

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KESİRLİ YAYILIM-DALGA DENKLEMLERİNİN SİLİNDİRİK  
KOORDİNATLARDA İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Derya KARADENİZ**

**Balıkesir, Temmuz-2008**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ YAYILIM-DALGA DENKLEMLERİNİN SİLİNDİRİK  
KOORDİNATLARDA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya KARADENİZ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Sınav Tarihi: 15.07.2008

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Balıkesir, Temmuz-2008

## ÖZET

### KESİRLİ YAYILIM-DALGA DENKLEMLERİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA İNCELENMESİ

**Derya KARADENİZ**  
**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR)**

**Balıkesir, 2008**

Kesirli Analiz, tamsayı mertebeli türev ve integralin keyfi mertebeye bir genişlemesidir. Pek çok fiziksel sistem ve süreç kesirli türevler kullanılarak gerçeğe daha yakın olarak modellenebilir. Bu yüzden son yıllarda kesirli türevler uygulamalı matematik, fen ve mühendislik alanlarında önemli rol oynamaktadır. Kesirli diferansiyel denklemler sistem dinamiklerini tanımlamak için kullanılır. Dolayısıyla sistem davranışını tanımlayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için pek çok metot ortaya konmuştur.

Bir kesirli yayılım-dalga denklemi, klasik yayılım veya dalga denklemlerindeki birinci ya da ikinci mertebeden türevlerin keyfi mertebeden türevlerle yer değiştirmesi sonucunda elde edilen lineer kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklemlerin çözümlerini bulmaya yönelik olan ilgi giderek artmaktadır. Pek çok araştırmacı kesirli yayılım-dalga denklemlerini anormal yayılım ve alt yayılım sistemlerinin modellenmesi, kesirli rasgele dağılımın tanımlanması gibi sistem davranışlarının tanımlanmasında kullanmıştır.

Bu tezde, silindirik koordinatlarda tanımlanan kesirli yayılım-dalga problemlerinin çözümleri araştırılmıştır. Bu yüzden problemin formülasyonunda radyal simetri doğal olarak ortaya çıkar. Sistem dinamikleri Riemann-Liouville kesirli türevi ile tanımlanmıştır. Problemin analitik ve nümerik çözümlerinin bulunmasında sırası ile “Laplace Dönüşüm Metodu” ve “Grünwald-Letnikov Yaklaşımı” kullanılmıştır. Çözümlerin karşılaştırılması amacı ile MATLAB programı kullanılarak bazı simülasyon sonuçları elde edilmiştir. Böylece analitik ve nümerik çözümlerin örtüştüğü gösterilmiştir. Buna ek olarak, adım uzunluğuna, Bessel fonksiyonlarının sıfırlarının sayısına ve türevlerin mertebesinin değişimine bağlı olarak elde edilen simülasyon sonuçları verilmiş ve analiz edilmiştir.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER :** Riemann-Liouville Kesirli Türevi / Grünwald-Letnikov Yaklaşımı / Kesirli Yayılım-Dalga Denklemi / Radyal Simetri.

## **ABSTRACT**

### **INVESTIGATION OF FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION IN CYLINDRICAL COORDINATES**

**Derya KARADENİZ**  
**Balikesir University, Institute of Science,**  
**Department of Mathematics**

**( M. Sc. Thesis / Supervisor : Assist. Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR )**

**Balikesir - Turkey, 2008**

Fractional Calculus is a generalization of ordinary differentiation and integration to arbitrary order. Many physical systems and processes can be modeled more accurately using fractional derivatives. Therefore, fractional derivatives have played a significant role in applied mathematics, science and engineering areas in recent years. Fractional differential equations (FDEs) are used to define the system dynamics. For this reason, several methods have been proposed to find the solution of the FDEs which describe the behaviour of the system.

A fractional diffusion-wave equation is a linear partial differential equation obtained from classical diffusion or wave equation by replacing the first /second order derivative by a fractional derivative. There has been growing interest to investigate the solutions of this type of equations. Many researchers have used fractional diffusion-wave equation to define the behaviour of a system such as modeling of anomalous diffusive and sub-diffusive systems, description of fractional random walk and so on.

In this thesis, the solutions of a fractional diffusion-wave problem defined in cylindrical coordinates have been investigated. Therefore, axis-symmetry naturally arises in formulation of the problem. System dynamics have been defined in terms of Riemann-Liouville fractional derivative. “Laplace Transform Method” and “Grünwald-Letnikov Approach” have been used to find the analytical and numerical solutions of this problem, respectively. For the purpose of comparison of the solutions, some simulation results have been obtained by using MATLAB program. Therefore, it has been shown that analytical and numerical results overlap. In addition, some simulation results related with the number of step size, the zeros of Bessel functions and the order of derivatives have been given and analyzed.

**KEY WORDS :** Riemann-Liouville Fractional Derivative / Grünwald-Letnikov Approach/ Fractional Diffusion-Wave Equation / Axis-Symmetry.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER</b>	ii
<b>ABSTRACT, KEY WORDS</b>	iii
<b>İÇİNDEKİLER</b>	iv
<b>SEMBOL LİSTESİ</b>	vi
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	viii
<b>ÖNSÖZ</b>	ix
<b>1. GİRİŞ</b>	1
<b>2. KESİRLİ ANALİZ</b>	4
2.1 Kesirli Analizin Tarihsel Geçmişi	4
2.2. Kesirli Analiz Hangi Problem Türlerinde Kullanışlıdır?	5
<b>3. KESİRLİ ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI</b>	7
3.1 Kesirli Analizin Bazı Temel Fonksiyonları	7
3.1.1 Gamma Fonksiyonu	7
3.1.2 Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu	8
3.1.3 İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu	8
3.2 Kesirli Türev ve İntegral Tanımları	9
3.2.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali	9
3.2.1.1 Kesirli İntegralin Çıkışında Tekrarlı İntegral Yaklaşımı	9
3.2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevleri	12
3.2.3 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri	12
3.2.4 Caputo Kesirli Türevleri	13
3.3 Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville Yaklaşımlarının Karşılaştırması	13
3.4 Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri	16
3.4.1 Laplace Dönüşümü	16
3.4.2 Ters Laplace Dönüşümü	16
3.4.3 Laplace Dönüşümünün Bazı Temel Özellikleri	17
3.4.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü	17
3.4.5 İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü	19
3.5 Caputo ve Riemann-Liouville Yaklaşımlarının Karşılaştırması	20
3.6. Ardışık Kesirli Türevler	24
3.7. Bessel Fonksiyonları	25

	<u>Sayfa</u>
<b>4. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER</b>	28
4.2 Kesirli Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler	31
4.3 Kesirli Diferansiyel Denklem Çözümünde Laplace Dönüşüm Metodu	33
4.3.1 Standart Kesirli Diferansiyel Denklemler	34
4.3.1.1 Adi Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler	34
4.3.1.2 Kısmi Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler	35
4.4 Kesirli Diferansiyel Denklem Çözümünde Green Fonksiyon Metodu	37
4.4.1 Kesirli Green Fonksiyonu ve Özellikleri	37
<b>5. KESİRLİ TÜREVLERİN NÜMERİK HESAPLAMASI</b>	42
5.1 Grünwald-Letnikov Yaklaşımı	42
<b>6. KESİRLİ YAYILIM-DALGA PROBLEMLERİ</b>	48
6.1 Kesirli Yayılım-Dalga Problemleri Hakkındaki Çalışmalar	48
6.2 Kesirli Yayılım-Dalga Denklemleri	50
6.3 Silindirik Koordinatlarda Kesirli Yayılım-Dalga Denklemlerinin Çözümü	52
6.4 Grünwald-Letnikov Yaklaşımı ile Problemin Nümerik Çözümü	63
6.5 Simülasyon Sonuçları ve Yorumlanması	66
<b>7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME</b>	73
<b>8. KAYNAKLAR</b>	75

## SEMBOL LİSTESİ

<b><u>Simge</u></b>	<b><u>Tanımı</u></b>
$\mathbb{N}^+$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu
$E_\alpha(\cdot)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_a D_t^{-\alpha}$	Riemann-Liouville kesirli integrali
$K_n(x, t)$	Çekirdek fonksiyonu
$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$	$x(t)$ fonksiyonunun $t$ 'ye göre birinci mertebeden türevi
${}_a D_t^\alpha$	Sol Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_t D_b^\alpha$	Sağ Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_a D_t^\alpha$	Sol Grünwald-Letnikov kesirli türevi
${}_t D_b^\alpha$	Sağ Grünwald-Letnikov kesirli türevi.
${}_a^C D_t^\alpha$	Sol Caputo kesirli türevi
${}_t^C D_b^\alpha$	Sağ Caputo kesirli türevi
*	Yıldız çarpımı
$L$	Laplace dönüşüm operatörü
$L^{-1}$	Ters Laplace dönüşüm operatörü
$J_\alpha$	$\alpha$ dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu
$Y_\alpha$	$\alpha$ dereceden ikinci tip Bessel fonksiyonu
$G(t, \tau)$	Green fonksiyonu
$\delta_{k,n}$	Kronecker delta
${}^n C_r$	$n$ 'nin $r$ 'li kombinasyonu
$w_j^{(\alpha)}$	Grünwald-Letnikov yaklaşımı katsayıları
sin	Sinüs fonksiyonu
sinh	Sinüs hiperbolik fonksiyonu
cos	Kosinüs fonksiyonu
cosh	Kosinüs hiperbolik fonksiyonu
$J_0$	Sıfırinci dereceden Bessel fonksiyonu
$J_1$	Birinci dereceden Bessel fonksiyonu
$L_1(0, T)$	$(0, T)$ üzerinde mutlak değerinin 1. kuvveti Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı

## ŞEKİL LİSTESİ

<b>Şekil</b>	<b>Adı</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1	$f(t)$ sürecinin sol ve sağ kesirli türev yorumu	2
Şekil 6.1	$\alpha = 1, r = 0.5, z = 0.3, M = 5$ ve $h = 0.001$ için analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırılması	66
Şekil 6.2	$\alpha = 2, r = 0.5, z = 0.3, M = 5$ ve $h = 0.01$ için analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırılması	67
Şekil 6.3	$\alpha = 0.5, r = 0.5$ ve $z = 0.3$ değerleri için sistemin davranışı	67
Şekil 6.4	$\alpha = 1, r = 0.5$ ve $z = 0.3$ değerleri için sistemin davranışı	68
Şekil 6.5	$r = 0.5, z = 0.3, M = 5, h = 0.01$ ve $0 < \alpha < 1$ olması durumunda sistemin davranışı	68
Şekil 6.6	$r = 0.5, z = 0.3, M = 5, h = 0.01$ ve $1 < \alpha < 2$ olması durumunda sistemin davranışı	69
Şekil 6.7	$\alpha = 0.5, r = 0.5, M = 5$ ve $h = 0.01$ değerleri için sistem davranışının 3-boyutlu simülasyonu	70
Şekil 6.8	$\alpha = 1.5, r = 0.5, M = 5$ ve $h = 0.01$ değerleri için sistem davranışının 3-boyutlu simülasyonu	71
Şekil 6.9	$\alpha = 2, r = 0.5, M = 5$ ve $h = 0.01$ değerleri için sistem davranışının 3-boyutlu simülasyonu	72



## **ÖNSÖZ**

Tezimi hazırladığım yoğun çalışma sürecinde tecrübe ve bilgileriyle desteğini esirgemeyen, çalışmaya olan motivasyonumu ve ilgimi yüksek tutmak için her türlü gayreti gösteren değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR'e içtenlikle teşekkür ederim.

Tezimi hazırlamamın her aşamasında ve çalışmalarımda özveri ile yardımlarını gösteren ve gayretlerimi destekleyen değerli hocam Araş. Gör. Fırat EVİRGEN'e ve doktora çalışmalarına devam etmekte olan sevgili arkadaşım Beyza Billur İSKENDER'e sonsuz teşekkürlerimi iletirim.

TÜBİTAK "2221-Konuk Bilim İnsanı Destekleme Programı" kapsamında üniversitemizi ziyareti sırasında çalışmalarımı destekleyen ve "Kesirli Analiz" alanının önemli araştırmacılarından biri olan Prof. Dr. O.P. Agrawal (Southern Illinois University, Mechanical Engineering Department/ USA) hocama teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca "2228 - Son Sınıf Lisans Öğrencileri için Lisansüstü (Yüksek Lisans/Doktora) Burs Programı" kapsamında maddi destek vererek rahat bir araştırma süreci geçirmemi sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Hayatımın her anının ortağı olan, sevgileriyle ve ilgileriyle çıktığım her yolda başarılarımın sebebi olan, sevgi ve saygımın sonsuz olduğu aileme teşekkürlerimle...

**Balıkesir, 2008**

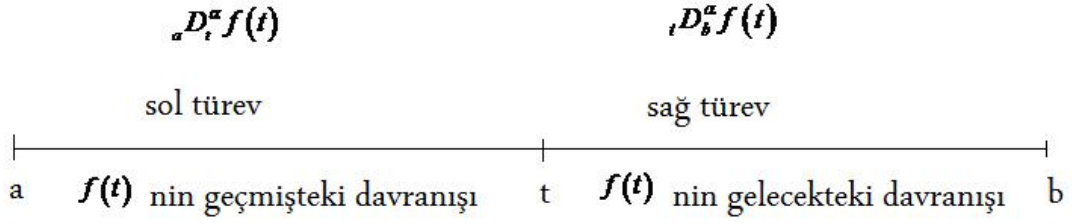
**Derya KARADENİZ**

## 1. GİRİŞ

Kesirli analiz, klasik analizin tamsayı mertebeli türev ve integral kavramlarının reel, rasyonel ya da kompleks mertebeye bir genişlemesi olarak tanımlanır. Son yüzyıl boyunca kesirli analiz matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş uygulama alanı bulmuştur. Bunun temel sebebi, viskoelastiklik ve sönüm, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, filtreleme ve tersinemezlik, kontrolör tasarımı gibi pek çok olgunun kesirli analiz kullanılarak daha gerçeğe uygun modellenebilmesi ve açıklanabilmesidir.

Kesirli analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışıdır. Kesirli analizdeki birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesi fırsatını verir. Başlıcaları *Riemann-Liouville*, *Caputo*, *Grünwald-Letnikov*, *Weyl*, *Riesz* ve *Marchaud* kesirli türevleridir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler [1-5].

Genel halde, keyfi bir  $[a, b]$  üzerinde tanımlanan ve fiziksel bir sistem sürecini ifade eden  $f(t)$  fonksiyonu göz önüne alınsın. Bilinen oldur ki  ${}_a D_t^\alpha$  ve  ${}_t D_b^\alpha$  kesirli türev notasyonları sırası ile sol ve sağ kesirli türevler için kullanılır. O halde  $f(t)$  fonksiyonun sol ve sağ kesirli türevlerinin fiziksel anlamı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:



Şekil 1.1  $f(t)$  sürecinin sol ve sağ kesirli türev yorumu

Bu çalışmada, Riemann-Liouville kesirli türevleri ile silindirik koordinatlarda tanımlanan bir kesirli yayılım-dalga problemi ele alınmıştır. Problemin çözümü analitik ve nümerik olmak üzere iki kısımda incelenmiştir. Nümerik çözümün elde edilmesi için temeli Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli türevleri arasındaki geçişe dayanan “*Grünwald-Letnikov Yaklaşımı*” kullanılmıştır. Yaklaşımın söz konusu probleme uygunluğu ise simülasyon sonuçları ile test edilmiştir.

Tez altı ana bölümden meydana gelmiştir.

