T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# RASTLANTISAL MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fikri CENGİZ**

**Balıkesir, Eylül-2007**

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# RASTLANTISAL MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fikri CENGİZ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

Sınav Tarihi: 12.09.2007

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (Danışman-BAÜ)

Yrd.Doç. Dr. Fatih SATIL (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (BAÜ)

Balıkesir, Eylül-2007

## ÖZET

**RASTLANTISAL MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ**

**Fikri CENGİZ**

**Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR)**

**Balıkesir, 2007**

Bu çalışmada Biyolojide Phyllotaxis Fenomeni olarak bilinen yaprakların dizilişinin matematiksel modellemesi ele alınmıştır. Colin Goodall 1991 yılında yayınlanan çalışmasında [9], Phyllotaxis'in cut-grow modeli denilen bir modelini, her bir üçgen bir primordiumu temsil etmek üzere, üçgenlerin bir dizisinin şekillerinin davranışının analizi vasıtasıyla çalışmıştır. Burada bağlantılı bir soru üçgen içinde üçgen çizilmesi problemidir [11, 12]. Karmakar, 2004 yılında yayınlanan çalışmasında [8], dönüşümlerin daha geniş bir sınıfı ile üretilen üçgenlerin bir dizisinin şekillerinin gelişimini çalışmıştır ki bu cut-grow modeli ve üçgenlerin içinde üçgen problemini içerir. Biz burada Karmakar'ın bu çalışmasını inceleyeceğiz. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ bütün Möbius dönüşümlerin kümesinde değerler alan rastlantısal değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu çalışmada, $z \in C_\infty = C \cup \{\infty\}$ (genişletilmiş kompleks düzlem) olmak üzere $S_n(z) = X_n \circ \ldots \circ X_1(z)$ ile tanımlanan $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini dikkate alacağız ve $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin yakınsaklığının gerek ve yeter şartlarını tartışacağız. Bunun bir uygulaması olarak $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde bir dizinin phyllotaxis'in bir matematik modelini genellemek için nasıl kullanılabileceğini göstereceğiz. Aynı zamanda $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin dağılımdaki yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçları tartışacağız.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez çalışmasının sonraki bölümlerinde kullanacağımız Möbius dönüşümlerinin temel özellikleri, hemen hemen kesin yakınsaklık, Kolmogorov 0-1 kanunu gibi bazı temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde cut-grow modeli ve üçgen içinde üçgen problemi ele alınmış, rastlantısal Möbius dönüşümlerinin birleşimleri incelenmiştir.

Üçüncü Bölümde ise $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin dağılımdaki yakınsaklığına ait bazı sonuçları tartışılmıştır.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER:** Rastlantısal Möbius dönüşümleri, phyllotaxis, cut-grow modeli.

## ABSTRACT

**RANDOM MÖBIUS TRANSFORMATIONS**



**Fikri CENGİZ**

**Balıkesir University, Institute of Science,**
**Department of Mathematics**

**(MSc. Thesis / Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR)**

**Balıkesir, Turkey–2007**



In this study, the mathematical model of the arrangement of leaves, which is known as Phyllotaxis Phenomenon in biology, has been analyzed. Colin Goodall, in his study in 1991 [9], had studied a model of phyllotaxis which is called the cut-grow model via an analysis of the behavior of shapes of a sequence of triangles where each triangle represented a primordium. A related question is the problem of drawing triangles inside of triangles [11, 12]. Karmakar, in his study [8] studied on the evolution of the shapes of a sequence of triangles produced by larger class of transformations which includes the cut-grow model and the triangles inside triangles problem. We are going to examine this study by Karmakar. Let $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of i.i.d. random variables taking values in the set of all Möbius transformations. In this study, we consider the sequence $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ defined by $S_n(z) = X_n \circ \ldots \circ X_1(z)$ where $z \in C_\infty = C \cup \{\infty\}$ (extended complex plane) and discuss necessary and sufficient conditions for almost surely convergence of $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. As an application we will see how a sequence of the form $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ may be used to generalize a mathematical model of phyllotaxis. Meanwhile, some results related with the convergence in distribution of the sequence $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ have been discussed.

This study consists of three chapters.

In the first chapter, some basic concepts like the basic properties of Möbius transformations, almost surely convergence and Kolmogorov 0-1 Law, which will be used in the next chapters, have been mentioned.

In the second chapter, cut-grow model and the problem of triangles inside triangles have been studied and compositions of random Möbius transformations have been investigated.

In the third chapter, some results related with the convergence in distribution of the sequence $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ have been discussed.

**KEY WORDS:** Random Möbius transformations, phyllotaxis, cut-grow model.

# İÇİNDEKİLER

## SEMBOL LİSTESİ

| Simge | Adı | Tanımı/Değeri |
|---|---|---|
| R | Reel Sayılar Kümesi | |
| C | Kompleks Sayılar Kümesi | |
| $C_\infty$ | Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesi | |
| GL(2,C) | Genel lineer grup | |
| SL(2,C) | Özel lineer grup | |
| PGL(2,C) | Projektif genel lineer grup | |
| PSL(2,C) | Projektif özel lineer grup | |
| $\mathrm{Aut}(C_\infty)$ | $C_\infty$'un otomorfizmleri kümesi | |
| ε | $\vec{1}$ in kompleks katlarının kümesi | |
| (Ω, Y, P) | Olasılık uzayı | |
| P(A) | A kümesinin olasılık ölçüsü | |
| X | Rastlantısal değişken | |
| E(X) | Rastlantısal değişkenin beklenen değeri | |
| $\varsigma(\alpha)$ | $\alpha$'nın şekli | |

| Simge | Adı | Tanımı/Değeri |
| --- | --- | --- |
| $L_{[G]}$ | $[G]$ stochastic matrisine karşılık gelen möbiüs dönüşümü | |
| $\Lambda$ | $C_\infty \to C_\infty$ tüm kesirli lineer dönüşümlerin kümesi | |
| $\Lambda(z_0)$ | Sabit noktalarından biri $z_0$ olan tüm kesirli lineer dönüşümlerin kümesi | |
| $L'(z)$ | $L(z)$ dönüşümünün türev dönüşümü | |
| $\Lambda(z_1, z_2)$ | Sabit noktaları $z_1$ ve $z_2$ olan tüm kesirli lineer dönüşümlerin kümesi | |
| $\|M$ | M, 2x2 tipinde reel matrisinin $\| M = \sqrt{iz\left(M.M^T\right)}$ şeklinde tanımlanan normu | |

**ŞEKİL LİSTESİ**

**ÖNSÖZ**

Tezimi hazırlamakla geçirdiğim yoğun çalışma sürecinde, deneyim ve bilgileriyle beni yönlendiren, değerli zamanını ayırıp ilgisini esirgemeyen sevgili hocam ve danışmanım Doç. Dr. Nihal Yılmaz ÖZGÜR'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

**Balıkesir, 2007** **Fikri CENGİZ**

# 1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

## 1.1 Möbius Dönüşümleri

### 1.1.1 Tanım:

2x2 lik bir kompleks matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ; $a, b, c, d \in C$ biçiminde olsun. A matrisinin determinantı det(A) ile gösterilir ve det(A) = ad-bc olarak tanımlanır.

### 1.1.2 Tanım:

A matrisi regülerdir. $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ olarak tanımlanır. Eğer A matrisi regüler ise A'nın tersi vardır ve $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dir. Ayrıca $A^{-1}$ de regülerdir.

Herhangi A ve B matrisleri için det(A.B) = det(A).det(B) = det(B.A) ve dolayısıyla $\det(B.A.B^{-1}) = \det(A.B.B^{-1}) = \det(A)$ dır. 2x2 lik kompleks regüler matrisler, matris çarpma işlemine göre bir grup oluştururlar. Bu gruba **Genel Lineer Grup** denir ve

$$GL(2,C) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in C \text{ ve } ad - bc \neq 0 \right\}$$

ile gösterilir.

GL(2,C) nin determinantı 1 olan matrislerinden oluşan gruba **Özel Lineer Grup** denir ve

$$SL(2,C) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in C \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

ile gösterilir.

**1.1.3 Tanım:**

$C_\infty$ ile göstereceğimiz genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri; a, b, c, d $\in$ C ve ad-bc $\neq$ 0 olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu özellikteki bir w = T(z) dönüşümüne **Doğrusal Dönüşüm, Kesirli Lineer Dönüşüm** ya da **Möbius Dönüşümü** denir. Bu dönüşümlerin kümesi fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup Aut($C_\infty$) simgesiyle gösterilir.

T(z) dönüşümü $a, b, c, d \in C$ katsayılarını bir tek biçimde belirlemez. Bunu

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{kaz + kb}{kcz + kd} \quad (k \neq 0 \text{ , } k \in C)$$

şeklinde kolayca görebiliriz. Ancak $a, b, c, d \in C$ , $ad - bc \neq 0$ verildiğinde bu bir tek $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ dönüşümü belirler.

Tanımdaki $\Delta = ad - bc$ ifadesine **Dönüşümün Belirteci** denir. $\Delta \neq 0$ olması $\Delta = 1$ olmasına denktir. Çünkü $\Delta \neq 0$ olduğunda T(z) nin payı ve paydası $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünerek $a'd' - b'c' = 1$ bulunur.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\dfrac{a}{\pm\sqrt{\Delta}} + \dfrac{b}{\pm\sqrt{\Delta}}}{\dfrac{c}{\pm\sqrt{\Delta}} + \dfrac{d}{\pm\sqrt{\Delta}}} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

$$a'd' - b'c' = \left(\frac{a}{\pm\sqrt{\Delta}}.\frac{d}{\pm\sqrt{\Delta}}\right) - \left(\frac{b}{\pm\sqrt{\Delta}}.\frac{c}{\pm\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{ad-bc}{\Delta} = 1$$

Doğrusal dönüşümler ve matrisler arasında sıkı bir bağlantı vardır. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $U(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ dönüşümlerini alalım. Bu dönüşümler $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ matrislerini belirtir. $MN = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$ çarpım matrisi de $T \circ U$ dönüşümünü belirtir. Böylece GL(2,C) kümesi ile Aut($C_\infty$) arasında sıkı bir bağ vardır.

$\theta : GL(2,C) \to Aut(C_\infty)$ dönüşümünü $\theta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T$ , $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklinde tanımlayalım. $\theta(MN) = T \circ U = \theta(M) \circ \theta(N)$ olduğu görülür. Yani $\theta$, işlem koruyandır. Böylece $\theta$, bir grup homomorfizmi olur. Ayrıca $\theta : GL(2,C) \to Aut(C_\infty)$ üzerine olduğundan $\theta$, bir epimorfizmadır. $\theta$'nin çekirdeği;

$$\begin{aligned} K = \ker\theta &= \{V \in GL(2,C) : \theta(V) = I\} \\ &= \left\{V \in GL(2,C) : \frac{az+b}{cz+d} = z, \forall z \in C_\infty\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,C) : a = d = \lambda,\ b = c = 0,\ \lambda \in C - \{0\}\right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in C - \{0\} \right\}$$

$$= \{ \lambda I : \lambda \in C - \{0\},\ I, \text{birim matris} \}$$

kümesidir. $\theta$, dönüşümüne 1. izomorfizm teoremini uygularsak $GL(2,C) / \ker\theta \cong Aut(C_\infty)$ elde edilir. $GL(2,C) / \ker\theta$ Bölüm grubu için PGL(2,C) simgesi kullanılır ve **Projektif Genel Lineer Grup** denir.

Her $M, N \in GL(2,C)$ için det( M.N ) = det(M).det(N) olduğundan $\det : GL(2,C) \to C / \{0\}$ dönüşümü işlem koruyandır. Dolayısıyla det dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

$$\ker(\det) = \{ V \in GL(2,C) : \det(V) = 1 \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2,C) : ad - bc = 1 \right\}$$

dir. Bu grubu SL(2,C) simgesi ile göstereceğiz. SL(2,C) ye Özel Lineer Grup denir. 1. izomorfizm teoreminden $GL(2,C) / SL(2,C) \cong C / \{0\}$ olur.

Her $N \in GL(2,C)$ için $k^2 = \det(N)$ ve $M \in SL(2,C)$ olmak üzere N = kM yazılabilir. $\theta(N) = \theta(M)$ dir. Dolayısıyla her $T \in Aut(C_\infty)$ dönüşümü,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ ; \ a, b, c, d \in C \ \text{ve}\ ad - bc = 1$$

biçiminde yazılabilir. Yani $\theta$ dönüşümü SL(2,C) yi $Aut(C_\infty)$ üzerine resmeder. O halde SL(2,C) nin $GL(2,C) / \ker\theta$ bölüm grubundaki resmi PSL(2,C) olmak üzere PGL(2,C) = PSL(2,C) olur. PSL(2,C) ye **Projektif Özel Lineer Grup** denir. Böylece,

$$\mathrm{Aut}(C_\infty) \cong PGL(2,C) = PSL(2,C)$$

elde edilir.

**1.1.4 Tanım:**

Bir $T \in PGL(2,C)$ dönüşümünün sabit noktası diye $T(z) = z$ yani $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$ eşitliğini sağlayan z noktasına denir.

**1.1.5 Teorem [2]:**

Bir doğrusal dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır.

**1.1.6 Sonuç:**

Sabit noktası ikiden fazla olan tek doğrusal dönüşüm birim dönüşümdür. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in PSL(2,C)$ dönüşümleri iki sabit noktalı ve tek sabit noktalı diye ikiye ayrılır.

