} \quad \beta_M := \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{\log(h(t))}{\log t}\right)$$

sayılarına L^M Orlicz uzayının sırasıyla alt ve üst *Boyd indisleri* denir.

2.2.12 Teorem: M bir young fonksiyonu ve N bunun tümleyen Young fonksiyonu olmak üzere L^M ve L^N uzaylarının Boyd indislerinin

i) $0 \leq \alpha_M \leq \beta_M \leq 1$

ii) $\alpha_M + \beta_N = 1$ ve $\alpha_N + \beta_M = 1$

özellikleri vardır [13].

2.2.13 Tanım: $0 < \alpha_M$, $\beta_M < 1$ ise Boyd indisleri nontrivialdir denir.

2.2.14 Teorem: L^M uzayı yansımalı $\Leftrightarrow 0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ [13].

2.2.15 Örnek: $M(x) = \dfrac{x^p}{p}$, $1 < p < \infty$ Young fonksiyonu için

$$\alpha_M = \beta_M = 1/p$$

dir.

2.2.16 Teorem: L^M bir Orlicz uzayı olsun.

$$1 \leq p < 1/\beta_M \leq 1/\alpha_M < q \leq \infty$$

biçimindeki her *p,q* sayıları için $L^q \subset L^M \subset L^p$ olur ve buradaki kapsamalar süreklidir [13].

2.2.17 Teorem (Boyd İnterpolasyon Teoremi): $1 < p < q < \infty$ olsun. Bir lineer operatör L^p ve L^q uzayları üzerinde sınırlı ise Boyd indisleri

$$1/q < \alpha_M \leq \beta_M < 1/p$$

koşulunu sağlayan her L^M Orlicz uzayı üzerinde de sınırlıdır [14].

Boyd indisleri ile ilgili daha geniş bilgi [15] de bulunabilir.

2.3 Ağırlıklı Uzaylar

2.3.1 Tanım: $\omega : [0,2\pi] \to [0,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna $[0,2\pi]$ üzerinde bir *ağırlık* fonksiyonu denir.

2.3.2 Tanım: ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega \in L^p$ şartını sağlayan ölçülebilir $f : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının kümesi L^p_ω ile gösterilir.

$$\|f\|_{p,\omega} := \|f\omega\|_p$$

fonksiyonu L^p_ω üzerinde bir normdur. L^p_ω normlu uzayına *Ağırlıklı Lebesgue uzayı* denir.

2.3.3 Tanım: ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega \in L^M$ şeklindeki ölçülebilir $f : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının kümesi L^M_ω ile gösterilir.

$$\|f\|_{M,\omega} := \|f\omega\|_M$$

fonksiyonu L^M_ω üzerinde bir normdur. L^M_ω normlu uzayına *Ağırlıklı Orlicz uzayı* denir.

2.3.4 Teorem: ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\omega \in L^M$ ve $1/\omega \in L^N$ ise

$$L^\infty \subset L^M_\omega \subset L^1$$

dir.

2.4 Muckenhoupt Ağırlıkları

2.4.1 Tanım: $1 < p < \infty$ ve ω, $[0,2\pi]$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $1/p+1/q=1$ olmak üzere

$$\sup_J \left(\frac{1}{|J|} \int_J \omega^p (x) dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|J|} \int_J \omega^{-q} (x) dx \right)^{1/q} < \infty$$

oluyorsa ω fonksiyonu $A_p([0,2\pi]) = A_p$ *Muckenhoupt* sınıfındandır denir. Burada supremum bütün $J \subset [0,2\pi]$ aralıkları üzerinden alınmıştır ve $|J|$, J aralığının uzunluğunu göstermektedir.

2.4.2 Örnek: $\omega: [0,2\pi] \to [0,\infty]$, $\omega(x) = x^\alpha$ olmak üzere

$$\omega(x) = x^\alpha \in A_p \Leftrightarrow -\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}.$$

Muckenhoupt ağırlıkları ile ilgili geniş bilgi [16], [17] ve [18] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

2.5 Süreklilik Modülü ve Lipschitz Sınıfları

2.5.1 Tanım: L^M nontrivial α_M, β_M Boyd indislerine sahip bir Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun. Bir $f \in L^M_\omega$ fonksiyonunun süreklilik modülünü

$$T_h(f)(x) := \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt \tag{2.3}$$

olmak üzere

$$\Omega_{M,\omega}(\delta, f) := \sup_{|h|\leq\delta} \|T_h(f)\|_{M,\omega} \ , \ \delta > 0 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlayalım.

Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu ağırlıklı Orlicz uzayında sınırlı olduğundan $\Omega_{M,\omega}(\cdot, f)$ süreklilik modülü iyi tanımlıdır.

$\Omega_{M,\omega}(\delta, f)$ süreklilik modülü, negatif olmayan, sürekli, azalmayan ve

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega_{M,\omega}(\delta, f) = 0 ,$$

$$\Omega_{M,\omega}(\cdot, f_1 + f_2) \leq \Omega_{M,\omega}(\cdot, f_1) + \Omega_{M,\omega}(\cdot, f_2)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

L^p uzayında süreklilik modülü,

$$\Delta_h(f) = f(x+h) - f(x)$$

olmak üzere

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h|\leq\delta} \|\Delta_h(f)\|_p \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır.

