

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ VE ELİPSLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Kadriye ATILGAN**

**Balıkesir, Eylül-2009**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ VE ELİPSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kadriye ATILGAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

Sınav Tarihi: 04.09.2009

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Balıkesir, Eylül-2009

## ÖZET

### MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ VE ELİPSLER

**Kadriye ATILGAN**  
**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**  
**Matematik Anabilim Dalı**

( Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR )

**Balıkesir, 2009**

Kesirli lineer dönüşümler olarak da bilinen Möbius dönüşümleri ilk kez 1831 yılında ortaya çıkmıştır. Bu dönüşümler kompleks analizde ve cebirsel geometride çok önemli bir yere sahiptir.

Möbius dönüşümlerinin bilinen en temel karakteristik özelliği, çemberleri çemberlere resmetmesidir. Bu tezin amacı Möbius dönüşümlerinin bu karakteristik özelliğinin elipslerde de geçerli olup olmadığını göstermektir. Çemberler, elipslerin odaklarının çakışması durumu olmasına rağmen; bu karakteristik özellik elipsler için her zaman doğru değildir. Çünkü Möbius dönüşümleri genel olarak elipsleri reel bikuadratik eğrilere dönüştürürler. Bununla birlikte Möbius dönüşümlerinin özel bir sınıfı olan benzerlik dönüşümleri, elipsleri elipslere resmederler.

Elipslerin en önemli fiziksel özelliği; elipsin bir odağından gelen herhangi bir ışının elipse çarptıktan sonra diğer odakta geçecek şekilde yansmasıdır. Elipsin bu yansıma özelliğinin haberleşme, lazer teknolojisi ve tıp gibi günlük hayatta birçok uygulama alanı vardır. Elipslerdeki bu yansıma özelliği kullanılarak geri dönme dönüşümü elde edilir. Böylece elde edilen bu geri dönme dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür ve bu Möbius dönüşümünün katsayıları hiperbolik fonksiyonlardır.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER** : Möbius Dönüşümleri / Çemberler / Elipsler / Reel Bikuadratik Eğriler / Elips Üzerinde Yansımalar / Geri Dönme Dönüşümleri

## **ABSTRACT**

### **MÖBIUS TRANSFORMATIONS AND ELLIPSES**

**Kadriye ATILGAN**

**Balikesir University, Institute of Science, Department of Mathematics**

**( M. Sc. Thesis / Supervisor : Asist. Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR )**

**Balikesir – Turkey, 2009**

Möbius transformations, which are called also fractional linear transformations, were introduced in 1831 at first. This transformations have an important area in complex analysis and algebraic geometry.

The most basic characteristic property of Möbius transformations is that they map circles to circles. The aim of this thesis is determine whether this characteristic property of Möbius transformations is valid for ellipses or not. Although the circles are the coincidence of the foci of the ellipses, this characteristic property is not always true for ellipses. Because Möbius transformations map ellipses to real biquadratic curves. However, similarity transformations, which are the special class of Möbius transformations, map ellipses to ellipses.

The most important physical property of ellipses is that a ray emanating from one focus of an ellipse is reflected by the ellipse in such a way as to pass through its other focus. This reflection property of ellipse has a lot of application area in everyday life such as communication, laser technology and medicine. The return map is obtained by using this reflection property of ellipses. Therefore, this return map is a Möbius transformation and the coefficients of this Möbius transformation are hyperbolic functions.

**KEY WORDS :** Möbius Transformations / Circles / Ellipses / Real Biquadratic Curves / Reflections On The Ellipse / Return Map

## **İÇİNDEKİLER**

	<b><u>Sayfa</u></b>
<b>ÖZET, ANAHTARSÖZCÜKLER</b>	ii
<b>ABSTRACT, KEY WORDS</b>	iii
<b>İÇİNDEKİLER</b>	iv
<b>SEMBOL LİSTESİ</b>	v
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	vi
<b>ÖNSÖZ</b>	vii
<b>1. GİRİŞ</b>	1
1.1 Möbius Dönüşümleri	3
1.1.1 Özel Tipteki Möbius Dönüşümleri	9
1.1.2 İnverson	14
1.2 Elipsler	17
<b>2. MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ VE ELİPSLER</b>	26
2.1 Elipsin Görüntüleri	26
2.2 Elipsin Köşeleri	37
2.3 Elipsin Düğümleri	44
<b>3. ELİPSLERDEKİ YANSIMA ÖZELLİĞİ</b>	53
3.1 Geri Dönme Dönüşümü	56
<b>4. KAYNAKLAR</b>	63

## SEMBOL LİSTESİ

<b><u>Simge</u></b>	<b><u>Tanımı</u></b>
$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş kompleks düzlem
$L \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş doğru
$\subseteq$	Alt küme
$\leq$	Alt grup
$GL(2, \mathbb{C})$	Genel Lineer Grup
$SL(2, \mathbb{C})$	Özel Lineer Grup
$PGL(2, \mathbb{C})$	Projektif Genel Lineer Grup
$PSL(2, \mathbb{C})$	Projektif Özel Lineer Grup
$\det$	Determinant fonksiyonu
$Ker\phi$	$\phi$ homomorfizminin çekirdeği
$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş reel doğru
$\frac{dP}{dt}$	$P(t)$ fonksiyonunun $t$ 'ye göre birinci mertebeden türevi
$\nabla q$	Gradyant fonksiyonu
$\mathbb{C}^n$	n-boyutlu kompleks uzay
$\mathbb{C}P^n$	n-boyutlu kompleks projektif uzay
$\mathbb{R}P^1$	Reel projektif doğru
$\mathbb{C}P^1$	Kompleks projektif doğru
$s$	Segre dönüşümü
$\sin$	Sinüs fonksiyonu
$\sinh$	Sinüs hiperbolik fonksiyonu
$\cos$	Kosinüs fonksiyonu
$\cosh$	Kosinüs hiperbolik fonksiyonu
$e^{i\theta}$	Üstel fonksiyon

## ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil Numarası</u>	<u>Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1	İnversiyon	15
Şekil 1.2	Elips	18
Şekil 2.1	Konveks olmayan merkezi inversiyon ve Konveks olan merkezi inversiyon ile E elipsi	28
Şekil 2.2	T merkezi inversiyonu altında E elipsinin ve C çemberinin görüntülerinin ortak üç noktası	29
Şekil 2.3	Ortak bir teğet noktası ile bitanjant çemberleri	40
Şekil 3.1	Elipslerde yansıma özelliği	53
Şekil 3.2	Bir $P(x_0, y_0)$ noktasında elipse teğet olan $ RR' $ doğru parçasına göre yansıma	54
Şekil 3.3	Birinci geri dönme dönüşümü $z \rightarrow w$	57

## **ÖNSÖZ**

Tezimi hazırladığım yoğun süreçte katkı ve yardımlarını benden esirgemeyen ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma esnasında bana sabır ve anlayış gösteren, her konuda bana destek olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**Balıkesir, 2009**

**Kadriye ATILGAN**



## 1. GİRİŞ

Möbius dönüşümleri ilk kez 1831 yılında cebirsel geometrinin Almanya'daki temsilcilerinden August Ferdinand Möbius (1790-1868) tarafından incelenmiştir. Möbius; bu dönüşümleri, geometrik şekillerin projektif özelliklerini inceleyen projektif geometride homojen koordinatlar konusunu ele alarak elde etmiştir. Projektif geometri, ilk olarak 15. ve 16. yüzyıllardaki ressamların, üç boyutlu cisimleri iki boyutta temsil etme isteğinden ortaya çıkmıştır.

Genişletilmiş kompleks düzlemden, genişletilmiş kompleks düzleme tanımlı olan Möbius dönüşümleri; kompleks projektif doğrunun projektif dönüşümlerine karşılık gelir. Dolayısıyla Möbius dönüşümleri, homojen koordinatlar üzerinde;

$$T : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1 : \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki lineer dönüşümler olarak ifade edilebilirler.

Möbius dönüşümleri ile ilgili en önemli özellik çemberleri çemberlere resmetmeleridir. Biz de bu çalışmada, "Acaba Möbius dönüşümleri çemberlerde olduğu gibi elipsleri de elipslere mi resmeder?" sorusunun cevabını inceleyeceğiz. Bunun için de temel olarak [5] numaralı kaynaktan faydalanacağız.

Tez üç ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Möbius dönüşümlerinin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Bu dönüşümlerin  $2 \times 2$ 'lik regüler matrislerle olan ilişkisi gösterilmiş ve yukarıda da söylediğimiz gibi Möbius dönüşümlerinin en önemli özelliği olan çemberleri çemberlere resmetmesi ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonrada elipsin

tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Bunlardan yararlanılarak elipsin denkleminin düzlemdeki benzerlik dönüşümleri altında nasıl değiştiği gösterilmiştir.

İkinci bölümde Möbius dönüşümleri altında elipsin görüntüleri incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda elipslerin Möbius dönüşümleri altındaki görüntülerinin en genel olarak reel bikuadratik eğriler olduğu gösterilmiştir. Yine bu bölümde elipsin köşe noktalarından yararlanılarak  $E, E' \subseteq \mathbb{C}$  elipsleri için  $T(E) = E'$  koşulunu sağlayan  $T$  Möbius dönüşümünün benzerlik dönüşümü olduğu ispatlanmıştır. Daha sonrada kompleks projektif uzay ile ilgili temel bilgiler verilip homojen koordinatlarda elipsin,  $T$  Möbius dönüşümü altındaki görüntüsü incelenmiştir.

Üçüncü bölümde de elipsin bir odağından gelen herhangi bir ışının elipse çarptıktan sonra diğer odaktan geçecek şekildeki yansıma özelliği ele alınmış ve elipsin bu karakteristik özelliğinden yararlanılarak;

$$w = \frac{(\cosh n\delta)z - \sinh n\delta}{-(\sinh n\delta)z + \cosh n\delta}$$

şeklindeki  $n$ . geri dönme dönüşümü elde edilmiştir. Daha sonrada elde edilen bu geri dönme dönüşümünün aslında bir Möbius dönüşümü olduğu gösterilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde elipsin yansıma özelliğinin günlük hayattaki birkaç kullanımı verilmiştir.

## 1.1 Möbius Dönüşümleri

Bu bölümde Möbius dönüşümleri ve bu dönüşümlerin bazı temel özellikleri ele alınmıştır. Bunun için de ağırlıklı olarak [1, 2] numaralı kaynaklardan faydalanılmıştır.

**Tanım 1.1.1** :  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  ve  $T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  olmak üzere;

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1.1)$$

veya

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüme **Möbius dönüşümü** ya da **Kesirli Lineer dönüşüm** denir.

Burada (1.1) ile tanımlanan dönüşüme  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'un **otomorfizmi**, (1.2) ile tanımlanan dönüşüme de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'un **anti-otomorfizmi** denir.

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'un otomorfizmleri ve anti-otomorfizmleri ile ilgili olarak;

**1.** Her bir  $T$  anti-otomorfizmi,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'un bir otomorfizmi ile kompleks eşlenik dönüşümünün birleşimi olarak ifade edilebilir.

**2.** İki anti-otomorfizmin birleşimi bir otomorfizmdir.

**3.** Bir otomorfizm ile anti-otomorfizmin birleşimi anti-otomorfizmdir.

4. Otomorfizmler açılarının büyüklüğünü ve yönünü korurken anti-otomorfizmler açılarının büyüklüğünü korur ancak yönünü ters çevirirler.

Şimdi bu bölümde Möbius dönüşümleri incelenirken (1.1) formundaki dönüşümler ele alınacaktır. Benzer durumlar (1.2) formundaki dönüşümler için de geçerlidir.

$\Delta = ad - bc$  ifadesine  **$T$  Möbius dönüşümünün determinanı** denir. Möbius dönüşümünün tanımında niçin  $ad - bc \neq 0$  alınması gerektiği;

$$T(z) - T(w) = \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \quad (1.3)$$

eşitliğinden görülür. Çünkü eğer burada  $ad - bc = 0$  alınırsa  $T(z) = T(w)$  eşitliğinden  $T$  sabit bir fonksiyon olur. Aynı zamanda  $ad - bc \neq 0$  alınması  $T$  fonksiyonunun bire-bir olduğunu gösterir.

Bu  $T$  dönüşümünde  $a, b, c, d$  katsayıları bir tek şekilde belirlenmez. Yani Möbius dönüşümleri  $a, b, c, d$  katsayılarından bağımsızdır. Eğer bir  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  alınırsa  $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$  katsayılarına karşılık;

$$T(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az + b)}{\lambda(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

olur. Böylece yine aynı  $T$  dönüşümü elde edilir. O halde (1.1) ile tanımlanan Möbius dönüşümünün pay ve paydası  $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{ad - bc}}$  ile çarpılırsa;

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{\pm\sqrt{ad - bc}}z + \frac{b}{\pm\sqrt{ad - bc}}}{\frac{c}{\pm\sqrt{ad - bc}}z + \frac{d}{\pm\sqrt{ad - bc}}}$$

ifadesi elde edilir. Bu dönüşümün determinanı;

$$\frac{a}{\pm\sqrt{ad-bc}} \cdot \frac{d}{\pm\sqrt{ad-bc}} - \frac{b}{\pm\sqrt{ad-bc}} \cdot \frac{c}{\pm\sqrt{ad-bc}} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

olur. Dolayısıyla Möbius dönüşümünün tanımındaki  $ad-bc \neq 0$  yerine  $ad-bc=1$  alınabilir.

**Tanım 1.1.2 :**  $T$  fonksiyonu,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0$$

şeklinde bir Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda; eğer  $c \neq 0$  ise  $T(\infty) = \frac{a}{c}$  ve

$T(-\frac{d}{c}) = \infty$  olur. Eğer  $c = 0$  ise  $T(\infty) = \infty$  olur.

**Teorem 1.1.3 :** Her bir Möbius dönüşümü  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'dan  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'a bire-bir ve örten bir dönüşümdür. (Beardon 2005)

$I(z) = z$  birim dönüşümü için;  $a = d \neq 0$  ve  $b = c = 0$  olmak üzere;

$$I(z) = z = \frac{az+0}{0z+d} \tag{1.4}$$

yazılabileceğinden birim dönüşüm de bir Möbius dönüşümüdür.

Ayrıca bir  $T$  Möbius dönüşümünün tersi;

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \tag{1.5}$$

şeklindedir ve  $T^{-1}$  dönüşümünün de bir Möbius dönüşümü olduğu açıktır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 1.1.4 :**

$$M = \left\{ T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur. ( Beardon 2005 )

**Tanım 1.1.5 :**  $U(z) = az + b$ ;  $a, b \in \mathbb{C}$  ve  $a \neq 0$  şeklinde tanımlanan dönüşüme **benzerlik dönüşümü** denir.

$H = \{ U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid U(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \}$ , benzerlik dönüşümlerinin kümesi olsun.  $I(z) \in H$  olduğundan  $H \neq \emptyset$  dir. Bununla birlikte  $U(z)$  benzerlik dönüşümü,

$$U(z) = az + b = \frac{az + b}{0z + 1}$$

şeklinde yazılabileceğinden  $H \subseteq M$  dir. Ayrıca benzerlik dönüşümlerinin kümesi  $H$ , Möbius dönüşümlerinin kümesi olan  $M$  ' deki bileşke işlemine göre kapalı olduğundan dolayı  $H \leq M$  olur.