İkinci bölümde kesirli analizin tarihsel geçmişinden, klasik analize tercih edildiği başlıca problem türlerinden ve klasik analize tercih edilme nedenlerinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde kesirli analizin bazı temel fonksiyonları, başlıca kesirli türev tanımları ve tanımlar arasındaki ilişkiler, Laplace dönüşümü ve kesirli türevlere uygulanışı verilmiştir.

Dördüncü bölümde kesirli diferansiyel denklemler sınıflandırılmış ve çözümleri örnekler üzerinde irdelenmiştir. Aynı zamanda kesirli Green fonksiyonu tanımlanmış ve kesirli diferansiyel denklem çözümlerindeki işlevi açıklanmıştır.

Beşinci bölümde kesirli türevlerin Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile nümerik olarak hesaplanması anlatılmıştır.

Altıncı bölümde tezin ana konusu olan silindirik koordinatlarda tanımlanmış kesirli yayılım-dalga probleminin çözümleri araştırılmıştır. MATLAB programı kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçlarına yer verilmiştir.

Yedinci bölümde çalışmanın sonuçları değerlendirilmiştir.

## 2. KESİRLİ ANALİZ

Bu bölümde, kesirli analizin tarihsel geçmişi, hangi durumlarda kullanıldığı ve klasik analize sağladığı üstünlükler üzerinde durulacaktır.

### 2.1 Kesirli Analizin Tarihsel Geçmişi

1965 yılında L'Hospital, türev için  $\frac{d^n y}{dx^n}$  notasyonunun mucidi olan Leibniz'e bir mektup yazar ve der ki “  $n = \frac{1}{2}$  olduğunda  $\frac{d^n y}{dx^n}$  notasyonu ne anlama gelir?”. Leibniz bu soruya o zamanda açık bir paradoks olan ama sonrasında çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran “ $\frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{x}$ ” cevabını verir. Bu basit gibi görünen ama kesirli teoremin ortaya çıkışına sebep olan sorgulamaya Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Fourier (1822), 18. yy'daki ve 19. yy'daki pek çok matematikçinin çalışmaları eklenmiş ve yeni bir teori ortaya çıkmıştır.

Zengin tarihsel geçmişine rağmen, son zamanlara kadar kesirli teoriye ve uygulamalarına matematikçilerin gösterdiği ilgi geri kalmıştır.

Kesirli analiz kullanılarak formülize edilen ilk mühendislik problemi “Tautochrone” dur. Yerçekiminin etkisi altında, sürtünmesiz bir düzlemde yukarıdan aşağıya sarkıtılan bir cismin salınımı sonucunda oluşturduğu eğrinin bulunması problemidir. 1823'de Abel, Riemann-Liouville kesirli integrasyonu ile tanımlanan bir integral eşitliği biçiminde tautochrone probleminin çözümünü elde etmiştir.

O zamanda, kesirli analiz için yapılan tanımların bazen çelişmesi ve tamamlanmamış olması kesirli analizin mühendislik uygulamalarında daha yaygın

kullanılmasına ket vurmuştur. Bu durum, 19.yy'ın ortalarına kadar devam etmiştir. Liouville (1834), Riemann (1847), Grünwald (1867) ve Letnikov (1868)'un kesirli analiz ile ilgili ortaya koydukları kesirli türev ve integral tanımları teoreminin gelişimine hız kazandırmıştır. Ancak yine de bu tanımların kabulü ve uygulama problemlerinde kullanılmaları zaman almıştır.

Kesirli türev ve integral için tek bir tanımın olmayışı ve cebirsel işlemlerde farklı tanımların kullanımı ile ortaya çıkan farklı sonuçlar pek çok zorluğa sebep olmuştur. Ancak zamanla problem türleri daha iyi sınıflandırılmış ve hangi problemde ne tür bir tanım kullanmanın gerekliliği ortaya konmuştur.

### **2.3 Kesirli Analiz Hangi Problem Türlerinde Kullanışlıdır?**

Geleneksel analitik metotların uygulanmasının sonucunda sistemlerin davranışları tam olarak açıklanamadığında kesirli analizin uygulanması düşünülür.

Histerisis, sönme, hafıza ve gerilim faktörlerinin doğal olarak ortaya çıktığı viskoelastik (yapışkan ve esnek) materyallerin (kıkırdak, deri, kas) fiziksel durumlarının modellenmesinde kesirli hesaplamanın kullanımı kendiliğinden ortaya çıkar [6].

Eğer zaman bölgesinde tanımlanan bir sistem oldukça yavaş sönüm yapıyorsa, anormal hızlanıyorsa, kendi yayılım hızını yavaşlatıyorsa ya da kendisine ait verilerin ifade edilebilmesi için çok fazla sayıda üstel fonksiyonun toplamını gerektirip işlemleri zorlaştırıyorsa bu durumda kesirli analize başvurmak sistemin tanımlanabilmesi ve analizi açısından oldukça etkilidir. Bir sistemin gerçeğine çok yakın bir modelinin geliştirilebilmesi için sistem farklı alt bölümlere ayrılır. Bu esnada bir takım pratik ve deneysel veriler ile ek oran ya da değişim sabitleri göz önüne alınır. Aynı zamanda, kompleks bir modelin bütün parametrelerinin gerçeğe en yakın değerleri için basitleştirilmiş varsayımlara gerek vardır. Bu noktada eğer kesirli analiz az sayıda sabit kullanarak sistem bilgilerini gerçeğe en uygun halde tanımlayabiliyorsa ve daha sınırlı bir zaman diliminde (zamanın sınırlı olması

incelemedeki hassasiyeti arttırır) bu sistem sabitleri için iyi bir yaklaşıım yapabiliyorsa bu basit ve kısa bir sistem modeli sağlar. Bir sistemin gösterimi ne kadar basitleşirse, o sistemi modellemek ve kontrol etmek o kadar kolaylaşır.

Sistem dinamikleri yani sistemi tanımlayan diferansiyel denklemler kesirli türevler içeriyorsa bu sistemin analizi kesirli hesaplamalarla yapılır. Ancak söz konusu, sistemin kontrolü ise tasarlanan kontrolör klasik ya da kesirli olabilir. Diğer bir deyişle kontrolör kesirli türev ya da integral içeriyorsa kesirli kontrolördür. Kesirli kontrolörün kullanımı son zamanlarda yaygınlaşmıştır. Örneğin, bir sistemdeki titreşim hareketinin sönümünde kullanıldığında eğer sistemin elemanları viskoelastik davranışlar gösteriyorsa kesirli kontrolör klasik kontrolörden daha iyi çalışır. Kesirli kontrolörün kullanımının gerekli ve yaygın olduğu başka bir alan ise nöral mühendisliğidir. Biyolojik sistemlerin düzenlenmesinde kesirli kontrolör kullanılır.

### 3. KESİRLİ ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

#### 3.1 Kesirli Analizin Bazı Temel Fonksiyonları

**3.1.1 Tanım** (Gamma fonksiyonu) :  $\Gamma(\cdot)$  notasyonu ile gösterilen ve kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsak olan

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir [1].

Dikkat edilirse Gamma fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun reel ve kompleks sayılara genişlemesi olan bir fonksiyondur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i.  $\Gamma(x+1) = x!$ , ( $x \in \mathbb{N}$ );
- ii. Gamma fonksiyonu  $x = -n$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) noktalarında basit kutba sahiptir;
- iii. Gamma fonksiyonunun limit gösterimi

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

biçimindedir;

iv.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  ;

v.  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$



**3.1.2 Tanım** (Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu) :  $\alpha > 0$  olmak üzere  $E_\alpha(\cdot)$  notasyonu ile gösterilen ve

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu* denir [1].

Üstel fonksiyonun bir genelleştirmesi olan bu fonksiyon, 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır. Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli mertebeden diferansiyel denklem çözümlerinde ortaya çıkar.

**3.1.3 Tanım** (İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu) :  $\alpha > 0$  ve  $\beta > 0$  olmak üzere *iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır [1].

Bu fonksiyon, 1953 yılında R.P. Agarwal ve Erdelyi tarafından tanımlanmıştır.  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin özel seçimleri ile  $E_{\alpha,\beta}$  fonksiyonu bilinen bazı fonksiyonlara dönüşür. Örneğin;

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z},$$

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_{\alpha}(z).$$

### 3.2 Kesirli Türev ve İntegral Tanımları

**3.2.1 Tanım** (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) :  $\alpha > 0$  ve  $f, [a,b] \subset \mathbb{R}$  üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere kesirli Riemann-Liouville integrali

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır [1].

#### 3.2.1.1 Kesirli İntegralin Çıkışında Tekrarlı İntegral Yaklaşımı

Kesirli integral tanımının ve buna bağlı olarak da kesirli türev tanımının ortaya çıkışına neden olan farklı yaklaşımlar mevcuttur. Diferansiyel denklem yaklaşımı, kompleks değişken yaklaşımı ve tekrarlı integral yaklaşımı bunların başlıcalarıdır. Burada tekrarlı integral yaklaşımının kesirli integral tanımını nasıl ortaya çıkardığı ele alınmıştır.

Kesirli integralin çıkışına sebep olan  $n$  katlı integral tanımı

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} \dots \int_c^{x_{n-1}} f(t) dt dx_3 dx_2 dx_1 \quad (3.5)$$

biçimindedir. (3.5) eşitliğindeki  $f$ ,  $[c, d]$  üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

“Acaba (3.5)  $n$  katlı integralini,

$$\int_c^x K_n(x, t) f(t) dt \quad (3.6)$$

biçiminde basit formda bir integrale dönüştürebilecek  $K_n(x, t)$  çekirdek fonksiyonu bulunabilir mi?” sorusunun cevabı kesirli integral tanımını verecektir. Çünkü  $K_n(x, t)$ ,  $n$ 'nin pozitif bir tamsayı olmasını gerektirmeyen bir fonksiyon olarak ortaya çıkacaktır. O halde, varsayalım ki  $\text{Re } \alpha > 0$  olmak üzere

$${}_c D_x^{-\alpha} f(x) = \int_c^x K_\alpha(x, t) f(t) dt \quad (3.7)$$

olacak biçimde bir  $K_n(x, t)$  fonksiyonu tanımlanabilsin. Fonksiyonlar teorisinin önemli bir formülü olan Dirichlet formülü göz önüne alınarak ispata başlanır.  $b > x$  olmak üzere  $G(x, t)$ ,  $[c, b] \times [c, b]$  üzerinde sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_c^x \int_c^{x_1} G(x_1, t) dt dx_1 = \int_c^x \int_t^x G(x_1, t) dx_1 dt \quad (3.8)$$

eşitliği geçerlidir. Özel halde,

$$G(x_1, t) = f(t)$$

olacak biçimde sadece  $t$  değişkenine bağlı bir fonksiyon tanımlansın. O halde (3.8) eşitliği

$$\int_c^x \int_c^{x_1} f(t) dt dx_1 = \int_c^x \int_t^x f(t) dx_1 dt = \int_c^x (x-t) f(t) dt \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.  $n = 3$  için (3.5),

$${}_c D_x^{-3} f(x) = \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} f(t) dt dx_2 dx_1 = \int_c^x \left[ \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} f(t) dt dx_2 \right] dx_1$$

biçiminde olacaktır. (3.9) eşitliği göz önüne alınırsa da

$${}_c D_x^{-3} f(x) = \int_c^x \left[ \int_c^{x_1} (x_1 - t) f(t) dt \right] dx_1 \quad (3.10)$$

bulunur. (3.9), (3.10)'a uygulanarak

$${}_c D_x^{-3} f(x) = \int_c^x \int_t^x f(t) (x_1 - t) dx_1 dt = \int_c^x f(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt$$

sonucuna ulaşılır. Bu iterasyonun  $n$ . adımında

$$K_n(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

fonksiyonu elde edilir. Gamma fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa  $n$ 'nin tamsayı olması zorunluluğu yoktur. O halde bu da

$${}_c D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \text{Re } \alpha > 0 \quad (3.11)$$

kesirli integralinin varlığını verir [4].

**3.2.2 Tanım** (Riemann-Liouville Kesirli Türevleri) :  $f [a,b] \subset \mathbb{R}$  üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $n-1 \leq \alpha < n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden *sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri* sırasıyla

$${}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

$${}_t \mathbf{D}_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanır [1].  $\alpha$  'nın bir tamsayı olması durumunda sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri

$${}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^\alpha \text{ ve } {}_t \mathbf{D}_b^\alpha f(t) = \left( -\frac{d}{dt} \right)^\alpha$$

şeklinde tamsayı mertebeli türevlere dönüşür.

Literatürde, Riemann-Liouville kesirli türevi ile kastedilen sol türevdir. Fiziksel problemlerde,  $f$  zaman değişkenli süreç fonksiyonunu gösteriyorsa sağ türev  $f$  sürecinin gelecekteki durumunu ifade eder. Ancak,  $f$  sürecinin şimdiki durumu gelecekteki durumuna bağlı değildir. Bu yüzden de fiziksel bir problemin tanımlanmasında sağ türev doğal olarak ortaya çıkmasına rağmen genellikle ihmal edilir.

**3.2.3 Tanım** (Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri) :  $f, [a,b] \subset \mathbb{R}$  üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve  $\alpha > 0$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden *sol ve sağ Grünwald-Letnikov kesirli türevleri* sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır [1]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \quad (3.14)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = b-t}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t+rh) \quad (3.15)$$

**3.2.4 Tanım** (Caputo Kesirli Türevleri) :  $f : [a, b] \subset \mathbb{R}$  üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $n-1 < \alpha < n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) olmak üzere

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left( \frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

ve

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left( -\frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (3.17)$$

biçiminde tanımlanan kesirli türevlere sırası ile *sol ve sağ kesirli Caputo türevleri* denir [1].

### 3.3 Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville Yaklaşımlarının Karşılaştırması

Varsayalım ki  $f(t)$ ,  $[a, T]$  üzerinde  $(n-1)$ . mertebeden sürekli türevlere sahip ve  $f^{(n)}(t)$  integrallenebilir birer fonksiyon olsun.  $0 < p < n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) koşulunu sağlayan her  $p$  için  ${}_a \mathbf{D}_t^p f(t)$  Riemann-Liouville kesirli türevi vardır ve  ${}_a D_t^p f(t)$  Grünwald-Letnikov kesirli türevi ile çakışır. Eğer  $0 \leq m-1 \leq p \leq n$  ise  $a < t < T$  olması durumunda

$${}_a \mathbf{D}_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left( \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(1+k-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-m+1}} d\tau \right) \quad (3.18)$$

eşitliği geçerlidir. Diğer yandan, (3.18) eşitliğinin sağ tarafı yeniden ifade edilirse

$$\frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{m+k-p}}{\Gamma(1+m+k-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \right\}$$

elde edilir ve bu eşitliğe  $m$  kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a\mathbf{D}_t^{-(m-p)} f(t) \right\} = {}_a\mathbf{D}_t^p f(t)$$

sonucuna ulaşılır. Dikkat edilirse elde edilen sonuç Riemann-Liouville Kesirli türevidir. (3.18) eşitliği aşağıdaki bazı özel sonuçları ile oldukça önemlidir. Bu sonuçlar:

- i.  $f(t)$ ,  $[a, T]$  üzerinde sürekli ve  $\frac{d}{dt} f(t)$  integrallenebilir birer fonksiyon olsunlar. O halde,  $0 < p < 1$  koşulunu sağlayan her  $p$  için Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli türevleri vardır ve

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = {}_aD_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} \frac{d}{dt} f(t) d\tau \quad (3.19)$$

eşitliği sağlanır.

- ii.  $p > 0$  olmak üzere  $p$ . mertebeden kesirli türevin varlığı  $0 < q < p$  koşulunu sağlayan  $q$ . mertebeden türevin varlığını gerektirir.

