T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CHAKI PSEUDO SİMETRİK MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail AYDOĞDU

Balıkesir, Haziran-2009

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CHAKI PSEUDO SİMETRİK MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail AYDOĞDU

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Sınav Tarihi: 29.06.2009

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Ramazan AKGÜN (BAÜ)

Balıkesir, Haziran-2009

ÖZET

CHAKI PSEUDO SİMETRİK MANİFOLDLAR

İsmail AYDOĞDU

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir, 2009

Bu çalışmada Chaki pseudo simetrik, pseudo Ricci simetrik, pseudo-projektif Ricci simetrik, zayıf simetrik Riemann manifoldları ele alınmıştır. Ayrıca pseudo simetrik mükemmel akışkanlı uzay zamanı incelenmiş ve bazı fiziksel uygulamalar verilmiştir.

Yedi bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş bölümüdür.

İkinci bölüm ise bazı temel tanım ve özelliklerden oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde Chaki pseudo simetrik manifoldların tanımı yapılmış, iki boyutlu pseudo simetrik manifoldlar ve Einstein pseudo simetrik manifoldlarla ilgili teoremler ve ispatları verilmiştir.

Dördüncü bölümde pseudo Ricci simetrik manifold tanımı yapılmış ve bu manifoldlar için skaler eğrilik fonksiyonunun bazı özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde pseudo-projektif Ricci simetrik manifoldlar tanımlanmış ve bir vektör alanının enerji fonksiyonuyla ilgili teoremler verilmiştir.

Altıncı bölümde zayıf simetrik Riemann manifoldlar ayrıntılı olarak ele alınmış ve bu manifoldlarla ilgili bazı temel sonuçlar verilmiştir.

Son bölüm olan yedinci bölümde ise Chaki pseudo simetrik manifoldların bazı fiziksel uygulamalarından bahsedilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Pseudo simetrik, pseudo Ricci simetrik, pseudo-projektif simetrik manifold, mükemmel akışkan uzay-zamanı.

ABSTRACT

CHAKI PSEUDO SYMMETRIC MANIFOLDS

İsmail AYDOĞDU

Balıkesir University, Institue of Science, Department of Mathematics

(M.Sc. Thesis / Supervisor: Associate Prof. Dr.Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir – TÜRKİYE, 2009

In this thesis, Chaki pseudo symmetric, pseudo Ricci symmetric, pseudo-projective Ricci symmetric, weakly symmetric Riemann manifolds are studied. Furthermore a pseudo symmetric perfect fluid space-time is investigated and given some physical applications.

This thesis consists of seven chapters and the first is the introduction.

In the second chapter, some notions and definitions which will be used in the next chapters are given.

In the third chapter, the notion of Chaki pseudo symmetric manifold is defined and some theorems and their proofs are given.

In the fourth chapter, the pseudo Ricci symmetric manifold is defined and some properties of the scalar curvature are studied.

In the fifth chapter, the pseudo-projective Ricci symmetric manifolds are defined and some theorems related to the energy function of a vector field are given.

In the sixth chapter, the weakly symmetric Riemann manifolds are studied comprehensively and some fundamental results are given.

In the seventh and final chapter, some physical applications of pseudo symmetric manifolds are given.

KEY WORDS: pseudo symmetric, pseudo Ricci symmetric, pseudo-projective symmetric manifold, perfect fluid space-time.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M, M^n	Manifold
g	Metrik Tensör
$[\,,\,]$	Lie Parantez Operatörü
T_pM	Tanjant Vektör Uzayı
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
∇	Levi-Civita Koneksiyon
R	Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü
S	Ricci Eğrilik Tensörü
L	Ricci Operatörü
r	Skaler Eğrilik Fonksiyonu
d	Diferensiyel Operatörü
C	Weyl Konformal Eğrilik Tensörü
$\otimes$	Tensör Çarpımı
A, B, w	1-Form
$\wedge$	Dış Çarpım Operatörü
div	Divergens Operatörü
P	Projektif Ricci Tensörü

ÖNSÖZ

“Matematik, akademisyenlerin loş koridorlarda birbirlerinin kulağına fısıldadığı anlaşılmaz kavramlardan oluşan bilgiler yumağı değildir. Matematik, hayatı dolu dolu yaşamış insanların sevinçleri, üzüntüleri, başarı ve yenilgileriyle oluşturdukları bir insanlık macerasıdır.” diyor Sinan Sertöz, Matematiğin Aydınlık Dünyası adlı kitabında.

Atıldığım bu macerada bilgi ve deneyimiyle bana yol gösteren, sevgi, hoşgörü ve alçak gönüllülüğüyle örnek olan, danışmanın ötesinde bir ağabey gibi her zaman yanımda olan, bilim insanı, çok değerli hocam Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR’e teşekkürü bir borç bilirim.

Üzerimde her birinin ayrı ayrı emeği olan Balıkesir Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve benden hiçbir yardımı esirgemeyen araştırma görevlisi sayın Sibel SULAR’a teşekkür ederim.

Son olarak da eğitim gördüğüm süre boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, canımdan çok sevdiğim biricik annem Fatma AYDOĞDU ve sevgili babam Necati AYDOĞDU’ya, ablalarım, ağabeylerim ve küçük kardeşim Yunus Emre’ye sevgi ve saygılarımı sunarım.

Balıkesir, 2009 **İsmail AYDOĞDU**

1. GİRİŞ

Chaki pseudo simetrik manifoldlar ilk defa 1987 yılında Hintli geometrici Manindra Chandra Chaki (M. C. Chaki) tarafından ortaya atılmıştır.

1988 yılında yine M. C. Chaki pseudo Ricci simetrik manifold kavramını tanımlamıştır.

Chaki'nin bu makalelerinden sonra birçok geometrici benzer tanımlamalar yaparak yeni tip manifoldlar üzerinde çalışmaya başlamışlardır. Örneğin L. Tama′ssy , T. Q. Binh, U. C. De ve S. Bandyopadhy gibi geometriciler Chaki pseudo simetrik manifold kavramı yardımyla pseudo-projektif Ricci simetrik manifold ve zayıf simetrik manifold tanımlarını verip bu tür manifoldların bazı özelliklerini incelemişlerdir.

1998 yılında B. Chaki, S. Ray ve A. Konar yaptıkları makalede Chaki pseudo simetrik manifoldların fiziksel alanda uygulanabilir olduğunu gösterdiler. 4-boyutlu Chaki pseudo simetrik manifoldun Lorentz metriğiyle birlikte bir uzay-zamanı modeli oluşturmasından hareketle mükemmel akışkanlı uzay-zamanın bazı özelliklerini araştırdılar.

Bu tez ise Chaki pseudo simetrik, pseudo Ricci simetrik, pseudo-projektif Ricci simetrik ve zayıf simetrik Riemann manifoldlar hakkında elde edilen sonuçların bir derlemesi niteliğindedir. Ayrıca pseudo simetrik manifoldların fiziksel uygulamaları da verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve özellikler verilecektir.

Tanım 2.1 M bir diferensiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir (C^{∞}) vektör alanların kümesini $\chi(M)$ ile ve M manifoldundan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye C^{∞} foksiyonların kümesini de $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ile gösterelim. Eğer M manifoldu üzerinde:

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

biçiminde; pozitif, simetrik ve 2-lineer bir Riemann metriği tanımlanabiliyorsa, bu metrikle birlikte M manifolduna *Riemann manifoldu* denir [1]. n-boyutlu bir Riemann manifoldu (M^n,g) biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2 M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\times\chi(M)&\xrightarrow{2-lineer}\chi(M)\\ (X,Y)&\longrightarrow\nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned} \tag{2.2}$$

dönüşümü; $\forall f,g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için:

i) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$

ii) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

iii) $\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+X(f)Y$ (2.3)

koşullarını sağlıyorsa ∇ 'ya M manifoldu üzerinde bir *afin koneksiyon* denir [2].

Tanım 2.3 (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. ∇ dönüşümü; $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için:

i) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$ (sıfır torsiyon özelliği)

ii) $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$ (metrikle bağdaşma özelliği) (2.4)

koşullarını sağlıyorsa ∇ 'ya M üzerinde *Riemann koneksiyon* veya *Levi-Civita koneksiyon* denir [2].

Tanım 2.4 $(M^n,g)(n\geq 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X\in\chi(M^n)$ ve $(k\geq 1)$ için $(0,k)$ tipinde bir T tensör alanının *kovaryant türevi:*

$$
\begin{aligned}
(\nabla T)(X_1,X_2,...,X_k;X) &= (\nabla_X T)(X_1,X_2,...,X_k)\\
&= \nabla_X(T(X_1,X_2,...,X_k))-\sum_{i=1}^{k}T(X_1,...,\nabla_X X_i,...,X_k)
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

biçiminde tanımlanır [1].

Eğer bir U vektör alanı için:

$$\nabla_X U=aX+\omega(X)U \tag{2.6}$$

eşitliği sağlanıyorsa U vektör alanına *torse formundadır* denir. Burada a sıfırdan farklı bir skaler, w ise bir 1-formdur [4].

Tanım 2.5 (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyon olsun. Buradan:

$$
\begin{aligned}
&R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)\\
&(X,Y,Z)\longrightarrow R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu $(1,3)$ tipinde bir tensör alanıdır ve M manifoldunun *Riemann eğrilik tensör alanı* olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$ biçiminde tanımlanan tensöre de M manifoldunun *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* denir [5].

$\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki koşulları sağlar [5].

i) $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$

ii) $g(R(X,Y)V,W)=-g(R(X,Y)W,V)$

iii) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$

iv) $g(R(X,Y)V,W)=g(R(V,W)X,Y)$

v) $g(X,R(Y,Z)W)=R(Y,Z,W,X)$. (2.8)

Tanım 2.6 (M,g) Riemann manifoldunun R eğrilik tensörü her yerde sıfır ise M manifolduna *flattir* denir.

Eğer bir M manifoldu için:

$$\nabla R=0 \tag{2.9}$$

ise M 'ye *lokal simetrik manifold* adı verilir [5].

Tanım 2.7 (M,g) bir Riemann manifoldu, X bir vektör alanı ve A da bir 1-form olmak üzere, $V_2,V_3,........,V_r \in T_pM\,(r\geq 1)$ vektörleri için M manifoldu üzerinde:

$$(C_X A)(p)(V_2,V_3,.....,V_r)=A(X(p),V_2,V_3,.....,V_r) \tag{2.10}$$

biçiminde tanımlanan $C_X A$, $(r-1)$ -formuna A ‘nın X ile *kontraksiyonu* denir [5].

Tanım 2.8 (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\{e_1,e_2,....,e_n\}$ bu manifold üzerinde baz vektör alanlarını göstermek üzere:

$$
\begin{aligned}
&S : \chi(M^n)\times\chi(M^n) \longrightarrow \mathbb{R} \\
&(X,Y) \longrightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

biçiminde tanımlı $(0,2)$ tipindeki S tensör alanına M üzerinde *Ricci eğrilik tensör alanı* denir [5].

Eğer M^n manifoldu için:

$$\nabla S = 0 \tag{2.12}$$

ise M^n *Ricci simetrik manifold* olarak adlandırılır [5].

Ayrıca L Ricci operatörü:

$$g(LX,Y) = S(X,Y) \tag{2.13}$$

biçiminde tanımlanır [1].

Tanım 2.9 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bu manifold üzerinde baz vektör alanlarını göstermek üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanan r fonksiyonuna, M^n manifoldunun *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir [6].

Tanım 2.10 (M^n, g) bir Riemann manifold olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ için:

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y) \tag{2.15}$$

olacak biçimde bir $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, yani M^n manifoldunda S Ricci tensörü g metrik tensörünün bir katı ise M^n manifolduna bir *Einstein manifoldu* denir. Ayrıca $n > 2$ için λ sabittir ve 2-boyutlu her manifold Einstein manifolddur [6].

Tanım 2.11 (M, g) bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer,

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = Q(X)S(Y, Z) \tag{2.16}$$

olacak biçimde bir $Q(X)$ 1-formu varsa, M 'ye *Ricci rekürent* denir [7].