$c \neq 0$ olsun. Varsayalım ki $z_1, z_2$ sonlu sabit noktalardır. $T(\infty) = \dfrac{a}{c}$ dir. $z,\ z_1,\ z_2,\ \infty$ noktalarını sırasıyla $T(z),\ z_1,\ z_2,\ \dfrac{a}{c}$ noktalarına dönüştüren T dönüşümünü, çapraz oranların eşitliğinden

$$\frac{T(z)-z_1}{T(z)-z_2} = K.\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

şeklinde elde ederiz. Burada $K = \dfrac{a-cz_1}{a-cz_2}$ dir. Bu K' ya **Dönüşümün Çarpanı** denir.

$c = 0$ olsun. Bu durumda dönüşüm $T(z) = \dfrac{az+b}{d}$ , ad=1 şekline gelir. Benzer şekilde bu dönüşümün sabit noktalarından birisi $\infty$, $a \neq b$ iken diğeri de $z_1 = \dfrac{d}{b-a}$ dır. $z, \infty, z_1, -\dfrac{b}{a}$ noktalarını sırasıyla $T(z), \infty, z_1, 0$ noktalarına resmeden T dönüşümü, çapraz oranların eşitliğinden

$$T(z) - z_1 = K(z - z_1)$$

şeklinde elde edilir. Burada $K = \dfrac{a}{d}$ dir.

Bir T(z) dönüşümünü K çarpanına bağlı olarak yazmanın avantajı dönüşümün kuvvetini hesaplamada gösterdiği kolaylıktır. Yani $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklinde bir dönüşüm verildiğinde $T^n(z)$ yi doğrudan hesaplamak pratik değildir. Halbuki bu dönüşüm sabit noktaları $z_1$ ve $z_2$ nin her ikisinin de sonlu veya birinin sonlu olması halinde

$$\frac{T(z)-z_1}{T(z)-z_2} = K\,\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

veya

$$T(z) - z_1 = K\,(z - z_1)$$

şeklinde yazılabileceğinden ve $T^n$ in sabit noktaları da $z_1$ ve $z_2$ olacağından $T^n$ in şu şekilde yazılacağı açıktır:

$$\frac{T(z)-z_1}{T(z)-z_2} = K^n\,\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

veya

$$T(z) - z_1 = K^n (z - z_1).$$

**1.1.7 Teorem [3]:**

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ; a, b, c, d $\in$ C ve ad-bc = 1 olmak üzere T dönüşümünün sabit noktaları $z_1$ ve $z_2$ olmak üzere $K = \dfrac{1}{T'(z_2)}$ dir.

Möbius Dönüşümleri hakkında daha ayrıntılı bilgi için [1, 2, 3] kaynaklarından faydalanılabilir.

### 1.2 Phyllotaxis Fenomeni

Botanikte yaprakların dizilişi **Phyllotaxis Fenomeni** olarak bilinir. Bu dört tür olmaktadır.

**1.** Sarmal: Her düğümde bir yaprak

**2.** Karşıt: Her düğümde karşılıklı bir çift yaprak

**3.** Halka dizilişi: Her düğümde birden fazla yaprak

**4.** Çapraz: Birbirini takip eden düğümlerdeki yaprak çiftleri birbiriyle dik açılıdır.

Ardışık yaprakların düzeni bir kesirle belirtilir. Örneğin $\frac{2}{5}$ kesiriyle verilen phyllotaxi, 5 tane dik sıranın olduğunu, 6. sıradaki yaprağın 1. ile aynı sırada yer aldığını söyler. 2 ise 1. den 6. cıya kadar dal etrafında iki tur atıldığını söyler. Dolayısıyla $\frac{2}{5}.360 = 144^o$ iki yaprak arasındaki açıdır. Kısaca $\frac{p}{d}$ şeklindeki bir kesirde payda (d) düğümlerin kaç yaprakta bir aynı sırada yer aldığını pay (p) ise yaprağın aynı sıraya gelene kadar dal etrafında kaç kez döndüğünü gösterir.

Çeşitli bitkilerin phyllotaxileri şöyledir: Karaağaç $\frac{1}{2}$, kayın ve ayak otu $\frac{1}{3}$, meşe ve elma $\frac{2}{5}$, kavak $\frac{3}{8}$ , badem ve pırasa $\frac{5}{13}$ tür. Botanikçilere göre herhangi bir $\frac{p}{d}$ değeri $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{3}$ arasında yer alacağından birbirinden en az sapın uç çevresinin 3 te biri kadar ayrı duracaklar ve böylece de hem her yaprak maksimum hava ve ışık alacak hem de yapraklara besin ve su eşit oranda ulaşacaktır.

### 1.3 Olasılık Uzayı

**1.3.1 Tanım:**

$\Omega \neq \varnothing$ olmak üzere $\Omega$'nın alt kümelerinden oluşan kümeye $\Omega$'da bir **Sınıf** denir.

**1.3.2 Tanım: ($\sigma$-Cebiri)**

$\Omega \neq \varnothing$ ve Y, $\Omega$'da bir sınıf olsun.

**(a)** $\Omega \in Y$

**(b)** $\forall A \in Y$ için $\overline{A} \in Y$

**(c)** Y sınıfından alınan $A_1, A_2, ...$ kümeleri için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in Y$

koşullarını sağlayan Y sınıfına $\Omega$'da bir $\sigma-$**cebiri** denir.

**1.3.3 Tanım: (Olasılık Ölçüsü)**

$\Omega \neq \varnothing$ ve Y, $\Omega$'da bir $\sigma -$cebir olsun. $P: Y \rightarrow$ R fonksiyonu;

**(a)** $\forall A \in Y$ için $P(A) \geq 0$

**(b)** $P(\Omega)=1$

**(c)** Y'dan aldığımız her ayrık $A_1, A_2, \ldots$ kümeleri için $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

şartlarını sağlıyor ise P'ye bir **Olasılık Ölçüsü** denir. $A \in Y$ için P(A) sayısına **A'nın Olasılık Ölçüsü** ya da **A'nın Olasılığı** denir.

**1.3.4 Tanım: (Olasılık Uzayı)**

$\Omega \neq \varnothing$ ve Y, $\Omega$'da bir $\sigma -$cebiri olmak üzere P, Y üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsü ise ($\Omega$, Y, P) üçlüsüne **Olasılık Uzayı** denir.

**1.3.5 Tanım: (Rastlantısal Değişkenler)**

Bir Rastlantısal Değişken, belirli bir tanım aralığında hangi değeri alacağı önceden bilinmeyen ve bu değeri belli olasılıklarla alabilen değişkendir. Bu durumda rastlantısal değişkenin aldığı her değer için belirli olasılıklar vardır. X, rastlantısal değişken ve $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ rastlantısal değişkenin alabileceği değerler olsun. X, rastlantısal değişkenin herhangi bir x değerini alma olasılığı, p(X =x) şeklinde gösterilir.

Rastlantısal değişkenler alacakları değerler bakımından sürekli ya da kesikli rastlantısal değişkenler olarak adlandırılırlar.

**1.3.5.1 Tanım: (Kesikli Rastlantısal Değişken)**

X, bir rastlantısal değişken olsun. X'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise X'e **Kesikli Rastlantısal Değişken** denir.

### 1.3.5 2 Tanım: (Sürekli Rastlantısal Değişken)

X, rastlantısal değişkenin R'deki değer kümesi A, sayılamaz bir küme ise X'e **Sürekli Rastlantısal Değişken** denir.

### 1.3.6 Tanım: (Olasılık Fonksiyonu)

X, sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, ..., x_n$ değerlerini alan rastlantısal değişken ve bu değerlere karşılık gelen olasılıklar $f(x_i) = P(X = x)$, $i = 1, 2, ...$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f(x) fonksiyonuna X'in **Olasılık Dağılımı** ya da **Olasılık Fonksiyonu** denir.

**(a)** $\forall x$ için $f(x) \geq 0$

**(b)** $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

### 1.3.7 Tanım: (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu)

X, $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rastlantısal değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f(x) fonksiyonuna rastlantısal değişkeninin **Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu** denir.

**(a)** $f(x) \geq 0$ , $-\infty < 0 < +\infty$

**(b)** f(x) eğrisi altında kalan ve x ekseni ile sınırlanan alan 1'e eşittir.

Ayrıca özel olarak şu tanımı da yapabiliriz;

$x \notin A$ için $f(x) = 0$ olmak üzere her $(a, b) \subset A$ aralığı için

$$p(x \in (a, b)) = \int_a^b f(x)dx = 1$$

koşulunu sağlayan f(x)'e X'in **Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu** denir.

x değerini alan her f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu, X sürekli rastlantısal değişkeni ile bağlantılıdır. Fakat bu durumda f(x), x değerini alan X rastlantısal değişkeninin olasılığı değildir. X, rastlantısal değişkeninin ($-\infty < a < b < +\infty$), a ile b arasında bir değer alma olasılığı

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

dir. X sürekli rastlantısal değişkeninin belli bir x değerini alma olasılığı 0'dır. Yani;

$$p\left(X = x\right) = 0$$

dır.

**1.3.8 Tanım: (Bir Rastlantısal Değişkenin Beklenen Değeri)**

($\Omega$, Y, P) olasılık uzayı ve X, bir rastlantısal değişken olsun.

X, kesikli bir rastlantısal değişken olsun. X'in beklenen değerini şöyle gösterebiliriz:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + .......... + x_n f\left(x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \qquad (1.1)$$

(1.1) değerinin hesaplanabilmesi için X kesikli iken toplamın yakınsak olması gerekir.

X, sürekli bir rastlantısal değişken ise X'in beklenen değerini şöyle gösterebiliriz:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx \quad (-\infty\langle x\langle+\infty). \tag{1.2}$$

(1.2) değerinin hesaplanabilmesi için belirli integralin sonlu olması gerekir.

**1.3.8.1 Teorem [6]:**

$a, b \in R$ ve E(X), X rastlantısal değişkeninin beklenen değeri olmak üzere

$$E(aX+b)=a.E(X)+b$$

dir.

**1.3.9 Tanım: (Hemen Hemen Kesin)**

($\Omega$, Y, P) olasılık uzayı olsun. Y'daki bir A olayının olasılığı P(A) = 1 ise A, Y'da hemen hemen kesinlikle meydana gelir.

Kavram ölçü teorisindeki "hemen hemen her yerde" görüşüne benzerdir. Ölçü teorisi bakışı açısından bir diğer tanımlama şöyle yapılabilir;

P, $\Omega$ üzerinde bir ölçü olduğundan eğer hemen hemen her yerde A=$\Omega$ ise A, hemen hemen kesinlikle meydana gelir.

**1.3.10 Tanım: (Rastlantısal Değişkenlerin Dizisinin Yakınsaklığı)**

$\{X_k\}$, $k=1,2,...$ rastlantısal değişkenleri dizisini göz önüne alalım. Eğer $\forall\varepsilon\rangle 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \le \varepsilon)=1$$

ise, $\{X_k\}$ dizisinin X limit rastlantısal değişkenine yakınsadığı söylenir ve buna **Olasılıkta Yakınsaklık** denir. $X_n \to X$ biçiminde gösterilir.

$\{X_k\}$, $k = 1, 2, ...$ rastlantısal değişkenlerin dizisi için

$$P\left(\lim_{k\to\infty} X_k = X\right) = 1$$

ise, $\{X_k\}$ dizisinin X, rastlantısal değişkenine yakınsamasına **Hemen Hemen Kesin Yakınsaklık** adı verilir ve $X_n \to X$ **Hemen Hemen Kesin** biçiminde gösterilir.

$\{X_k\}$ dizisi X limit rastlantısal değişkenine hemen hemen kesin yakınsıyor ise olasılıkta yakınsaklığı sağlar, ancak tersi söylenemez.

$\{X_k\}$, $k = 1, 2, ...$ rastlantısal değişkenlerin dizisi olsun. Varsayalım ki $F_1, F_2, ...$ fonksiyonları, $X_1, X_2, ...$ rastlantısal değişkenlerine karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir dizisi ve *F*, X rastlantısal değişkenine karşılık gelen bir dağılım fonksiyonu olsun. *F* nin sürekli olduğu her *a* reel sayısı için

$$\lim_{k\to\infty} F_k(a) = F(a)$$

ise $\{X_k\}$ dizisi X e **Dağılımda Yakınsaktır** denir.

**1.3.11 Ön Teorem [4]: (Birinci Borel-Cantelli Ön Teoremi)**

$(A_n)$, Y'daki kümelerin herhangi bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \langle \infty$$

ise

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=0$$

dir.

**1.3.12 Ön Teorem [4]: (İkinci Borel Cantelli Ön Teoremi)**

$(A_n)$, Y'daki bağımsız olayların bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$$

ise

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=1$$

dir.

**1.3.12.1 Sonuç [4]:**

$(A_n)$, Y'daki bağımsız olayların bir dizisi olmak üzere $P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)$ olasılığı ya 0 ya da 1'dir.

**1.3.13 Kolmogorov 0–1 Kanunu [4]:**

($\Omega$, Y, P) olasılık uzayının $X_1, X_2, \ldots$ rastlantısal değişkenlerinin bir dizisi ile üretildiğini varsayalım. Herhangi bir E kuyruk olayı için ya $P(E)=1$ yada $P(E)=0$ dır.