Fakat L^p_ω ve L^M_ω uzayları

$$\Delta_h(f) = f(x+h) - f(x)$$

geleneksel kaydırma operatörüne göre invariant olmadığından, bu uzaylarda süreklilik modülünü (2.3) operatörü yardımıyla tanımlamaktayız.

L^p uzayı üzerinde (2.4) süreklilik modülü ile (2.5) süreklilik modülü birbirine denktir [19].

(2.3) operatörü kullanılarak süreklilik modülü tanımlama düşüncesi Ky tarafından geliştirilmiştir ([19]).

2.5.2 Tanım: $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$Lip(\alpha)_{M,\omega} := \{ \ f \in L_{\omega}^{M} \ : \ \Omega_{M,\omega}(\delta, f) = O(\delta^{\alpha}) \ \}$$

kümesine *Lipschitz* sınıfı denir.

3. FOURIER SERİLERİ

3.1 Fourier Serileri

3.1.1 Tanım: a_k , b_k $(k = 0,1,2,...)$ sabit sayılar ve $|a_k| + |b_k| \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3.1}$$

serisine bir trigonometrik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{3.2}$$

serisine de (3.1) serisinin eşlenik serisi denir.

3.1.2 Tanım: a_k , b_k $(k = 0,1,2,...)$ sabit sayılar ve $|a_k| + |b_k| \neq 0$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \, , \; n = 0,1,2,...$$

İfadesine n. dereceden bir trigonometrik polinom denir.

3.1.3 Tanım: $n = 0,1,2,...$ için derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi Π_n ile gösterilir.

3.1.4 Tanım: $f \in L^1$ olsun.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt \ , k=0,1,2,\ldots$$

ve

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt \ , k=1,2,\ldots$$

olmak üzere (3.1) serisine f fonksiyonunun *Fourier serisi* denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

yazılır.

3.1.5 Tanım: $A_o(f)(x) := \frac{a_0}{2}$,

$$A_k(f)(x) := a_k \cos kx + b_k \sin kx, \ k = 1,2,...$$

olmak üzere

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f)(x), \ n = 0,1,2,...$$

biçiminde tanımlı $S_n(f)$ dizisine f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

3.1.6 Tanım: $f \in L^1$ ve $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ olsun. (3.2)

trigonometrik serisi bir Fourier serisi ise bu seriye sahip fonksiyona f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu denir ve $\tilde{f}$ şeklinde gösterilir;

$$\widetilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \sin kx - b_k \cos kx\right).$$

Trigonometrik seriler ve Fourier serileri ile ilgili daha geniş bilgiye [20] numaralı kaynaktan ulaşılabilir.

3.1.7 Tanım: $E_n(f)_{M,\omega} = \inf\left\{\|f - t_n\|_{M,\omega} : t_n \in \Pi_n\right\}$

değerine $f \in L_\omega^M$ fonksiyonun Π_n in elemanları ile en iyi yaklaşımı denir.

3.1.8 Teorem: $E_n(f)_{M,\omega} = \left\|f - t_n^*\right\|_{M,\omega}$ olacak şekilde $t_n^* \in \Pi_n$ vardır [21, s. 59].

Aşağıdaki $f \to S_n(f)$ ve $f \to \widetilde{f}$ operatörlerinin düzgün sınırlılığını gösteren

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} = O\left(\|f\|_{M,\omega}\right), \qquad \left\|\widetilde{f}\right\|_{M,\omega} = O\left(\|f\|_{M,\omega}\right)$$

eşitsizlikleri ve bunların sonucu olan

$$\|f - S_n(f)\|_{M,\omega} = O\left(E_n(f)_{M,\omega}\right), \qquad E_n(\widetilde{f})_{M,\omega} = O\left(E_n(f)_{M,\omega}\right)$$

eşitsizlikleri [9] numaralı kaynakta verilmiştir.

3.2 Cesàro, Nörlund ve Riesz Ortalamaları

3.2.1 Tanım: $S_n(f)(x)$ f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=o}^{n}S_k(f)(x),\; n=0,1,2,...$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin n. dereceden *Cesàro* (*Fejér*) ortalaması denir.

3.2.2 Tanım: $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$P_n=\sum_{m=0}^{n}p_m\;,\; p_{-1}=P_{-1}:=0$$

olmak üzere

$$N_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=o}^{n}p_{n-m}S_m(f)(x)\quad \text{ve}\quad R_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=o}^{n}p_mS_m(f)(x)$$

ifadelerine f fonksiyonunun Fourier serisinin $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre sırasıyla *Nörlund* ve *Riesz* ortalamaları denir.

Açıktır ki $p_n=1$, $n=0,1,2,...$ durumunda Nörlund ve Riesz ortalamalarının ikisi de Cesàro ortalamasına eşit olur.

3.2.3 Tanım: $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $n\geq m$ şeklindeki her $n,m\in\mathbf{N}$ için

$$p_n\leq cp_m\qquad (p_n\geq cp_m)$$

olacak şekilde sadece $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine bağlı bir c sabiti varsa $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine hemen hemen monoton azalan (artan) dizi denir ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}\in AMDS$ ($\{p_n\}_{n=0}^{\infty}\in AMIS$) şeklinde gösterilir.

3.2.4 Tanım: Ana teoremlerde kullanılacak olan Δp_n gösterimi

$$\Delta p_n := p_n - p_{n+1}$$

şeklinde tanımlıdır.