Başka bir deyişle, verilen bir integrallenebilir türevlere sahip sürekli  $f(t)$  fonksiyonu için Riemann-Liouville (ya da Grünwald-Letnikov) kesirli türevi

${}_a \mathbf{D}_t^p f(t)$  vardır ve integrallenebilirdir. Böylece  $0 < q < p$  koşulunu sağlayan her  $q$  için  ${}_a \mathbf{D}_t^q f(t)$  türevi de vardır ve integrallenebilirdir. Gerçekten,  $g(t) = {}_a \mathbf{D}_t^{-(1-p)} f(t)$  biçiminde tanımlanan bir fonksiyon için

$${}_a \mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d}{dt} \left( {}_a \mathbf{D}_t^{-(1-p)} f(t) \right) = \frac{d}{dt} g(t)$$

eşitliği geçerlidir.  $\frac{d}{dt} g(t)$ 'nin integrallenebilirliği, (3.19) eşitliği ve  $0 < 1+q-p < 1$  eşitsizliği dikkate alınarak  ${}_a \mathbf{D}_t^{1+q-p} g(t)$  türevinin varlığı ve integrallenebilirliği sonucuna ulaşılır. Buradan

$${}_a \mathbf{D}_t^{1+q-p} g(t) = {}_a \mathbf{D}_t^{1+q-p} \left( {}_a \mathbf{D}_t^{-(1-p)} f(t) \right) = {}_a \mathbf{D}_t^q f(t)$$

dir.

Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirli türev tanımları arasındaki (3.18) ilişkisi, uygulama problemlerinin formülasyonu, kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç-değer problemlerinin fiziksel olarak açıklanabilmesi açısından oldukça önemli bir sonuç daha ortaya çıkarır:

iii.  $f(t)$ ,  $[a, T]$  üzerinde  $(m-1)$ . mertebeden sürekli türevlere sahip olan ve  $m$ . mertebeden türevi integrallenebilen bir fonksiyon ve  $m-1 \leq p < m$  koşulunu sağlayan  $p$ 'ler için

$$\left[ {}_a D_t^p f(t) \right]_{t=a} = 0$$

ve

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$



koşulları birbirine eşittir.

### 3.4 Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri

**3.4.1 Tanım** (Laplace Dönüşümü) :  $f$ ,  $t > 0$  reel değişkenli ve kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere  $L$  notasyonu ile gösterilen ve

$$L\{f(t)\} = F(s) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^T f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad 0 < \varepsilon < T \quad (3.20)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme  $f(t)$  'nin Laplace dönüşümü denir [8]. Burada  $s$ ,  $s = \sigma + jw$  ( $\sigma, w \in \mathbb{R}$ ) biçiminde tanımlanan bir kompleks değişkendir.

**3.4.2 Tanım** (Ters Laplace Dönüşümü) :  $t > 0$  olmak üzere  $F(s)$ ,  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun.  $F(s)$  'nin ters Laplace dönüşümü  $L^{-1}$  notasyonu ile gösterilir ve

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (3.21)$$

biçiminde tanımlanır [8]. Burada  $c_0$ , (3.20) eşitliğindeki Laplace integralinin yakınsak olduğu bölgenin sağ yarısında yer alır.

### 3.4.3 Laplace Dönüşümünün Bazı Temel Özellikleri

- i.  $t > 0$  olmak üzere  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonlarının

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

biçiminde tanımlanan \* çarpımlarının Laplace dönüşümü

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s)$$

dir. Burada  $F(s)$  ve  $G(s)$  sırasıyla  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonlarının Laplace dönüşümleridir.

Bu özellik Riemann-Liouville kesirli integrallerinin Laplace dönüşümünün hesaplanmasında kullanılır.

ii.  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (3.22)$$

biçimindedir.

#### 3.4.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

(3.11) eşitliği ile verilen Riemann-Liouville (ya da Grünwald-Letnikov) kesirli integralinin tanımı,  $g(t) = t^{p-1}$  ve  $f(t)$  fonksiyonlarının \* çarpımı ile yeniden ifade edilebilir. Öyle ki

$${}_0\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = {}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = t^{p-1} * f(t).$$

$g(t) = t^{p-1}$  fonksiyonunun Laplace dönüşümünün

$$G(s) = L\{t^{p-1}; s\} = \Gamma(p)s^{-p}$$

olması göz önüne alınarak Riemann-Liouville (ya da Grünwald-Letnikov) kesirli integralinin Laplace dönüşümünün

$$L\{ {}_0\mathbf{D}_t^{-p} f(t); s\} = L\{ {}_0D_t^{-p} f(t); s\} = s^{-p}F(s) \quad (3.23)$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün hesaplanabilmesi için

$${}_0\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = g^n(t), \quad n-1 \leq p < n$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon göz önüne alınırsa

$$g(t) = {}_0\mathbf{D}_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau$$

elde edilir. Diğer yandan (3.22) dikkate alınırsa

$$L\{g^{(n)}(t); s\} = \{ {}_0\mathbf{D}_t^p f(t); s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (3.24)$$

sonucuna ulaşılır.  $g(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü, (3.23) göz önüne alınarak

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s) \quad (3.25)$$

biçimindedir. Riemann-Liouville kesirli türevinin

$${}_a \mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left( {}_a \mathbf{D}_t^{-(k-p)} f(t) \right), \quad k-1 \leq p < k \quad (3.26)$$

özelliğini kullanılarak

$$g^{(n-k-1)}(t) = {}_0 \mathbf{D}_t^{p-k-1} f(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} = {}_0 \mathbf{D}_t^{p-k-1} f(t) \quad (3.27)$$

yazılabilir. (3.25) ve (3.27) (2.24) de yazılırsa Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü  $p > 0$  olmak üzere

$$L\left\{{}_0 \mathbf{D}_t^p f(t); s\right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0 \mathbf{D}_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad (n-1 \leq p < n) \quad (3.28)$$

biçiminde elde edilir.

**3.4.5 Tanım** (İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü) :  $E_{\alpha,\beta}(z)$  iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere

$$F(t) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha), \quad \left( E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y) \right)$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{F(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{\left(s^\alpha \mp a\right)^{k+1}}, \quad (3.29)$$

$$\left( \operatorname{Re}(s) > |a|^{1/\alpha} \right)$$

biçimindedir [1]. Özel halde,  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  olmak üzere

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{s} \mp a)^{k+1}}, \quad (\operatorname{Re}(s) > a^2) \quad (3.30)$$

elde edilir.

### 3.5 Caputo ve Riemann-Liouville Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

(3.12) ve (3.13) ile verilen kesirli Riemann-Liouville türevi, kesirli türevler ve integraller teorisinde ve bunun pür matematikteki uygulamalarında önemli rol oynar. Ancak, uygulama problemleri fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımlarını gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin fiziksel yorumlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur. Caputo kesirli türevinin Riemann-Liouville kesirli türevine olan bir üstünlüğü olarak anlaşılmalıdır. Ancak Caputo yaklaşımı Riemann-Liouville yaklaşımının fiziksel yorumlama konusundaki bu eksikliğini tamamlaması açısından önemlidir.

İki yaklaşım arasındaki bazı önemli farklılıklar aşağıdaki biçimde açıklanabilir:

1. Riemann-Liouville yaklaşımı Riemann-Liouville kesirli türevlerinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına yol açar. Örneğin;  $b_1, b_2, \dots, b_n$  keyfi sabitler olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a \mathbf{D}_t^{\alpha-1} f(t) = b_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a \mathbf{D}_t^{\alpha-2} f(t) = b_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a \mathbf{D}_t^{\alpha-n} f(t) = b_n,$$

biçiminde tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç-değer problemlerinin matematiksel olarak çözümü başarı

ile gerçekleştirilebilir. Ancak pratikte bu çözümler kullanışsızdır. Çünkü bu tipteki başlangıç koşullarının bilinen fiziksel yorumu yoktur. Matematiksel teori ve pratik ihtiyaçlar arasındaki bu uyumsuzluğu ortadan kaldıran M.Caputo olmuştur.

Caputo kesirli türevinin, doğal şartlar altında,  $\alpha \rightarrow n$  için  $n$ . mertebeden tamsayı mertebeli türeve eşit olduğu görülebilir. Varsayalım ki  $0 \leq n-1 < \alpha < n$  ve  $f(t)$ ,  $[a, T]$  üzerinde  $n+1$  sürekli türeve sahip olsun. O halde

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left( \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(n)}(t), \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise Riemann-Liouville yaklaşımında olduğu gibi Caputo yaklaşımının da tamsayı mertebeli türevler ile ilişkisi olduğunu gösterir.

Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır.

**2.** Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin Laplace dönüşümleri  $a=0$  olması durumunda sırasıyla

$$\int_0^\infty e^{-st} \left\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \right\} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t)_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (3.31)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \left\{ {}^C D_t^\alpha f(t) \right\} dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n) \quad (3.32)$$

biçimindedir. Dikkat edilirse Caputo türevinin Laplace dönüşümü, tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımına izin verir ve bu tipteki türevlerin bilinen fiziksel yorumları da vardır.

**3.** Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasındaki önemli bir fark da sabitin türevidir. Sabit bir sayının Caputo türevi sıfırdır. Ancak sonlu bir alt sınır değeri için Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir.  $C$  sabit bir sayı olmak üzere

$${}_0\mathbf{D}_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (3.33)$$

Ochmann ve Makarov, Riemann-liouville kesirli türevini  $a = -\infty$  olması durumunda incelemişlerdir ve göstermişlerdir ki ancak bu durumda türevin değeri 0'a eşit olur. Çünkü bilinen odur ki problemin fiziksel olarak yorumunun yapılabilmesi için sabitin kesirli türevinin sıfıra eşit olması gerekir.  $a = -\infty$  olmasının fiziksel olarak anlamı fiziksel sürecin başlangıç zamanının  $-\infty$  olmasıdır. Böyle olması durumunda sitemdeki geçiş etkileri çalışmayabilir. Fakat,  $a = -\infty$  alınması sabit (salınımsız)-durum süreçleri düşünüldüğünde gereken bir soyutlamadır. Örneğin, periyodik girdi sinyallerine sahip olan bir kesirli dinamik sistemin tepkisi üzerinde çalışılırken ya da viskoelastik materyallerdeki dalga yayılımını incelerken bu soyutlamaya gerek duyulur.

**4.** Uygulamalar açısından önemli olan iki yaklaşım arasındaki bir başka fark, ardışık kesirli ve tamsayı mertebeli türevlerin sıralanışıdır. Bu fark Caputo ve Riemann-Liouville yaklaşımları için sırası ile şu şekildedir:

$${}^C D_t^\alpha ({}^C D_t^m f(t)) = {}^C D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

ve

$${}_a \mathbf{D}_t^m ({}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t)) = {}_a \mathbf{D}_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n).$$

Her iki yaklaşımdaki türev operatörlerinin yer değiştirmesi farklı koşullar altında gerçekleşir. Bu koşullar aşağıdaki biçimde verilebilir:

$${}^C D_t^\alpha ({}^C D_t^m f(t)) = {}^C D_t^m ({}^C D_t^\alpha f(t)) = {}^C D_t^{\alpha+m} f(t),$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = n, n+1, \dots, m$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

ve

$${}_a \mathbf{D}_t^m ({}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t)) = {}_a \mathbf{D}_t^\alpha ({}_a \mathbf{D}_t^m f(t)) = {}_a \mathbf{D}_t^{\alpha+m} f(t),$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n).$$

Burada görülen odur ki Riemann-Liouville yaklaşımının tersine Caputo yaklaşımında  $s = 0, 1, 2, \dots, m$  olması durumunda  $f^{(s)}(0)$  'ler için herhangi bir kısıtlama yoktur.

### 3.6 Ardışık Kesirli Türevler

$n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $n$ . mertebeden türevler için kullanılan  $\frac{d^n}{dt^n}$  notasyonunun

kesirli türevler için de benzer biçimde kullanılabilmesi amacı ile yapılan çalışmalar ardışık kesirli türevleri ortaya çıkarmıştır. Bu türevlerin ortaya çıkışı aşağıda analiz edilmiştir. Tamsayı mertebeli türevler için

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} f(t) \quad (3.34)$$



eşitliğinin geçerli olduğu bilinmektedir.  $0 \leq \alpha \leq 1$  olmak üzere  $D^\alpha$  kesirli türev notasyonunun uygun bir metotla  $\frac{d}{dt}$  birinci mertebeden türev notasyonu ile yer değiştirmesi durumunda

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \dots D^\alpha}_n f(t) \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.35) deki ardışık kesirli türevin tanımlanabilmesi kesirli diferansiyel denklemlerin tanımlanabilmesi için önemli bir adımdır.

Bu konu ile ilgili çalışmalar K. S. Miller ve B. Ross tarafından,  $D^\alpha$  türev notasyonu Riemann-Liouville kesirli türevi için kullanılarak ve ardışık kesirli türevli diferansiyel denklemler göz önüne alınarak gerçekleştirilmiştir. Ancak  $D^\alpha$ , Grünwald-Letnikov, Caputo ve diğer türevler için kullanıldığında da ardışık kesirli türevler elde edilir. Sonuç olarak,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

olmak üzere kesirli ardışık türev

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t) \quad (3.36)$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki türev notasyonu problemin türüne bağlı olarak istenilen kesirli türev tanımı yerine kullanılabilir. Aynı zamanda Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri aşağıdaki biçimde ardışık türevlerin özel halleridir.

Riemann-Liouville kesirli türevi:

$${}_a \mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} {}_a D_t^{-(n-p)} f(t), \quad (n-1 \leq p < n) \quad (3.37)$$

Caputo kesirli türevi:

$${}^c D_t^p f(t) = {}_a D_t^{-(n-p)} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} f(t), \quad (n-1 < p \leq n) \quad (3.38)$$

biçiminde ifade edilebilir. Dikkat edilirse her iki türevin mertebesi  $p$  olmasına rağmen  $\frac{d}{dt}$  ve  ${}_a D_t^{-(n-p)}$  türev operatörlerinin farklı sıralanışları nedeniyle bu iki türevin özellikleri farklılaşır.

Örneğin;  $p < 0$  ve  $q < 0$  olması durumunda ya da buna denk olarak Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli integralleri için

$$D^p D^q f(t) = D^q D^p f(t) = D^{p+q} f(t)$$

özellği geçerlidir. Ancak bu özellik  $p, q > 0$  olması durumunda ya da buna denk bir ifadeyle kesirli türev durumunda geçerli değildir. Gerçekte bu özellik Riemann-Liouville ve Caputo türevleri arasındaki farkı ortaya koyar.

Ardışık kesirli türevler çeşitli fizik ve uygulamalı matematik problemlerinin formülasyonunda doğal olarak ortaya çıkar. Bu yüzden, fiziksel süreçleri veya objeleri modelleyen diferansiyel denklemler, kesirli türevle ifade edilen bir durumun yine kesirli türevle ifade edilen bir başka durum içinde işleme alınmasının bir sonucu olarak ortaya çıkar.

Eğer her bir durumu ifade eden diferansiyel denklem kesirli türev içeriyorsa, bu durumların ardışık sıralanması sonucunda elde edilen diferansiyel denklem ardışık kesirli türevler içeriyor demektir. Ardışık kesirli türevler Miller-Ross kesirli türevleri olarak da adlandırılır.

### 3.7 Bessel Fonksiyonları

**3.7.1 Tanım** (Bessel Diferansiyel Denklem) :  $\alpha$  keyfi bir reel ya da kompleks sayı olmak üzere *Bessel diferansiyel denklem*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0 \quad (3.39)$$

biçiminde tanımlanır.

Silindirik koordinatlardaki Laplace denkleminin çözümünde buldukları için aşağıda tanımları verilecek olan Bessel fonksiyonları “Silindirik Fonksiyonlar” ya da “Silindirik Harmonikler” olarak da bilinir. Bessel diferansiyel denklemler, Laplace denklemlerinin ve silindirik ya da küresel koordinatlardaki Helmholtz denkleminin ayrılabilir çözümleri bulunurken ortaya çıkar.

