T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SMIRNOV-ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

Ramazan AKGÜN

Balıkesir, Mayıs - 2007

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SMIRNOV-ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

Ramazan AKGÜN

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 08.05.2007
Jüri Üyeleri :
Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (BAÜ, FEF) (Danışman)
Prof. Dr. Güzin GÖKMEN (DEÜ, FEF)
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (UÜ, FEF)
Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ, FEF)
Yrd. Doç. Dr. Ali GÜVEN (BAÜ, FEF)

Balıkesir, Mayıs - 2007

“Bu çalışma Balıkesir Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından BAP 2006/40 Kodlu Proje İle desteklenmiştir.Teşekkür ederiz.”

ÖZET

SMIRNOV-ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Ramazan AKGÜN

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV)

Balıkesir, 2007

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yaklaşım teorisi ve kompleks düzlemde bu teorinin gelişimi ile ilgili kronolojik bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanımlar ve araştırma konusu olan fonksiyon uzaylarının tanımları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Faber-Laurent serileri, onların temel özellikleri ve Faber operatörleri hakkında genel bilgiler vardır.

Üçüncü bölümde, kapalı Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı Smirnov-Orlicz uzayları göz önüne alınarak, bu uzaylarda Faber polinomları ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenmiştir. Bu teoremler yardımıyla, bu Dini-düzgün eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu ile ilgili teoremler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı Smirnov-Orlicz uzayı tanımlanmış, ağırlığın bazı Muckenhoupt koşullarını sağladığı durumda, Faber polinomları ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşımın düz ve ters problemleri ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu problemleri incelenmiştir.

Son bölümde, elde edilen sonuçların bir özeti verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Orlicz uzayı, Smirnov-Orlicz uzayı, Faber-Laurent Serisi, Faber operatörü, Dini-düzgün eğri, düz teorem, ters teorem, yapısal karakterizasyon.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLINOMIALS IN SMIRNOV-ORLICZ SPACES

Ramazan AKGUN

Balikesir University, Institute of Science

Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Daniyal M. ISRAFILOV)

Balikesir – Turkey, 2007

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, some chronological information about the approximation theory and its progress are given.

In the second chapter, basic definitions and the definitions of the function spaces which are investigated are given. In addition, it contains the definitions, general properties of the Faber-Laurent series and the Faber operators.

In the third chapter, considering the Smirnov-Orlicz spaces of functions defined on the bounded and unbounded components of a given closed Dini-smooth curve, the direct and inverse theorems of approximation theory by the Faber polynomials and the Faber-Laurent rational functions are investigated.

In the third chapter, the weighted Smirnov-Orlicz spaces of functions given on the bounded and unbounded components of Dini-smooth curve are defined and the direct and inverse theorems of approximation theory by the Faber polynomials and the Faber-Laurent rational functions are proved and some constructive characterization problems are investigated.

In the last chapter the results which are obtained are summarized according to chapters.

KEY WORDS : Orlicz space, Smirnov-Orlicz space, Faber-Laurent series, Faber operator, Dini-smooth curve, direct theorem, inverse theorem, constructive characterization.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Tanımı	Sayfa
$\mathbf{C}$	Kompleks düzlem	4
$\mathbf{T}$	Birim çember	4
$\mathbf{D},\mathbf{D}^-$	Birim disk, Birim çemberin sınırsız bileşeni	4
$\mathbf{R},\mathbf{R}^+$	Reel eksen, Pozitif reel eksen	5
$P_r(x-y)$	Poisson çekirdeği	26
Φ_k	k dereceli Faber polinomu	14
$\mathbf{P},\mathbf{P}(\mathbf{D})$	Polinomlar ailesi, Polinomlar ailesinin $\mathbf{D}$ deki izi	16
$T,\tilde{T}$	Faber ve Faber-Laurent operatörü	16
$E_M(G)$	Smirnov-Orlicz uzayı	7
$L_M(\Gamma)$	Orlicz uzayı	6
K	Kontinyum(Continuum)	18
Γ_R,γ_r	Seviye eğrileri	19-7
U_n,S_n	Faber-Laurent ve Faber serisinin n. kısmi toplamı	22
$S_\Gamma,S_\mathbf{T}$	Cauchy singüler operatörü	14
α_M,β_M	Alt ve üst Boyd indisi	11
mes	Ölçüm(measure)	26
$\omega^r_{\Gamma,M}$	r. düzgünlük modülü	9
$\Omega^r_{\Gamma,M,\omega}$	Ağırlıklı r. düzgünlük modülü	12
$E_n(f,G)$	En iyi yaklaşım hatası	10
$Lip\alpha(M)$	Genelleştirilmiş Lipschitz sınıfı	9

ÖNSÖZ

Bu çalışmada beni daima destekleyen sayın hocam Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV'a ne kadar teşekkür etsem azdır.

Matematiğe karşı ilgimin artmasında emeği olan Matematik bölümü öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim.

Sevgili eşim Selma'nın her zamanki ilgi ve desteğine ayrıca teşekkürlerimi sunuyorum.

Balıkesir, 2007 Ramazan AKGÜN

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belli özelliklere sahip fonksiyon uzaylarının elemanlarına, bu uzayın bir alt uzayından olup daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenir. Genellikle bu alt uzay olarak, özellikleri çok iyi bilinen, polinomlar yada rasyonel fonksiyonlar ailesi alınmaktadır. Temel problemlerden biri, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığı problemidir. Özel halde, alt uzay olarak polinomlar kümesi alındığında Banach uzaylarında en iyi yaklaşım elemanının varlığı iyi bilinmektedir. Bu problemin pozitif çözümü bir sonraki problemin, verilen fonksiyonla buna en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın, fonksiyonun belli karakteristikleri (örneğin, düzgünlük modülü) yardımıyla değerlendirilmesi probleminin çözümü için bir altyapı oluşturmaktadır. En iyi yaklaşım hatasının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Bunun tam zıttı olan problemler ise yaklaşım teorisinin ters problemleri olarak bilinmektedir. Bu durumda, düzgünlük modülü üstten en iyi yaklaşım sayısı yardımı ile değerlendirilir ve fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre hangi sınıfa ait olduğu hakkında bilgi edinme amacı güdülür. En ideal durum, belli bir sınıfta elde edilen düz ve ters yaklaşım teoremlerin bir birini karşılamasıdır. Yani yaklaşım hızına dayanılarak bu fonksiyonun hangi sınıftan olduğuna kesin karar verilebilmesidir. Bu durumda verilen fonksiyonlar sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilebilir denir.