**1.3.14 Tanım: (Markov Zinciri)**

$\forall\ 0 \le t_1 \langle t_2 \langle \ldots \langle t_n \langle t$ ve $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ için

$$P\left\{a \langle X(t) \le b \,\middle|\, X(t_1)=x_1; X(t_2)=x_2; \ldots; X(t_n)=x_n\right\} =$$

$$= P\left\{a \langle X(t) \le b \,\middle|\, X(t_n)=x_n\right\}$$

ise, bu taktirde X(t) sürecine **Markov Süreci** denir. Kesikli durum uzayına ve kesikli zaman parametresine sahip olan Markov süreçlerine **Markov Zincirleri** denir.

**1.3.15 Güçlü Büyük Sayılar Yasası [6]:**

$X_k$, $k=1,2,\ldots$ rastlantısal değişkenlerini göz önüne alalım. $\mu_k = E(X_k)$ olmak üzere, $\{X_k\}$ kümesi için,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - E(X_k)\right]}{n} \to 0 \text{ hemen hemen kesin}$$

limitinin sağlanmasına **Güçlü Büyük Sayılar Yasası** denir.

**1.3.16 Tanım: (Bağımsız ve Özdeş Dağıtılmış Dizi)**

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, Rastlantısal değişkenlerin bir dizisi olsun. Her birinin olasılık dağılımı aynı, karşılıklı olarak bağımsız ise $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine **Bağımsız ve Özdeş Dağıtılmış Dizi** denir.

**1.3.17 Tanım: (Stochastic Matris)**

Elemanları negatif olmayan gerçel sayılar ve her satırındaki elemanlarının toplamı 1'e eşit olan karesel matrise **Stochastic Matris** denir.

**1.3.18 Kingman'ın Subadditive Ergodic Teoremi [7]:**

($\Omega$, Y, P) olasılık uzayı olsun. T, $\Omega$'da bir ölçü göstersin ve $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$g_{n+m}(x) \leq g_n(x) + g_m(T^n x)$$

ise o zaman g(x), bir invaryant fonksiyon olduğunda,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{n} = g(x) \geq -\infty$$

dur.

Matematiksel İstatistik ve Stokastik Süreçler hakkında daha ayrıntılı bilgi için [4, 5, 6] kaynaklarından faydalanılabilir.

# 2. RASTLANTISAL MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN BİRLEŞİMLERİ

Goodall [9]'de cut-grow modeli denilen phyllotaxis'in bir modelini, her bir üçgen bir primordium'u temsil etmek üzere, üçgenlerin bir dizisinin şekillerinin davranışının analizi vasıtasıyla çalışmıştı. Cut-grow modeli, 2 parametre ile tam olarak belirlenebilir ve Goodall'ın hedeflerinden biri parametrelerin kümelerinin, bir limit şekle yakınsayan şekiller dizisi oluşturduğunu görmekti. Yakınsama var olduğunda şekillerin dizisinin düzgünleştiği söylenir. Goodall, cut-grow modelin parametrelerinin zamanla rastlantısal olarak değişiklikler göstermesine izin verildiği durumlarda düzgünleşmenin meydana gelip gelmeyeceği sorusunu ortaya attı. Aşağıda göstereceğiz ki rasgele durumda düzgünleşme olmayacaktır.

Burada bağlantılı bir soru üçgenlerin içinde üçgenlerin çizilmesidir (Problem Mannion [11,12]'de incelenmiştir). Bir üçgen verildiğinde yeni bir üçgenin köşeleri olacak şekilde verilen üçgenin içinde üç noktanın seçilmesidir. Bu yöntem tekrarlanabilir ve sonuçta elde edilecek üçgenin bazı karakteristik özellikleri çalışabilir.

Burada cut-grow modeli ve üçgen içindeki üçgen problemini içeren, dönüşümlerin daha geniş bir sınıfı ile üretilen üçgenlerin bir dizisinin şekillerinin gelişimini inceleyeceğiz.

## 2.1 Yönlendirilmiş Üçgen

Düzlemi kompleks sayıların kümesi olarak ve bir üçgeni üç tane doğrudaş olmayan (non-collinear) noktanın kümesi olarak göz önüne alacağız.

Bir doğru parçası, bir dejenere üçgeni temsil edecektir ki bu üçgenler köşeleri doğrudaş olan üçgenlerdir.

Cut-grow modelinde köşelerin sırası önemli bir rol oynar. Bu nedenle kompleks sayıların en az iki farklı elemandan oluşan herhangi bir sıralı üçlüsü bir yönlendirilmiş üçgen (o-üçgen) olarak adlandırılacaktır. Şimdiden sonra $C^3$'ün elemanlarını küçük yunan harfleri ile göstereceğiz ve bunları sütun vektörleri olarak düşüneceğiz. Kompleks sayıları küçük Roma harfleri temsil edecek. Bundan dolayı;

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

yazabiliriz.

$\vec{1}$, her bir elemanı 1'e eşit olan vektör anlamına gelecektir ve $\varepsilon$, $\vec{1}$'nın bütün kompleks katların kümesidir.

**2.1.1 Tanım:**

Bir $\alpha = (a_1,\ a_2,\ a_3)^t$ o-üçgeninin şekli $\varsigma(\alpha)$ ile gösterilir ve

$$\varsigma(\alpha) = \begin{cases} (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)^{-1} & ; \quad \text{eğer } a_1 \neq a_2 \text{ ise} \\ \infty & ; \quad \text{eğer } a_1 = a_2 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Hemen belirtelim ki bir o-üçgenin şeklinin reel sayı olması için gerek ve yeter şart o-üçgenin dejenere olmasıdır.

Bu yüzden $\varsigma$ yi $C^3 - \varepsilon$ dan $C_\infty$ üzerine bir dönüşüm olarak kabul edebiliriz:

$$\varsigma : C^3 - \varepsilon \to C \cup \{\infty\} = C_\infty .$$

Köşelerin sırası önemli olduğundan 2 benzer o-üçgen aynı şekle sahip olmayabilir. Bununla birlikte eğer iki o-üçgeni aynı şekle sahip ise bu üçgenler gerçekten benzerdir.

**2.1.2 Önerme [8]:**

Eğer $a \neq 0$, a ve b kompleks sayılar ise

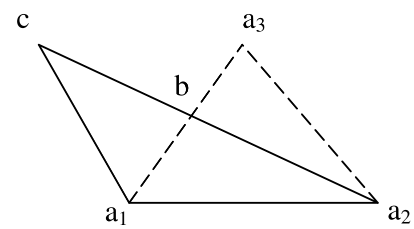
$$\varsigma(\alpha) = \varsigma\left(a\alpha + b\vec{1}\right) \tag{2.2}$$

dir.

Başka bir deyişle bir o-üçgenin şekli dönme, esneme ve kayma dönüşümleri altında değişmez (benzerlik dönüşümleri altında şekiller invaryanttır).

Cut-grow modelinde bir üçgenin yönlendirilmesi önemlidir. Çünkü sonraki primordium'un büyümesi mevcut primordium'un önceden belirlenen (predetermined) kıyısı boyunca meydana gelebilir. Özellikle eğer $\alpha \equiv (a_1,\ a_2,\ a_3)^t$ mevcut primordium'u temsil ederse o zaman $(a_1,\ a_3)$ kenarı üzerinden bir b noktası seçildiğinde; $(a_2,\ b)$ doğru parçasının b'nin yönünde bir v çarpanı kadar uzatılması ile yeni bir $(a_2, c)$ kenarı elde edilir ve $a_1,\ a_2,\ c$ noktaları yeni üçgenin köşeleridir.

Ancak, bu kurala göre bir sonraki yeni kenarın nereye çizilebileceği dikkate alınmalıdır. Bu yeni üçgen $(a_2,\ c,\ a_1)^t$'dur. ( Şekil 2.1)




**Şekil 2.1 Yeni o-Üçgeni**

$$b = (1-u)a_1 + ua_3$$

dir. Burada $u \in (0,\ 1)$ aralığından seçilmiştir.

O zaman $c = a_2 + v(b - a_2)$'dir. Bu yeni $\beta$ o-üçgeni eski $\alpha$, o-üçgeninin aşağıda verilen $[G]$ matrisi ile çarpımı sonucunda elde edilir:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v(1-u) & 1-v & uv \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Gerçekten de

$$\begin{aligned} [G]\cdot\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v(1-u) & 1-v & uv \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 \\ v(1-u)a_1 + (1-v)a_2 + uva_3 \\ a_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 \\ v\big((1-u)a_1 + ua_3\big) + a_2 - va_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 \\ vb + a_2 - va_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 + v(b + a_2) \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 \\ c \\ a_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Üçgen içinde üçgen problemi aynı zamanda matris çarpımları ile tanımlanabilir. Orijinal $\alpha$ o-üçgeni verildiğinde yeni o-üçgen $[H] \cdot \alpha$ ile belirlenir. Burada $[H]$ matrisinin bir Stochastic matris olması gerekir.

### 2.2 Kesirli Lineer Dönüşümler Vasıtasıyla Analiz

Tüm bu durumlardaki şekillerin dizisinin, kesir lineer dönüşümlerin birleşimleri ile kolayca belirleneceğini düşünüyoruz. Cut-grow dönüşümü ve üçgenlerin içindeki üçgenler problemlerindeki ortak nokta, mevcut (var olan) o-üçgenini yeni bir o-üçgenine; var olan o-üçgeni $\alpha$'nın bir 3 x 3 matris ile çarpılması ile dönüştürürler.

Her iki durumda da $(1,\ 1,\ 1)^t$ vektörü cut-grow modelinde verilen matrisin bir öz vektörüdür.

Ayrıca $[G]$ matrisinin tersi vardır. Ayrıca tek noktaya resmedilen bir o-üçgen bulunmadığını söyleyebiliyoruz. (Dejenere veya değil fark etmiyor.)

Biz burada, aşağıdaki özelliklere sahip $T : C^3 \to C^3$ doğrusal dönüşümlerinin bileşimlerine göre geliştirince o-üçgenlerinin, şekillerinin, dizilerinin, davranışlarının nasıl araştırılacağını göstereceğiz.

$$T(\vec{1}) = a \cdot \vec{1} \qquad (2.4)$$

$$\{\alpha \in C^3 : T(\alpha) \in \varsigma\} = \varsigma \tag{2.5}$$

(2.4) ve (2.5) de verilen özelliklere sahip bir T dönüşümü için eğer $\alpha$, bir o-üçgeni ise o zaman $T(\alpha)$ da bir o-üçgenidir.

Her bir kompleks sayıya bir o-üçgeni karşılık getirebileceğimizden ve her bir o-üçgeni bir şekle sahip olduğundan,

$$L_T(z) = \begin{cases} \varsigma\left(T(0,\ 1,\ z)^t\right) & \text{eğer } z \neq \infty \\ \varsigma\left(T(0,\ 0,\ 1)^t\right) & \text{eğer } z = \infty \end{cases} \tag{2.6}$$

kuralına göre verilen $L_T : C_\infty \to C_\infty$ dönüşümü T'ye karşılık gelir. (2.5) ten görüyoruz ki $L_T$ iyi tanımlanmıştır. Üstelik görüyoruz ki a, b, c, d kompleks sayılar $ad - bc \neq 0$ ve

$$L_T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

dir yani başka bir deyişle $L_T$, bir kesirli lineer dönüşümdür.

Örneğin cut-grow modelinde eğer $[G]$ matrisi (2.3) teki gibi verilirse o zaman

$$L_{[G]}(z) = -\frac{1}{uvz - v}$$

dir.

Aşağıdaki teorem kesirli lineer dönüşümlerin birleşimi ile şekillerin gelişimi arasında önemli bir bağlantı kurar.

**2.2.1 Teorem:**

Varsayalım ki T ve U, (2.4) ve (2.5)' te verilen şartları yerine getirsin. O zaman

$$L_{T\circ U} = L_T \circ L_U$$

dur.

**İspat:**

$\alpha = [a_1\ a_2\ a_3]^t$ olsun. $\varsigma(\alpha) \neq \infty$ olduğu durumu göz önüne alıyoruz. Diğer durum benzerdir.

$$\begin{aligned}
\varsigma(T_\alpha) &= \varsigma\left(\frac{1}{a_2 - a_1}\left(T_\alpha - ta_1\vec{1}\right)\right) \\
&= \varsigma\left(T\left(\frac{1}{a_2 - a_1}\left(\alpha - a_1\vec{1}\right)\right)\right) \\
&= \varsigma\left(T\left(0,\ 1,\ \varsigma(\alpha)\right)^t\right) \\
&= L_T\left(\varsigma(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

Eğer $z \neq \infty$ ise $\alpha = U\left([0,\ 1,\ z]^t\right)$ ve $z = \infty$ ise $\alpha = U\left([0,\ 0,\ 1]^t\right)$ alınarak ispat görülür [8]. □

Bu sebepten dolayı (2.5) koşulunu sağlayan lineer dönüşümlerin $\{T_n : n = 1,\ 2,\ \ldots\}$ gibi herhangi bir dizisi ve şekli $z_\alpha$ olan herhangi bir $\alpha$ başlangıç o-üçgeni verildiğinde,

$$\alpha_0 = \alpha$$
$$\alpha_n = T_n \alpha_{n-1}$$

şeklinde tanımlanan $\alpha_n$ o-üçgenlerinin dizisinin şekillerinin gelişimini

$$S_0 = z_\alpha$$
$$S_n = L_{T_n}\left(S_{n-1}\right)$$

şeklinde tanımlanan $S_n$ dizisinin analizi ile çalışabiliriz.