4. AĞIRLIKLI ORLİCZ UZAYLARINDA YAKLAŞIM

4.1 Lemmalar

Bu kısımda ana teoremlerin ispatında kullanılacak olan bazı lemmalar verilmiştir.

4.1.1 Lemma: L_ω^M, Boyd indisleri $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ise, her $f \in L_\omega^M$ için

$$E_n(f)_{M,\omega} = O\left(\Omega_{M,\omega}(1/n, f)\right), \; n = 1,2,... \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır [9].

4.1.2 Lemma: L_ω^M, Boyd indisleri $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $0 < \alpha \le 1$ ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun. Bu durumda her $f \in Lip(\alpha)_{M,\omega}$ için

$$\| f - S_n(f) \|_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right), \; n = 1,2,... \tag{4.2}$$

olur.

İspat: t_n^* $(n = 0,1,...)$, $f \in Lip(\alpha)_{M,\omega}$ fonksiyonunun trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı olsun. O halde

$$E_n(f)_{M,\omega} = \| f - t_n^* \|_{M,\omega}$$

ve (4.1) den

$$\left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} = O\left(\Omega_{M,\omega}(1/n, f)\right)$$

ve $f \in Lip(\alpha)_{M,\omega}$ olduğundan

$$\left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} = O\left(\Omega_{M,\omega}(1/n, f)\right) = O\left(n^{-\alpha}\right)$$

olur. Kısmi toplamlar dizisinin L_ω^M uzayında düzgün sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\left\| f - S_n(f) \right\|_{M,\omega} &\le \left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} + \left\| t_n^* - S_n(f) \right\|_{M,\omega} \\
&= \left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} + \left\| S_n(t_n^* - f) \right\|_{M,\omega} \\
&\le \left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} + c\left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} \\
&= O\left(\left\| f - t_n^* \right\|_{M,\omega} \right) \\
&= O\left(n^{-\alpha}\right).
\end{aligned}$$

4.1.3 Lemma: L_ω^M, Boyd indisleri $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ve $f \in Lip(1)_{M,\omega}$ ise f mutlak sürekli ve $f' \in L_\omega^M$ olur.

İspat: $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$ olduğundan

$$1 < p < 1/\beta_M \le 1/\alpha_M < q < \infty$$

ve $\omega \in A_p \cap A_q$ olacak şekilde p ve q sayıları bulunabilir ([18, s. 58]). O halde $L^M \subset L^p$ olur.

$$L^M \subset L^p \Rightarrow L^M_\omega \subset L^p_\omega$$

böylece

$$T_h(f) \in L^M_\omega \Rightarrow T_h(f) \in L^p_\omega .$$

$L^M_\omega \subset L^p_\omega$ kapsaması sürekli olduğundan

$$\|T_h(f)\|_{p,\omega} = O\left(\|T_h(f)\|_{M,\omega} \right).$$

$$\omega \in A_p \Rightarrow \exists p_0 \ : \ 1 < p_0 < \infty ,\ L^p_\omega \subset L^{p_0}$$

ve

$$\|T_h(f)\|_{p_0} = O\left(\|T_h(f)\|_{p,\omega} \right)$$

$$= O\left(\|T_h(f)\|_{M,\omega} \right)$$

elde edilir [19]. O halde

$$\omega_{p_o}(f,\delta) = O\left(\Omega_{M,\omega}(\delta, f)\right).$$

$$f \in Lip(1)_{M,\omega} \Rightarrow \omega_{p_o}(f,\delta) = O(\delta)$$

$$\Rightarrow f \in Lip(1)_{M,\omega}$$

$$\Rightarrow f \text{ mutlak sürekli ve } f' \in L^{p_0}$$

olur [21, s. 51-54]. f mutlak sürekli olduğundan *h.h.* $x \in [0,2\pi]$ için türevlenebilirdir.

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} \to f'(x),\ t \to \infty \ \text{h.h.}$$

olduğundan hemen her yerde

$$\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t} \to |f'(x)|,\ t \to 0^+$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt \to |f'(x)|,\ \delta \to 0^+.$$

$\rho_N(g) \le 1$ biçimindeki her $g \in L^N$ fonksiyonu için

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|\omega(x)|g(x)|dx = \int_0^{2\pi}\left(\lim_{\delta\to 0^+}\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt\right)\omega(x)|g(x)|dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\liminf_{\delta\to 0^+}\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt\right)\omega(x)|g(x)|dx$$

$$\le \liminf_{\delta\to 0^+}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt\right)\omega(x)|g(x)|dx$$

$$\le \liminf_{\delta\to 0^+}\frac{4}{\delta}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|f(x+t)-f(x)|\right)\omega(x)|g(x)|dx$$

$$= \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} \int_0^{2\pi} T_\delta(f)(x)\omega(x)|g(x)|dx$$

$$\le \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} \left\{ \sup_{g_N(T)\le 1} \int_0^{2\pi} T_\delta(f)(x)\omega(x)|g(x)|dx \right\}$$

$$= \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} \|T_\delta(f)\omega(x)\|_M = \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} \|T_\delta(f)\|_{M,\omega}$$

$$\le \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} \left(\sup_{0<h\le\delta} \|T_\delta(f)\|_{M,\omega} \right) = \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} \Omega_{M,\omega}(\delta, f)$$

$$= \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta} O(\delta) = O(1) < \infty$$

$$\Rightarrow f' \in L^M_\omega .$$

4.1.4 Lemma: L^M_ω, Boyd indisleri $0<\alpha_M \le \beta_M <1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ve $f \in Lip(1)_{M,\omega}$ ise her $n=1,2,...$ için

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f)\|_{M,\omega} = O\left(n^{-1}\right) \tag{4.3}$$

olur.