$E^p(G)$, $1<p<\infty$, Smirnov uzaylarında yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemi 1959 yılında Walsh ve Russel [1] ile başlar. Bu çalışmada kompleks düzlemde sınırı analitik eğri olan G basit bağlantılı, sınırlı bölgesi göz önüne alınmış, polinomlarla yaklaşımın hızı değerlendirilmiştir. 1960 yılında S. Ya. Al'per [2] bölgenin sınırını Dini-düzgün eğri alıp polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremlerini elde etmiştir. Daha sonra 1967 yılında V. M. Kokilashvili [3] Al'per'in sonuçlarını geliştirmiş ve bölgenin sınırının Dini-düzgün eğri olduğu durumda düz ve ters yaklaşım teoremlerinin bazı iyileştirmelerini ispatlamıştır. V. M. Kokilashvili [4] de bölgenin sınırını Carleson eğrisi almış ve S singüler integral operatörünün $L^p(\partial G)$, $1<p<\infty$ Lebesgue uzayında sınırlı olması koşulu altında [3] deki sonuçlarını genelleştirmiştir. Benzer bazı sonuçlar D. I. Mamedhanov ve I. I. Ibragimov [5] tarafından da elde edilmiştir. 1977 yılında J-E. Andersson [6] bazı özel bölgeler sınıfında V. M. Kokilashvili'nin [4] deki düz teoreminin $p=1$ için de doğru olduğunu göstermiştir. Diğer taraftan, $E^1(G)$ uzayında bazı yaklaşım problemleri M. I. Andrasko [7] ve D. M. Galan [8] tarafından incelenmiştir. D. M. Israfilov, bölgenin sınırı Carleson eğrisi ve $1<p<\infty$ durumunda $E^p(G)$, $1<p<\infty$ uzayında Faber polinomları ile yaklaşımı [9] da, p-Faber polinomları ile yaklaşımı A. Çavuş'la birlikte [10] da incelemişlerdir. Bu çalışmalardaki sonuçlar ağırlıklı Lebesgue uzayına da taşınmıştır [11], [12].

Kompleks düzlemde yaklaşım problemleri daha genel uzaylar için de incelenmiştir. Bu bağlamda 1968 yılında [13] V. M. Kokilashvili tarafından Smirnov uzaylarının bir genellemesi olan $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfı tanımlanmış ve bölge sınırı Dini-düzgün eğri iken bazı ters yaklaşım teoremlerini ispatlamıştır. Bu uzayda düz teoremler son yıllarda elde edilmiştir; A. Güven ve D. M. Israfilov [14] te Carleson eğrisi ile sınırlı bölgede tanımlı fonksiyonların Smirnov-Orlicz uzayının belirli bir alt uzayında düz teoremi ispatlamışlardır.

Bu tezde, Smirnov-Orlicz uzayı göz önüne alınıp G bölgesinin Dini-düzgün eğri ile sınırlı olduğu durumda cebirsel polinomlarla düz ve ters yaklaşım problemleri incelenmiştir.

İkinci bölümde temel tanımlar ve araştırma konusu olan fonksiyon uzaylarının tanımları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Faber-Laurent serileri, onların temel özellikleri ve Faber operatörleri hakkında genel bilgiler vardır.

Üçüncü bölümde, kapalı Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı Smirnov-Orlicz uzayları göz önüne alınarak, bu uzaylarda Faber polinomları [15] ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenmiştir. Bu teoremler yardımıyla, bu Dini-düzgün eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu ile ilgili teoremler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Dini-düzgün eğrisinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı Smirnov-Orlicz uzayı tanımlanmış, ağırlığın bazı Muckenhoupt koşullarını sağladığı durumda, Faber polinomları [16] ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşımın düz ve ters problemleri ve genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu problemleri incelenmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

2.1 Tanımlar ve Bazı Analitik Fonksiyon Sınıfları

$\Gamma \subset \mathbf{C}$ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi kompleks düzlemi iki bileşene ayırır. Bunlardan sınırlı olan iç bölgeyi G ile, sınırsız olan dış bölgeyi G^{-} ile gösterelim. Genelliği bozmadan $0 \in G$ alabiliriz. Ayrıca $\mathbf{T}$ ile birim çemberi, $\mathbf{D}$ ile birim diski ve $\mathbf{D}^{-}$ ile $\mathbf{T}$ nin sınırsız bileşenini gösterelim. $w = \varphi(z)$ ve $w = \varphi_1(z)$, G^{-} ve G nin $\mathbf{D}^{-}$ ye sırasıyla

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0,$$

$$\varphi_1(0) = \infty, \quad \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümler olsun. ψ ve ψ_1, sırasıyla, φ ve φ_1 in ters dönüşümlerini göstersin.

Tanım 2.1.1 $[0,2\pi]$ de sürekli h fonksiyonunun **süreklilik modülü**

$$\omega(t,h) := \sup\left\{ \ |h(t_1) - h(t_2)| : t_1, t_2 \in [0,2\pi], \ |t_1 - t_2| \le t \ \right\}, \quad t \ge 0$$

olarak tanımlanır. Eğer

$$\int_0^{c_1} \frac{\omega(t,h)}{t} dt < \infty, \quad c_1 > 0$$

koşulu sağlanıyorsa h fonksiyonuna **Dini-sürekli** fonksiyon denir. Eğer $\Gamma \subset \mathbf{C}$ eğrisinin

$$\Gamma: \varphi_0(\tau), \qquad 0 \le \tau \le 2\pi$$

gösterimi için $\varphi'_0 \neq 0$ ve φ'_0 Dini-sürekli fonksiyon oluyor ise Γ eğrisine **Dini-düzgün** eğri denir. Bu eğrilerin önemli bir özelliği [17]

$$0 < c_2 \le |\psi'(w)| \le c_3, \qquad |w| \ge 1 \tag{2.1}$$

koşulunu sağlamasıdır. Burada c_2 ve c_3 w den bağımsız sabitlerdir. Benzer eşitsizlikler ψ'_1 için birim çember üzerinde geçerlidir.

Tanım 2.1.2 Bir $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ fonksiyonu verilsin. *p*(*t*), *t*≥0 için sağ-sürekli ve azalmayan, *t*>0 için pozitif ve

$$p(0)=0, \quad p(\infty) := \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$M(x) = \int_0^{|x|} p(t)\,dt$$

gösterimi mevcut ise *M* fonksiyonuna bir ***N*-fonksiyon** denir.

$$q(s) := \sup_{p(t)\le s} t, \quad (s \ge 0)$$

olmak üzere

$$N(y) := \int_0^{|y|} q(s)\,ds$$

fonksiyonuna *M* fonksiyonunun **tamamlayıcı fonksiyonu** denir.

