T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİN CEBİRSEL YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA EMİNE ZENGİN

BALIKESİR, MAYIS - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİN CEBİRSEL YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA EMİNE ZENGİN

BALIKESİR, MAYIS – 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Esra Emine ZENGİN tarafından hazırlanan "**SONLU SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİN CEBİRSEL YAPILARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26 Mayıs 2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd. Doç. Dr. Pınar METE	....
Üye Doç.Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Celal Cem SARIOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi tarafından BAP 2014/104 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

SONLU SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİN CEBİRSEL YAPILARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ESRA EMİNE ZENGİN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, MAYIS – 2015

Çözülüm, spesifik bir modülün yapısını tanımlamak için kullanılan, modüllerin bir tam dizisidir. Serbest çözülümler ise, bir modülün yapısı ile ilgili geometrik invaryantları verir. Bu sebeple, bir modülü bir R-modül olarak serbest minimal çözülümünden elde edilen nümerik invaryantları aracılığla çalışmak da oldukça yaygındır.

Bu tez çalışması, sonlu serbest çözülümlerin cebirsel yapısı teorisi üzerine bir derleme olup, amacımız bu alandaki en önemli çalışmalardan birisi olan Buchsbaum-Eisenbud Tamlık Teoreminin ispatını detaylıca anlatmaktır.

ANAHTAR KELİMELER: Serbest modül, serbest çözülüm, sonlu serbest çözülüm, minimal serbest çözülüm.

ABSTRACT

ALGEBRAIC STRUCTURES OF FINITE FREE RESOLUTIONS
MSC THESIS
ESRA EMİNE ZENGİN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, MAYIS - 2015

A resolution is an exact sequences of modules, which is used to describe the structure of a specific module. Free resolutions give the geometric invariants which are related to the structure of the module. It is much customary to study a module by means of numerical invariants that are obtained from its minimal free resolution as an R-module.

This thesis study is a survey of the theory of algebraic structures of finite free resolutions and our aim is to give the detailed proof of the Buchsbaum-Eisenbud Exactness Theorem which is one of the most important works in this area.

KEYWORDS: Free module, free resolution, finite free resolution, minimal free resolution.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Hom(M, R)	:	M den R ye homomorfizmalarının kümesi
Syz(F)	:	Sizigi modülü
Sfr(P)	:	P modülünün sıfırlayıcısı
$M(d)$	:	M'nin d kadar kaydırılmışı
Çek(f)	:	f dönüşümünün çekirdeği
Gör(f)	:	f dönüşümünün görüntüsü
Eşçek(f)	:	f dönüşümünün eşçekirdeği
$\mathcal{M}$	:	Maksimal ideal
J	:	Jacobson radikali
$\beta_k(M)$	:	M modülünün k. Betti sayısı
$\beta_{j,k}(M)$	:	M modülünün derecelendirilmiş Betti sayısı
der(F)	:	F'nin derecesi
rank(T)	:	T'nin rankı
sıfırlık(T)	:	T'nin boş uzayı
boy(T)	:	T'nin boyutu
derinlik(I)	:	I'nın derinliği
$I_r(A)$	:	A matrisinin r×r minörleri ile üretilen ideal

ÖNSÖZ

İlk olarak, değişmeli cebir ve cebirsel geometrinin bilinmez dünyasına adım atmamı sağlayan ve her zaman sabırla ve ilgiyle sorularımı yanıtlayan sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Pınar Mete’ ye teşekkür ederim.

Hayatımın her anına ortak olan, her zaman yanımda olan aileme, destekleri, sabırları ve özverileri için teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Cebirsel geometri ve değişmeli cebirde pek çok geometrik değişmez serbest çözülümler kullanılarak yazılır. Serbest çözülümü bir sonlu üretilmiş modül ile ilişkilendirme fikri, ilk olarak Hilbert' in ünlü makalelerinde [1], [2] tanıtılmıştır.

Hilbert, R bir polinom halkası olduğunda, sonlu üretilmiş her R-modülün sonlu serbest çözülümü olduğunu ispatlamıştır. Lokal ve derecelendirilmiş durumlarda ise minimal serbest çözülüm vardır. Bir sonlu üretilmiş modülün değişmezleri, modülün minimal serbest çözülümü ile yakından bağıntılıdır. Bu nedenle, minimal serbest çözülümü açık şekilde yazmak değişmeli cebirin en temel problemlerinden birisidir.

Bu tezde asıl amaç, Buchsbaum-Eisenbud' ın Tamlık Teoremini verdikleri makaleyi [3] çalışmaktır. Bu amaçla, sonlu serbest çözülümün, herhangi bir serbest kompleksden, dönüşümlerinin ideallerini kontrol ederek nasıl elde edildiğini inceleyeceğiz. Bir kompleksin tamlığının hangi şartlarda sağlandığı detaylı olarak anlatılacaktır.

Tezin 2. bölümünde, modül teori ve serbest modüller ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tezin 3. bölümünde, serbest çözülümler ilgili genel bilgiler anlatılacaktır.

Tezin 4. bölümünde, bir idealin ve derecelendirilmiş modülün serbest çözülümleri örneklerle hesaplanacaktır.

Tezin 5. bölümünde, değişmeli halkalardaki injektif matrisleri karakterize eden McCoy Teoreminin ispatı detaylıca verilecektir.

Tezin 6. bölümünde, Buchsbaum- Eisenbud Tamlık Teoremi [3] nin detaylı ispatı anlatılacaktır.

Bu tez boyunca bütün halkaların değişmeli ve birimli olduğu kabul edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, modüller ve serbest modüller ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bilgiler [4], [5] kaynaklarından alınmıştır.

2.1 Serbest Modüller

Modül teori, en iyi şekilde, halka üzerindeki lineer cebir olarak tanımlanabilir. Halka üzerindeki modül kavramı, cisim üzerindeki vektör uzayı kavramı ile benzerdir. Fakat, vektör uzayının aksine, her modülün bazı yoktur ve bu halka üzerindeki lineer cebiri, cisim üzerindeki lineer cebirden daha üstün kılar.

Herhangi bir halka üzerindeki modüllerin sınıflandırılması zor olmasına rağmen, halka üzerindeki serbest modüller yardımıyla bu sınıflama yapılabilmektedir.

Şimdi, modül tanımını verelim.

2.1.1 Tanım. R bir halka olsun. R-modül M,

$$R \times M \to M$$

$$(r, m) \mapsto r \times m$$

işlemi altında değişmeli gruptur ve aşağıdaki koşulları sağlar.

(i) $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$

(ii) $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için $(r_1.r_2).m = r_1.(r_2.m)$

(iii) $\forall r \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ için $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$

Eğer halka birimli ise,

(iv) $\forall m \in M$ için $1.m = m$

2.1.2 Tanım. R bir halka, M, N R-modül olmak üzere her $r \in R$ ve $m, n \in M$ için

$$\varphi : M \to N$$

dönüşümü

(i) $\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$

(ii) $\varphi(r.m) = \varphi(r).\varphi(m)$

şartlarını sağlıyor ise φ dönüşümüne R-modül homomorfizması denir.

M den N ye bütün R-modül homomorfizmalarının kümesi $Hom_R(M, N)$ ile gösterilir.

2.1.3 Tanım. $M^* = Hom_R(M, R)$ modülüne M modülünün dual modülü denir.

2.1.4 Tanım. M bir R-modül ve $N \subset M$ olsun.

$$\forall m, n \in N, r \in R \quad \text{için} \quad m + n \in N \text{ ve } r.m \in N$$

şartları sağlanıyorsa N modülüne M modülünün altmodülü denir.

2.1.5 Tanım. M modülünün $m_1, m_2, \ldots, m_n$ üreteçleri için,

$$M =< m_1, m_2, \ldots, m_n >$$

şeklindeki M modülüne sonlu üretilmiştir denir ve $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ için

$$M = \sum_{k=1}^{n} Rm_i$$

şeklinde gösterilir.

Bir eleman ile üretilen modüle devirli modül denir.

2.1.6 Tanım. $N, P \subset M$ alt modüller olsun. Bölüm modülü,

$$N : P = N :_R P = \{a \in R \mid aP \in N\}$$

şeklinde tanımlanır.

P modülünün sıfırlayıcısı,

$$Sfr(P) = Sfr_R(P) =< a >: P = \{a \in R \mid aP = 0\}$$

şeklindedir.

2.1.7 Tanım. $\mathcal{I} \subset R$ bir ideal olsun.P modülünün $\mathcal{I}$ ideali ile bölüm modülü,

$$P :_M \mathcal{I} = \{m \in M \mid \mathcal{I}m \subset P\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.8 Tanım. $i \in I$ için M_i bir R-modül olsun. M_i modüllerinin direkt toplamı,

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i,\ m_i \neq 0,\ \text{sonlu çoklukta i için}\}$$

şeklindedir.

2.1.9 Tanım. M bir R-modül olmak üzere,

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R$$

ise, M modülüne serbest modül denir. I indeks kümesinin eleman sayısı M modülünün rankıdır.

$S \subset M$ altkümesi, $\forall m \in M,\ \ m_i \in S,\ \ a_i \in R$ için

$$m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n$$

sonlu lineer kombinasyonu olacak şekilde ve tek olarak yazılabiliyorsa, S kümesine M modülünün bir bazıdır denir.

Şimdi 3. bölümde kullanacağımız sizigi ve temsilci matris kavramlarının tanımlarını verelim.

2.1.10 Tanım. $M \subset R^n$, $\quad F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ kümesiyle üretilen modül olsun. F modülünün sizigi modülü, $\;Syz(F)$ ile gösterilir ve

$$Syz(f_1, \ldots, f_s) = \{(g_1, \ldots, g_s) \in R^s \mid f_1 g_1 + \ldots + f_s g_s = 0\}$$

şeklindedir. $Syz(F)$ modülünün elemanlarına sizigi denir.

2.1.11 Tanım. M bir R-modül olsun. Matrisin sütunları olarak, $Syz(f_1, \ldots, f_s)$ sizigi modülünün üreteçlerinin yazılmasıyla elde edilen matrise, M modülünün temsilci matrisi denir.

2.2 Derecelendirilmiş Halka ve Modüller

Bu bölümde, derecelendirilmiş halka ve modüller ile ilgili temel tanım ve teoremler [4] verilecektir.

2.2.1 Tanım. R bir halka olsun. Her $\nu, \mu \geqslant 0$ için R_ν değişmeli grupları

$$R_\nu R_\mu \subset R_{\nu+\mu}$$

şartını sağlıyor ve

$$R = \bigoplus_{\nu \geqslant 0} R_\nu$$

olarak yazılabiliyor ise, R halkasına derecelendirilmiş halka denir.

2.2.2 Tanım. k bir cisim olsun. $R = \bigoplus_{\nu \geqslant 0} R_\nu$ derecelendirilmiş halkasında, her $\nu \geqslant 0$ için R_ν bir k-vektör uzayı ve $R_0 = k$ oluyor ise; R, k-cebirine derecelendirilmiş k-cebiri denir.

2.2.3 Örnek. [6] $k[x]$, k cisim üzerinde x bilinmeyenli bir polinom halkası olsun. Bu halkadaki herhangi bir polinom,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \quad n \geqslant 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in k$$

şeklinde yazılabilir.

$k[x]$ polinom halkası,

$$R_0 = \{a_0 \mid a_0 \in k\},\ R_1 = \{a_1x \mid a_1 \in k\},\ \ldots,\ R_n = \{a_nx^n \mid a_n \in k\}$$

olacak şekilde

$$k[x] = R_0 + R_1 + \ldots$$

yazılabilir.

$$i \neq j \text{ için } R_i = \{a_ix^i \mid a_i \in k\} \quad \text{ve} \quad R_j = \{a_jx^j \mid a_j \in k\}$$

olduğunu düşünelim.

R_i halkasındaki her eleman $a_i \in k$ için a_ix_i olarak yazılabilir. Benzer şekilde, R_j halkasındaki her eleman $a_j \in k$ için a_jx_j olarak yazılabilir.

$i \neq j$ olduğundan $a_i = a_j = 0$ için,

$$a_i x^i = a_j x^j$$

elde edilir.

Buradan,

$$R_i \cap R_j = \{0\}$$

dır.

Böylece,

$$k[x] = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$$

dır.

$R_0 = k$ ve $a_i x^i \in R_i,\ a_j x^j \in R_j$ olduğundan

$$\begin{aligned} (a_i x^i)(a_j x^j) &= (a_i a_j) x^{i+j}, \quad a_i a_j = a_{i+j} \in k \\ &\Rightarrow (a_i x^i)(a_j x^j) \in R_{i+j} \\ &\Rightarrow R_i R_j \subset R_{i+j} \end{aligned}$$

dır. Böylece, $k[x]$ derecelendirilmiş k-cebiridir.

2.2.4 Teorem. [6] k bir cisim ve R, $\forall 1 \leq i \leq n$ için $der(x_i) = 1$ olan $k[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası ise R sonlu üretilmiş k-cebiridir.

İspat:

$$\begin{aligned} R_m &= Sp\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\} \\ &= Sp\{x^\alpha \mid |\alpha| = m\} \end{aligned}$$

olarak alalım.

$\forall 1 \leq i \leq n$ için $der(x_i) = 1$ olduğundan R_m halkasındaki her eleman, toplam derecesi m olan $x_1, \dots, x_n$ polinomlarının k üzerindeki lineer kombinasyonudur.

$\bigoplus_{m \geq 0} R_m$'nin derecelendirilmiş k-cebiri olduğunu gösterelim.

$i, j \in \mathbb{N}$ ve $i \neq j$ olsun.

$$R_i = Sp\{x^\alpha \mid |\alpha| = i\}$$

$$R_j = Sp\{x^\beta \mid |\beta| = j\}$$

dır.

Şimdi, $0 \in R_i \cap R_j$ olduğunu gösterelim.

$$0 = \sum 0x^{\alpha} = \sum 0x^{\beta},\ 0 \in k$$
$$\Rightarrow 0 \in R_i \cap R_j$$
$$f = \sum a_k x^{\alpha} \in R_i$$
$$= \sum b_k x^{\beta} \in R_j$$

$i \neq j$ ve $R_i \cap R_j = 0$ olduğundan

$$\sum a_k x^{\alpha} = \sum b_k x^{\beta} \quad |\alpha| = i, \quad |\beta| = j$$

dır. $i = 0$ için,

$$R_0 = Sp\{x^{\alpha} \mid |\alpha| = 0\}$$

olur. Bu durumda, $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i \geq 0$ olduğundan,

$$x^{\alpha} = x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0 = 1$$

dır. $i \in \mathbb{N}$ için $a \in R_i$ ve $b \in R_j$ alalım.

Böylece,

$$a \in Sp\{x^{\alpha} \mid |\alpha| = i\}$$
$$b \in Sp\{x^{\beta} \mid |\beta| = j\}$$

olduğundan

$$a' = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} : \text{a'da bir tekterimli}$$
$$b' = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n} : \text{b'de bir tekterimli}$$

dır. Bir başka deyişle,

a' nün toplam derecesi $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = i$

b' nün toplam derecesi $\beta_1 + \ldots + \beta_n = j$

olur. O halde,

$$a'b' = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n})(x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n})$$
$$= x_1^{\alpha_1+\beta_1} x_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$$

olur.

$a'b'$ nün toplam derecesi,

$$(\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) = i + j$$

dir. Böylece,

$$R_i R_j \subset R_{i+j}$$

elde edilir.

Sonuçta, $\bigoplus_{m \geq 0} R_m$ standart derecelendirilmiş k-cebiridir.

Şimdi, $R = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom halkası olmak üzere,

$$R = \bigoplus_{m \geq 0} R_m$$

olduğunu görelim:

$r \in \bigoplus_{m \geq 0} R_m$ alalım. Böylece,

$$r = r_0 + r_1 + \ldots + r_n n \in \mathbb{N}, \;\; r_i \in R_i \;\; 0 \leq i \leq n$$

dır. $\forall r_i \in R_i$ için,

$$r_i \in R_i = Sp\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mid |\alpha_1 + \ldots + \alpha_n| = i\}$$

dir.

$r_n \neq 0$ ise r'nin tanımından toplam derecesi n'dir.

Bu durumda,

$$r \in k[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow r \in \bigoplus_{m \geq 0} R_m \subseteq R$$

elde edilir.

$f \in R$, toplam derecesi s olan bir polinom olsun. f'yi homojen bileşenleri ile yeniden yazabiliriz. f_i, f 'deki toplam derecesi i olan tekterimliler olmak üzere,

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_s$$

dir. Böylece, f_i, k üzerindeki toplam derecesi i olan $x_1, \ldots, x_n$ tekterimlilerinin lineer kombinasyonudur. $1 \leq i \leq s, \ f_i \in R_i$ olduğundan,

$$\Rightarrow f \in \bigoplus_{m \geq 0} R_m$$

$$\Rightarrow R \subseteq \bigoplus_{m \geq 0} R_m$$

olur. Böylece,

$$R = \bigoplus_{m \geq 0} R_m$$

elde edilir. □

2.2.5 Tanım. $R = \bigoplus_{\nu \geq 0} R_\nu$ derecelendirilmiş bir halka ve M bir R-modül olsun.

$$\forall \mu \in \mathbb{Z}$$

için M_μ değişmeli grupları,

$$\forall \nu \geq 0 \ \text{ için } \ R_\nu M_\mu \subset M_{\nu+\mu}$$

ve

$$M = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} M_\nu$$

şartları sağlanıyor ise, M modülüne derecelendirilmiş R-modül denir. M_ν'nün elemanlarına ν dereceli homojen elemanlar denir. Eğer, $m_\nu \in M_\nu$ için

$$m = \sum_\nu m_\nu$$

ise m_ν'ye m elemanının ν dereceden homojen elemanı denir.

2.2.6 Örnek. $R = \bigoplus_{\nu \geq 0} R_\nu$ derecelendirilmiş k-cebiri olsun. Bu durumda, R_ν, k-vektör uzayı ve $R_0 = k$ dır.

$$e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \ , \ R^m = \bigoplus_{i=1}^{m} Re_i$$

serbest modülünü oluşturabiliriz.

$\nu_1, \ldots, \nu_m \in \mathbb{Z}$, der$(e_i) = \nu_i$ ve M_ν bir k-modül olsun.

$$R^m = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} M_\nu$$

olduğunu gösterelim.

$$(r_1,\ldots,r_m)\in R^m \Rightarrow r_1e_1+\cdots+r_me_m$$

serbest modül tanımından,

$$r_i\in R=\bigoplus_{\nu\geq 0}R_\nu$$

dır.