### 2.3 Limit Şeklin Mevcut Olması Durumu

Goodall'ın çalışmasında [9], $\{T_n\}$ bir sabit dizidir. $\forall n$ için $T_n = T$ denirse o zaman, şekillerin dizisinin limit davranışı, $L_T$ 'nın sabit noktasının çekici özellikleri ile belirlenir. Kesirli lineer dönüşümlerin sabit noktalarının davranışı iyi bilinir. Ayrıntılar için [1,2] gibi kaynaklardan yararlanılabilir.

Farz edelim ki bir sabit T dönüşümü verilmiş olsun ve $L_T$'nin $z_1$ ve $z_2$ ile gösterilen farklı iki sabit noktası olsun. O zaman $w \equiv L_T(z)$ olmak üzere

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \frac{1}{L'_T(z_2)} \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

dir. $L_T$ üç parametre ile belirlidir: $H \equiv \dfrac{1}{L'_T(z_2)}$, $z_1$ ve $z_2$.

$L_T$ dönüşümü için $L(H;\ z_1,\ z_2)$ gösterimini kullanacağız. Cut-grow modelinde sabit noktalar

$$z_1 = \frac{v - \sqrt{v^2 - 4vu}}{2uv},$$

$$z_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 - 4vu}}{2uv}$$

dir ve $v \neq 4u$ iken $z_1 \neq z_2$ dir.

$z_1 \neq z_2$ noktalarını sabit tutalım ve $GL(z_1,\ z_2) = \{L(H; z_1,\ z_2) : H \neq 0\}$ kümesini göz önüne alalım.

$$L(u, z_1, z_2) \circ L(v, z_1, z_2) = L(uv, z_1, z_2)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bundan ve 2.2.1 Teorem den dolayı $S_n$ şekli aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$S_n = L\left(H^n,\ z_1,\ z_2\right)(s_0).$$

$S_n$ şekli, $|H| > 1$ ise $z_2$'ye yakınsar ve $|H| < 1$ ise $z_1$'e yakınsar.

Cut-grow modelinde eğer $v > 4u$ ise $z_1$ ve $z_2$ nin her ikisi de reeldir, $|H| < 1$ dir ve $S_n$, $\left(\frac{v + \sqrt{v^2 - 4u}}{2uv}\right)$e yakınsar. Diğer yandan eğer $|H| = 1$ ise o zaman $S_n$,

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \left|\frac{S_0 - z_1}{S_0 - z_2}\right| \tag{2.7}$$

çemberi tarafından sınırlandırılır. Bu cut-grow modelde $v < 4u$ olması halidir.

Özel olarak eğer bir x reel sayısı için $H = e^{2\pi i x}$ ise şekillerin dizisi x rasyonel iken periyodik ve x irrasyonel iken (2.7) çemberinde yoğun olacaktır.

Diğer bir durum $L_T$ dönüşümünün $z_0$ sonlu noktasında çift katlı sabit noktaya sahip olduğu durumdur. O zaman $w \equiv L_T(z)$ ile bazı sabit $a \neq 0$ kompleks sayıları için

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + a$$

eşitliği vardır. $L_T$ için $L(a,\ z_0)$ yazılır.

$S_n = L(na,\ z_0)(s_0)$ olur. $a \neq 0$ için $S_n$ şekilleri $s_0$ ve $z_0$'dan geçen çember üzerinde bulunur ki bu çemberin $z_0$'daki teğet doğrusu $\arg(z_0)$ yönündedir. Cut-grow modeli durumunda $z_0 = \frac{1}{2u}$ ve $a = -2u$ dur.

Gerçekten, yukarıda gösterilen analiz, kritik varsayımın tek lineer dönüşümün T olmadığını gösteriyor. Fakat $L_{T_n}$ birleşimlerinin sabit nokta çiftleri her zaman aynıdır.

Cut-grow modelde, $L_T$'nın sabit noktalarının u ve v parametrelerini belirlediği kolayca kontrol edilebilir.

### 2.4 Rastlantısal Kesirli Lineer Dönüşümlerin Birleşimleri

o-üçgen şekillerinin rastlantısal gelişimlerinin bir yolu, $C^3$ ün lineer dönüşümlerinin bir dizisinin rastlantısal seçilmesidir. Zira biz her bir uygun doğrusal dönüşümü bir kesirli lineer dönüşüme eşleştirebileceğimizden haklı olarak kesirli lineer dönüşümlerin bir sırasını rastlantısal seçebiliriz.

($\Omega$, Y, P) matematiksel yapısı bir olasılık uzayı olsun ve

$$\Lambda=\left\{\frac{az+b}{cz+d}: a,\ b,\ c,\ d\in C,\ ad-bc=1\right\}$$

$C_\infty \to C_\infty$ tüm kesirli lineer dönüşümlerin kümesini göz önüne alalım.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi olsun. Böylece

$$\begin{aligned} X_n : \Omega \, x\, C_\infty &\to C_\infty \\ (\omega, z) &\to X_n(\omega, z) \end{aligned}$$

dir. $\omega$, sabit olursa genellikle $x_n(\omega, z)$ için $x_n(z)$ yazacağız.

Sonuç olarak $C_\infty$ üzerinde bir rastlantısal yürüme, $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$z\in C_\infty$ sabit olmak üzere

$$S_0(z)=z$$

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= X_{n+1}(S_n(z)) \\ &= X_{n+1}\circ X_n \circ \ldots \circ X_1(z) \end{aligned}$$

olsun. Bu rastlantısal yürüme şekillerin rastlantısal dizisidir. Uygunluk için aşağıdaki gösterimi kullanacağız.

$$X_1(z)\equiv X_1(\omega, z)$$

$$X_2\circ X_1(z)\equiv X_2(\omega, X_1(\omega, z))$$

$$X_3\circ X_2\circ X_1(z)\equiv X_3(\omega, X_2(\omega, X_1(\omega, z)))$$

$$\ldots$$

burada $\omega\in\Omega$ olmak üzere bu şekilde devam edeceğiz.

$\left\{S_n\left(z\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ hakkında ne söyleyebiliriz?

**2.4.1 Teorem [8]:**

$$p\left[\lim_{n\to\infty} S_n\left(z\right) \text{ vardır}\right]=0 \text{ veya } 1$$

**İspat:** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(z\right)$ limitinin mevcut olması durumu bir kuyruk olaydır (Tail Event). Bu yüzden teorem, Kolmogorov 0–1 kanunundan görülür. □

**2.4.2 Tanım:**

Eğer $p\left[X\left(\omega,\alpha\right)=\alpha\right]=1$ ise $\alpha\in C_\infty$ noktasına bir $\Lambda$ değerli rastlantısal X değişkeninin hemen hemen kesin bir sabit noktası denir.

İlk olarak $\left\{S_n\left(z\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin yakınsaması için gerekli şartları araştıracağız.

**2.4.3 Ön Teorem:**

$\alpha$ nın $C_\infty$ değerli bir rastlantısal değişken olduğunu varsayalım. Eğer, $p\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(z\right)=\alpha\right)=1$ ve $L\in\Lambda$, $p\left[X_1=L\right]>0$ olacak şekilde ise o zaman $p\left(L\left(\alpha\right)=\alpha\right)=1$ dir.

**İspat:** $n_0 = 0$ ve $n_k = \inf\{n : n > n_{k-1} \text{ ve } X_n = L\}$ olarak tanımlayalım. Borel-Cantelli ön teoreminden dolayı $p(X_n = L \text{ sonsuz sıklıkta}) = 1$ olduğu açıktır. Bu yüzden $k \to \infty$ için $n_k \to \infty$ dur.

Şimdi $\{S_{n_k}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisini düşünelim. $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin tanımından

$$L\left(S_{n_{k-1}}(z)\right) = S_{n_k} \tag{2.8}$$

yazabiliriz. Bu yüzden

$$p\left(\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(z) = \alpha\right) = 1$$

$$p\left(\lim_{k\to\infty} S_{n_{k-1}}(z) = \alpha\right) = 1$$

$$p\left(L(\alpha) = \alpha\right) = 1$$

elde edilir [8]. □

**2.2.4 Teorem [8]:**

$\{L_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\Lambda$ de $\sum_{j=1}^{\infty} P\left[X_1 = L_j\right] = 1$ eşitliğini sağlayan bir dizi olsun. O zaman $S_n(z) \to \alpha$ (hemen hemen kesin) olması için bir gerekli koşul $\alpha$'nın her bir $L_j$'nin bir sabit noktası olmasıdır. Burada $j = 1, 2, \ldots$ için $p\left[X_1 = L_j\right] > 0$ dır.

Eğer $\alpha$ hemen hemen kesinlikle sabitse o zaman $\alpha$, n = 1, 2, … için her bir $X_n$'in bir hemen hemen kesin sabit noktasıdır.

Aynı zamanda $\{\alpha \in C_\infty : S_n(z) \to \alpha$ hemen hemen kesin sağlayan $z \in C_\infty$ vardır$\}$ kümesi her bir $L_j$, özdeşlik dönüşümü olmadıkça en çok iki elemana sahiptir.

### 2.5 Ortak Sabit Noktalar

Üçgenin gelişiminin en ilginç durumları kesirli lineer dönüşümlerin sabit noktalarının sıfır olmayan imajiner kısmının olması durumunda olur.

Eğer kesirli lineer dönüşümlerin katsayıları reel ise (ki bu cut-grow model ve üçgen içinde üçgen problemindeki durumdur) o zaman ya tekrarlanan sabit nokta vardır ya da sabit noktalar kompleks eşleniklerdir. Her iki durumda da sabit noktalar sadece bir sabit noktanın bilinmesiyle belirlenir.

Önceki bölümlerden açıktır ki cut-grow modelinde hemen hemen kesin sabit noktalar yoktur. Hemen hemen kesin sabit noktaların olabildiği üçgen içinde üçgen probleminde ise sabit noktalar vardır. Her iki durumda da ilginç durum iki farklı sabit nokta olmasıdır. Bu yüzden ilk olarak bu durumu göz önüne alacağız. Bir ortak sabit nokta durumunu daha sonra ele alacağız.

#### 2.5.1 İki Ortak Sabit Nokta

##### 2.5.1.1 Tanım:

Bir L kesirli lineer dönüşümünün bir $\alpha$ sabit noktası için eğer $|L'(\alpha)| < 1$ ise **Çekici**, eğer $|L'(\alpha)| > 1$ ise **İtici** olduğu söylenir.

Her bir kesirli lineer dönüşümün en fazla iki sabit noktaya sahip olduğu aksi halde bir özdeşlik dönüşümü olacağı gerçeğini anımsayalım. Bu yüzden $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin yakınsaması gerek şartı altında (2.4.4 Teorem) her iki sabit noktası da ortak olan rastlantısal kesirli lineer dönüşümlerin dizilerini göz önüne alacağız ve bu dizilerin hemen hemen kesin yakınsaması için gerekli şartları arayacağız. Daha kesin olarak aşağıdaki durumu göz önüne alalım:

$z_1, z_2 \in C$ noktaları sabit ve $z_1 \neq z_2$ olsun. $\Lambda(z_1, z_2)$, sabit noktaları $z_1$ ve $z_2$ olan tüm kesirli lineer dönüşümlerin kümesi olsun. $\Lambda(z_1, z_2)$ kümesindeki herhangi bir L dönüşümünün,

$$\frac{L(z)-z_1}{L(z)-z_2} = H\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

şeklinde yazılabileceğini hatırlayalım. Burada $H \in C$ ve $H \neq 0$ dır. Bu nedenle

$$L(z) = \frac{(z_1 - Hz_2)z + z_1 z_2 (H-1)}{(1-H)z + (Hz_1 - z_2)} \tag{2.9}$$

elde edilir.

Kolayca gösterilebilir ki $L'(z_1) = H$ ve $L'(z_2) = H^{-1}$ dir. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda(z_1, z_2)$ in rastlantısal değişken değerli bir dizisi olsun. Yukarıda bahsettiğimiz gibi $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin yakınsaklığı ile ilgileneceğiz. Kolaylık için aşağıdaki ön teoremi ifade edeceğiz.

**2.5.1.2 Ön Teorem [8]:**

$\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $C/\{0\}$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi ve $p[H_1 = 1] < 1$ olsun. O zaman;

**(1)** Eğer $E[\ \log|H_1|\ ] \in (0, \infty)$ ise $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} H_k = \infty$ hemen hemen kesindir.

**(2)** Eğer $E\left[\ \log\left|H_1\right|\ \right]\in(-\infty,0)$ ise $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}H_k=0$ hemen hemen kesindir.

**(3)** $E\left[\ \log\left|H_1\right|\ \right]=0$ ise $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left|H_k\right|$ hemen hemen kesin olarak mevcut değildir. Gerçekte bu durumda $\left\{\ \prod_{k=1}^{n}\ \left|H_k\right|\ \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi pozitif reel sayıların çarpımsal grubu üzerinde bir yinelenen rastlantısal yürümedir.

**2.5.1.3 Teorem:**

$\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda\left(z_1,z_2\right)$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi olsun. $H_n=X'_n\left(z_1\right)$ ve varsayalım $p\left[H_1=1\right]<1$ olsun. O zaman $\left\{S_n\left(z\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$\tilde{X}\left(\tilde{z}\right)=\frac{z_2\left(z_1-z\right)\tilde{z}+\left(z_1z-z_1z_2\right)}{\left(z_1-z\right)\tilde{z}+\left(z-z_2\right)} \tag{2.10}$$

ile verilen $\tilde{X}$ kesirli lineerli dönüşümü altında C nin çarpımsal grubunda $\left\{\prod_{k=1}^{n}H_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ rastlantısal yürümesinin görüntüsüdür.