Ayrıca M manifoldunun S Ricci tensörü:

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Z S)(Y, X) \tag{2.17}$$

koşulunu sağlıyorsa S 'ye *Codazzi tipindedir* denir [8].

Tanım 2.12 M, *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ fonksiyonunun *diferensiyeli* : $p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ olmak üzere, M üzerinde:

$$df(X_p) = \nabla_{X_p} f \tag{2.18}$$

biçiminde tanımlanan df, C^∞ 1-formudur [2].

M manifoldu üzerinde C^∞ bir w 1-formunun *dış türevi*: $X_p, Y_p \in T_pM$ ve $p \in M$ olmak üzere, M üzerinde:

$$dw(X_p, Y_p) = \nabla_{X_p} w(Y) - \nabla_{Y_p} w(X) - w\big([X, Y](p)\big) \tag{2.19}$$

biçiminde tanımlanan C^{∞} dw 2-formudur [2]. Burada X ve Y; p noktasını içeren ve M manifoldunun açık bir alt kümesi olan bir U kümesi üzerinde $X(p)=X_p$ ve $Y(p)=Y_p$ biçiminde tanımlanan tanjant vektör alanlarıdır. $[X,Y]$ ise M üzerinde:

$$[X,Y](q)=\nabla_{X_q}Y-\nabla_{Y_q}X \tag{2.20}$$

biçiminde tanımlı *Lie parantez operatörüdür.*

Burada eğer $dw=0$ ise w 1-formuna kapalıdır denir [2].

Lemma 2.13 $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$, C^{∞} bir fonksiyon ve w da yine M üzerinde C^{∞} bir 1-form olsun. Bu durumda:

i) $d(df)=0$

ii) $d(fw)=df\wedge w+fdw$ (2.21)

koşulları gerçeklenir [2].

Tanım 2.14 (M^n,g) bir Riemann manifoldu olmak üzere $X,Y\in\chi(M^n)$ ve w_1 ve w_2 M üzerinde 1-formlar olsunlar.

$$(w_1\wedge w_2)(X,Y)=w_1(X)w_2(Y)-w_1(Y)w_2(X) \tag{2.22}$$

biçiminde tanımlanan $w_1\wedge w_2$ fonksiyonu M üzerinde bir 2-formdur ve w_1 ve w_2 1-formlarının *dış çarpımı* olarak adlandırılır [2].

Tanım 2.15 (M^n,g) bir Riemann manifoldu olmak üzere eğer M^n 'nin R eğrilik tensörü; $\forall X,Y,Z\in\chi(M^n)$ ve $c\in\mathbb{R}$ için:

$$R(X,Y)Z=c\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\} \tag{2.23}$$

biçiminde ise M^n 'e *sabit eğrilikli uzay* denir ve $M^n(c)$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.16 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için:

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)LX\right.$$
$$\left. - g(X,Z)LY\right] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \tag{2.24}$$

biçiminde tanımlanan C tensörüne M^n manifoldunun *Weyl konformal eğrilik tensörü* denir [9].

Eğer bir (M^n, g) $(n \geq 4)$ Riemann manifoldu için $C = 0$ ise M^n manifolduna *konform olarak flattir* denir.

Bir M manifoldu için $n = 3$ ise $C = 0$ her zaman sağlanır fakat M manifoldunun konform olarak flat olması gerekmez [6].

Ayrıca C Weyl konformal eğrilik tensörünün divergensi:

$$(divC)(X,Y)Z = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)[(\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Z S)(Y,X)] + \frac{1}{2(n-1)}[\{g(X,Y)dr(Z)$$
$$-g(Y,Z)dr(X)\}] \tag{2.25}$$

biçiminde tanımlanır [10].

Tanım 2.17 $(M^n, g)(n \geq 2)$ Riemann manifoldu için *projektif eğrilik tensörü*;

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right] \tag{2.26}$$

biçiminde tanımlanır [10, s.135]. Ayrıca W projektif eğrilik tensörünü kullanarak (0,2) tipindeki P *projektif Ricci tensörünü* ;

$$P(X,Y) = W(X,e_i,e_i,Y) \tag{2.27}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Burada $\{e_i\},(1 \le i \le n)$ (M^n,g)'nin tanjant uzayının ortonormal bir bazıdır.

Tanım 2.18 (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n'nin S Ricci tensörü $\forall X,Y \in \chi(M^n)$ için:

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + bA(X)A(Y) \tag{2.28}$$

koşulunu sağlıyorsa M^n'e *kuazi-Einstein manifold* denir [11].

Burada a ve b reel değerli fonksiyonlar ve U bir vektör alanı olmak üzere; A,

$$A(X) = g(X,U) \tag{2.29}$$

biçiminde tanımlanan bir 1-formdur.

Tanım 2.19 (M^n,g) $(n>3)$ konform olarak flat bir Riemann manifoldu olsun. M^n'nin R eğrilik tensörü:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = a\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] + b\big[&A(Y)A(Z)X - g(X,Z)A(Y)U \\ &+ g(Y,Z)A(X)U - A(X)A(Z)Y\big] \end{aligned} \tag{2.30}$$

koşulunu sağlıyorsa M^n manifolduna *kuazi-sabit eğrilikli* manifold denir[12].

Burada A, (2.29) eşitliğini sağlayan bir 1-form, a ve b birer skaler olup $b \neq 0$ dır.

Tanım 2.20 Jordan kanonik formundaki bir matrisin bloklarının mertebelerinden oluşan kümeye bu matrisin *Segre karakteristiği* denir. Aynı kökü içeren alt matrislerle bu matrise karşılık gelen tamsayılar aynı parantez içinde gösterilirler [13].

Buradaki Jordan kanonik formu blok matrisin özel bir tipidir. Her blok kendi aralarında gruplanmış sabitlerden oluşur [3].

Tanım 2.21 V, 4-boyutlu reel vektör uzayı ve g, V üzerinde $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir Lorentz iç çarpımı olmak üzere $U \in V$ vektörüne;

i) $g(U,U) > 0$ ise *uzay-benzeri*

ii) $g(U,U) < 0$ ise *zaman-benzeri*

iii) $g(U,U) = 0$ ise *null* veya *ışık-benzeri*

vektör denir [14].

Tanım 2.22 f her mertebeden türevi olan reel değerli bir fonksiyon olmak üzere;

$$f = \frac{1}{2} g(U,U) \tag{2.31}$$

biçimde tanımlanan f fonksiyonuna U vektör alanının *enerji fonksiyonu* denir [15].

Tanım 2.23 (M^n, g) $(n > 2)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu olsun. M^n 'nin S Ricci tensörü sıfırdan farklı ve

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = A(X)S(Y,Z) + B(Y)S(X,Z) + D(Z)S(Y,X) \tag{2.32}$$

koşulunu sağlıyorsa M^n 'e *zayıf Ricci simetrik manifold* denir [24].

Burada A, B, D sıfırdan farklı 1-formlardır. Bu tür manifoldlar $(WRS)_n$ simgesiyle gösterilirler.

3. CHAKI PSEUDO SİMETRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde Chaki pseudo simetrik manifoldların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1 Tanım (Chaki Pseudo Simetrik Manifold)

(M^n, g) $(n \geq 2)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n'nin eğrilik tensörü R; $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = 2A(X)R(Y,Z)W + A(Y)R(X,Z)W + A(Z)R(Y,X)W + A(W)R(Y,Z)X + g(R(Y,Z)W, X)U \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlıyor ise M^n ' ye *pseudo simetrik manifold* adı verilir [16]. Burada ∇, M^n üzerinde Levi-Civita koneksiyonu, A sıfırdan farklı bir 1-formdur. Her X vektör alanı için;

$$g(X,U) = A(X) \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanan U vektör alanına da A 1-formunun üreteci denir.

Eğer (3.1) denkleminde A 1-formu sıfır olarak alınırsa manifold lokal simetrik manifold haline indirgenir. Bu yüzden pseudo simetrik ismi tercih edilmiştir. *n*-boyutlu bir pseudo simetrik manifold $(PS)_n$ simgesiyle gösterilir.

Şimdi (3.1) denkleminde eşitliğin her iki tarafının keyfi bir V vektör alanıyla iç çarpımını alalım. Böylece

$$(\nabla_X R)(Y,Z,W,V) = 2A(X)R(Y,Z,W,V) + A(Y)R(X,Z,W,V)$$
$$+A(Z)R(Y,X,W,V) + A(W)R(Y,Z,X,V) + g(V,U)R(Y,Z,W,X) \qquad (3.3)$$

bulunur. (3.3) denkleminde Y ve V üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$(\nabla_X S)(Z,W) = 2A(X)S(Z,W) + A(R(X,Z)W) + A(R(Z,W)X)$$
$$+A(Z)S(X,W) + A(W)S(Z,X) \qquad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denkleminde de Z ve W üzerinden kontraksiyon yapılır ve (2.13) eşitliği kullanılırsa;

$$dr(X) = 2A(X)r + S(X,U) + S(X,U) + S(X,U) + S(X,U)$$
$$= 2A(X)r + 4S(X,U)$$
$$= 2A(X)r + 4g(LX,U) \qquad (3.5)$$

bulunur.

3.2 İki Boyutlu Pseudo Simetrik Manifoldlar

Teorem 3.2.1 2-boyutlu pseudo simetrik manifoldlarda üretece karşılık gelen 1-form kapalıdır [16].

İspat : Tanım 2.11'den Q 1-formunun

$$Q(X) = X.(\log r) \qquad (3.6)$$

biçiminde yazılabileceğini ve [17]'den 2-boyutlu her manifoldun rekürent manifold olduğunu biliyoruz.

Ayrıca 2-boyutlu her manifoldun Einstein manifoldu olduğunu biliyoruz [6]. Şimdi (2.15) eşitliğinin her iki yanının X ve Y'ye göre kontraksiyonunu yaparsak;

$$r = 2\lambda \text{ ve } \lambda = \frac{r}{2}$$

bulunur. Bu değer (2.15) ‘de yerine yazılırsa 2-boyutlu bir manifold için;

$$S(X,Y) = \frac{r}{2} g(X,Y) \tag{3.7}$$

denklemi elde edilebilir. (3.5) denkleminde (3.7) denklemi kullanılırsa

$$dr(X) = 2A(X)r + 4\left(\frac{r}{2}\right)g(X,U)$$

olur. Bu denkemin her iki tarafına da $2A(X)r$ eklenir ve denklem düzenlenirse;

$$dr(X) + 2A(X)r - 2rg(X,U) = 4A(X)r \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.6) denkleminden

$$Q(X) = X.(\log r) = \frac{1}{r} dr(X) \text{ yani } dr(X) = rQ(X)$$

yazılabilir. Bu değer (3.8) denklemindeki yerine yazılırsa:

$$r(Q(X) - 4A(X)) = 0 \tag{3.9}$$

bulunur.

Şimdi (M^2, g) manifoldunda $r = 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda manifold flat olur. Bu ise pseudo simetrik manifold tanımıyla çelişir. O halde $r \neq 0$ dır. Böylece (3.9) denkleminden

$$Q(X) - 4A(X) = 0 \text{ veya } A(X) = \frac{1}{4} Q(X) \tag{3.10}$$

olmalıdır.

Ayrıca 1-formun türevinin bir 2-form olduğunu ve

$$dQ(X,Y) = XQ(Y) - YQ(X) - Q(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$$
$$= XQ(Y) - YQ(X) - Q(\nabla_X Y) + Q(\nabla_Y X)$$

biçiminde tanımlandığını (2.19) eşitliğinden biliyoruz. Böylece (3.6) denklemini kullanarak $dQ(X,Y) = 0$ bulunur. Bu ise Q 1-formunun kapalı olması demektir. (3.10) denklemi yardımıyla A 1-formunun da kapalı olduğu görülür. □

Bu teoremden hareketle aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.2 2-boyutlu pseudo simetrik bir manifoldun skaler eğriliği sabit olamaz [16].

İspat: Eğer r sabit olsaydı, (3.8) denkleminden ya $r = 0$ ya da $A(X) = 0$ olmalıdır. Ancak bu mümkün değildir.