İspat: 4.1.3 Lemma dan f mutlak sürekli ve $f' \in L^M_\omega$. f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)(x) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} kA_k(f)(x) .$$

$$S_n(f)-\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} A_k(f)(x) = \frac{1}{n+1} S_n\left(\tilde{f}'\right)(x) .$$

Kısmi toplamlar dizisi ve eşlenik fonksiyon operatörü L_{ω}^{M} uzayında düzgün sınırlı olduğundan her $n = 1,2,...$ için

$$\left\| S_n(f) - \sigma_n(f) \right\|_{M,\omega} = O\left(n^{-1} \right)$$

elde edilir.

4.1.5 Lemma: $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMDS$$

veya

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMIS \quad \text{ve} \quad (n+1)p_n = O(P_n)$$

ise $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha} p_{n-m} = O\left(n^{-\alpha} P_n \right) \tag{4.4}$$

olur [4].

4.2 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Nörlund Ortalaması ile Yaklaşım

4.2.1 Teorem: L_{ω}^{M}, Boyd indisleri $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $0 < \alpha < 1$, $f \in Lip(\alpha)_{M,\omega}$, $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMDS$$

veya

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMIS \quad \text{ve} \quad (n+1)p_n = O(P_n)$$

ise

$$\| f - N_n(f) \|_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right)$$

olur.

İspat: $f(x) = \dfrac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} f(x)$ olduğundan

$$f(x) - N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\{f(x) - S_m(f)\}$$

olur. (4.2) ve (4.4) ten

$$\| f - N_n(f) \|_{M,\omega} \le \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} \| f - S_n(f) \|_{M,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n} p_{n-m} O\left(m^{-\alpha}\right) + \frac{p_n}{P_n} \| f - S_0(f) \|_{M,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_n} O\left(n^{-\alpha} P_n\right) + O\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= O\left(n^{-\alpha}\right).$$

4.2.2 Teorem: L_{ω}^{M}, Boyd indisleri $0<\alpha_M \le \beta_M <1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $f \in Lip(1)_{M,\omega}$, $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\left|\Delta p_k\right| = O(P_n)$$

veya

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta p_k\right| = O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

ise

$$\| f - N_n(f)\|_{M,\omega} = O\left(n^{-1}\right),\ n=1,2,...$$

olur.

İspat:

$$N_n(f) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} P_{n-m}A_m(f)(x)$$

eşitliğinden ve Abel dönüşümünden

$$S_n(f)(x) - N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}(P_n - P_{n-m})A_m(f)(x)$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\Delta_m\left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}A_k(f)(x) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)(x)$$

buradan

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{M,\omega} \le \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|\left\|\sum_{k=1}^{m}A_k(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$+\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{m}A_k(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$S_n(f)(x)-\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)(x)$$

olduğundan (4.3) gereği

$$\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{m}A_k(f)\right\|_{M,\omega}=\left\|S_n(f)-\sigma_n(f)\right\|_{M,\omega}=O\left(n^{-1}\right)$$

olur. Böylece

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{M,\omega}=O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.5}$$

elde edilir. Önce

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\left|\Delta p_k\right|=O(P_n)$$

olduğunu kabul edelim. Bu varsayımla birlikte

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|=O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

olduğu [4] numaralı kaynakta gösterilmiştir. Böylece (4.5) den

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{M,\omega}=O\left(n^{-1}\right)$$

olduğu çıkar. Son eşitlik ve (4.2) den

$$\|f-N_n(f)\|_{M,\omega} \le \|f-S_n(f)\|_{M,\omega} + \|S_n(f)-N_n(f)\|_{M,\omega}$$

$$=O\left(n^{-1}\right)+O\left(n^{-1}\right)$$

$$=O\left(n^{-1}\right).$$

Şimdi de

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta p_k| = O\left(\frac{P_n}{n}\right) \tag{4.6}$$

olduğunu kabul edelim.

$$\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{k=n-m}^{n}p_k-(m+1)p_{n-m}\right\}$$

eşitliğinden ve tümevarımdan

$$\left|\sum_{k=n-m}^{n}p_k-(m+1)p_{n-m}\right| \le \sum_{k=1}^{m}k|p_{n-k+1}-p_{n-k}|$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right| \le \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\left(\sum_{k=1}^{m}k|p_{n-k+1}-p_{n-k}|\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k|p_{n-k+1}-p_{n-k}|\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|\left(\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right| = \sum_{k=1}^{n-1}\left|\Delta p_k\right|.$$

(4.5) ve (4.6) dan

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{M,\omega} = O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right| + O\left(n^{-1}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)O\left(\frac{P_n}{n}\right)+O\left(n^{-1}\right)$$

$$= O\left(n^{-1}\right).$$

Son eşitlik ve (4.2) den

$$\left\|f-N_n(f)\right\|_{M,\omega} \leq \left\|f-S_n(f)\right\|_{M,\omega} + \left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$= O\left(n^{-1}\right)+O\left(n^{-1}\right)$$

$$= O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir ki bu da ispatı bitirir.