Özellikle, eğer $z\notin\left\{z_1,z_2\right\}$ ise o zaman

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n\left(z\right)&\equiv\lim_{n\to\infty}X_n\circ X_{n-1}\circ\ldots\circ X_2\circ X_1\left(z\right)\\&=\begin{cases}z_2,\ \text{eğer } E\left[\ \log\left|H_1\right|\ \right]\in\left(0,\infty\right)\ \text{ise}\\z_1,\ \text{eğer } E\left[\ \log\left|H_1\right|\ \right]\in\left(-\infty,0\right)\ \text{ise}\end{cases}\end{aligned}$$

ve $E\left[\ \log\left|H_1\right|\ \right]=0$ ise $\lim_{n\to\infty}S_n\left(z\right)$ hemen hemen kesin olarak mevcut değildir.

**İspat:** İlk olarak belirtelim ki $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olması $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olmasını gerektirir. (2.9) dan dolayı

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{(z_1 - H_n z_z)z + z_1.z_2(H_n - 1)}{(1-H_n)z + (H_n z_1 - z_2)} \\ &= \frac{z_2(z_1 - z)H_n + (z_1 z - z_1 z_2)}{(z_1 - z)H_n + (z - z_2)} \\ &\equiv \tilde{X}(H_n) \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Burada $p[H_1 \neq 0] = 1$ dir ve $\tilde{X}$,

$$\tilde{X}(\tilde{z}) = \frac{z_2(z_1 - z)\tilde{z} + (z_1 z - z_1 z_2)}{(z_1 - z)\tilde{z} + (z - z_2)} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi kolayca görülüyor ki

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \frac{z_2(z_1 - z)\left(\prod_{k=1}^{n} H_k\right) + z_1(z - z_2)}{(z_1 - z)\left(\prod_{k=1}^{n} H_k\right) + (z - z_2)} \\ &\equiv \tilde{X}\left(\prod_{k=1}^{n} H_k\right) \end{aligned}$$

dır.

Bu yüzden 2.5.1.2 Ön Teoremden dolayı

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \begin{cases} \tilde{X}(\infty) = z_2, \text{ eğer } E\left[\log|H_1|\right] \in (0,\infty) \text{ise} \\ \tilde{X}(0) = z_1, \text{ eğer } E\left[\log|H_1|\right] \in (-\infty,0) \text{ise} \end{cases}$$

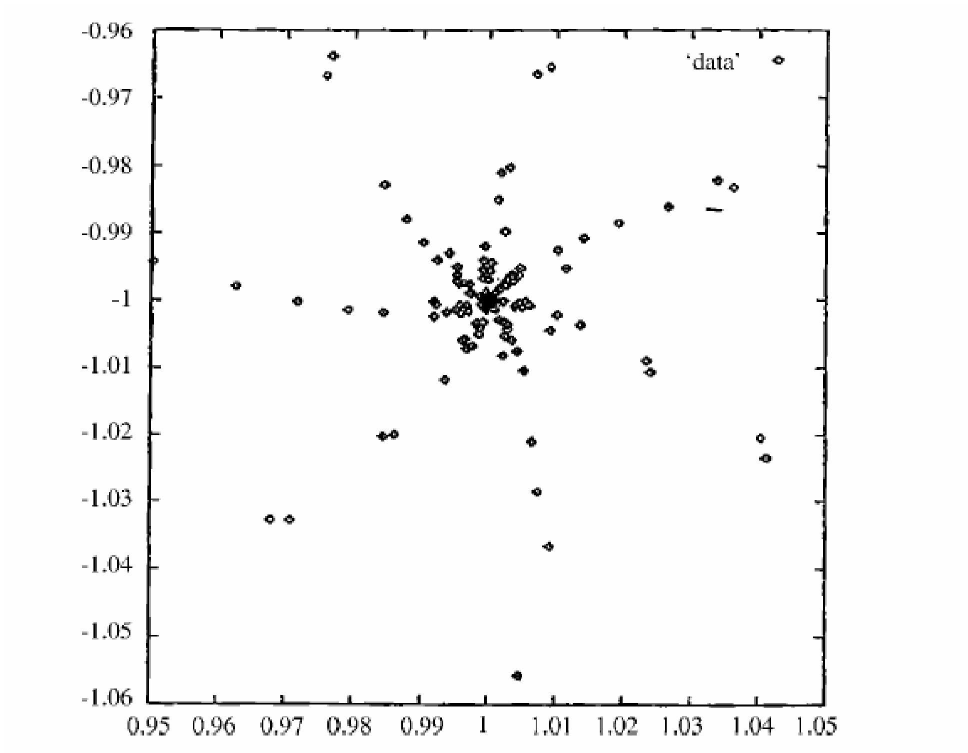
yazabiliriz. Burada $p[H_1 \neq 0] = 1$ olduğunu hatırlayalım. Eğer $E\left[\ \log|H_1|\ \right] = 0$ ise o zaman tekrar 2.5.1.2 Ön Teoremden dolayı $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} |H_k|$ limitinin hemen hemen kesin olarak mevcut olmadığını görüyoruz.

Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ limiti hemen hemen kesin olarak mevcut değildir. Çünkü $\tilde{X}$, bire-bir, örten ve süreklidir [8]. □

**2.5.1.4 Örnek [8]:**

$$L_1(z) = \frac{(-0,2+0,8i)z-(1-1,4i)}{(0,5-0,7i)z-(1,2-2,2i)}, \quad L_2(z) = \frac{(-0,7+0,9i)z-(0,4-1,8i)}{(0,2-0,9i)z-(1,1-2,7i)}$$

olsun. $X_1$, $p[\ X_1 = L_1\ ] = p[\ X_1 = L_2\ ] = \frac{1}{2}$ özelliğinde bir rastlantısal değişken olsun. $L_1$ ve $L_2$'nin sabit noktaları $1 \pm i$ dir. $H_1 = X_1'(1+i)$ olduğunda $p[\ H_1 = 0,5+0,7i\ ] = p[\ H_1 = 0,8+0,9i\ ] = \frac{1}{2}$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu yüzden $E\left[\ \log|H_1|\ \right] \rangle\ 0$ dır. $S_n$, n=1 den n=2000 e kadar hesaplanırsa, Şekil 2.2 son 1800 noktanın dağılımını göstermektedir.




**Şekil 2.2 $X_1$'in hemen hemen kesin sabit noktası 1-i sayısına yakınsaması**

Bu noktaların beklendiği gibi 1–i kompleks sayısına yakınsadığı görülüyor.

2.5.1.3 Teorem, üçgen içindeki üçgen probleminin rastlantısal versiyonuna uygulanabilir. Üçgenlerin içinde üçgen probleminde, yeni bir $\beta$ o- üçgeninin, bir Stochastic [M] matrisi ile verilen bir $\alpha$ o-üçgeninin çarpımı ile elde edildiğini hatırlayalım.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1-m_{12}-m_{13} & m_{12} & m_{13} \\ 1-m_{22}-m_{23} & m_{22} & m_{23} \\ 1-m_{32}-m_{33} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

yazabiliriz. Burada $1 \le i \le 3$ ve $2 \le j \le 3$ için $0 \le m_{i,j} \le 1$'dir.

$1 \leq j \leq 4$ için $-1 \leq a_j \leq 1$ olmak üzere $L(z) = \dfrac{a_1 z + a_2}{a_3 z + a_4}$ şeklinde bir kesirli lineer dönüşüm verildiğini varsayalım. Eğer,

$$a_1 = m_{33} - m_{13}$$
$$a_2 = m_{32} - m_{12}$$
$$a_3 = m_{23} - m_{13}$$
$$a_4 = m_{22} - m_{12}$$

bağıntıları sağlanıyorsa o zaman $L = L_{[M]}$ dir. Eğer $a_j$ lerin verildiğini varsayarsak, $[M]$'nin stochastic matris olması kısıtlamasıyla, $m_{ij}$ leri çözmek daima mümkündür.

Diğer taraftan eğer $z_1 \neq z_2$ kompleks eşlenikler ve $H \neq 1$ olmak üzere H nın modülü 1 ise (2.9) dan

$$L(z) = \frac{\left(\left(z - Hz_2\right)/\left(1-H\right)\right)z - z_1 z_2}{z + \left(Hz_1 - z_2\right)/\left(1-H\right)}$$

elde edilir ve bu dönüşümün katsayıları reeldir.

Bu katsayıların hepsi $(-1,1)$ aralığında değerler alacak şekilde normalleştirilebilirler. Bu yüzden bu durumun 2.5.1.3 Teoremin uyguladığı üçgen içinde üçgen probleminin rastlantısal versiyonunun çeşitli örneklerini bulabiliriz. Bununla birlikte sonuç her zaman bir limit şeklin mevcut olmadığı bir durumdur. Bu durumda $S_n$ şekillerinin rastlantısal dizisi (2.10) daki dönüşüm altında birim çemberin resmi ile verilen çemberden değerler alır.

**2.5.1.5 Örnek [8]:**

Varsayalım ki bir yeni o-üçgen, Stochastic $M_1$ ya da $M_2$ matrisi ile çarpılması sonucunda eski o-üçgeni tarafından oluşturulmuştur. Burada her bir matris $\frac{1}{2}$ olasılıkla seçilmiştir:

$$[M_1]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$[M_2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Bunlara karşılık elde edilen kesirli lineer dönüşümler;

$$L_1(z)=\frac{-z-2}{z-3}$$

$$L_2(z)=\frac{3z-2}{z+1}$$

dir. Ortak sabit noktaları $1\mp i$ ve bunlara karşılık H değerleri $\frac{3\pm 4i}{5}$ dir. H'nin modülü daima 1 olduğundan dolayı, $S_n$ şekillerinin rastlantısal yürümesi $z_1=1+i$ ve $z_2=1-i$ ile (2.10) da verilen dönüşüm altında birim çember üzerinde bir rastlantısal yürümesinin görüntüsüdür.

Çift katlı sabit nokta durumuna dönelim. $z_0 \in C$ noktası sabit olsun ve $z_0$ noktasının çift katlı sabit noktası olduğu tüm kesir lineer dönüşümlerin kümesi $\Lambda(z_0)$ olsun. Herhangi bir $L \in \Lambda(z_0)$ ın bir $a \in C$ için

$$\frac{1}{L(z)-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+a$$

şeklinde verildiğini anımsayalım. Bu yüzden

$$L(z)=\frac{(az_0+1)z-az_0^2}{az+1-az_0} \tag{2.12}$$

Kolayca gösterilebilir ki $L''(z_0)=-2a$ dır.

**2.5.1.6 Teorem:**

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda(z_0)$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi olsun.

$$r_n=\left(-\frac{1}{2}\right)X_n''(z_0)$$

diyelim ve varsayalım ki $p[r_1=0]<1$ olsun. O zaman $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$\widehat{X}(\hat{z})=\frac{z_0(z-z_0)\hat{z}+z}{(z-z_0)\hat{z}+1} \tag{2.13}$$

eşitliği ile verilen $\widehat{X}$ kesirli lineer dönüşümü altında kompleks sayıların toplamsal grubunda $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ rastlantısal yürümesinin görüntüsüdür.

Özellikle eğer $E[r_1] \in C/\{0\}$ ise

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) \equiv \lim_{n\to\infty} X_n \circ X_{n-1} \circ ... \circ X_2 \circ X_1(z)$$
$$= z_0$$

dir ve eğer $z \neq z_0$ ve $E[r_1] = 0$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ hemen hemen kesin olarak mevcut değildir. Ek olarak eğer $E\left[|r_1|^2\right] < \infty$ ise $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $\widehat{X}$ kesirli lineer dönüşümü altında $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ yinelenen rastlantısal yürümesinin görüntüsüdür.

**İspat:** İlk olarak $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olması, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olmasını sağlar. Aynı zamanda (2.12) den dolayı;

$$X_n = \frac{(a_n z_0 + 1)z - a_n z_0^2}{a_n z + 1 - a_n z_0}$$
$$= \frac{z_0(z - z_0)a_n + z}{(z - z_0)a_n + 1} \equiv \widehat{X}(a_n)$$

yazabiliriz. Burada $\widehat{X}$

$$\widehat{X}(\hat{z}) = \frac{z_0(z - z_0)\hat{z} + z}{(z - z_0)\hat{z} + 1} \tag{2.14}$$

ile verilir.

Kolayca gösterilebilir ki

$$S_n(z)=\frac{z_0(z-z_0)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+z}{(z-z_0)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+1}$$

dir.