3.3 Sabit Skaler Eğrilikli Uzay Olarak (*PS*)ₙ (n >2)

Teorem 3.3.1 Eğer *n*-boyutlu pseudo simetrik manifoldda skaler eğrilik sabit ise U vektör alanı yönündeki Ricci eğriliği $-\frac{r}{2}$ dir [16].

İspat : $(PS)_n$ ($n > 2$)' de r skaler eğriliğinin sabit oduğunu varsayalım. O halde;

$$dr(X) = 0$$

olacaktır. (3.5) denkleminden

$$2A(X)r + 4g(LX,U) = 0$$

ve buradan da

$$g(LX,U) = -\frac{r}{2}A(X) \tag{3.11}$$

bulunur.

Şimdi (3.11) eşitliği sağlansın. O halde yine (3.5) gereği r sabit olmalıdır. Bundan dolayı eğer (3.11) eşitliği sağlanıyorsa, $(PS)_n$ ($n>2$) sabit skaler eğriliğe sahiptir diyebiliriz.

Tekrar (3.11) eşitliğinin sağlandığını farz edelim. (2.13) eşitliğinden faydalanarak;

$$S(U,U) = -\frac{r}{2}A(U)$$

yani

$$\frac{S(U,U)}{g(U,U)} = -\frac{r}{2}$$

elde edilir ki bu U yönündeki Ricci eğriliğinin $-\frac{r}{2}$ olması demektir [18]. Böylece ispat tamamlanır. □

3.4 Einstein Pseudo Simetrik Manifoldlar

Teorem 3.4.1 Einstein pseudo simetrik manifoldda r skaler eğriliği sıfırdır [16].

İspat : Bir (M^n, g) $(n>2)$ Einstein manifoldunda r skaler eğriliğinin sabit olduğunu biliyoruz [19]. O halde bir Einstein pseudo simetrik manifoldu için $dr(X) = 0$ olacaktır. (3.5) denkleminden;

$$A(X)r + 2g(LX,U) = 0 \text{ yani } A(X)r + 2S(X,U) = 0 \tag{3.12}$$

elde edilir.

Bir Einstein manifoldu için $S(X,Y)=\frac{r}{n}g(X,Y)$ biçiminde yazılabileceğinden, (3.12) eşitliği;

$$A(X)r+\frac{2r}{n}A(X)=0 \text{ veya } \left(\frac{n+2}{n}\right)rA(X)=0 \tag{3.13}$$

biçiminde yazılabilir.

$A(X)$ 1-formu sıfır olamayacağından (3.13) denkleminde $r=0$ olmalıdır. □

Şimdi de (M^n,g) $(n>2)$ pseudo simetrik manifoldunun sabit eğrilikli uzay formunda olduğunu varsayalım. O halde Tanım 2.15'den R eğrilik tensörü için:

$$R(X,Y,Z,W)=c\{g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\} \tag{3.14}$$

yazılabilir. Ayrıca sabit eğrilikli her uzay Einstein manifoldu olacağından Teorem 3.4.1 gereği sabit eğrilikli $(PS)_n$ ($n>2$)'de skaler eğrilik $r=0$ dır. (3.14) denkleminde Y ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$S(X,W)=c\{ng(X,W)-g(X,W)\}$$

bulunur. Bu denklemde de X ve W üzerinden kontraksiyon yapılarak;

$$r=c(n-1)n$$

elde edilir. Burada $r=0$ ise $c=0$ olmalıdır. $c=0$ olursa (3.14) denkleminden $R(X,Y,Z,W)=0$ olur ki bu ise tanımla çelişir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.4.2 n-boyutlu bir pseudo simetrik manifold sabit eğrilikli uzay formunda olamaz [16].

[19] gereği 3-boyutlu Einstein manifoldlar sabit eğrilikli uzay formunda olduklarından, Sonuç 3.4.2 gereği aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.3 3-boyutlu Einstein pseudo simetrik manifold yoktur [16].

3.5 Codazzi Tipinde Ricci Tensörüne Sahip Pseudo Simetrik Manifoldlar

Bu bölümde Ricci tensörü Codazzi tipinde verilen pseudo simetrik manifoldlar çalışılacaktır.

Teorem 3.5.1 Pseudo simetrik bir manifoldda (n>3) Ricci tensörü Codazzi tipinde ise C Weyl konformal eğrilik tensörü için $divC = 0$ dır [16].

İspat : (3.4) denkleminden;

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(Z,X) + (\nabla_Z S)(X,Y) = 2A(X)S(Y,Z) + A(Y)S(X,Z) \\
&+A(Z)S(Y,X) + A(X)S(Z,Y) + A(R(Y,Z)X) + A(R(Y,X)Z) + 2A(Z)S(X,Y) \\
&+A(X)S(Z,Y) + A(Y)S(X,Z) + A(R(Z,X)Y) + A(R(Z,Y)X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse;

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(Z,X) + (\nabla_Z S)(X,Y) = 4[A(X)S(Y,Z) \\
&+A(Y)S(Z,X) + A(Z)S(X,Y)]
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

bulunur. (2.17) eşitliği kullanılarak (3.15) denklemi;

$$
3(\nabla_X S)(Y,Z) = 4[A(X)S(Y,Z) + A(Y)S(Z,X) + A(Z)S(X,Y)] \tag{3.16}
$$

biçiminde yazılabilir. (3.16) denkleminde Y ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$3dr(X) = 4[A(X)r + 2g(LX,U)] \tag{3.17}$$

olur. (3.17) denkleminde (3.5) kullanılırsa;

$$dr(X) = 0 \tag{3.18}$$

elde edilir. O halde (2.17), (2.25) ve (3.18) eşitliklerinden $(divC)(X,Y)Z = 0$ bulunur. □

Teorem 3.5.2 3-boyutlu pseudo simetrik manifoldda Ricci tensörü Codazzi tipinde ise bu manifold konform olarak flattir [16].

İspat: (1,3) tipindeki l tensör alanını;

$$\begin{aligned} l(X,Y)Z = (\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Z S)(Y,X) + \frac{1}{2(n-1)}[g(Y,Z)dr(Z) \\ -g(Y,Z)dr(X)] \end{aligned} \tag{3.19}$$

biçiminde tanımlayalım.

Eğer Ricci tensörü Codazzi tipinde ise (2.17) ve (3.18) eşitliklerinden dolayı (3.19) denkleminde $l(X,Y)Z = 0$ olur. [10]'dan bir (M^3, g) manifoldunun ancak ve ancak $l(X,Y)Z = 0$ iken konform olarak flat olduğunu biliyoruz. Böylece ispat tamamlanır. □

4. PSEUDO RICCI SİMETRİK MANİFOLDLAR

4.1 Tanım (Pseudo Ricci Simetrik Manifold)

(M^n, g) $(n > 3)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu olmak üzere, M^n'nin S Ricci tensörü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için;

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = 2A(X)S(Y,Z) + A(Y)S(X,Z) + A(Z)S(Y,X) \tag{4.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa M^n'ye *pseudo Ricci simetrik manifold* denir [20]. Burada A sıfırdan farklı bir 1-form ve $\forall X \in \chi(M^n)$ için $g(X,U) = A(X)$ dir.

Pseudo Ricci simetrik manifoldlar $(PRS)_n$ simgesiyle gösterilirler. Bu manifoldlar için pseudo Ricci simetrik ismi tercih edilmiştir, çünkü eğer (4.1) denkleminde A 1-formu sıfır olarak alınırsa $(\nabla_X S)(Y,Z) = 0$ olacak ve manifold Ricci simetrik haline dönüşecektir. Pseudo simetrik her manifold pseudo Ricci simetriktir fakat tersi her zaman doğru değildir.

4.2 $(PRS)_n$ 'de Skaler Eğrilik

Teorem 4.2.1 (M^n, g) $(n \geq 2)$ pseudo Ricci simetrik bir manifold olmak üzere, eğer M^n'nin skaler eğriliği r, sabit ise sıfırdır. Eğer $r \neq 0$ ise A 1-formu kapalıdır [20].

İspat : L, Ricci operatörünü göstermek üzere, B 1-formunu;

$$B(X) = A(LX)$$

biçiminde tanımlayalım. (4.1) denklemi kullanılarak;

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z)-(\nabla_Z S)(Y,X) &= 2A(X)S(Y,Z)+A(Y)S(X,Z)+A(Z)S(Y,X)\\ &\quad -2A(Z)S(Y,X)-A(Y)S(Z,X)-A(X)S(Y,Z)\\ &= A(X)S(Y,Z)-A(Z)S(Y,X) \qquad (4.2)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Y ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa ve [21] yardımıyla

$$dr(X)-\frac{1}{2}dr(X)=A(X)r-B(X)$$

bulunur. Böylece:

$$dr(X)=2A(X)r-2B(X) \qquad (4.3)$$

elde edilir. Ayrıca (4.1) denkleminde Y ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$dr(X)=2A(X)r+2B(X) \qquad (4.4)$$

eşitliği elde edilir. (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden;

$$B(X)=0 \qquad (4.5)$$

olacağı görülür. O halde bu eşitliğe dayanarak (4.4) denklemini;

$$dr(X)=2A(X)r \qquad (4.6)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitlikte her iki tarafın dış türevi alınırsa, Lemma 2.13 yardımıyla:

$$d(dr(X))=2d(A(X)r)$$
$$0=2[dr(X)A(Y)-dr(Y)A(X)+rdA(X,Y)]$$

bulunur. Burada (4.6) denklemi kullanılırsa;

$$2rdA(X,Y)=0$$

yani

$$rdA(X,Y)=0 \tag{4.7}$$

elde edilir.

Eğer r skaler eğriliği sabit ise (4.6)'dan $2A(X)r=0$ olur. A 1-formu sıfırdan farklı olacağından $r=0$ olmalıdır. Eğer $r\neq 0$ ise (4.7) denkleminden $dA(X,Y)=0$ olur ki bu A 1-formunun kapalı olması anlamına gelir. □

4.3 $(PRS)_n$ 'de Ricci Tensörü ve U Vektör Alanı

Teorem 4.3.1 (M^n, g) $(n\geq 2)$ pseudo Ricci simetrik bir manifold olmak üzere, M^n'nin U üreteç vektör alanı, (2.6) eşitliğiyle verilen torse formundaysa $a=-A(U)$'dur [20].

İspat : (4.5)'den $B(X)=0$ idi. Yani $B(X)=A(LX)=g(LX,U)=0$ dır. Buradan $\forall X\in \chi(M^n)$ için;

$$S(X,U)=0 \tag{4.8}$$

bulunur.

Şimdi de

$$(\nabla_X S)(Y,Z)=\nabla_X S(Y,Z)-S(\nabla_X Y,Z)-S(Y,\nabla_X Z)$$

eşitliğinde $Z=U$ alırsak,

$$(\nabla_X S)(Y,U) = \nabla_X S(Y,U) - S(\nabla_X Y,U) - S(Y,\nabla_X U)$$

elde edilir. (4.1) ve (4.8) eşitliklerini kullanarak;

$$(\nabla_X S)(Y,U) = 2A(X)S(Y,U) + A(Y)S(X,U) + A(U)S(Y,X)$$

elde edilir. Buradan da kovaryant türev tanımı yardımıyla:

$$\nabla_X S(Y,U) - S(\nabla_X Y,U) - S(Y,\nabla_X U) = A(U)S(Y,X)$$

ve

$$S(Y,\nabla_X U) + A(U)S(Y,X) = 0 \tag{4.9}$$

bulunur. U vektör alanı torse formunda olduğundan (2.6) denklemi (4.9) denklemindeki yerine yazılırsa:

$$[a + A(U)]S(Y,X) = 0$$

elde edilir. Burada $S(Y,X) \neq 0$ olduğundan $a + A(U) = 0$ ve $a = -A(U)$ bulunur. □

Teorem 4.3.2 (M^n, g) $(n \geq 2)$ skaler eğriliği sıfırdan farklı bir pseudo Ricci simetrik manifold olsun. M^n'nin U vektör alanı, torse formunda ve enerjisi sabit ise konsirkulardır [20].