$n \in \mathbb{N}$  olmak üzere, silindirik koordinatlarda tanımlanan problemlerin çözümünde  $\alpha = n$  dereceli Bessel fonksiyonları elde edilir. Küresel koordinatlarda tanımlanan problemlerin çözümünde ise  $\alpha = n + \frac{1}{2}$  dereceli Bessel fonksiyonları elde edilir.

**3.7.2 Tanım** (Birinci Tip Bessel Fonksiyonu) :  $\alpha > 0$  olmak üzere  $\alpha$ . dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \alpha} \quad (3.40)$$

biçimindeki bir Taylor serisi ile tanımlanır.

**3.7.3 Tanım** (İkinci Tip Bessel Fonksiyonu) :  $\alpha > 0$  olmak üzere *ikinci tip Bessel fonksiyonu*

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \quad (3.41)$$

biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyon “*Neumann Fonksiyonu*” olarak da adlandırılır.

**3.7.4 Tanım** (Bessel Diferansiyel Denklemin Genel Çözümü) :  $J_\alpha$  ve  $Y_\alpha$  bir Bessel diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri,  $c_1$  ve  $c_2$  keyfî sabitler olmak üzere

$$y(x) = c_1 J_\alpha(x) + c_2 Y_\alpha(x) \quad (3.42)$$

Bessel diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

## 4. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç-değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği bazı önemli teoremler ile ortaya konmuştur. Çözümlerin varlığı ve tekliği için elde edilen bütün sonuçlar Miller-Ross ardışık kesirli türevli diferansiyel denklemler için verilmiştir. Bunun nedeni; elde edilen sonuçların Miller-Ross ardışık kesirli türevlerinin özel durumları olarak kabul edilen Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevlerine direkt olarak uygulanabilir olmasıdır.

O halde ilk olarak lineer kesirli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri aşağıda verilmiştir. Sonrasında bu teoremler genel bir kesirli diferansiyel denklem için genelleştirilmiştir.

### 4.1 Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler

$$\left[ {}_0 D_t^{\sigma_k-1} y(t) \right]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

başlangıç koşulları altında

$${}_0 D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) {}_0 D_t^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t), \quad (0 < t < T < \infty) \quad (4.2)$$

diferansiyel denklemi ile tanımlanan başlangıç-değer problemi göz önüne alınsın. Burada

$${}_a D_t^{\sigma_k} \equiv_a D_t^{\alpha_k} D_t^{\alpha_{k-1}} \dots_a D_t^{\alpha_1};$$

$${}_a D_t^{\sigma_{k-1}} \equiv_a D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \dots_a D_t^{\alpha_1};$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k=1,2,\dots,n);$$

$$0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j=1,2,\dots,n)$$

ve  $f(t) \in L_1(0,T)$  dir. Yani  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ .

İki duruma ayırarak varlık ve teklik teoremleri analiz edilebilir.

**1.Durum** :  $k=1,2,\dots,n$  olmak üzere  $p_k(t) = 0$  olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

**4.1.1 Teorem** :  $f(t) \in L_1(0,T)$  ise

$${}_0 D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t)$$

kesirli diferansiyel denklemi  $y(t) \in L_1(0,T)$  olacak biçimde, (4.1) başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözüme sahiptir [1].

**2.Durum**:  $k=1,2,\dots,n$  olmak üzere  $\exists p_k(t) \neq 0$  olsun. O halde geçerli olan teorem aşağıdaki biçimdedir.

**4.1.2 Teorem :**  $f(t) \in L_1(0, T)$  ve  $p_j(t)$ 'ler ( $j = 1, 2, \dots, n$ )  $[0, T]$  aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. O halde (4.1)-(4.2) de tanımlanan başlangıç-değer problemi  $y(t) \in L_1(0, T)$  olacak biçimde tek bir çözüme sahiptir [1].

Pek çok başlangıç-değer probleminde  $y(t)$  çözümü için tanımlanan başlangıç koşulları sıfır veya  $y(t)$ 'nin tamsayı mertebeli türevleri şeklindedir. Bunun üç temel sebebi vardır:

1. Başlangıç koşullarının sıfır ya da tamsayı mertebeli türevler ile belirlenmesi  $y(t)$  çözümünün başlangıç zamanında gösterdiği davranışın fiziksel olarak yorumlanabilmesi imkânını sağlar.
2. (4.1) de verilen başlangıç koşulunun nümerik yaklaşımlarla hesaplanmasının zorluğunu ortadan kaldırır.
3.  $y(t)$  çözümü için tanımlanan sıfır başlangıç koşulları ve tamsayı mertebeli türevli başlangıç koşulları Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo ve Miller-Ross kesirli türevlerinin çakışmasına sebep olur. Bu çakışma ise problemin formülasyonunun ve çözümünün yanlış yorumlanabilmesi durumunu ortadan kaldırır. Çünkü her bir tanıma göre problemin çözümü aranırken aynı sonuca ulaşılır.

Sonuç olarak  $m-1 \leq \sigma_n < m$  olmak üzere ve

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1) \quad (4.3)$$

sıfır başlangıç koşulları altında

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) {}_0D_t^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t) \quad (4.4)$$

diferansiyel denklemi ile tanımlanan başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliliği aşağıdaki teoremle ifade edilir.

**4.1.3 Teorem :**  $f(t)$  ve  $p_j(t)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) fonksiyonları  $[0,T]$ 'de sürekli fonksiyonlar olsun. O halde;  $m-1 \leq \sigma_n < m$ ,  $\sigma_n > \sigma_{n-1} > \dots > \sigma_1 > 0$  olmak üzere (4.3)-(4.4) ile tanımlanan başlangıç-değer probleminin  $[0,T]$ 'de sürekli olan tek bir çözümü vardır.

## 4.2 Kesirli Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

$$\left[ {}_0 D_t^{\sigma_k-1} y(t) \right]_{t=0} = b_k, \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (4.5)$$

başlangıç koşulları altında

$${}_0 D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t, y) \quad (4.6)$$

kesirli diferansiyel denklemi ile tanımlanan başlangıç-değer problemi göz önüne alınsın. Burada

$${}_a D_t^{\sigma_k} y(t) \equiv {}_a D_t^{\alpha_k} {}_a D_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_a D_t^{\alpha_1};$$

$${}_a D_t^{\sigma_k-1} \equiv {}_a D_t^{\alpha_k-1} {}_a D_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_a D_t^{\alpha_1};$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k=1,2,\dots,n);$$

$$0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j=1,2,\dots,n)$$

dır.



Varsayalım ki  $f(t, y)$ ,  $(t, y)$  sıralı ikililerinin  $G$  bölgesinde tanımlı bir fonksiyonu olsun.  $h$  ve  $K$  sabitler olmak üzere  $R(h, K) \subset G$  alt bölgesi

$$\left| t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K, \quad (0 < t < h)$$

eşitsizliğini sağlayan  $(t, y) \in G$  sıralı ikililerinden oluşsun. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

**4.2.1 Teorem :**  $f(t, y)$ ,  $G$  bölgesinde tanımlanan reel-değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun ve

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|$$

öyle ki

$$|f(t, y)| \leq M < \infty, \quad \forall (t, y) \in G$$

biçimindeki Lipschitz şartını sağlasın. Aynı zamanda

$$K \geq \frac{Mh^{\sigma_n - \sigma_1}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}$$

olsun. O halde,  $R(h, K)$  alt bölgesi içinde (4.5)-(4.6) da tanımlanan başlangıç-değer probleminin tek ve sürekli bir çözümü vardır [1].

### 4.3 Kesirli Diferansiyel Denklem Çözümünde Laplace Dönüşüm Metodu

Kesirli diferansiyel denklemler uygulamalı matematik, fizik, kimya ve mühendislik alanlarında oldukça sık ortaya çıkar.

Bunun nedeni; kesirli türevler gerçek sistemleri ve süreçleri tamsayı mertebeli türevlerden daha tam ve gerçeğe yakın modeller. Bu yüzden kesirli diferansiyel denklem çözümleri için pek çok metot ortaya konmuştur. “Laplace Dönüşüm Metodu (Laplace Transform Method)”, “Sonlu Sine Dönüşüm Metodu (Finite Sine Transform Method)”, “Adomian Decomposition Method”, “Kesirli Green fonksiyonu Metodu (Fractional Green’s Function Method)” kesirli diferansiyel denklem çözümlerinde en yaygın olarak kullanılan başlıca metotlardır.

Çözümü aranan problemin türüne göre bu metotlardan en uygun olanı seçilerek çözüme ulaşılır. Çalışmada ele alınan problemin çözümünde de “Laplace Dönüşüm Metodu (Laplace Transform Method)” ve “Kesirli Green Fonksiyonu Metodu (Fractional Green’s Function Method)” kullanıldığı için bu metotlar analiz edilmiştir.

4.3.1 kısımda, temeli iki parametrelili  $E_{\alpha,\beta}(z)$  Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü üzerine kurulan “Laplace Dönüşüm Metodu (Laplace Transform Method)” açıklanmıştır. Bu metot, kesirli diferansiyel denklemler için oldukça geniş bir başlangıç-değer problemleri sınıfının çözümlerinin araştırılmasında kullanılır.

Kesirli diferansiyel denklemler “standart” ve “ardışık” kesirli diferansiyel denklemler olmak üzere iki kısma ayrılarak bu metot analiz edilebilir. Ancak burada ele alınan kısım, çalışmada ele alınan problemin de tanımlandığı standart diferansiyel denklemlerdir.

### 4.3.1 Standart Kesirli Diferansiyel Denklemler

Kesirli türevin Laplace dönüşümü için tanımlanan klasik formül

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_0D_t^{\alpha} f(t) dt = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad (n-1 < \alpha \leq n) \quad (4.7)$$

biçimindedir.

Aşağıdaki örneklerin çözümlerinde de görüleceği gibi standart diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşüm metodu ile çözümünde  $E_{\alpha,\beta}$  fonksiyonu ortaya çıkar.

#### 4.3.1.1 Adi Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler

**Örnek :**  $a$  ve  $C$  keyfi sabitler olmak üzere

$$\left[ {}_0D_t^{-1/2} f(t) \right]_{t=0} = C \quad (4.8)$$

başlangıç koşulu altında,

$${}_0D_t^{1/2} f(t) + a f(t) = 0; \quad (t > 0) \quad (4.9)$$

kesirli diferansiyel denklemi ile tanımlanan başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki biçimde araştırılır.

**Çözüm :** Problemin çözümü Laplace dönüşüm metodu kullanılarak elde edilmiştir. O halde, (4.9) eşitliğine Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^{1/2} F(s) + a F(s) = C$$

ya da

$$F(s) = \frac{C}{s^{1/2} + a}$$

elde edilir. (3.29) eşitliği göz önüne alınarak  $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü

$$f(t) = Ct^{-1/2} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-a\sqrt{t})$$

biçimindedir.  $a = 1$  olması durumunda

$$\frac{1}{\sqrt{t}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^{-t} \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$$

olduğu göz önüne alınarak  $f(t)$  çözümü

$$f(t) = C \left( \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^{-t} \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \right)$$

olarak elde edilir.

#### 4.3.1.2 Kısmi Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler

**Örnek** (Niğmatullin'in kesirli yayılım denklemi) : Başlangıç ve sınır koşulları sırası ile

$$\left[ {}_0 D_t^{\alpha-1} u(x, t) \right]_{t=0} = \varphi(x) \quad (4.10)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \text{ olan,} \quad (4.11)$$

$${}_0D_t^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (t > 0, \quad -\infty < x < \infty) \quad (4.12)$$

kısmi kesirli lineer diferansiyel denklemi ile tanımlanan başlangıç-sınır-değer probleminin çözümü aşağıdaki biçimde araştırılır.

**Çözüm :**  $0 < \alpha < 1$  varsayımı altında, bu tipteki bir problem Nigmatullin, Westerlund ve Mainardi tarafından çalışılmıştır.

$\beta$  bir Fourier dönüşüm parametresi olmak üzere (4.12) eşitliğinin Fourier dönüşümü

$${}_0D_t^\alpha \bar{u}(\beta,t) + \lambda^2 \beta^2 \bar{u}(\beta,t) = 0 \quad (4.13)$$

biçimindedir. (4.10) başlangıç koşulunun Fourier dönüşümü ise

$$\left[ {}_0D_t^{\alpha-1} \bar{u}(x,t) \right]_{t=0} = \bar{\varphi}(\beta) \quad (4.14)$$

dır. (4.13) eşitliğinin Laplace dönüşümü ve başlangıç koşulu dikkate alınırsa

$$\bar{U}(\beta,s) = \frac{\varphi(\beta)}{s^\alpha + \lambda^2 \beta^2} \quad (4.15)$$

olacaktır. (3.29) kullanılarak (4.15) eşitliğinin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\bar{U}(\beta,t) = \varphi(\beta) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2 \beta^2 t^\alpha)$$

elde edilir.  $\bar{U}(\beta,t)$  çözümüne ters Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (4.16)$$

çözümüne ulaşılır. Burada

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2 \beta^2 t^\alpha) \cos(\beta x) d\beta.$$

$G(x,t)$  olarak elde edilen fonksiyon, 4.4.1 kısımda tanımı verilen kesirli Green fonksiyonudur.

Bu problemde  $\alpha$ 'nın değişen değerleri için  $G(x,t)$  ve dolayısı ile  $u(x,t)$  çözümü açık olarak direkt ya da nümerik yöntemlerle hesaplanabilir.

#### 4.4 Kesirli Diferansiyel Denklem Çözümünde Green Fonksiyon Metodu

Sabit katsayılı kesirli lineer diferansiyel denklem için başlangıç-değer problemlerinin çözümü, problemin kesirli Green fonksiyonunun kullanılması ile gerçekleştirilebilir. O halde, başlangıç-değer problemi esasında kesirli Green fonksiyonu bulma problemine dönüşmektedir. Bu bölümde, kesirli Green fonksiyonu ve özellikleri açıklanmış ve bazı özel durumlar için kesirli Green fonksiyonları elde edilmiştir.

##### 4.4.1 Kesirli Green Fonksiyonu ve Özellikleri

$$\left[ {}_0 D_t^{\sigma_k-1} y(t) \right]_{t=0} = 0, \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (4.17)$$

başlangıç koşulları altında

$${}_a L_t y(t) = {}_a D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t) {}_a D_t^{\sigma_{n-k}} y(t) + p_n(t) y(t)$$

olmak üzere

$${}_0L_t y(t) = f(t) \quad (4.18)$$

kesirli diferansiyel denklemi ile tanımlanan başlangıç-değer problemi göz önüne alınsın. Burada,

$${}_a D_t^{\sigma_k} y(t) \equiv_a D_t^{\alpha_k} {}_a D_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_a D_t^{\alpha_1};$$

$${}_a D_t^{\sigma_{k-1}} \equiv_a D_t^{\alpha_{k-1}} {}_a D_t^{\alpha_{k-2}} \dots {}_a D_t^{\alpha_1};$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k=1,2,\dots,n);$$

$$0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j=1,2,\dots,n)$$

dır.

#### 4.4.1.1 Tanım (Kesirli Green Fonksiyonu) :

$G(t, \tau)$  notasyonu ile gösterilen fonksiyon,

- i.  $\forall \tau \in (0, t)$  için  ${}_{\tau}L_t G(t, \tau) = 0$ ;
- ii.  $\lim_{\tau \rightarrow t-0} ({}_{\tau}D_t^{\sigma_{k-1}} G(t, \tau)) = \delta_{k,n}$ ,  $(k=0,1,\dots,n)$   
( $\delta_{k,n}$  Kronecker Delta);
- iii.  $\lim_{\substack{\tau, t \rightarrow +0 \\ \tau < t}} ({}_{\tau}D_t^{\sigma_k} G(t, \tau)) = 0$ ,  $(k=0,1,\dots,n-1)$

koşullarını sağlıyorsa  $G(t, \tau)$ 'ye *kesirli Green fonksiyonu* denir.