$e_i\in R_{\nu_i}$ ve $r_ie_i\in\bigoplus_{\nu\geq 0}R_{\nu+\nu_i}$ olduğundan,

$$r_ie_i\in M_\nu,\ \ M_\nu=<fe_i>\ \ \text{der}(f)=\nu-\nu_i\ \ \text{der}(e_i)=\nu_i$$

$$\Leftrightarrow (r_1,\ldots,r_m)\in M_0\oplus M_1\oplus\ldots$$

$$\Leftrightarrow (r_1,\ldots,r_m)\in\bigoplus_{\nu\geq 0}M_\nu$$

$\nu_1,\ldots,\nu_m\in\mathbb{Z}$, der$(e_i):=\nu_i$ ve M_ν , $f\in R_{\nu-\nu_i}$ için $\forall f_i$ R_0-modül tarafından üretilmiş ise,

$$R^m=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}}M_\nu$$

derecelendirilmiş R-modüldür.

2.2.7 Tanım. $M=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}}M_\nu$ derecelendirilmiş R-modül olsun. $d\in\mathbb{Z}$ ve $M(d):=M_{\nu+d}$ olmak üzere,

$$M(d):=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}}M(d)_\nu$$

dır.

Burada, $M(d)$ kümesine, M'nin d kadar kaydırılmışıdır, denir.

2.2.8 Örnek. $1\in R(-5)$ olsun.

Burada, der$(1)=5$ dir. Yine, $1\in R(-5)_5=R_{5-5}=R_0$ dır.

2.2.9 Örnek. $x^2+y^2\in R(-5)$ olsun. Burada, der$(x^2+y^2)=7$ dir.

$x^2+y^2\in R(-5)_7=R_{7-5}=R_2$ dir.

2.2.10 Örnek. $M(d)$ derecelendirilmiş R-modüldür. $M(d)_\nu=M_{\nu+d}$ olduğunu ve $M=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}}M_\nu$'nın bir derecelendirilmiş R-modül olduğunu biliyoruz.

$$R_{\nu'}M(d)_\mu\subset M(d)_{\nu'+\mu}$$

olduğunu gösterelim.

$$M(d)_\nu = M_{\nu+d}$$

olduğundan

$$M(d)_\mu = M_{\mu+d}$$

dir. Buradan,

$$M(d)_{\nu'+\mu} = M_{\nu'+\mu+d}$$

olur.

$M = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} M_\nu$ derecelendirilmiş R-modül olduğundan,

$$R_{\nu'} M_{\mu+d} \subseteq M_{\nu'+\mu+d}$$

dır.

$M_{\mu+d} = M(d)_\mu$ ve $M_{\nu'+\mu+d} = M(d)_{\nu'+\mu}$ eşitliğinden,

$$R_{\nu'} M(d)_\mu \subseteq M(d)_{\nu'+\mu}$$

elde edilir. Böylece, $M(d)$ derecelendirilmiş R-modüldür.

2.2.11 Yardımcı Teorem. $M = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} M_\nu$ derecelendirilmiş R-modül $N \subset M$ alt modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $N = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}}(M_\nu \cap N)$

(ii) N homojen elemanlar tarafından üretilmiştir.

(iii) $m = \sum m_\nu,\ m_\nu \in M,\ m \in M \Leftrightarrow \forall\nu,\ m_\nu \in N$

İspat: [4] □

2.2.12 Tanım. $N \subset M$ altmodülü 2.2.11 Yardımcı Teorem'deki koşulları sağlıyorsa derecelendirilmiş (yada homojen) alt modül denir. Derecelendirilmiş halkaların derecelendirilmiş alt modüllerine derecelendirilmiş ideal yada homojen ideal denir.

2.2.13 Not. $R = \bigoplus_{\nu\geq 0} R_\nu$ derecelendirilmiş halka ve $\mathcal{I} \subset R$ homojen ideal olmak üzere,

$$R/\mathcal{I} = \bigoplus_{\nu\geq 0}(R_\nu + \mathcal{I})/\mathcal{I} \cong \bigoplus_{\nu \geq 0} R_\nu/(\mathcal{I}\cap R_\nu)$$

dır.

2.2.14 Tanım. $R = \bigoplus_{\nu\geq 0} R_\nu$ derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} M_\nu$ ve $N = \bigoplus_{\nu\geq 0} N_\nu$ derecelendirilmiş R-modül olsun.

$$\varphi : M \to N$$

homomorfizması, $\forall \nu$ için,

$$\varphi(M) \subset N_{\nu+d}$$

şartını sağlıyorsa φ ye d dereceli homojen (yada derecelendirilmiş) homomorfizma denir.

2.2.15 Örnek. $M = \bigoplus_{\nu\geq 0} M_\nu$ derecelendirilmiş R-modül, $R = \bigoplus_{\nu\geq 0} R_\nu$ derecelendirilmiş halka olsun. $f \in R_d$ alalım.

$$\varphi : M \to N$$

$$p^\alpha \mapsto f^d p^\alpha$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$$\text{der}(f.p) = \alpha + d$$

olur.

$$\varphi : M \to M(d) = M_{\nu+d}$$

$$p^\nu \mapsto f^\alpha p^\nu$$

elde edilir.

2.2.16 Yardımcı Teorem. R derecelendirilmiş halka, M, N derecelendirilmiş R-modül ve $\varphi : M \to N$ homojen R-modül homomorfizması olsun. Çek(φ), Gör(φ), Eşçek(φ) derecelendirilmiş R-modüldür.

İspat: [4] $\square$

2.3 Noether Halkaları ve Modüller

Bu bölümde Noether halkaları ve modüller hakkında temel kavramlar [4], [5] verilecektir.

2.3.1 Tanım. A bir modül olsun ve A'nın altmodülleri,

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, her $i \geq n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ var ise, A modülü artan zincir koşulunu sağlıyor denir.

Benzer şekilde, B bir modül ve B'nin altmodülleri

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, her $i \geq n$ için $B_i = B_m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ var ise, B modülü azalan zincir koşulunu sağlıyor denir.

2.3.2 Tanım. R halkası, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu (azalan zincir koşulunu) sağlıyor ise, R halkasına Noether (Artin) halkası denir.

2.3.3 Örnek. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasını alalım. $\mathbb{Z}$'nin ideallerinin artan zinciri, $n_0, n_1, n_2 \ldots \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$(n_0) \subset (n_1) \subset (n_2) \ldots$$

formundadır. $i \geq 0$ için

$$(n_i) \subset (n_{i+1})$$

olduğundan

$$n_i \in (n_{i+1})$$

$$\Rightarrow n_i = n_{i+1}.k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n_{i+1} \mid n_i$$

elde edilir. Bu durumda, n_0 tamsayısı ile başlayan ideallerin her artan zincirinin en fazla n tane terimi olabilir. Böylece $\mathbb{Z}$ halkası bir $\mathbb{Z}$ modül olarak Noether halkasıdır.

Fakat, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$(n) \supset (n^2) \supset (n^3) \supset \dots$$

olduğundan $\mathbb{Z}$ Artin halkası değildir.

2.3.4 Teorem. M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktirler.

(i) M Noetherdir.

(ii) M'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.

(iii) M'nin altmodüllerinin boş olmayan her S kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

İspat: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) N, M'nin altmodülü olsun. N altmodülünün sonlu üretilmiş olmadığını varsayalım.

$k \in \mathbb{Z}^+$ için $a_1, \dots, a_k \in N$ olsun. O halde,

$$N \neq (a_1, \dots, a_k)$$

dır.

$$a_{k+1} \in N \text{ ve } a_{k+1} \notin (a_1, \dots, a_k)$$

alalım. Böylece,

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3) \subset \dots \subset (a_1, \dots, a_k) \subset (a_1, \dots, a_{k+1}) \subset \dots$$

M'nin altmodüllerinin sonsuz artan dizisini elde ettik. Bu, M'nin sonlu üretilmiş olmasıyla çelişir. Bu durumda, N sonlu üretilmiştir.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) $N_0 \in S$ olsun. N_0 maksimal değil ise,

$$N_1 \in S \text{ için } N_0 \subset N_1$$

olacak şekilde N_1 altmodülü vardır. N_1 maksimal değil ise,

$$N_2 \in S \text{ için } N_1 \subset N_2$$

olacak şekilde N_2 altmodülü vardır. Bu şekilde devam edilir ise,

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$$

sonsuz artan dizisi elde edilir.

$N = \cup_i N_i$ olsun. N, M'nin altmodülüdür. (ii)'den N sonlu üretilmiştir. Dolayısı ile

$$N = (a_1, \dots, a_n)$$

olacak şekilde $a_1, \dots, a_n \in N$ vardır. Bu durumda,

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \text{için} \quad a_i \in N_k$$

olacak şekilde N_k altmodülü vardır.

$N_k \subset N$ ve N, a_i'leri içeren en küçük altmodül olduğundan

$$N_k = N$$

dir. Böylece,

$$N_k = N_{k+1} = \dots$$

olur. Bu durumda, S kümesinin maksimal elemanı vardır.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**) M'nin altmodüllerinin artan dizisi olduğunu varsayalım.

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

(iii)'den $M_1, M_2, M_3, \dots$ dizisinin maksimal elemanı vardır ve bu eleman M_k olsun. Böylece,

$$M_{k+1} = M_k = \dots$$

elde edilir.

Buradan, M Noetherdir. □

2.3.5 Teorem. M bir modül olsun. M modülünün artan zincir koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul M modülünün her altmodülünün sonlu üretilmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow) N,\ M$'nin altmodülü olsun.

$$S = \{C_i \mid C_i : N \text{ altmodüllerinin sonlu üretilmiş altmodülleri}\}$$
$$\Rightarrow S \text{ bir maksimal C elemanı içerir.}$$

$C \in S$ ise C sonlu üretilmiştir ve $C =< C_1, C_2, \dots, C_n >$ dir. $b \in N$ alalım ve D_b altmodülü $b, c_1, \dots, c_n$ ile üretilsin. Böylece,

$$D_b \in S \text{ ve } C \subset D_b$$

elde edilir. C maksimal olduğundan, $\forall b \in N$ için $D_b = C$ dir.

$$\forall b \in D_b = C \Rightarrow B \subset C \; ve \; C \subset B$$

olduğundan,

$$B = C$$

dir. Sonuçta, B sonlu üretilmiştir.

($\Leftarrow$)M modülünün her altmodülünün sonlu üretilmiş olduğunu varsayalım.

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots$$

iken $\cup_{i \geq 1} M_i$, M'nin altmodülüdür. Varsayımdan $\cup_{i \geq 1} M_i$ sonlu üretilmiştir ve üreteçleri $m_1, \ldots, m_k$ olsun.

$$< m_1, \ldots, m_k >= \cup_{i \geq 1} M_i$$

Bir i için,

$$\Rightarrow \forall m_i \in M_i$$

$\Rightarrow i = 1, \ldots, k$ için $a_i \in M_n$ olacak şekilde bir indeks vardır. Bu durumda,

$$\cup_{i \geq 1} M_i \subset M_n$$

elde edilir. Böylece,

$$M_i = M_n, \; \forall \;\; i \geq n$$

$\square$

Üstteki teoremi kullanarak, Noether modülünün tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

2.3.6 Tanım. M bir R-modül ve N, M'nin altmodülü olsun. M'nin her N altmodülü sonlu üretilmiş ise M'ye Noether modülü denir.

2.3.7 Yardımcı Teorem. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) Noether modüllerinin altmodülleri ve bölüm modülleri de Noetherdir.

(ii) N, M, R-modüller ve $N \subset M$ olsun.

$$M \text{ Noetherdir} \Leftrightarrow M \text{ ve } M/N \text{ Noetherdir.}$$

İspat: (ii) $(\Leftarrow)$ N ve M/N Noether ve K, M'nin altmodülü olsun. Buradan,

$$(K+N)/N, \quad M/N\text{'nin alt modülüdür.}$$

elde edilir. 2.3.4 Teorem gereğince,

$$(K+N)/N$$

sonlu üretilmiştir. İzomorfizma Teoremlerinden,

$$(K+N)/N \cong K/(N \cap K)$$

dır. Böylece,

$$K/(N \cap K)$$

sonlu üretilmiştir.

$$N \cap K = (\overline{x_1}) + \ldots + (\overline{x_m}) \ , \ x_i \in K/(N \cap K)$$

$x_i \in K$ için,

$$K = (x_1) + \ldots + (x_m) + (N \cap K)$$

N Noether ise,

$$(N \cap K)$$

sonlu üretilmiştir.

$y_1, \ldots, y_n \in (N \cap K)$ alalım.

$$K = (x_1) + \ldots + (x_m) + (y_1) + \ldots + (y_n)$$

şeklinde yazabiliriz. O halde, K sonlu üretilmiştir.

Bu durumda, M Noetherdir.

$(\Rightarrow)$ (i)'den N ve M/N Noetherdir. $\square$

2.3.8 Not. R halkasının bir Noether R-modül olması için gerekli ve yeterli koşul, R halkasının Noether halkası olmasıdır.

Şimdi vereceğimiz önerme, Noether modülleri ile sonlu üretilmiş modüller arasındaki bağlantıyı verir.

2.3.9 Önerme. R bir Noether halkası olsun. M sonlu üretilmiş bir R-modül ise, M Noether R-modüldür.

İspat: M sonlu üretilmiş R-modül olduğundan, $M =< x_1, \ldots, x_n >$ olarak yazılabilir.

$$\varphi : R^n \to M$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \varphi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

dönüşümünü alalım.

$M =< x_1, \ldots, x_n >$ olduğundan, φ bir örten modül homomorfizmasıdır. $L =$ Çek(φ) olsun. L bir altmodüldür. 1. İzomorfizma Teoremi gereğince,

$$\text{Gör}(\varphi) = M \cong R^n/\text{Çek}(\varphi) = R^n/L$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Çek}(\varphi) &= \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n \mid \varphi(a_1, \ldots, a_n) = 0_M\} \\ &= \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0_M\} \end{aligned}$$

$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0_M$ ve x_i'ler üreteç olduğundan, $x_i \neq 0$ dir. Buradan,

$$a_i = 0$$

elde edilir.

$$\text{Çek}(\varphi) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n \mid a_i = 0\} = \{(0, \ldots, 0)\}$$

Böylece,

$$M = R^n$$

alabiliriz. n üzerinden tümevarım yapalım.

$n = 1$ ise $M = R^1$ ve R Noether halkası olduğundan M Noether R-modüldür.

$n \geq 2$ ve

$$\pi : R^n \to R^{n-1}$$

$$(r_1, \ldots, r_n) \mapsto (r_1, \ldots, r_{n-1})$$

örten izdüşüm dönüşümünü alalım.

$$\text{Çek}(\pi) = \{(r_1, \ldots, r_n) \mid \pi(r_1, \ldots, r_n) = (0, \ldots, 0)\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_n) \mid (r_1, \ldots, r_{n-1}) = (0, \ldots, 0)\}$$

$$= \{(0, \ldots, 0, r_n) \mid r_n \in R\} \cong R$$

1. İzomorfizma Teoreminden

$$R^{n-1} \cong R^n/\text{Çek}(\pi) = R^n/R$$

elde edilir.

Tümevarım hipotezinde R^{n-1} Noether ve $n = 1$ durumunda R Noether olduğundan 2.3.7 Yardımcı Teorem (ii) gereğince,

$$R^n = M$$

Noether R-modüldür. □

2.4 Nakayama Yardımcı Teoremleri

Nakayama Yardımcı Teoremi [7], cebirsel geometride oldukça kullanışlı ve farklı sonuçları olan önemli bir teoremdir. Bu teorem, değişmeli halkalar üzerindeki modüllerin, cisimler üzerindeki vektör uzaylardan hangi yönlerden farklılaştığının tam olarak anlaşılmasını sağlar. Değişmeli halkalarda, Nakayama Yardımcı Teoremi, Cayley-Hamilton teoreminin genelleştirilmiş formunun basit bir sonucudur.

Bu bölümde, Nakayama Yardımcı Teoremi, derecelendirilmiş ve lokal versiyonları ile birlikte anlatılacaktır.

Şimdi, Jacobson radikalinin tanımını verelim.

2.4.1 Tanım. R bir halka olsun.

$$J = \bigcap_{\mathfrak{M} \text{ maksimal}} \mathfrak{M}$$

şeklindeki ideale, R halkasının Jacobson Radikali denir.

2.4.2 Önerme. $x \in J \Leftrightarrow \forall y \in R$ için $1 - xy$ tersinirdir.

İspat: $(\Rightarrow) 1 - xy$ nin tersinir olmadığını varsayalım.

$$\Rightarrow (1 - xy) \neq (1)$$

Böylece,

$$1 - xy \in \mathfrak{M}$$

olacak şekilde bir maksimal ideal vardır.

$x \in J$ olur ise, $x \in \mathfrak{M}$ dır. Buradan,

$$1 - xy + xy \in \mathfrak{M}$$

olur. Böylece,

$$1 \in \mathfrak{M}$$

elde edilir. Bu, $\mathfrak{M}$'nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde,

$$x \notin J$$

dir.

$(\Leftarrow)$ $\forall y \in R$ için $1 - xy$ nin tersinir olduğunu varsayalım.

$x \notin J$ ise,

$$x \neq \mathfrak{M}$$

olacak şekilde $\mathfrak{M}$ ideali vardır. Buradan,

$$(x) + \mathfrak{M} = (1)$$

elde edilir.

$y \in R$ ve $m_1 \in \mathfrak{M}$ için

$$yx + m_1 = 1$$

dir. Böylece,

$$1 - xy = m_1 \in \mathfrak{M}$$

olur. Bu, $1 - xy$'nin tersinir olmasıyla çelişir. □

2.4.3 Yardımcı Teorem. (Nakayama(1)) R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül, $\mathcal{I}$, R'nin Jacobson radikali tarafından kapsanan bir ideali öyleki;

$$\mathcal{I}M = M$$

olsun. Bu durumda,

$$M = 0$$

dır.

İspat: M sonlu üretilmiş olduğundan, M'nin $X = \{m_1, \ldots, m_n\}$ olan bir minimal üreteç kümesi vardır:

$$M =< X >=< m_1, m_2, \ldots, m_n >$$

Eğer $M \neq 0$ ise, $m_n \neq 0$ olur. $\mathcal{I}M = M$ olduğundan,

$$m_n = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n \ , \ a_i \in \mathcal{I}$$

elde edilir.

$$(m_n - a_n m_n) = a_1 m_1 + \ldots + a_{n-1} m_{n-1}$$

$$(1 - a_n) m_n = a_1 m_1 + \ldots + a_{n-1} m_{n-1}$$

dır. Böylece,

$$a_n \in \mathcal{I} \subset J$$

dır. 2.4.2. Önerme gereğince,

$$a_n \in J \Leftrightarrow 1 - 1.a_n$$

J'de tersinirdir.

$$(1 - a_n).m_n = a_1 m_1 + \ldots + a_{n-1} m_{n-1}$$

ve $1 - a_n$ tersinir olduğundan,

$$m_n \in< m_1, \ldots, m_{n-1} >$$

dır. Böylece, $m_1, \ldots, m_{n-1}$, M modülünü üretir. Bu da, $\{m_1, \ldots, m_n\}$ minimal üreteç kümesi olmasıyla çelişir. Sonuçta,

$$M = 0$$

elde edilir. $\square$

2.4.4 Yardımcı Teorem. (Nakayama(2)) R bir halka, M modülü sonlu üretilmiş bir

R-modül ve N, M modülünün altmodülü $\mathcal{I}$, R halkasının Jacobson idealini içeren bir ideali olsun. Bu durumda,

$$M = \mathcal{I}M + N \Rightarrow M = N$$

dir.