Tanım 2.1.3 *M* bir *N*-fonksiyon ve *N* onun tamamlayıcı fonksiyonu olsun. $L_M(\Gamma)$ ile bir $\alpha>0$ için

$$\int_\Gamma M(\alpha|f(z)|)|dz|<\infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir $f:\Gamma\to\mathbf{C}$ fonksiyonlarının doğrusal uzayını gösterelim.

$$\rho(g;N):=\int_\Gamma N[|g(z)|]|dz|$$

olmak üzere, $L_M(\Gamma)$ uzayı

$$\|f\|_{L_{(M)}(\Gamma)}:=\inf\left\{\tau>0:\rho\left(\frac{f}{\tau};M\right)\le 1\right\}$$

Luxemburg normu ve

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)}:=\sup\left\{\int_\Gamma |f(z)g(z)||dz|:g\in L_N(\Gamma);\ \rho(g;N)\le 1\right\}$$

Orlicz normuna göre bir Banach uzayı olur.

$L_M(\Gamma)$ Banach uzayına **Orlicz uzayı** denir ve

$$L_M(\Gamma)\subset L^1(\Gamma) \tag{2.2}$$

olduğu bilinmektedir.

Tanım 2.1.4 *M* bir *N*-fonksiyon olmak üzere, eğer

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathrm{M}(2\mathrm{x})}{\mathrm{M}(\mathrm{x})} < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa *M* fonksiyonuna Δ_2 koşulunu sağlar denir.

$L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının yansımalı (refleksif) olması için gerekli ve yeterli koşul *M* ve tamamlayıcı fonksiyonu *N* nin her ikisinin de Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.

Tanım 2.1.5 Γ_r, $\mathbf{D}$ nin *G* ye bir konform dönüşümü altında

$$\gamma_r := \{w \in \mathbf{C} : |w| = r\}, \quad r \in (0,1)$$

çemberinin görüntüsü ve *M* bir *N*-fonksiyon olsun. *G* de analitik ve her $r \in (0,1)$ için

$$\int_{\Gamma_r} M(|f(z)|)|dz| \le c_4 < \infty$$

koşulunu sağlayan *r* den bağımsız bir $c_4 > 0$ sabitinin var olduğu $f : G \to \mathbf{C}$ fonksiyonlarının sınıfı $E_M(G)$ ile gösterilir ve bu uzaya **Smirnov-Orlicz** uzayı denir. $E_M(G^-)$ uzayı aynı biçimde tanımlanır. Ayrıca

$$E_M(G) \subset E^1(G) \text{ ve } E_M(G^-) \subset E^1(G^-)$$

olur. $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz uzayı bilinen $E^p(G)$ Smirnov uzayının bir genellemesidir. Özel halde $M(x) := x^p$, $1 < p < \infty$, fonksiyonuna göre oluşturulan $E_M(G)$ uzayı $E^p(G)$ uzayı ile çakışır. $E_M(G)$ uzayındaki her bir fonksiyonun

Γ üzerinde h.h. her yerde sınır değeri vardır ve bu sınır değer fonksiyonu $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayındandır [13].

Tanım 2.1.6 $\varsigma \in \Gamma$ olmak üzere

$$\varsigma_h := \psi\left(\varphi(\varsigma)e^{ih}\right), \qquad h \in [0, 2\pi]$$

ve

$$T_h f(\varsigma) := f(\varsigma_h), \quad f \in L_M(\Gamma) \tag{2.3}$$

olsun. $T_h f$ yardımıyla $\omega_M(f,\cdot)$ **süreklilik modülü**

$$\omega_M(f,\delta) := \sup_{|h|\le t} \|f - T_h f\|_{L_M(\Gamma)}, \quad \delta \ge 0 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

$f \in L^1(\Gamma)$ olmak üzere

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, \quad z \in G, \tag{2.5}$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, \quad z \in G^-$$

fonksiyonları sırasıyla G ve G^- de analitiktirler ve $f^-(\infty) = 0$ sağlanır.

$\tilde{E}_M(G^-) := \left\{ f \in E_M(G^-) : f(\infty) = 0 \right\}$ olsun.

Tanım 2.1.7 $g \in L_M(\mathbf{T})$ fonksiyonunun ***r*. düzgünlük modülü**

$$\omega_M^r(g,\delta) := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \Delta_h^r g \right\|_{L_M(\mathbf{T})}, \quad \delta > 0, \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\Delta_h^r g(\cdot) := \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} g(\cdot + \nu h)$$

dir.

Γ Dini-düzgün bir eğri olmak üzere $f \in E_M(G)$ için (2.1) den $f_0 := f \circ \psi \in L_M(\mathbf{T})$ ve $f_1 := f \circ \psi_1 \in L_M(\mathbf{T})$ elde edilir. Eğer $L_M(\mathbf{T})$ uzayı yansımalı ise (Önerme 3) $f_0^+,\ f_1^+ \in E_M(\mathbf{D})$ olur.

Tanım 2.1.8 $r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ olmak üzere, $\delta > 0$ için

$$\omega_{\Gamma,M}^r(f,\delta) := \omega_M^r\left(f_0^+,\delta\right),$$

$$\tilde{\omega}_{\Gamma,M}^r(f,\delta) := \omega_M^r\left(f_1^+,\delta\right)$$

düzgünlük modüllerini tanımlayalım.

Tanım 2.1.9 $\alpha > 0$ ve $r := [\alpha] + 1$ olsun. Bu durumda

$$Lip\alpha(M) := \left\{ f \in E_M(G) : \omega_{\Gamma,M}^r(f,\delta) = \mathrm{O}\left(\delta^\alpha\right),\ \ \delta > 0 \right\},$$

$$Lip^{*}\alpha(M):=\left\{f\in E_M\left(G^{-}\right):\tilde{\omega}^{r}_{\Gamma,M}(f,\delta)=\mathrm{O}\left(\delta^{\alpha}\right),\quad \delta>0\right\}$$

sınıflarına sırasıyla G ye ve G^{-} ye göre **genelleştirilmiş Lipschitz sınıfları** denir.

Tanım 2.1.10 $f\in E_M(G)$ fonksiyonuna **en iyi yaklaşım hatası**

$$E_n(f,G)_M:=\inf_p\|f-p\|_{L_M(\Gamma)}$$

ile tanımlanır ve burada infimum derecesi n yi aşmayan tüm p cebirsel polinomları üzerinden alınır.

Tanım 2.1.11 Bir $\omega:\Gamma\to[0,\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir ve $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ öngörüntü kümesinin ölçümü sıfır oluyorsa ω fonksiyonuna bir **ağırlık** fonksiyonu denilir.