#### 4.4.1.2 Green Fonksiyonun Özellikleri:

i. Kesirli Green fonksiyonuna bağlı olarak tanımlanan

$$y(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

integrali (4.17)-(4.18) deki başlangıç-değer probleminin çözümüdür.

ii. Sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemler için

$$G(t, \tau) = G(t - \tau).$$

iii.  $G(t, \tau)$  kesirli Green fonksiyonunun uygun türevleri, (4.17)-(4.18) deki homojen ( $f(t) = 0$ ) kesirli diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin bir kümesini oluşturur.

Aşağıdaki özel durumlar için başlangıç-değer problemlerinin kesirli Green fonksiyonları elde edilmiştir.

#### 4.4.1.3 Bir Terimli Kesirli Diferansiyel Denklem

$a$  keyfi bir sabit olmak üzere,

$$a_0 D_t^\alpha y(t) = f(t) \quad (4.20)$$



sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemi için elde edilecek olan kesirli Green fonksiyonu  $G_1(t)$  olsun. Buradaki  ${}_0D_t^\alpha y(t)$  kesirli türevi standart ya da ardışık kesirli türev olabilir.  $G_1(t)$  kesirli Green fonksiyonu

$$g_1(s) = \frac{1}{as^\alpha} \quad (4.21)$$

ifadesinin ters Laplace dönüşümü alınarak elde edilir. O halde,

$$L^{-1}\{g_1(s)\} = G_1(t) = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.22)$$

elde edilir. Sonuç olarak sıfır başlangıç koşulları altında (4.20) denkleminin çözümü

$$y(t) = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{1}{a} {}_0D_t^{-\alpha} f(t) \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse  ${}_0D_t^{-\alpha} f(t)$ , kesirli integrali ifade etmektedir.

#### 4.4.1.4 İki Terimli Kesirli Diferansiyel Denklem

$a$  ve  $b$  keyfi sabitler olmak üzere,

$$a {}_0D_t^\alpha y(t) + by(t) = f(t) \quad (4.24)$$

sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemi için elde edilecek kesirli Green fonksiyonu  $G_2(t)$  olsun. O halde,

$$g_2(s) = \frac{1}{as^\alpha + b} = \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}}$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü alınarak

$$G_2(t) = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (4.25)$$

elde edilir.

(4.25) da  $b = 0$  alınır ve  $E_{\alpha,\beta}$  iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı kullanılırsa  $G_2(t)$  fonksiyonu  $G_1(t)$ 'ye dönüşür. Çalışmada ele alınan başlangıç-değer probleminde de ortaya çıkan ve çözümü aranan diferansiyel denklem, iki terimli kesirli bir diferansiyel denklemdir.

#### 4.4.1.5 Üç Terimli Kesirli Diferansiyel Denklem

Benzer biçimde  $a, b$  ve  $c$  keyfi sabitler olmak üzere,

$$a {}_0D_t^\beta y(t) + b {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t) \quad (4.26)$$

sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemi için kesirli Green fonksiyonu  $G_3(t)$  ile gösterilsin.

O halde,

$$\begin{aligned} g_3(s) &= \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c} = \frac{1}{c} \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b} \frac{1}{1 + \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b}} \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{c}{a} \right)^{k+1} \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{\left( s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a} \right)^{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $g_3(s)$  fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü sonsuz toplamın her bir terimine uygulanırsa

$$G_3(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k t^{\beta(k+1)-1} E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)} \left(-\frac{b}{a} t^{\beta-\alpha}\right) \quad (4.27)$$

elde edilir. Burada

$$E_{\lambda, \mu}^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dt^k} E_{\lambda, \mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! y^j}{j! \Gamma(\lambda j + k\lambda + \mu)}, \quad (k = 0, 1, \dots, \infty).$$

$\beta = 2$  ve  $\alpha = \frac{3}{2}$  olması durumunda kesirli uygulama problemlerinde oldukça önemli bir yere sahip olan *Bagley-Torvik kesirli diferansiyel denklemi* elde edilir.  $n$  terimli sabit katsayılı kesirli diferansiyel denklemler için de benzer işlemler yapılarak  $G_n(t)$  kesirli Green fonksiyonu elde edilebilir.

## 5. KESİRLİ TÜREVLERİN NÜMERİK HESAPLAMASI

Bu bölüme kadar analiz edilen Laplace dönüşüm metodu ve kesirli Green fonksiyonu, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılır. Ancak, çözümü aranan diferansiyel denklemdeki kesirli türevlerin her zaman analitik (tam/ kesin) hesaplaması kolay ya da mümkün olmayabilir. Bu yüzden çeşitli nümerik metotlar kullanılarak bu kesirli türevlerin analitiğe oldukça yakın ve kolay hesaplanabilmesi sağlanmıştır.

Çalışmada ele alınan problemin kesirli türevlerinin nümerik hesaplanmasında da kullanılan, oldukça geniş bir fonksiyon ailesi için geçerli ve etkili olan Grünwald-Letnikov yaklaşımı incelenecektir.

Gerçek mühendislik uygulamalarında ortaya çıkan geniş bir fonksiyon ailesi için Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımları birbirine eşittir.

Bu nümerik yaklaşım kullanılırken izlenen yol, sıfır başlangıç koşulları altında tanımlanan başlangıç-değer probleminin formülasyonu boyunca Riemann-Liouville tanımının kullanılması ve nümerik çözüm elde edilirken de Grünwald-Letnikov tanımına geçilmesi biçimindedir.

### 5.1 Grünwald-Letnikov Yaklaşımı

Tamsayı mertebeli türev için

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

olduğu bilinmektedir. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d}{dt}(\dot{x}) \cong \frac{(\dot{x}(t) - \dot{x}(t-h))}{h} \\ &= \frac{x(t) - 2x(t-h) + x(t-2h)}{h^2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\ddot{\ddot{x}}(t) &= \frac{d}{dt}(\ddot{x}) \cong \frac{\ddot{x}(t) - \ddot{x}(t-h)}{h} \\ &= \frac{x(t) - 3x(t-h) + 3x(t-2h) - x(t-3h)}{h^3}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$E x(t) = x(t-h) \tag{5.1}$$

olacak biçimde yeni bir  $E$  notasyonu kullanılsın. O halde,

$$E[E x(t)] = E^2 x(t) = E[x(t-h)] = x(t-2h)$$

ve genel haliyle

$$E^n x(t) = x(t-nh) \tag{5.2}$$

elde edilir.  $E$  notasyonu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\cong \frac{x(t) - x(t-h)}{h} = \frac{1}{h}x(t) - E x(t) \\ &= \frac{(1-E)x(t)}{h};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &\cong \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(t-h)}{h} = \frac{1}{h} \dot{x}(t) - E \dot{x}(t) \\ &= \frac{1}{h^2} (1-E)^2 x(t)\end{aligned}$$

ve genel haliyle

$$x^{(n)}(t) \cong \frac{1}{h^n} (1-E)^n x(t) \quad (5.3)$$

yazılabilir.

$${}^n C_r = C \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (5.4)$$

kombinasyon tanımını göz önüne alınarak

$$x^{(n)}(t) \cong \frac{1}{h^n} \left[ \sum_{r=0}^n (-1)^r {}^n C_r E^r \right] x(t) \quad (5.5)$$

biçiminde yeniden ifade edilebilir.

$[0, t]$  zaman diliminde tanımlanan bir başlangıç-değer problemindeki kesirli türev  $\alpha$ . mertebeden olsun.  $t$  uzunluklu zaman  $n$  tane  $h$  uzunluklu alt aralığa ayrılsın.  $h \rightarrow 0$  iken limit durumu düşünülürse

$$\begin{aligned}x^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} (1-E)^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{n=\frac{t}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{r} E^j x(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{r} x(t-jh)\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse,

$$x^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t - jh) \quad (5.6)$$

daha önce tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevidir.

$$w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} \quad (5.7)$$

olsun. Sonuç olarak Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı

$$x^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{n=\frac{t}{h}} w_j^{(\alpha)} x(t - jh) \quad (5.8)$$

biçiminde yazılabilir. Bu türev tanımının nasıl kullanıldığı aşağıdaki örneklerle gösterilmiştir.

**Örnek :**  $x(t) = t^3$  olmak üzere  $D^{1/2}x(t)$  kesirli türevini  $[0,1]$  zaman aralığındaki değeri nedir?

**Çözüm :**  $[0,1]$  zaman aralığı  $h = 0.25$  uzunluklu alt aralıklara bölünsün. O halde,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $h = 0.25$ ,  $t = 1$  olduğuna göre  $n = th$  olmasından  $n = 4$  elde edilir

(5.8) tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} D^{1/2}x(t) &= D^{1/2}t^3 \cong \frac{1}{h^{1/2}} \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(4h - jh) \\ &= \frac{1}{h^{1/2}} \left[ \binom{1/2}{0} x(4h) - \binom{1/2}{1} x(3h) + \binom{1/2}{2} x(2h) - \binom{1/2}{3} x(h) + \binom{1/2}{4} x(0) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1}{2} \binom{1/2-1}{2} , \quad \binom{1/2}{4} = \frac{1}{2} \binom{1/2-1}{2} \binom{1/2-2}{2} \binom{1/2-3}{2}$$

ve diğer kombinasyonlar da benzer biçimde elde edilir. Sonuç olarak,

$$D^{1/2}x(t) = D^{1/2}t^3$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ w_{(0)}^{(1/2)}x(4h) + w_{(1)}^{(1/2)}x(3h) + w_{(2)}^{(1/2)}x(2h) + w_{(3)}^{(1/2)}x(h) + w_{(4)}^{(1/2)}x(0) \right]$$

sonucuna ulaşılır.



## 6. KESİRLİ YAYILIM-DALGA PROBLEMLERİ

### 6.1 Kesirli Yayılım-Dalga Problemleri Hakkındaki Çalışmalar

“Kesirli yayılım-dalga denklemi, klasik yayılım ya da dalga denklemlerindeki birinci ya da ikinci mertebeden zaman türevinin  $\alpha$  'ıncı ( $\alpha > 0$ ) mertebeden kesirli bir türevle yer değiştirmesi ile elde edilen bir kısmi diferansiyel denklemdir.” tanımı Mainardi [7] tarafından yapılmıştır ve kesirli yayılım-dalga denklemleri için en yaygın kullanılan tanımdır. Oldukça geniş bir alanda uygulanabilir olması sebebi ile kesirli yayılım-dalga denklemlerine olan ilgi giderek artmaktadır.

Anormal yayılım ve alt yayılım sistemlerinin modellenmesinde, yayılım ve dalga fenomenlerinin birleştirilmesinde, kesirli rasgele dağılımların tanımlanmasında ve bunlar gibi pek çok alanda kesirli yayılım-dalga denklemlerine rastlanır.

Kesirli yayılım-dalga problemlerini ele alan başlıca önemli araştırmacılardan ve çalışmalarından aşağıda bahsedilmiştir.

Oldham ve Spanier [2] yarım mertebeden zaman ve birinci mertebeden durum türevleri içeren bir kesirli yayılım denklemini göz önüne almışlar ve aynı zamanda tanımladıkları kesirli yayılım denklemi ve klasik bir yayılım denklemi arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Nigmatullin [9], evrensel elektromanyetik, akustik ve mekanik tepkilerin pek çoğunun kesirli yayılım-dalga denklemleri kullanılarak tam olarak modellenebildiğine dikkat çekmiştir.

Wyss [10],  $H$ -fonksiyonu yardımı ile tanımlanan kesirli yayılım denklemlerinin kapalı formdaki çözümlerini elde edebilmek için Mellin dönüşüm teorisini kullanmıştır. Giona, Cerbelli ve Roman [11], kompleks viskoelastik

materyallerin içindeki relaksasyon (gevşeme) olgusunu tanımlayan bir kesirli yayılım denklemini incelemiştir.

Roman ve Alemany [12], fraktalar üzerindeki bir sürekli-zamandaki rasgele dağılımı araştırmışlar ve ortalama olasılık yoğunluğunun bir kesirli zaman türevli yayılım denklemleri ile ifade edildiğini göstermişlerdir.

Mainardi [7], Mainardi ve Paradisi [13] birinci mertebeden zaman türevini  $\alpha$ 'ncı mertebeden kesirli bir türev ile değiştirerek yayılım denklemini genelleştirmişlerdir. Bu genelleştirilmiş denklemin viskoelastik katıların içindeki gerilim dalgalarının yayılımını ifade ettiğini bulmuşlardır. Bunun yanı sıra Mainardi ve Paradisi,  $\alpha$ 'nın 0'dan 2'ye artması durumunda sürecin “yavaş yayılım  $\rightarrow$  klasik yayılım  $\rightarrow$  yayılım-dalga  $\rightarrow$  klasik dalga” biçiminde işlediğini göstermişlerdir.

Agrawal [14,15], Mainardi'nin yayılım-dalga formülasyonunu dördüncü mertebeden bir durum türevi içeren kesirli yayılım dalga denklemlerine genişletmiştir. Bunu yaparken de problemi hem sınırlı hem de sınırsız bir bölgede ele almıştır.

Hilfer [16],  $H$ -fonksiyonlarının Riemann-Liouville kesirli türevleri ile tanımlanan kesirli yayılım denklemlerinin bir kapalı form çözümünü ortaya koymuştur.

Kesirli mühendislik sistemlerinin istatistik/olasılık analizlerinin yapılması alanındaki çalışmalar oldukça sınırlıdır. Bu alanda Agrawal [17], bir boyutlu kesirli yayılım-dalga denklemlerinin olasılık analizini yapmıştır.

Sınırlı bölgelerde tanımlanan kesirli yayılım-dalga denklemlerinin çözümlerini bulmak için Özdemir [18], “modal/integral transform method” olarak adlandırılan metodu kullanmıştır. Bu metod oldukça geneldir ve uygulanabildiği kesirli sistemlerin salınım analizleri ile ilgili pek çok problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak için kullanılır. Bilinmelidir ki sürekli sistemlerin salınımı oldukça geniş bir çalışma alanıdır. Söz konusu metodun sağladığı en önemli avantaj, sürekli zamanda tanımlanan problemi sayılabilir sayıda birbirinden bağımsız probleme ayırıp her birinin çözümlerine ulaşarak ana problemin kapalı formdaki

çözümünün elde edilmesidir. Çalışmada da yararlanılan metot olması açısından önemlidir.

El-Shahed ve Salem [19] bu metodu kullanarak “Navier-Stokes” denklemlerinin kesirli genelleştirmesini çözmüşlerdir. Problemlerini polar koordinatlarda tanımladıklarından dolayı da elde ettikleri çözümlerin radyal simetrik olması durumu ile karşılaşmışlardır. Yine Postenko [20,21], aynı metodu kullanarak bir küre ve silindir içindeki kesirli radyal yayılım problemini ele almıştır. Povstenko’nun çalışması ile buradaki çalışmada ele alınan problem aynı olmasına rağmen problemin tanımlanması ve çözümü açısından önemli farklılıklar vardır. Povstenko çalışmasında, bir silindir içindeki radyal yayılım problemini Caputo kesirli türevi ile polar koordinatlarda tanımlamıştır ve sadece analitik olarak problemin çözümünü gerçekleştirmiştir. Aynı zamanda Povstenko simülasyon sonuçlarını sadece uzaklık ve türevin mertebesinin değişimine göre araştırmıştır. Ancak buradaki çalışmada problem, Riemann-Liouville kesirli türevi ile silindirik koordinatlarda tanımlanmıştır ve elde edilen simülasyon sonuçları türevin mertebesindeki değişime, Bessel fonksiyonlarının sıfırlarının sayısına, alt aralık uzunluklarının değişimine göre 2 ve 3 boyutlu olarak elde edilmiştir. Nümerik çözümün elde edilmesinde Grünwald-Letnikov yaklaşımından yararlanılmıştır. Bilinen odur ki kesirli problemlerin her zaman analitik çözümlerine ulaşmak mümkün olmayabilir. Bu yüzden nümerik çözümlerinin araştırılması adına çok sayıda metot ortaya konmuştur. Çoğunlukla bu metotlardan problemin yapısına en uygun olanı seçilerek analitik çözüme en yakın olan çözüm elde edilmeye çalışılmaktadır.