İspat : $$f = \frac{1}{2} g(U,U) \tag{4.10}$$

torse formunda verilen U vektör alanının enerjisi olsun. $\forall Y \in \chi(M^n)$ için,

$$g(\xi, Y) = \omega(Y)$$

olarak tanımlayalım. (4.10) denkleminde her iki tarafın türevini alırsak,

$$df(Y) = \frac{1}{2}[g(\nabla_Y U, U) + g(U, \nabla_Y U)] = g(\nabla_Y U, U)$$

bulunur. U vektör alanı torse formunda verildiğinden (2.6)'dan

$$df(Y) = g(aY + \omega(Y)U, U)$$
$$= g(aY, U) + g(\xi, Y)g(U, U)$$

olur ve (4.10) denklemi kullanılarak:

$$df(Y) = g(Y, aU + 2f\xi)$$

elde edilir. O halde

$$gradf \equiv aU + 2f\xi = -A(U)U + A(U)\xi \tag{4.11}$$

yazılabilir. f sabit ise (4.11)'den

$$A(U)(\xi - U) = 0$$

olur. $A(U) \neq 0$ olduğundan $\xi = U$ olmalıdır.

Böylece $\forall Y \in \chi(M^n)$ için $\omega(Y) = A(Y)$ bulunur. $r \neq 0$ olduğundan Teorem 4.2.1 'den A 1-formu kapalı ve dolayısıyla ω 1-formu da kapalı olacaktır. ω 1-formu kapalı iken U vektör alanının konsirkular olduğunu biliyoruz [4]. O halde ispat tamamlanır. □

4.4 Konform Olarak Flat $(PRS)_n$ (n>3)

Daha önce pseudo Ricci simetrik bir manifoldun pseudo simetrik olmadığını söylemiştik. Bu bölümde pseudo Ricci simetrik bir manifoldun eğer konform olarak flat ise pseudo simetrik haline dönüşeceğini göstereceğiz.

Teorem 4.4.1 Konform olarak flat pseudo Ricci simetrik bir manifold eğer pseudo Ricci simetrik manifoldla aynı birleşen 1-forma sahipse pseudo simetriktir [20].

İspat : (M^n, g) konform olarak flat bir manifold olsun. O halde:

$$(\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Z S)(Y,X) = \frac{1}{2(n-1)}[dr(X)g(Y,Z) - dr(Z)g(X,Y)] \qquad (4.12)$$

eşitliğini yazabiliriz [10]. (4.6) eşitliği kullanılarak bu denklem:

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Z S)(Y,X) &= \frac{1}{2(n-1)}\left[2A(X)rg(Y,Z) - 2A(Z)rg(X,Y)\right] \\ &= \frac{r}{(n-1)}\left[A(X)g(Y,Z) - A(Z)g(X,Y)\right]\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca (4.2) ve (4.12) denklemleri kullanıldığında;

$$\left[S(Y,Z) - \frac{r}{n-1}g(Y,Z)\right]A(X) = \left[S(X,Y) - \frac{r}{n-1}g(X,Y)\right]A(Z)$$

elde edilir. Burada $X = U$ alınırsa ve (4.8) denklemi kullanılırsa;

$$\left[S(Y,Z) - \frac{r}{n-1}g(Y,Z)\right]A(U) = \left[S(U,Y) - \frac{r}{n-1}g(U,Y)\right]A(Z) \qquad (4.13)$$

bulunur. Ayrıca

$$T(X) = \frac{1}{\sqrt{A(U)}}A(X) \qquad (4.14)$$

biçiminde tanımlanırsa (4.13) denklemi:

$$S(Y,Z)=\frac{r}{n-1}\left[g(Y,Z)-T(Y)T(Z)\right] \tag{4.15}$$

haline dönüşür. $S(Y,Z)\neq 0$ olduğundan (4.15) denkleminde $r\neq 0$ olmalıdır.

Böylece konform olarak flat bir pseudo Ricci simetrik manifoldda skaler eğrilik sıfırdan farklıdır.

Yine konform olarak flat bir (M^n,g) $(n>3)$ manifoldu için $C=0$ olacağından (2.24) denkleminden;

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{n-2}\left[S(Y,Z)g(X,W)-S(X,Z)g(Y,W)+S(X,W)g(Y,Z)\right.$$
$$\left.-S(Y,W)g(X,Z)\right]+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\left[g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)g(X,W)\right] \tag{4.16}$$

eşitliğini yazabiliriz. (4.15) denklemini (4.16) denkleminde yerine yazılırsa;

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{r}{(n-1)(n-2)}\left[\left\{g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\right\}\right.$$
$$+T(X)T(Z)g(Y,W)-T(Y)T(Z)g(X,W)+T(Y)T(W)g(X,Z)$$
$$\left.-T(X)T(W)g(Y,Z)\right] \tag{4.17}$$

denklemi elde edilir. Şimdi de

$$t^2=\frac{n-1}{(n-2)r} \tag{4.18}$$

olmak üzere;

$$B(Y,Z)=tS(Y,Z) \tag{4.19}$$

olarak tanımlayalım. Buradan,

$$S(Y,Z)=\frac{1}{t}B(Y,Z) \text{ ve (4.14)'den}$$

$$g(Y,Z)=\frac{n-1}{rt}B(Y,Z)+T(Y)T(Z)$$

bulunur. Son olarak (4.17) denklemini;

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{r}{\left(n-1\right)(n-2)}\; g(Y,Z)\left\{g(X,W)-T(X)T(W)\right\}$$
$$-g(Y,W)\left\{g(X,Z)-T(X)T(Z)\right\}-g(X,W)T(Y)T(Z)\; +g(X,Z)T(Y)T(W)\big] \quad (4.20)$$

biçiminde yazabiliriz. (4.20) denkleminde T'nin değeri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{r}{\left(n-1\right)(n-2)}\frac{(n-1)^2}{r^2t^2}\left\{B(Y,Z)B(X,W)-B(X,Z)B(Y,W)\right\}$$

olarak bulunur. Buradan da

$$R(X,Y,Z,W)=\left\{B(Y,Z)B(X,W)-B(X,Z)B(Y,W)\right\} \quad (4.21)$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde her iki tarafın kovaryant türevini alırsak;

$$(\nabla_V R)(X,Y,Z,W)=B(X,W)(\nabla_V B)(Y,Z)+B(Y,Z)(\nabla_V B)(X,W)$$
$$-B(Y,W)(\nabla_V B)(X,Z)-B(X,Z)(\nabla_V B)(Y,W) \quad (4.22)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi de (4.18) denkleminin kovaryant türevini alalım.

$$2tdt(X)=\frac{-(n-1)(n-2)dr(X)}{(n-2)^2r^2}$$

olur. (4.6) ve (4.18) denklemleri yardımıyla;

$$dt(X) = -tA(X) \tag{4.23}$$

bulunur. Bu defa (4.19) denkleminden kovaryant türev alınırsa;

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = dt(X)S(Y,Z) + t(\nabla_X S)(Y,Z)$$

elde edilir. Tüm bu eşitlikleri (4.22) denkleminde yerine yazarak;

$$(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) = tdt(V)S(X,W)S(Y,Z) + t^2 S(X,W)(\nabla_V S)(Y,Z)$$
$$+tdt(V)S(Y,Z)S(X,W) + t^2 S(Y,Z)(\nabla_V S)(X,W) - tdt(V)S(X,Z)S(Y,W)$$
$$-t^2 S(X,Z)(\nabla_V S)(Y,W) - tdt(V)S(Y,W)S(X,Z) - t^2 S(Y,W)(\nabla_V S)(X,Z)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi (4.23) bu denklemdeki yerine yazılır ve (4.1) denklemi kullanılırsa;

$$(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) = -2t^2 A(V)\left\{S(X,W)S(Y,Z) - S(X,Z)S(Y,W)\right\}$$
$$+t^2\Big[S(X,W)\left\{2A(V)S(Y,Z) + A(Y)S(V,Z) + A(Z)S(V,Y)\right\} + S(Y,Z)$$
$$\left\{2A(V)S(X,W) + A(X)S(V,W) + A(W)S(V,X)\right\} - S(X,Z)\left\{2A(V)S(Y,W)\right.$$
$$\left. + A(Y)S(V,W) + A(W)S(V,Y)\right\} - S(Y,W)\left\{2A(V)S(X,Z) + A(X)S(V,Z)\right.$$
$$\left. + A(Z)S(V,X)\right\}\Big]$$

elde edilir. Bu denklemden (4.19) ve (4.21) denklemleri yardımıyla;

$$(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) = -2A(V)R(X,Y,Z,W) + 4A(V)R(X,Y,Z,W)$$
$$+A(X)R(V,Y,Z,W) + A(Y)R(X,V,Z,W) + A(Z)R(X,Y,V,W)$$
$$+A(W)R(X,Y,Z,V) \tag{4.24}$$

denklemi elde edilir. Böylece (4.24) denklemi;

$$(\nabla_V R)(X,Y)Z = 2A(V)R(X,Y)Z + A(X)R(V,Y)Z + A(Y)R(X,V)Z$$
$$+A(Z)R(X,Y)V + g(R(X,Y)Z,V)U$$

biçiminde yazılabilir. Bu son denklem göz önüne alınırsa (M^n, g) manifoldunun pseudo simetrik olduğu görülür. □

5. PSEUDO-PROJEKTİF RICCI SİMETRİK MANİFOLDLAR

5.1 Tanım (Pseudo-Projektif Ricci Simetrik Manifold)

(M^n, g) $(n > 2)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n'nin projektif Ricci tensörü P;

$$(\nabla_X P)(Y,Z) = 2A(X)P(Y,Z) + A(Y)P(X,Z) + A(Z)P(Y,X) \tag{5.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa (M^n, g) manifolduna *pseudo-projektif Ricci simetrik manifold* denir [15]. Bu tür manifoldlar $(PWRS)_n$ simgesiyle gösterilirler.

Bu konuyla ilgili teoremlere geçmeden önce ileride kullanacağımız bazı denklemleri elde etmeye çalışalım. (2.26) ve (2.27) denklemlerini kullanarak;

$$W(X,e_i,e_i,Y) = R(X,e_i,e_i,Y) - \frac{1}{n-1}\left[S(e_i,e_i)g(X,Y) - S(X,e_i)g(Y,e_i)\right]$$

$$\begin{aligned} P(X,Y) &= S(X,Y) - \frac{1}{n-1} rg(X,Y) + \frac{1}{n-1} S(X,Y) \\ &= \frac{n}{n-1} S(X,Y) - \frac{r}{n-1} g(X,Y) \end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

(5.2) denkleminden $(PWRS)_n$'nin $(PRS)_n$ olması gerekmediği sonucuna varabiliriz. $(PWRS)_n$ eğer $r = 0$ olursa $(PRS)_n$ haline dönüşür.

l ve L tanjant uzayın her noktasında sırasıyla P ve S'ye karşılık gelen simetrik endomorfizmler olsunlar. Bu durumda,

$$g(lX,Y)=P(X,Y) \tag{5.3}$$

ve

$$g(LX,Y)=S(X,Y) \tag{5.4}$$

dir.

(5.2), (5.3) ve (5.4) denklemlerinden;

$$g(lX,Y)=\frac{n}{n-1}g(LX,Y)-\frac{r}{n-1}g(X,Y) \tag{5.5}$$

bulunur ve buradan da

$$lX=\frac{n}{n-1}LX-\frac{r}{n-1}X \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.5) denklemi üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$C_1^1 l=0$$

olur. (5.1) ve (5.3) denklemleri kullanılarak,

$$g(\nabla_X l)(Y,Z)=2A(X)g(lY,Z)+A(Y)g(lX,Z)+A(Z)g(lY,X)$$

elde edilir. Bu son denklemden de

$$(\nabla_X l)(Y)=2A(X)lY+A(Y)lX+P(X,Y)U \tag{5.7}$$

bulunur. Yine (5.6) denkleminin her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa;

$$(\nabla_Y l)(X)=\frac{n}{n-1}(\nabla_Y L)(X)-\frac{dr(Y)}{n-1}X \tag{5.8}$$

elde edilir. Sırasıyla (5.7) ve (5.8) denklemleri üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$(divl)(X) = 2g(lX,U) + P(X,U) = 3P(X,U) \tag{5.9}$$

ve

$$(divl)(X) = \frac{n-2}{2(n-1)} dr(X) \tag{5.10}$$

bulunur. (5.9) ve (5.10) denklemlerinden;

$$3P(X,U) = \frac{n-2}{2(n-1)} dr(X) \tag{5.11}$$

sonucu elde edilir.