Tanım 2.1.12 ω, Γ da tanımlı bir ağırlık olmak üzere, Γ üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve $\omega f\in L_M(\Gamma)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $L_M(\Gamma,\omega)$ ile gösterilir ve bu uzaya **ağırlıklı Orlicz uzayı** denir. Ağırlıklı Orlicz uzayında norm

$$\|f\|_{L_M(\Gamma,\omega)}:=\|\omega f\|_{L_M(\Gamma)}$$

olarak tanımlanır. $L^p(\Gamma,\omega)$ **ağırlıklı Lebesgue uzayı** da benzer biçimde tanımlanır.

$$E_M(G,\omega):=\left\{f\in E^1(G):f\in L_M(\Gamma,\omega)\right\},$$

$$E_M\left(G^-,\omega\right):=\left\{f\in E^1\left(G^-\right): f\in L_M\left(\Gamma,\omega\right)\right\},$$

$$\tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right):=\left\{f\in E_M\left(G^-,\omega\right): f\left(\infty\right)=0\right\}$$

olsun.

Tanım 2.1.13 $p\in\left(1,\infty\right)$ ve $p^{-1}+q^{-1}=1$ olsun. Γ üzerinde tanımlı ve

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,\varepsilon)}\omega^p\left(z\right)\left|dz\right|\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,\varepsilon)}\omega^{-q}\left(z\right)\left|dz\right|\right)^{1/q}<\infty \qquad (*)$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfını $A_p\left(\Gamma\right)$ il gösterelim. (*) koşuluna Muckenhoupt A_p-koşulu denir.

$$\mu:(0,\infty)\to(0,\infty],\quad \mu(x):=\limsup_{y\to\infty}\frac{M^{-1}\left(y\right)}{M^{-1}\left(y/x\right)}$$

olsun.

Tanım 2.1.14 $M^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$, *M* fonksiyonunun tersi olmak üzere

$$\alpha_M:=\lim_{x\to0}\frac{\log\mu(x)}{\log x},\qquad \beta_M:=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\mu(x)}{\log x}$$

değerlerine [18, s.350] $L_M\left(\Gamma\right)$ Orlicz uzayının sırasıyla **alt** ve **üst Boyd indisleri** denir.

Tanım 2.1.15 $g\in L_M\left(\mathbf{T},\omega\right)$, $\omega\in A_{1/\alpha_M}\left(\mathbf{T}\right)\cap A_{1/\beta_M}\left(\mathbf{T}\right)$ olsun. Bu durumda

$$\sigma_h(g)(w) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} g\left(we^{it}\right)dt, \quad 0 < h < \pi, \ w \in \mathbf{T}$$

Steklov ortalaması ve I birim operatör olmak üzere

$$\Omega^k_{M,\omega}(f,\delta) := \sup_{\substack{0<h_i\leq\delta \\ i=1,\ 2,\ \dots,\ k}} \left\| \prod_{i=1}^{k}\left(I-\sigma_{h_i}\right)g \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)}, \quad \delta > 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

fonksiyonuna g nin **k. düzgünlük modülü** denir.

Tanım 2.1.16 ω, Γ üzerinde bir ağırlık, $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ ve $w \in \mathbf{T}$ olmak üzere

$$\omega_0(w) := \omega(\psi(w)), \quad \omega_1(w) := \omega(\psi_1(w)),$$
$$f_0(w) := f(\psi(w)), \quad f_1(w) := f(\psi_1(w))$$

olsun. $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ olduğunda (2.1) ile $f_0 \in L_M(\mathbf{T},\omega_0)$ ve $f_1 \in L_M(\mathbf{T},\omega_1)$ bulunur. f_0^+ ve f_1^+ fonksiyonlarının $\mathbf{T}$ üzerindeki sınır değerlerini göz önüne alarak, $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ ve $r = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ olmak üzere, $\delta > 0$ için

$$\Omega^r_{\Gamma,M,\omega}(f,\delta) := \Omega^r_{M,\omega_0}\left(f_0^+,\delta\right),$$

$$\tilde{\Omega}^r_{\Gamma,M,\omega}(f,\delta) := \Omega^r_{M,\omega_1}\left(f_1^+,\delta\right)$$

tanımlayalım.

Tanım 2.1.17 $\alpha > 0$ ve $r := [\alpha] + 1$ olsun. Bu durumda

$$Lip\alpha(M,\omega) := \left\{ f \in E_M(G,\omega) : \Omega^r_{\Gamma,M,\omega}(f,\delta) = \mathrm{O}\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta > 0 \right\},$$

$$Lip^*\alpha(M,\omega) := \left\{ f \in E_M\left(G^-,\omega\right) : \tilde{\Omega}^r_{\Gamma,M,\omega}(f,\delta) = \mathrm{O}\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta > 0 \right\}$$

ailelerine sırasıyla G ye ve G^- ye göre **genelleştirilmiş Lipschitz sınıfları** denir.

Tanım 2.1.18 $f \in L^1(\Gamma)$ fonksiyonunun **Cauchy singüler integrali**

$$S_\Gamma f(z_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma \cap \{w : |w - z_0| \geq \varepsilon\}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0} d\varsigma, \quad z_0 \in \Gamma$$

ile tanımlanır.

Eğer f^+ yada f^- fonksiyonlarından birinin Γ üzerinde h.h. her yerde açısal yollar boyunca sınır değeri varsa, Γ üzerinde h.h. her yerde $S_\Gamma f(z)$ vardır ve f^+ yada f^- fonksiyonlarından diğerinin de Γ üzerinde h.h. her yerde açısal yollar boyunca sınır değeri vardır. Tersine, eğer Γ üzerinde h.h. her yerde $S_\Gamma f(z)$ varsa, f^+ ve f^- fonksiyonlarının da Γ üzerinde h.h. her yerde açısal yollar boyunca sınır değeri vardır. Her iki durumda da

$$f^+(z) = S_\Gamma f(z) + f(z)/2 \tag{2.6}$$

$$f^-(z) = S_\Gamma f(z) - f(z)/2 \tag{2.7}$$

ve dolayısıyla

$$f = f^{+} - f^{-} \tag{2.8}$$

eşitliği Γ üzerinde h.h. her yerde sağlanır [19, s.431].

$S_\Gamma : f \to S_\Gamma f$ doğrusal operatörüne **Cauchy singüler operatör** denir.