4.3 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Riesz Ortalaması ile Yaklaşım

4.3.1 Teorem: L_{ω}^{M}, Boyd indisleri $0<\alpha_M \le \beta_M <1$ şeklinde ağırlıklı Orlicz uzayı, $0<\alpha \le 1$, $f \in Lip(\alpha)_{M,\omega}$, $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi olsun

$$\sum_{m=0}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right| = O\left(\frac{P_n}{n+1}\right) \tag{4.7}$$

ise

$$\left\| f - R_n(f)\right\|_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right),\ n=1,2,...$$

olur.

İspat: $0<\alpha<1$ olsun.

$$f(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} f(x)$$

olduğundan ve $N_n(f)(x)$ ortalamasının tanımından

$$f(x) - R_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m\left\{f(x) - S_m(f)\right\}.$$

(4.2) den

$$\left\| f - R_n(f)\right\|_{M,\omega} \le \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m \left\| f - S_n(f)\right\|_{M,\omega} \tag{4.8}$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n} p_m O\left(m^{-\alpha}\right) + \frac{p_0}{P_n}\left\| f - S_0(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n} p_m O\left(m^{-\alpha}\right).$$

Abel dönüşümünden

$$\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\alpha} = \sum_{m=1}^{n-1} P_n \left\{m^{-\alpha} - (m+1)^{-\alpha}\right\} + n^{-\alpha} P_n$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha} \frac{P_m}{m+1} + n^{-\alpha} P_n,$$

ve (4.7) koşulundan

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha} \frac{P_m}{m+1} = \sum_{m=1}^{n-1} \Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^{-\alpha}\right) + \frac{P_n}{n+1}\sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha}$$

$$= O\left(n^{-\alpha} P_n\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\alpha} = O\left(n^{-\alpha} P_n\right)$$

olur. Bu son eşitlik ve (4.8) den

$$\left\| f - R_n(f) \right\|_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right)$$

elde edilir. Şimdi $\alpha = 1$ durumunu ele alalım. Abel dönüşümünden

$$R_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=o}^{n} p_m S_m(f)(x)$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=o}^{n-1}\{P_m(S_m(f)(x)-S_{m+1}(f)(x))+P_nS_n(f)(x)\}$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=o}^{n-1}P_m(-A_{m+1}(f)(x))+S_n(f)(x)$$

olur ve buradan

$$R_n(f)(x)-S_n(f)(x)=-\frac{1}{P_n}\sum_{m=o}^{n-1}P_mA_{m+1}(f)(x).$$

Yine Abel dönüşümünden

$$\sum_{m=o}^{n-1}P_mA_{m+1}(f)(x)=\sum_{m=o}^{n-1}\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\left(\sum_{k=o}^{m}(k+1)A_{k+1}(f)(x)\right)$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\sum_{k=o}^{n-1}(k+1)A_{k+1}(f)(x).$$

Bununla beraber (4.3) ve (4.7) göz önüne alınırsa

$$\left\|\sum_{m=o}^{n-1}P_mA_{m+1}(f)(x)\right\|_{M,\omega}=\sum_{m=o}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right|\left\|\sum_{k=o}^{m}(k+1)A_{k+1}(f)(x)\right\|_{M,\omega}$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\left\|\sum_{k=o}^{n-1}(k+1)A_{k+1}(f)(x)\right\|_{M,\omega}$$

$$=\sum_{m=o}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right|(m+2)\left\|S_{m+1}(f)-\sigma_{m+1}(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$+P_n\left\|S_n(f)-\sigma_n(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$= O(1)\sum_{m=o}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right| + O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

elde edilir. Bu da

$$\left\|R_n(f)(x) - S_n(f)(x)\right\|_{M,\omega} = \frac{1}{P_n}\left\|\sum_{m=o}^{n-1} P_m A_{m+1}(f)(x)\right\|_{M,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_n} O\left(\frac{P_n}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eşitliğini verir. Bu son eşitlik ve (4.2) den

$$\left\|f - R_n(f)\right\|_{M,\omega} \le \left\|f - S_n(f)\right\|_{M,\omega} + \left\|S_n(f) - R_n(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$= O\left(n^{-1}\right) + O\left(n^{-1}\right)$$

$$= O\left(n^{-1}\right).$$

4.4 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Matris Dönüşümleri ile Yaklaşım

4.4.1 Tanım: $A = (a_{n,k})$ negatif öğesi olmayan regüler bir sonsuz alt üçgensel matris ve $s_n^{(A)}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ bu matrisin satırlarının toplamı yani

$$s_n^{(A)} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$

olsun. Eğer her $n \in \mathbf{N}$ ve $0 \le k \le m \le n$ şeklindeki her $k, m \in \mathbf{N}$ için

$$a_{n,k} \le c a_{n,m} \qquad (a_{n,m} \le c a_{n,k})$$

olacak şekilde sadece A matrisine bağlı bir c sabiti varsa $A=(a_{n,k})$ matrisi hemen hemen artan (azalan) satırlara sahiptir denir.

4.4.2 Tanım: $A=(a_{n,k})$ negatif öğesi olmayan regüler bir sonsuz alt üçgensel matris olmak üzere $T_n^{(A)}(f)$ matris dönüşümü

$$T_n^{(A)}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f)(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Özel halde, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere $a_{n,k} = \dfrac{p_{n-k}}{P_n}$ ise

$$T_n^{(A)}(f)(x) = N_n(f)(x)$$

olur.