İspat: Halka teorideki III. İzomorfizma Teoreminden,

$$M/N = (\mathcal{I}M + N)/N = \mathcal{I}M/M \cap N$$

Böylece,

$$\varphi : \mathcal{I}M \to \mathcal{I}(M/N)$$

$$am \mapsto a(m + N)$$

dönüşümünü alalım. Bu örten bir dönüşümdür.

$$\text{Çek}(\varphi) = \{am \in \mathcal{I}M \mid \varphi(am) = 0_{\mathcal{I}(M/N)}\}$$

$$= \{am \in \mathcal{I}M \mid a(m + N) = 0\}$$

$$= \{am \in \mathcal{I}M \mid am \in N\} = \mathcal{I}M \cap N$$

Böylece,

$$(\mathcal{I}M + N)/N \cong \mathcal{I}M/N$$

elde edilir. $M = \mathcal{I}M + N$ olduğundan,

$$M/N = \mathcal{I}(M/N)$$

dır. $\mathcal{I}$, M modülünün Jacobson ideali tarfından kapsandığı için M/N modülünün Jacobson idealinin de içindedir. Nakayama (1)'den

$$M/N = 0 \Rightarrow M = N$$

elde edilir. □

Şimdi, Nakayama Yardımcı Teoreminin derecelendirilmiş halkalar için olan versiyonlarını inceleyelim.

2.4.5 Yardımcı Teorem. (Nakayama (3)) $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ bir derecelendirilmiş halka, $\mathcal{I}$, R halkasının bir derecelendirilmiş öz ideali ve M derecelendirilmiş sonlu üretilmiş bir R-modül olsun.

$$\mathcal{I}M = M \Rightarrow M = 0$$

dır.

İspat: $M \neq 0$ olduğunu varsayalım. M'nin homojen üreteçlerinin bir sonlu X kümesini alalım:

$$M =< X >$$

$m \in M$ ve $m \neq 0$ için,

$$m \in X$$

dir ve m'nin derecesi minimal olsun. $j < der(m)$ için m'nin seçiminden, $M_j = 0$ dır. $\mathcal{I} \neq R$ ve R derecelendirilmiş halka olduğundan $\mathcal{I}M$'nin her homojen elemanın derecesi m'nin derecesinden büyüktür. Diğer taraftan, $\mathcal{I}M = M$ olduğundan $m \in M$ dir. □

2.4.6 Yardımcı Teorem. (Nakayama (4)) N, M-modülünün

$$M \subseteq N + \mathcal{I}$$

şeklindeki derecelendirilmiş altmodülü olsun. Bu durumda,

$$N = M$$

dir.

İspat: M/N modülüne Nakayama (3)'ü uygulayalım.

$$\mathcal{I}(M/N) \subseteq (N + \mathcal{I}M)/N = M/N$$

Nakayama (2) den

$$M/N = 0 \Rightarrow M = N$$

elde edilir. □

Şimdi de lokal halkalar için Nakayama Yardımcı Teoremi ile ilgili teoremleri verelim. Bunun için ilk önce lokal halka tanımını vereceğiz.

2.4.7 Tanım. R bir halka ve $\mathfrak{M}$, R halkasının maksimal ideali olsun. R halkasının $\mathfrak{M}$

idealinden başka maksimal ideali yok ise, R halkasına lokal halka denir ve $(R, \mathfrak{M})$ ile gösterilir.

2.4.8 Yardımcı Teorem. (Nakayama (5)) R bir lokal halka, $\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun.

$$\mathfrak{M}M = 0 \Rightarrow M = 0$$

dır.

İspat: [8] $\square$

2.4.9 Yardımcı Teorem. (Nakayama (6)) R bir lokal halka $\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali, M sonlu üretilmiş R-modül ve N, $N \subseteq M$ olacak şekilde bir altmodül olsun. Bu durumda,

$$M = N + \mathfrak{M}M \Rightarrow M = N$$

dir.

İspat: [8] $\square$

3. SERBEST ÇÖZÜLÜMLER

Serbest çözülümler, doğrusal denklem sistemlerinin halkalar üzerinde çalışılması sonucu ortaya çıkar. Bir cisim üzerinde, sonlu bilinmeyenli bir doğrusal denklem sisteminin diğer çözümleri bunların bir doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilebilen, bir esas çözüm kümesi vardır ve bu çözüm kümesi lineer bağımsız olarak seçilebilir. Sonlu bilinmeyenli doğrusal denklem sistemi, bir polinom halkası veya daha genel olarak herhangi bir Noether halkası üzerinde ise, yine sonlu bir çözüme sahiptir ancak bu çözümler genelde lineer bağımlıdırlar. Verilen çözüm sistemindeki bağımlılık ilişkisini (sizigi) bulmak için, yeni bir doğrusal denklem sistemini çözmek gerekir. Bu yöntem tekrarlanarak, her biri bir önceki denklem sisteminin çözümü olan bir dizi serbest modül elde edilir ve bunların hepsi birden asıl sisteminin bir serbest çözülümünü verir.

Bir M modülünün, bir serbest çözülümüne M'nin herhangi bir üreteç kümesini seçerek başlamak yerine, minimal üreteç kümesini seçmek daha doğru bir başlangıçtır. F serbest modülünden M modülüne bu şekilde bir minimal dönüşüm elde etmek için, F'nin çekirdeğinin bir minimal üreteç kümesini seçeriz ve benzer şekilde hareket ederek bir minimal serbest çözülüm elde ederiz. Bir başka deyişle, serbest çözülümdeki her F_i serbest R-modüllerinin üreteçleri, F_i modüllerinin görüntüsündeki minimal üreteç kümesine taşınıyor ise , bu çözülüm minimal serbest çözülüm olur.

R bir derecelendirilmiş halka, çözülümündeki her bir F_i derecelendirilmiş serbest R-modül ve çözülümde homojen elemanlar aynı dereceden homojen elemanlara taşınıyor ise, serbest çözülüm derecelendirilmiş serbest çözülüm adını alır.

3.1 Tam Diziler

Tam diziler, özellikle halka ve modül teorisi, homolojik cebir, diferansiyel geometri ve grup teorinin temel kavramlarından birisidir.

Şimdi, modül homomorfizmaları, görüntüleri ve çekirdekleri kavramlarını birleştiren tam diziler, temel düzeyde verilecektir [4], [5].

3.1.1 Tanım. M_i R-modül ve φ_k R-modül homomorfizması olmak üzere,

$$\ldots \to M_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} M_k \xrightarrow{\varphi_k} M_{k-1} \to \ldots$$

dizisinde,

$$\text{Gör}(\varphi_{k+1}) \subset \text{Çek}(\varphi_k)$$

ise, bu diziye kompleks denir.

Eğer,

$$\text{Gör}(\varphi_{k+1}) = \text{Çek}(\varphi_k)$$

ise, bu diziye M_k modülünde tamdır, denir.

Her M_k modülünde bu eşitlik sağlanıyor ise, bu diziye tam dizi denir.

3.1.2 Teorem. $f : A \to B$ R-modül homomorfizması, $0 \hookrightarrow A$ gömme homomorfizması ve $B \xrightarrow{z} 0$ sıfır homomorfizması olsun.

(i) f bir monomorfizmadır. $\Leftrightarrow$ $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$ dizisi tamdır.

(ii) f bir epimorfizmadır. $\Leftrightarrow$ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{z} 0$ dizisi tamdır.

(iii) f bir izomorfizmadır. $\Leftrightarrow$ $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{z} 0$ dizisi tamdır.

İspat: [4] $\square$

3.1.3 Tanım.

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

şeklindeki tam diziye kısa tam dizi denir.

3.1.4 Not. Kısa tam dizide, f monomorfizma, g epimorfizmadır.

3.1.5 Yardımcı Teorem. (The Short Five Yardımcı Teoremi) R bir halka olsun.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \to & 0 \end{array}$$

Her sırası tam dizi olan R-modül homomorfizmalarının,

$$\beta \circ f = f' \circ \alpha \ , \ \gamma \circ g = g' \circ \beta$$

olan diyagramı (değişmeli diyagramı) olsun. Bu durumda,

(i) α, β monomorfizmadır. $\Leftrightarrow$ β monomorfizmadır.

(ii) α, β epimorfizmadır. $\Leftrightarrow$ β epimorfizmadır.

(iii) α, β izomorfizmadır. $\Leftrightarrow$ β izomorfizmadır.

İspat: [5] □

3.1.6 Not. $A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C'$, R-modüller olmak üzere,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

modül homomorfizmalarının değişmeli diyagramında f, g ve h izomorfizma ise, bu iki tam diziye izomorfiktir denir.

Ayrıca,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \uparrow f^{-1} & & \uparrow g^{-1} & & \uparrow h^{-1} & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

dizilerinin de değişmeli olduğu açıkça görülür.

3.1.7 Teorem. R bir halka ve

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \to 0$$

dizisi R-modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $gh = 1_{A_1}$ olacak şekilde $h : A_2 \to B$ R-modül homomorfizması vardır.

(ii) $kf = 1_{A_2}$ olacak şekilde $k : B \to A_1$ R-modül homomorfizması vardır.

(iii) Bu dizi,

$$0 \to A_1 \xrightarrow{i_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0$$

kısa tam dizisine izomorftur. Burada,

$$B \cong A_1 \oplus A_2$$

dir.

Bu şekildeki kısa tam diziye parçalanmış tam dizi denir.

İspat: [5] □

3.1.8 Not.

$$0 \to M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \ldots \to M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \to 0$$

R-modüllerinin bir dizisi olsun. Bu dizinin tam olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall i = 1, \ldots, n-1$ için,

$$\text{Gör}(\varphi_1) = M_0,$$

$$\text{Çek}(\varphi_n) = 0 \text{ ve } \text{Çek}(\varphi_i) = \text{Gör}(\varphi_{i+1})$$

olmasıdır.

Bu diziler tam ise, aşağıdaki tam dizileri tanımlar:

$$0 \to \text{Çek}(\varphi_1) \to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} \text{Gör}(\varphi_1) \to 0$$

$$0 \to \text{Çek}(\varphi_2) \to M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \text{Gör}(\varphi_2) \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to \text{Çek}(\varphi_n) \to M_n \xrightarrow{\varphi_n} \text{Gör}(\varphi_n) \to 0$$

Burada, i birim dönüşüm ve birebirdir.

$$\text{Çek}(\varphi_1) \subset M_1, \quad \text{Çek}(\varphi_1) \xrightarrow{i} M_1$$

dir. Tam dizi tanımından,

$$0 \to \text{Çek}(\varphi_1) \to M_1$$

ve φ_1 örten olduğundan,

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} \text{Gör}(\varphi_1) \to 0$$

dizileri tamdır.

Gör$(i) =$ Çek(φ_1) olduğunu gösterelim.

i : Çek$(\varphi_1) \to M$ dönüşümünde,

$$\text{Gör}(i) = \text{Çek}(\varphi_1)$$

dir. Böylece,

$$0 \to \text{Çek}(\varphi_1) \to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} \text{Gör}(\varphi_1) \to 0$$

kısa tam dizidir.

Benzer şekilde, diğer tam diziler de kısa tam dizidir.

Tersine,

$$0 \to K_1 \to M_1 \to M_0 \to 0$$

$$0 \to K_2 \to M_2 \to K_1 \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to 0 \to M_n \to K_{n-1} \to 0$$

şeklinde verilen kısa tam diziler, uzun tam diziye genişletilebilir.

$$0 \to M_n \to M_{n-1} \to \ldots \to M_1 \to M_0 \to 0$$

$$\begin{array}{ccccccc}
M_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_0 & \to & 0 \\
\uparrow f & \searrow g & \uparrow \psi & & & & \\
K_2 & & K_1 & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

elde ederiz. Buradan,

$$0 \to K_2 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} K_1 \to 0$$

elde edilir ve

$$\text{Gör}(g) = K_1, \qquad \text{Çek}(f) = 0, \qquad \text{Gör}(f) = \text{Çek}(g)$$

dir.

$$0 \to K_1 \xrightarrow{\psi} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \to 0$$

dizisi kısa tam dizi olduğundan,

$$\text{Gör}(\psi) = \text{Çek}(\varphi_1), \qquad \text{Çek}(\psi) = 0, \qquad \text{Gör}(\varphi_1) = M_0$$

elde edilir.

Şimdi,

$$\text{Gör}(\varphi_2) = \text{Çek}(\varphi_1)$$

olduğunu gösterelim. $\text{Gör}(\varphi_2) \subset \text{Çek}(\varphi_1)$ olduğu açıkça görülür.

$m_1 \in \text{Çek}(\varphi_1)$ alalım.

$$\text{Çek}(\varphi_1) = \text{Gör}(\psi)$$

olduğundan,

$$m_1 \in \text{Gör}(\psi) = \{\psi(k_1) \mid k_1 \in K_1\}$$

dır. Buradan,

$$\exists k_1 \in K_1 \quad \text{öyleki} \quad \psi(k_1) = m_1$$

elde edilir. Böylece,

$$k_1 \in \text{Gör}(g) \equiv \exists m_2 \in M_2 \quad \text{öyleki} \quad g(m_2) = k_1$$

$$\psi(k_1) = \psi(g(m_2)) = m_1$$

$$\varphi_2 = \psi \circ g$$

$$m_1 \in \text{Çek}(\varphi_1) \Rightarrow m_1 \in \text{Gör}(\varphi_2) \equiv \exists m_2 \quad \text{öyleki} \quad \varphi_2(m_2) = m_1 = (\psi \circ g)(m_2) = m_1$$

3.1.9 Yardımcı Teorem. (Snake Yardımcı Teoremi)

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \to 0$$

$$0 \to N_1 \xrightarrow{\psi_1} N_2 \xrightarrow{\psi_2} N_3 \to 0$$

R-modülünün kısa tam dizileri olsun. $i = 1, 2, 3$ için,

$$\lambda_i : M_i \to N_i$$

$$\lambda_3 \circ \varphi_2 = \psi_2 \circ \lambda_2 \ , \ \lambda_2 \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ \lambda_1$$

koşulunu sağlayan modül homomorfizması olsun.

$$0 \to \text{Çek}(\lambda_1) \to \text{Çek}(\lambda_2) \to \text{Çek}(\lambda_3) \to$$
$$\to \text{Eşçek}(\lambda_1) \to \text{Eşçek}(\lambda_2) \to \text{Eşçek}(\lambda_3) \to 0$$

İspat: [4] □

3.1.10 Önerme.

$$\ldots \to M_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} M_k \xrightarrow{\varphi_k} M_{k-1} \to \ldots$$

R-modülünün tam dizisi ve $x \in R$ her M_k modülünde sıfır bölensiz olsun.

$$\ldots \to M_{k+1}/xM_{k+1} \to M_k/xM_k \to M_{k-1}/xM_{k-1} \to \ldots$$

dizisi tamdır.

İspat: 3.1.8 Not gereğince kısa tam diziler için ispatlamak yeterlidir.

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \to 0$$

ve

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 : M_1 \to M_1 \ , & \lambda_2 : M_2 \to M_2 \ , & \lambda_3 : M_3 \to M_3 \\ m_1 \mapsto xm_2 & m_2 \mapsto xm_2 & m_3 \mapsto xm_3 \end{array}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Burada,

$$\text{Çek}(\lambda_1) = 0$$

$$\text{Gör}(\lambda_1) = xM_1$$

$$\text{Eşçek}(\lambda_1) = M_1/\text{Gör}(\lambda_1) = M_1/xM_1$$

$$\text{Çek}(\lambda_2) = 0$$

$$\text{Gör}(\lambda_2) = xM_2$$

$$\text{Eşçek}(\lambda_2) = M_2/\text{Gör}(\lambda_2) = M_2/xM_2$$

$$\text{Çek}(\lambda_3) = 0$$

$$\text{Gör}(\lambda_3) = xM_3$$

$$\text{Eşçek}(\lambda_3) = M_3/\text{Gör}(\lambda_3) = M_3/xM_3$$

olur. 3.1.9 Yardımcı Teorem gereğince,

$$0 \to \text{Çek}(\lambda_1) \to \text{Çek}(\lambda_2) \to \text{Çek}(\lambda_3) \to$$
$$\to \text{Eşçek}(\lambda_1) \to \text{Eşçek}(\lambda_2) \to \text{Eşçek}(\lambda_3) \to 0$$

elde edilir. □

3.2 Modüllerin Lokalizasyonu

3.2.1 Tanım. R bir halka ve $S \subset R$ olsun.

(i) $1 \in S$

(ii) $a, b \in S$ iken $ab \in S$

ise, S'ye R'nin çarpımsal kapalı kümesi denir.

3.2.2 Tanım. R bir halka ve S , R'nin çarpımsal kapalı altkümesi olsun.

$$R_s = \{r/s \mid r \in R, s \in S\}$$

$$= \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$$

R_s kümesi üzerinde ,

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \Leftrightarrow \sigma s' r = \sigma s r'$$

olacak şekilde $\sigma \in S$ vardır.

R_s üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerini tanımlayalım:

$r_1, r_2 \in R$, $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere,

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_2 r_1 + s_1 r_2}{s_1 s_2}$$

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

$(R_s, +, \cdot)$ değişmeli ve birimli bir halkadır.

3.2.3 Tanım. $\mathcal{I}$, R'nin bir ideali ve

$$\phi : R \to R_s$$

$$r \mapsto \frac{r}{1}$$

doğal halka homomorfizması olsun.

$$\mathcal{I}R_s = \{\frac{a}{s} \in R_s \mid a \in \mathcal{I}, s \in S\}$$

idealine, $\phi(\mathcal{I})$ ile üretilen ideal denir.

3.2.4 Not. P, R'nin asal ideali olsun. $S = R/P$, R'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. Bu durumda, R_s yerine R_p notasyonu kullanılır ki bu da, problemi P'de lokalleştirdiğimiz anlamına gelir.

3.2.5 Tanım. M bir R-modül ve S, R'nin çarpımsal kapalı altkümesi olsun.

$$M_s = \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}$$

kümesinde,

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \Leftrightarrow \sigma s' m = \sigma m r'$$

olacak şekilde $\sigma \in S$ vardır.

M_s üzerinde "+" işlemi, $m_1, m_2 \in M$, $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere,

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$(M_s, +)$ bir değişmeli gruptur.