2.2 Faber-Laurent Serileri ve Faber Operatörleri

Bilindiği gibi [20, s.52,255]

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_k(z)}{w^{k+1}}, \qquad z \in G, \quad w \in \mathbf{D}^{-}, \tag{2.9}$$

ve

$$\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(1/z)}{w^{k+1}}, \quad z \in G^{-}, \quad w \in \mathbf{D}^{-} \tag{2.10}$$

açılımları geçerlidir. Burada $\Phi_k(z)$ ve $F_k(1/z)$, sırasıyla $\overline{G}$ kontinyumuna göre z nin ve $\overline{\mathbf{C}}\backslash G$ kontinyumuna göre $1/z$ nin, ***k*** **dereceli Faber polinomlarıdır**. Ayrıca [20, s.35,255]

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^k \psi'(w)}{\psi(w)-z} dw, \quad z \in G, \;\; R > 1, \tag{2.11}$$

$$F_k\left(1/z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{w^k\psi_1'\left(w\right)}{\psi_1\left(w\right)-z}dw,\quad z\in G^- \tag{2.12}$$

integral gösterimleri ve

$$\Phi_k\left(z\right)=\varphi^k\left(z\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi^k\left(\varsigma\right)}{\varsigma-z}d\varsigma,\quad z\in G^-,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \dots, \tag{2.13}$$

$$F_k\left(1/z\right)=\varphi_1^k\left(z\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_1^k\left(\varsigma\right)}{\varsigma-z}d\varsigma,\quad z\in G\setminus\{0\} \tag{2.14}$$

eşitlikleri sağlanır. Şimdi

$$a_k:=a_k\left(f\right):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{f_0\left(w\right)}{w^{k+1}}dw,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \dots, \tag{2.15}$$

$$\tilde{a}_k:=\tilde{a}_k\left(f\right):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{f_1\left(w\right)}{w^{k+1}}dw,\quad k=1,\ 2,\ \dots \tag{2.16}$$

olarak alıp, $f\in L^1\left(\Gamma\right)$ fonksiyonuna

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k\left(z\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_kF_k\left(1/z\right)$$

serisini karşılık getirelim, yani

$$f\left(z\right)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k\left(z\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_kF_k\left(1/z\right)$$

olsun. Yukarıdaki seriye f fonksiyonuna karşılık gelen **Faber-Laurent serisi**, a_k ve $\tilde{a}_k$ değerlerine de f nin **Faber-Laurent katsayıları** denir.

$\mathbf{P}$ ile bütün polinomların ailesini, $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ ile bu ailenin $\mathbf{D}$ deki izini gösterelim. $\mathbf{P}_n$ n dereceli polinomların ailesini, $\mathbf{P}_n(\mathbf{D})$ ise $\mathbf{P}_n$ ailesinin $\mathbf{D}$ deki izini göstersin. $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ üzerinde

$$T:\mathbf{P}(\mathbf{D})\to E_M(G) \text{ ve } \tilde{T}:\mathbf{P}(\mathbf{D})\to \tilde{E}_M(G^-)$$

operatörlerini

$$T(P)(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw, \quad z\in G,$$

$$\tilde{T}(P)(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{P(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw, \quad z\in G^-$$

olarak tanımlayalım. Kolayca görülebileceği gibi

$$T\left(\sum_{k=0}^{n}b_k w^k\right)=\sum_{k=0}^{n}b_k\Phi_k(z) \quad \text{ve} \quad \tilde{T}\left(\sum_{k=0}^{n}d_k w^k\right)=\sum_{k=0}^{n}d_k F_k(1/z)$$

sağlanır. Eğer $z'\in G$ ise

$$T(P)(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z'}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(P\circ\varphi)(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma=(P\circ\varphi)^+(z')$$

olur ve (2.6) dan Γ üzerinde h.h. her yerde

$$T(P)(z) = S_\Gamma(P\circ\varphi)(z) + (1/2)(P\circ\varphi)(z)$$

bulunur. Benzer olarak, Γ ya dışarıdan bütün açısal yollar boyunca yaklaşarak $z'' \to z \in \Gamma$ limitini alırsak, $z'' \in G^-$ için

$$\tilde{T}(P)(z'') = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(P\circ\varphi_1)(\varsigma)}{\varsigma - z''}d\varsigma = (P\circ\varphi_1)^-(z'')$$

olduğundan Γ üzerinde h.h. her yerde

$$\tilde{T}(P)(z) = S_\Gamma(P\circ\varphi_1)(z) - (1/2)(P\circ\varphi_1)(z)$$

çıkar. S_Γ singüler operatörü yansımalı Orlicz uzayında sınırlı [21] olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Önerme 1 Γ *Dini-düzgün bir eğri ve* $L_M(\Gamma)$ *yansımalı Orlicz uzayı ise*

$$T:\mathbf{P}(\mathbf{D}) \to E_M(G) \text{ ve } \tilde{T}:\mathbf{P}(\mathbf{D}) \to \tilde{E}_M(G^-)$$

doğrusal operatörleri sınırlıdır.

Cebirsel polinomlar kümesi $E_M(\mathbf{D})$ uzayında yoğun olduğundan, Önerme 1 ve yardımıyla T ve $\tilde{T}$ operatörlerini $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ den $E_M(\mathbf{D})$ uzayına doğrusal ve sınırlı olacak şekilde genişletebiliriz. Genişlemeleri yine aynı işaretle gösterirsek

$$T : E_M(\mathbf{D}) \rightarrow E_M(G) \text{ ve } \tilde{T} : E_M(\mathbf{D}) \rightarrow \tilde{E}_M(G^-)$$

operatörleri için

$$T(g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{g(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw, \quad z \in G, \quad g \in E_M(\mathbf{D}),$$

$$\tilde{T}(g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{g(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw, \quad z \in G^-, \quad g \in E_M(\mathbf{D})$$

gösterimleri elde edilir.

Önerme 2 *Γ Dini-düzgün bir eğri, $L_M(\Gamma)$ uzayı yansımalı ise*

$$T : E_M(\mathbf{D}) \rightarrow E_M(G) \text{ ve } \tilde{T} : E_M(\mathbf{D}) \rightarrow \tilde{E}_M(G^-)$$

operatörleri birebir ve örtendir.