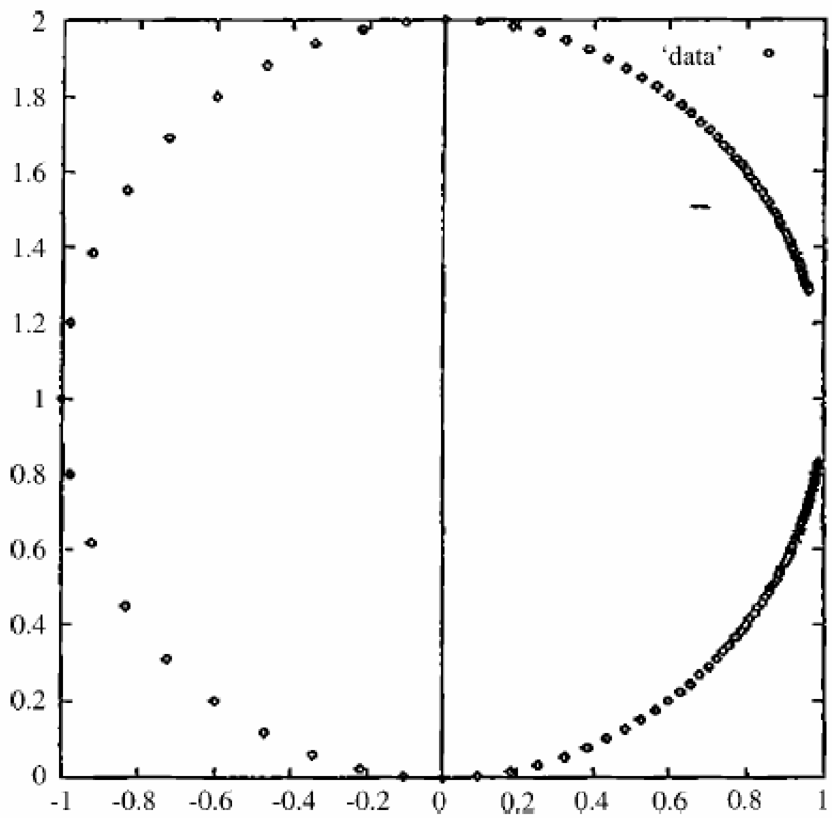
Şimdi Güçlü Büyük Sayıların Yasası'ndan eğer $E[r_1]\in C/\{0\}$ ise $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\infty$ dur. Bu yüzden eğer $E[r_1]\in C/\{0\}$ ise $\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\widehat{X}(\infty)=z_0$ dır. Aynı zamanda eğer $E[r_1]=0$ ise o zaman sonuçlar rastlantısal yürümeler için standart sonuçlardan bulunur. Bu da teoremi kanıtlar [8]. □

**2.5.1.7 Örnek [8]:**

**(a)** $L_1(z)=\dfrac{(0,95+0,05i)z+0,1}{0,05iz+(1,05-0,05i)}$, $L_2(z)=\dfrac{(1,05-0,05i)z-0,01}{-0,05iz+(0,95+0,05i)}$ olsun.

$X_1$, $p[X_1=L_1]=p[X_1=L_2]=\dfrac{1}{2}$ özelliğinde bir rastlantısal değişken olsun. Kolayca gösterilebilir ki $1+i$, $L_1$ ve $L_2$'nin her ikisinin de çift katlı sabit noktasıdır. $r_1=\left(-\dfrac{1}{2}\right)X_1''(1+i)$ olmak üzere $p[r_1=0,05i]=p[r_1=-0,05i]=\dfrac{1}{2}$ olduğu gösterilebilir. Bu yüzden $E[r_1]=0$ dır.

Eğer $S_1$ den $S_{15000}$'e kadar hesaplanırsa,

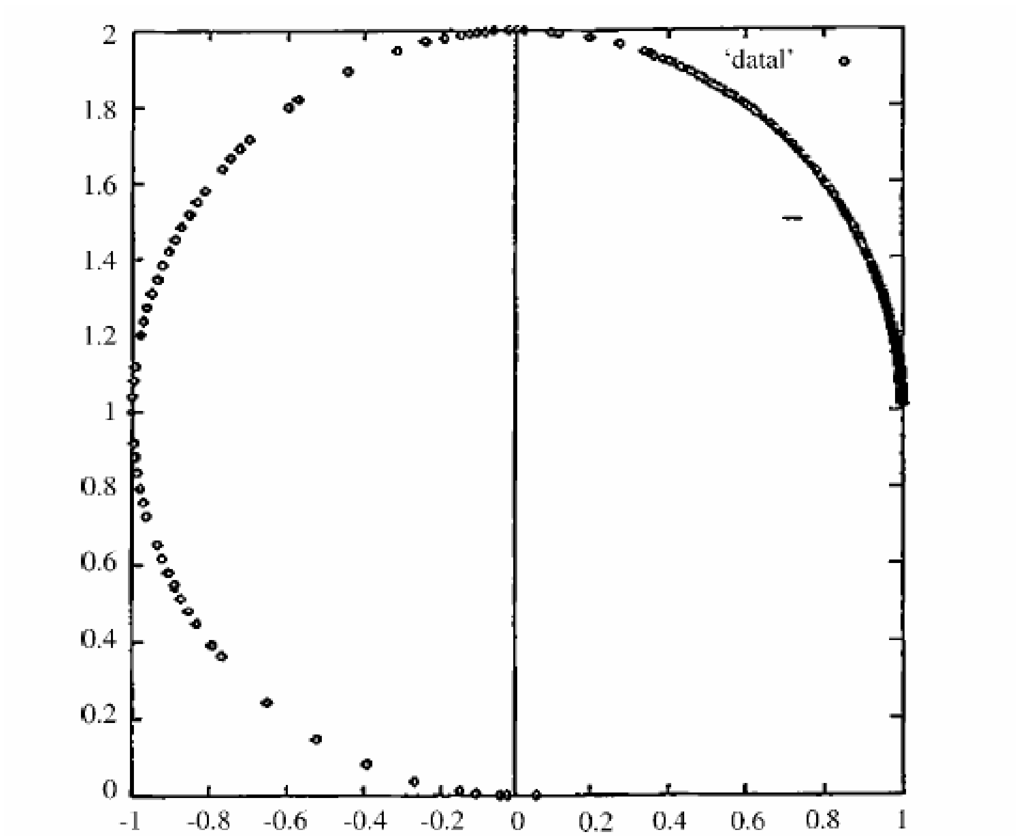



**Şekil 2.3 Noktalar yakınsamaz (çift katlı sabit nokta 1+i ve $E[r_1]=0$ ).**

Şekil 2.3, tüm bu noktaların dağılımını gösteriyor ve görüyoruz ki bu noktalar 2.5.1.6 Teoremde beklendiği gibi yakınsamazlar.

**(b)** $L_1(z)=\dfrac{(0,96+0,04i)z+0,08}{0,04iz+(1,04-0,04i)}$, $L_2(z)=\dfrac{(1,05-0,05i)z-0,01}{-0,05iz+(0,95+0,05i)}$ olsun.

$X_1$, $p[X_1=L_1]=p[X_1=L_2]=\dfrac{1}{2}$ özelliğinde bir rastlantısal değişken olsun. Kolayca gösterilebilir ki 1+i , $L_1$ ve $L_2$'nin her ikisinin de çift katlı sabit noktasıdır. $r_1=\left(-\dfrac{1}{2}\right)X_1''(1+i)$ olmak üzere $p[r_1=0,04i]=p[r_1=-0,05i]=\dfrac{1}{2}$ olduğu gösterilebilir. Bu yüzden $E[r_1]\neq 0$ dır. $S_1$ den $S_{15000}$'e kadar hesaplanırsa,




**Şekil 2.4 Noktalar 1 + i'ye yakınsar (çift katlı sabit nokta 1 + i ve $E[r_1] \neq 0$).**

Şekil 2.4 tüm bu noktaların dağılımını gösteriyor. Görüyoruz ki bu noktalar 2.5.1.6 Teoremde beklendiği gibi 1 + i sabit noktasına yakınsar.

### 2.5.2 Bir Ortak Sabit Nokta

Varsayalım ki hemen hemen kesin bir ortak sabit nokta olsun ve bu ortak sabit nokta çift katlı olmasın. Hangi şartlar altında şekillerin dizisi bu hemen hemen kesin sabit noktaya yakınsar?

**2.5.2.1 Teorem:**

$\omega \in \Omega$ ve $z \in C_\infty$ için

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z + b_n(\omega)}{a_n(\omega)^{-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

olsun. Varsayalım ki

$$E\left[\log|a_1|\right] \in (0, \infty), \quad E\left[\log^+|b_1|\right] \in [0, \infty)$$

olsun. O zaman

$$A \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{k} a_j^{-2}\right) a_k b_k$$

serileri hemen hemen kesin olarak yakınsar ve

$$p\left(\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \infty \,\middle|\, A \neq -z\right) = 1$$

dir.

**2.5.2.2 Teorem:**

$a_n d_n - b_n c_n = 1$, $\omega \in \Omega$ ve $z \in C_\infty$ olmak üzere

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega).z + b_n(\omega)}{c_n(\omega).z + d_n(\omega)}, n = 1, 2, \ldots$$

olsun. Varsayalım ki $a \in C$, $X_1$'in bir hemen hemen kesin sabit noktası ve

$$E\left[\log^+|c_1|\right] \in [0, \infty), \tag{2.15}$$

$$E\left[\log|a_1 - c_1 a|\right] \in (-\infty, 0) \tag{2.16}$$

olsun.  O zaman

$$A \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 - c_1 a)^2 \ldots (a_{k-1} - c_{k-1})^2 (a_k - c_k a) c_k$$

serisi hemen hemen kesin olarak yakınsar ve

$$p\left( \lim_{n \to \infty} S_n = a \middle| A \neq -1/(z-a) \right) = 1$$

dir.

Kolayca görülür ki eğer L, $\Lambda$ de ise $L'(a) = \dfrac{1}{(ca+d)^2}$ dir.

Böylece 2.5.2.2 Teoremdeki $E\left[\log |a_1 - c_1 a| \right] < 0$ koşulu gösteriyor ki a, $n = 1, 2, \ldots$ için her bir $X_n$'in çekici sabit noktasıdır.

Eğer,

$$P[\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 - c_1 a)^2 (a_2 - c_2 a)^2 \ldots (a_{k-1} - c_{k-1})^2 (a_k - c_k a) c_k = -\frac{1}{z-a}] > 0$$

ise o zaman aşağıdaki 3 durumdan biri meydana gelir:

**(a)** $S_n$, yakınsamaz.

**(b)** $S_n$, herhangi bir şekilde a'ya yakınsar.

**(c)** $\beta \neq \alpha$ olmak üzere $S_n(z)$, $\beta$'ya yakınsar. Eğer $X_n$'lerin ortak dağılımı ayrıksa o zaman $\beta$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin bir sabit noktasıdır. Hemen hemen kesin iki sabit noktanın olması durumunu aşağıda ele alacağız.

2.5.2.1 Teoremdeki $E\left[\ \log\left|a_1 - c_1 a\right|\ \right] < 0$ varsayımı $E\left[\ \log\left|c_1 a + d_1\right|\ \right] > 0$ ile değiştirilebilir. Çünkü biliyoruz ki

$$a_1 - c_1 a = \frac{1}{c_1 a + d_1}$$

dir.

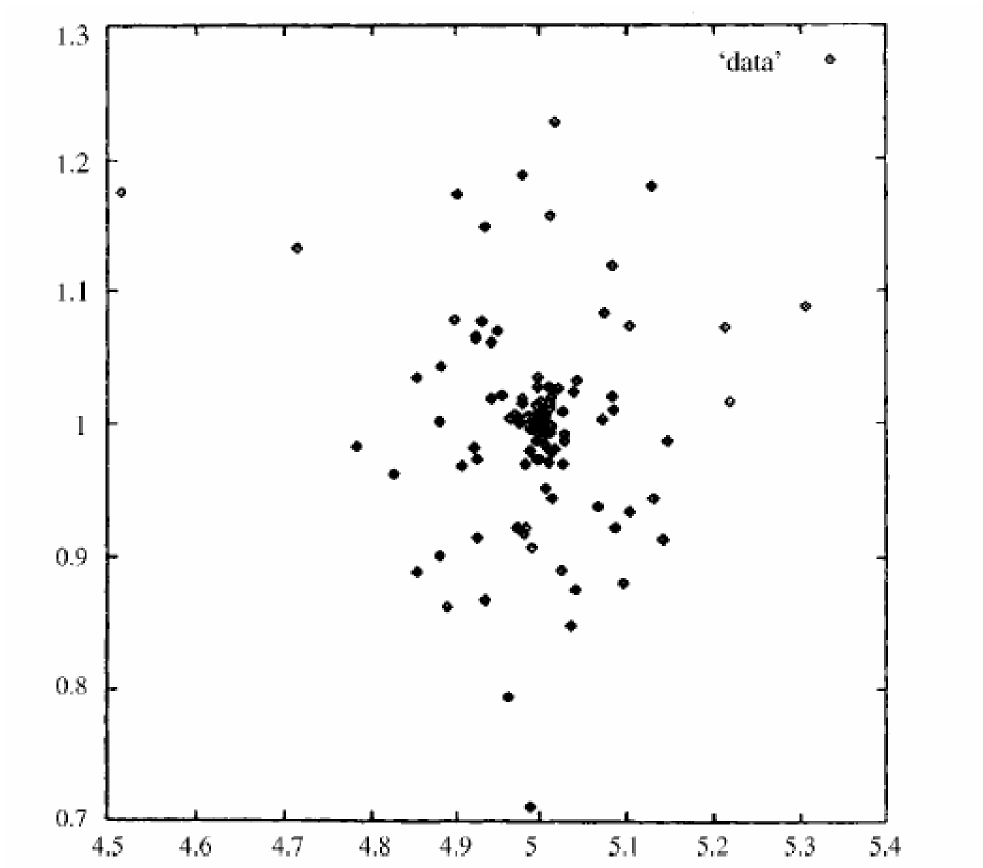
**2.5.2.3 Örnek [8]:**

$$L_1(z) = \frac{(7,8 + 16,4i)z - (19,2 + 86i)}{(2 + 3i)z - (6,2 + 16,4i)},$$

$$L_2(z) = \frac{(6,47169811 - 4,84905660i)z - (35,60754717 - 22,77358491i)}{(1 - i)z - (5,5 - 4,9i)}$$

ve $X_1$, $p\left[\ X_1 = L_1\ \right] = p\left[\ X_1 = L_2\ \right] = \frac{1}{2}$ özelliğinde bir rastlantısal değişken olsun. $L_1$'in sabit noktaları 4,723076923077 + 0,8153846153846i ve 5 + i, $L_2$'nin sabit noktaları 5,860377358491 + 0,111320754717i ve 5 + i'dir.