$\frac{r}{\sigma} \in R_s$, $\frac{m}{s} \in M$ olmak üzere,

$$\frac{r}{\sigma} \cdot \frac{m}{s} := \frac{rm}{\sigma s}$$

çarpma işlemi ile $(M_s, +)$ bir değişmeli grubu bir R_s-modüldür.

3.2.6 Tanım. M, N R-modüller ve

$$\varphi : M \to N$$

bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda,

$$\varphi_s : M_s \to N_s$$
$$\frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$$

bir R_s-modül homomorfizmasıdır:

$m_1, m_2 \in M$, $s_1, s_2 \in S$ için,

$$\begin{aligned}\varphi_s(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}) &= \varphi_s(\frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2}) \\ &= \frac{\varphi(s_2 m_1 + s_1 m_2)}{s_1 s_2} \\ &= \frac{s_2\varphi(m_1) + s_1\varphi(m_2)}{s_1 s_2} \\ &= \frac{\varphi(m_1)}{s_1} + \frac{\varphi(m_2)}{s_2} \\ &= \varphi_s(\frac{m_1}{s_1}) + \varphi_s(\frac{m_2}{s_2})\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$\frac{r}{\sigma} \in R_s$, $\frac{m}{s} \in M_s$ olmak üzere,

$$\varphi_s(\frac{r}{\sigma} \cdot \frac{m}{s}) = \varphi_s(\frac{rm}{\sigma s}) = \frac{\varphi(rm)}{\sigma s} = \frac{r\varphi(m)}{\sigma s} = \frac{r}{\sigma} \cdot \frac{\varphi(m)}{s} = \frac{r}{\sigma} \cdot \varphi_s(\frac{m}{s})$$

elde edilir.

3.2.7 Yardımcı Teorem. [9] M, N, K R-modüller,

$$\varphi : M \to N \quad \text{ve} \quad \psi : N \to K$$

modül homomorfizmaları olsun. Bu durumda,

$$(\psi \circ \varphi)_s = \psi_s \circ \varphi_s$$

dır.

İspat:

$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K$$

$$M_s \xrightarrow{\varphi_s} N_s \xrightarrow{\psi_s} K_s$$

$$\frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s} \mapsto \frac{\psi(\varphi(m))}{s}$$

ve

$$(\psi \circ \varphi)_s : M_s \to K_s$$
$$\frac{m}{s} \mapsto \frac{(\psi \circ \varphi)(m)}{s}$$

alalım.

$\frac{m}{s} \in M_s$ ise,

$$(\psi \circ \varphi)_s(\frac{m}{s}) = \frac{(\psi \circ \varphi)(m)}{s}$$

dır. Şimdi, $\psi_s \circ \varphi_s$'ye bakalım.

$$(\psi_s \circ \varphi_s)(\frac{m}{s}) = \psi_s(\varphi_s(\frac{m}{s})) = \psi_s(\frac{(\varphi(m))}{s}) = \frac{\psi(\varphi(m))}{s}$$

dır. Bu durumda,

$$(\psi \circ \varphi)_s = \psi_s \circ \varphi_s$$

□

Şimdi, tam dizilerin modül lokalizasyonundaki durumuna bakalım.

3.2.8 Teorem. [9]

$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K$$

R-modüllerin bir tam dizisi olsun. Bu durumda,

$$M_s \xrightarrow{\varphi_s} N_s \xrightarrow{\psi_s} K_s$$

R_s-modüllerinin bir tam dizisi olur.

İspat:

$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K$$

tam dizi olduğundan,

$$\psi \circ \varphi = 0$$

dır. $\frac{m}{s} \in M_s$ olsun.

$$(\psi_s \circ \varphi_s)(\frac{m}{s}) = \psi_s(\varphi_s(\frac{m}{s})) = \psi_s(\frac{(\varphi(m))}{s}) = \frac{\psi(\varphi(m))}{s} = \frac{0}{s} = 0_{K_s}$$

dır. Şimdi,

$$\text{Çek}(\psi_s) \subset \text{Gör}(\varphi_s)$$

olduğunu gösterelim.

$\frac{n}{s} \in$ Çek(ψ_s) alalım. $n \in N$, $s \in S$ için,

$$\psi_s(\frac{n}{s}) = \frac{\psi(n)}{s} = 0_{K_s}$$

dir. Bu durumda,

$$\sigma.\psi(n) = 0$$

olacak şekilde, $\sigma \in S$ vardır. ψ modül homomorfizması olduğundan,

$$\psi(\sigma n) = 0$$

dır. Böylece,

$$\sigma n \in \text{Çek}(\psi) \subseteq \text{Gör}(\varphi)$$

elde edilir. O halde,

$$\sigma n = \varphi(m)$$

olacak şekilde $m \in M$ vardır.

$$\Rightarrow \varphi(\frac{m}{\sigma s}) = \frac{\varphi(m)}{\sigma s} = \frac{\sigma n}{\sigma s} = \frac{n}{s}$$
$$\Rightarrow \frac{n}{s} \in \text{Gör}(\varphi_s)$$

elde edilir. □

3.2.9 Yardımcı Teorem. [9] M, bir R-modül ve S, R'nin çarpımsal kapalı altkümesi olsun. $\{m_i\}_{i\in I}$, M'nin üreteçlerinin bir kümesi olduğunu varsayalım. Bu durumda, M_s'nin elemanları olan $\{\frac{m_i}{1}\}_{i\in I}$, M_s'yi bir R_s-modül olarak üretir.

İspat: $m \in M$ ve $s \in S$ alalım.

$$i \in I \text{ için } M =< \{m_i\} > \text{dır.}$$

$m \in M$ olduğundan I'nın sonlu alt kümesi olacak şekilde bir J vardır ve $r_j \in R$ için

$$m = \sum_{j\in J} r_j m_j$$

şeklindedir. Buradan,

$$\frac{m}{s} = \frac{\sum_{j\in J} r_j m_j}{s} = \sum_{j\in J} \frac{r_j}{s} \cdot \frac{m_j}{1}$$

dir. Böylece,

$$\frac{m}{s} \in M_s$$

elde edilir.

Sonuçta, M_s, $\{\frac{m_i}{1}\}_{i\in I}$ elemanlarıyla, bir R_s modül olarak üretilmiştir. □

3.2.10 Teorem. [9] F bir serbest modül, $\{m_i\}_{i\in I}$ F'nin bir bazı ve S, R'nin sıfır elemanını içermeyen çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda, F_s serbest R_s-modül ve F_s için baz olan elemanları $\{\frac{m_i}{1}\}_{i\in I}$ formunda ise,

$$Rank_R(F) = Rank_{R_s}(F_s)$$

dir.

İspat: 3.2.9 Yardımcı Teorem'den, $\{\frac{m_i}{1}\}_{i\in I}$ ailesi, F_s modülünü üretir.

$J,\ I$'nın sonlu altkümesi ve $\{\zeta_j\}_{j\in J},\quad R_s$'nin

$$\sum_{j\in J} \{\zeta_j\} \cdot \frac{m_i}{1} = 0$$

şeklindeki elemanları olsun.

<u>İddia:</u> Her $\zeta_j = 0$ mıdır?

J sonlu bir küme olduğundan, $r_j \in R$ ve $s \in S$ için,

$$\zeta_j = \frac{r_j}{s} \quad \forall j \in J$$

elemanlarını bulabiliriz.

$$m \in M \Rightarrow \sum_{j\in J} r_j m_j = m$$

dir. Bu durumda,

$$\frac{m}{s} = \frac{\sum_{j\in J} r_j m_j}{s} = \sum_{j\in J} \frac{r_j}{s} \cdot \frac{m_j}{1} = \sum_{j\in J} \zeta_j \cdot \frac{m_j}{1} = 0$$

dır. Böylece R_s'de

$$\frac{m}{s} = 0$$

elde edilir. O halde,

$$\exists \sigma \in S, \text{ öyleki } \sigma m = 0$$

dır. Bu durumda,

$$\sigma \sum_{j \in J} r_j m_j = \sum_{j \in J} \sigma r_j m_j = 0$$

dır. $\{m_i\}$, F için baz olduğundan,

$$\forall j \in J \text{ için } \sigma_j = 0$$

dır. O halde, R_s'de

$$\zeta_j = \frac{r_j}{s} = \frac{\sigma r_j}{\sigma s} = 0$$

dır. Böylece ,

$$Rank_R(F) = Rank_{R_s}(F_s)$$

olur. □

3.3 Minimal Serbest Çözülümler

Bu bölümde, serbest çözülümler ve minimal serbest çözülümler hakkında temel bilgiler verilecektir.

3.3.1 Tanım. R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül ve $\forall i \geq 0$ için F_i serbest R-modül olsun.

$$\mathcal{F} : \ldots \to F_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \xrightarrow{\varphi_k} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

tam dizisine M modülünün serbest çözülümü denir. Her $k > n$ için, $F_k = 0$ ve n bu özellikteki minimal pozitif tamsayı ise, serbest çözülüm n-uzunluktadır ya da sonludur denir.

Serbest çözülümün oluşturulmasında her aşamada minimal üreteç kümesi seçilirse, M modülünün, minimal serbest çözülümü elde edilir.

M bir R-modül olsun. M modülünün her zaman sonlu bir serbest çözülümünü bulabilir miyiz?

Cevap genelde olumsuz olsa da, polinom halkaları için olumludur.

3.3.2 Teorem. (Hilbert Sizigi Teoremi) $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. Bu durumda, her sonlu üretilmiş R-modülün uzunluğu en fazla n olan bir serbest çözülümü vardır.

İspat: [10] $\square$

3.3.3 Tanım. $\mathcal{I}$ idealinin i. Betti sayısı, çözülümün i. adımında ortaya çıkan R'nin rankına, yani, t_i'ye eşittir ve $\beta_i(\mathcal{I})$ ile gösterilir. $\beta_i(\mathcal{I})$ sayısı, Çek(φ_{i-1})'in minimal üreteçlerinin sayısıdır.

3.3.4 Tanım. $(R, \mathfrak{M})$ lokal Noetherian halka, M sonlu üretilmiş R-modül ve,

$$\ldots \to F_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \xrightarrow{\varphi_k} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

M modülünün serbest çözülümü olsun.

$$\forall k > 1 \text{ için } \varphi_k(F_k) = \mathfrak{M}F_{k-1}$$

ise, üstteki çözülüm minimaldir.

$$\beta_k(M) = Rank(F_k), \ k \geq 0$$

ifadesindeki $\beta_k(M)$'ye M modülünün k. Betti sayısı denir.

Şimdiki teoremler, M modülünün Betti sayılarının iyi tanımlılığını göstermesi açısından önemlidir.

3.3.5 Teorem. [4] $(R, \mathfrak{M})$ lokal Noetherian halka, M sonlu üretilmiş R-modül ise, M modülünün minimal serbest çözülümü vardır.

İspat: $\{m_1, \ldots, m_{s_0}\}$, M modülünün minimal üreteçlerinin kümesi olsun.

$$\varphi_0 : F_0 := R^{s_0} \to M$$

$$(r_1, \ldots, r_{s_0}) \mapsto \varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) = \sum_{i=1}^{s_0} r_i m_i$$

örten dönüşümünü düşünelim. 2.4.3 Nakayama Yardımcı Teoremi gereğince, $m_1, \ldots, m_{s_0}$, $m/\mathfrak{M}M$ vektör uzayının bir bazına indirgenebilir. Böylece, φ_0 dönüşümünden,

$$\overline{\varphi_0} : F_0/\mathfrak{M}F_0 \to M/\mathfrak{M}M$$

$$(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mapsto \varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}M$$

izomorfizması elde edilir. $\overline{\varphi_0}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 = (r_1^{'}, \ldots, r_{s_0}^{'}) + \mathfrak{M}F_0$$

$$\Rightarrow (r_1 - r_1^{'}, \ldots, r_{s_0} - r_{s_0}^{'}) \in \mathfrak{M}F_0 \subseteq F_0$$

dir. Buradan,

$$\varphi_0(r_1 - r_1^{'}, \ldots, r_{s_0} - r_{s_0}^{'}) = \sum_{i-1}^{s_0}(r_i - r_i^{'})m_i \in M$$

$$= (r_1 - r_1^{'})m_1 + (r_2 - r_2^{'})m_2 + \ldots + (r_{s_0} - r_{s_0}^{'})m_{s_0} \in M$$

2.4.3 Nakayama Yardımcı Teoremi gereğince,

$$(r_1 - r_1^{'})(m_1 + \mathfrak{M}M) + \ldots + (r_{s_0} - r_{s_0}^{'})(m_{s_0} + \mathfrak{M}M) \in M/\mathfrak{M}M$$

elde edilir. Bu durumda,

$$[(r_1 - r_1^{'})m_1 + \mathfrak{M}M] + \ldots + [(r_{s_0} - r_{s_0}^{'})m_{s_0} + \mathfrak{M}M]$$

$$= \sum_{i=1}^{s_0}(r_i - r_i^{'})m_i + \mathfrak{M}M$$

$$\varphi_0((r_1 - r_1^{'}), \ldots, (r_{s_0} - r_{s_0}^{'})) + \mathfrak{M}M$$

olur. φ_0 modül homomorfizması olduğundan,

$$\varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) - \varphi_0(r_1^{'}, \ldots, r_{s_0}^{'}) + \mathfrak{M}M$$

elde edilir. Böylece,

$$\varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}M = \varphi_0(r_1^{'}, \ldots, r_{s_0}^{'}) + \mathfrak{M}M$$

olur. $\overline{\varphi_0}$ tanımı gereğince,

$$\overline{\varphi_0}((r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0) = \overline{\varphi_0}((r_1^{'}, \ldots, r_{s_0}^{'}) + \mathfrak{M}F_0)$$

dır. Böylece,

$\overline{\varphi_0}$ iyi tanımlıdır.

$\overline{\varphi_0}$ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$$\text{Gör}(\overline{\varphi_0}) = \{\overline{\varphi_0}((r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0) \mid (r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \in F_0/\mathfrak{M}F_0\}$$

$$= \{\varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}M \mid (r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \in F_0/\mathfrak{M}F_0\}$$

φ_0 örten olduğundan,

$$\text{Gör}(\overline{\varphi_0}) = M/\mathfrak{M}M$$

elde edilir. Böylece,

$\overline{\varphi_0}$ dönüşümü örtendir.

$\overline{\varphi_0}$ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim.

$$\text{Çek}(\overline{\varphi_0}) = \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \overline{\varphi_0}((r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0) = \overline{0}_{M/\mathfrak{M}M}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}M = 0 + \mathfrak{M}M\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in \mathfrak{M}M\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid r_1m_1 + r_2m_2 + \ldots + r_{s_0}m_{s_0} \in \mathfrak{M}M\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \overline{r_1m_1 + r_2m_2 + \ldots + r_{s_0}m_{s_0}} = \overline{0}_{M/\mathfrak{M}M}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \overline{r_1m_1} + \overline{r_2m_2} + \ldots + \overline{r_{s_0}m_{s_0}} = \overline{0}_{M/\mathfrak{M}M}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \overline{r_1}.\overline{m_1} + \overline{r_2}.\overline{m_2} + \ldots + \overline{r_{s_0}}.\overline{m_{s_0}} = \overline{0}_{M/\mathfrak{M}M}\}.$$

$m_1, \ldots, m_{s_0}$ baz olduğundan,

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid \overline{r_1} = \ldots = \overline{r_{s_0}} = \overline{0}_{R/\mathfrak{M}}\}$$

elde edilir. Böylece,

$$\text{Çek}(\overline{\varphi_0}) = \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + \mathfrak{M}F_0 \mid r_i \in \mathfrak{M}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) + R^{so} \mid (r_1, \ldots, r_{s_0}) \in \mathfrak{M}F_0\}$$

$$= \{\overline{0}_{F_0/\mathfrak{M}F_0}\}$$

dır. Böylece,

$\overline{\varphi_0}$ dönüşümü birebirdir.

$\overline{\varphi_0}$ dönüşümünün homomorfizma olduğunu gösterelim.

$$\overline{\varphi_0}(((r_1,\dots,r_{s_0})+\mathfrak{M}F_0)+((r_1^{'},\dots,r_{s_0}^{'})+\mathfrak{M}F_0))$$

$$\overline{\varphi_0}((r_1,\dots,r_{s_0})+(r_1^{'},\dots,r_{s_0}^{'})+\mathfrak{M}F_0)$$

$$\overline{\varphi_0}((r_1+r_1^{'},\dots,r_{s_0}+r_{s_0}^{'})+\mathfrak{M}F_0)$$

dır. $\overline{\varphi_0}$'ın tanımından,

$$\varphi_0(r_1+r_1^{'},\dots,r_{s_0}+r_{s_0}^{'})+\mathfrak{M}M$$
$$=\sum_{i=1}^{s_0}(r_i+r_i^{'})m_i+\mathfrak{M}M$$
$$=(\sum_{i=1}^{s_0}r_im_i+\mathfrak{M}M)+(\sum_{i=1}^{s_0}r_i^{'}m_i+\mathfrak{M}M)$$

elde edilir. Böylece

$$=\overline{\varphi_0}((r_1,\dots,r_{s_0})+\mathfrak{M}F_0)+\overline{\varphi_0}((r_1^{'},\dots,r_{s_0}^{'})+\mathfrak{M}F_0)$$

dır.

$\overline{r}\in R/\mathfrak{M}$ alalım. Burada $\overline{r}=r+\mathfrak{M}$ dir.

$$\overline{\varphi_0}(\overline{r}.((r_1,\dots,r_{s_0})+\mathfrak{M}F_0))$$

$\overline{\varphi_0}$'nın tanımından,

$$=\overline{\varphi_0}((rr_1,\dots,rr_{s_0})+\mathfrak{M}F_0)$$
$$=\varphi_0(rr_1,\dots,rr_{s_0})+\mathfrak{M}M$$
$$=\sum_{i=1}^{s_0}(rr_i)m_i+\mathfrak{M}M\in M/\mathfrak{M}M$$

elde edilir. Böylece,

$$=\overline{r}(\sum_{i=1}^{s_0}r_im_i+\mathfrak{M}M)\in M/\mathfrak{M}M$$
$$=\overline{r}(\varphi_0(r_1,\dots,r_{s_0})+\mathfrak{M}M)$$
$$=\overline{r}.\overline{\varphi_0}((r_1,\dots,r_{s_0})+\mathfrak{M}F_0)$$

Buradan,

$\overline{\varphi_0}$ homomorfizmadır.

$\overline{\varphi_0}$ izomorfizmadır.