**Tanım 1.1.6 :**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = ad - bc \neq 0$  biçimindeki  $2 \times 2$  'lik

kompleks matrislerin grubuna **Genel Lineer Grup** denir ve  $GL(2, \mathbb{C})$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.7 :**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = ad - bc = 1$  biçimindeki  $2 \times 2$  'lik

kompleks matrislerin grubuna **Özel Lineer Grup** denir ve  $SL(2, \mathbb{C})$  ile gösterilir.

Möbius dönüşümlerinin matrisler ile olan ilişkisi;

$$\phi: GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T, T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; ad-bc \neq 0$$

şeklinde verilir.

**Teorem 1.1.8 :**  $\phi$  dönüşümü ,  $GL(2, \mathbb{C})$ 'den  $M$ 'ye bir homomorfizm tanımlar. (Beardon 2005)

Ayrıca  $\phi: GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M$  örten olduğundan  $\phi$  bir epimorfizmdir ve bu  $\phi$  homomorfizminin çekirdeği;

$$\begin{aligned} K = \text{Ker } \phi &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \phi(A) = z\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{az+b}{cz+d} = z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d \neq 0, b = c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

$a = \lambda$  alınırsa;

$$\begin{aligned} K = \text{Ker } \phi &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda \neq 0 \right\} \\ &= \{\lambda I : \lambda \neq 0\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise aşağıdaki teoremi ispatlar.

**Teorem 1.1.9** :  $I$ ,  $2 \times 2$  tipinde birim matris olmak üzere  $\phi$  homomorfizminin çekirdeği;

$$K = \text{Ker } \phi = \{ \lambda I : \lambda \in \mathbb{C} \} \quad (1.6)$$

dir. ( Beardon 2005 )

$A, B \in GL(2, \mathbb{C})$  biçimindeki iki matrisin  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da aynı Möbius dönüşümünü tanımlayabilmesi için gerek ve yeter koşul  $A^{-1}B \in K$  yani belli bir  $\lambda \neq 0$  için  $B = \lambda A$  olmasıdır.

1. izomorfizma teoremi gereği  $\phi$  dönüşümü için  $\phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M$  iken;

$$M \cong GL(2, \mathbb{C}) / K = GL(2, \mathbb{C}) / \{ \lambda I, \lambda \neq 0 \}$$

dır. Burada  $GL(2, \mathbb{C}) / K$  bölüm grubuna **Projektiv Genel Lineer Grup** denir ve  $PGL(2, \mathbb{C})$  ile gösterilir. Dolayısıyla  $M \cong PGL(2, \mathbb{C})$  yazılabilir.

Her  $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$  için  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  olduğundan;

$$\det : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

fonksiyonu bir grup homomorfizmidir.  $\det$  fonksiyonunun çekirdek kümesi de  $GL(2, \mathbb{C})$ 'nin normal alt grubu olan ve  $\det(A) = 1$  koşulunu sağlayan  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  matrislerini içeren  $SL(2, \mathbb{C})$  Özel Lineer Grubudur.

$$\text{Ker}(\det) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \in GL(2, \mathbb{C}), \det(A) = 1 \right\} = SL(2, \mathbb{C})$$



dir. det dönüşümü örten olduğundan 1. izomorfizma teoremi gereği;

$$GL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$$

olur.

Eğer  $B \in GL(2, \mathbb{C})$  ise  $\lambda^2 = \det(B)$  ve  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  için  $B = \lambda A$  yazılabilir.  $\phi(B) = \phi(A)$  olduğundan bu bize  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da her Möbius dönüşümünün

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} ; ad-bc=1$$

formunda yazılabileceğini gösterir. Ayrıca  $\phi$ ,  $SL(2, \mathbb{C})$ 'yi  $M$ 'ye resmeder. Bu yüzden de  $PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C})$  ve  $SL(2, \mathbb{C})$ 'nin görüntüsü  $PGL(2, \mathbb{C})$  bölüm grubu içindedir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 1.1.10 :**  $M \cong PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C})$ . ( Singerman 1987 )

### 1.1.1 Özel Tipteki Möbius Dönüşümleri

**Tanım 1.1.11 :**  $T_t(z) = z+t$  ,  $t \in \mathbb{C}$  şeklindeki Möbius dönüşümlerine **kayma (öteleme) dönüşümü** denir.

Bu dönüşüm  $\infty$ 'u sabit bırakır ve  $\mathbb{C}$  düzlemi üzerinde bir kayma hareketi yaptırır.

**Tanım 1.1.12 :**  $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$  ,  $\theta \in \mathbb{R}$  şeklindeki Möbius dönüşümlerine **dönme dönüşümü** denir.

Eğer  $\theta > 0$  ise pozitif yönde dönme ,  $\theta < 0$  ise negatif yönde dönme olur.

Dönme dönüşümü 0 ve  $\infty$ 'u sabit bırakan bir dönüşümdür.

**Tanım 1.1.13 :**  $J(z) = \frac{1}{z}$  şeklindeki Möbius dönüşümüne **inversiyon (tersinme) dönüşümü** denir.

**Tanım 1.1.14 :**  $S_r(z) = rz$ ,  $r \neq 0$ ,  $r \in \mathbb{C}$  şeklindeki Möbius dönüşümlerine **esneme dönüşümü** denir.

$S_r(z) = rz$  dönüşümü 0 ve  $\infty$  noktalarını sabit bırakır.

Esneme dönüşümü  $\mathbb{C}$  düzlemi üzerinde bir benzerlik dönüşümü olarak etki eder ve uzunlukları bir  $r$  çarpanı kadar genişletir veya daraltır.

**Teorem 1.1.15 :** Her Möbius dönüşümü öteleme, dönme, inversiyon ve esneme dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir.

**İspat 1.1.15 :** Her Möbius dönüşümü  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ;  $ad-bc=1$  formundadır.

Eğer  $c=0$  ise  $T(z) = \frac{az+b}{d}$ ,  $a, d \neq 0$ 'dır.

$\frac{a}{d} = re^{i\theta}$  ve  $\frac{b}{d} = t$  olsun. O zaman

$$T(z) = r.e^{i\theta}z + t$$

olur. Böylece;  $T(z)$  fonksiyonu,

$$T(z) = T_t(z) \circ S_r(z) \circ R_\theta(z)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

$T = T_i \circ S_r \circ R_\theta$  dönüşümü  $\infty$ 'u sabit bırakır.

Eğer  $c \neq 0$  ise  $ad - bc = 1$  eşitliği kullanılarak;

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z + \frac{d}{c})}$$

yazılabilir. Buradan da

$$T(z) = T_{\frac{a}{c}} \circ J(-c(cz+d)) = \left( T_{\frac{a}{c}} \circ J \circ T_{-cd} \circ S_{-c^2} \right)(z)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Tanım 1.1.16 :**  $|z - z_0| = r$ ,  $r > 0$  şeklinde verilen  $\mathbb{C}$ 'deki noktaların kümesine **Öklid çemberi** denir.  $|z - a| = |z - b|$ ,  $a \neq b$  şeklinde verilen  $\mathbb{C}$ 'deki noktaların kümesine **Öklid doğrusu** denir. Öklid çemberi veya  $L \cup \{\infty\}$  kümesinin her ikisine de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da **çember** denir. Burada  $L$  bir Öklid doğrusudur.

**Teorem 1.1.17 :** Eğer  $C$ ,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da bir çember ise  $C$  çemberinin  $T$  Möbius dönüşümü altındaki görüntüsü  $T(C)$  de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da bir çemberdir. (Beardon 2005)

**1. İspat :** İlk olarak bu teorem sadece  $T(C)$ 'nin herhangi bir  $C_1$  çemberinin alt kümesi olduğunu değil aynı zamanda  $T(C) = C_1$  olduğunu iddia eder. Bununla birlikte herhangi bir  $C$  çemberi için  $T(C) \subseteq C_1$  olacak şekilde bir  $C_1$  çemberinin var olması teoremi ispatlamak için yeterlidir. Gerçekten, eğer  $T(C) \subseteq C_1$  ise bu durumda  $C \subseteq T^{-1}(C_1)$  olur. Benzer şekilde  $T^{-1}(C_1)$  de bir çember içinde yatar ve üstelik bu çember;  $C$  çemberidir. Bu durumda,  $C \subseteq T^{-1}(C_1) \subseteq C$  olur. Böylece

$T^{-1}(C_1) = C$  ifadesi elde edilir. Dolayısıyla da,  $T(C) = C_1$  olur. Şimdi burada  $T(C)$ 'nin herhangi bir  $C_1$  çemberi içinde yattığı gösterilecektir. Bunun içinde  $z \mapsto rz, z \mapsto z+t$  ve  $z \mapsto \frac{1}{z}$  dönüşümleri incelenecektir. Bu ilk iki durumda  $T$  fonksiyonu her bir Öklid çemberini yine bir Öklid çemberine ve her bir Öklid doğrusunu yine bir Öklid doğrusuna dönüştürür. Ayrıca  $T(\infty) = \infty$  olduğundan her iki durumda da  $T$  fonksiyonu herhangi bir çemberi, herhangi bir çembere dönüştürür. İspatın geri kalanı için bundan sonra  $T(z) = \frac{1}{z}$  dönüşümü ele alınır.

İlk olarak  $C$  çemberi;

$$C = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\} \quad (1.7)$$

şeklinde orjinden geçmeyen bir çember olsun. Bu durumda  $w = T(z) = \frac{1}{z}$  eşitliğinden  $w$  noktası,  $a + b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0$  denklemini sağlar. Bu yüzden  $T(C) \subseteq C_1$  olur. Burada  $C_1$  çemberi;

$$C_1 = \{w \in \mathbb{C} : a + b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0\}$$

şeklindedir.

Eğer  $C$  orjinden geçen bir çember ise bu durumda (1.7) eşitliğindeki küme  $C^*$  olarak alınır. O halde  $C = C^* \cup \{0\}$  olur. Eğer  $z \in C^*$  ise  $T(C^*) \subseteq C_1$  olur. Bununla birlikte,  $c = 0$  olması durumunda  $C_1$  bir Öklid doğrusu olur. O halde  $T$  fonksiyonu;

$$T(C) = T(C^* \cup \{0\}) = T(C^*) \cup \{T(0)\} \subseteq C_1 \cup \{\infty\}$$

şeklinde yazılabilir.

$C$ 'nin bir Öklid doğrusu olması durumu da benzerdir. Eğer  $C = L \cup \{\infty\}$  ise orjinden geçmeyen herhangi bir Öklid doğrusu için;

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\}, c \neq 0 \quad (1.8)$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda;

$$T(C) = T(L) \cup \{T(\infty)\} \subseteq C_1 \cup \{0\} = C_1$$

olur. Burada  $C_1$ ;

$$C_1 = \{w \in \mathbb{C} : b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0\}$$

şeklinde verilen Öklid çemberidir.

Sonuç olarak,  $L$  orjinden geçen bir Öklid doğrusu olmak üzere eğer;  $C = L \cup \{\infty\}$  ise  $c = 0$  olacak şekilde  $L^*$ , (1.8)'deki küme olarak alınabilir. Bu durumda  $C_1$  bir Öklid doğrusudur ve  $T(L) \subseteq C_1 \cup \{\infty\}$  dur.

**2. İspat :**  $C$  çemberinin denklemini  $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + D = 0$ ,  $A, D \in \mathbb{R}$  şeklindedir.  $T(z)$  Möbius dönüşümü de;

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} ; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

şeklindedir. Burada amaç  $T(C)$ 'nin de bir çember olduğunu göstermektir.

$$T(z) = z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

ise;

$$z = \frac{-dz'+b}{cz'-a}$$

olur. Buradan  $\bar{z} = \frac{-\bar{d}\bar{z}'+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}'-\bar{a}}$  olarak elde edilir. Bunlar C çemberinde yerine yazılırsa;

$$A \cdot \frac{-dz'+b}{cz'-a} \cdot \frac{-\bar{d}\bar{z}'+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}'-\bar{a}} + B \frac{-dz'+b}{cz'-a} + \bar{B} \frac{-\bar{d}\bar{z}'+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}'-\bar{a}} + D = 0$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$[Add\bar{d} - B\bar{c}d - \bar{B}c\bar{d} + Dc\bar{c}]z'\bar{z}' + [-A\bar{b}d + B\bar{a}d + \bar{B}bc - D\bar{a}c]z' \\ + [-A\bar{b}d + B\bar{b}c + \bar{B}a\bar{d} - D\bar{a}c]\bar{z}' + [A\bar{b}\bar{b} - B\bar{a}b - \bar{B}a\bar{b} + D\bar{a}\bar{a}] = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde  $z'\bar{z}'$ 'nin katsayısı reeldir. Çünkü  $d\bar{d}$  ve  $c\bar{c}$  reeldir. Bir sayının eşleniği ile çarpımı ve bir sayının eşleniği ile toplamı reel olduğundan  $B\bar{c}d + \bar{B}c\bar{d}$  reeldir. Benzer şekilde sabit terimde reeldir. Aynı zamanda  $\bar{z}'$  nin katsayısı  $z'$  nün katsayısının eşleniğidir. Bundan dolayı  $T(z)$  dönüşümü çemberleri çemberlere resmeder.

### 1.1.2 İnverson

C,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da;

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

eşitliği ile verilen bir çember olsun.

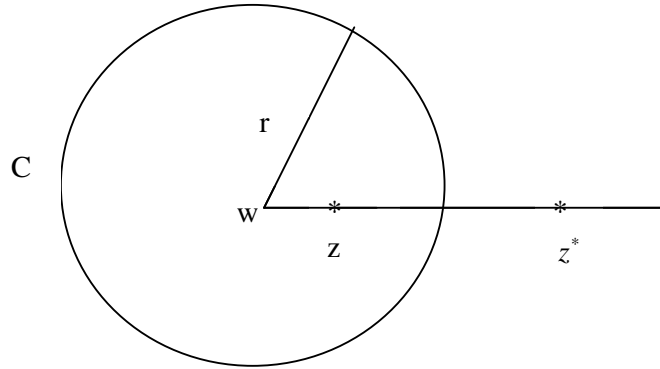
Eğer  $a \neq 0$  ise  $C$ ,  $\mathbb{C}$ 'de bir Öklid çemberidir.

$C$  çemberinin merkezi  $w$  ve yarıçapı da  $r$  olsun. Her bir  $z \in \mathbb{C}/\{w\}$  için  $w$  ve  $z$  noktalarını bulandıran doğru üzerinde bir tek  $z^*$  noktası vardır öyle ki;

$$|z - w| \cdot |z^* - w| = r^2$$

olur.  $z$  ve  $z^*$  noktaları  $w$  ile aynı doğru üzerinde bulunur.

Burada  $z^*$  noktasına  **$C$  çemberine göre  $z$  noktasının inversiyonu (yansıması)** denir.



Şekil 1.1 İncersiyon

**Tanım 1.1.18 :**  $C$  çemberinin merkezi  $w$  ve yarıçapı da  $r$  olsun.  $|z - w| |z^* - w| = r^2$  eşitliğiyle belirlenen  $T_{w,r}(z) = z^*$  dönüşümüne **inversiyon dönüşümü** denir.