## 6.2 Kesirli Yayılım-Dalga Denklemleri

$c$  keyfi bir sabit,  $t$  zaman değişkeni,  $x$ ,  $y$  ve  $z$  Kartezyen koordinatlar olmak üzere bir, iki ve üç boyutlu kesirli yayılım-dalga denklemleri sırası ile

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

kesirli kısmi diferansiyel denklemleri ile tanımlanır.

Özel halde,  $\alpha = 1$  olması durumunda bu diferansiyel denklemler “yayılm”  $\alpha = 2$  olması durumunda ise “dalga” hareketlerini ifade eder. Dahası örneğin;  $\alpha = 1$  olduğunda  $c$  keyfi sabiti yayılım sabitine dönüşür.

Bağımsız değişkenler uzayının herhangi bir  $R$  bölgesindeki, kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü, bu bölgede her yerde diferansiyel denklemi sağlayan ve  $R$ 'yi içine alan bazı bölgelerde diferansiyel denklemin bütün değişkenlerine göre kısmi türevlere sahip olan bir fonksiyondur.

Fiziksel bir probleme ait olan bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü belirli başlangıç ve sınır koşulları altında tektir.

Uygulamada,  $t \geq 0$  olmak üzere kesirli yayılım-dalga denklemlerinin genel çözümünü bulmaktan ziyade  $t = 0$  anındaki tanımlanan başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü bulmak önemlidir. Çünkü fiziksel problemlerde çoğunlukla diferansiyel denklemlerle beraber başlangıç ve sınır koşulları doğal olarak ortaya çıkar.

Ele alınan problemde üç boyutlu kesirli yayılım-dalga denklemlerinin silindirik koordinatlardaki çözümü araştırıldığı için bundan sonraki tanımlar üç boyutlu kesirli yayılım-dalga denklemleri üzerinde verilmiştir.

### 6.2.1 Tanım:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanan denkleme kartezyen koordinatlarda *üç boyutlu lineer olmayan kesirli yayılım-dalga denklemi* denir.

Burada yayılım-dalga hareketinin lineerliğini bozan  $f(x, y, z)$  dış kuvveti (bozucu/kontrolör)'dür.

Yayılım-dalga problemlerinin özelliklerine göre amaca uygun olarak değişik koordinat sistemleri kullanmak gerekir. Bu yüzden ele alınan problemde silindirik bir bölgeye yerleştirilmiş bir cismin yayılım-dalga hareketi incelendiği için silindirik koordinatlar kullanılmıştır.

### 6.3 Silindirik Koordinatlarda Kesirli Yayılım-Dalga Denklemlerinin Çözümü

Silindirik bir bölgeye yerleştirilmiş ve bir  $f$  dış kuvvetinin etkisi altında kalan bir cismin yayılım-dalga hareketinin herhangi bir  $t$  anındaki durumunu veren  $u(x, y, z, t)$  fonksiyonu (6.1) deki kesirli yayılım-dalga denklemini sağlar.

Üzerinde çalışılan silindirik bir bölge olduğundan

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (6.2)$$

dönüşümleri yapılarak

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(r, \theta, z, t) \quad (6.3)$$

silindirik koordinatlardaki kesirli yayılım-dalga denklemi bulunur. O halde (6.3) tanımı göz önüne alınarak silindirik koordinatlarda tanımlanan radyal simetrik kesirli yayılım-dalga problemini sıfır başlangıç ve sınır koşulları altında aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

### 6.3.1 Radyal Simetrik Kesirli Yayılım-Dalga Problemi

#### Problem:

Sınır koşulları

- i.  $u = 0, (z = 0, 0 < r < R)$
- ii.  $u = 0, (r = R, 0 < z < L)$
- iii.  $u = 0, (z = L, 0 < r < R)$
- iv.  $u$  sonlu,  $(0 < r < R, 0 < z < L)$

ve başlangıç koşulları

$$u(r, z, 0) = \frac{\partial u}{\partial r}(r, z, 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(r, z, 0) = 0 \quad (6.4)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(r, z, t) \quad (6.5)$$

kesirli diferansiyel denklemi ile tanımlanan probleme “*Silindirik Koordinatlarda Radyal Simetrik Kesirli Yayılım-Dalga Problemi*” denir.

Burada  $c$ , problemin tanımlandığı fiziksel sistemin özelliklerine bağlı olarak değişen bir keyfi sabiti,  $R$  ( $0 < r < R$ ) üzerinde çalışılan silindirik bölgenin yarıçapını,  $L$  ( $0 < z < L$ ) silindirin uzunluğunu ifade eder.

Problemin radyal simetrik olarak adlandırılmasının sebebi, başlangıç koşullarının  $\theta$  değişkeninden bağımsız olması durumunda  $u$  çözümlerinin  $\theta$ 'dan bağımsız olduğu gerçeğidir.

Dikkat edilirse problem sıfır başlangıç koşulları altında tanımlandığından elde edilen çözümler radyal simetrik çözümlerdir. Bu yüzden de problemi tanımlayan kesirli kısmi diferansiyel denklemde  $\theta$  değişkeni ihmal edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, z, 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(r, z, 0) = 0$$

başlangıç koşulu eğer  $\alpha > 1$  ise göz önüne alınır.

$f(r, z, t)$  dış kuvvet fonksiyonunun problemin türüne göre belirlendiği yukarıda belirtilmişti. Örneğin; ısı transferi probleminde  $f(r, z, t)$  ısı tüketim hızını temsil eder ya da bir zarın titreşimi probleminde zara dıştan uygulanan kuvveti ifade eder.

Sonuç olarak, genel halde tanımlanan problemin çözümü aşağıdaki biçimde araştırılmıştır.

### **Çözüm:**

Problemin çözümünü gerçekleştirmek için değişkenlere ayırma metodundan yararlanılmıştır. O halde varsayalım ki çözüm

$$u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t) \quad (6.6)$$

olsun. İlk olarak  $f(r, z, t) = 0$  varsayımı ile (6.6) çözümü (6.5) denklemini sağladığından

$$R(r)Z(z)\frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = c^2 \left( Z(z)T(t)\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}Z(z)T(t)\frac{dR}{dr} + R(r)T(t)\frac{d^2 Z}{dz^2} \right) \quad (6.7)$$

eşitliği elde edilir. (6.7) eşitliğinin her iki yanını  $R(r)Z(z)T(t)c^2$ 'ye bölünürse

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\ddot{Z}}{Z} \quad (6.8)$$

sonucuna ulaşılır. Dikkat edilirse (6.8) denkleminin sol tarafı  $t$  değişkenine, sağ tarafı  $r$  ve  $z$  değişkenlerine bağlıdır.  $t, r$  ve  $z$  bağımsız değişkenler oldukları için denklemin çözümünün var olabilmesi için her bir değişkene bağlı olan kısımlar ayırma sabitleri olarak adlandırılan  $\lambda, \mu$  ve  $k$ 'ya aşağıdaki biçimde eşit olmalıdır. O halde

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -\mu^2$$

$$\frac{\ddot{Z}}{Z} = -k^2$$

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = -\lambda^2$$

biçiminde 3 diferansiyel denklem elde edilir. Burada  $\mu, k$  ve  $\lambda$  ayırma sabitlerinin önlerindeki “-” işaretinin incelemede pek önemi yoktur. Sadece çözümün yapısını etkiler. Her bir diferansiyel denklemin çözümü sırası ile  $R(r), Z(z)$  ve  $T(t)$  çözümlerini verecektir. O halde 3 adımda bu diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılacaktır.



### 1. Adım:

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -\mu^2 \quad (6.9)$$

diferansiyel denkleminde  $s = \mu r$  dönüşümü yapılırsa

$$\ddot{R} + \frac{1}{s} \dot{R} + R = 0 \quad (6.10)$$

elde edilir. (6.10) denklemi bir Bessel diferansiyel denklemdir. O halde 3.4.7 tanımı gereği (6.10) denkleminin genel çözümü

$$R(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$$

ve ya

$$R(r) = c_1 J_0(\mu r) + c_2 Y_0(\mu r) \quad (6.11)$$

biçimindedir. Burada  $J_0(\mu r)$  ve  $Y_0(\mu r)$  fonksiyonları sırası ile sıfırıncı dereceden birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır.  $R(r)$  çözümünün var (sonlu bir değere sahip) olabilmesi için  $c_2 = 0$  olmalıdır. Çünkü  $r = 0$  noktasında  $Y_0(0) = -\infty$  'dur.

Sonuç olarak (6.11) genel çözümü

$$R(r) = c_1 J_0(\mu r)$$

biçimine dönüşür. Hesaplamalarda basitlik olması açısından  $c_1 = 1$  sabit değerinin kullanıldığı göz önüne alınır

$$R(r) = J_0(\mu r)$$

elde edilir. Sınır koşullarından (ii) dikkate alınır

$$u(R, z, t) = 0$$

veya buna eşit olarak

$$R(R)Z(z)T(t) = 0$$

olacaktır.  $Z(z) \neq 0$  ve  $T(t) \neq 0$  olduğu dikkate alınır da

$$R(R) = J_0(\mu R) = 0$$

elde edilir.  $J_0$  fonksiyonu tanımı göz önüne alındığında sonsuz çoklukta sıfır noktasına sahiptir. O halde  $j = 1, 2, \dots, \infty$  olmak üzere

$$J_0(\mu_j R) = 0$$

yazılabilir.  $J_0$  fonksiyonunun sıfır yerleri  $\psi_j$  ile gösterilsin. Bu durumda  $\mu_j R = \psi_j$  ya da

$$\mu_j = \frac{\psi_j}{R} \tag{6.12}$$

olacaktır.  $j = 1, 2, \dots, \infty$  olmak üzere  $\psi_j$ 'lerden bazıları

$$\psi_1 = 2.4048, \psi_2 = 5.5201, \psi_3 = 8.6537, \psi_4 = 11.7915, \psi_5 = 14.9309 \tag{6.13}$$

biçimindedir. Sonuç olarak

$$R_j(r) = J_0\left(\frac{\psi_j}{R}r\right), \quad (j = 1, 2, \dots, \infty) \tag{6.14}$$

çözümleri elde edilir.

## 2. Adım:

$$\frac{\ddot{Z}}{Z} = -k^2 \quad (6.15)$$

diferansiyel denklemi adi bir diferansiyel denklem olup (6.4) ile verilen başlangıç koşulu göz önüne alınarak elde edilen genel çözümü

$$Z_i(z) = \sin(k_i z), \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (6.16)$$

biçimindedir. Sınır koşullarından (iii) dikkate alınırsa 1. adımdakine benzer düşünce ile  $Z(L) = 0$  ya da  $\sin(k_i L) = 0$  elde edilir. O halde  $k_i L = i\pi$ ,  $(i = 1, 2, \dots, \infty)$  ya da

$$k_i = \frac{i\pi}{L} \quad (6.17)$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak

$$Z_i(z) = \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right), \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (6.18)$$

genel çözümü elde edilir. 3. adıma geçmeden önce  $i, j = 1, 2, \dots, \infty$  olmak üzere

$$-\lambda_{ij}^2 = (-\mu_j^2) + (-k_i^2) \quad (6.19)$$

sonucu yazılabilir. Problemin genel çözümü kapalı formda, (6.14) ve (6.18) çözümleri dikkate alınarak

$$u(r, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) T_{ij}(t) \quad (6.20)$$

biçiminde yazılabilir. Bu sonucu kullanarak da 3. adımda  $T_{ij}(t)$ 'ye ait bir diferansiyel denklem elde edilip çözümü araştırılacaktır.

### 3. Adım :

(6.20) çözümü (6.5) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^\alpha T_{ij}(t)}{dt^\alpha} \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \\ &= c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2}{dr^2} \left\{ J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right\} \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right\} \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) \right\} J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right] T_{ij}(t) + f(r, z, t) \end{aligned} \quad (6.21)$$

sonucuna ulaşılır. (6.14), (6.9) denkleminin çözümü olduğundan denklemi sağlayacaktır. O halde

$$\frac{d^2}{dr^2} \left\{ J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right\} + \left(\frac{\psi_j}{R}\right)^2 J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) = 0$$

veya

$$\frac{d^2}{dr^2} \left\{ J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right\} = -\left(\frac{\psi_j}{R}\right)^2 J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \quad (6.22)$$

sonucuna ulaşılır. (6.22) eşitliği (6.21) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^{\alpha} T_{ij}(t)}{dt^{\alpha}} \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \\
&= c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ -\left(\frac{\psi_j}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) - \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \right] T_{ij}(t) \\
&+ f(r, z, t) \tag{6.23}
\end{aligned}$$

olacaktır. (6.23) eşitliğinin her iki yanını  $\frac{1}{\sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right)}$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^{\alpha} T_{ij}(t)}{dt^{\alpha}} J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \\
&= -c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{\psi_j}{R}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \right] J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) T_{ij}(t) \\
&+ \frac{1}{\sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right)} f(r, z, t) \tag{6.24}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (6.24) eşitliğinin her iki tarafını  $r J_0\left(\frac{\psi_k}{R} r\right)$ , ( $k=1, 2, \dots, \infty$ ) ile çarpılıp 0'dan  $R$ 'ye kadar integral alınır

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^{\alpha} T_{ij}(t)}{dt^{\alpha}} \int_0^R r J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) J_0\left(\frac{\psi_k}{R} r\right) dr \\
&= -c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{\psi_j}{R}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \right] \int_0^R r J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) J_0\left(\frac{\psi_k}{R} r\right) dr \\
&+ \frac{1}{\sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\psi_k}{R} r\right) f(r, z, t) dr \tag{6.25}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.  $J_0$  fonksiyonunun ortagonallik özelliği

$$\int_0^1 x J_0(\psi_i x) J_0(\psi_j x) dx = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \frac{J_1^2(\psi_j)}{2} & , i = j \end{cases} \quad (6.26)$$

biçimindedir. (6.26) kullanılarak ve  $x = \frac{r}{R}$  dönüşümü yapılarak (6.25) deki

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\psi_i}{R} r\right) J_0\left(\frac{\psi_k}{R} r\right) dr, \quad (i, k = 1, 2, \dots, \infty)$$

integrali

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\psi_i}{R} r\right) J_0\left(\frac{\psi_k}{R} r\right) dr = R^2 \begin{cases} 0 & , i \neq k \\ \frac{1}{2} J_1^2\left(\frac{\psi_i}{R}\right) & , i = k \end{cases} \quad (6.27)$$

biçiminde elde edilir. O halde, (6.27) sonucu (6.25) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^\alpha T_{ij}(t)}{dt^\alpha} R^2 \frac{1}{2} J_1^2\left(\frac{\psi_j}{R}\right) \\ &= -c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{\psi_j}{R}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \right] R^2 \frac{1}{2} J_1^2\left(\frac{\psi_j}{R}\right) T_{ij}(t) \\ &+ \frac{1}{\sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) f(r, z, t) dr \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha T_{ij}(t)}{dt^\alpha} = & -c^2 \left[ \left( \frac{\psi_j}{R} \right)^2 + \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] T_{ij}(t) \\ & + \frac{2}{R^2 J_1^2 \left( \frac{\psi_j}{R} \right) \sin \left( \frac{i\pi}{L} z \right)} \int_0^R r J_0 \left( \frac{\psi_j}{R} r \right) f(r, z, t) dr \end{aligned} \quad (6.28)$$

sonucuna ulaşılır. (6.28) kesirli diferansiyel denklemi için başlangıç koşulları

$$T_{ij}(0) = \frac{dT_{ij}}{dt}(0) = 0 \quad (6.29)$$

dır. Elde edilen diferansiyel denklem ise iki terimli kesirli diferansiyel denklemdir. O halde, bu diferansiyel denklemin kesirli Green fonksiyonu

$$\begin{aligned} Q_{ij}(t) = & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + c^2 \left[ \left( \frac{\psi_j}{R} \right)^2 + \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \right]} \right\} \\ = & t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left\{ -c^2 \left[ \left( \frac{\psi_j}{R} \right)^2 + \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] t^\alpha \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

ve çözümü

$$T_{ij}(t) = \int_0^t Q_{ij}(t-\tau) F_{ij}(t) d\tau \quad (6.31)$$

dır. Burada  $F_{ij}(t)$  olarak adlandırılan

$$F_{ij}(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2 \left( \frac{\psi_j}{R} \right) \sin \left( \frac{i\pi}{L} z \right)} \int_0^R r J_0 \left( \frac{\psi_j}{R} r \right) f(r, z, t) dr \quad (6.32)$$

fonksiyonudur. Sonuç olarak  $T_{ij}(t)$  çözümü (6.20) de yazılırsa

$$u(r, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\psi_j}{R} r\right) \sin\left(\frac{i\pi}{L} z\right) \int_0^t Q_{ij}(t-\tau) F_{ij}(\tau) d\tau \quad (6.33)$$

elde edilir. Böylece problemin kapalı formdaki analitik çözümü bulunmuştur. Analitik çözümlerin  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$  değerleri için hesaplanması sırası ile aşağıdaki biçimde verilmiştir.