5.2 ($PWRS$)$_n$ ‘nin Skaler Eğriliği

Teorem 5.2.1 $(PWRS)_n$ ‘nin r skaler eğriliği sabittir ve U yönündeki Ricci eğriliği $\frac{r}{n}$ dir [15].

İspat : (5.7) denkleminde Y üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$0 = 3P(X,U) \text{ veya } P(X,U) = 0 \tag{5.12}$$

bulunur. O halde (5.11) denkleminden,

$$dr(X) = 0$$

olur**.** Bu ise r skaler eğriliğinin sabit olması anlamına gelir. Şimdi de (5.2) denkleminde $Y = U$ alalım. Buradan,

$$P(X,U) = \frac{n}{n-1} S(X,U) - \frac{r}{n-1} g(X,U)$$

denklemi bulunur. (5.12)'den $P(X,U)=0$ olduğundan bu son denklemden;

$$S(X,U)=\frac{r}{n}g(X,U)$$

elde edilir. Böylece;

$$\frac{S(U,U)}{g(U,U)}=\frac{r}{n}$$

bulunur ki bu U yönündeki Ricci eğriliğinin $\frac{r}{n}$ olması demektir [22]. □

5.3 Torse Formunda Verilen *U* Vektör Alanı

Bu bölümde U vektör alanının torse formunda olduğunu farzedeceğiz. Eğer U vektör alanı torse formunda ise, Tanım 2.4 'den;

$$\nabla_X U=\lambda X+\omega(X)U \tag{5.13}$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz. Burada λ sıfırdan farklı bir skaler ve ω ise sıfırdan farklı bir 1-formdur. Bunlara sırasıyla U vektör alanının skaleri ve 1-formu denir.

Teorem 5.3.1 (M^n,g) pseudo-projektif Ricci simetrik bir manifold olmak üzere, M^n'nin U vektör alanı torse formundaysa, λ skaleri ve ω 1-formu sırasıyla $\lambda=-A(U)$ ve $\omega(X)=\frac{1}{2}X\log(A(U))+A(X)$ biçimindedir [15].

İspat : (5.1) denkleminde $Z=U$ olarak alalım. Buradan,

$$(\nabla_X P)(Y,U)=2A(X)P(Y,U)+A(Y)P(X,U)+A(U)P(X,Y) \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.12) denkleminden $P(X,U)=0$ idi. Bu eşitlik (5.14)'de yerine yazılırsa;

$$(\nabla_X P)(Y,U)=A(U)P(X,Y) \tag{5.15}$$

bulunur. Ayrıca Tanım 2.4'ü kullanarak

$$(\nabla_X P)(Y,U)=\nabla_X P(Y,U)-P(\nabla_X Y,U)-P(Y,\nabla_X U)$$

eşitliğini yazabiliriz. Yine (5.12) eşitliği yardımıyla

$$(\nabla_X P)(Y,U)=-P(Y,\nabla_X U)$$

elde edilir. Bu eşitliği (5.15) denkleminde yerine yazarak

$$-P(Y,\nabla_X U)=A(U)P(X,Y)$$

denklemini elde ederiz. Bu son denklemde (5.13)'den $\nabla_X U$ yerine yazılırsa;

$$-P(Y,\lambda X+\omega(X)U)=A(U)P(X,Y)$$

ve

$$[\lambda+A(U)]P(X,Y)=0 \tag{5.16}$$

elde edilir. Böylece (5.16) denkleminden

$$\lambda=-A(U) \tag{5.17}$$

bulunur. Şimdi de λ'yı (5.13) denkleminde yerine yazalım.

$$(\nabla_X U)=-A(U)X+\omega(X)U \tag{5.18}$$

olur. Kovaryant türev tanımından

$$(\nabla_X A)(U) = \nabla_X A(U) - A(\nabla_X U)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}(\nabla_X A) &= \nabla_X g(U,U) - A(\nabla_X U) \\ &= 2A(\nabla_X U) - A(\nabla_X U) \\ &= A(\nabla_X U)\end{aligned}$$

elde edilir. (5.18) eşitliği bu denklemdeki yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X A)(U) &= A[-A(U)X + \omega(X)U] \\ &= -A(U)A(X) + \omega(X)A(U)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da;

$$\omega(X) = \frac{(\nabla_X A)(U)}{A(U)} + A(X)$$

veya

$$\omega(X) = \frac{1}{2} X\left[\log(A(U))\right] + A(X) \tag{5.19}$$

elde edilir. □

5.4 Torse Formunda Verilen U Vektör Alanının Enerjisi

Bu bölümde f enerji fonksiyonunun bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 5.4.1 $(M^n g)$, pseudo-projektif Ricci simetrik bir manifold olmak üzere M^n'nin U vektör alanı torse formundaysa, U vektör alanının enerji fonksiyonu olan

f'nin kritik noktaları ya kendisinin ya da $U.\log(A(U))$ fonksiyonunun sıfır yerleridir [15].

İspat : Herhangi bir Y vektör alanı için, $g(Y,\xi)=\omega(Y)$ olarak tanımlayalım. Şimdi de (2.31) eşitliğinin her iki yanının Y vektör alanı yönünde türevi alınırsa;

$$
\begin{aligned}
df(Y) &= Yf = Y\frac{1}{2}g(U,U) \\
&= \frac{1}{2}\{g(\nabla_Y U,U)+g(U,\nabla_Y U\} = g(\nabla_Y U,U)
\end{aligned}
$$

bulunur. U vektör alanı torse formunda verildiğinden (5.13)'ü kullanarak,

$$
\begin{aligned}
df(Y) &= g(\lambda Y+\omega(Y)U,U) \\
&= \lambda g(Y,U)+\omega(Y)g(U,U) \\
&= g(Y,\lambda U)+g(Y,2f\xi) = g(\lambda U+2f\xi,Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklemde $Y=U$ alınırsa;

$$
\begin{aligned}
df(U) &= g(\lambda U+2f\xi,U) \\
&= \lambda g(U,U)+2fg(\xi,U) \\
&= 2[\lambda+\omega(U)]f
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan (5.17) ve (5.19) eşitliklerini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
df(U) &= 2\left\{-A(U)+\frac{1}{2}U\log(A(U))+A(U)\right\}f \\
&= \{U\log(A(U))\}f
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son denklemden f fonksiyonunun kritik noktalarının [23] ya kendisinin ya da $U\log(A(U))$ 'nun sıfır yerleri olduğu görülür. □

Teorem 5.4.2 Pseudo-projektif Ricci simetrik bir manifoldda U vektör alanı torse formunda ve U'nun enerji fonksiyonu f sabit ise U vektör alanının integral eğrileri geodeziklerdir [15].

İspat : f fonksiyonu sabit olduğundan (5.19)'dan $\omega(X) = A(X)$ olur. Böylece (5.18) denklemini;

$$\nabla_X U = -A(U)X + A(X)U$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemde $X = U$ alınırsa;

$$\nabla_U U = -A(U)U + A(U)U = 0$$

bulunur ki bu U vektör alanının integral eğrilerinin geodeziklerden oluştuğu anlamına gelir. ☐

6. ZAYIF SİMETRİK RIEMANN MANİFOLDLAR

Zayıf simetrik ve zayıf-projektif simetrik manifold kavramlarını ilk defa 1989 yılında L.Tamassy ve T.Q. Binh ortaya atmışlardır. Bu bölümde biz sadece zayıf simetrik manifoldlar üzerinde çalışacağız.

6.1 Tanım (Zayıf Simetrik Manifold)

(M^n, g) $(n > 2)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu olmak üzere eğer M^n 'nin R eğrilik tensörü;

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) = {} & A(X)R(Y,Z,U,V) + B(Y)R(X,Z,U,V) \\ & + C(Z)R(Y,X,U,V) + D(U)R(Y,Z,X,V) \\ & + E(V)R(Y,Z,U,X)\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyorsa M^n 'ye *zayıf simetrik manifold* denir [24]. Burada X, Y, Z, U, V birer vektör alanı ve A, B, C, D, E sıfırdan farklı 1-formlardır. Bu tür manifoldlar $(WS)_n$ simgesiyle gösterilirler.

Zayıf simetrik manifoldun varlığı M. PRVANOVIC$'$ tarafından ispatlanmıştır [25]. Daha sonra U. C. DE ve S. BANDYOPADHYAY zayıf simetrik manifoldda $B = C$ ve $D = E$ olduğunu gösterdiler [26]. Böylece zayıf simetrik manifoldu tanımlama şartı,

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) = {} & A(X)R(Y,Z,U,V) + B(Y)R(X,Z,U,V) \\ & + B(Z)R(Y,X,U,V) + D(U)R(Y,Z,X,V) \\ & + D(V)R(Y,Z,U,X)\end{aligned} \tag{6.1}$$

biçimine indirgenmiş oldu.

6.2 Zayıf Simetrik Manifoldlar İçin Temel Sonuçlar

Teorem 6.2.1 (M^n, g) $(n > 2)$ zayıf simetrik manifoldu eğer,

$$B(R(X,Z)U) + D(R(X,U)Z) = 0$$

koşulunu sağlıyorsa zayıf Ricci simetriktir [27].

İspat: (6.1) denkleminde Y ve U üzerinden kontraksiyon yaparsak;

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Z,U) = A(X)S(Z,U) + B(R(X,Z)U) + B(Z)S(X,U) \\ D(U)S(Z,X) + D(R(X,U)Z) \qquad (6.2)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Tanım 2.23 göz önüne alınırsa $B(R(X,Z)U) + D(R(X,U)Z) = 0$ olduğunda manifoldun zayıf Ricci simetrik olacağı görülür. □

Teorem 6.2.2 Zayıf simetrik manifoldda skaler eğrilik sıfırdan farklı ve sabit ise A 1-formu;

$$A(X) = -\frac{2}{r}[B(LX) + D(LX)]$$

biçiminde ifade edilebilir [27]. Burada L, $g(LX,Y) = S(X,Y)$ biçiminde tanımlanan Ricci operatörüdür.

İspat: (6.2) denkleminde Z ve U üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$dr(X) = A(X)r + 2B(LX) + 2D(LX) \qquad (6.3)$$

deklemi elde edilir. r skaler eğriliği sabit olduğundan $dr(X) = 0$ olur. (6.3) denkleminden,

$$A(X)r = -2[B(LX) + D(LX)]$$

bulunur ve bu denklemden de

$$A(X) = -\frac{2}{r}[B(LX) + D(LX)] \tag{6.4}$$

elde edilir. □

Ayrıca (6.3) denkleminden hareketle aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 6.2.3 Zayıf simetrik bir manifoldda skaler eğrilik sıfır ise $\forall X$ için, $B(LX) + D(LX) = 0$ koşulu sağlanır [27].

Teorem 6.2.4 (M^n, g) $(n > 2)$ zayıf simetrik bir manifold olsun. $\forall X \in \chi(M^n)$ için $T(X) = g(X, \rho) = B(X) - D(X) \neq 0$ biçiminde tanımlanan ρ öz vektörüne karşılık gelen Ricci tensörünün öz değeri $\frac{r}{2}$ dir [27].