Tanımdan da görüldüğü gibi  $z$  noktası,  $w$  noktasına yaklaştıkça  $z^*$  noktasının değeri büyümekte ve  $\infty$ 'a yaklaşmaktadır. Aynı şekilde  $z^*$  noktası,  $w$  noktasına yaklaştıkça  $z$  noktasının değeri gittikçe büyüyerek  $\infty$ 'a yaklaşmaktadır. Yani;

$z \mapsto w$  iken  $z^* \mapsto \infty$  ve  $z \mapsto \infty$  iken  $z^* \mapsto w$

olmaktadır. Burada  $T_{w,r}$ 'yi,

$$T_{w,r}(w) = \infty \text{ ve } T_{w,r}(\infty) = w$$

şeklinde tanımlayarak hem  $T_{w,r}(z)$  dönüşümünün sürekliliği garantilenmiş hem de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da bir dönüşüme genişletilmiş olur. Ayrıca;

$$T_{w,r}^2(z) = (T_{w,r} \circ T_{w,r})(z) = T_{w,r}(z^*) = z$$

eşitliğinden

$$T_{w,r}^2(z) = I(z)$$

olur. Eğer  $T_{w,r}(z) = I(z)$  ise  $z \in C$ 'dir. Yani  $C$  çemberi üzerindeki bir noktanın inversiyonu yine kendisidir.

Eğer  $z \neq w, \infty$  ise;

$$|(\bar{z} - \bar{w})(z^* - w)| = |z - w| |z^* - w| = r^2$$

olur.  $z - w$  ve  $z^* - w$  aynı doğru üzerinde olduğundan

$$\arg(z - w) = \arg(z^* - w)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\arg(\bar{z} - \bar{w}) = -\arg(z^* - w)$$



olur. Böylece;

$$\arg(\bar{z} - \bar{w})(z^* - w) = 0$$

dır. O halde;

$$(\bar{z} - \bar{w})(z^* - w) = r^2$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda;

$$T_{w,r}(z) = z^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{w}} + w \quad (1.9)$$

olur.

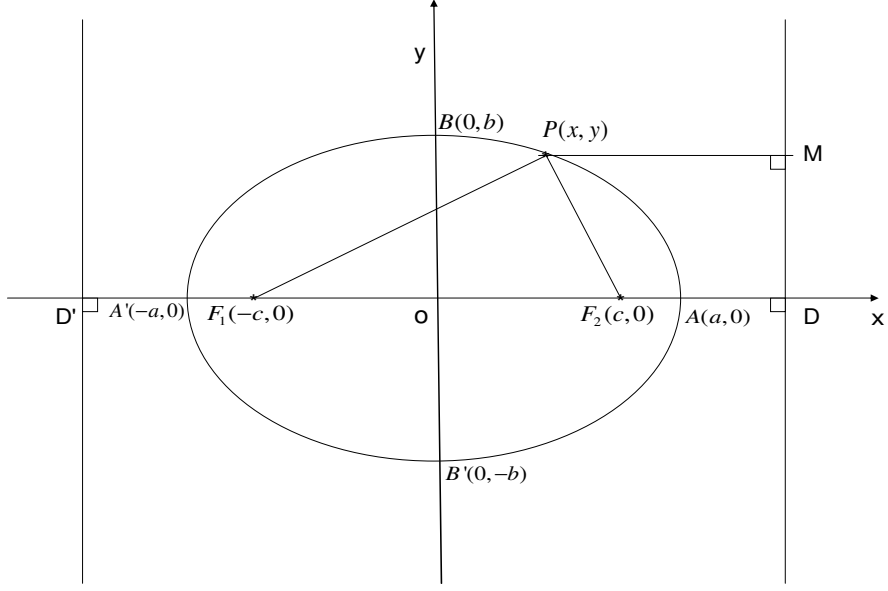
**Teorem 1.1.19 :** Eğer  $z$  ve  $z^*$  noktaları  $C$  çemberine göre invers noktalar ise  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  Möbius dönüşümü altındaki görüntüleri olan  $w$  ve  $w^*$  noktaları da görüntü çemberine göre invers noktalarıdır. ( Ford 1951 )

## 1.2 Elipsler

Elips çemberin biraz deforme olmuş formu olan bir geometrik nesnedir. Tanımı şu şekilde yapılabilir.

**Tanım 1.2.1 :** Verilen iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **elips** denir. Verilen bu iki noktaya **elipsin odakları** denir.

Başlangıç olarak odakları  $c > 0$  olmak üzere;  $F_1 = (-c, 0)$  ve  $F_2 = (c, 0)$  noktalarında olan ve odaklara uzaklıkları toplamı  $2a$  ya eşit olan noktaların geometrik yeri şu şekilde gösterilir:



Şekil 1.2 : Elips

$P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktası adı geçen elipse ait bir nokta olsun. Bu durumda tanım gereğince;

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

olur. Buradan;

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

denklemini elde edilir. Burada  $b^2 = a^2 - c^2$  ifadesi yerine yazılırsa;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklinde elipsin kartezyen denklemi elde edilir. Eğer elipsin merkezi  $(h, k)$  ise;

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

eşitliği elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi eğer  $(x, y)$  noktası elips üzerinde ise  $(-x, y)$  noktası da elips üzerindedir. O halde elips  $y$  eksenine göre simetriktir. Diğer yandan  $(x, y)$  noktası elipse ait ise,  $(x, -y)$  ve  $(-x, -y)$  noktaları da elipse ait olduğundan elips hem  $x$  eksenine hem de başlangıç noktasına göre simetriktir. Denklemden görüleceği gibi, elips  $x$  eksenini  $(a, 0)$  ve  $(-a, 0)$  noktalarında  $y$  eksenini de  $(0, b)$  ve  $(0, -b)$  noktalarında keser. Burada  $b < a$  olduğundan  $x$  eksenine **elipsin büyük eksen**i ve  $y$  eksenine de **elipsin küçük eksen**i denir. Elipsin eksenleri kestiği  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$  ve  $(0, -b)$  noktalarına da **elipsin köşeleri** denir. Son olarak  $\varepsilon = \frac{c}{a} \in (0, 1)$  sayısına da **elipsin dış merkezliği** denir. Eğer  $\varepsilon = 0$  ise  $c = 0$  olur ve özel bir elips olan çember elde edilir.

Şekil 1.2’de verilen elipsin; denklemleri  $x = \frac{a}{\varepsilon}$  ve  $x = -\frac{a}{\varepsilon}$  olarak verilen özel iki doğrusu vardır.  $0 < \varepsilon < 1$  olduğundan  $\frac{a}{\varepsilon} > a$  ve  $-\frac{a}{\varepsilon} < -a$ ’dır. Dolayısıyla bu doğrular, elipsin her iki yanında yer alırlar. Bu doğrulara **elipsin doğrultmanları** denir. Bu doğrultmanlar elips için çok önemlidir.  $F_2 = (c, 0)$  odağı,  $x = \frac{a}{\varepsilon}$  doğrultmanı ve elips üzerinde bir  $P = (x, y)$  noktası ele alınırsa bu  $P$  noktasının  $F_2$  odağına olan uzaklığı;

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}$$

olur. Burada  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  eşitliğinden  $y^2$  ifadesi yalnız bırakılır ve yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$d(P, F_2) = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xc + c^2 + b^2}$$

olur. Eğer;

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

eşitliği göz önüne alınırsa;

$$d(P, F_2) = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - 2x\varepsilon a + a^2} = a - \varepsilon x$$

olur.

Diğer yandan  $P = (x, y)$  noktasının  $x = \frac{a}{\varepsilon}$  doğrusuna olan uzaklığı ise

$$\frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(a - \varepsilon x)$$

şeklindedir.

$$\frac{\text{(x,y) noktasının (c,0) odağına uzaklığı}}{\text{(x,y) noktasının } x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ doğrultmanına uzaklığı}} = \varepsilon \quad (1.10)$$

ve benzer yöntemle aşağıda verilen eşitlik de elde edilebilir.

$$\frac{(x,y) \text{ noktasının } (-c,0) \text{ odağına uzaklığı}}{(x,y) \text{ noktasının } x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ doğrultmanına uzaklığı}} = \varepsilon \quad (1.11)$$

Aslında bu elde edilen son iki denklemin her biri elipsin tanımı olarak alınabilir. Bu durum şu şekilde gösterilir: Bir  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktası, (1.10) denklemini sağlasın yani;

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|} = \varepsilon$$

olsun. Bu durumda;

$$(x-c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left( x - \frac{a}{\varepsilon} \right)^2$$

olur. Denklem düzenlendiğinde;

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2a\varepsilon x + a^2$$

ifadesi elde edilir.  $c = a\varepsilon$  eşitliği göz önüne alınırsa;

$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 = a^2 - c^2$$

olur.  $a^2 > c^2$  olduğundan  $b^2 = a^2 - c^2$ ,  $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2}$  yazılırsa,

$$b^2 x^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

olur. Buradan da;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklinde elipsin kartezyen denklemi elde edilir. Bu durumda elipsin tanımını düzlemde (1.10) ya da (1.11) özelliğini sağlayan noktaların kümesi olarak da alınabilir. Ayrıca her iki simetri ekseninin ara kesiti olan noktaya çemberden esinlenerek **elipsin merkezi** denilebilir. Yukarıda elde edilen elipsin merkezi (0,0) başlangıç noktasıdır.

Son olarak da elipsin denkleminin düzlemin öteleme, dönme ve esnemesi altında nasıl değiştiği gösterilmiştir. Öncelikle;

$$T_{(\alpha,\beta)}(x, y) = (x - \alpha, y - \beta)$$

ötelemesi altında elipsin denkleminin değişimi incelenmiştir.  $x = x' - \alpha, y = y' - \beta$

koordinat değişimi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  denkleminde uygulanırsa;

$$\frac{(x' - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y' - \beta)^2}{b^2} = 1$$

olur. Bu denklem düzenlenirse;

$$\frac{1}{a^2} x'^2 + \frac{1}{b^2} y'^2 - \frac{2\alpha}{a^2} x' - \frac{2\beta}{b^2} y' + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1.12)$$

eşitliği elde edilir. Bir de bu durumun tersi incelenmiştir. Yani  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  denkleminin verilen eğrinin ne zaman (1.12) tipindeki bir elips denkleminde olacağı incelenmiştir.

(1.12) denkleminde  $x'^2$  ve  $y'^2$  nin katsayıları  $\frac{1}{a^2}$  ve  $\frac{1}{b^2}$  aynı işarete sahiptirler. O halde ya  $A > 0$  ve  $B > 0$  ya da  $A < 0$  ve  $B < 0$  olmalıdır.  $A > 0$  ve  $B > 0$  olarak alınırsa kareye tamamlama ile;

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

ifadesi;

$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$$

olur. Bu durumda  $\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$  olmalıdır. Eğer  $A > B$  ise kolayca görülebilir

ki bu denklem; merkezi  $\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B}\right)$  noktasında ve eksen uzunlukları

$a = \sqrt{\frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4AB} - \frac{E}{A}}$  ve  $b = \sqrt{\frac{C^2}{4AB} + \frac{D^2}{4B^2} - \frac{E}{B}}$  olan bir elipstir.  $A < B$  durumu da

benzer şekilde gösterilebilir.

Düzlemin  $R_\theta$  dönmesi altında acaba elipsin denklemi hangi forma dönüşecektir? Burada da bu durum incelenmiştir.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

koordinat değişimi altında  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  denklemi,

$$\frac{(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2}{b^2} = 1$$

şeklinde olur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)x'^2 + (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)y'^2 + \sin 2\theta(a^2 - b^2)x'y' = a^2b^2$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü gibi bu ifadede  $x'^2$  nin ve  $y'^2$  nin katsayılarının her ikisi de aynı işaretlidir. Bu bir elips denklemdir.

Son olarak da;

$$S_{(\alpha, \beta)}(x, y) = (\alpha x, \beta y)$$

esnemesi altında elipsin denklemi incelenmiştir.  $x = \alpha x'$  ve  $y = \beta y'$  koordinat değişimi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  denkleminde uygulanırsa;

$$\frac{(\alpha x')^2}{a^2} + \frac{(\beta y')^2}{b^2} = 1$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade;

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{b}{\beta}\right)^2} = 1$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu ifade de eksen uzunlukları  $\frac{a}{\alpha}$  ve  $\frac{b}{\beta}$  olan bir elipstir.

O halde herhangi bir elipsin denklemi düzlemin öteleme, dönme ve esnemesi altında yine bir elips denkleminde olur.

**Teorem 1.2.2 :**  $U(z) = az + b$ ;  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  benzerlik dönüşümleri elipsleri elipslere resmeder.



**İspat 1.2.2 :**  $a = re^{i\theta}$  olsun. O halde  $U(z)$  benzerlik dönüşümü  $U(z) = re^{i\theta}z + b$  olur. Böylece  $U(z)$  fonksiyonu;

$$U(z) = (T_b \circ S_r \circ R_\theta)(z)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki  $T_b$  ötelemesi,  $R_\theta$  dönmesi ve  $S_r$  esnemesi elipsleri elipslere resmettiğinden dolayı  $U(z)$  benzerlik dönüşümü de elipsleri elipslere resmeder.

**Yardımcı Teorem 1.2.3 :**  $F(z) = \bar{z}$  kompleks eşlenik dönüşümü elipsleri elipslere resmeder.

**İspat 1.2.3 :**  $F(z) = \bar{z}$  dönüşümü altında  $x = x'$  ve  $y = -y'$  koordinat değişimi,  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$  elips denkleminde uygulanırsa;  $\frac{(x')^2}{A^2} + \frac{(-y')^2}{B^2} = 1$  ifadesi elde edilir. Bu ifade de bir elips denklemdir.

**Teorem 1.2.4 :**  $V(z) = a\bar{z} + b$ ;  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  dönüşümü elipsleri elipslere resmeder.

**İspat 1.2.4 :**  $V(z) = a\bar{z} + b$  dönüşümü;

$$V(z) = (U \circ F)(z)$$

şeklinde  $F$  ve  $U$  dönüşümlerinin bileşkesi olarak ifade edilebilir. Burada  $F$  ve  $U$  dönüşümleri elipsleri elipslere resmettiğinden dolayı  $V(z)$  dönüşümü de elipsleri elipslere resmeder.

Ayrıca  $U(z) = az + b$  dönüşümüne **direkt benzerlik dönüşümü** ve  $V(z) = a\bar{z} + b$  dönüşümüne de **ters benzerlik dönüşümü** denir.

## 2. MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ VE ELİPSLER

### 2.1 Elipsin Görüntüleri

$T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  dönüşümü; çemberleri kompleks düzlemdeki çemberlere veya genişletilmiş doğrulara dönüştürür. Bu dönüşüm altında çemberler yerine kompleks düzlemdeki elipsler göz önüne alınırsa; acaba nasıl bir görüntü elde edilir? Buradan yola çıkılarak bu bölümde [5] numaralı kaynaktan yararlanılıp aşağıdaki soruların cevapları incelenmiştir.

1. Möbius dönüşümleri altında  $E$  elipsinin görüntüsü nedir?
2. Hangi Möbius dönüşümleri  $E$  elipsinin simetrisidir?
3. Hangi Möbius dönüşümleri  $T(E) \subseteq E'$  özelliğine sahiptir?