$K_1 :=$ Çek(φ_0) olsun.

$$\text{Çek}(\varphi_0) = \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in R^{s_0} \mid \varphi_0(r_1, \ldots, r_{s_0}) = 0\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in R^{s_0} \mid r_1 m_1 + \ldots + r_{s_0} m s_0 = 0_M\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in R^{s_0} \mid \overline{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \ldots + r_{s_0} m_{s_0}} = \overline{0}_{M/\mathfrak{M}M}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in R^{s_0} \mid \overline{r_1}.\overline{m_1} + \overline{r_2}.\overline{m_2} + \ldots + \overline{r_{s_0}}.\overline{m_{s_0}} = \overline{0}_{M/\mathfrak{M}M}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in R^{s_0} \mid \overline{r_1} = \ldots = \overline{r_{s_0}} = \overline{0}_{R/\mathfrak{M}}\}$$

$$= \{(r_1, \ldots, r_{s_0}) \in R^{s_0} \mid r_i \in \mathfrak{M}\}$$

elde edilir.

$$(r_1, \ldots, r_{s_0}) = r_1(1, 0, \ldots, 0) + r_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + r_{s_0}(0, \ldots, 0, 1)$$

dır. Böylece,

$$K_1 \subset \mathfrak{M}F_0$$

elde edilir.

O halde, K_1 sonlu üretilmiştir. Benzer şekilde,

$$\psi : F_1 := R^{s_1} \to K_1$$

$$(r_1, \ldots, r_{s_1}) \mapsto \sum_{i=1}^{s_1} r_i k_i$$

örten dönüşümünü tanımlayabiliriz.

$$F_1 \xrightarrow{\psi} K_1 \hookrightarrow F_0$$

elde edilir. Burada,

$$\varphi_1 = (\varphi_0 \circ \psi) : F_1 \to F_0$$

olsun. Böylece,

$$\varphi_1(F_1) = (\varphi_0 \circ \psi)(F_1) = \varphi_0(\psi(F_1))$$

dır. ψ örten olduğundan,

$$\varphi_0(K_1) \subset \mathfrak{M}F_0$$

elde edilir. Buraya kadar,

$$F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

tam dizisini elde ettik.

Bu şekilde devam edilirse, M modülünün minimal serbest çözülümünü elde ederiz. $\square$

3.4 Derecelendirilmiş Modüllerin Çözülümleri

3.4.1 Tanım. R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R-modül olsun. F_k sonlu üretilmiş derecelendirilmiş serbest R modülleri

$$F_k = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{j-k,k}}$$

ve φ_k sıfır dereceden homojen dönüşümler olmak üzere,

$$\ldots \to F_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \to \ldots \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to M \to 0$$

çözülümüne M modülünün derecelendirilmiş serbest çözülümü denir.

$\mathfrak{M}$ ideali, tüm pozitif dereceli elemanların ürettiği bir ideal iken

$$\varphi_k(F_k) \subset \mathfrak{M}F_{k-1}$$

sağlanıyor ise serbest çözülüm minimaldir.

$$\beta_{j,k} = \beta_{j,k}(M)$$

sayılarına M modülünün derecelendirilmiş Betti sayıları denir ve

$$\beta_k(M) := \sum_j \beta_{j,k}(M)$$

sayısına M modülünün k. Betti sayısı adı verilir.

3.4.2 Teorem. (Derecelendirilmiş Hilbert Sizigi Teoremi) $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. Her sonlu üretilmiş derecelendirilimiş R-modülün en fazla n uzunluğunda derecelendirilmiş çözülümü vardır.

İspat: [11] $\square$

4. SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİN HESAPLANMASI

Bu bölümde, serbest çözülümlerin hesaplanması hakkında bilgi verilecektir. Temel tanımlar ve örnekler anlatılırken [11], [12] kaynakları kullanılmıştır.

4.1 Bir İdealin Serbest Çözülümü

Bu bölümde, bir idealin serbest çözülümünün hesaplanması lineer cebir kullanılarak anlatılacaktır.

$\mathcal{I} = (F_{0,1}, \ldots, F_{0,t_0})$, R halkasının bir ideali olsun.

$$\varphi_0 : R^{t_0} \to \mathcal{I} \subseteq R^1$$

$$\begin{aligned}(G_1, \ldots, G_{t_0}) \mapsto \varphi_0(G_1, \ldots, G_{t_0}) &= G_1 F_{0,1} + \ldots + G_{t_0} F_{0,t_0} \\ &= \begin{bmatrix} F_{0,1} \ldots F_{0,t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{t_0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde R modül homomorfizması oluşturabiliriz.

φ_0 dönüşümü ile ilgili gözlemler yapalım.

(i) $\text{Çek}(\varphi_0) = \{(G_1, \ldots, G_{t_0}) \mid \varphi_0(G_1, \ldots, G_{t_0}) = G_1 F_{0,1} + \ldots + G_{t_0} F_{0,t_0} = 0\}$
$= \{F_{0,1}, \ldots, F_{0,t_0}$'ın bütün sizigileri$\}$
$= \mathcal{I}$ idealinin birinci sizigi modülü

(ii) Çek(φ_0), R^{t_0}'ın sonlu üretilmiş altmodülüdür. Bu durumda,

$$\text{Çek}(\varphi_0) =< \underline{F_{1,1}}, \ldots, \underline{F_{1,t_1}} >= \{G_1 \underline{F_{1,1}} + \ldots + G_{t_1} \underline{F_{1,t_1}} \mid G_i \in R\}$$

olacak şekilde $\underline{F_{1,1}}, \ldots, \underline{F_{1,t_1}}$ vardır.

(iii) Çek(φ_0), A matrisinin sıfır uzayı gibidir.

Böylece,

$$\varphi_1 : R^{t_1} \to \text{Çek}(\varphi_0) \subseteq R^{t_0}$$

$$(G_1, \ldots, G_{t_1}) \mapsto \varphi_0(G_1, \ldots, G_{t_1}) = G_1 \underline{F_{1,1}} + \ldots + G_{t_0} \underline{F_{1,t_1}}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{F_{1,1}} \ldots \underline{F_{1,t_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{t_1} \end{bmatrix}$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz.

Burada da aşağıdaki gözlemleri yapabiliriz.

(i) Çek(φ_1), ikinci sizigi modülüdür.

(ii) Çek(φ_1), Çek(φ_0)'ın üreteçlerinin arasındaki bağıntıları ölçer.

(iii) Çek(φ_1) sonlu üretilmiştir:

$$\text{Çek}(\varphi_1) =< \underline{F_{2,1}}, \ldots, \underline{F_{2,t_2}} >$$

olacak şekilde $\underline{F_{2,1}}, \ldots, \underline{F_{2,t_2}} \in$ Çek(φ_1) vardır.

Yine üstteki gibi,

$$\varphi_1 : R^{t_2} \to \text{Çek}(\varphi_1)$$

dönüşümünü elde ederiz. Çözülüm, Hilbert Sizigi Teoremi gereğince sonludur.

4.1.1 Tanım. $\mathcal{I} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ homojen idealinin minimal derecelendirilmiş serbest çözülümü,

$$0 \to F_l \xrightarrow{\varphi_l} F_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} \ldots F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{I} \to 0$$

şeklindedir ve

- $l \leq n$
- φ_i, R'de bir matris
- $F_i = R(-d_{i,1}) \oplus \ldots \oplus R(-d_{i,t})$

şartlarını sağlar.

4.1.2 Tanım. $\beta_{i,j}(\mathcal{I})$ şeklindeki Betti sayısı, Çek(φ_{i-1}) modülünün minimal üreteçlerinin sayısıdır.

4.1.3 Örnek. $R = k[x, y, z]$ halkası ve $\mathcal{I} = (x^2, y^2, z)$ ideali için minimal serbest çözülümü oluşturalım. $\mathcal{I}$ idealinde, $x^2 = F_{0,1},\ y^2 = F_{0,2},\ z = F_{0,3}$ olsun.

$$\varphi_0 : R^{3=t_0} \to \mathcal{I} \subseteq R$$

$$\varphi_0\left(\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}\right) = G_1.F_{0,1} + G_2.F_{0,2} + G_3.F_{0,3}$$

dönüşümünü oluşturalım.

$$\text{Çek}(\varphi_0) = \left\{ \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \mid \varphi_0\left(\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}\right) = G_1.F_{0,1} + G_2.F_{0,2} + G_3.F_{0,3} = 0 \right\}$$

Çek(φ_0), 1. sizigi modülüdür.

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}_{3\times 3 = t_1}$$

Buraya kadar oluşan serbest çözülüm,

$$R^{3=t_1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}} R^{3=t_0} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}} \mathcal{I} \to 0$$

şeklindedir.

Çek(φ_0), R^3 modülünün sonlu üretilmiş altmodülüdür. $\exists\ F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}$ için,

$$\text{Çek}(\varphi_0) = < F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3} >$$

dır. Bu durumda,

$$\text{Çek}(\varphi_0) = \{G_1.F_{1,1} + G_2.F_{1,2} + G_3.F_{1,3} \mid G_i \in R\}$$

olur. Şimdi,

$$\varphi_1 : R^{3=t_1} \to \text{Çek}(\varphi_0) \subseteq R^{3=t_0}$$

$$(G_1, G_2, G_3) \mapsto \varphi_1((G_1, G_2, G_3)) = G_1.F_{1,1} + G_2.F_{1,2} + G_3.F_{1,3}$$

dönüşümünü oluşturalım.

$$\text{Çek}(\varphi_1) = \left\{ \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \mid \varphi_1 \left(\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \right) = G_1.F_{1,1} + G_2.F_{1,2} + G_3.F_{1,3} = 0 \right\}$$

Çek(φ_1), 2. sizigi modülüdür.

$$\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}_{3\times 1 = t_2} = 0$$

elde edilir. Buraya kadar çözülüm,

$$R^{1=t_2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}} R^{3=t_1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}} R^{3=t_0} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}} \mathcal{I} \to 0$$

şeklindedir. Çek(φ_1), R^3 modülünün sonlu üretilmiş altmodülüdür. $\exists\ F_{2,1}, F_{2,2}, F_{2,3}$ için,

$$\text{Çek}(\varphi_1) =< F_{2,1}, F_{2,2}, F_{1,3} >$$

dır.

$$\text{Çek}(\varphi_1) = \{G_1^{'}.F_{2,1} + G_2^{'}.F_{2,2} + G_3^{'}.F_{2,3} \mid G^{'} \in R\}$$

olur. Şimdi,

$$\varphi_2 : R^{1=t_2} \to \text{Çek}(\varphi_1) \subseteq R^{3=t_1}$$

$$G \mapsto \varphi_2((G = G_1^{'}.x + G_2^{'}.y + G_3^{'}.z)) = G_1^{'}.F_{2,1} + G_2^{'}.F_{2,2} + G_3^{'}.F_{2,3}$$

$$\text{Çek}(\varphi_2) = \{G \mid \varphi_2(G) = G_1^{'}.F_{2,1} + G_2^{'}.F_{2,2} + G_3^{'}.F_{2,3} = 0\}$$

dır.

$$\begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1^{'} & G_2^{'} & G_3^{'} \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. Burada,

$$G_1^{'} = 0\ ,\ G_2^{'} = 0\ ,\ G_3^{'} = 0$$

dır. Böylece,

$$0 \to R^{1=t_2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}} R^{3=t_1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}} R^{3=t_0} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}} \mathcal{I} \to 0$$

$\mathcal{I}$ idealinin minimal serbest çözülümünü elde ederiz.

4.2 Bir Derecelendirilmiş Modülün Serbest Çözülümü

$\mathcal{I} = (F_{0,1}, \ldots, F_{0,t_0})$ $der(F_{0,i}) = d_{0,i}$ dereceli homojen ideal olsun.

$$\varphi_0 : R(-d_{0,1}) \oplus R(-d_{0,2}) \oplus \ldots \oplus R(-d_{0,t_0}) \to (F_{0,1}, \ldots, F_{0,t_0}) \subseteq R$$

$$(G_1, \ldots, G_{t_0}) \mapsto \varphi_0((G_1, \ldots, G_{t_0})) = G_1.F_{0,1} + \ldots + G_{t_0}.F_{0,t_0}$$

dönüşümünü tanımlayalım. φ_0 dönüşümünün derecesi sıfırdır:

$$(G_1, \ldots, G_{t_0}),\ R(-d_{0,1}) \oplus R(-d_{0,2}) \oplus \ldots \oplus R(-d_{0,t_0})$$

modülünde d dereceli homojen ideal ise, R'de

$$der(G_i) = d - d_{0,i}$$

dir.

$$\varphi((G_1, \ldots, G_{t_0})) = G_1.F_{0,1} + \ldots + G_{t_0}.F_{0,t_0}$$

R'de d dereceli homojen elemandır.

$$\text{Çek}(\varphi_0) =< F_{1,1}, \ldots, F_{1,t_1} >, \quad R(-d_{0,1}) \oplus \ldots \oplus R(-d_{0,t_0})$$

modülünün sırasıyla, $d_{1,1}, \ldots, d_{1,t_1}$ dereceli elemanlarından üretilmiştir.

$$\varphi_1 : R(-d_{1,1}) \oplus \ldots \oplus R(-d_{1,t_1}) \to \text{Çek}(\varphi_1) \subseteq R(-d_{0,1}) \oplus \ldots \oplus R(-d_{0,t_0})$$

$$(G_1, \ldots, G_t) \mapsto \begin{bmatrix} F_{1,1} & \ldots & F_{1,t_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_t \end{bmatrix}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Çek(φ_1) homojen elemanlardan üretilmiştir. Bu şekilde devam edilerek derecelendirilmiş modülün serbest çözülümü elde edilir. Derecelendirilmiş Hilbert Sizigi Teoremi gereğince bu çözülüm sonludur.

4.2.1 Tanım. Sonlu üretilmiş M , R-modülünün serbest çözülümü

$$\mathcal{F} : \ldots F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

R-modüllerin homomorfizmalarının bir dizisidir öyleki;

(i) $\mathcal{F}$ sonlu üretilmiş F_i R-modüllerinin bir kompleksidir.

(ii) $\mathcal{F}$ tamdır.

(iii) $M \cong F_0/\text{Gör}(\varphi_i) = \text{Eşçek}(\varphi_i)$

koşullarını sağlar. Bu çözülümü,

$$\mathcal{F} : \ldots F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to M \to 0$$

şeklinde de yazabiliriz.

M derecelendirilmiş modül ,$\mathcal{F}$ derecelendirilmiş kompleks ve

$$F_0/\text{Gör}(\varphi_1) \cong M$$

izomorfizmasının derecesi 0 ise çözülüm derecelendirilmiştir.

Şimdi, derecelendirilmiş serbest çözülümü oluşturalım. M sonlu üretilmiş serbest modül olsun.

Adım 1: $M_0 = M$ alalım. M_0 modülünün $m_1, \ldots, m_r$ homojen üreteçlerini seçelim. $a_1, \ldots, a_r$, $m_1, \ldots, m_r$ üreteçlerinin dereceleri ve $F_0 = R(-a_1) \oplus \ldots \oplus R(-a_r)$ olsun. $1 \leq j \leq r$ için, $R(-a_r)$'nin 1-üreteci f_j ile gösterilir. Böylece,

$$der(f_j) = a_j$$

olur.

$1 \leq j \leq r$ için,

$$\varphi_0 : F_0 \to M$$

$$f_j \mapsto m_j$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Tümevarım ile F_i ve φ_i'nın tanımlandığını varsayalım.

Adım i+1: $M_{i+1} = \text{Çek}(\varphi_i)$

M_{i+1} modülünün homojen üreteçlerini $l_1, \ldots, l_s$ olarak seçelim. $c_1, \ldots, c_s$, $l_1, \ldots, l_s$ üreteçlerinin dereceleri olsun.

$F_{i+1} = R(-c_1) \oplus \ldots \oplus R(-c_s)$

$1 \leq j \leq s$ için , $R(-c_j)$ modülünün 1-üreteci g_j olarak gösterilir. Böylece,

$$der(g_j) = c_j$$

olur. $1 \leq j \leq s$ için,

$$\varphi_{i+1} : F_{i+1} \rightarrow M_{i+1} \subset F$$

$$g_j \mapsto l_j$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$$\text{Gör}(\varphi_{i+1}) \subset \text{Çek}(\varphi_i)$$

$$\text{Çek}(\varphi_i) \subset \text{Gör}(\varphi_{i+1}) \subset M_{i+1}$$

4.2.2 Örnek. $R = k[x, y]$ halkası ve $M = (x^3, xy, y^5)$ için R/M modülünün R üzerindeki derecelendirilmiş serbest çözülümünü bulalım.

<u>Adım 0:</u> $F_0 = R$

$$\varphi_0 : R \rightarrow R/M$$

<u>Adım 1:</u> Çek(φ_0) modülünü bulalım.

$$\text{Çek}(\varphi_0) = \{r \in R \mid \varphi_0(r) = M\}$$

$$= \{r \in R \mid r + M = M\} = M$$

$$= (x^3, xy, y^5)$$

elde edilir. x^3, xy, y^5 elemanları Çek(φ_0) modülünün homojen üreteçleridir ve dereceleri sırasıyla 3, 2, 5 dir. $F_1 = R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5)$ olsun.

f_1 'in 1-üreteci $R(-3)$

f_2 'nin 1-üreteci $R(-2)$

f_3 'ün 1-üreteci $R(-5)$

dir. Buradan,

$$der(f_1) = 3, \ \ der(f_2) = 2, \ \ der(f_3) = 5$$

elde edilir.

$$\varphi_1 : R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5) \rightarrow R$$

$$f_1 \mapsto x^3$$

$$f_2 \mapsto xy$$

$$f_3 \mapsto y^5$$

dönüşümünü tanımlayalım. Böylece, çözülümün başlangıcını elde ettik.

$$R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5) \xrightarrow{(x^3,xy,y^5)} R \to R/M \to 0$$

<u>Adım 2:</u> Çek(φ_1) modülünü oluşturalım. Çek(φ_1) modülünün homojen üreteçlerini bulalım.

$$\text{Çek}(\varphi_1) \subset R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5) =< f_1, f_2, f_3 >$$

$$x \in \text{Çek}(\varphi_1) \subset< f_1, f_2, f_3 >$$

Buradan,

$$x = \alpha.f_1 + \beta.f_2 + \gamma.f_3$$

elde edilir. $x \in$ Çek(φ_1) olduğundan $\varphi_1(x) = 0$ dır.

$$\varphi_1(\alpha.f_1 + \beta.f_2 + \gamma.f_3) = 0$$

φ_1 homomorfizma olduğundan,

$$\alpha\varphi_1(f_1) + \beta\varphi_1(f_2) + \gamma\varphi_1(f_3) = 0$$

dır. Buradan,

$$\alpha.x^3 + \beta.xy + \gamma.y^5 = 0$$

$$\alpha.x^3 = -y(\beta.x + \gamma.y^4)$$

elde edilir. Böylece,

$$y|\alpha$$

dir. Benzer şekilde,

$$\gamma.y^5 = -x(\alpha.x^2 + \beta.y)$$

$$x \mid \gamma$$

dır.

$$y \mid \alpha \Rightarrow \alpha = y.\tilde{\alpha}$$

$$x \mid \gamma \Rightarrow \gamma = x.\tilde{\gamma}$$

elde edilir. Burada, $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ dır.