$\alpha = 1$  olması durumunda,

$$u(r, z, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{2J_0(\psi_j r)}{\psi_j J_1(\psi_j) [(\psi_j)^2 + (i\pi)^2]} \left\{ 1 - e^{-c^2 [(\psi_j)^2 + (i\pi)^2] t} \right\} \quad (6.34)$$

ve  $\alpha = 2$  olması durumunda,

$$u(r, z, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{2J_0(\psi_j r)}{\psi_j J_1(\psi_j) [(\psi_j)^2 + (i\pi)^2]} \left\{ -\cos\left(\sqrt{[(\psi_j)^2 + (i\pi)^2]} t\right) + 1 \right\} \quad (6.34)$$

Problemin analitik çözümünün yanı sıra nümerik çözümünün bulunabilmesi için “Grünwald-Letnikov Yaklaşımı” olarak adlandırılan ve aşağıdaki biçimde açıklanan bir nümerik yaklaşım kullanılacaktır.

#### 6.4 Grünwald-Letnikov Yaklaşımı ile Problemin Nümerik Çözümü

Grünwald-Letnikov nümerik yaklaşımı kullanılarak yukarıda analitik çözümlerine ulaşılan problemin nümerik çözümleri elde edilir. Bunun için aşağıdaki biçimde tanımlanan ve problemin formülasyonunda ortaya çıkan kesirli diferansiyel denklem ile tanımlanan başlangıç-değer problemi göz önüne alınır. O halde başlangıç-değer problemi  $0 < \alpha < 2$  olmak üzere,



$$D_t^\alpha T(t) + AT(t) = f(t), \quad (t > 0) \quad (6.35)$$

kesirli diferansiyel denklemi ve

$$T(0) = \frac{dT}{dt}(0) = 0 \quad (6.36)$$

başlangıç koşulları ile tanımlansın. (6.35) diferansiyel denklemi “Gevşeme salınımı denklemi” olarak adlandırılır. Bu başlangıç-değer probleminin çözümü Grünwald-Letnikov yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki biçimde 4 adımda elde edilir.

### 1.Adım:

Problemin tanımlandığı zaman aralığı eşit ve “h” uzunluklu alt aralığa ayrılır.

### 2.Adım:

Her bir  $j$ 'inci andaki “ ${}_0D_t^\alpha T(t)$ ” türev değeri Grünwald-Letnikov formülü kullanılarak

$${}_0D_t^\alpha T(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^m w_j^{(\alpha)} T_{m-j} \quad (6.37)$$

biçiminde hesaplanır. Buradaki  $q_j$  değerleri her bir  $j$  anındaki nümerik olarak hesaplanan  $q$  değerleridir ve  $w_j^{(\alpha)}$  değerleri aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \\ w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

### 3.Adım:

(6.37) ile verilen yaklaşım kullanılarak  $\alpha$ 'nın farklı değer aralıkları için başlangıç-değer probleminin nümerik çözümleri 2 durum altında elde edilir.

**1. Durum :**  $0 < \alpha < 1$  ve  $T(0) = 0$  olması durumunda elde edilen nümerik çözüm

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m w_j^{(\alpha)} T_{m-j} + AT_m = f_m, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (6.38)$$

biçimindedir.

**2. Durum :**  $1 < \alpha < 2$  ve  $T(0) = \frac{dT}{dt}(0) = 0$  olması durumundaki nümerik çözüm

$$T_m = -Ah^\alpha T_{m-1} - \sum_{j=1}^m w_j^{(\alpha)} T_{m-j} + h^\alpha f_m, \quad (m = 2, 3, \dots) \quad (6.39)$$

olarak elde edilir.

### 4.Adım:

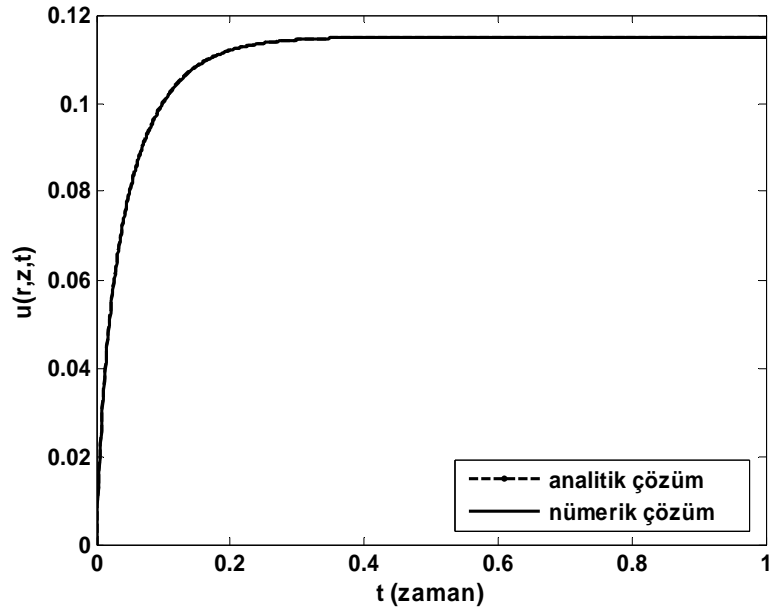
Sonuç olarak (6.38) ve (6.39) sonuçları kullanılarak her bir  $m$  anındaki  $T_m$  çözümleri elde edilmiş olur.

Şimdi analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması, problemin tanımlanmasında yer alan çeşitli parametrelerin değişimi durumunda sistemin verdiği cevapların fiziksel olarak yorumlanması ve bulunan tüm sonuçların değerlendirilmesi amacı ile MATLAB programı kullanılarak elde edilen simülasyonlar analiz edilecektir.

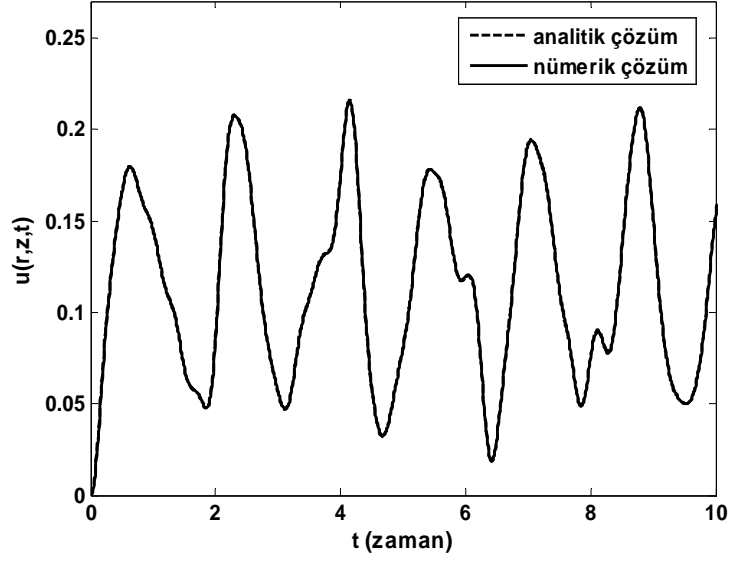
## 6.5 Simülasyon Sonuçları ve Yorumlanması

Öncelikle problemin tanımlanmasında, parametrelerin  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $z \in [0, L]$ ,  $r \in [0, R]$  ve  $t > 0$  olarak tanımlandığı hatırlanmalıdır. Sonrasında, hesaplamalarda kolaylık olması açısından  $R = L = c = f(r, z, t) = 1$  varsayımı yapılmıştır. Simülasyon sonuçlarında da görüleceği gibi  $M, h$  ve  $\alpha$  değişkenleri sırası ile Bessel fonksiyonunun sıfırlarının sayısı, adım uzunluğu ve kesirli türevin mertebesini ifade eder. Bu değişkenlerin sistemin cevabına olan etkileri aşağıdaki şekillerle ve açıklamalarıyla verilmiştir.

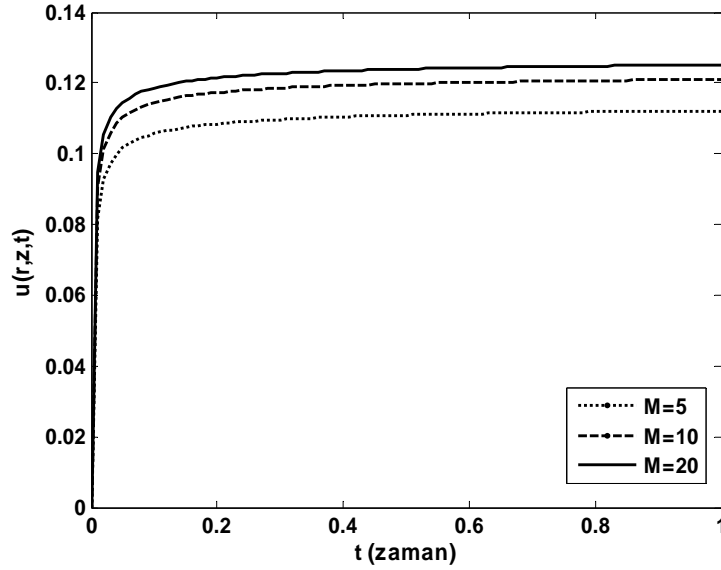
Şekil 6.1 ve Şekil 6.2 de  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$  olması durumunda elde edilen analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırılması verilmiştir. Görünen odur ki analitik ve nümerik çözümler birbiri ile tam olarak örtüşmektedir. Bu ise kullanılan nümerik yaklaşımın gerçeğe ne kadar yakın sonuç verdiğini gösterir.



Şekil 6.1  $\alpha = 1, r = 0.5, z = 0.3, M = 5$  ve  $h = 0.001$

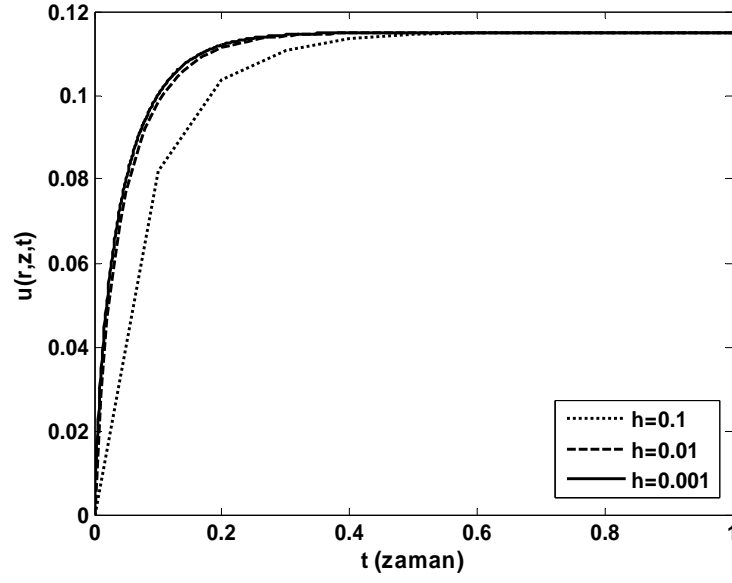


Şekil 6.2  $\alpha = 2, r = 0.5, z = 0.3, M = 5$  ve  $h = 0.01$



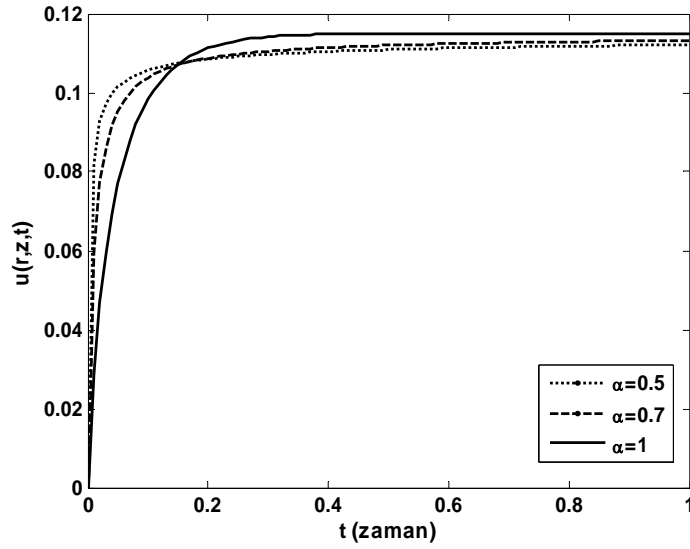
Şekil 6.3  $\alpha = 0.5, r = 0.5$  ve  $z = 0.3$

Şekil 6.3 de  $M$  değerlerinin değişiminin sistemin cevabındaki etkisi görülmektedir. Görünen odur ki  $M$  değeri arttıkça elde edilen sonuçlar birbirine ve aynı zamanda gerçek çözüme yaklaşır ve  $M$ 'nin 20'den büyük değerler alması durumunda elde edilen sonuçlar birbiri ile tamamen örtüştüğünden  $M$ 'nin değişimi sadece 20'ye kadar olan değerler için gözlenmiştir.