Burada  $E$  ve  $E'$  çember olmayan kompleks düzlemdeki elipslerdir. Bu açıdan elips terimi yalnızca dairesel olmayan elipsler için ve çember terimi de kompleks düzlemdeki çemberler ve genişletilmiş doğrular için kullanılır.

**Tanım 2.1.1 :** Dairesel olmayan bir  $E$  elipsi ve  $T$  Möbius dönüşümü için  $C = T(E)$  olacak şekildeki bir  $C$  eğrisine **möte** denir.

**Tanım 2.1.2 :**  $C_1$  ve  $C_2$  iki eğri olmak üzere  $C_2 = T(C_1)$  olacak şekilde bir  $T$  Möbius dönüşümü var ise  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ' da  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerine **Möbius denktirler** denir.

Bu bölümde herhangi bir elipsin Möbius dönüşümü altındaki görüntüsü iki kısımda ele alınmıştır:

## 1. Benzerlik dönüşümleri altında elipsin görüntüsü

Benzerlik dönüşümleri grubunda,  $E$  elipsini koruyan dört öge vardır. Bunlar;

1. Özdeşlik dönüşümü
2. Elipsin merkezi etrafında  $\pi$  açısı kadarlık dönme dönüşümü
3. Küçük eksene göre yansıma dönüşümü
4. Büyük eksene göre yansıma dönüşümü

Kompleks düzlemdeki benzerlik dönüşümü bir elipsi aynı dış merkezli ( $\varepsilon \geq 0$ ) diğer bir elipse dönüştürür.

## 2. İncersiyon dönüşümleri altında elipsin görüntüsü

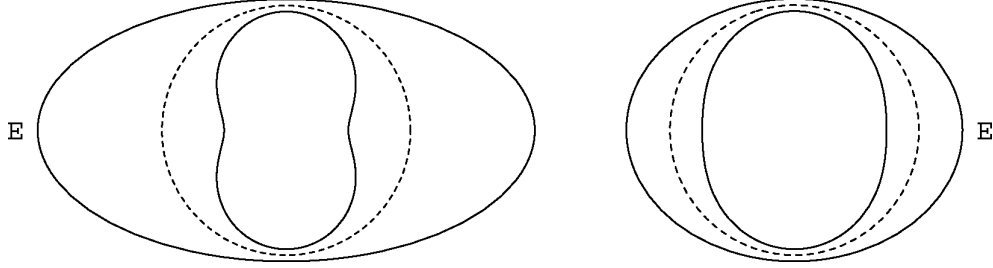
Bu dönüşüm altında elipsin görüntüsünün ne olduğu incersiyon merkezinin nerede olduğuna bağlıdır.

Dış merkezlik	İncersiyon merkezi	Görüntü
$0 < \varepsilon < 1$	Merkez	Eliptik lemniskat (Basit hippopede)
$0 < \varepsilon < 1$	Odak	Basit limaçon

Tablo 2.1

$E$  elipsinin dışmerkezliği büyük olduğu zaman onun görüntüsü olan hippopede'nin konveks olmadığı Şekil 2.1'de görülmektedir. Böyle bir hippopede elips değildir. Ancak  $E$  elipsinin dışmerkezliliği küçük olduğu zaman,  $E$  elipsi

hemen hemen bir çember olur ve onun görüntüsü olan hippopede'nin de çembere daha yakın olması beklenir.



Şekil 2.1 : Konveks olmayan merkezi inversiyon (sol) ve konveks olan merkezi inversiyon (sağ) ile  $E$  elipsi.

**Teorem 2.1.3** : Eğer  $E$ ,  $0 \in \mathbb{C}$  merkezli bir elips ve  $T(z) = 1/z$  ise bu durumda  $T(E)$  bir elips değildir.

Teoreme iki ilginç yaklaşım şu şekildedir:

$0$  merkezli bir  $E$  elipsi verildiğinde,  $R(z) = e^{i\theta} z$  şeklindeki bir benzerlik dönüşümü tarafından  $E$  elipsi standart pozisyona döndürülür. Böylece büyük çap reel eksen üzerinde yatar. Bu durumda  $T = R \circ T \circ R$  olur. Genellik bozulmaksızın,  $E$  elipsi  $(x, y)$  koordinatları ile  $0 < B < A$  için;

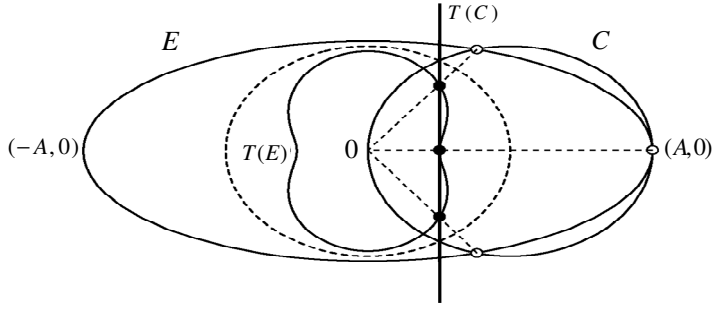
$$E = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \right\} \quad (2.1)$$

şeklindedir. Bu elipse  $T$  dönüşümü uygulanırsa;

$$T : (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (2.2)$$

şeklinde olur.

İlk iddianın ispatı yalnızca büyük dışmerkezli elipsler için sağlanır. Eğer;  
 $B < \frac{A}{\sqrt{2}}$  ise  $(x, y) = \left(\frac{A}{2}, 0\right)$  merkezli ve  $\frac{A}{2}$  yarıçaplı çember,  $E$  elipsini tam üç noktada keser. Bu noktalardan biri  $(A, 0)$  noktasıdır. Diğer ikisi de  $B$ 'nin alacağı değere göre değişir.  $\left(\frac{A}{2}, 0\right)$  merkezli ve  $\frac{A}{2}$  yarıçaplı çember orjinden geçtiğinden  $T$  dönüşümü altındaki görüntüsü genişletilmiş doğrudur. Bu doğru üç farklı ve sonlu noktada  $T(E)$ 'yi keser. Fakat  $T(E)$  bir elips ise bu mümkün değildir.



Şekil 2.2 :  $T$  merkezi inversiyonu altında  $E$  elipsinin ve  $C$  çemberinin görüntülerinin ortak üç noktası.

İkinci iddiadaki amaç ise  $T(E)$  üzerindeki noktaları sağlayan kapalı bir denklem bulmaktır. Böyle bir denklem standart pozisyonda verilen (2.1) eşitliğindeki değerlere (2.2) dönüşümü uygulanarak bulunur. Bu durumda;

$$\frac{\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2}{A^2} + \frac{\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)^2}{B^2} = 1$$

olur ve buradan;

$$(x^2 + y^2)^2 - \left( \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitlik kesinlikle dördüncü dereceden bir eğri denklemi olarak görünür. Aynı zamanda bu denklemin çözüm kümesi daima  $(x, y) = (0, 0) = T(\infty)$  ayrık noktasını içerir. Bu durumda (2.3) denklemi ile tanımlanan ifade  $T(E)$ 'de olmayan en az bir noktayı içerir. Asıl problem  $A = B$  olması durumunda ortaya çıkar. Çünkü bu durumda;

$$(x^2 + y^2)^2 - \left( \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} \right) = 0$$

olur ve

$$(x^2 + y^2) \left( x^2 + y^2 - \frac{1}{A^2} \right) = 0$$

eşitliğinden polinom indirgenemez değildir. Dikkat edilirse,  $A = B$  olması durumunda (2.3) eşitliği iki tane ikinci dereceden ifadenin çarpımı olarak yazılabilir.

Burada ya  $x^2 + y^2 = 0$  dır ya da  $x^2 + y^2 - \frac{1}{A^2} = 0$  dır. O halde  $A = B$  olması

durumunda (2.3) denkleminin sıfır yeri,  $\{(0, 0)\}$  tek elemanlı küme ve  $\frac{1}{A}$  yarıçaplı bir çemberin birleşimidir.

O halde,  $T(E)$  üzerindeki noktaların dördüncü dereceden bir denklemi sağladığı kesin değildir.

Bu iki iddiadan yararlanılarak Teorem 2.1.3'ün ispatı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

**İspat 2.1.3 :** Teoremin ispatında (2.1) eşitliği ile verilen elipsin yansıma ve dönme simetrisi kullanılmıştır.

Eğer;  $R, z \mapsto \bar{z}, z \mapsto -\bar{z}$  veya  $z \mapsto -z$  benzerlik dönüşümlerinin herhangi birisi ise  $T = R \circ T \circ R$  olur.

$T(E)$ 'nin şekli ne olursa olsun, orjin merkezli bir yarı dönme altında invaryanttır ve  $E$  elipsi ile aynı yansıma simetrisine sahiptir. Aynı zamanda;  $T(E)$  eğrisi,  $z = x + iy = \pm \frac{1}{A} + i0$  ve  $z = x + iy = 0 \pm i \frac{1}{B}$  noktalarından geçer. Böylece eğer;  $T(E)$  bir elips ise;

$$g(x + iy) = A^2 x^2 + B^2 y^2 - 1 = 0$$

şeklindeki ikinci dereceden kapalı bir denkleme sağlamalıdır.

$E$  elipsi parametrik olarak;

$$P: \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}: u \mapsto \frac{2Au + iB(1 - u^2)}{1 + u^2} \quad (2.4)$$

şeklindeki dönüşüm ile gösterilebilir. Bu elipse  $T$  dönüşümü uygulanırsa  $T(E)$ ;

$$T \circ P: u \mapsto \frac{1 + u^2}{2Au + iB(1 - u^2)} \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir parametrik denkleme sahip olur.

Genişletilmiş reel doğrunun  $\infty$  ögesi  $P$  dönüşümü tarafından;

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2Au + iB(1 - u^2)}{1 + u^2} = -iB$$

noktasına ve  $T \circ P$  dönüşümü tarafından;

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (T \circ P)(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1+u^2}{2A+iB(1-u^2)} = \frac{1}{-iB} = \frac{i}{B}$$

noktasına dönüştürülür.

$(T \circ P)(u)$  kesri her  $u$  noktası için kompleks düzlemedir. Çünkü  $P$ 'nin görüntüsü 0 noktasından geçmez.  $T(E)$ 'nin reel ve sanal kısımları;

$$\begin{aligned} T(E) &= \frac{1+u^2}{2Au+iB(1-u^2)} \\ &= \frac{(1+u^2)[2Au-iB(1-u^2)]}{[2Au+iB(1-u^2)][2Au-iB(1-u^2)]} \\ &= \frac{2Au(1+u^2)+iB(u^4-1)}{4A^2u^2+B^2(1-u^2)^2} \\ &= \frac{2Au(1+u^2)+iB(u^4-1)}{B^2u^4+(4A^2-2B^2)u^2+B^2} \end{aligned}$$

eşitliğinden;

$$x = \frac{2Au(1+u^2)}{B^2u^4+(4A^2-2B^2)u^2+B^2}$$

ve



$$y = \frac{B(u^4 - 1)}{B^2u^4 + (4A^2 - 2B^2)u^2 + B^2}$$

olur. Eğer  $T(E)$  bir elips ise  $T \circ P$  parametrizasyonunun görüntüsü her  $u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  için  $g = 0$  kapalı denklemini sağlamalıdır. Buradan  $g((T \circ P)(u))$  bileşkesi;

$$g((T \circ P)(u)) = A^2 \left( \frac{2Au(1+u^2)}{B^2u^4 + (4A^2 - 2B^2)u^2 + B^2} \right)^2 + B^2 \left( \frac{B(u^4 - 1)}{B^2u^4 + (4A^2 - 2B^2)u^2 + B^2} \right)^2 - 1$$

şeklinindedir. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$g((T \circ P)(u)) = \frac{4u^2(u-1)^2(u+1)^2(B-A)^2(B+A)^2}{(B^2u^4 + (4A^2 - 2B^2)u^2 + B^2)^2}$$

olur. Bu ifade, eğer;  $A \neq B$  ise herhangi bir  $u$  için sıfırdan farklı değerlere sahiptir. Bu durumda  $T(E)$ 'nin,  $g(x+iy) = 0$  elipsini kestiği yalnızca dört nokta vardır. Bu noktalar;  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = -1$  ve  $u_4 = \infty$ 'dur.

Örneğin;  $A/\sqrt{2} + iB/\sqrt{2}$  noktası göz önüne alınırsa;

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2}{A^2} + \frac{\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right)^2}{B^2} = \frac{A^2}{2A^2} + \frac{B^2}{2B^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

şeklinde  $E$  elipsinin denklemini sağlar. Dolayısıyla bu nokta  $E$  elipsi üzerindedir ve  $T$  dönüşümü altındaki görüntüsü ise;

$$\mathbb{T}\left(\frac{A+iB}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\frac{A+iB}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{A+iB} = \frac{\sqrt{2}(A-iB)}{A^2+B^2}$$

şeklindedir. Acaba bu nokta  $g = 0$  kapalı denklemini sağlar mı? Bunun için

$$g(x+iy) = A^2x^2 + B^2y^2 - 1 = 0$$

denkleminde  $x$  ve  $y$  değerleri yerine yazılırsa;

$$A^2 \left( \frac{\sqrt{2}A}{A^2 + B^2} \right)^2 + B^2 \left( \frac{-\sqrt{2}B}{A^2 + B^2} \right)^2 - 1 = 0$$

olur ve buradan;

$$\frac{(A^2 - B^2)^2}{(A^2 + B^2)^2} = 0$$

eşitliği elde edilir. O halde bu nokta  $A = B$  olmaksızın  $A^2x^2 + B^2y^2 - 1 = 0$  elipsi üzerinde değildir.

**Sonuç 2.1.4 :** Eğer;  $E$ ,  $\mathbb{C}$ 'de  $w$  merkezli bir elips ve  $r$  pozitif bir sayı ise  $T_{w,r}(E)$  görüntüsü bir elips değildir.

**İspat 2.1.4 :**  $T_{w,r}(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{w}} + w$  inversiyon dönüşümü  $S_1 \circ T \circ S_2$  bileşkesine eşittir. Burada  $S_1(z) = r^2z + w$  direkt benzerlik dönüşümü,  $S_2(z) = \overline{z - w}$  ters benzerlik dönüşümü ve  $T(z) = \frac{1}{z}$  dönüşümüdür.

Eğer;  $T_{w,r}(E)$  görüntüsü bir elips olursa bu durumda  $S_2(E)$  görüntüsü 0 merkezli bir elips olur ki onun  $T$  altındaki görüntüsü de bir elips olur. Çünkü  $E$

elipsi  $S_1$  benzerlik dönüşümü tarafından bir elipse dönüştürülür. Ancak bu durum Teorem 2.1.3 ile çelişir. O halde  $T_{w,r}(E)$  bir elips değildir.

Sonuç olarak, merkezi inversiyonlar,  $E$  elipsinin mümkün simetrisi olarak veya  $E$  elipsinden  $E'$  elipsine bir dönüşüm olarak kabul edilmezler. Bu durumda Sonuç 2.1.4 ‘‘Hiçbir hippopede bir elips değildir.’’ şeklinde yeniden ifade edilebilir.