İspat: (6.2) denkleminde Z ve U vektör alanlarının yerleri değiştirilirse,

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(U,Z) = A(X)S(U,Z) + B(U)S(X,Z) + D(Z)S(X,U) \\ +B(R(X,U)Z) + D(R(X,Z)U)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemi (6.2) denkleminden çıkartırsak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Z,U) - (\nabla_X S)(U,Z) &= [B(Z) - D(Z)]S(X,U) - [B(U) - D(U)]S(X,Z) \\ &\quad +B(R(X,Z)U) - B(R(X,U)Z) + D(R(X,U)Z) \\ &\quad -D(R(X,Z)U)\end{aligned} \tag{6.5}$$

bulunur. Ayrıca Bianchi özdeşliğinden,

$$R(X,Z)U + R(Z,U)X + R(U,X)Z = 0$$

ve

$$R(X,U)Z + R(U,Z)X + R(Z,X)U = 0$$

olduğundan bu eşitlikler kullanılarak,

$$B(R(X,Z)U) - B(R(X,U)Z) = B(R(U,Z)X)$$

ve

$$D(R(X,U)Z) - D(R(X,Z)U) = -D(R(U,Z)X)$$

yazılabilir. Bu denklemleri (6.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$[B(Z) - D(Z)]S(X,U) - [B(U) - D(U)]S(X,Z) - [B(R(Z,U)X) - D(R(Z,U)X)] = 0 \tag{6.6}$$

elde edilir. Bu son denklemde X ve U üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$r[B(Z) - D(Z)] = 2[BLZ) - D(LZ)] \tag{6.7}$$

bulunur. $T(X) = g(X,\rho) = B(X) - D(X) \neq 0$ biçiminde tanımlandığından (6.7) denklemini;

$$T(LZ) = \frac{r}{2}T(Z) \tag{6.8}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu ise ρ özvektörüne karşılık gelen Ricci tensörünün öz değerinin $\frac{r}{2}$ olması demektir. □

Teorem 6.2.5 (M^n, g) $(n > 2)$ zayıf simetrik bir manifold olmak üzere, $\forall X,Z,U \in \chi(M^n)$ için,

$$T(Z)S(X,U)-T(U)S(X,Z)-T(R(Z,U)X)=0 \tag{6.9}$$

koşulu sağlanır [27]. Burada T, $T(X)=B(X)-D(X)\neq 0$ biçiminde tanımlanan bir 1-formdur.

İspat: $T(X)=B(X)-D(X)\neq 0$ biçiminde tanımlandığından (6.6) denkleminden, $T(Z)S(X,U)-T(U)S(X,Z)-T(R(Z,U)X)=0$ elde edilir. □

6.3 Konform Olarak Flat Zayıf Simetrik Manifoldlar

Teorem 6.3.1 (M^n,g) $(n\geq 3)$ konform olarak flat zayıf simetrik bir manifold olsun. Eğer M^n'nin skaler eğriliği sıfırdan farklı ve sabit ise, S Ricci tensörü;

$$\begin{aligned}S(X,Z)=\alpha g(X,Z)&+\alpha_1 B(X)B(Z)+\alpha_2 B(Z)D(X)+\alpha_3 B(X)\tilde{B}(Z)\\ &+\alpha_4 B(Z)\tilde{B}(X)+\alpha_5 B(Z)\tilde{D}(X)+\alpha_6 \tilde{B}(Z)D(X)+\alpha_7 A(X)\tilde{B}(Z)\end{aligned}$$

formundadır [27]. Burada $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_7$ ‘ler $r,B(\rho_2)$ ve $B(\rho_3)$'e göre skalerlerdir. Ayrıca bütün X vektör alanları için $\tilde{B}(X)=B(LX)$ ve $\tilde{D}(X)=D(LX)$ biçiminde tanımlanmıştır.

İspat: Konform olarak flat bir Riemann manifoldu için,

$$(\nabla_X S)(Y,Z)-(\nabla_Z S)(Y,X)=\frac{1}{2(n-1)}\left[g(Y,Z)dr(X)-g(X,Y)dr(Z)\right] \tag{6.10}$$

eşitliğinin olduğunu biliyoruz. (6.2) denkleminde X ve U'nun yerini değiştirip elde ettiğimiz sonucu (6.2) denkleminden çıkartırsak,

$$(\nabla_X S)(Z,U)-(\nabla_U S)(Z,X)=A(X)S(Z,U)+B(Z)S(X,U)+D(U)S(X,Z)$$
$$+B(R(X,Z)U)+D(R(X,U)Z)-A(U)S(Z,X)$$
$$-B(Z)S(X,U)-D(X)S(U,Z)-B(R(U,Z)X)$$
$$-D(R(U,X)Z)$$

bulunur. Buradan (6.10) eşitliğini ve Bianchi özdeşliğini kullanarak,

$$(\nabla_X S)(Z,U)-(\nabla_U S)(Z,X)=\left[A(X)-D(X)\right]S(U,Z)-\left[A(U)-D(U)\right]S(X,Z)$$
$$+B(R(X,U)Z)+2D(R(X,U)Z)$$

ve

$$(\nabla_X S)(Z,U)-(\nabla_U S)(Z,X)=\frac{1}{2(n-1)}\left[g(Z,U)dr(X)-g(X,Z)dr(U)\right] \quad (6.11)$$

elde edilir.

Şimdi ρ_1,ρ_2,ρ_3 vektör alanlarını sırasıyla A,B ve D 1-formlarına karşılık gelen üreteçler olarak tanımlayalım. Yani $g(X,\rho_1)=A(X), g(X,\rho_2)=B(X)$ ve $g(X,\rho_3)=D(X)$ biçiminde olsun. (6.11) denkleminde U yerine ρ_2 alırsak,

$$\left[A(X)-D(X)\right]S(\rho_2,Z)-\left[A(\rho_2)-D(\rho_2)\right]S(X,Z)+B(R(X,\rho_2)Z)$$
$$+2D(R(X,\rho_2)Z)=\frac{1}{2(n-1)}\left[g(Z,\rho_2)dr(X)-g(X,Z)dr(\rho_2)\right]$$

bulunur. (6.3) denklemi yardımıyla bu denklemi;

$$\left[A(X)-D(X)\right]B(LZ)-\left[A(\rho_2)-D(\rho_2)\right]S(X,Z)+B(R(X,\rho_2)Z)$$
$$+2R(X,\rho_2,Z,\rho_3)=\frac{1}{2(n-1)}\Big[B(Z)\left\{rA(X)+2B(LX)+2D(LX)\right\}$$
$$-g(X,Z)\left\{rA(\rho_2)+2B(L\rho_2)+2D(L\rho_2)\right\}\Big]$$

biçiminde yazabiliriz. (M^n, g) zayıf simetrik manifoldu sıfırdan farklı ve sabit bir skaler eğriliğe sahip olduğundan Teorem 6.2.2 'den A 1-formunu;

$$A(X) = -\frac{2}{r}[B(LX) + D(LX)]$$

biçiminde alabiliriz ve buradan,

$$\begin{aligned}
&\left[A(X) - D(X)\right]B(LZ) - \left[A(\rho_2) - D(\rho_2)\right]S(X,Z) + R(X,\rho_2,Z,\rho_2) \\
&+2R(X,\rho_2,Z,\rho_3) = \frac{1}{2(n-1)}B(Z)\left[-r\frac{2}{r}B(LX) - r\frac{2}{r}D(LX) + 2B(LX)\right. \\
&\qquad \left. +2D(LX)\right] - g(X,Z)\left[-r\frac{2}{r}B(L\rho_2) - r\frac{2}{r}D(L\rho_2)\right] \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

bulunur. (6.12) denklemi düzenlendiğinde:

$$\begin{aligned}
&\left[A(\rho_2) - D(\rho_2)\right]S(X,Z) - \left[A(X) - D(X)\right]B(LZ) + R(\rho_2,X,Z,\rho_2) \\
&+2R(\rho_2,X,Z,\rho_3) = 0 \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca konform olarak flat bir Riemann manifoldu için $C = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = &\frac{1}{n-2}\left[S(Y,Z)g(X,W) - S(X,Z)g(Y,W) + S(X,W)g(Y,Z)\right. \\
&\left. -S(Y,W)g(X,Z)\right] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left[g(X,Z)g(Y,W)\right. \\
&\left. -g(Y,Z)g(X,W)\right] \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitlikten,

$$R(\rho_2,X,Z,\rho_2)+2R(\rho_2,X,Z,\rho_3)=\frac{1}{n-2}\big[S(X,Z)B(\rho_2)-B(LZ)B(X)$$

$$+B(L\rho_2)g(X,Z)-B(LX)B(Z)+2S(X,Z)B(\rho_3)-2B(LZ)D(X)$$

$$+2B(L\rho_3)g(X,Z)-2D(LX)B(Z)\big]+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\big[B(Z)B(X)-g(X,Z)B(\rho_2)$$

$$+2B(Z)D(X)-2g(X,Z)B(\rho_3)\big]$$

$$=\frac{1}{n-2}\big[S(X,Z)\{B(\rho_2)+2B(\rho_3)\}-B(LZ)\{B(X)+2D(X)\}+g(X,Z)$$

$$\{B(L\rho_2)+2B(L\rho_3)\}-B(Z)\{B(LX)+2D(LX)\}\big]+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\big[B(Z)$$

$$\{B(X)+2D(X)\}-g(X,Z)\{B(\rho_2)+2B(\rho_3)\}\big]$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi (6.13) denkleminde yerine yazarsak,

$$\big[A(\rho_2)-D(\rho_2)\big]S(X,Z)-\big[A(X)-D(X)\big]B(LZ)+\frac{1}{n-2}\big[S(X,Z)$$

$$\{B(\rho_2)+2B(\rho_3)\}-B(LZ)\{B(Z)+2D(X)\}+g(X,Z)\{B(L\rho_2)+2B(L\rho_3)\}$$

$$-B(Z)\{B(LX)+2D(LX)\}\big]+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\big[B(Z)\{B(X)+2D(X)\}$$

$$-g(X,Z)\{B(\rho_2)+2B(\rho_3)\}\big]=0$$

sonucu bulunur. Bu son denklemden,

$$S(X,Z)=\alpha g(X,Z)+\alpha_1 B(X)B(Z)+\alpha_2 B(Z)D(X)+\alpha_3 B(X)\tilde{B}(Z)$$

$$\alpha_4 B(Z)\tilde{B}(X)+\alpha_5 B(Z)\tilde{D}(X)+\alpha_6 \tilde{B}(Z)D(X)+\alpha_7 A(X)\tilde{B}(Z) \qquad (6.15)$$

elde edilir. □

Şimdi kuazi-sabit eğrilikli manifold tanımını genelleyerek hiper kuazi-sabit eğrilikli manifold tanımını verelim.

Tanım 6.3.2 (M^n, g) $(n > 3)$ konform olarak flat bir Riemann manifold olsun. M^n manifoldunun R eğrilik tensörü;

$$R(X,Y,Z,W) = a\left[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right] + g(X,W)P(Y,Z)$$
$$-g(X,Z)P(Y,W) + g(Y,Z)P(X,W) - g(Y,W)P(X,Z)$$

koşulunu sağlıyorsa M^n manifolduna *hiper-kuazi sabit eğrilikli* manifold denir [27]. Burada $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_8$ sıfırdan farklı skalerlerdir ve $P(Y,Z)$;

$$P(Y,Z) = \beta_1 B(Z)D(Y) + \beta_2 B(Z)B(Y) + \beta_3 \tilde{B}(Z)B(Y) + \beta_4 B(Z)\tilde{B}(Y)$$
$$+\beta_5 B(Z)\tilde{D}(Y) + \beta_6 \tilde{B}(Z)D(Y) + \beta_7 \tilde{B}(Z)\tilde{B}(Y) + \beta_8 \tilde{B}(Z)\tilde{D}(Y)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 6.3.3 (M^n, g) $(n > 3)$ konform olarak flat zayıf simetrik bir manifold olsun. Eğer M^n'nin skaler eğriliği sıfırdan farklı ve sabit ise bu manifold hiper kuazi-sabit eğrilikli uzay formundadır [27].