$\alpha.x^3 + \beta.xy + \gamma.y^5 = 0$ olduğundan $\alpha = y.\tilde{\alpha}$ ve $\gamma = x.\tilde{\gamma}$ yerine yazılırsa,

$$y\tilde{\alpha}x^3 + \beta xy + x\tilde{\gamma}y^5 = 0$$

elde edilir.

$$\Rightarrow xy(\tilde{\alpha}x^2 + \beta + \tilde{\gamma}y^4) = 0, \ (\text{Burada } xy \neq 0)$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}x^2 + \beta + \tilde{\gamma}y^4 = 0$$

$$\Rightarrow \beta = -\tilde{\alpha}x^2 - \tilde{\gamma}y^4 \in R$$

β'nın her terimi x^2 ya da y^4 ile bölünebilirdir.

$$\tilde{\alpha} = \alpha' y^4 + \alpha'' \ , \ \alpha'' \nmid y^4$$

$$\beta = \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4 \ , \ \beta \nmid x^2 \text{ ve } \beta'' \nmid y^4$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma' + \gamma'' x^2 \ , \ \gamma' \nmid x^2$$

dır. $\tilde{\alpha}x^2 + \beta + \tilde{\gamma}y^4 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$(\alpha' y^4 + \alpha'')x^2 + (\beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4) + (\gamma' + \gamma'' x^2)y^4 = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha' y^4 x^2 + \alpha'' x^2 + \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4 + \gamma' y^4 + \gamma'' x^2 y^4 = 0$$

$$(\alpha' + \bar{\beta} + \gamma'')x^2 y^4 + (\alpha'' + \beta'')x^2 + (\beta' + \gamma')y^4 = 0$$

dır.

$\alpha'' + \beta''$ terimleri y^4 ile bölünebilir olmadığından,

$$\alpha'' + \beta'' = 0$$

dır.

$\beta' + \gamma'$ terimleri x^2 ile bölünebilir olmadığından,

$$\beta' + \gamma' = 0$$

dır. Böylece,

$$(\alpha' + \bar{\beta} + \gamma'') = 0$$

elde edilir.

Şimdi, $(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'')$'yı bulalım. $\alpha'' + \beta'' = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\alpha'' = 1 \text{ ve } \beta'' = -1$$

olabilir. Buradan,

$$\alpha' = 0,\ \bar{\beta} = 0,\ \gamma'' = 0$$

olur ya da,

$$\alpha'' = 0 \text{ ve } \beta'' = 0$$

olur ise, $\beta' + \gamma' = 0$ dır. Buradan,

$$\alpha' = 0,\ \bar{\beta} = 0,\ \gamma'' = 0$$

olur. Bu durumda,

$$(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (0, 1, 0, -1, 0, 0, 0)$$

$$(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)$$

ya da,

$$(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (1, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$$

$$(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$$

elde edilir.

- $(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (0, 1, 0, -1, 0, 0, 0)$ olsun.

$$\tilde{\alpha} = \alpha' y^4 + \alpha'' \Rightarrow \tilde{\alpha} = 1$$

olur. Buradan,

$$\alpha = y\tilde{\alpha} \text{ olduğundan } \alpha = y$$

dir.

$$\beta = \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4 \Rightarrow \beta = -x^2$$

ve

$$\tilde{\gamma} = \gamma' + \gamma'' x^2 \Rightarrow \tilde{\gamma} = 0$$

dır. Böylece,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (y, -x^2, 0)$$

olur.

- $(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)$ olsun.

$$\tilde{\alpha} = \alpha' y^4 + \alpha'' \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$\beta = \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4 \Rightarrow \beta = -y^4$$

ve

$$\tilde{\gamma} = \gamma' + \gamma'' x^2 \Rightarrow \tilde{\gamma} = 1$$

dır.

$\gamma = x\tilde{\gamma}$ olduğundan $\gamma = x$ olur.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, -y^4, x)$$

elde edilir.

- $(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (1, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$ olsun.

$$\tilde{\alpha} = \alpha' y^4 + \alpha'' \Rightarrow \tilde{\alpha} = y^4$$

$\alpha = y\tilde{\alpha}$ olduğundan, $\alpha = y^5$ dır.

$$\beta = \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4 \Rightarrow \beta = -x^2 y^4$$

ve

$$\tilde{\gamma} = \gamma' + \gamma'' x^2 \Rightarrow \tilde{\gamma} = 0$$

dır.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (y^5, -x^2y^4, 0)$$

elde edilir.

- $(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \bar{\beta}, \gamma', \gamma'') = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$ olsun.

$$\tilde{\alpha} = \alpha' y^4 + \alpha'' \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$\beta = \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4 \Rightarrow \beta = -x^2 y^4$$

ve

$$\tilde{\gamma} = \gamma' + \gamma'' x^2 \Rightarrow \tilde{\gamma} = x^2$$

dır.

$\gamma = x\tilde{\gamma}$ olduğundan $\gamma = x^3$ olur. Böylece,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, -x^2y^4, x^3)$$

elde edilir.

$$\sigma_1 = (y, -x^2, 0)$$

$$\sigma_2 = (0, -y^4, x)$$

$$\sigma_3 = (y^5, -x^2y^4, 0)$$

$$\sigma_4 = (0, -x^2y^4, x^3)$$

diyelim. σ_3 ve σ_4, σ_1 ve σ_2'nin,

$$\sigma_3 = y^4\sigma_1 \ , \ \sigma_4 = x^3\sigma_2$$

şeklindeki lineer kombinasyonu olduğundan sadece σ_1 ve σ_2'yi almak yeterlidir.

Böylece,

$$(y, -x^2, 0) = yf_1 - x^2f_2$$

ve

$$(0, -y^4, x) = -y^4f_2 + xf_3$$

Çek(φ_1) modülünün homojen üreteçleridir ve dereceleri,

$$der(y) + der(f_1) = 4$$

$$der(y^4) + der(f_2) = 6$$

dır. Buradan,

$$F_2 = R(-4) \oplus R(-6)$$

alalım. g_1, g_2, $R(-4)$ ve $R(-6)$'nın 1-üreteçleri olsun. Bu durumda,

$$der(g_1) = 4 \text{ ve } der(g_2) = 6$$

olur. O halde,

$$\varphi_2 : R(-4) \oplus R(-6) \to R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5)$$

$$g_1 \mapsto yf_1 - x^2 f_2$$

$$g_2 \mapsto -y^4 f_2 + xf_3$$

dönüşümünü şeklinde tanımlayalım. Böylece çözülüm,

$$R(-4) \oplus R(-6) \xrightarrow{\begin{bmatrix} y & 0 \\ -x^2 & -y^4 \\ 0 & x \end{bmatrix}} R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^3 & xy & y^5 \end{bmatrix}} R$$

haline gelir.

<u>Adım 3:</u> Çek(φ_2) modülünün homojen üreteçlerini bulalım. $\mu, \nu \in R$ için

$$\mu.g_1 + \nu.g_2 \in \text{Çek}(\varphi_2)$$

dir. g_1 ve g_2 yerine yazılırsa,

$$\mu(yf_1 - x^2 f_2) + \nu(-y^4 f_2 + xf_3) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\mu y f_1 - \mu x^2 f_2 - \nu y^4 f_2 + \nu x f_3 = 0$$

$$\mu y f_1 + (-\mu x^2 + \nu y^4) f_2 + \nu x f_3 = 0$$

elde edilir. f_1, f_2, f_3 lineer bağımsız olduğundan,

$$\mu y = 0\ ,\ -\mu x^2 + \nu y^4 = 0\ ,\ \nu x = 0$$

dır. Buradan,

$$\mu = \nu = 0$$

elde edilir. O halde

$$F_3 = 0$$

dır. Böylece,

$$0 \to R(-4) \oplus R(-6) \xrightarrow{\begin{bmatrix} y & 0 \\ -x^2 & -y^4 \\ 0 & x \end{bmatrix}} R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^3 & xy & y^5 \end{bmatrix}} R \to R/M \to 0$$

derecelendirilmiş serbest çözülümü elde ettik.

5. MCCOY TEOREM

Değişmeli halkalar üzerindeki lineer cebirde, N. H. McCoy'un araştırmaları oldukça önemli ve etkileyicidir [13], [14].

Bu bölümde, değişmeli halkalardaki injektif matrisleri karakterize eden McCoy Teoremini ve ispatını detaylıca anlatacağız. Bu amaçla, serbest modüllerin homomorfizmalarının birebirliği ve örtenliği ile ilgili bir teoremi vermeden önce teoremin ispatında kullanılacak olan yardımcı teorem ile başlayalım.

5.1 Yardımcı Teorem. [15] E, F sonlu üretilmiş R-modüller ve

$$\phi : E \to F$$

bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda, ϕ homomorfizmasının örten olması için gerekli ve yeterli koşul R'nin her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için

$$\bar{\phi} : E/\mathfrak{M}E \to F/\mathfrak{M}F$$

örten homomorfizma olmasıdır.

İspat: ϕ homomorfizmasının örten olduğunu varsayalım.

$$\text{Gör}(\bar{\phi}) = F/\mathfrak{M}F$$

olduğunu ispatlamalıyız.

ϕ örten ise $\text{Gör}(\phi) = F$ dir.

$$\text{Gör}(\bar{\phi}) = \{\bar{\phi}(x + \mathfrak{M}E) \mid x + \mathfrak{M}E \in E/\mathfrak{M}E\}$$

$$= \{\phi(x) + \mathfrak{M}F \mid \phi(x) \in F\}$$

$$= F/\mathfrak{M}F$$

Tersine,

$$\bar{\phi} : E/\mathfrak{M}E \to F/\mathfrak{M}F$$

örten homomorfizma olduğunu varsayalım.

$$\text{Gör}(\phi) = F,$$

buna denk olarak,

$$F/\text{Gör}(\phi) = (0)$$

olduğunu ispatlamalıyız. Öncelikle, R'nin her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için

$$\mathfrak{M}.(F/\text{Gör}(\phi)) = F/\text{Gör}(\phi)$$

eşitliğini görelim.

$$\mathfrak{M}.(F/\text{Gör}(\phi)) \subseteq F/\text{Gör}(\phi)$$

olduğu açıktır.

$x \in F$ olsun. Varsayımdan,

$$\text{Gör}(\bar{\phi}) = F/\mathfrak{M}F$$

olduğundan,

$$x + \mathfrak{M}F = \bar{\phi}(y + \mathfrak{M}E)$$

olacak şekilde $y \in E$ vardır. Buradan,

$$x + \mathfrak{M}F = \phi(y) + \mathfrak{M}F$$

$$\Rightarrow \phi(y) - x \in \mathfrak{M}F$$

$$\Rightarrow \phi(y) - x = z \ , \ z \in \mathfrak{M}F$$

$$\Rightarrow x + z = \phi(y) \in \text{Gör}(\phi)$$

$$\Rightarrow x + \text{Gör}(\phi) = -z + \text{Gör}(\phi) \ , \ -z \in \mathfrak{M}F$$

$$\Rightarrow F/\text{Gör}(\phi) \subseteq \mathfrak{M}.(F/\text{Gör}(\phi))$$

elde edilir.

R halkasının bir tek maksimal ideali, $\mathfrak{M}$, olduğunu varsayalım. 2.4.8 Nakayama Yardımcı Teoremından, F, R üzerinde sonlu üretilmiş modül ve $\mathfrak{M}F = F$ ise $F = (0)$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda da, $F/\text{Gör}(\phi)$ sonlu üretilmiş bir modüldür.

$$\mathfrak{M}.(F/\text{Gör}(\phi)) = F/\text{Gör}(\phi)$$

olduğundan,

$$F/\text{Gör}(\phi) = (0)$$

olur. R bir lokal halka olsaydı, ispat bitmiş olurdu. Her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için lokalizasyondan ve bir modül lokal olarak (0) ise (0) modül olmak zorundadır sonucundan ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi, teorem ile devam edelim.

5.2 Teorem. [15] R bir değişmeli halka ve $A \in Mat(n, m)$ olmak üzere,

$$\phi : R^m \to R^n$$

$$x \mapsto \phi(x) = A.x$$

bir R-modül homomorfizması olsun.

(i) $m \geq n$ ve $\mathcal{I}_n(A)$ R'nin, A matrisinin $n \times n$-minörleri ile üretilen bir ideal olsun. Bu durumda, ϕ'nin örten olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{I}_n(A) = R$ olmasıdır.

(ii) $m \leq n$ ve $\mathcal{I}_m(A)$, R'nin, A matrisinin $m \times m$-minörleri ile üretilen bir ideali olsun. Bu durumda, ϕ'nin birebir olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{I}_m(A)$'nın sıfırlayıcısı, sıfır elemanıdır.

İspat:

(i) 5.1 Yardımcı Teorem'den

$$\bar{\phi} : R^m/\mathfrak{M}R^m \to R^n/\mathfrak{M}R^n$$

dönüşümünün örten dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{I}_n(A) = R$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$R/\mathfrak{M}$ cisim olduğundan,

$$\bar{\phi} : R^m/\mathfrak{M}R^m \to R^n/\mathfrak{M}R^n$$

dönüşümü örtendir.

$$\Leftrightarrow Rank(\bar{\phi}) = n$$

$$\Leftrightarrow Rank(A) = n$$

$\Leftrightarrow$ R'nin her $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için $\mathfrak{M}$ modülüne göre A'nın $(n \times n)$-alt determinantı sıfır değilidir. Böylece, A'nın bir $(n \times n)$-minörü $\mathfrak{M}$'de olamaz.

Sonuçta,

$$\mathcal{I}_n(A) = R$$

olur.

(ii) Şimdi,

ϕ birebir değildir. $\Leftrightarrow \phi(x) = 0$ olacak şekilde $x \in R^m/(0)$ elemanı vardır.

Bu da,

$$Ax = 0$$

lineer denklemlerinin homojen sisteminin bir aşikar olmayan x çözümü vardır, demektir. $\square$

Üstteki ifadeyi ispatlamak için McCoy Teoremi yeterlidir:

5.3 Teorem. (McCoy Teoremi) $Ax = 0$ homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul $Sfr(\mathcal{I}_m(A)) \neq \{0\}$ olmasıdır.

İspat: $A = (a_{ij}) \in Mat(n, m)$ olsun. $(b_1, \ldots, b_m)$'nin $b_k \neq 0$ ile $Ax = 0$ sisteminin bir aşikar olmayan çözümü olduğunu varsayalım. A matrisinin m mertebeli determinantı d olsun:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın elemanlarının A'nın ilk m satırından geldiğini varsayalım. Bu durumda,

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j = 0 \ , \ 1 \leq i \leq n$$

eşitliğinin i. denklemi olan

$$a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \ldots + a_{im}b_m = 0$$

eşitliğini, d'deki A_{ik},

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \ldots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \ldots & a_{(i-1)m} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \ldots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \ldots & a_{(i+1)m} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m(k-1)} & a_{m(k+1)} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

eşçarpanı (kofaktörü) ile çarpılıp toplanır ise, $j \neq h$ iken,

$$a_{1j}A_{1h} + a_{2j}A_{2h} + \ldots + a_{mj}A_{mh} = 0 \tag{5.1}$$

olduğundan

$$b_k.d = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde; b_k, A'nın m mertebeli tüm alt determinantlarını sıfırlar.

Sonuçta; b_k, $\mathcal{I}_m(A)$'yı sıfırlar, deriz.

Tersine, $0 \neq b \in R$'nin $\mathcal{I}_m(A)$'yı sıfırladığını varsayalım.

b, A'nın tüm elemanlarını sıfırladığından

$$(b, b, \ldots, b)$$

$A.x = 0$ sisteminin aşikar olmayan bir çözümüdür.

Diğer yandan, r sayısını

$$b.det(B) \neq 0$$

iken A'nın bir $r \times r$-alt matrisi B, olacak şekilde maksimal seçelim. Gerektiğinde sıfır denklemi eklenebileceğinden $r < n$ varsayalım. Üstelik, B matrisini

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde, A'nın sol üst köşesi olarak alalım. A matrisinin $(r+1) \times (r+1)$ alt matrislerini düşünelim.

$$c_1 = A_{(r+1)1}, \ \ldots \ , c_{r+1} = A_{(r+1)(r+1)} = det(B)$$

eşçarpanları olsun.

$$x_i = b.c_i, \ \ 1 \leq i \leq r+1$$

$$x_i = 0, \ \ r+2 \leq i \leq m$$

$A.x = 0$ sisteminin aşikar olmayan çözümleridirler:

$$x_{r+1} = b.c_{r+1} = b.det(B) \neq 0$$

olduğundan aşikar değildir.

$$x_1 = b.c_1, \ldots, x_r = b.c_r$$

(5.1) eşitliğinden, $A.x = 0$ denklemini sağlar. Kalan denklemlerde, A'nın herhengi bir $(r+1)$-mertebeli minörü b tarafından sıfırlandığı için sağlanmış olur. □

6. BİR KOMPLEKS NE ZAMAN TAM OLUR?

Bu bölümde, Buchsbaum-Eisenbud'ın "Bir kompleksi tam yapan nedir?" makalesindeki [3] tamlık teoremini anlatacağız. Bu teorem, bir Noether halkası üzerindeki sonlu üretilmiş serbest modüllerin oluşturduğu bir kompleksin tamlığını belirlemek için bir kriter verdiğinden oldukça önemlidir.

$$\mathcal{F} : 0 \to F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \tag{6.1}$$

sonlu üretilmiş F_i serbest R-modüllerinin bir kompleksi olsun. Bu kompleks ne zaman tam olur? Bir başka deyişle, bu kompleksin tamlığını belirlemek için dönüşümler ve modüller üzerindeki şartlar nelerdir?

6.1 Tamlık ve Rank Sıfırlık Teoremi

Bu bölümde, öncelikle R halkasının bir k cismi olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda, F_i, R-modülleri; F_i, k-modülleri, yani, sonlu boyutlu vektör uzaylarıdır. Böylece; F kompleksi, sonlu boyutlu vektör uzayların bir kompleksi olur.

6.1.1 Tanım. V, W bir k cismi üzerinde vektör uzaylar ve

$$T : V \mapsto W$$

bir lineer dönüşüm olsun.

$$\text{Rank}(T) = \text{Boy}(\text{Gör}(T))$$

$$\text{Sıfırlık}(T) = \text{Boy}(\text{Çek}(T))$$

olarak tanımlanır. Eğer dönüşümleri, temsilci matrisleriyle düşünürsek, bir dönüşümün rankı, bu dönüşümü temsil eden herhangi bir matrisindeki sıfır olmayan en büyük minörünün boyutudur.

6.1.2 Teorem. (Rank ve Sıfırlık Teoremi) V, bir k cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzay, W vektör uzay ve

$$T : V \mapsto W$$

bir lineer dönüşüm ise,

$$\text{Boy}(V) = Rank(T) + \text{Sıfırlık}(T)$$

veya buna denk olarak

$$\text{Boy}(V) = \text{Boy}(\text{Çek}(T)) + \text{Boy}(\text{Gör}(T))$$

dır.