Teorem 2.1.3 ve Sonuç 2.1.4 inversiyon dönüşümleri altında elipsin mümkün olan bütün görüntülerine hitap etmez. Genel olarak söylenirse, bir  $T$  Möbius dönüşümü altında  $E$  elipsinin görüntüsü; elips, limaçon veya eliptik lemniskat değildir, fakat bu görüntü daima dördüncü dereceden reel bir eğridir.

**Tanım 2.1.5 : Reel bikuadratik eğri;**

$$c_{22}z^2\bar{z}^2 + c_{21}z^2\bar{z} + c_{12}z\bar{z}^2 + c_{20}z^2 + c_{11}z\bar{z} + c_{02}\bar{z}^2 + c_{10}z + c_{01}\bar{z} + c_{00} = 0$$

şeklindeki kapalı denklemleri sağlayan bir düzlem eğrisidir.

Burada kompleks katsayılar  $c_{jk} = \bar{c}_{kj}$  eşitliğini sağlar. Böylece, özellikle  $c_{jj}$  reeldir ve denklemin sol tarafı her  $z \in \mathbb{C}$  için reel değerlidir. Aynı zamanda, bikuadratik eğriler dördüncü dereceden eğrilerin bir alt sınıfını oluştururlar.

**Tanım 2.1.6 :**  $m|z - C| + n|z - D| = 1$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ ,  $C, D \in \mathbb{C}$  şeklinde ifade edilen dördüncü dereceden bir eğriye **Descartes’in oval’i** denir.

Descartes’in ovaleri, kartezyen ovaleri olarak da bilinir. Descartes’in ovaleri olarak bilinen bu dördüncü dereceden eğriler ilk kez 1637 yılında Descartes tarafından çalışılmıştır.

Bu yukarıda verilen tanıma dikkat edilirse  $m=n$  için elips,  $m = -n$  için hiperbol ve  $m=1$  için limaçon elde edilir.

**Tanım 2.1.7 :**  $|z-C| \cdot |z-D| = k^2$ ,  $k \in \mathbb{R}$  şeklinde ifade edilen eğriye **Cassini eğrisi** denir.

Diğer bir ifadeyle düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları çarpımı sabit olan noktaların geometrik yerine **Cassini eğrisi** denir.

Giovanni Cassini, kendi adıyla anılan bu eğrileri Dünya ile Güneş'in birbirine göre yörüngeleri üzerine düşünürken bulmuştur. Kepler'in eliptik yörünge kuramını reddetmiş ve Güneşi sabit olarak alıp Dünya'nın yörüngesinin bir Cassini eğrisi olduğunu ileri sürmüştür.

Genel olarak söylenirse; Descartes'in ovaleri, Cassini eğrileri ve bazı reel kübik eğriler, bikuadratik eğriler tarafından kapsanır. Ayrıca reel konikler de,  $c_{22} = c_{21} = c_{12} = 0$  ile reel bikuadratiklerdir.

Örneğin elips için, (2,1) denklemi  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  kompleks koordinatları cinsinden;

$$\left(\frac{1}{4A^2} - \frac{1}{4B^2}\right)z^2 + \left(\frac{1}{4A^2} - \frac{1}{4B^2}\right)\bar{z}^2 + \left(\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2B^2}\right)z\bar{z} - 1 = 0 \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denkleme herhangi bir Möbius dönüşümü uygulanırsa reel bikuadratik elde edilir. Genel olarak Möbius dönüşümü altında reel koniklerin görüntüleri reel bikuadratiklerin uygun bir alt sınıfı biçimindedir. Örneğin [7, 8, 9] numaralı kaynaklar incelenirse elipsin ve hiperbolün inversive görüntüsüne nodal bikuadratik ve parabolün inversive görüntüsüne de cuspidal bikuadratik denildiği görülür. Ayrıca; (2.3) denkleminde gözlenen (0,0) ayrık noktasının tersi olan sonsuzdaki nokta elipsin bir düğüm noktasıdır ve literatürde düğüm noktaları crunode ve acnode olarak sınıflandırılır.

**Tanım 2.1.8 :** Bir eğrinin kendisini kestiği ve eğrinin dallarının bu noktadaki teğetlerinin farklı olduğu bir noktaya **crunode** denir.

**Tanım 2.1.9 :** Bir eğri üzerinde olmayan fakat koordinatları eğrinin denklemini sağlayan bir noktaya **acnode** veya **ayrık nokta** denir.

## 2.2 Elipsin Köşeleri

**Lemma 2.2.1 :** Bir C çemberi ve bu çemberi içermeyen bir L koniği en çok dört kesişim noktasına ve en çok iki teğet noktasına sahiptir.

**İspat 2.2.1 :**  $r > 0$  sonlu yarıçaplı ve  $(u, v)$  merkezli çember;

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left( \frac{2rt}{1+t^2} + u, \frac{r(1-t^2)}{1+t^2} + v \right) \quad (2.7)$$

şeklindeki bir parametrik denklem ile ifade edilebilir.

$P(\mathbb{R})$ ,  $(u, v - r)$  şeklindeki nokta hariç çemberi kaplar. Eğer bu nokta; L'nin bir elemanı olursa çemberi sabit bırakan bir R dönme dönüşümü vardır öyle ki;  $R((u, v - r)) \notin L$  dir.  $R \circ P$ , t'nin ikinci dereceden rasyonel fonksiyonları ile verilir. Bu durumda eğer gerekirse kesişimin bütün noktalarını içeren C çemberinin bir parametrizasyonunu almak için P yerine  $R \circ P$  alınabilir.

Eğer; L için  $q(x, y) = 0$ , ikinci dereceden kapalı bir denklem ise  $(q \circ P)(t)$ , tam olarak L'yi kesen  $P(t)$  noktalarında sıfırdır.  $(q \circ P)$ , paydası asla sıfır olmayan ve payının derecesi en çok dört olan  $\frac{N(t)}{D(t)}$  şeklinde bir rasyonel fonksiyon olarak verilir.  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  var ve bu limitin değeri olan  $(u, v - r)$  noktası, L'de olmadığından;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(P(t)) = q\left(\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)\right) \neq 0$$

olur.

O halde  $N$ , özdeş olarak sıfır değildir ve en çok dört kesişim noktası vardır. Şimdi de en çok iki teğet noktasına sahip oldukları gösterilecektir:

$$\frac{dP}{dt}(t_0) \text{ türevi; } (\nabla q)(P(t_0)) \text{ gradyantına ortogonal olduğu zaman, } P(t_0)$$

kesişim noktası bir teğet noktasıdır. Zincir kuralı ile,

$$\left(\frac{d}{dt}(q \circ P)\right)(t_0) = (\nabla q)(P(t_0)) \cdot \left(\frac{dP}{dt}(t_0)\right)$$

olur. Budurumda  $t_0$  noktası,  $(q \circ P)(t)$  ve  $\frac{d}{dt}(q \circ P)(t) = \frac{N'(t)}{D(t)} - \frac{N(t) \cdot D'(t)}{[D(t)]^2}$

ifadelerinin bir kökü olduğu zaman eğri;  $L$ 'ye teğettir. Bu durum  $t_0$  noktasının,  $N(t)$  ve  $N'(t)$ 'nin bir kökü olduğunu söyler. Bu yüzden  $t_0$  noktası,  $N(t)$  dördüncü dereceden denkleminin çift katlı bir köküdür. O halde  $N(t)$ 'nin bu durumda olan en çok iki tane çift katlı kökü vardır.

**Sonuç 2.2.2 :** Herhangi bir  $T(E)$  mötesi ve herhangi bir  $C$  çemberi en çok dört noktada kesişir ve en çok iki teğet noktasına sahiptir.

**İspat 2.2.2 :**  $T(E)$  mötesine ve  $C$  çemberine  $T^{-1}$  Möbius dönüşümü uygulanırsa  $E$  elipsi ve  $T^{-1}(C)$  çemberi elde edilir. Dairesel olmayan bir elips ve  $T^{-1}(C)$  çemberi Lemma 2.2.1'den dolayı en çok dört noktada kesişir. Möbius dönüşümleri teğetliği koruduğundan aynı zamanda ikinci iddia da Lemma 2.2.1'den sağlanır.

**Lemma 2.2.3 :** Herhangi bir  $T$  Möbius dönüşümü verilsin. Bu durumda,  $T(E)$  mötesi herhangi bir çemberde kapsanmaz.

**İspat 2.2.3 :** Kabul edelim ki;  $T(E)$  m6tesini kapsayan bir  $C$  7emberi vardır.  $T^{-1}$  M6bius d6n6şümü;  $C$  7emberini,  $E$  elipsini kapsayan  $T^{-1}(C)$  Şeklindeki diğer bir 7embere d6n6ştürür. Bu durumda,  $E$  elipsi ve  $T^{-1}(C)$  7emberi sonsuz sayıda noktada keřiŐir. O halde; Lemma 2.2.1'den  $E$  elipsi,  $T^{-1}(C)$ 'yi kapsar ve bu y6zden  $T^{-1}(C)=E$  olur. Bu durum  $E$  elipsinin 7ember olmaması ile 7eliŐir. Dolayısıyla  $T(E)$  m6tesini kapsayan bir  $C$  7emberi yoktur.

**Teorem 2.2.4 (Borsuk-Ulam Teoremi) :**  $f$  fonksiyonu,  $n$ -boyutlu k6reden  $n$ -boyutlu 6klid uzayına giden s6rekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda k6re üzerinde 6yle bir  $x$  noktası vardır ki;  $x$  noktası ve  $x$ 'in orjine g6re simetriği olan  $-x$  noktası  $f$  fonksiyonu tarafından aynı noktaya taşınır. (Meyerson 1979)

**Lemma 2.2.5 :** Eğer bir  $T$  M6bius d6n6şümü  $T(E) \subseteq E'$  Şartını sağlar ise  $T(E) = E'$  olur.

**İspat 2.2.5 :** Belirli bir topolojinin kullanılmasıyla  $E$  elipsini  $E'$  elipsine taşıyan  $T$ 'nin 6rten bir d6n6şüm olduğunu ispatlamanın bir 7ok yolu vardır. Bunlardan ilki Ő6yledir: Eğer  $T: E \rightarrow E'$  d6n6şümü 6rten olmasaydı bu durumda  $T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  d6n6şümü;  $E$  elipsinin bağlantısız t6mleyenini  $T(E)$  m6tesinin bağlantılı t6mleyenine resmeden bir homeomorfizm olurdu.

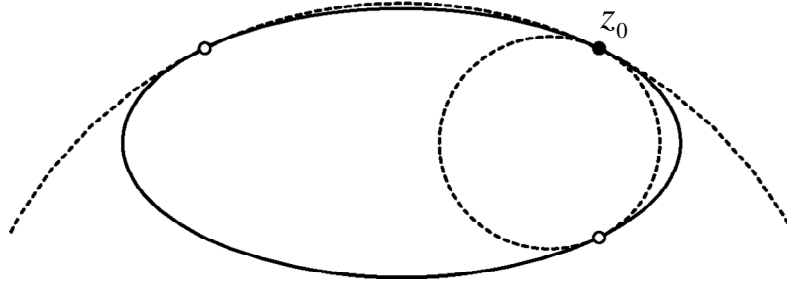
Bu lemmanın bir diğer ispatında da topolojik 1-boyutlu k6reler i7in Borsuk-Ulam teoremi kullanılır. Bu durumda lemmanın ispatı Ő6yledir:  $E$  elipsini  $E'$  elipsinin uygun bir alt k6mesine d6n6ştüren s6rekli bir d6n6şüm bire-bir olmayacaktır. O halde  $T: E \rightarrow E'$  d6n6şümü bire-bir ve s6rekli olduğundan  $T$  d6n6şümü 6rten olmalıdır.

**Teorem 2.2.6 :**  $E, E' \subseteq \mathbb{C}$  elipsleri verilsin. Eğer  $T$  M6bius d6n6şümü  $E$  elipsini,  $E'$  elipsine d6n6ştürür ise  $T$  bir benzerlik d6n6şümüdür.

**1. İspat 2.2.6 :** Eğer  $T(E) = E'$  ve  $R$  dönüşümü  $E'$  elipsinin bir yansıma simetrisi ise bu durumda  $R \circ T : E \rightarrow E'$  olur.  $T$  dönüşümü (1.1) biçiminde kabul edilsin. Amaç  $c=0$  olduğunu göstermektir.

Herhangi bir elips, onun yansıma simetrisi ekseninde yatan dört noktaya sahiptir. Bu noktalara elipsin köşe noktaları denir. Düzlemin herhangi bir benzerlik dönüşümü elipsin köşe noktalarını elipsin görüntüsünün köşe noktalarına resmeder.  $E$  elipsi, (2.1) deki gibi kabul edilsin. Bu elipsin köşe noktaları  $(\pm A, 0)$  ve  $(0, \pm B)$  noktalarıdır.

$C$  çemberi bir  $z_0$  noktasında  $L$  elipsine teğet olsun. Eğer  $C$  çemberi  $z_1 \neq z_0$  şeklinde bir  $z_1$  noktasında da  $L$  elipsine teğet oluyorsa  $C$  çemberine,  $z_0$  noktasında **bitanjant**'tır denir. Şekil 2.3'den köşe noktası olmayan herhangi bir  $z_0$  noktasında en az iki bitanjant çemberinin var olduğu görülür: Biri merkezi büyük eksen üzerinde olup elipsin içinde, biri de merkezi küçük eksen üzerinde olup elipsin dışındadır.



Şekil 2.3 : Ortak bir teğet noktası ile bitanjant çemberleri.

Elipsin köşe noktasında ise yalnızca bir tane bitanjant çember vardır: Eğer; teğetliğin diğer bir noktası, karşı köşeden başka herhangi bir nokta olsaydı, bu durumda üçüncü bir teğet noktası olurdu. Bu da Lemma 2.2.1 ile çelişirdi.



$z_0$ ,  $E$  elipsinin bir köşe noktası olsun. Fakat  $T(z_0)$  noktası  $E'$  elipsinin bir köşe noktası olmasın. Bu durumda  $T(z_0)$  noktasında,  $E'$  elipsi iki bitanjant çemberine sahiptir ve bu çemberler,  $E'$  elipsine sırasıyla  $T(z_0)$  ile  $T(z_1)$  ve  $T(z_0)$  ile  $T(z_2)$  noktalarında teğet olacak şekilde  $E$  elipsinde  $z_1$  ve  $z_2$  şeklinde farklı noktalar vardır.  $T^{-1}$  kesirli lineer dönüşümü; çemberleri ve eğrilerin teğetliğini koruduğuna göre bu dönüşüm;  $T(z_0)$  noktasında  $E'$  elipsinin bu iki bitanjant çemberini  $z_0$  noktasında  $E$  elipsinin iki bitanjant çemberine dönüştürür. Bu durum  $E$  elipsinin  $z_0$  köşe noktasında yalnızca bir bitanjant çemberine sahip olması ile çelişir. Böylece  $T(A)$ ,  $T(-A)$ ,  $T(iB)$  ve  $T(-iB)$  noktaları  $E'$  elipsinin köşe noktaları olmalıdır. Bu yüzden  $E$  elipsinin eksenlerinin görüntüleri  $E'$  elipsinin köşelerinde,  $E'$  elipsine ortogonal olan çemberler olmalıdır.  $E'$  elipsi dairesel olmadığından bu çemberler doğru olmalıdır. Bu yüzden  $T(A)$  ile  $T(-A)$  ve  $T(iB)$  ile  $T(-iB)$  noktaları  $E'$  elipsinin karşı köşelerinin bir çiftidir.