4.4.3 Lemma: $A=(a_{n,k})$ ve $0<\alpha<1$ olsun. Eğer

(i) A hemen hemen azalan satırlara sahip ve $(n+1)a_{n,0} = O(1)$,

(ii) A hemen hemen artan satırlara sahip ve $r=[n/2]$ ve $\left|s_n^{(A)} - 1\right| = O(n^{-\alpha})$ olmak üzere $(n+1)a_{n,r} = O(1)$

şartlarından biri sağlanıyorsa

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} a_{n,k} = O(n^{-\alpha}). \qquad (4.9)$$

İspat: (i) sağlansın. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} = O(n^{1-\alpha}) \quad \text{ve} \quad k=1,2,\ldots \text{ için } a_{n,k} \le c a_{n,0}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} a_{n,k} \le c a_{n,0} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}$$

$$= O\left(\frac{1}{n+1}\right) O(n^{1-\alpha})$$

$$= O(n^{1-\alpha})$$

elde edilir. Şimdi (ii) durumunu ele alalım. Bu durumda $k=1,2,\ldots$ için

$$a_{n,k} \le c a_{n,r} \quad \text{ve} \quad \left|s_n^{(A)} - 1\right| = O(n^{-\alpha})$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{r} k^{-\alpha} a_{n,k} + \sum_{k=r+1}^{n} k^{-\alpha} a_{n,k}$$

$$\le c a_{n,r} \sum_{k=1}^{r} k^{-\alpha} + (r+1)^{-\alpha} \sum_{k=r+1}^{n} a_{n,k}$$

$$\le c a_{n,r} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} + (r+1)^{-\alpha} \sum_{k=o}^{n} a_{n,k}$$

$$=O\left(\frac{1}{n+1}\right) O(n^{1-\alpha}) + O(n^{-\alpha})\ s_n^{(A)}$$

$$=O(n^{-\alpha}).$$

4.4.4 Teorem: L_ω^M, Boyd indisleri $0<\alpha_M \le \beta_M <1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $0<\alpha<1$, $f \in Lip(\alpha)_{M,\omega}$, $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ ve $A=(a_{n,k})$, $\left|s_n^{(A)}-1\right| = O(n^{-\alpha})$ şeklinde regüler bir alt üçgensel matris olsun.

(i) A hemen hemen azalan satırlara sahip ve $(n+1)a_{n,0} = O(1)$,

(ii) A hemen hemen artan satırlara sahip ve $r=[n/2]$ olmak üzere $(n+1)a_{n,r} = O(1)$

koşullarından biri sağlanıyorsa

$$\left\| f - T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right)$$

olur.

İspat: $T_n^{(A)}(f)$ tanımından

$$T_n^{(A)}(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f)(x) - f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f)(x) - f(x) + s_n^{(A)} f(x) - s_n^{(A)} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left(S_k(f)(x) - f(x)\right) + \left(s_n^{(A)} - 1\right) f(x).$$

Böylece (4.2) ile (4.9) dan ve $\left|s_n^{(A)}-1\right|=O(n^{-\alpha})$ olduğundan

$$\left\|f-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}\le\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left\|S_k(f)-f\right\|_{M,\omega}+a_{n,0}\left\|S_0(f)-f\right\|_{M,\omega}+\left|s_n^{(A)}-1\right|\,\|f\|_{M,\omega}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha}a_{n,k}+O\left(\frac{1}{n+1}\right)+O(n^{-\alpha})$$

$$=O(n^{-\alpha})\,.$$

4.4.5 Teorem: L_ω^M, Boyd indisleri $0<\alpha_M\le\beta_M<1$ şeklinde bir ağırlıklı Orlicz uzayı, $f\in Lip(1)_{M,\omega}$, $\omega\in A_{1/\alpha_M}\cap A_{1/\beta_M}$ ve $A=(a_{n,k})$, $\left|s_n^{(A)}-1\right|=O(n^{-1})$ şeklinde regüler bir alt üçgensel matris olsun. Eğer

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|=O\left(n^{-1}\right)$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|=O(1)$

koşullarından biri sağlanıyorsa

$$\left\|f-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}=O\left(n^{-1}\right)$$

olur.

İspat: (4.2) den

$$\left\|f-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}\le\left\|f-S_n(f)\right\|_{M,\omega}+\left\|S_n(f)-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}$$

$$=\left\|S_n(f)-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}+O\left(n^{-1}\right).$$

Böylelikle

$$\left\|S_n(f)-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}=O\left(n^{-1}\right) \tag{4.10}$$

olduğunu gösterirsek ispat biter. $A_{n,k}:=\sum_{m=k}^{n}a_{n,m}$ olsun. Bu durumda

$$T_n^{(A)}(f)(x)=\sum_{k=o}^{n}a_{n,k}S_k(f)(x)=\sum_{k=o}^{n}a_{n,k}\left(\sum_{m=0}^{k}A_m(f)(x)\right)$$

$$=\sum_{k=o}^{n}\left(\sum_{m=k}^{n}a_{n,m}\right)A_m(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}A_{n,k}A_k(f)(x).$$

Diğer taraftan

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(f)(x)=A_{n,0}\sum_{k=0}^{n}A_k(f)(x)+(1-A_{n,0})\sum_{k=0}^{n}A_k(f)(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}A_{n,0}A_k(f)(x)+(1-s_n^{(A)})\,S_n(f)(x).$$