K, $D := \overline{\mathbf{C}} \setminus K$ tümleyeni bağlantılı olan sınırlı bir kontinyum ve f, K da analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \quad z \in K \tag{2.17}$$

Faber açılımı K da mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$$R_n(z,f) := f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \qquad z \in K \tag{2.18}$$

ve

$$\Gamma_R := \{z \in \boldsymbol{D} : \; |\varphi(z)| = R\}$$

olsun. Burada R>1 ve G_R, Γ_R nin sınırlı bileşenidir. (2.17) serisinde katsayılar

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

olarak tanımlıdır ve (2.18) den

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} f(\psi(t))\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt$$

olduğu görülür. Eğer $p_n \in \mathbf{P}_n$ ise

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{T}} \{f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt \tag{2.19}$$

olur. Diğer yandan

$$\Phi_k(z) = \varphi^k(z) + E_k(z), \quad z \in K$$

sağlanır ve burada E_k, $\boldsymbol{D}$ de analitik bir fonksiyon, $E_k(\infty) = 0$ dir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi^k(z)}{t^{k+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(z)}{t^{k+1}} \tag{2.20}$$

olur ve (2.19), (2.20) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\left|R_n(z,f)\right| \le &\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt| \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(\psi(w))\frac{1}{t^{k+1}}\right||dt|\end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir. [20, s.63,205] den

$$E_k(\psi(w))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tau^k F(\tau,w)\,d\tau,\quad |w|\ge r>1 \tag{2.22}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left|F(\tau,w)\right||d\tau|\le\left(\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{r^2}{r^2-1}\right)^{1/2},\quad r>1,\quad |w|\ge r>1 \tag{2.23}$$

değerlendirmeleri bilinmektedir ve burada

$$F(\tau,w):=\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)}-\frac{1}{\tau-w},\quad |\tau|>1,\quad |w|>1$$

dır.

3. SMIRNOV-ORLICZ UZAYLARINDA CEBİRSEL POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

3.1 Temel sonuçlar

Teorem 1 *G, Dini-düzgün Γ sınırına sahip, sınırlı, basit bağlantılı bir bölge ve $E_M(G)$, yansımalı bir Smirnov-Orlicz uzayı olsun. Bu durumda her $f \in E_M(G)$ ve her n doğal sayısı için*

$$\left\| f - p_n(\cdot, f) \right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_5 \omega_M\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

koşulunu sağlayan, derecesi n yi aşmayan bir $p_n(\cdot, f)$ cebirsel polinomu vardır. Burada $c_5 > 0$, n den bağımsız bir sabittir.

Teorem 2 *Eğer $f \in E_M(G_R)$ ve $R > 1$ ise*

$$\left| R_n(z, f) \right| \leq \frac{c_6}{R^{n+1}(R-1)} E_n(f, G_R)_M (n \ln n)^{1/2}, \quad z \in K$$

sağlanır. Burada $c_6 > 0$ sabiti n ve z den bağımsızdır.

Sonuç 1 *K, bağlantılı tümleyene sahip bir kontinyum, $E_M(G_R)$* yansımalı *bir Smirnov-Orlicz uzayı ve $R > 1$* ise *her $f \in E_M(G_R)$ için*

$$\left| R_n(z, f) \right| \leq \frac{c_7}{R^{n+1}(R-1)} \omega_M\left(f, \frac{1}{n}\right)(n \ln n)^{1/2}, \quad z \in K$$

olur. Burada $c_7 > 0$ *bir sabittir.*

Teorem 3 Γ *Dini-düzgün bir eğri ve* $L_M(\Gamma)$, Γ *üzerinde tanımlı yansımalı bir Orlicz uzayı olsun.* $f \in L_M(\Gamma)$ *ise*

$$\left\| f\text{-}U_n(\cdot,f) \right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_8 \left\{ \omega^r_{\Gamma,M}\left(f,\frac{1}{n}\right) + \tilde{\omega}^r_{\Gamma,M}\left(f,\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlayan $c_8 > 0$ *sabiti vardır. Burada* $U_n(\cdot,f)$, *f nin Faber-Laurent serisinin n. kısmi toplamıdır.*

Sonuç 2 *G sınırlı, Dini-düzgün* Γ *sınırına sahip basit bağlantılı bir bölge ve* $E_M(G)$, *G de tanımlı yansımalı Smirnov-Orlicz uzayı olsun. Eğer* $S_n(f,\cdot) := \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k$, $f \in E_M(G)$ *fonksiyonunun Faber açılımının n. kısmi toplamı ise her n doğal sayısı için*

$$\left\| f - S_n(f,\cdot) \right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_9 \omega^r_{\Gamma,M}\left(f,\frac{1}{n}\right), \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

koşulunu sağlayan n den bağımsız bir $c_9 > 0$ *sabiti vardır.*

Teorem 4 *Sonuç* 2 *nin koşulları altında*

$$\omega^r_{\Gamma,M}\left(f,\frac{1}{n}\right) \leq \frac{c_{10}}{n^r} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} E_k(f,G)_M, \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

eşitsizliğini sağlayan, M ve r ye bağlı, bir $c_{10} > 0$ *sabiti vardır.*

Sonuç 3 *Sonuç 2 nin koşulları altında, eğer*

$$E_n(f,G)_M = \mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlanıyorsa her $f \in E_M(G)$ *için*

$$\omega_{\Gamma,M}^{r}(f,\delta) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(\delta^{\alpha}\right) & , r < \alpha; \\ \mathrm{O}\left(\delta^{\alpha} \log \frac{1}{\delta}\right) & , r = \alpha; \\ \mathrm{O}\left(\delta^{r}\right) & , r > \alpha \end{cases}$$

olur.

Sonuç 4 *Sonuç 2 nin koşulları altında, eğer*

$$E_n(f,G)_M = \mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ise $f \in Lip\alpha(M)$ *olur.*

Sonuç 2 ve 3 ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5 $\alpha > 0$ *olmak üzere Sonuç 2 nin koşulları altında aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $f \in Lip\alpha(M)$

(b) $E_n(f,G) = \mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\right)$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Sonuç 6 *G sınırlı, basit bağlantılı, sınırı Dini düzgün eğri olan bir bölge ve $L_M(\Gamma)$ yansımalı bir Orlicz uzayı olsun. Eğer $f \in \tilde{E}_M(G^-)$ ise her n doğal sayısı için*

$$\tilde{E}_n(f, G^-)_M \leq c_{11} \tilde{\omega}^r_{\Gamma,M}\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

sağlayan n den bağımsız bir $c_{11} > 0$ sabiti vardır.

Teorem 5 *Sonuç* 6 *nın koşulları altında*

$$\tilde{\omega}^r_{\Gamma,M}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{c_{12}}{n^r}\left\{\tilde{E}_0(f, G^-)_M + \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} \tilde{E}_k(f, G^-)_M\right\}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

sağlanır.

Sonuç 7 *Sonuç* 6 *nın koşulları altında, eğer*

$$\tilde{E}_n(f, G^-)_M = O(n^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ise $f \in \tilde{E}_M(G^-)$ için

$$\tilde{\omega}^r_{\Gamma,M}(f, \delta) = \begin{cases} O(\delta^\alpha) & , r > \alpha \; ; \\ O\left(\delta^\alpha \log \frac{1}{\delta}\right) & , r = \alpha \; ; \\ O(\delta^r) & , r < \alpha \end{cases}$$

olur.