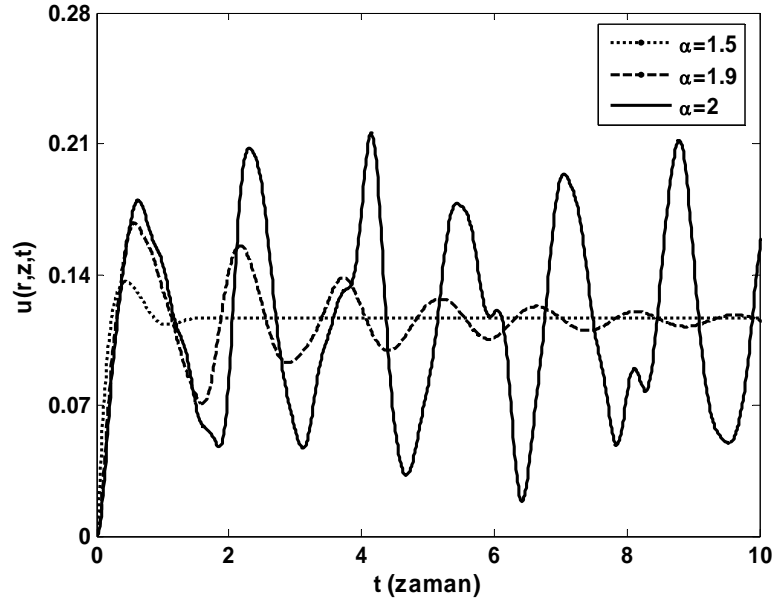
Şekil 6.4  $\alpha=1, r=0.5$  ve  $z=0.3$

Şekil 6.4 adım uzunluğu ( $h$ ) değişiminin sistemin cevabına olan etkisini göstermektedir. Adım uzunluğu küçüldükçe hassasiyet artar ve gerçek çözüme yaklaşılır.



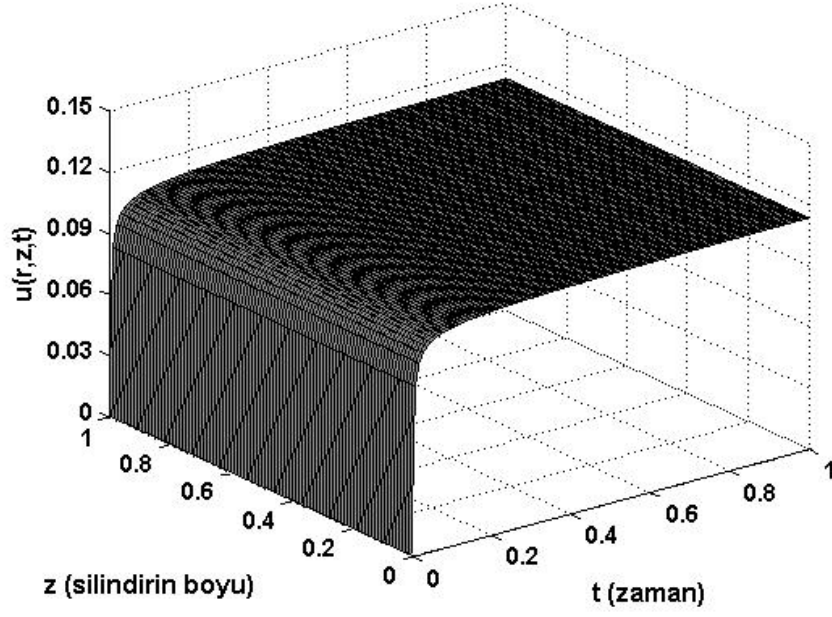
Şekil 6.5  $r=0.5, z=0.3, M=5$  ve  $h=0.01$

Şekil 6.5 de kesirli türevin mertebesinin  $0 < \alpha < 1$  aralığındaki değişimi gözlenmiştir. Burada sistemin davranışı  $\alpha = 0.5$  olması durumunda yavaş yayılımı ifade eder.  $\alpha = 1$  olması durumunda ise sistem yayılım hareketi göstermektedir. O halde çıkarılan sonuç şudur ki sistem yavaş yayılımdan yayılım davranışına doğru geçiş göstermektedir.



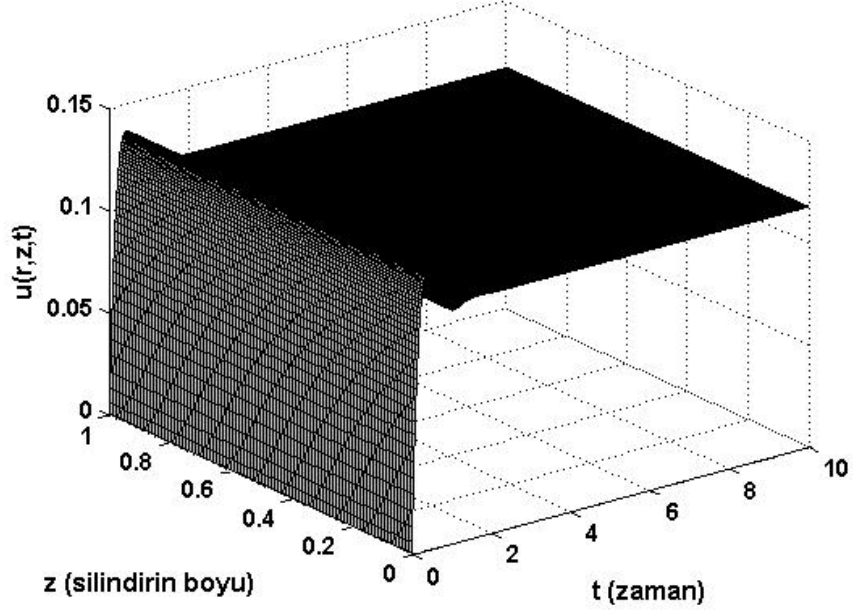
Şekil 6.6  $r = 0.5, z = 0.3, M = 5$  ve  $h = 0.01$

Şekil 6.6 da Şekil 6.5 dekine benzer olarak  $\alpha$ 'nın değişimi incelenmiştir. Burada  $1 < \alpha < 2$  olması durumu göz önüne alınmıştır. Görünen odur ki sistem,  $\alpha = 1.5$  olması durumunda yayılım-dalga davranışını gösterirken  $\alpha = 2$  olduğunda tam bir salınım yaparak dalga hareketi gösterir.



Şekil 6.7  $\alpha = 0.5, r = 0.5, M = 5$  ve  $h = 0.01$

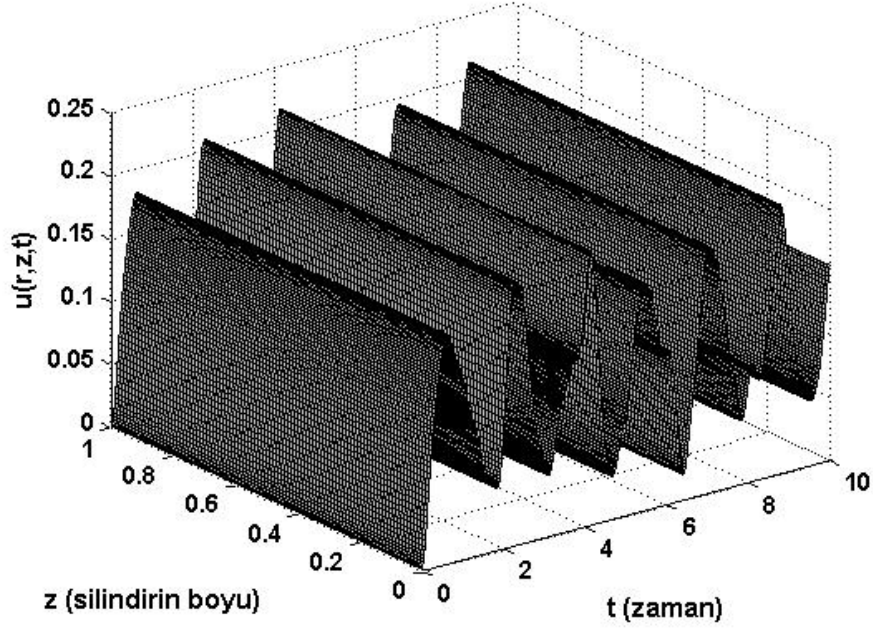
Şekil 6.7 de sistemin gösterdiği yavaş yayılım hareketinin 3-boyutlu simülasyonu verilmiştir. Sistem  $0 < t \leq 0.1$  zaman aralığında çok hızlı bir yayılım davranışı sergilerken sonraki zamanlarda yavaşlar ve daha düzgün bir davranış sergiler.



Şekil 6.8  $\alpha = 1.5, r = 0.5, M = 5$  ve  $h = 0.01$

Şekil 6.8 da sistem yayılım-dalga hareketi gösterir. Bu durumda sistemin yaklaşık  $t = 1$  anındaki bir sıçramadan sonra daha düzgün bir davranış sergilediği görülür.





Şekil 6.9  $\alpha = 2, r = 0.5, M = 5$  ve  $h = 0.01$

Sistemin  $\alpha = 2$  olması durumunda en son gösterdiği davranış Şekil 6.8 de verilmiştir. Sistem burada tam bir salınım yaparak harmonik bir dalga hareketi gösterir.

Dikkat edilirse yukarıda verilen 2-boyutlu simülasyon sonuçları zaman ( $t$ ) değişkenine bağlı olarak sistemin gösterdiği davranışlardır. Benzer sonuçlar  $z$  ve  $r$  değişkenlerine bağlı olarak da elde edilebilir. Yine benzer şekilde 3-boyutlu simülasyon sonuçları  $z$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerine bağlı olarak gözlenmiştir. Benzer simülasyonlar  $r$ 'nin değişken olması durumu için de elde edilebilir.

## 7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmanın altı ana bölümünün değerlendirilmesi aşağıda yapılmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olmakla birlikte bu bölümde genel anlamda kesirli analiz kavramı açıklanmış; daha özel halde kesirli türevlerin başlıcalarından bahsedilmiş ve kesirli türeve fiziksel bir bakış açısı ortaya konmuştur.

İkinci bölüm kesirli analizin tarihsel gelişim süreciyle başlamıştır. Aynı zamanda kesirli analizin uygulandığı başlıca problem türlerinden ve neden kesirli analize ihtiyaç duyulduğundan bahsedilmiştir. Diğer bir deyişle kesirli analizin klasik analize tercih edilme nedenlerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde kesirli analizin bazı temel fonksiyonları olan Gamma ve Mittag-Leffler fonksiyonları tanımlanmıştır. Öncelikle kesirli integralin çıkışı açıklanmış ve sonrasında Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov gibi uygulamada sıkça kullanılan kesirli türev tanımlarına ve tanımlar arasındaki geçişlere yer verilmiştir. Bunların yanı sıra Laplace dönüşümü tanımlanmış ve kesirli analiz ile olan bazı temel bağlantıları açıklanmıştır.

Dördüncü bölüm kesirli diferansiyel denklemlerin sınıflandırıldığı bölümdür. Kesirli diferansiyel denklem çözümlerinin varlığını ve tekliğini ifade eden önemli teoremlere yer verilmiştir. Tezde ele alınan ve çözümü aranan problemde de kullanılan Laplace dönüşüm metodu bazı diferansiyel denklem örnekleri üzerinde açıklanmıştır. Son olarak yine kesirli diferansiyel denklem çözümlerinde ortaya çıkan kesirli Green fonksiyonu tanımlanmış ve bazı özel diferansiyel denklemler için Green fonksiyonları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde kesirli türevlerin nümerik hesaplama yöntemlerinden biri olan ve bu çalışmada da kullanılan Grünwald-Letnikov yaklaşımı açıklanmıştır.

Altıncı bölüm silindirik koordinatlarda tanımlanan bir kesirli yayılım-dalga probleminin çözümünün araştırıldığı bölümdür. Burada problemi tanımlayan diferansiyel denklem Riemann-Liouville kesirli türevleri ile tanımlanmıştır. Problemin başlangıç ve sınır koşulları homojen (sıfır) olarak verilmiştir. Değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak ana diferansiyel denklem üç ayrı tip diferansiyel denkleme ayrılmış ve her birinin çözümleri bulunmuştur. Bunlar sırası ile Bessel, adi ve kesirli diferansiyel denklemlerdir. Kesirli türevin mertebesinin  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$  olması durumları için analitik (tam/kesin) çözümleri elde edilmiştir. Grünwald-Letnikov nümerik yaklaşımı kullanılarak problemin çözümü yapılmış ve analitik çözümlerle karşılaştırılması analiz edilmiştir. Bu amaçla ise MATLAB programından yararlanılmış ve problemin bazı önemli parametrelerindeki değişimin çözümlere katkısını ifade eden simülasyon sonuçları elde edilmiştir. Sonuç olarak görülen odur ki seçilen nümerik yaklaşım bu türdeki bir problemin çözümü için oldukça uygundur. Bu sonuca ulaştıran nokta ise analitik ve nümerik çözümlerdeki birebir örtüşmedir. Çünkü bilinen odur ki kesirli analizde nümerik yaklaşımlar oldukça önemlidir. Bunun nedeni, her zaman problemin analitik (tam/kesin) çözümüne ulaşmak mümkün olmayabilir. Bu durumda problemin türüne en uygun olan nümerik bir yaklaşım kullanılarak analitik çözüme en yakın çözüm aranılır. Aynı zamanda problemin üç boyutlu uzayda tanımlanmış olması gerçek bir fiziksel probleme karşılık gelmesine sebep olmuştur. Örneğin; bu problem silindirik bir bölgedeki ısı akışını ifade edebilir ya da bir zarın titreşim hareketini gösterebilir. Bu yüzden aslında yapılan çalışma gerçek bir problemin çözümüdür.

## 8. KAYNAKLAR

[1] Podlubny, I., Fractional differential equations, Academic Pres, New York, (1999).

[2] Oldham, K.B., Spanier, J., The fractional calculus, Academic Pres, New York, (1974).

[3] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., Fractional integrals and derivatives-Theory and applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, (1993).

[4] Miller, K.S., Ross, B., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, Mew York, (1993).

[5] Hilfer, R., Applications of fractional calculus in physics, World Scientific, Singapore, (2000).

[6] Magin, R.L., "Fractional calculus in bioengineering", *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, (2004) **32 (1)**, 1.

[7] Mainardi, F., "Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics", *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, (1997), 291.

[8] Distefano, J.J., Stubberud, A.R., Williams, I.J., Schaum's outline of theory and problems of feedback and control systems, McGraw-Hill, (1995)

[9] Nigmatullin, R.R., "To the theoretical explanation of the universal response", *Physica B*, (1984) **123**, 739.

[10] Wyss, W., "The fractional diffusion equation", *Journal of Mathematical Physics*, (1986) **27**, 2782.

[11] Giona, M., Cerbelli, S., Roman, H.E., "Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials", *Physica A*, (1992) **191**, 449.

[12] Roman, H.H, Alemany, P.A., "Continuous-time random walks and the fractional diffusion equation", *Journal of Physics A*, (1994) **27**, 3407.

- [13] Mainardi, F., Paradisi, P., Model of diffusive waves in viscoelasticity based on fractional calculus, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, (1997), 4961.
- [14] Agrawal, O.P., “A general solution for the fourth-order fractional diffusion-wave equation”, *Fractional Calculation and Applied Analysis*, (2000) **3**, 1.
- [15] Agrawal, O.P., “A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in abounded domain”, *Computers&Structures*, (2001) **79**, 1497.
- [16] Hilfer, R., “Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives”, *Journal of Physical Chemistry B*, (2000) **104**, 3914.
- [17] Agrawal, O.P., “Reponse of a diffusion-wave system subjected to deterministic and stochastic fields”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, (2003) **83**, 265.
- [18] Özdemir, N., Agrawal, O.P., Karadeniz, D., İskender, B.B., Axis-symmetric fractional diffusion-wave problem: Part I-analysis, ENOC 2008, Saint Petersburg, (2008).
- [19] El-Shahed, M., Salem, A., “On the generalized Navier-Stokes equations”, *Applied Mathematics and Computation*, (2004) **156**, 287.
- [20] Povstenko, Y.Z, “Time-fractional radial diffusion in a sphere”, *Nonlinear Dynamics*, (2007) **53** 55.
- [21] Povstenko, Y.Z, “Fractional radial diffusion in a cylinder”, *Journal of Molecular Liquids*, (2008).**137** 46.