Böylece

$$T_n^{(A)}(f)(x)-S_n(f)(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(A_{n,k}-A_{n,0}\right)A_k(f)(x)+(s_n^{(A)}-1)\,S_n(f)(x)$$

olur ve kısmi toplamlar dizisinin sınırlılığından

$$\left\|S_n(f)-T_n^{(A)}(f)\right\|_{M,\omega}\le\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(A_{n,k}-A_{n,0}\right)A_k(f)\right\|_{M,\omega}+\left|s_n^{(A)}-1\right|\,\|f\|_{M,\omega} \tag{4.11}$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(A_{n,k} - A_{n,0}\right) A_k(f) \right\|_{M,\omega} + O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir ve iş

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(A_{n,k} - A_{n,0}\right) A_k(f) \right\|_{M,\omega} = O\left(n^{-1}\right) \tag{4.12}$$

olduğunu göstermeye kalır.

$$b_{n,k} := \frac{A_{n,k} - A_{n,0}}{k}, \; k = 1,2,...,n$$

olarak alalım. Abel dönüşümünden

$$\sum_{k=1}^{n} \left(A_{n,k} - A_{n,0}\right) A_k(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} k b_{n,k} A_k(f)(x)$$

$$= b_{n,n} \sum_{m=1}^{n} m A_m(f)(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{n,k} - b_{n,k+1}) \left(\sum_{m=1}^{k} m A_m(f)(x) \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(A_{n,k} - A_{n,0}\right) A_k(f) \right\|_{M,\omega} \leq \left| b_{n,n} \right| \left\| \sum_{m=1}^{n} m A_m(f)(x) \right\|_{M,\omega}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left| b_{n,k} - b_{n,k+1} \right| \left(\left\| \sum_{m=1}^{k} m A_m(f)(x) \right\|_{M,\omega} \right).$$

(4.3) ü göz önüne alırsak

$$\left\| \sum_{m=1}^{n} m A_m(f)(x) \right\|_{M,\omega} = (n+1)\ \left\| S_n(f) - \sigma_n(f) \right\|_{M,\omega} = (n+1)\ O\left(n^{-1}\right) = O(1).$$

Bu ve bir önceki eşitsizlikten

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(A_{n,k} - A_{n,0}\right) A_k(f) \right\|_{M,\omega} = O(1)\left|b_{n,n}\right| + O(1)\sum_{k=1}^{n-1}\left|b_{n,k} - b_{n,k+1}\right| \tag{4.13}$$

elde edilir. $\left|s_n^{(A)} - 1\right| = O\left(n^{-1}\right)$ olduğundan

$$b_{n,n} = \frac{\left|A_{n,n} - A_{n,0}\right|}{n} = \frac{\left|a_{n,n} - s_n^{(A)}\right|}{n} \tag{4.14}$$

$$= \frac{1}{n}\left(s_n^{(A)} - a_{n,n}\right) \le \frac{1}{n} s_n^{(A)}$$

$$= \frac{1}{n} O(1) = O\left(n^{-1}\right)$$

olur. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|b_{n,k} - b_{n,k+1}\right| = O\left(n^{-1}\right) \tag{4.15}$$

olduğu gösterilmelidir. Basitçe görülebilir ki;

$$b_{n,k} - b_{n,k+1} = \frac{1}{k(k+1)}\left\{(k+1)a_{n,k} - \sum_{m=o}^{k} a_{n,m}\right\}.$$

Önce (i) koşulunu ele alalım. $\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_{n,k-1} - a_{n,k}\right| = O(1)$ olsun. Tümevarımdan $k = 1,2,...,n$ için

$$\left|\sum_{m=o}^{k} a_{n,m}-(k+1)a_{n,k}\right| \le \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right| \tag{4.16}$$

olduğunu gösterelim. $k=1$ ise

$$\left|\sum_{m=o}^{1} a_{n,m}-2a_{n,1}\right| = \left|a_{n,m}-2a_{n,1}\right|$$

olur ve (4.16) sağlanır. Şimdi $k=\nu$ için (4.16) eşitsizliğinin doğru olduğunu varsayalım. $k=\nu+1$ için

$$\left|\sum_{m=o}^{\nu+1} a_{n,m}-(\nu+2)a_{n,\nu+1}\right| = \left|\sum_{m=o}^{\nu} a_{n,m}-(\nu+1)a_{n,\nu+1}\right|$$

$$\le \left|\sum_{m=o}^{\nu} a_{n,m}-(\nu+1)a_{n,\nu+1}\right| + \left|(\nu+1)a_{n,\nu}-(\nu+1)a_{n,\nu+1}\right|$$

$$\le \sum_{m=1}^{\nu} m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right| + (\nu+1)\left|a_{n,\nu}-a_{n,\nu+1}\right|$$

$$\le \sum_{m=1}^{\nu+1} m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|.$$