Sonuç 8 *Sonuç* 6 *nın koşulları altında, eğer*

$$\tilde{E}_n\left(f,G^-\right)_M = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

ise $f \in Lip^* \alpha(M)$.

Sonuç 9 *Eğer* $\alpha > 0$ *ise Sonuç* 6 *nın koşulları altında aşağıdakiler denktir.*

(a) $f \in Lip^* \alpha(M)$

(b) $\tilde{E}_n\left(f,G^-\right)_M = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ ....$

3.2 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları

Önerme 3 $L_M(\mathbf{T})$ *yansımalı bir Orlicz uzayı olmak üzere her* $f \in L_M(\mathbf{T})$ *için* $f^+ \in E_M(\mathbf{D})$ *ve* $f^- \in \tilde{E}_M\left(\mathbf{D}^-\right)$ *olur.*

İspat Her $f \in L_M(\mathbf{T})$ için öyle $p \in (1,\infty)$ sayısı vardır ki $f \in L^p(\mathbf{T})$ olur. Gerçekten, [22, s.26] gereği öyle x_0 noktası $c_{13} > 0$ ve $p > 1$ vardır ki, her $|f| \geq x_0$ ve bir $c_{14} > 0$ için

$$c_{14}^p |f|^p \leq \frac{1}{c_{13}} M\left(c_{14}|f|\right)$$

sağlanır. Böylece, $\Gamma_0 := \left\{z \in \mathbf{T} : |f| \geq x_0\right\}$ olmak üzere

$$\int_{\mathbf{T}} |f(z)|^p |dz| = \int_{\Gamma_0} |f(z)|^p |dz| + \int_{\mathbf{T} \setminus \Gamma_0} |f(z)|^p |dz|$$

yazılabileceğinden

$$\int_{\mathbf{T}} |f(z)|^p |dz| \le \frac{1}{c_{13} c_{14}^p} \int_{\Gamma_0} M\left(c_{15} |f(z)|\right) |dz| + \int_{\mathbf{T}\setminus\Gamma_0} |f(z)|^p |dz|$$
$$\le \frac{1}{c_{13} c_{14}^p} \int_{\mathbf{T}} M\left(c_{15} |f(z)|\right) |dz| + x_0^p mes\left(\mathbf{T} \setminus \Gamma_0\right) < \infty$$

çıkar ve $f \in L^p(\mathbf{T})$ olur. $1 < p < \infty$ olduğundan [23] $f^+ \in E^p(\mathbf{D})$, $f^- \in E^p(\mathbf{D}^-)$ ve buradan da $f^+ \in E^1(\mathbf{D})$ ve $f^- \in E^1(\mathbf{D}^-)$ elde edilir.

$f^+ \in E^1(\mathbf{D})$ olduğundan f^+ fonksiyonu Poisson integral gösterimine sahiptir. Böylece, aldığımız bir $z := re^{ix}$, $0 < r < 1$, için

$$M\left[\left|f^+(z)\right|\right] = M\left[\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^+\left(e^{iy}\right) P_r(x-y)\,dy\right|\right]$$

olur ve Jensen integral eşitsizliğinden [24, c:1, s. 24]

$$M\left[\left|f^+(z)\right|\right] \le M\left[\frac{\int_0^{2\pi} \left|f^+\left(e^{iy}\right)\right| P_r(x-y)\,dy}{\int_0^{2\pi} P_r(x-y)\,dy}\right] \le \frac{\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{iy}\right)\right|\right] P_r(x-y)\,dy}{\int_0^{2\pi} P_r(x-y)\,dy}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{iy}\right)\right|\right] P_r(x-y)\,dy$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_{\gamma_r} M\left[\left|f^{+}(z)\right|\right]|dz| \le \int_{\gamma_r} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(e^{iy}\right)\right|\right] P_r(x-y)\,dy\,|dz|$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(e^{iy}\right)\right|\right] P_r(x-y)\,dyrdx$$
$$= \int_0^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(e^{iy}\right)\right|\right]\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(x-y)\,dx\right\} rdy$$
$$= \int_0^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(e^{iy}\right)\right|\right] rdy < \int_0^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(e^{ix}\right)\right|\right] dx$$

çıkar. Şimdi

$$f^{+}\left(e^{ix}\right) = (1/2) f\left(e^{ix}\right) + \left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right) = (1/2)\left\{f\left(e^{ix}\right) + 2\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right\}$$

eşitlikleri ve M nin konveksliğinden

$$M\left[\left|f^{+}\left(e^{ix}\right)\right|\right] = M\left[\frac{1}{2}\left|f\left(e^{ix}\right) + 2\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right] \le M\left[\frac{1}{2}\left\{\left|f\left(e^{ix}\right)\right| + 2\left|\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right\}\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{M\left[\left|f\left(e^{ix}\right)\right|\right] + M\left[2\left|\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right]\right\}$$
$$< \frac{1}{2}\left\{M\left[\left|f\left(e^{ix}\right)\right|\right] + M[2x_0] + c_{15} M\left[\left|\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right]\right\}$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{M\left[\left|f\left(e^{ix}\right)\right|\right] + M[2x_0] + c_{16} M\left[\left|\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right]\right\}$$

ve

$$\int_{\gamma_r} M\left[\left|f^{+}(z)\right|\right]|dz| < \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{M\left[\left|f\left(e^{ix}\right)\right|\right] + M[2x_0] + c_{16} M\left[\left|\left(S_{\mathrm{T}} f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right]\right\} dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} M\left[\left|f\left(e^{ix}\right)\right|\right]dx+c_{17}\int_{0}^{2\pi} M\left[\left|\left(S_{\mathbf{T}}f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right]dx+\pi M\left[2x_0\right]$$

olduğu görülür. M fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağladığı ve $S_{\mathbf{T}}f \in L_M\left(\mathbf{T}\right)$ olduğundan

$$\int_{0}^{2\pi} M\left[\left|\left(S_{\mathbf{T}}f\right)\left(e^{ix}\right)\right|\right]dx<\infty$$

bulunur. Böylece

$$\int_{\gamma_r} M\left[\left|f^{+}\left(z\right)\right|\right]\left|dz\right|<\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} M\left[\left|f\left(e^{ix}\right)\right|\right]dx+c_{18}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{T}} M\left[\left|f\left(w\right)\right|\right]\left|dw\right|+c_{18}<\infty$$

ve her $r\in\left(0,1\right)$ için

$$\int_{\gamma_r} M\left[\left|f^{+}\left(z\right)\right|\right]\left|dz\right|<\infty$$

elde edilir.