Şimdi  $c \neq 0$  olduğu kabul edilsin.  $T$  dönüşümünün  $\infty$ 'a dönüştürdüğü  $-\frac{d}{c}$  noktası,  $E$  elipsinin büyük ve küçük her iki ekseninde de yatmalıdır. Her iki eksen üzerinde yatan nokta, 0 noktası olduğuna göre  $-\frac{d}{c} = 0$  ve buradan  $d = 0$  olur.

Bu yüzden  $T$  dönüşümü;  $T(z) = a + \frac{b}{z}$ ,  $b \neq 0$  formundadır.

$z \mapsto a + bz$  bir benzerlik dönüşümü olduğundan;  $z \mapsto \frac{1}{z}$  dönüşümü altında

$E$  elipsinin görüntüsü bir elips olmalıdır. Ancak bu durum, Teorem 2.1.3 ile çelişir. O halde  $c = 0$  olur. Dolayısıyla  $T$  Möbius dönüşümü,  $E$  elipsini  $E'$  elipsine dönüştürüyor ise benzerlik dönüşümüdür.

Bu teorem ikinci bir yol olarak analitik bir yaklaşım ile ispatlanmıştır. Bu az önceki ispata göre biraz daha basit olabilir. Çünkü analitik yaklaşımda teğet çemberleri yerine yüksek mertebeden türevler ve elipsin eğriliği ele alınır. Ayrıca elipsin köşe noktalarında elipsin eğriliğinin bir yerel ekstremum değerine sahip olması durumu göz önünde bulundurulur.

**2. İspat 2.2.6 :** İlk ispatta anahtar nokta, Möbius dönüşümlerinin bir elipsin köşe noktalarını diğer bir elipsin köşe noktalarına dönüştürmeleridir. Daha genel olarak, düzlemde herhangi bir regüler eğrinin köşe noktaları, eğriliğin bir yerel ekstremum değerine sahip olduğu noktalardır. Bununla birlikte Möbius dönüşümü bir eğrinin köşelerini, onun görüntüsünün köşelerine resmeder. İspatın geri kalanında  $c = 0$  olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu durum zaten ilk ispatta verilmişti. O halde  $T$  Möbius dönüşümü bir benzerlik dönüşümüdür.

**Sonuç 2.2.7 :** Elipsin simetrisi olan  $T$  Möbius dönüşümleri benzerlik dönüşümleridir.

**3. İspat 2.2.6 :**  $c_1 \in \mathbb{C}$  noktası  $E$  elipsinin merkezi ve  $c_2 \in \mathbb{C}$  noktası  $E'$  elipsinin merkezi olsun. Öyle ki;  $H(z) = -z + 2c_2$  fonksiyonu,  $E'$  elipsinin merkezi etrafındaki yarı dönme dönüşümüdür.  $T$  dönüşümü,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  şeklinde kabul edilirse;

$$T^{-1} \circ H \circ T : z \mapsto \frac{(2c_2cd - ad - bc)z + 2d(c_2d - b)}{2c(a - c_2c)z + ad + bc - 2c_2cd}$$

şeklinde olur.

$z \in E$  için  $(H \circ T)(z) \in E'$  ve  $w \in E'$  için  $T^{-1}(w) \in E$  olduğundan  $T^{-1} \circ H \circ T$  dönüşümü  $E$  elipsinin bir simetrisidir. Yani,  $(T^{-1} \circ H \circ T)(E) = E'$  dir. Dolayısıyla Sonuç 2.2.7'e göre bu dönüşüm bir benzerlik dönüşümüdür. O halde yukarıdaki ifadenin paydasında bulunan  $z$ 'nin önündeki  $2c(a - c_2c)$  katsayısı sıfır olmalıdır.

Buradan,  $c = 0$  veya  $c \neq 0$  ve  $c_2 = \frac{a}{c} = T(\infty)$  olur.

$c = 0$  olması durumu teoremin birinci ispatında değerlendirildiğinden burada ikinci durum ele alınmıştır. Bu ikinci durumda bileşke;

$$\frac{(ad-bc)z + 2d\left(\frac{ad-bc}{c}\right)}{bc-ad} = -z - 2\frac{d}{c}$$

olur. Böylece  $E$  elipsinin bu simetrisi,  $c_1 = -\frac{d}{c} = T^{-1}(\infty)$  merkezli yarı dönmedir.

$c \neq 0$  durumundaki tezatlığı göstermek için;  $T$  dönüşümü,  $T_1(z) = z - c_1$  ötelemesi,  $T_2(z) = \frac{1}{z}$  dönüşümü ve  $T_3(z) = \frac{(bc-ad)z + ac}{c^2}$  benzerlik dönüşümünün bir bileşkesi olarak yazılır. Bu durumda  $T(z)$ ,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = \frac{1}{z - \left(-\frac{d}{c}\right)} \frac{bc-ad}{c^2} + \frac{a}{c}$$

şeklinde olur. Burada;  $T_1(E)$  ve  $T_3^{-1}(E')$  orjin merkezli elipslerdir. O halde  $T$  dönüşümünün  $E$  elipsini,  $E'$  elipsine dönüştürmesi için  $T_2$  dönüşümünün de elipsi elipse dönüştürmesi gerekir. Ancak bu durum, Teorem 2.1.3'e tezattır. Öyleyse;  $c \neq 0$  durumu hariçtir.

**Sonuç 2.2.8 :** Eğer;  $T_1(E_1)$  ve  $T_2(E_2)$  möteleri Möbius denk iseler  $E_1$  ve  $E_2$  elipsleri aynı dış merkezliğe sahiptir.

**İspat 2.2.8 :** Hipotezden;  $T(T_1(E_1)) = T_2(E_2)$  olacak şekilde bir  $T$  Möbius dönüşümü vardır. Buradan her iki tarafa  $T_2^{-1}$  dönüşümü uygulanırsa;  
 $T_2^{-1} T(T_1(E_1)) = T_2^{-1} T_2(E_2)$  olur. Böylece  $E_2 = T_2^{-1}(T(T_1(E_1)))$  elde edilir. Herhangi bir elipsi diğer bir elipse taşıyan Möbius dönüşümleri benzerlik dönüşümü olduğundan  $T_2^{-1} \circ T \circ T_1$  bileşkesi bir benzerlik dönüşümüdür. Bu durumda  $E_2$  ve  $E_1$  benzerdir ve aynı dış merkezliğe sahiptir.

**Sonuç 2.2.9 :** Herhangi bir möte, bir elips veya çemberdeki inversiyon dönüşümü altında bir elipsin görüntüsüdür ve bu durumlar ayrıktır, birbirini kapsamaz.

**İspat 2.2.9 :** İlk olarak ispatın ayrıklık kısmı Teorem 2.2.6'dan görülür.  $E$  ve  $E'$  elipsleri için,  $R(E) = E'$  olacak şekilde çemberde bir  $R$  inversiyon dönüşümü yoktur. Çünkü  $R$ , benzerlik dönüşümü olmayan bir Möbius dönüşümüdür. Eğer  $T(E)$  mötesi bir elips değil ise bu durumda  $T$  benzerlik dönüşümü değildir. Böylece

$T$  dönüşümü  $c \neq 0$  ile  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  veya  $T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  formundadır. Ayrıca

$T(\infty) = \frac{a}{c}$  dir.  $\frac{a}{c}$  noktasını  $\infty$ 'a geri gönderen inversiyon dönüşümü,

$R(z) = \frac{1}{\bar{z} - \frac{a}{c}} + \frac{a}{c}$  olsun.  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ile  $R(z)$  dönüşümünün bileşkesi alınırsa;

$$(R \circ T)(z) = \frac{1}{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \left(\frac{a}{c}\right)} + \frac{a}{c} = \frac{(cz+d)\bar{c}}{bc-ad} + \frac{a}{c} = \left(\frac{\bar{c}^2}{bc-ad}\right)\bar{z} + \frac{cc\bar{d} + abc - aad}{c(bc-ad)}$$

olur. Dikkat edilirse;  $(R \circ T)(z)$  dönüşümü bir benzerlik dönüşümüdür. Benzer durum,  $T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  olmasında da geçerlidir. Dolayısıyla  $R(T(E))$ , bir  $E'$  elipsidir ve  $T(E) = R(E')$  olduğu  $R = R^{-1}$  den ortaya çıkar.

### 2.3 Elipsin Dügümü

Teorem 2.2.6'ya en son yaklaşım bu kez kompleks bir eğrinin reel kısmı olarak elipsi tanımlamaya başka bir yol bulmaktır. Öklid geometrisinin reel düzlemine kompleks noktaları veya sonsuzdaki noktaları eklemenin birden fazla yolu vardır. Bunlardan birisi, kompleks projektif düzlem içerisine reel düzlemi yerleştirmektir. Bir diğeri de bu kısımda tanımlanacak olan iki Riemann küresinin çarpımını kullanmaktır.

Önceki bölümlerde olduğu gibi, bu bölümde de  $E = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \right\}$

standart pozisyonundaki elipsi kullanmak daha yararlıdır. Aynı zamanda bu elipsi, odakları  $\pm 1 + 0i$  olacak şekilde standart pozisyonda ayarlayarak her bir dışmerkezlik için sadece bir elips seçmek daha uygundur. Bu elips aileleri iki parametre ( $A$  ve  $B$  yarıçapları) yerine yalnızca bir reel parametreye bağlıdır.

Böylece bir elips için parametrik denklem yazmaya güzel bir yol  $k > 1$  için;

$$P_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : u \mapsto \frac{2(k^2 + 1)u + i(k^2 - 1)(1 - u^2)}{2k(1 + u^2)} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Bu denklem seçilen katsayılar ile (2.4) denklemdir. Böylece elipsin Öklid invaryantları  $k$ 'nın rasyonel fonksiyonlarıdır. Büyük yarıçap  $A = \frac{k^2 + 1}{2k} > 1$ , küçük yarıçap  $B = \frac{k^2 - 1}{2k} > 0$ , dışmerkezlik  $\varepsilon = \frac{2k}{k^2 + 1}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  dir. Buradaki  $A$  ve  $B$  değerleri, (2.6) denkleminde yerine yazılırsa  $E$  elipsi;

$$E = \left\{ z : z^2 + \bar{z}^2 - \left( \frac{k^4 + 1}{k^2} \right) z\bar{z} + \frac{(k^4 - 1)^2}{4k^4} = 0 \right\} \quad (2.9)$$

şeklinde olur.

Teorem 2.2.6 veya Sonuç 2.2.7'ye uygulanacak en basit gibi görünen yaklaşım,  $T(E)$  parametresi için  $T \circ P_k$  bileşkesini uygulayıp bunun elipsin kapalı denklemini sağlayıp sağlamadığına bakmaktır. Bu, Teorem 2.1.3 ve Lemma 2.2.1 de kullanılan tekniktir. Ancak keyfi bir  $T$  kesirli lineer dönüşümü, (2.9) şeklindeki kapalı bir denkleme uygulanırsa, öyle karmaşık bir ifade elde edilir ki; bu pratik bir metod değildir.

Bir elipsi diğer bir elipse taşıyan dönüşümler, (2.3) denkleminde elde edilen ayırık aykırı noktanın kullanılması ile karakterize edilir. Elips için, kapalı denklemin aykırılığı sonsuzdur ve reel parametrik dönüşümün görüntüsünde hatta onun kapanışında değildir. Bu özelliklerin her ikisi de gösterir ki; elipsin aykırılığı kompleks projektif geometride Teorem 2.2.6'yı incelemek için yararlı olacaktır. Bu durumda homojen koordinat sistemi kısaca gözden geçirilmelidir.

$\mathbb{C}^{n+1}$ 'in bir boyutlu alt uzayının kümesi olarak  $\mathbb{C}P^n$  projektif uzayı tanımlanır. Sıfırdan farklı  $(z_0, \dots, z_n)$  vektörü tarafından gerilen doğru,  $[z_0 : \dots : z_n]$  şeklinde gösterilir. Böylece sıfırdan farklı bir  $\lambda \in \mathbb{C}$  skaleri için

$$[\lambda z_0 : \dots : \lambda z_n] = [z_0 : \dots : z_n]$$

olur.

$(z_1, \dots, z_n) \mapsto [1 : z_1 : \dots : z_n]$  şeklinde tanımlı  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  dönüşümü bire-birdir ve onun görüntüsü afin komşuluğa bir örnektir. Bu afin komşuluğun tümleyeni;  $\{[0 : z_1 : \dots : z_n]\}$  kümesi şeklinde bir boyut daha düşük olan bir kompleks projektif uzaydır.  $E$  elipsini içeren kompleks sayı doğrusu,  $\mathbb{C}P^1$ 'de  $\{[1 : z]\}$  şeklinde afin komşuluğudur.  $\infty$  noktası homojen koordinatlarda  $[0 : 1]$  şeklinde gösterilir.

$G: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  dönüşümünden  $G: \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$  iyi tanımlı dönüşümü elde edilir. Eğer  $G$  dönüşümü, doğruları doğrulara taşır ise sıfırdan farklı her bir  $\vec{z} \in \mathbb{C}^{m+1}$  vektörü için  $G$  dönüşümü aşağıdaki iki özelliğe sahiptir:

1.  $G(\vec{z}) \neq \vec{0}$

2. Sıfırdan farklı herhangi iki  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  skalerleri için;

$$\mu_1 \cdot G(\lambda_1 \cdot \vec{z}) = \mu_2 \cdot G(\lambda_2 \vec{z})$$

olacak şekilde sıfırdan farklı  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  skalerleri vardır.

$\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  iyi tanımlı dönüşüm örneği olarak, (1.1) formundaki kesirli lineer dönüşümü verilebilir. Bu dönüşüm homojen koordinatlar üzerinde;

$$T: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1 : \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

şeklinde bir lineer dönüşüm olarak ifade edilir.

Bu koordinat sisteminde  $\infty$ 'daki noktayı ayrı olarak düşünmeye gerek yoktur. Örneğin,  $T([0 : 1]) = [c : a]$  eşitliği  $c \neq 0$  için  $[1 : a/c]$  ifadesine eşittir ve bu ifade birinci bölümde elde edilen  $T(\infty) = a/c$  ile tutarlıdır.

Diğer iyi tanımlı dönüşüm,  $k > 1$  reel parametresine bağlı olarak ;

$$P_k : [z_0 : z_1] \mapsto \left[ 2k(z_0^2 + z_1^2) : 2(k^2 + 1)z_0z_1 + i(k^2 - 1)(z_0^2 - z_1^2) \right]$$

şeklinde (2.8) denkleminin bir kompleks homojen versiyonudur. Bu dönüşüm de önceki örnekteki gibi  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  dir. Fakat  $P_k$  dönüşümü bire-bir değildir.

$u \in \mathbb{R}$  için;  $[1 : u]$  biçimindeki noktalar,  $\{[z_0 : z_1] : z_0 \neq 0\}$  afin komşuluğunda bir görüntüye sahiptir. Bu durumda bu  $P_k$  dönüşümü, (2.8)'de verilen bire-bir, reel parametrik eğriye sınırlanır. Homojen koordinatlarda sonsuzdaki nokta tekrardan uygun olarak ele alındığı takdirde (2.4)'deki gibi ;

$$P_k([0 : 1]) = [2k : -i(k^2 - 1)] = [1 : -iB]$$

şeklinde olur.