Böylece (4.16) $k=1,2,...,n$ için sağlanır. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|b_{n,k}-b_{n,k+1}\right| = \sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{k(k+1)}\left\{(k+1)a_{n,k}-\sum_{m=o}^{k} a_{n,m}\right\}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\left|\sum_{m=o}^{k} a_{n,m}-(k+1)a_{n,k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right|$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right| \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n-1} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n-1} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right|$$

$$= O\left(n^{-1}\right).$$

Şimdi de (ii) şartı için ispatlayalım. $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left|a_{n,k-1} - a_{n,k}\right| = O(1)$ olsun. $r = [n/2]$ olmak üzere (4.16) eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|b_{n,k} - b_{n,k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right| + \sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right|$$

elde edilir. Abel dönüşümünden

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{n,m-1} - a_{n,m}\right| \leq \sum_{k=1}^{r}\left|a_{n,k-1} - a_{n,k}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{n-k}(n-k)\left|a_{n,k-1} - a_{n,k}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n-r}\sum_{k=1}^{r}(n-k)\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|$$

$$=\frac{1}{n-r}O(1)=O\left(n^{-1}\right)$$

olur. Diğer yandan

$$\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|$$

$$\leq \sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\sum_{m=1}^{r}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|+\sum_{m=r}^{k}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|\right\}$$

$$=\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{r}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|+\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=r}^{k}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|.$$

Kısalık amacıyla

$$I_{n1}:=\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{r}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right| \quad \text{ve} \quad I_{n2}:=\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=r}^{k}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|$$

olsun. $\sum_{k=1}^{r}\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|=O\left(n^{-1}\right)$ olduğu için

$$I_{n1}\leq \sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{r}\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|=O\left(n^{-1}\right)\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

$$=O\left(n^{-1}\right)(n-r)\frac{1}{r+1}=O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir. I_{n2} için de aynı durum söz konusudur:

$$I_{n2}=\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=r}^{k}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|$$

$$\leq\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k+1}\sum_{m=r}^{k}\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|$$

$$\leq\frac{1}{r+1}\sum_{k=r}^{n-1}\left(\sum_{m=r}^{k}\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|\right)$$

$$\leq\frac{2}{n}\sum_{k=r}^{n-1}\left(\sum_{m=r}^{k}\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|\right)$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=n-r}^{n-1}(n-k)\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|$$

$$\leq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|$$

$$=\frac{2}{n}O(1)=O\left(n^{-1}\right).$$

Yani

$$\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k}m\left|a_{n,m-1}-a_{n,m}\right|\leq I_{n1}+I_{n2}$$

$$=O\left(n^{-1}\right)+O\left(n^{-1}\right)=O\left(n^{-1}\right)$$

ve böylece

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|b_{n,k}-b_{n,k+1}\right|=O\left(n^{-1}\right).$$

Yani (i) ve (ii) koşullarının her ikisinde de (4.15) sağlanır. Sonuç olarak (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), ve (4.15) birleştirilirse ispat biter.

KAYNAKLAR

[1] Quade, E.S., "Trigonometric approximation in the mean", *Duke Math. J.* 3 (1937), 529.

[2] Mohapatra, R.N. and Russell, D.C., "Some direct and inverse theorems in approximation of functions", *J. Austral. Math. Soc.* (Ser. A) 34 (1983), 143.

[3] Chandra, P., "Trigonometric approximation of functions in L_p-norm", *J. Math. Anal. Appl.* 275 (2002), 13.

[4] Leindler, L., "Trigonometric approximation in L_p-norm", *J. Math. Anal. Appl.* 302 (2005), 129.

[5] Mittal, M.L., Rhoades, B.E., Mishra, V.N. and Singh, U., "Using infinite matrices to approximate functions of class $Lip(\alpha, p)$ using trigonometric polynomials", *J. Math. Anal. Appl.* 326 (2007), 667.

[6] Guven, A., "Trigonometric approximation of functions in weighted L^p spaces", *Sarajevo J: Math*. 5 (17) (2009), 99.

[7] Guven, A. and Israfilov, D.M., "Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$", *J. Math. Inequal.* 4 (2010), 285.

[8] Guven, A., "Trigonometric approximation by matrix transforms in $L^{p(x)}$ spaces", (yayına sunuldu).

[9] Israfilov, D.M. and Guven, A., "Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces", *Stud. Math.* 174 (2) (2006), 147.

[10] Krasnosel'skiĭ, M.A. and Rutickiĭ, Ya.B., Convex functions and Orlicz spaces, Noordhoff Ltd., Groningen (1961).

[11] Rao, M.M. and Ren, Z.D., Teory of Orlicz spaces, Marcel Dekker Inc. (1991).

[12] Rao, M.M. and Ren, Z.D., Applications of Orlicz spaces, Marcel Dekker Inc. (2002).

[13] Karlovich, A.Yu., "Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces", *Math. Nachr*. 179 (1996), 187.

[14] Boyd, D.W., "Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.* 18 (1967), 215.

[15] Bennet, C. and Sharpley, R., Interpolation of operators, Academic Pres (1988).

[16] Muckenhoupt, B., "Weighted norm Inequalities for the Hardy maximal function", *Trans. Amer. Math. Soc.* 165 (1972), 207.

[17] Hunt, R., Muckenhoupt, B. and Wheeden, R., "Weighted norm Inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", *Trans. Amer. Math. Soc.* 176 (1973), 227.

[18] Böttcher, A. and Karlovich, Yu.I., Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplitz operators, Birkhäuser-Verlag (1997).

[19] Ky, N.X., "Moduli of mean smoothness and approximation with A_p -weights", Annales Univ. Sci. Budapest 40 (1997), 37.

[20] Zygmund, A., Trigonometric Series, Vol I, Cambridge Univ. Pres, 2nd edition (1959).

[21] Devore, R.A. and Lorentz, G.G., Constructive approximation, Springer-Verlag (1993).