İspat: (6.4) denklemini (6.15)'daki yerine yazarsak,

$$S(X,Z) = \alpha g(X,Z) + \alpha_1 B(X)B(Z) + \alpha_2 B(Z)D(X) + \alpha_3 B(X)\tilde{B}(Z)$$
$$+\alpha_4 B(Z)\tilde{B}(X) + \alpha_5 B(Z)\tilde{D}(X) + \alpha_6 \tilde{B}(Z)D(X)$$
$$+\alpha_7 \left(-\frac{2}{r}\right)\left[\tilde{B}(X) + \tilde{D}(X)\right]\tilde{B}(Z) \tag{6.16}$$

bulunur. (6.16) denklemi (6.14) denklemindeki yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{n-2}\Big[& g(X,W)\big\{\alpha g(Y,Z) + \alpha_1 B(Y)B(Z) + \alpha_2 B(Z)D(Y) \\
& +\alpha_3 B(Y)\tilde{B}(Z) + \alpha_4 B(Z)\tilde{B}(Y) + \alpha_5 B(Z)\tilde{D}(Y) + \alpha_6 \tilde{B}(Z)D(Y) \\
& +\alpha_7\left(-\frac{2}{r}\right)\left[\tilde{B}(Y) + \tilde{D}(Y)\right]\tilde{B}(Z)\big\} - g(Y,W)\big\{\alpha g(X,Z) \\
& +\alpha_1 B(X)B(Z) + \alpha_2 B(Z)D(X) + \alpha_3 B(X)\tilde{B}(Z) + \alpha_4 B(Z)\tilde{B}(X) \\
& +\alpha_5 B(Z)\tilde{D}(X) + \alpha_6 \tilde{B}(Z)D(X) + \alpha_7\left(-\frac{2}{r}\right)\left[\tilde{B}(X) + \tilde{D}(X)\right]\tilde{B}(Z)\big\} \\
& +g(Y,Z)\big\{\alpha g(X,W) + \alpha_1 B(X)B(W) + \alpha_2 B(W)D(X) \\
& +\alpha_3 B(X)\tilde{B}(W) + \alpha_4 B(W)\tilde{B}(X) + \alpha_5 B(W)\tilde{D}(X) + \alpha_6 \tilde{B}(W)D(X) \\
& +\alpha_7\left(-\frac{2}{r}\right)\left[\tilde{B}(X) + \tilde{D}(X)\right]\tilde{B}(W)\big\} - g(X,Z)\big\{\alpha g(Y,W) \\
& +\alpha_1 B(Y)B(W) + \alpha_2 B(W)D(Y) + \alpha_3 B(Y)\tilde{B}(W) + \alpha_4 B(W)\tilde{B}(Y) \\
& +\alpha_5 B(W)\tilde{D}(Y) + \alpha_6 \tilde{B}(W)D(Y) + \alpha_7\left(-\frac{2}{r}\right)\left[\tilde{B}(Y) + \tilde{D}(Y)\right]\tilde{B}(W)\big\}\Big] \\
& +\frac{r}{(n-1)(n-2)}\left[g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son denklemi,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \alpha_1\left[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right] + g(X,W)P(Y,Z) \\
-g(X,Z)P(Y,W) + g(Y,Z)P(X,W) - g(Y,W)P(X,Z) \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

biçiminde yazabiliriz. Burada,

$$
\begin{aligned}
P(Y,Z) = \beta_1 B(Z)D(Y) + \beta_2 B(Z)B(Y) + \beta_3 \tilde{B}(Z)B(Y) + \beta_4 B(Z)\tilde{B}(Y) \\
+\beta_5 B(Z)\tilde{D}(Y) + \beta_6 \tilde{B}(Z)D(Y) + \beta_7 \tilde{B}(Z)\tilde{B}(Y) + \beta_8 \tilde{B}(Z)\tilde{D}(Y)
\end{aligned}
$$

biçimindedir ve $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_8$ sıfırdan farklı skalerlerdir. (6.17) denklemi ve Tanım 6.3.2 yardımıyla M^n manifoldunun hiper kuazi-sabit eğrilikli olduğu görülür. □

Teorem 6.3.4 (M^n, g) $(n > 3)$ skaler eğriliği her yerde sıfırdan farklı olan konform olarak flat zayıf simetrik bir manifold olsun. Bu durumda M^n; $\forall X \in \chi(M^n)$ için $T(X) = B(X) - D(X) \neq 0$ biçiminde tanımlanan T 1-formuyla birlikte bir kuazi-Einstein manifolddur [27].

İspat: (6.9) denkleminde $U = \rho$ alalım.

$$T(Z)T(LX) - T(\rho)S(X,Z) - T(R(Z,\rho)U) = 0$$

olur. (6.8) denklemi yardımıyla bu denklemden,

$$\frac{r}{2}T(X)T(Z) - T(\rho)S(X,Z) + R(\rho,Z,X,\rho) = 0 \tag{6.18}$$

elde edilir. (M^n, g) zayıf simetrik manifoldu konform olarak flat olduğundan ve sıfırdan farklı skaler eğriliğe sahip olduğundan (6.14) denkleminden,

$$\begin{aligned} R(\rho,Z,X,\rho) = &\frac{1}{n-2}\big[S(X,Z)g(\rho,\rho) - S(\rho,X)g(Z,\rho) + S(\rho,\rho)g(X,Z) \\ &-S(Z,\rho)g(X,\rho)\big] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\big[g(X,\rho)g(Z,\rho) \\ &-g(X,Z)g(\rho,\rho)\big] \\ \\ = &\frac{1}{n-2}\left[T(\rho)S(X,Z) - rT(X)T(Z) + \frac{r}{2}T(\rho)g(X,Z)\right] \\ &+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\big[T(X)T(Z) - T(\rho)g(X,Z)\big] \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliği (6.18) denklemindeki yerine yazarsak,

$$\frac{r}{2}T(X)T(Z)-T(\rho)S(X,Z)+\frac{1}{n-2}T(\rho)S(X,Z)-\frac{r}{n-2}T(X)T(Z)$$

$$\frac{r}{2(n-2)}T(\rho)g(X,Z)+\frac{r}{(n-1)(n-2)}T(X)T(Z)-\frac{r}{(n-1)(n-2)}T(\rho)g(X,Z)=0$$

olur ve buradan da

$$\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2(n-1)(n-2)}\right)rT(X)T(Z)+\left(\frac{3-n}{n-2}\right)T(\rho)S(X,Z)$$
$$+\left(\frac{n-3}{2(n-1)(n-2)}\right)rT(\rho)g(X,Z)=0$$

denklemi elde edilir. Böylece

$$2(n-1)T(\rho)S(X,Z)=rT(\rho)g(X,Z)+r(n-2)T(X)T(Z) \tag{6.19}$$

bulunur.

Şimdi $T(\rho)\neq 0$ olduğunu gösterelim. Tersine $T(\rho)=0$ olduğunu farz edelim. O halde (6.19) denkleminden $r(n-2)T(X)T(Z)=0$ olur. $n>3$ olduğundan ve $\forall X$ için $T(X)\neq 0$ olduğundan $r=0$ olmalıdır ki bu ise hipotezle çelişir. Yani $T(\rho)\neq 0$ dır. Sonuç olarak α ve β sıfırdan farklı skalerler olmak üzere (6.19) denklemini,

$$S(X,Z)=\alpha g(X,Z)+\beta T(X)T(Z) \tag{6.20}$$

biçiminde yazabiliriz. Tanım (2.18) ‘den bu manifoldun bir kuazi-Einstein manifold olduğu görülür. □

Teorem 6.3.5 (M^n,g) $(n>3)$ skaler eğriliği her yerde sıfırdan farklı olan konform olarak flat zayıf simetrik bir manifold olsun. Bu durumda M^n, $\forall X\in\chi(M^n)$ için $T(X)=B(X)-D(X)\neq 0$ biçiminde tanımlanan T 1-formuyla birlikte kuazi-sabit eğrilikli bir manifolddur [27].

İspat: (6.20) denklemini (6.14) denklemindeki yerine yazarsak,

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{n-2}\Big[g(X,W)\{\alpha g(Y,Z)+\beta T(Y)T(Z)\}-g(Y,W)\{\alpha g(X,Z)$$

$$+\beta T(X)T(Z)\}+g(Y,Z)\{\alpha g(X,W)+\beta T(X)T(W)\}$$

$$-g(X,Z)\{\alpha g(Y,W)+\beta T(Y)T(W)\}\Big]+$$

$$+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\big[g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)g(X,W)\big]$$

bulunur. Bu denklemi,

$$R(X,Y,Z,W)=\left(\frac{2\alpha}{n-2}-\frac{r}{(n-1)(n-2)}\right)\big[g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\big]$$

$$+\frac{\beta}{n-2}\big[g(X,W)T(Y)T(Z)-g(Y,W)T(X)T(Z)$$

$$+g(Y,Z)T(X)T(W)-g(X,Z)T(Y)T(W)\big]$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $\gamma=\left(\frac{2\alpha}{n-2}-\frac{r}{(n-1)(n-2)}\right)$ ve $\delta=\frac{\beta}{n-2}$ denilirse:

$$R(X,Y,Z,W)=\gamma\big[g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\big]+\delta\big[g(X,W)T(Y)T(Z)$$

$$-g(Y,W)T(X)T(Z)+g(Y,Z)T(X)T(W)-g(X,Z)T(Y)T(W)\big] \tag{6.21}$$

denklemi elde edilir. Bu son denklem ve Tanım 2.19 yardımıyla M^n manifoldunun kuazi-sabit eğrilikli olduğu görülür. □

Teorem 6.3.6 (M^n,g) $(n>3)$ sıfırdan farklı skaler eğriliğe sahip konform olarak flat zayıf simetrik bir manifold olsun. Bu durumda M^n hiper kuazi-sabit eğriliğe sahiptir[27].

İspat: (6.21) denkleminde T 1-formunun ifadesi yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) = \gamma\left[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right] + \delta\big[&g(X,W)\\ &\left(B(Y)-D(Y)\right)\left(B(Z)-D(Z)\right) - g(X,Z)\left(B(Y)-D(Y)\right)\\ &\left(B(W)-D(W)\right) + g(Y,Z)\left(B(X)-D(X)\right)\left(B(W)-D(W)\right)\\ &-g(Y,W)\left(B(X)D(X)\right)\left(B(Z)-D(Z)\right)\big]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) = \gamma\left[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right] + \delta\big[&g(X,W)\\ &\left\{B(Y)B(Z) - B(Y)D(Z) - D(Y)B(Z) + D(Y)D(Z)\right\}\\ &-g(X,Z)\left\{B(Y)B(W) - B(Y)D(W) - D(Y)B(W) + D(Y)D(W)\right\}\\ &+g(Y,Z)\left\{B(X)B(W) - B(X)D(W) - D(X)B(W) + D(X)D(W)\right\}\\ &-g(Y,W)\left\{B(X)B(Z) - B(X)D(Z) - D(X)B(Z) + D(X)D(Z)\right\}\end{aligned} \tag{6.22}$$

elde edilir. Burada $\{\delta BD\} = \delta\left(BB - BD - DB + DD\right)$ olarak tanımlanırsa, (6.22) denklemi,

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) = \gamma\left[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right] + &g(X,W)\{\delta BD\}(Y,Z)\\ &-g(X,Z)\{\delta BD\}(Y,W) + g(Y,Z)\{\delta BD\}(X,W)\\ &-g(Y,W)\{\delta BD\}(X,Z)\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu son denklemden ve Tanım 6.3.2'den M^n manifoldunun hiper kuazi-sabit eğrilikli olduğu görülür. □

7. CHAKI PSEUDO SİMETRİK MÜKEMMEL AKIŞKANLI UZAY ZAMANI

Bu bölümde Chaki pseudo simetrik manifoldların bazı fiziksel uygulamalarından bahsedeceğiz. 4-boyutlu pseudo simetrik manifoldlar üzerlerinde tanımlanan Lorentz metriğiyle birlikte uzay-zamanı için bir model oluştururlar. Bu uzayın baz vektörüne akışkanın hız vektörü karşılık gelir.

7.1 Tanım (Mükemmel Akışkanlı Uzay Zaman)

Bu bölümde mükemmel akışkan uzay zamanı diye baz vektör alanı olarak akışkanın hız vektör alanını kabul eden 4-boyutlu pseudo simetrik Lorentz uzayına diyeceğiz [29].