Elipsin bir komplikasyonunu tanımlamak için gerekli olan bir takım dönüşümler vardır. Bunlar;

$$F : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

$$[z_0 : z_1] \mapsto [\bar{z}_0 : \bar{z}_1]$$

şeklindeki kompleks eşlenik dönüşümü,

$$\Delta : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$$

$$[z_0 : z_1] \mapsto ([z_0 : z_1], F([z_0 : z_1]))$$

şeklindeki reel diyagonal dönüşümü ve

$$s : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^3$$

$$([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) \mapsto [z_0 w_0 : z_0 w_1 : z_1 w_0 : z_1 w_1]$$

şeklindeki Segre dönüşümüdür.  $F$  'nin sabit nokta kümesi  $\mathbb{R}P^1 \subseteq \mathbb{C}P^1$  şeklindeki reel projektif doğrudur.  $\Delta$  'nin görüntüsü tam olarak;

$$\Delta(\mathbb{C}P^1) = \{(z, w) : w = F(z)\}$$

şeklindeki reel altmanifold olur.  $s$  'nin görüntüsü tam olarak;

$$s(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) = \{[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3] : \zeta_0 \zeta_3 - \zeta_1 \zeta_2 = 0\}$$

kümesidir ve bu  $\mathbb{C}P^3$  'de bir diferansiyellenebilir hiperyüzezdır. Bu yüzden  $s$  'nin görüntüsü 2- boyutlu indirgenemez bir çeşittir.

$E \subseteq \mathbb{C}P^1$  elipsine uygulanan  $G_k$  parametrik dönüşümü;



$$\begin{aligned}
G_k : \mathbb{C}P^1 &\rightarrow \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \\
[z_0 : z_1] &\mapsto (P_k([z_0 : z_1]), (F \circ P_k \circ F)([z_0 : z_1])) \\
&= ([2k(z_0^2 + z_1^2) : 2(k^2 + 1)z_0z_1 + i(k^2 - 1)(z_0^2 - z_1^2)], \\
&\quad [2k(z_0^2 + z_1^2) : 2(k^2 + 1)z_0z_1 - i(k^2 - 1)(z_0^2 - z_1^2)])
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada  $G_k(\mathbb{C}P^1) \subseteq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  uzaylarının her ikisi de kompleks çeşitlerdir ve bunlar sırasıyla reel alt çeşitler olarak  $\Delta(E) \subseteq \Delta(\mathbb{C}P^1)$  şeklindeki reel elipsin ve inversive düzlemin görüntülerini kapsarlar.

$P_k$  dönüşümü iyi tanımlı olduğundan  $G_k$  dönüşümü de iyi tanımlıdır. Eğer;  $[z_0 : z_1] \in \mathbb{R}P^1$  ise  $G_k([z_0 : z_1])$ ,  $\Delta$ 'nin görüntüsündedir ve  $\Delta(E) = G_k(\mathbb{R}P^1)$ 'dir. Böylece  $G_k$ 'nin görüntüsü sonsuz sayıda nokta içerir fakat bu dönüşüm örten değildir. Örneğin,  $([1 : 0], [0 : 1])$  noktası görüntüde değildir.

$G_k$  dönüşümü, çift katlı nokta hariç bire-birdir.  $P_k : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  dönüşümü genel olarak ikiye-birdir: Herhangi bir  $z = [z_0 : z_1]$  için;

$$z' = [-i(1-k^2)z_0 + (1+k^2)z_1 : (1+k^2)z_0 + i(1-k^2)z_1]$$

noktası,  $P_k(z) = P_k(z')$  şeklinde  $z$  ile aynı görüntüye sahiptir. Benzer şekilde;  $F \circ P_k \circ F$  dönüşümü de genel olarak ikiye-birdir ki burada,

$$z'' = [i(1-k^2)z_0 + (1+k^2)z_1 : (1+k^2)z_0 - i(1-k^2)z_1]$$

noktası,  $(F \circ P_k \circ F)(z) = (F \circ P_k \circ F)(z'')$  şeklindeki eşitliği sağlar.

Eğer;  $G_k(z) = G_k(w)$  ise bu durumda ya  $w = z$  ya da  $w = z' = \bar{z}$  olur ve yalnızca  $z' = \bar{z}$  eşitliğinin çözümü  $[1 : i]$  ve  $[1 : -i]$ 'dir. Böylece  $k$ 'dan bağımsız olarak;

$$G_k([1 : i]) = G_k([1 : -i]) = ([0 : 1], [0 : 1])$$

dir.  $G_k$  kompleks eğrisinin bu çift katlı noktası, sonsuzda reel elipsin ayrık noktasına karşılık gelir ki; bu nokta, (2.3) denklemindeki 0 noktasının tersidir.

$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ 'de  $G_k(\mathbb{C}P^1)$  eğrisinin kapalı denklemi,  $([z_0 : z_1], [w_0 : w_1])$  bi-homojen koordinatlarda;

$$z_1^2 w_0^2 + w_1^2 z_0^2 - \left( \frac{k^4 + 1}{k^2} \right) z_1 w_1 z_0 w_0 + \frac{(k^4 - 1)^2}{4k^4} z_0^2 w_0^2 = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde verilir. Bu denklemde  $w = [w_0 : w_1]$  yerine  $\bar{z} = [\bar{z}_0 : \bar{z}_1]$  yazılırsa, (2.9) denklemi elde edilir.

(2.11) denklemindeki  $[z_0 : z_1]$  ve  $[w_0 : w_1]$  değerlerinin  $[1 : z]$  ve  $[1 : \bar{z}]$  değerleri ile yer değiştirilmesi durumunda da Tanım 2.1.5'deki gibi reel bir eğri yeniden elde edilir.

$s \circ G_k : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^3$  bileşkesi iyi tanımlıdır. Böylece bu parametrize uzay eğrisinin görüntüsü indirgenemez bir çeşittir. Bu görüntü sonsuz sayıda noktaya sahiptir. Ayrıca bu görüntü,  $(s \circ \Delta)(E)$  şeklinde elipsin görüntüsünü içerir. Fakat  $G_k$  dönüşümü örten olmadığından  $(s \circ G_k)(\mathbb{C}P^1)$ ,  $s(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)$  Segre çeşidinin tamamı değildir. Dolayısıyla bu görüntü 1-boyutludur.  $s$  bire-bir olduğundan  $s \circ G_k$  dönüşümü;  $\mathbb{C}P^3$ 'de  $[0 : 0 : 0 : 1]$  şeklinde tam olarak bir tane çift katlı noktaya sahiptir.

**4. İspat 2.2.6 :** Aslında burada  $T$  kesirli lineer dönüşümler için Sonuç 2.2.7 ispatlanacaktır. Fakat bu, teoremin ispatı için yeterlidir. İspatta komplike bir elips göz önüne alınmıştır.

(2.10)'daki gibi (kesirli) lineer dönüşüm verilirse,  $T_c$  dönüşümü;

$$T_c : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$$

$$(z, w) \mapsto (T(z), (F \circ T \circ F)(w))$$

şeklinde tanımlanır.

$T_c$  dönüşümü iyi tanımlı, bire-bir ve cebirsel bir dönüşümdür. Ayrıca,  $T_c \circ \Delta = \Delta \circ T$  'dir.  $s \circ T_c \circ G_k$  bileşkesi tam olarak bir tane çift katlı noktaya sahiptir ve onun görüntüsü  $\mathbb{C}P^3$  'ün indirgenemez, bir boyutlu alt çeşididir.

Eğer  $T$ , Sonuç 2.2.7'nin hipotezindeki gibi  $E$  elipsinin bir simetrisi ve  $z \in E$  ise bu durumda;  $T(z) \in E$  ve  $(T_c \circ \Delta)(z) = (\Delta \circ T)(z) \in \Delta(E)$  olur. Böylece  $s \circ T_c \circ G_k$  'nın görüntüsü;  $s \circ G_k$  'nın görüntüsünün bir alt kümesi olan  $(s \circ \Delta)(E)$  sonsuz kümesini içerir. Bu iki görüntünün kesişimi pozitif boyutun bir çeşidi olduğundan görüntüler çakışmalıdır. Özellikle,  $G_k$  'nın ve  $T_c \circ G_k$  'nın görüntüleri aynı yerde çift katlı noktaya sahip olmalıdır.

$$([0:1], [0:1]) = T_c([0:1], [0:1]) = (T([0:1]), (F \circ T \circ F)([0:1]))$$

eşitliğine dikkat edilirse  $T$  dönüşümü  $[0:1]$  noktasını sabit bırakır.

Sonuç olarak,  $c = 0$  'dır. Böylece  $T$  bir benzerlik dönüşümüdür.

Buradan şu sonuç çıkarılabilir;  $T_c$  dönüşümü  $\Delta(\mathbb{C}P^1)$  'yi sabit bıraktığından elipsin  $T(E)$  şeklindeki herhangi bir Möbius dönüşümü,  $T(\infty)$  'da bir acnode ile reel bikuadratik kapalı denkleminde sahiptir.

Yukarıdaki ispatta en önemli adım eğrilerin indirgenemezliği ki; bu durum şu sonuca varmayı sağlar: İki kompleks eğri reel elips üzerinde kesişirse bunlar her yerde çakışır.

Bir kompleks projektif uzaydan diğer bir kompleks projektif uzaya olan iyi tanımlı bir polinom dönüşümü, indirgenemez çeşide eş olan bir görüntüye sahiptir. Bu bir ifadenin indirgenmezliğini belirlemek için mükemmel bir yoldur. Çünkü iyi tanımlı bir parametrik dönüşümü kontrol etmek çoğu kez bulmaya çalışmaktan daha kolaydır.

Acaba aynı ispat çemberlere uygulanırsa ne olur?

Eğer (2.7) çemberinin parametrik dönüşümü, kompleks homojen koordinatlara genişletilirse;

$$P: [z_0 : z_1] \mapsto [z_0^2 + z_1^2 : 2rz_0z_1 + u(z_0^2 + z_1^2) + i(r(z_0^2 - z_1^2) + v(z_0^2 + z_1^2))]$$

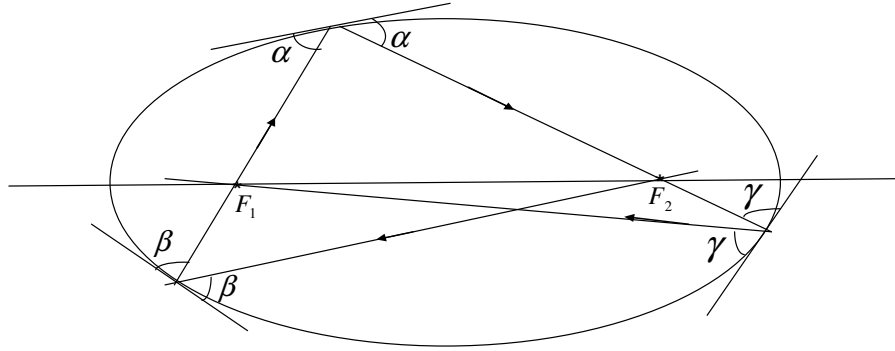
olur. Bu dönüşüm iyi tanımlı değildir. Çünkü  $(1, -i)$  vektörü tarafından gerilen doğru üzerindeki her bir nokta  $(0,0)$ 'a dönüştürür. Yukarıdaki denklem düzenlenirse;

$$P: [z_0 : z_1] \mapsto [(z_0 + iz_1)(z_0 - iz_1) : ((u + v + ir)z_0 + (r + i(u + v))z_1)(z_0 - iz_1)]$$

şeklinde olur. Burada eğer;  $z_0 - iz_1$  ögesi sadeleştirilirse  $P: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  dönüşümü bir kesirli lineer dönüşüme genişler. Bu durumda çember; bu kompleks koordinat sisteminde bir düğüm noktasına sahip değildir.

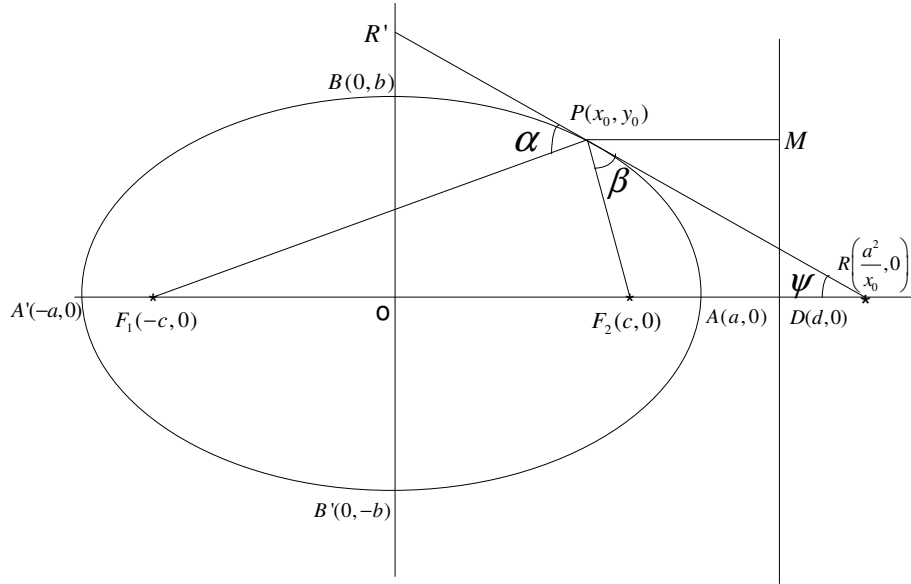
### 3. ELİPSLERDE YANSIMA ÖZELLİĞİ

Bu bölümde elipsin bir odağından gelen herhangi bir ışının elipse çarptıktan sonra diğer odaktan geçecek şekilde yansımaları özelliği ele alınıp, elipsin bu fiziksel özelliğinin günlük hayattaki kullanımlarından birkaçı örneklerle açıklanmıştır. Daha sonra da elipsin bu karakteristik özelliğinden yararlanılarak elde edilen geri dönme dönüşümünün aslında bir Möbius dönüşümü olduğu gösterilmiştir. Bunun için ağırlıklı olarak [12, 13] numaralı kaynaklardan faydalanılmıştır.



Şekil 3.1 : Elipslerde yansımaları özelliği

Elipslerde yansımaları oldukça önemli bir özelliktir. Bu özelliğinin ispatı aşağıda şekli verilen elips kullanılarak basit bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.2 : Bir  $P(x_0, y_0)$  noktasında elipse teğet olan  $|RR'|$  doğru parçasına göre yansıma

Elipslerde bu yansıma özelliğini göstermek için yapılması gereken yukarıda verilen şekilde  $\alpha = \beta$  olduğunu ispatlamaktır. Şekil 3.2'de  $|RR'|$  doğru parçası elipse teğet ve  $P(x_0, y_0)$  noktası da teğet noktası olarak seçilmiştir.