$\mathcal{F}$ kompleksinde, kompleks tanımından,

$$\text{Gör}(\phi_i) \subseteq \text{Çek}(\phi_{i-1})$$

olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}$'in F_1 vektör uzayında tam olması için gerekli ve yeterli şart,

$$\text{Gör}(\phi_2) = \text{Çek}(\phi_1) \tag{6.2}$$

olmasıdır. 6.1.2 Teorem'den

$$Boy_k(F_1) = Boy_k(\text{Gör}(\phi_1)) + Boy_k(\text{Çek}(\phi_1))$$

(6.2)'den

$$Boy_k(F_1) = Boy_k(\text{Gör}(\phi_1)) + Boy_k(\text{Gör}(\phi_2))$$

elde edilir. 6.1.1 Tanım'dan

$$Rank(F_1) = Rank(\phi_1) + Rank(\phi_2)$$

yazabiliriz. Bunu, $1 \leq j \leq n$ için uygularsak, $\mathcal{F}$ kompleksinin tam olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1})$$

dır.

$S \subseteq R$ ve S, R tamlık bölgesinin sıfır olmayan elemanlarının oluşturduğu bir küme ve

$$k = R_s = \{\frac{r}{s} \mid r \in R,\ s \in S\}$$

olduğunu varsayalım.

$$\mathcal{F}_s : 0 \rightarrow F_{n_s} \xrightarrow{\phi_{n_s}} F_{n-1_s} \xrightarrow{\phi_{n-1_s}} \ldots \rightarrow F_{0_s}$$

$\mathcal{F}_s$, k cismi üzerindeki vektör uzayların bir kompleksi olsun. $\mathcal{F}$, R üzerinde tam ise, [9]'dan $\mathcal{F}_s$, k cismi üzerinde bir tam dizidir. Böylece,

$$Rank(F_{i_s}) = Rank(\phi_{i_s}) + Rank(\phi_{i+1_s})$$

yazabiliriz. [9]'dan

$$Rank_R(F) = Rank_{R_s}(F_s)$$

elde edilir ve R tamlık bölgesi ise,

$$Rank(\phi_j) = Rank(\phi_{j_s})$$

olduğundan

$$Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1})$$

elde edilir. Böylece,

$$Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq n$$

$\mathcal{F}$ kompleksinin tamlığı için doğal olarak gerekli koşuldur.

6.2 Tamlık ve McCoy Teoremi

R halkasının bir tamlık bölgesi olmadığını varsayalım. Bu durumda, $\mathcal{F}$ kompleksinin tam olması için

$$Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1}) \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

koşulunun gerekli olduğunu görelim.

$n = 1$ durumu ile başlayalım.

$$\mathcal{F} : 0 \xrightarrow{0} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

$\mathcal{F}$ tam olduğundan,

$$\text{Gör}(0) = \text{Çek}(\phi_1)$$

dir. Burada

$$\text{Çek}(\phi_1) = \{0\}$$

dır. Böylece, ϕ_1 dönüşümü birebirdir. F_i'ler serbest R-modül olduğundan,

$$F_1 = R^m, \ F_0 = R^n$$

yazabiliriz.

$$0 \to R^m \xrightarrow{\phi_1} R^n$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m, \ldots, a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m)$$

$$\phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

dir. Buradaki matrise,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} = A$$

diyelim. Böylece,

$$\mathcal{F} \ \text{ tamdır} \Leftrightarrow \text{Çek}(\phi_1) = \{0_{R^n}\} = \{(0, \ldots, 0)\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Çek}(\phi_1) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m \mid \phi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0)\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Çek}(\phi_1) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0$$

denklem sisteminin aşikar çözümü vardır.

Böylece, $\mathcal{F}$ tam olması için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

olan m-bilinmeyenli n-lineer denklemden oluşan homojen sistemin aşikar olmayan çözümü yoktur.

Bu koşul, McCoy Teoreminin tam olarak devrik ifadesidir. Bir başka deyişle:

$\mathcal{F}$'in tam olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tüm $m \times m$'lik δ minörleri için $r.\delta = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ elemanı yoktur.

6.3 Noether Halkaları ve McCoy Teoremi

McCoy Teoreminin, Noether halkalarındaki ifadesini vermeden önce önemli bir teorem verelim.

6.3.1 Teorem. R bir Noether halkası olsun. R halkasında sadece sıfır bölenlerin oluşturduğu bir ideal R'nin sıfır olmayan bir elemanı tarafından sıfırlanır.

$\mathcal{I}$, A matrisinin $(m \times m)$-minörleri tarafından üretilen bir ideal olsun. Eğer, $\mathcal{I}$ ideali sıfır bölen olmayan bir eleman içeriyor ise üstteki teoremden $\mathcal{F}$ tamdır.

R halkasının bir Noether halkası ve $\mathcal{F}$'nin tam olduğunu varsayalım. Bu durumda, McCoy Teoremi'nin devrik ifadesinden,

$$r.\mathcal{I} = 0$$

olacak şekilde $0 \neq r \in R$ elemanı yoktur. Bu durumda, 6.3.1 Teorem'den $\mathcal{I}$ ideali sadece sıfır bölenlerden oluşamaz, yani, $\mathcal{I}$'nın içinde bir sıfır bölen olmayan eleman vardır.

Böylece, üstteki bilgilerden aşağıdaki sonuca varılabilir.

6.3.2 Teorem. R bir Noether halkası ve

$$0 \to R^m \xrightarrow{\phi_1} R^n$$

sonlu üretilmiş serbest R-modüllerinin bir kompleksi olsun. Bu durumda, bu kompleksin tam olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{I}_m(\phi_1)$ idealinin sıfır bölen olmayan bir eleman içermesidir.

Şimdi, $n = 2$ durumunu göz önüne alalım ve $\mathcal{F}$ kompleksinin tam olduğunu varsayalım.

$$\begin{array}{rl} 0 \to & F_1' \xrightarrow{\phi'} F_0 \\ & f_1' \mapsto \phi'(f_1') \end{array}$$

kompleksi tam ise, G herhangi bir sonlu üretilmiş serbest modül olmak üzere, $\mathcal{F}$ de

$$F_2 = G \text{ ve } F_1 = G \oplus F_1'$$

alırsak,

$$\begin{array}{l} 0 \to F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_2} F_0 \\ G \hookrightarrow G \oplus F_1' \\ g \mapsto (g, 0) \\ \qquad (g, f_1') \mapsto \phi_1'(g, f_1') = \phi'(f_1') \end{array}$$

tam dizisini elde ederiz. Gerçekten de,

$$\text{Çek}(\phi_1) = \{(g, f_1') \mid \phi_1'(g, f_1') = 0\}$$

$$= \{(g, f_1') \mid \phi'(f_1') = 0\}$$

ϕ', birebir olduğundan,

$$= \{(g, f_1') \mid f_1' = 0\}$$

$$= \{(g, 0) \mid g \in G\} = \text{Gör}(\phi_2)$$

dir.

$$Rank(F_2) = Boy(\text{Gör}(\phi_2)) = Rank(\phi_2)$$

$$Rank(F_1) = Boy(\text{Gör}(\phi_1)) + Boy(\text{Gör}(\phi_2))$$

$$= Rank(\phi_1) + Rank(\phi_2)$$

Böylece, bu durumda da rank koşulu sağlanmış olur.

Şimdi, regüler dizi ve derinlik tanımlarını verelim.

6.3.3 Tanım. R bir halka, M, R-modül olsun. $x_1, \ldots, x_r$ R'nin elemanlarının bir dizisi olmak üzere,

(i) $(x_1, \ldots, x_r)M \neq M$ veya $M/(x_1, \ldots, x_r)M \neq 0$

(ii) $x_r,\ M/(x_1, \ldots, x_r)M$-regüler

şartları sağlanıyorsa $x_1, \ldots, x_r$ dizisine regüler dizi denir.

$\mathcal{I}$, R halkasının bir ideali olsun. $M \neq \mathcal{I}M$ ise, $x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{I}$ olan $M-$ dizisinin maksimal n uzunluğuna M 'nin $\mathcal{I}-$ derinliği denir.

$v \in F_2$ alalım.

$$\phi_2(v) = (v, 0) = v.(1, 0) + 0.(0, 1)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\mathcal{M}(\phi_2) = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{I}(\phi_2) =< 1 >= R$$

olur.

Şimdi, yine $\mathcal{F}$'nin tam ve $\mathcal{I}(\phi_2) \subsetneqq R$ olduğunu varsayalım.

$$M := \text{Gör}(\phi_1)$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$0 \to F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} M \to 0$$

M modülünün bir serbest çözülümüdür. Eğer,

$$0 \to R^m \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} \text{Gör}(\phi_1) \to 0$$

alırsak, R tamlık bölgesi olmadığından, sıfır bölen olmayacak şekilde $x \in \mathcal{I}_m(\phi_2)$ vardır.

$$\text{Gör}(\phi_1) = M \subseteq F_0$$

Bu durumda; x, M üzerinde bir sıfır bölen değildir. Böylece, R/xR halkası üzerinde,

$$0 \to F_2/xF_2 \xrightarrow{\phi_2'} F_1/xF_1 \xrightarrow{\phi_1'} M/xM \to 0$$

tam dizidir. Burada ϕ_i' dönüşümü,

$$\phi_i' : F_i/xF_i \to F_{i-1}/xF_{i-1}$$

$$a + xF_i \mapsto \phi_i(a) + xF_{i-1}$$

şeklinde tanımlıdır. McCoy Teoremi'ni R/xR halkası için uygularsak,

$$\mathcal{I}_m(\phi_2') = \mathcal{I}_m(\phi_2)/xR$$

idealinde sıfır bölen olmayan bir eleman vardır. Bu elemana y' diyelim.

$$y' \in \mathcal{I}_m(\phi_2') = \mathcal{I}_m(\phi_2)/xR$$

Burada $y \in \mathcal{I}_m(\phi_2)$ için,

$$y' = y + xR$$

elde edilir. Böylece; x, R halkasında sıfır bölen olmayacak şekilde $x, y \in \mathcal{I}_m(\phi_2)$ elemanları vardır. y elemanı da R/xR halkasında sıfır bölen değilir. Böylece, x, y bir regüler dizi oluşturur.

$t = Rank(\phi_1)$ olduğunu varsayalım. Böylece, $n = 2$ durumunda eğer $\mathcal{F}$ tam ise,

(i) $Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq 2$

(ii) $\mathcal{I}_m(\phi_2) = R$ veya $\mathcal{I}_m(\phi_2)$ uzunluğu 2 olan ve $\mathcal{I}_t(\phi_1)$ uzunluğu 1 olan regüler dizi içerir.

şartlarını sağlamasını bekliyoruz.

Ana teoremi ve ispatını vermeden önce, teoremin ispatı içinde gerekliliği hissedilen son bir özel durumu inceleyelim.

$$\mathcal{F} : 0 \to F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} 0$$

$n = 2$, $Rank(F_2) = m$ ve $\mathcal{I}_m(\phi_2)$'nin uzunluğu 2 olan bir regüler dizi içerdiğini varsayalım.

Bu durumda, $\mathcal{I}_m(\phi_2)$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir ve McCoy Teoremi'den ϕ_2 birebirdir.

$z \in$ Çek(ϕ_1) olsun. Aşağıdaki özelliği sağlayan ve sıfır bölen olmayan bir x elemanının olduğunu gösterebildiğimizi kabul edelim:

$u \in F_2$ için,

$$x.z = \phi_2(u)$$

dir.

$$\phi_i' : F_i/xF_i \to F_{i-1}/xF_{i-1}$$

$$a + xF_i \mapsto \phi_i(a) + xF_{i-1}$$

dönüşümünü kullanırsak,

$$\phi_2'(u') = \phi_2'(u + xF_2)$$

$$= \phi_2(u) + xF_1$$

$$= x.z + xF_1$$

ve $x.z \in$ Çek$(\phi_1) \subseteq F_1$ olduğundan

$$\phi_2'(u') = 0_{F_0/xF_0}$$

elde edilir.

Diğer yandan, $J = (\mathcal{I}_m(\phi_2), x)$ ideali için

$$J/xR = \mathcal{I}_m(\phi_2')$$

içinde sıfır bölen olmayan bir eleman vardır.

Bu durumda, McCoy Teoreminden ϕ_2' birebir olur. Böylece,

$$u' = 0_{F_1/xF_1}$$

elde edilir. $u' = u + xF_2$ den

$$\Rightarrow u \in xF_2$$

$v \in F_2$ için,

$$\Rightarrow u = x.v$$

elde edilir. Sonuçta,

$$x.z = \phi_2(u) = \phi_2(x.v) = x\phi_2(v)$$

$$\Rightarrow z = \phi_2(v)$$

$$\Rightarrow z \in \text{Gör}(\phi_2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \text{ tamdır.}$$

elde edilir. Bu x elemanını bulmak için bir sonraki bölümde bir yardımcı teorem verilecektir.

6.4 Buchsbaum-Eisenbud Teorem

R bir Noether halkası ve

$$\mathcal{F} : 0 \to F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

sonlu üretilmiş serbest R-modüllerinin bir kompleksi olsun. R, k bölüm cismi ile bir tamlık bölgesi olduğunda, $\mathcal{F}$'nin k cismi üzerinde tam olması için

$$Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1}) \ , \ 1 \leq j \leq n$$

olmasının gerekli ve yeterli şart olduğunu gördük. Yine, özel olarak eğer S, R'nin sıfır olmayan elemanlarının oluşturduğu bir küme olduğunda,

$$1 \leq j \leq n \ \text{ için } \ \mathcal{I}(\phi_j) \cap S \neq \varnothing$$

ve

$$\mathcal{F}_s \text{ tamdır} \Leftrightarrow Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1})$$

dır.

Birazdan vereceğimiz 6.4.3 Yardımcı Teorem, önceki bölümde bahsettiğimiz x elemanını bulmak için bize bir yöntem sağlarken, üstteki gözlemlerimizin R'nin tamlık bölgesi olmadığı durumlara da genişletebilmemize olanak sağlayacaktır. 6.4.3 Yardımcı Teoremi vermeden önce bir başka Yardımcı Teorem ile başlayalım.

6.4.1 Yardımcı Teorem. (R, P) bir lokal halka ve

$$\phi : R^m \mapsto R^n$$

bir dönüşüm olsun. $r \geq 1$ olduğunu varsayalım. $v_1, \ldots, v_r$ vektörleri, ϕ dönüşümünün görüntü kümesindeki sütun vektörler ve bu vektörlerin ürettiği alt modül $V \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A da buna karşılık gelen $n \times r$ matrisini göstersin. Yani,

$$\phi : R^m \mapsto R^n$$

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Bu durumda, aşağıdakiler denktirler:

(i) $v_1, \ldots, v_r$ vektörleri, R^n'nin bir bazına genişletilebilir.

(ii) V, R^n'nin rankı r olan serbest toplananıdır.

(iii) A'nın, R'de tersinir olan bir $r \times r$ minörü vardır.

Üstelik, $Rank(\phi) = r$ ve üstteki koşullardan herhangi biri sağlanıyor ise,

$$\text{Gör}(\phi) = V$$

R^n'nin rankı r olan bir serbest toplananıdır.

İspat: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**)

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$'nin R^n için bir baz olduğunu varsayalım. Bu durumda; W, w_i'ler tarafından üretilen alt modül olmak üzere,

$$R^n = V \oplus W$$

dır. Bu eşitliği görelim:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n = Sp(v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r})$$

$$\Rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + a_{r+1}w_1 + \ldots + a_nw_{n-r}$$

olacak şekilde $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n \in R$ elemanları vardır. Böylece,

$$R^n \subseteq V + W$$

dir ve

$$R^n \supseteq V + W$$

olduğundan

$$R^n = V + W$$

elde edilir.

$v \in V \cap W$ olsun. Buradan,

$$v = c_1v_1 + \ldots + c_rv_r \in V$$

ve

$$v = d_1w_1 + \ldots + d_{n-1}w_{n-r} \in W$$

elde edilir. O halde,

$$c_1v_1 + \ldots + c_rv_r + (-d_1)w_1 + \ldots + (-d_{n-1})w_{n-r} = 0$$

dir. $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$ baz olduğundan lineer bağımsızdır. Böylece,

$$c_i = 0 \; ve \; d_i = 0$$

dir.

$$V \cap W = \{0\}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$R^n = V \oplus W$$

olur. Buradan, V, R^n 'in rankı r olan bir serbest toplananı olur.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) V'nin, R^n 'nin rankı r olan bir serbest toplananı olduğunu varsayalım:

$$R^n = V \oplus W$$

R^n 'de V'nin W tümleyeni projektif modül ve sonlu üretilmiş projektif modüller R üzerinde serbest olduğundan, v_j'ler ve w_i'ler R^n için bir baz olacak şekilde,

$$w_1, \ldots, w_{n-r} \in W$$

elemanlarını bulabiliriz.

$$B = \begin{bmatrix} A_{n\times r} & \ldots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ise, $det(B)$ tersinirdir. [9]

$$\Rightarrow det(B) \text{ sıfır bölen değildir.}$$
$$\Rightarrow det(B) \in \mathcal{I}_r(A)$$
$$\Rightarrow \mathcal{I}_r(A) \nsubseteq P \quad \text{(Aksi durumda, } P = R \text{ olur.)}$$

Bu durumda, A'nın bir $r \times r$ minörü tersinirdir.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**) A matrisinin bir $(r \times r)$-minörü δ'nın tersinir olduğunu varsayalım.

$$\Rightarrow \delta \notin P$$

$$\delta' = \delta + P \neq 0, \quad \delta' \in k = R/P$$

elde edilir. $v_1, \ldots, v_r \in V \subset R^n$ için,

$$R^n \to R^n/PR^n$$

$$v_i \mapsto v_i'$$

alalım.

$v_1', \ldots, v_r'$, R^n/PR^n k-vektör uzayına lineer bağımsızdırlar:

$$c_1v_1' + \ldots + c_rv_r' = 0', \quad c_i \in k$$

$$\Rightarrow c_1(v_1 + PR^n) + \ldots + c_r(v_r + PR^n) = 0 + PR^n$$

$$\Rightarrow (c_1v_1 + \ldots + c_rv_r) + PR^n = 0 + PR^n$$

$$\Rightarrow c_1v_1 + \ldots + c_rv_r = 0$$

$\{v_1, \ldots, v_r\}$ lineer bağımsız olduğundan,

$$c_i = 0$$

elde edilir. Bu durumda, R^n/PR^n'deki görüntüleri v_j' vektörleri ile birlikte R^n/PR^n için bir baz olacak şekilde

$$w_1, \ldots, w_{n-r} \in R^n$$

vektörleri bulabiliriz. Böylece bu baza karşılık gelen matrisinin determinantı k'da sıfır olamaz. Buradan, bu determinant R'de tersinirdir.