Böylece $X_1$'in hemen hemen kesin sabit noktası 5 + i dir. $S_n$, n= 1 den n = 500 e kadar hesaplanırsa,




**Şekil 2.5 $X_1$'in hemen hemen kesin sabit noktası 5 + i'ye yakınsama**

Şekil 5 son 300 noktanın dağılımını gösteriyor. Bu noktaların beklendiği gibi $X_1$'in hemen hemen kesin sabit noktası 5 + i ye yakınsadığı görülüyor. Bu örnek, 2.5.2.2 Teoremin bir örneklemesidir.

**2.5.2.1 Teorem ve 2.5.2.2 Teorem'in İspatı:**

2.5.2.1 Teorem ve 2.5.2.2 Teoremin her ikisi de $b_n \equiv 0$ ve $d_n = \dfrac{1}{a_n}$ varsayımı ile 2.5.2.2 Teoremin özel durumunun ispatından elde edilir. Bu durumda $\omega \in \Omega$ ve $z \in C_\infty$ olmak üzere

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z}{c_n(\omega) z + a_n(\omega)^{-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

dır. $\{(a_n, c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olduğunu tekrar belirtelim. Yine de herhangi bir sabit n için $a_n$ ve $c_n$'in bağımsız olmaları gerekli değildir.

$\Lambda$ ve $SL_2(C)$ izomorf olduğundan $X_n(\omega, z)$ dönüşümüne;

$$M_n = \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ c_n & a_n^{-1} \end{bmatrix} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

ile verilen $M_n \equiv M_n(\omega)$ alt üçgensel matrisi karşılık gelir.

Şimdi $X_n(z) = Q(M_n \tilde{z})$ yazabiliriz. Burada

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

dir ve

$$Q : C^2 / \{\vec{o}\} \rightarrow C_\infty$$

dönüşümü

$$Q\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} z_1 / z_2, & \text{eğer } z_2 \neq 0 \\ \infty & , \text{aksi halde} \end{cases} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j,$$

$$\beta_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_j\right) c_n + \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-2} a_j\right)}{a_n} a_{n-1} + \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-3} a_j\right)}{a_n . a_{n-1}} c_{n-2}$$

$$+ \ldots + \frac{a_2 a_1}{\prod_{j=n}^{4} a_j} c_3 + \frac{a_1}{\prod_{j=n}^{3} a_j} c_2 + \frac{1}{\prod_{j=n}^{2} a_j} c_1 \ ,$$

$$\gamma_n = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{-1}$$

olmak üzere,

$$M_n M_{n-1} \ldots M_2 M_1 = \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ \beta_n & \gamma_n \end{bmatrix}$$

olduğunu kolayca gösterebiliriz. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} S_n(z) &= X_n \circ X_{n-1} \circ \ldots \circ X_2 \circ X_1(z) \\ &= Q\left(\prod_{j=n}^{1} M_j\right)(\tilde{z}) \\ &= \frac{a_n z}{\beta_n z + \gamma_n} \end{aligned} \tag{2.21}$$

dir. (2.21) den görüyoruz ki

$$S_n(z) = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} a_j^2\right) z}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 a_k c_k\right) z + 1}$$

dir. Bu oranın yakınsaklığını araştırmak için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 a_k c_k$$

serilerini inceleyelim. $\Omega$'deki her bir $\omega$ için kök testini uygularken

$$\frac{1}{k}\log\left|a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 a_k c_k\right| = \frac{1}{k}\left[\sum_{j=1}^{k}\log\left|a_j\right| + \sum_{j=1}^{k-1}\log\left|a_j\right| + \log\left|c_k\right|\right]$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\log\left|a_j\right| + \left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\log\left|a_j\right| + \frac{1}{k}\log\left|c_k\right|$$

olduğunu göz önüne alıyoruz. Güçlü Büyük Sayılar Yasası'ndan aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$E\left[\log^{+}\left|c_1\right|\right] \in [0,\infty)$ olduğundan $\lim_{k\to\infty}\sup\frac{1}{k}\log\left|c_k\right| \le 0$ yakınsaması hemen hemen kesindir ve $E\left[\log\left|a_1\right|\right] \in R$ olduğundan $k \to \infty$ için $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\log\left|a_j\right| \to E\log\left|a_1\right|$ yakınsaması hemen hemen kesindir.

Bu yüzden

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1^2 a_2^2 \ldots a_{k-1}^2 a_k . c_k$$

serisi bir rastlantısal değişkene hemen hemen kesin olarak yakınsar. $E\left[\log\left|a_1\right|\right] < 0$ varsayımı $n \to \infty$ için $\prod_{j=1}^{n} a_j \to 0$ hemen hemen kesin yakınsamasını gerektirir. Bu 2.5.2.2 Teoremin özel durumunu verir [8].

Genel durumu elde etmek için varsayalım ki $a \in C$ noktası her bir $X_n$, $n = 1, 2, ...$ dönüşümün hemen hemen kesin sabit noktası olsun. Bundan dolayı

$$\frac{a_n a + b_n}{c_n a + d_n} = a \text{ hemen hemen kesin, } n = 1, 2, \ldots \tag{2.22}$$

yazabiliriz. $a \in C$ olsun. $T_a(z) = z - a$ ile verilen $T_a$ öteleme dönüşümünü tanımlayalım.

Şimdi

$$W_n(z) = [T_a X_n T_{-a}] \circ [T_a X_{n-1} T_{-a}] \circ ... [T_a X_2 T_{-a}] \circ [T_a X_1 T_{-a}](z)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S_n(z) &= X_n \circ X_{n-1} \circ ... \circ X_1(z) \\ &= T_{-a} \circ [T_a X_n T_{-a}] \circ [T_a X_{n-1} T_{-a}] \circ ... [T_a X_2 T_{-a}] \circ [T_a X_1 T_{-a}] \circ T_a(z) \\ &= T_{-a} \circ W_n \circ T_a(z) \end{aligned}$$

yazabiliriz. (2.22) eşitliği kullanılarak

$$T_a X_n T_{-a}(z) = \frac{(a_n - c_n a) z}{c_n z + (c_n a + d_n)}, \quad n = 1, 2, ...$$

olduğu görülür. Bu kesirli lineer dönüşümlerin hepsinin de sabit noktalarının biri 0 dır. Böylece özel durum uygulanmış olur. $R(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü $T_a(z)$ ile yer değiştirilirse 2.5.2.1 Teoremin ispatı görülür. □

# 3. DAĞILIMDA YAKINSAKLIK

2. Bölüm'de $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Lambda$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi olmak üzere

$$S_n(z) = X_n \circ X_{n-1} \circ \ldots \circ X_2 \circ X_1(z) \tag{3.1}$$

ile verilen $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin davranışı ile ilgili çeşitli sonuçlar ispatladık. Şimdi 2.5.2.2 Teorem de $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin yakınsaması için yeterli şartlar meydana gelmediğinde ne olacağını inceleyelim.

2.5.2.2 Teoremin tamamlayıcı hipotezleri altında hemen hemen kesin yakınsamanın meydana gelmediğini fakat dağılımda yakınsamanın meydana geldiğini elde edeceğiz. Bunu görmek için $z \in C_{\infty}$ olmak üzere

$$V_0(z) \equiv z \tag{3.2}$$

$$V_{n+1}(z) \equiv X_1(V_n(z)) \tag{3.3}$$

$$\equiv X_1 \circ X_2 \circ \ldots X_n \circ X_{n+1}(z) \tag{3.4}$$

ile tanımlanan $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. $X_n$ ler birbirinden bağımsız ve özdeş dağıtılmış olduğundan $S_n$ ve $V_n$, $\forall\ n = 1, 2, \ldots$ için aynı dağılıma sahiptirler.

### 3.1 $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ Dizisinin Hemen Hemen Kesin Yakınsaması

E, Borel $\sigma$-cismi € olan ve sayılabilir bir taban olan bir yerel kompakt uzay olsun. $C = C(E)$, $f : E \to E$ tüm sürekli fonksiyonların (birebir ve birebir-örten olması gerekmeyen) kümesi olsun ve herhangi $x \in E$ için $f \to f(x)$ (C,€) den (E,€) a ölçülebilir dönüşüm olmak üzere en küçük $\sigma$-cismi € ile desteklenmiş olsun.

**3.1.1 Teorem [10]:**

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $\varsigma$ dağılımı ile $C = C(E)$'de birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olsun. $n \geq 0$ ve $x \in E$ olmak üzere aşağıdaki dizileri göz önüne alalım;

$$S_n(z) = X_n \circ X_{n-1} \circ ... \circ X_2 \circ X_1(x),$$

$$V_n(z) = X_1 \circ X_2 \circ ... \circ X_{n-1} \circ X_n(x).$$

Farzedelim x'e bağlı olmaksızın $V = \lim_{n\to\infty} V_n(x)$ limiti hemen hemen kesin var olsun. O zaman V'nin yasası Markov Zinciri $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ nın durağan dağılımıdır ve bu zincir yalnızca bir durağan dağılıma sahiptir.

Amacımız $E \subset C_\infty$ olmak üzere, $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin durağan dağılımının mevcut olduğunu göstermek için 3.1.1 Teoremi uygulamaktır. Böylece $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin z'ye bağlı olmaksızın bir limit değere dizisinin hemen hemen kesin olarak yakınsaması için yeterli şartları arayacağız.

Yaklaşımımız, 2. Bölümde yaptıklarımızın çok benzeri olacaktır.

## 3.2 $\infty$ Noktasının, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ Dizisinin Hemen Hemen Kesin Bir Sabit Noktası Olması Durumu

Bu durumda $\omega \in \Omega$ ve $z \in C_\infty$ olmak üzere

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z + b_n(\omega)}{a_n(\omega)^{-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

dir.

2. Bölümde olduğu gibi $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizi olduğunu anımsayalım. Herhangi bir n sabiti için $a_n$ ve $b_n$ 'in bağımsız olması gerekmez. Kolayca görülebilir ki herhangi bir $n = 1, 2, \ldots$ için $A_n = a_n^2$ ve $B_n = a_n . b_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} V_n(z) &= X_1 \circ X_2 \circ \ldots \circ X_{n-1} \circ X_n(z) \\ &= B_1 + \sum_{k=2}^{n} \left( \prod_{j=1}^{k-1} A_j \right) B_k + \left( \prod_{k=1}^{n} A_k \right) z, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

dir. Hangi şartlar altında

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^{k-1} A_j \right) B_k \tag{3.7}$$

rastlantısal toplamının hemen hemen kesin yakınsadığını bulmak istiyoruz. 2.5.2.2 Teoremin ispatındaki gibi (3.7) için kök testini uygulayalım.

$$\frac{1}{k}\log\left|\left(\prod_{j=1}^{k-1} A_j\right) B_k\right| = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\log\left|A_j\right| + \frac{1}{k}\log\left|B_k\right|$$

olduğuna dikkat edelim.

$$E\left[\log\left|A_1\right|\right] \in (-\infty, 0) \text{ ve } E\left[\log^+\left|B_1\right|\right] \in [0, \infty)$$

olduğunu varsayarsak (3.7)'deki toplam hemen hemen kesin yakınsar. Bu şartlar

$$E\left[\log\left|a_1\right|\right] \in (-\infty, 0) \text{ ve } E\left[\log^+\left|b_1\right|\right] \in [0, \infty)$$

olmasına denktir.

**3.2.1 Teorem:**

$\omega \in \Omega$ ve $z \in C$ olmak üzere

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z + b_n(\omega)}{a_n(\omega)^{-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

olsun. Aynı zamanda

$$E\left[\log\left|a_1\right|\right] \in (-\infty, 0) \tag{3.8}$$

$$E\left[\log^+\left|b_1\right|\right] \in [0, \infty) \tag{3.9}$$

olduğunu varsayalım. O zaman bir C değerli V rastlantısal değişkeni, z'ye bağlı olmaksızın $n \to \infty$ için $V_n(z) \to V$ hemen hemen kesin olacak şekilde vardır.

**İspat:** $A_j = a_j^2$ ve $B_j = a_j b_j$, $j = 1, 2, ...$ olsun. (3.8) ve (3.9) dan $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{k-1} A_j\right) B_k$ serisinin bir rastlantısal değişkene hemen hemen yakınsadığını görürüz. Ayrıca (3.8),

$$\prod_{k=1}^{n} A_k$$

çarpımının hemen hemen kesin olarak 0'a yakınsamasını gerektirir.

Bu nedenle (3.6) dan $V_n(z)$'nin z'ye bağlı olmaksızın $n \to \infty$ için bir rastlantısal değişkene hemen hemen kesin (a.s.) yakınsadığı görülür. Bu da teoremi kanıtlar [8]. □

Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**3.2.2 Teorem [8]:**

$\omega \in \Omega$ ve $z \in C$ olmak üzere

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z + b_n(\omega)}{a_n(\omega)^{-1}}, \quad n = 1, 2, ...$$

olsun. $n \geq 1$ için,

$$S_n(z) = X_n \circ X_{n-1} \circ ... \circ X_2 \circ X_1(z),$$
$$V_n(z) = X_1 \circ X_2 \circ ... \circ X_{n-1} \circ X_n(z)$$

olsun.