Eğer  $(F_1RP)$  üçgeni için sinüs teoremi uygulanırsa;

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{d(F_1, R) \sin \psi}{d(P, F_1)}$$

olur. Burada,

$$d(P, F_1) = a + \epsilon x_0 \quad (3.1)$$

ve

$$d(F_1, R) = \frac{a^2}{x_0} + c = \frac{1}{x_0} (a^2 + a\epsilon x_0) = \frac{a}{x_0} (a + \epsilon x_0) = \frac{a}{x_0} d(P, F_1) \quad (3.2)$$

olur. Bulunan bu değerler yukarıda yerine yazılırsa;

$$\sin \alpha = \frac{\frac{a}{x_0} d(P, F_1) \sin \psi}{d(P, F_1)} = \frac{a}{x_0} \sin \psi \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde  $(F_2RP)$  üçgeni için de sinüs teoremi uygulanırsa;

$$\sin \beta = \frac{d(F_2R) \sin \psi}{d(P, F_2)}$$

olur. Burada;

$$d(P, F_2) = a - \epsilon x_0 \quad (3.4)$$

ve

$$d(F_2, R) = \frac{a^2}{x_0} - c = \frac{1}{x_0} (a^2 - a\epsilon x_0) = \frac{a}{x_0} (a - \epsilon x_0) = \frac{a}{x_0} d(P, F_2) \quad (3.5)$$

olur. Bunlar da yukarıdaki denklemde yerine yazılırlarsa;

$$\sin \beta = \frac{\frac{a}{x_0} d(P, F_2) \sin \psi}{d(P, F_2)} = \frac{a}{x_0} \sin \psi \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (3.3) ve (3.6) denklemlerinden  $\sin \alpha = \sin \beta$  dır. Burada  $0 \leq \alpha + \beta < \pi$  olduğundan  $\alpha = \beta$  olur. Böylece elipslerde yansıma özelliği gösterilmiştir.

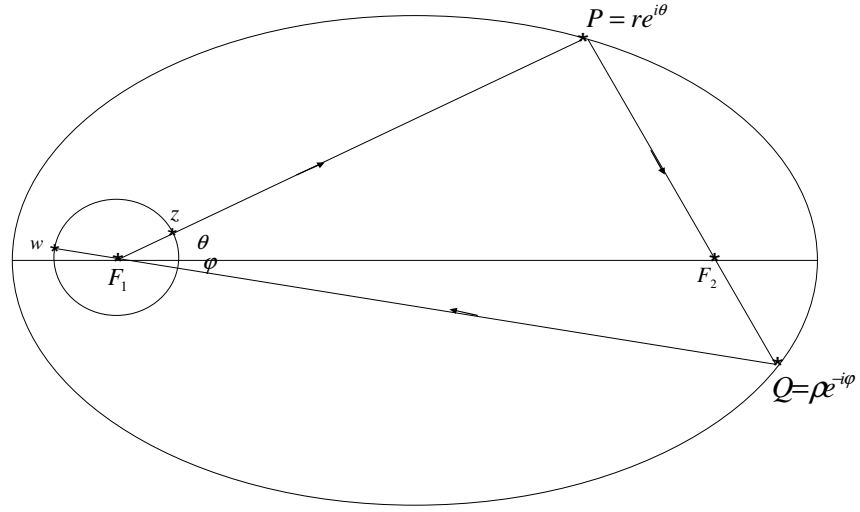
Elipslerin bu fiziksel özelliği lazer teknolojisinde çok önemlidir. Örneğin bu özellik tıpta, böbrek taşlarını kırmada kullanılır. Hasta, parçalanacak taş odak noktalarından birinde olacak şekilde su dolu eliptik bir küvete yatırılır. Elipsin diğer odak noktasından yayılan yüksek enerji dalgaları elipsin yüzeyine çarparak diğer odak noktasına, yani böbrek taşına yoğunlaşır ve böylece böbrek taşı tuz buz olur. Ayrıca elipslerin bu özelliği haberleşmede ya da casuslukta kullanılabilir. Örneğin tavanı elips biçiminde olan bir mekânda, bir odak noktasına yerleşmiş birinin her fısıltısı diğer odak noktasında da duyulabilir. Londra'daki Aziz Paul Katedralinin böyle bir özelliği vardır.

Ayrıca çemberler elipslerin odaklarının çakışması durumu olduğundan çemberlerde yansıma şu şekildedir: Çemberde merkezden gelen bir ışın çember tarafından geldiği yoldan geri dönecek biçimde yansıtılır. O halde şimdi çemberlerdeki ve elipslerdeki yansıma özellikleri ele alınarak geri dönme dönüşümü elde edilecektir. Daha sonrada elde edilen bu dönüşümün; katsayıları hiperbolik fonksiyonlardan oluşan bir Möbius dönüşümü olduğu gösterilecektir.

### 3.1 Geri Dönme Dönüşümü

Elipsin bir odağından çıkan ışın elipse çarptıktan sonra elipsin diğer odağından geçecek şekilde yansır. Bu şekilde  $2n$  defa yansıma gerçekleşirse elipsin  $F_1$  odağından çıkan ilk ışın ile yine bu odaktan çıkan son ışın arasında bir ilişki vardır. Ayrıca ilk ışının  $F_1$  merkezli çemberle kesişimi olan  $z$  noktasının yine bu çemberle son ışının kesişimi olan  $w$  noktası arasında da bir ilişki vardır. İşte bu ilişkiyi gösteren  $z \rightarrow w$  dönüşümü **n. geri dönme dönüşümü** olarak isimlendirilir.





Şekil 3.3 : Birinci geri dönme dönüşümü  $z \rightarrow w$

Eğer yukarıda verilen şekildeki  $F_1$  merkezli çember birim çember ise aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.1 :**  $n$ . geri dönme dönüşümü;

$$w = \frac{(\cosh n\delta)z - \sinh n\delta}{-(\sinh n\delta)z + \cosh n\delta} \quad (3.7)$$

şeklindeki Möbius dönüşümleri ile verilir. Burada verilen  $\delta$ , elipsin dışmerkezliği

$\mathcal{E}$  ile ilişkilidir. Bu ilişki  $\cosh \delta = \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$  şeklindedir.

Bu teoremin ispatı, bir kez  $n=1$  için oluşturulduğunda  $n > 1$  olması durumu artık Möbius dönüşümlerinin bilinen özelliklerinden ortaya çıkar.

**İspat 3.1 :** Şekil 3.3'de  $\mathcal{E}$  dışmerkezli bir elipsin kutupsal gösterimi;

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon \cos \theta} = \frac{\ell}{1-\varepsilon \cos \theta} \quad (3.8)$$

veya

$$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon \cos \varphi} = \frac{\ell}{1-\varepsilon \cos \varphi} \quad (3.9)$$

şeklindedir.

Şekil 3.3'de verilen elipsin  $F_1$  odağı orjinde ve büyük eksenini de  $\theta = 0$  ışını boyunca yatıyor olarak kabul edilmiştir. Ayrıca elipsin odakları arasındaki mesafe de;

$$d(F_1, F_2) = \frac{2\varepsilon\ell}{1-\varepsilon^2}$$

dir. Şekil 3.3'de verilen  $z = e^{i\theta}$  noktası birinci geri dönme dönüşümü ile  $w = -e^{-i\varphi}$  noktasına taşınır. Teoremin ispatı için  $F_1PQ$  üçgeninin alanından yararlanılmıştır.  $F_1PQ$  üçgeninin alanı sinüs teoremi kullanılarak iki farklı şekilde bulunabilir. Öncelikle  $F_1PQ$  üçgeninde  $(\theta + \varphi)$  açısı göz önüne alınırsa;

$$A(F_1PQ) = \frac{1}{2} r \rho \sin(\theta + \varphi) \quad (3.10)$$

dır.  $F_1PQ$  üçgeninin alanı ikinci bir yol olarak;

$$A(F_1PQ) = A(F_1PF_2) + A(F_1QF_2)$$

şeklinde bulunabilir. Buradan da;

$$A(F_1PQ) = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)(r \sin \theta + \rho \sin \varphi) \quad (3.11)$$

olur. Dolayısıyla (3.10) denklemi ile (3.11) denklemi birbirine eşittir. Yani,

$$\frac{1}{2}r\rho \sin(\theta + \varphi) = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)(r \sin \theta + \rho \sin \varphi)$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafı  $\frac{1}{2}r\rho$ 'ye bölünür ve  $d(F_1, F_2)$  yerine değeri yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \varphi) &= \frac{2\varepsilon\ell}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{\rho} + \frac{\sin \varphi}{r} \right) \\ &= \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\ell}{\rho} \sin \theta + \frac{\ell}{r} \sin \varphi \right) \\ &= \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left[ (1-\varepsilon \cos \varphi) \sin \theta + (1-\varepsilon \cos \theta) \sin \varphi \right] \end{aligned}$$

dir. Burada gerekli işlemler yapıldığında;

$$(1 + \varepsilon^2) \sin(\theta + \varphi) = 2\varepsilon (\sin \theta + \sin \varphi) \quad (3.12)$$

ifadesi elde edilir. (3.12) denklemde sinüs fonksiyonlarının üstel gösterimleri yerine yazılır ve eşitliğin her tarafı  $2i$  ile çarpılırsa;

$$(1 + \varepsilon^2) \left( e^{i(\theta+\varphi)} - e^{-i(\theta+\varphi)} \right) = 2\varepsilon \left( e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right)$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte  $z = e^{i\theta}$  ve  $w = -e^{-i\varphi}$  değerleri yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$(1+\varepsilon^2)(w^2 - z^2) = 2\varepsilon zw(z+w) - 2\varepsilon(z+w) \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir.

Dikkat edilirse Şekil 3.3'de geri dönme dönüşümü 1 ve -1 noktalarını sabit bırakır. Diğer noktalar için de  $z$  ve  $w$  noktalarının her ikisi de ya pozitif sanal kısmılı yarı açık çember üzerinde ya da negatif sanal kısmılı yarı açık çember üzerinde olacaktır. O halde  $z+w \neq 0$  dır. Bu yüzden (3.13) denkleminin her iki tarafı  $z+w$  ile bölünebilir. Böylece;

$$w = \frac{(1+\varepsilon^2)z - 2\varepsilon}{-2\varepsilon z + (1+\varepsilon^2)} \quad (3.14)$$

ifadesi elde edilir. Acaba elde edilen bu geri dönme dönüşümü,

$$T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d} ; a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

şeklindeki Möbius dönüşümlerinin  $\Delta = ad - bc \neq 0$  şartını sağlar mı?

$$\Delta = (1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2) - (-2\varepsilon)(-2\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)^2 \neq 0$$

olduğundan (3.14) ifadesi bir Möbius dönüşümüdür. Yine 1. bölümde Möbius dönüşümlerinin  $\Delta = ad - bc \neq 0$  koşulunu dönüşümün pay ve paydasını  $\pm\sqrt{\Delta}$  ile bölerek  $ad - bc = 1$  şeklinde alınabileceği gösterilmişti. O halde (3.14) dönüşümünün pay ve paydası  $\pm\sqrt{\Delta} = \pm(1-\varepsilon^2)$  ile bölünürse;

$$w = \frac{\frac{1+\varepsilon^2}{\pm(1-\varepsilon^2)}z - \frac{2\varepsilon}{\pm(1-\varepsilon^2)}}{-\frac{2\varepsilon}{\pm(1-\varepsilon^2)}z + \frac{1+\varepsilon^2}{\pm(1-\varepsilon^2)}} \quad (3.15)$$

olur. Teoremin ifadesinde  $\cosh \delta = \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$  olarak alındığından  $\sinh \delta = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$  olacaktır. Bu iki değer (3.15) denkleminde yerine yazılırsa;

$$w = \frac{(\cosh \delta)z - (\sinh \delta)}{-(\sinh \delta)z + (\cosh \delta)}, \quad \cosh^2 \delta - \sinh^2 \delta = 1 \quad (3.16)$$

olur. Böylece çemberde ve elipste yansıma özellikleri kullanılarak elde edilen geri dönme dönüşümünün aslında bir Möbius dönüşümü olduğu gösterilmiş oldu.

**Sonuç 3.2 :** Eğer  $z = e^{i\varphi}$  ve  $w = e^{i\varphi'}$  ise **n.** geri dönme dönüşümü;

$$\cos \varphi' = \frac{(\cosh 2n\delta) \cos \varphi - (\sinh 2n\delta)}{-(\sinh 2n\delta) \cos \varphi + (\cosh 2n\delta)} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir.

**İspat 3.2 :**

$$\cos \varphi' = \frac{e^{i\varphi'} + e^{-i\varphi'}}{2} = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$$

eşitliğinde (3.7) ifadesi yerine yazılırsa;

$$\cos \varphi' = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\cosh n\delta)z - \sinh n\delta}{-(\sinh n\delta)z + \cosh n\delta} + \frac{-(\sinh n\delta)z + \cosh n\delta}{(\cosh n\delta)z - \sinh n\delta} \right]$$

olur. Burada gerekli işlemler yapılır ve hiperbolik trigonometrik fonksiyonlardaki özdeşlikler kullanılırsa;

$$\cos \varphi' = \frac{(\cosh 2n\delta) \cos \varphi - (\sinh 2n\delta)}{-(\sinh 2n\delta) \cos \varphi + (\cosh 2n\delta)}$$

eşitliği elde edilir.

Dikkat edilirse Sonuç 3.2'de verilen dönüşüm de yine bir Möbius dönüşümüdür. Ayrıca oldukça şaşırtıcıdır ki Sonuç 3.2'de verilen Möbius dönüşümü Teorem 3.1'de verilen Möbius dönüşümünün karesidir.

#### 4. KAYNAKLAR

- [1] Beardon, A.F., Algebra and Geometri, Cambridge University Pres, New York, (2005).
- [2] Jones, G.A., Singerman, D., Complex Functions an algebraic and geometric viewpoint, Cambridge University Press, New York, (1987).
- [3] Ford, L.R., Automorphic Functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951).
- [4] Azcan, H., Analitik Geometri, Anadolu University, Turkey, (1999).
- [5] Coffman, A., Frantz, M., " Ellipses in the Inversive Plane ", *MAA Indiana Section Meeting*, (2003), 1-25
- [6] Coffman, A., Frantz, M, " Möbius transformations and ellipses ", *PME Journal*, (2007), **12 (6)**, 339-345.
- [7] Kasner, E., " The invariant theory of the inversion group: geometry upon a quadric surface ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, (1900) **1 (4)**, 430-498.
- [8] Morley, F., Patterson, B. " On algebraic inversive invariants ", *American J. Of Math.*, (1930) **52 (2)**, 413-424.
- [9] Patterson, B., " The inversive plane ", *Amer. Math. Monthly*, (1941) **48 (9)**, 589-599.
- [10] Meyerson, M.D., Wright, A.H, " A new and constructive proof of The Borsuk-Ulam Theorem ", *Amer. Math. Soc.*, (1979) **73 (1)**, 134-136.
- [11] Batson, H., " Konikler, En Doğal Halleriyle ", *Matematik Dünyası*, (2005) **2**, 14-18.
- [12] Schulz, W.C., Moore, C.G., "Reflections on the Ellipse", *Mathematics Magazine*, (1987) **60 (3)**, 167-168.
- [13] Wilker, J.B. " Further thoughts on a focusing property of the ellipse ", *Bull. Belg. Math. Soc.*, (1995), 153-159.