Öncelikle ileride kullanacağımız bazı eşitlikleri elde etmeye çalışalım. Göreceli uzay zamanı olarak 4-boyutlu pseudo simetrik Lorentz uzayını ve A 1-formuyla birleşen U baz vektör alanını da mükemmel akışkan maddenin hız vektörü olarak alırsak, U zaman-benzeri vektör alanı olur. O halde;

$$g(U,U) = -1$$

ve her X için

$$g(X,U) = A(X)$$

yazılabilir.

Ayrıca Einstein alan denkleminin

$$S-\frac{1}{2}rg+\lambda g=\kappa T \tag{7.1}$$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz [28]. Burada λ kozmolojik sabit, κ yerçekimi sabiti ve T de enerji momentum tensörüdür. Ayrıca madde mükemmel akışkan olduğundan T tensörü:

$$T=(\sigma+p)A\otimes A+pg$$

biçimindedir. Bu denklemde σ akışkanın yoğunluğunu, p ise basıncını simgeler ve $\sigma+p\neq 0$ dır. (7.1) denkleminde T'nin ifadesini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}S(X,Y)&=\frac{1}{2}rg(X,Y)-\lambda g(X,Y)+\kappa\left[(\sigma+p)A(X)A(Y)+pg(X,Y)\right]\\&=\left(\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p\right)g(X,Y)+\kappa(\sigma+p)A(X)A(Y)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu denklemde X ve Y üzerinden kontraksiyon yapılırsa;

$$\begin{aligned}r&=\left(\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p\right)4-\kappa(\sigma+p)\\&=2r-4\lambda+4\kappa p-\kappa\sigma-\kappa p\end{aligned}$$

böylece

$$r=4\lambda+\kappa(\sigma-3p) \tag{7.2}$$

bulunur.

7.2 Mükemmel Akışkan Madde İçerikli Chaki Pseudo Simetrik Uzay-Zamanı

Teorem 7.2.1 (M^4, g) Chaki pseudo simetrik uzay-zamanı olsun. Eğer madde içeriği mükemmel akışkan ve U baz vektör alanı da bu akışkanın hız vektör alanı ise uzay-zamanın Ricci tensörünün Segre karakteristiği $\left[(111),1\right]$ 'dir [29].

İspat: (M^4, g), Chaki pseudo simetrik bir manifold olduğundan ve U baz vektör alanı akışkanın hız vektörüne karşılık geldiğinden $g(U,U) = -1$ dir. Ayrıca (7.1) eşitliğinden Einstein alan denklemini

$$S(X,Y) = (\frac{1}{2}r - \lambda + \kappa p)g(X,Y) + \kappa(\sigma + p)A(X)A(Y) \tag{7.3}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemde $Y = U$ alınırsa;

$$S(X,U) = (\frac{1}{2}r - \lambda + \kappa p)g(X,U) + \kappa(\sigma + p)A(X)A(U)$$

$$= \left(\frac{1}{2}r - \lambda - \kappa\sigma\right)g(X,U) \tag{7.4}$$

bulunur. O halde $\frac{1}{2}r - \lambda - \kappa\sigma$, S Ricci tensörünün bir öz değeridir ve U da bu öz değere karşılık gelen öz vektördür.

S 'nin U 'dan farklı bir öz vektörü de V olsun. O halde V vektörü U 'ya dik olacaktır. Yani;

$g(V,U) = 0$ veya $A(V) = 0$

olmalıdır. Şimdi de (7.3) denkleminde $Y = V$ alırsak,

$$S(X,V)=(\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p)g(X,V)+\kappa(\sigma+p)A(X)A(V)$$
$$=\left(\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p\right)g(X,V)$$

bulunur. Buradan $\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p$ S 'nin diğer bir öz değeridir. V ise bu öz değere karşılık gelen öz vektördür.

Verilen bir öz vektöre yalnız bir öz değer karşılık geleceğinden ve bu öz değerler farklı olduklarından S Ricci tensörünün yalnız $\frac{1}{2}r-\lambda-\kappa\sigma$ ve $\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p$ gibi iki tane öz değeri vardır. Bu öz değerlerden $\frac{1}{2}r-\lambda-\kappa\sigma$ 'nin katlılığına m diyelim. Böylece uzay-zamanın boyutu 4 olduğundan diğer öz değer $\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p$ 'nin katlılığı $4-m$ olacaktır. Buradan

$$m\left(\frac{1}{2}r-\lambda-\kappa\sigma\right)+(4-m)\left(\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p\right)=r \tag{7.5}$$

yazılabilir. Ayrıca (7.2) ve (7.5) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\frac{m}{2}r-m\lambda-m\kappa\sigma+2r-4\lambda+4\kappa p-\frac{m}{2}r+m\lambda-m\kappa p=4\lambda+\kappa\sigma-3\kappa p$$

$$(\sigma+p)(m-1)=0 \tag{7.6}$$

bulunur.

$\sigma+p\neq 0$ olduğundan (7.6) 'dan $m=1$ 'dir. Böylece $\frac{1}{2}r-\lambda-\kappa\sigma$ öz değerinin katlılığı 1 ve $\frac{1}{2}r-\lambda+\kappa p$ 'nin katlılığı da 3 olacaktır. Buradan S 'nin Segre karakteristiği [30] $\left[(111),1\right]$ olarak bulunur. □

7.3 Mükemmel Akışkan Madde İçerikli, Sıfırdan Farklı Sabit Skaler Eğriliğe Sahip Chaki Pseudo Simetrik Uzay-Zamanı

Bu bölümde Chaki pseudo simetrik uzay-zamanında mükemmel akışkan maddenin bazı fiziksel özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 7.3.1 (M^4, g) sıfırdan farklı sabit skaler eğrilikli Chaki pseudo simetrik uzay-zamanı olsun. Bu uzayda madde içeriği mükemmel akışkan ve akışkanın hız vektör alanı da uzay-zamanın baz vektör alanı ise akışkanın ivme vektörü ve genişleme skaleri sıfırdır [29].

İspat : (M^4, g), Chaki pseudo simetrik bir manifold olduğundan (3.1) denklemi sağlanır. (3.1) denkleminden kontraksiyon yardımıyla,

$$dr(X) = 2A(X)r + 4S(X,U) \tag{7.7}$$

elde edilir. r skaler eğriliği sıfırdan farklı ve sabit olduğundan (7.7) ‘den

$$S(X,U) = -\frac{r}{2}A(X)$$

bulunur. Bu eşitlik ve (7.4) denklemi kullanılırsa,

$$-\frac{1}{2}rg(X,U) = \left(\frac{1}{2}r - \lambda - \kappa\sigma\right)g(X,U)$$

elde edilir. Buradan da

$$\left(r - \lambda - \kappa\sigma\right)g(X,U) = 0 \text{ veya } \left(r - \lambda - \kappa\sigma\right)A(X) = 0$$

bulunur. $A(X) \neq 0$ olduğundan $r - \lambda - \kappa\sigma = 0$ olmalıdır. O zaman,

$$\sigma = \frac{r - \lambda}{\kappa} \tag{7.8}$$

yazılabilir. σ ‘nın bu değeri (7.2) denklemindeki yerine yazılırsa,

$$p = \frac{\lambda}{\kappa}$$

bulunur. Burada λ ve κ sabit olduklarından p de sabittir. Ayrıca (7.8) eşitliğinde r sabit olduğundan σ ‘nın da sabit olduğu görülür. Bu iki eşitlik kullanılarak

$$\sigma + p = \frac{r}{\kappa} \neq 0$$

elde edilir.

Mükemmel akışkanlar için enerji ve kuvvet denklemlerinin;

$$U\sigma = -(\sigma + p)divU \tag{7.9}$$

ve

$$(\sigma + p)\nabla_X U = -gradp - (Up)U \tag{7.10}$$

biçiminde verildiğini biliyoruz [31]. O halde;

$\sigma + p \neq 0$ ve σ ve p sabit olduklarından (7.9) ve (7.10) ‘dan

$$divU = 0$$
$$\nabla_U U = 0$$

bulunur. $divU$ genişleme skalerini ve $\nabla_U U$ da ivme vektörünü gösterdiğinden ispat tamamlanır. □

KAYNAKLAR

[1] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[2] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[3] Ayres, F. Jr., Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices, New York, Schaum, (1962).

[4] Schouten, J. A., Ricci Calculus, Springer-Verlag, Berlin, (1954).

[5] O'Neill, B., Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York-London (1996).

[6] Chen, B. Y., "Geometry of submanifolds", *Pure and Applied Mathematics*, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[7] De, U. C., Guha, N., Kamilya, D. "On generalized Ricci-recurrent manifolds", *Tensor (N.S.)* **56** (1995), no. 3, 312-317.

[8] Ferus, D., "A remark on Codazzi tensors in constant curvature space", *Lecture notes in Mathematics*, **838**, Global Differential Geometry and Global Analysis, Springer-Verlag, New York (1981).

[9] Chaki, M. C., Ghosh, M. L., On quasi-conformally flat and quasi-conformally conservative Riemannian manifolds. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)* **43** (1997), no. 2, 375-381.

[10] Eisenhart, L. P.,Riemannian Geometry, Princeton University Press (1926).

[11] Chaki, M. C., Maity, R. K. "On quasi Einstein manifolds", *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000), no. 3-4, 297-306.

[12] Chen, B. Y. and Yano, K., "Hypersurfaces of a conformally flat space", *Tensor N. S.* **26** (1972), 318-322.

[13] Frazer, R. A., Duncan, W. J. and Collar, A. R., "Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations", Cambridge, England, Cambridge University Press, (1955).

[14] Naber, G. L.,The Geometry of Minkowski Spacetime, (1992), New York, Springer-Verlag.

[15] Chaki, M. C., Saha, S. K., "On pseudo-projective Ricci symmetric manifolds", *Bulgarian Journal of Physics*, **21** Nos 1/2 (1994) 1-7.

[16] Chaki, M. C.," On Pseudo symmetric manifolds", Analele Stiintifice ale Universitāii , '*Al I Cuza' din Iasi*, **38** (1987) 53-58.

[17] Ruse, H. S., "Three-dimensional spaces of reccurent curvature", *Proc. Lond. Math. Soc.*, Ser 2., **50** (1947) 438-446.

[18] Lichnerowicz, A., "Courbure, nombres de Betti espaces symmetriques", *Proc. Int. Cong. Of Math.*, **2** (1950) 216-233.

[19] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry, Vol I, Interscience Publishers, (1963).

[20] Chaki, M. C., "On pseudo Ricci symmetric manifolds", *Bulgarian Journal of Physics*, **15** (1988) 526-531.

[21] Peterson, P., Riemannian Geometry, Springer, (2006)

[22] Bang, Y. C., "Total mean curvature and submanifolds of finite type", *World Scientific*, **59** (1984).

[23] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, (1969).

[24] Tama′ssy , L. and Binh, T. Q.,"On weakly symmetric and weakly projective symmetric riemann manifolds", *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **50** (1989), 663-670.

[25] Prvanovic′ , M., "On totally umbilical submanifolds immersed in a weakly symmetric Riemannian manifold", *Yzves. Vuz. Mathematika (Kazan)*, **6** (1998), 54-64.

[26] De, U. C., and Bandyopadhyay, S., "On weakly symmetric Riemannian spaces", *Publ. Math. Debrecen*, **54** (1999), 377-381.

[27] Shaikh, A. A., and Jana, S. K., "On weakly symmetric Riemannian manifolds", *Publ. Math. Debrecen*, **71/1-2** (2007), 27-41

[28] Beem, J. K., and Ehrlic, P. L., Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, New York, (1981)

[29] Chaki, B., Ray, S. and Konar, A., “ On Chaki pseudosymmetric perfect fluid space-time”, *Bulgarian Journal of Physics*, **26** Nos 5/6 (1999), 204-209.

[30] Kramer, D., Stefani, H., Harlt, E. and Maccalum, M., Exact Solutions of Einstein’s Field Equation, Cambridge University Pres, New York, (1980)

[31] O’Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, (1983).