Varsayalım ki

$$E\left[\log|a_1|\right] \in (-\infty, 0) \text{ ve } E\left[\log^+|b_1|\right] \in [0, \infty)$$

olsun. $V \equiv \lim_{n\to\infty} V_n(z)$ limiti hemen hemen kesin olarak mevcuttur ve z'ye bağlı değildir. V'nin yasası $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ Markov Zinciri'nin durağan dağılımıdır ve bu zincir yalnızca bir durağan dağılıma sahiptir.

**İspat:** 3.1.1 Teorem ve 3.2.1 Teoremden kanıtlanabilir.

### 3.3. a∈ C Noktasının, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ Dizisinin Hemen Hemen Kesin Bir Sabit Noktası Olması Durumu

$a \in C$ her bir $X_n$, $n = 1, 2, ...$ dönüşümünün bir hemen hemen kesin sabit noktası olsun. Bu durumda $\omega \in \Omega$, $z \in C_\infty$, $a_n d_n - b_n c_n = 1$ ve

$$\frac{a_n a + b_n}{c_n a + d_n} = a,\ n = 1, 2, ... \text{ hemen hemen kesin} \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z + b_n(\omega)}{c_n(\omega) z + d_n(\omega)}, \quad n = 1, 2, ...$$

yazabiliriz. Amacımız $V_n(z)$'yi, $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hemen hemen kesin yakınsaması için bir gerekli şartı elde etmek için 3.2.1 Teoremi kullanabilmemizi sağlayacak şekilde ifade etmektir. Aslında a sabit noktasını $\infty$'a kaydırarak amacımıza ulaşabiliriz.

$a \in C$ olsun. $T_a$ dönüşümünü

$$T_a(z) = \frac{1}{z-a}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} V_n(z) &= X_1 \circ X_2 \circ \ldots \circ X_{n-1} \circ X_n(z) \\ &= T_a^{-1} \circ \left[T_a X_1 T_a^{-1}\right] \circ \left[T_a X_2 T_a^{-1}\right] \circ \ldots \circ \left[T_a X_{n-1} T_a^{-1}\right] \circ \left[T_a X_n T_a^{-1}\right] \circ T_a(z) \\ &= T_a^{-1} \circ W_n \circ T_a(z) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$W_n(z) = \left[T_a X_1 T_a^{-1}\right] \circ \left[T_a X_2 T_a^{-1}\right] \circ \ldots \circ \left[T_a X_{n-1} T_a^{-1}\right] \circ \left[T_a X_n T_a^{-1}\right](z)$$

dir.

Şimdi (3.10)'u kullanarak

$$a_n - c_n a = \frac{1}{c_n a + d_n}, \; n = 1, 2, \ldots \text{ hemen hemen kesin} \tag{3.11}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.10) ve (3.11)'den

$$T_a X_n T_a^{-1}(z) = \frac{\left(a_n - c_n a\right)^{-1} z + c_n}{a_n - c_n a}, \; n = 1, 2, \ldots \text{ hemen hemen kesin}$$

elde edilir. Bu yüzden 2. Bölümün sonuçları kullanılabilir ve aşağıdaki teoremi elde ederiz.

**3.3.1 Teorem [8]:**

$\omega \in \Omega$ ve $z \in C_\infty / \{a\}$ ve $a_n d_n - b_n c_n = 1$ olmak üzere,

$$X_n(\omega, z) = \frac{a_n(\omega) z + b_n(\omega)}{c_n(\omega) z + d_n(\omega)},\ n = 1, 2, \ldots$$

olsun. $n \geq 1$ için

$$S_n(z) = X_n \circ X_{n-1} \circ \ldots \circ X_2 \circ X_1(z),$$
$$V_n(z) = X_1 \circ X_2 \circ \ldots \circ X_{n-1} \circ X_n(z)$$

olsun.

Farzedelim $a \in C$, $X_1$'in bir hemen hemen kesin sabit noktası ve

$$E\left[\log\left|a_1 - c_1 a\right|\right] \in (0, \infty),$$
$$E\left[\log^+ \left|c_1\right|\right] \in [0, \infty)$$

olsun. O zaman, $V \equiv \lim_{n \to \infty} V_n(z)$ hemen hemen kesin olarak mevcuttur ve z'ye bağlı değildir. Ayrıca V'nin yasası $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ Markov Zinciri'nin durağan dağılımıdır ve bu zincir yalnızca bir durağan dağılıma sahiptir.

**İspat:** 3.1.1 Teorem yardımıyla görülür. □

Goodall'ın çalıştığı Cut-grow modelin genellemesi için Letac [10]'un bazı sonuçlarını kullanacağız. $\Lambda_R$ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Lambda_R = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in R \ \text{ve}\ ad-bc=1 \right\}. \tag{3.12}$$

$\Lambda_R$'nin herhangi bir elemanı üst yarı düzlemi üst yarı düzleme dönüştürür ve reel ekseni değişmez bırakır.

$L \in \Lambda_R$ dönüşümüne $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ile verilen $M \in SL_2(R)$ matrisi karşılık gelir.

$$H = \{ z = x + iy \mid x \in R, y > 0 \}$$

ve

$$\partial H = \{ z = x + iy \mid x \in R, y = 0 \} \cup \{\infty\}$$

olsun.

**3.3.2 Teorem [13]:**

$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda_R$ kümesindeki kesirli lineer dönüşümlerin bir dizisi olsun ve buna karşılık gelen matrislerin dizisi $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \| M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M_n > 0 \tag{3.13}$$

ise bir $x \in \partial H$ vardır öyle ki her $z \in H$ için $n \to \infty$ iken $V_n(z) \to x$ dir.

(3.13) de herhangi bir norm belirlenmemiştir. Uygun olması için $M^T$, M'nin transpozunu göstermek üzere bir 2x2 reel M matrisinin normunu

$$\| M = \sqrt{iz\left(M.M^T\right)}$$

şeklinde tanımlayacağız.

**3.3.3 Teorem:**

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $\Lambda_R$ değerli rastlantısal değişkenlerin durağan, ergodic ve time reversible bir dizisi olsun ve buna karşılık gelen matrislerin dizisi $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, hemen hemen kesin sınırlı olsun. Eğer

$$\Lambda \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\log \| M_n M_{n-1} ... M_2 M_1\right] > 0 \tag{3.14}$$

ise bir V, $\partial H$ değerli rastlantısal değişkeni vardır ki $\forall z \in H$ için z'ye bağlı olmaksızın $n \to \infty$ iken $V_n(z) \to V$ hemen hemen kesin olur.

**İspat:** Kingman'ın Subadditive Ergodic Teoremi'nden biliyoruz ki $\Lambda$ vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_n M_{n-1} \ldots M_2 M_1 = \Lambda \text{ hemen hemen kesin} \tag{3.15}$$

dir. [14] de verilen teoremden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|M_n^T \cdot M_{n-1}^T \ldots M_2^T \cdot M_1^T =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|M_n M_{n-1} \ldots M_2 M_1 \text{ hemen hemen kesin} \tag{3.16}$$

eşitliğini yazabiliriz. $\|$ 'nın seçiminden biliyoruz ki $\forall n$ ve $\forall \omega$ için

$$\| M_n^T M_{n-1}^T ... M_2^T M_1^T = \| M_1 M_2 ... M_{n-1} M_n \tag{3.17}$$

dir. (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.17)'yi birleştirerek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| M_1 M_2 ... M_{n-1} M_n > 0 \text{ hemen hemen kesin} \tag{3.18}$$

sonucunu elde ederiz. Bu yüzden (3.18) ve 3.3.2 Teoremden dolayı $\partial H$ değerli bir V rastlantısal değişkeni vardır ki $\forall z \in H$ için z'ye bağlı olmaksızın $n \to \infty$ iken $V_n(z) \to V$ hemen hemen kesin olur. Bu teoremi kanıtlar [8]. □

**Not:** (3.14) oldukça zayıf şartlar altında sağlanır. [13] numaralı kaynağın 2. bölümüne bakınız.

**3.3.4 Sonuç:**

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda_R$ değerli rastlantısal değişkenlerin durağan, ergodic ve time reversible bir dizisi olsun ve buna karşılık gelen matrislerin dizisi $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ hemen hemen kesin olarak sınırlı olsun.

$$\Lambda \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\log \| M_n M_{n-1} ... M_2 M_1\right] > 0$$

olduğunu varsayalım. $z \in H$ olmak üzere

$$V \equiv \lim_{n\to\infty} V_n(z)$$

olsun. O zaman $S_n(z)$ dizisi $n \to \infty$ için dağılımda V'nin yasasına yakınsar.

**İspat:** 3.3.3 Teoremden biliyoruz ki V, iyi tanımlanmıştır ve z'ye bağlı değildir. $S_n(z)$'nin dağılımı her bir n = 1, 2, … için $V_n(z)$'nin dağılımı ile aynı olduğundan

$S_n(z)$'nin $\forall z \in$ için $n \to \infty$ iken V'nin yasasına dağılımda yakınsadığı sonucunu elde ederiz. Bu sonucu kanıtlar [8]. $\square$

**3.3.5 Sonuç [8]:**

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\Lambda_R$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi olsun ve buna karşılık gelen matrislerin dizisi $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ hemen hemen kesin olarak sınırlı olsun.

$$\Lambda \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\log \| M_n M_{n-1} \ldots M_2 M_1\right] > 0$$

olduğunu varsayalım. $z \in H$ olmak üzere

$$V \equiv \lim_{n\to\infty} V_n(z)$$

olsun. V'nin yasası, $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ Markov Zinciri'nin durağan dağılımıdır ve bu zincir yalnızca bir durağan dağılıma sahiptir.

**İspat:** 3.3.3 Teoremden biliyoruz ki V iyi tanımlanmıştır ve z'ye bağlı değildir. Bu yüzden 3.1 Teoremden sonuç kanıtlanabilir. $\square$

Şimdi 3.3.3 Teoremin bir sonucu olarak Cut-grow modelin genellemesinin verebiliriz.

**3.3.6 Sonuç [8]:**

$\{\lambda_n, \eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $(0,1] \mathrm{x} [1,\infty)$ değerli rastlantısal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağıtılmış bir dizisi olsun.

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\eta_n \lambda_n} \\ -1/\sqrt{\eta_n \lambda_n} & \sqrt{\eta_n / \lambda_n} \end{bmatrix}$$

ile tanımlı $M_n$ matrisini alalım. Eğer

$$p\left[ \sqrt{\eta_n \lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\eta_n \lambda_n}} + \sqrt{\frac{\eta_n}{\lambda_n}} < K \right] = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[ \log \| M_n M_{n-1} \ldots M_2 M_1 \right] > 0$$

olacak şekilde bir K>0 varsa şekli z olan ve dejenere olmayan bir başlangıç o- üçgeni için, şekillerin $S_n(z)$ dizisi, $V = \lim_{nx\to\infty} V_n(z)$ olmak üzere $n \to \infty$ iken dağılımda V'nin yasasına yakınsar.

**İspat:** Bu 3.3.5 Sonucun özel bir durumudur. 

Dikkat edilirse 3.3.6 Sonuçta verilen cut-grow modelin genelleştirilmesi gösteriyor ki dağılım anlamında bir regülerlik oluşur ve aynı zamanda limit dağılım hakkında da bazı bilgiler söyleyebiliriz. Ayrıca belirtmeliyiz ki $M_n$, $n = 1, 2, \ldots$ matrislerine karşılık gelen kesirli lineer dönüşümlerin hemen hemen kesin sabit noktaları ile ilgili herhangi bir varsayım yapmadık.

## KAYNAKLAR


**[1]** Jones, G.A. and Singerman, D., Complex functions, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

**[2]** Ford, L.R., Automorphic functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951).

**[3]** Hille, E., Analytic function theory, Chelsea Publishing Company, New York, (1976).

**[4]** Sheldon, M.R., Introduction to probability models, Clarendon Press Oxford, London, (2000).

**[5]** Khaniyev, T., Markov zincirleri, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon, (2003).

**[6]** İnal, H.C., Günay, S., Olasılık ve matematiksel istatistik, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, (1999).

**[7]** Steele, J.M., “Kingman’s Subadditive Ergodic Theorem”, Annales de l’I.H.P., Section B, **25** (1), (1989), 93–98.

**[8]** Satyajit, K., Key, E.S., “Compositions of random Möbius transformations”, Stochastic Analysis and Applications, **22** (3), (2004), 525–577.

**[9]** Goodall, C.R., “Eigenshape analysis of a cut-grow mapping for triangles and it’s application to phyllotaxis in plants”, SIAM J. Appl. Math., **51**, (1991), 775–798.

**[10]** Letac, G., “A contradiction principle for certain Markov chains and it’s applications.”, American Mathematical Society, **50**, (1986), 263–273.

**[11]** Mannion, D., “Convergence to collinearity of a sequence of triangle shapes”, Adv. in App. Pro., **22** (4), (1990), 831–844.

**[12]** Mannion, D., “The invariant distribution of a sequence of random collinear triangle shapes”, Adv. in App. Pro., **22** (4), (1990), 845–865.

**[13]** Bougerol, P., Lacroix, J., Product of random matrices with applications to schrödinger operators, Birkhauser, Boston, (1985).

**[14]** Key, E.S., “Lyapunov exponents for matrices with invariant subspaces”, The Annals of Probability, **16**, (1988), 81–121.