Sonuçta, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$, R^n için bir bazdır.

$Rank(\phi) = r$ ve şartlardan birinin sağlandığını varsayalım.

$$\phi : R^m \to R^n$$

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \begin{bmatrix} A_{n\times r} & \ldots \end{bmatrix}_{n\times m} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$w \in$ Gör(ϕ) ise, A matrisine ekstra w sütun vektörünü ekleyelim. Bu yeni matris A' olsun.

$Rank(A') > r$ olduğundan A' matrisinin tüm $(r \times r)$-minörleri sıfırdır. δ, A nın herhangi bir $(r \times r)$-minörü ise, $\delta_1, \ldots, \delta_r$'ler A nın tıpkı Cramer kuralındaki gibi w vektörünü A nın sütun vektörlerinin yerine yazarak elde edilen minörleri olmak üzere

$$\delta.w = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_r v_r$$

yazılır. (iii). koşuldan, δ A nın bir $(r \times r)$-minörü için tersinir olacağından,

$$w \in V$$

elde edilir. □

Şimdi, üstteki Yardımcı Teoremin 6.4.3 Yardımcı Teoremdeki kullanılış şeklini ispatsız olarak verelim.

6.4.2 Önerme. $\varphi : F \to G$ serbest R-modül homomorfizması ve P asal ideal olsun. Bu durumda,

(i) $\mathcal{I}_t(\varphi) \nsubseteq P$ olması için gerekli ve yeterli koşul (Gör$(\varphi))_P$, G_P'nin rankı t olan bir serbest direkt toplanını kapsamasıdır.

(ii) $\mathcal{I}_t(\varphi) \nsubseteq P$ ve $\mathcal{I}_{t+1}(\varphi)_P = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul (Gör$(\varphi))_P$, G_P'nin rankı t olan bir serbest direkt toplananı olmasıdır.

(iii) $Rank(\varphi) = r$ olması için gerekli ve yeterli koşul $Derinlik(\mathcal{I}_r(\varphi)) \geq 1$ ve $\mathcal{I}_{r+1}(\varphi) = 0$ olmasıdır.

6.4.3 Yardımcı Teorem. R bir Noether halkası, $S \subseteq R$ sıfır bölen olmayan elemanların kümesi ve

$$\mathcal{F} : 0 \to F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

sonlu üretilmiş serbest R-modüllerinin bir kompleksi olsun. Bu durumda, $\mathcal{F}_s$ dizisinin tam olması için gerekli ve yeterli koşul, her $1 \leq j \leq n$ için,

(i) Rank$(F_j) =$ Rank$(\phi_j) +$ Rank(ϕ_{j+1})

(ii) $\mathcal{I}(\phi_j) \cap S \neq \varnothing$

koşullarını sağlamasıdır.

İspat: n üzerinden tümevarım yapalım.

$n = 1$ ve $\mathcal{F}_s$ kompleksinin tam olduğunu varsayalım:

$$0 \to F_{1_s} \xrightarrow{\phi_{1_s}} F_{0_s}$$

tamdır. Buradan,

$$\text{Rank}(F_{1_s}) = \text{Rank}(\phi_{1_s})$$

elde edilir.

$$\text{Rank}(F_{1_s}) = \text{Rank}(F_1)$$

ve

$$\text{Rank}(\phi_{1_s}) = \text{Rank}(\phi_1)$$

olduğundan

$$\text{Rank}(F_1) = \text{Rank}(\phi_1)$$

elde edilir. McCoy Teoremi'nden $\mathcal{I}(\phi_{1_s})$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir.

$$\Rightarrow \mathcal{I}(\phi_{1_s}) \cap S \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(\phi_1)_s \cap S \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(\phi_1) \cap S \neq \varnothing$$

dir. Diğer taraftan,

$$\text{Rank}(F_1) = \text{Rank}(\phi_1)$$

ve

$$\mathcal{I}(\phi_1) \cap S \neq \varnothing$$

olduğunu varsayalım.

$$\mathcal{F}_s : 0 \to F_{1_s} \xrightarrow{\phi_{1_s}} F_{0_s}$$

kompleksinin tam olduğunu görelim.

$$\mathcal{I}(\phi_{1_s}) \cap S = \mathcal{I}(\phi_1)_s \cap S \neq \varnothing$$

olduğundan McCoy Teoremi'nden $\mathcal{F}_s$ tamdır.

Şimdi, $n > 1$ ve $\mathcal{F}_s$'nin tam olduğunu varsayalım. Tümevarım kabulünden, $\mathcal{F}$'deki son $n-1$ terim , $2 \leq j \leq n$ için,

(i) $\text{Rank}(F_j) = \text{Rank}(\phi_j) + \text{Rank}(\phi_{j+1})$

(ii) $\mathcal{I}(\phi_j)$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir.

Bu durumda,

$$\text{Rank}(F_1) = \text{Rank}(\phi_1) + \text{Rank}(\phi_2)$$

eşitliğini ve

$\mathcal{I}(\phi_1)$'in sıfır bölen olmayan bir eleman içerdiğini göstermeliyiz.

$$k = Rank(F_1)$$

$$r = Rank(\phi_2)$$

$$t = k - r$$

alalım.

$$P \in Ass(R) = \{P \subset R \mid P \text{ asal }, \; P =< 0 >:< r > , \; r \in R\}$$

olsun. Noether halkalarında, R'nin sıfır bölenlerinin kümesi asal ideallerinin birleşimi olduğundan [16] ve $\mathcal{I}(\phi_2)$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerdiğinden

$$\mathcal{I}(\phi_2) \nsubseteq P$$

elde edilir. P asal idealinde lokalizasyon yapalım.

6.4.1 Yardımcı Teorem'den, Gör$(\phi_2)_P$, $(F_1)_P$'nin rankı r olan bir serbest toplananıdır. Bu durumda, F_1', rankı t olan bir serbest R_P-modül olmak üzere,

$$(F_1)_P = (\text{Gör}(\phi_2)_P) \oplus F_1'$$

yazılır. $\mathcal{F}_P$ kompleksi tam olduğundan,

$$\ldots \xrightarrow{(\phi_2)_P} (F_1)_P \xrightarrow{(\phi_1)_P} (F_0)_P$$

$$\text{Çek}((\phi_1)_P) = \text{Gör}((\phi_2)_P)$$

yazabiliriz ve böylece,

$$F_1' \xrightarrow{\phi_1'} (F_0)_P$$

indirgenmiş dönüşümü birebir olur. McCoy Teoremi'nden $\mathcal{I}_t(\phi_1')$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir ve buradan da

$$\mathcal{I}_t(\phi_1) \nsubseteq P$$

dir. Üstelik,

$$\text{Gör}(\phi_1') = \text{Gör}((\phi_1)_P)$$

olmasından

$$\mathcal{I}_{t+1}(\phi_1)_P = 0$$

dır. Bu tüm $P \in Ass(R)$ için geçerli olduğundan $\mathcal{I}_t(\phi_1)$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir ve $\mathcal{I}_{t+1}(\phi_1) = 0$ dır.

Tersine,

(i) $\text{Rank}(F_1) = \text{Rank}(\phi_1) + \text{Rank}(\phi_2)$

(ii) $\mathcal{I}(\phi_1)$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir.

olduğunu varsayalım.

$$\ldots \xrightarrow{(\phi_2)_S} (F_1)_S \xrightarrow{(\phi_1)_S} (F_0)_S$$

kompleksinde,

$$\text{Çek}((\phi_1)_S) \subset \text{Gör}((\phi_2)_S)$$

olduğunu görmeliyiz. Öncelikle $z \in \text{Çek}(\phi_1)$ alındığında,

$$x.z \in \text{Gör}(\phi_2)$$

olacak şekilde $x \in S$ olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. Öncelikle bu ifadeyi ispatlayalım.

$$J := \{r \mid r.z \in \text{Gör}(\phi_2)\}$$

kümesini alalım. J, R'nin bir idealidir. Her $P \in Ass(R)$ için $J \nsubseteq P$ olduğunu göstermek, J , tamamen sıfır bölen elemanlardan oluşmaz demektir. Bu da, $J \cap S \neq \varnothing$ olmadığı anlamına gelir ki, üstteki ifade böylece ispatlanmış olur.

$P \in Ass(R)$ olsun. P idealinde lokalizasyon yapalım:

$$\ldots \xrightarrow{(\phi_2)_P} (F_1)_P \xrightarrow{(\phi_1)_P} (F_0)_P$$

6.4.1 Yardımcı Teoremdeki gibi F_1' rankı t olan bir serbest R_P-modül olmak üzere,

$$(F_1)_P = (\text{Gör}(\phi_2))_P \oplus F_1'$$

yazabiliriz. Böylece, $(\phi_1)_P$'nin görüntü kümesi ile aynı görüntü kümesi olan

$$F_1' \xrightarrow{\phi_1'} (F_0)_P$$

indirgenmiş dönüşümü vardır.

$$\mathcal{I}(\phi_1') = \mathcal{I}((\phi_1)_P) \nsubseteq P_P$$

olduğundan $\mathcal{I}(\phi_1')$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir ve böylece McCoy Teoremi'nden

$$\phi_1'$$

birebir olur. Buradan,

$$\text{Çek}((\phi_1)_P) = \text{Gör}((\phi_2)_P)$$

dir. Bir başka deyişle,

$$z \in \text{Çek}(\phi_1) \Rightarrow z_P \in \text{Çek}(\phi_1)_P$$

$$\Rightarrow z_P \in \text{Gör}((\phi_2)_P)$$

$$\Rightarrow J \nsubseteq P$$

elde edilir. □

6.4.4 Teorem. (Buchsbaum-Eisenbud Teorem) R bir Noether halkası ve

$$\mathcal{F} : 0 \to F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

sonlu üretilmiş serbest R-modüllerin bir kompleksi olsun. $\mathcal{F}$ dizisinin tam olması için gerekli ve yeterli koşul, $1 \leq j \leq n$ için

(i) $Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1})$

(ii) $\mathcal{I}(\phi_j) = R$ veya $\mathcal{I}(\phi_j)$, uzunluğu j olan bir regüler dizi içerir.

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat: $S \subseteq R$ ve S, sıfır bölen olmayan elemanların kümesi olsun. $\mathcal{F}$ tam dizi ise $\mathcal{F}_S$ tamdır. 6.4.3 Yardımcı Teorem'den $1 \leq j \leq n$ için

(i) $Rank(F_j) = Rank(\phi_j) + Rank(\phi_{j+1})$

(ii) $\mathcal{I}(\phi_j) \cap S \neq \varnothing$

dır. Böylece, her $\mathcal{I}(\phi_j)$ sıfır bölen olmayan bir eleman içerir.

$1 \leq j \leq n$ için,

$$x_j \in \mathcal{I}(\phi_j)$$

sıfır bölen olmasın. Eğer $\mathcal{I}(\phi_j) = R$ ise $x_j = 1$ olarak alabiliriz.

$$x = x_1.x_2 \ldots x_n$$

alalım.

Eğer $x = 1$ ise, $\mathcal{I}(\phi_j) = R$ olur. Böylece ifadedeki (ii) sağlanır.

Eğer $x \neq 1$ ise, x sıfır bölen değildir.

$$M = \text{Gör}(\phi_1)$$

olsun. Önceki bölümdeki tartışmalarımızdaki gibi,

$$0 \to F_n/xF_n \xrightarrow{\phi'_n} F_{n-1}/xF_{n-1} \xrightarrow{\phi'_{n-1}} \ldots \to F_1/xF_1 \xrightarrow{\phi'_1} M/xM \to 0$$

M/xM'nin R/xR üzerinde bir serbest çözülümüdür. n üzerinden tümevarım yapılırsa, $2 \leq j \leq n$ için,

$$\mathcal{I}(\phi_j)/xR = R$$

veya

$$\mathcal{I}(\phi_j)/xR$$

uzunluğu $j-1$ olan bir regüler dizi içerir.

Buradan, $2 \leq j \leq n$ için,

$$\mathcal{I}(\phi_j) = R$$

veya

$$\mathcal{I}(\phi_j), \text{ uzunluğu } j \text{ olan bir regüler dizi içerir.}$$

Tersine, (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını varsayalım. 6.4.3 Yardımcı Teorem'den $\mathcal{F}_S$ tamdır.

$\mathcal{F}$'nin tamlığını ispatlamak için n üzerinden tümevarım yapalım.

$n = 1$ olduğunda McCoy Teoremi'nden $\mathcal{F}$ tamdır.

$n \geq 1$ ise, tümevarımdan,

$$\text{Çek}(\phi_1) \subseteq \text{Gör}(\phi_2)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$z \in \text{Çek}(\phi_1)$ olsun. $\mathcal{F}_S$ tam olduğundan ve 6.4.3 Yardımcı Teoremin ispatından,

$$x.z \in \phi_2(u)\ ,\ u \in F_2$$

olacak şekilde $x \in S$ vardır.

Yine önceki bölümlerdeki tartışmalarımızdan, $2 \leq j \leq n$ için,

$$(\mathcal{I}(\phi_j), x)/xR = R/xR$$

veya $(\mathcal{I}(\phi_j), x)/xR$, uzunluğu $j-1$ olan bir regüler dizi içerir.

Tümevarım hipotezinden, (i) ve (ii), R/xR'deki $n-1$ uzunluğundaki

$$0 \to F_n/xF_n \xrightarrow{\phi'_n} F_{n-1}/xF_{n-1} \xrightarrow{\phi'_{n-1}} \ldots \to F_2/xF_2 \xrightarrow{\phi'_2} F_1/xF_1$$

indirgenmiş kompleksine uygulanır. Tümevarımdan bu kompleks tamdır. R/xR üzerinde,

$$\phi'_2(u') = 0' \ , \ u' \in F_2/xF_2$$

$$\Rightarrow \phi'_3(w') = u'$$

olacak şekilde $w' \in F'_3$ elemanı vardır. Tekrar R halkasına dönersek,

$$u = \phi_3(w) + x.v \ , \ v \in F_2$$

$$\Rightarrow x.z = \phi_2(u) = \phi_2(\phi_3(w) + x.v) = \phi_2(x.v)$$

$$\Rightarrow z = \phi_2(v)$$

$$z \in \text{Gör}(\phi_2)$$

dir. Böylece,

$$\text{Çek}(\phi_1) = \text{Gör}(\phi_2)$$

elde edilir. □

Şimdi Buchsbaum - Eisenbud Teoremi ile ilgili bir örnek verelim.

6.4.5 Örnek. Bölüm 4.1 de oluşturduğumuz çözülümü alalım.

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}} \mathcal{I} \to 0$$

Burada,

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}$$

olsun. Bu çözülüm için Buchsbaum - Eisenbud Teoremi'nin sağlandığını görelim.

$$Rank(\varphi_3) = 1 = Rank(\varphi_1)$$

$$det(\varphi_2) = (-1)^{1+1}.y^2(x^2z) + (-1)^{1+2}.z(x^2y^2) + (-1)^{1+3}.0(x^4)$$

$$= x^2y^2z - x^2y^2z = 0$$

olduğundan

$$Rank(\varphi_2) = 2$$

dir. Burada,

$$Rank(R^3) = Rank(\varphi_3) + Rank(\varphi_2)$$

$$= 1 + 2 = 3$$

ve

$$Rank(R^3) = Rank(\varphi_2) + Rank(\varphi_1)$$

$$2 + 1 = 3$$

dir. Böylece teoremin birinci koşulu sağlanmış olur.

$$\mathcal{I}_1(\varphi_3) = \mathcal{I}_1(\varphi_1) = (x^2y^2z).R$$

ve

$$\mathcal{I}_2(\varphi_2) = x^2z, z^2, zy^2, yx^2, y^4, x^4$$

yani

$$\mathcal{I}_2(\varphi_2) = (x^2y^2z)^2.R$$

dir.

x, y, z bir regüler dizi ve x^2, y^2, z de bir regüler dizi oluşturduğundan her iki idealin minörleri 3 uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Böylece teoremin ikinci şartı da sağlanır.

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z \end{bmatrix}} \mathcal{I} \to 0$$

kompleksi tamdır.

7. SONUÇ

Bu tezde, Buchsbaum - Eisendbud'ın bir Noether halkası üzerindeki sonlu üretilmiş serbest modüllerden oluşan bir kompleksin tamlığını belirleyen kriterlerin verildiği tamlık teoremini detaylıca çalıştık. Bunun için önce gerekli temel bilgileri verdik. Sonrasında, minimal ve derecelendirilmiş serbest çözülümleri anlatıp, lineer cebir bilgisiyle bir idealin ve bir modülün serbest çözülümünü örneklerle açıkladık.

Tezin, beşinci bölümünde, McCoy Teoremi'ni hatırlattıktan sonra, son bölümde Tamlık Teoremini ele alıp örneklendirdik.

Değişmeli cebirde, herhangi bir tekterimli idealin minimal serbest çözülümünü açık biçimde bulmanın hala açık bir problem olduğu gerçeği bu teoremin hala güncelliğini koruduğunu göstermektedir.

8. KAYNAKLAR

[1] Hilbert, D., *Hilbert's invariant theory papers*, Lie Groups: History,Frontiers and Applications, VIII, Math. Sci. Press, Brookline, Mass. (1978).

[2] Hilbert, D., *Theory of algebraic invariants*, Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

[3] Buchsbaum, D.A. and Eisenbud, D., "What Makes a Complex Exact?", *Journal of Algebra*, 25, 259-268 (1973).

[4] Greuel, G.M., Pfister, G., *A Singular Introduction to Commutative Algebra*, Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, Berlin, (2002).

[5] Hungerford, T. W., *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, (2000).

[6] Grigorescu, E., "Hilbert Series and Free Resolutions", Senior Project, *Bard College*, New York, (2003).

[7] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Press, London, (1969).

[8] Karaoglu, F., "Lokal Halkaların Hilbert Fonksiyonları", Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2012).

[9] Northcott, D. G., *Finite Free Resolutions*, Cambridge University Press, (1976).

[10] Eisenbud, D., *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, (1999).

[11] Peeva, I., *Graded Syzygies*, Springer-Verlag, Berlin, (2010).

[12] Tuyl, A. V., “Lecture VII, Minimal Free Resolutions”, http://flash.lakeheadu.ca/ avantuyl/courses/oldcourses/lecture7.pdf, (2006).

[13] McCoy, N. H., “ Remarks on divisors of zero”, *Amer. Math. Monthly*, 49, 286-295 (1942).

[14] McCoy, N. H., “Annihilators in polynomial rings”, *Amer. Math. Monthly*, 64, 28-29 (1957).

[15] Brewer, J. W., Bunce J. W., Van Vleck F. S., *Linear Systems Over Commutative Rings*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, New York, Marcel Dekker, (1985).

[16] Kunz, E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 177, (1991).

[17] Huckaba, J. A., Keller, J. M., “Annihilation of ideals in commutative rings”, *Pacific J. Math.*, 83, (1979), 1375-379.