Aynı metotla $f^{-}\in\tilde{E}_M\left(G^{-}\right)$ olduğu gösterilebilir. □

Önerme 4 $L_M(\mathbf{T})$, *yansımalı Orlicz uzayı ve* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k$ *,* $g \in E_M(\mathbf{D})$ *fonksiyonunun orijindeki Taylor açılımının n. kısmi toplamı ise her n doğal sayısı için*

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T})} \leq c_{19} \omega_M^r \left(g, \frac{1}{n} \right), \; r = 1, 2, 3, \ldots$$

eşitsizliğini sağlayan n den bağımsız bir $c_{19} > 0$ *sabiti vardır.*

İspat $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ik\theta}$, $g \in E_M(\mathbf{D})$ fonksiyonunun sınır değerinin kompleks Fourier serisi ve $S_n(g,\cdot)$ bu Fourier serisinin *n*. kısmi toplamı ise $g \in E^1(\mathbf{D})$ olduğundan [27, s.38]

$$\beta_k = \begin{cases} 0 & , \, k < 0; \\ \alpha_k & , \, k \geq 0 \end{cases}$$

çıkar. Böylece

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T})} = \left\| g\left(e^{i\theta}\right) - S_n(g,\cdot) \right\|_{L_M([0,2\pi])} \tag{3.1}$$

elde edilir. t_n^* trigonometrik polinomu g nin en iyi yaklaşım polinomu olmak üzere S_n operatörünün $L_M([0,2\pi])$ de sınırlılığı [26] gereği (3.1) den

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T})} \leq \left\| g\left(e^{it}\right) - t_n^*(t) \right\|_{L_M([0,\,2\pi])} + \left\| S_n\left(g - t_n^*, \cdot\right) \right\|_{L_M([0,\,2\pi])}$$

$$\leq (1 + c_{20}) E_n\left(g, [0, 2\pi]\right)_M$$

ve [28] ile

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T})} \leq c_{21} \omega_M^r \left(g, \frac{1}{n} \right), \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

elde edilir. □

Önerme 2 nin ispatı $g \in E_M(\mathbf{D})$ nin Taylor açılımı

$$g(w) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k, \quad w \in \mathbf{D}$$

ve $g_r(w) := g(rw)$, $0 < r < 1$, olsun. Önerme 8 göz önüne alındığında

$$\left\| g_r(w) - g(w) \right\|_{L_M(\mathbf{T})} \to 0, \quad r \to 1^-$$

çıkar. Böylece, T operatörü sınırlı olduğundan

$$\left\| T(g_r) - T(g) \right\|_{L_M(\Gamma)} \to 0, \quad r \to 1^- \tag{3.2}$$

elde edilir.

$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k w^k$ serisi $|w|=r<1$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan, $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k w^k$ serisi $\mathbf{T}$ üzerinde düzgün yakınsar ve böylece

$$\begin{aligned} T(g_r)(z') &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{g_r(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z'}dw \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m r^m \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{w^m\psi'(w)}{\psi(w)-z'}dw = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m r^m \Phi_m(z'), \quad z'\in G \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, [29, s.43] gereği

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{\Phi_m(\psi(w))}{w^{k+1}}dw = \begin{cases} 1 & , k=m; \\ 0 & , k\neq m \end{cases}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_k(T(g_r)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{T(g_r)(\psi(w))}{w^{k+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m r^m \Phi_m(\psi(w))}{w^{k+1}}dw \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m r^m \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{\Phi_m(\psi(w))}{w^{k+1}}dw = \alpha_k r^k \end{aligned}$$

çıkar ve

$$a_k(T(g_r)) \to \alpha_k, \qquad r\to 1^- \tag{3.3}$$

bulunur. (2.1) ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$|a_k(T(g_r)) - a_k(T(g))| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{(T(g_r)-T(g))(\psi(w))}{w^{k+1}}dw\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}}|(T(g_r)-T(g))(\psi(w))||dw| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}|(T(g_r)-T(g))(z)||\varphi'(z)||dz|$$

$$\leq \frac{c_{22}}{2\pi}\int_{\Gamma}\left|\left(T(g_r)-T(g)\right)(z)\right||dz| \leq \frac{c_{23}}{2\pi}\left\|T(g_r)-T(g)\right\|_{L_M(\Gamma)}\left\|1\right\|_{L_N(\Gamma)}$$
$$= \frac{c_{24}}{2\pi}\left\|T(g_r)-T(g)\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

bulunur. (3.2) ve son eşitsizlik bize $r \to 1^-$ iken $a_k\left(T(g_r)\right) \to a_k\left(T(g)\right)$ yakınsamasını verir ve (3.3) yardımıyla da $a_k\left(T(g)\right) = \alpha_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ elde edilir. Şimdi eğer $T(g) = 0$ ise $\alpha_k = a_k\left(T(g)\right) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ve buradan da $g = 0$ bulunur. Bu da T operatörünün birebir olmasıdır.

Örtenlik için herhangi bir $f \in E_M(G)$ fonksiyonu alıp $f_0 = f \circ \psi \in L_M(\mathbf{T})$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{f_0(\tau)}{\tau - w}d\tau$$

Cauchy tipli integrali, sırasıyla, $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^-$ de f_0^+ ve f_0^- analitik fonksiyonlarını belirler. Önerme 3 yardımıyla $f_0^+ \in E_M(\mathbf{D})$, $f_0^- \in E_M(\mathbf{D}^-)$ ve açısal sınır değerleri için

$$f_0^+(w) = f_0(w)/2 + S_{\mathbf{T}}(f_0)(w), \quad f_0^-(w) = -f_0(w)/2 + S_{\mathbf{T}}(f_0)(w)$$

buradan da $\mathbf{T}$ üzerinde h.h. her yerde

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w)$$

bulunur. $f_0^-(\infty)=0$ olduğu biliniyor. f nin a_k Faber katsayıları için

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}}\frac{f_0^-(w)}{w^{k+1}}dw$$

olur. $f_0^-\in E^1(\mathbf{D}^-)$ olduğundan yukarıdaki ikinci integral sıfıra eşit olur ve dolayısıyla, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ değerleri, f_0^+ fonksiyonunun orijindeki Taylor katsayıları olur, yani

$$f_0^+(w)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kw^k,\quad w\in\mathbf{D}$$

dır. Diğer taraftan

$$T\left(f_0^+\right)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k$$

olur. $E_M(G)$ uzayında aynı Faber katsayılarına sahip birbirinden farklı iki fonksiyon [6] olamayacağından $T\left(f_0^+\right)=f$ olur ve ispat biter. □

3.3 Temel Sonuçların İspatları

Teorem 1 in ispatı $f\in L_M(\Gamma)$ olsun. (2.2) den $f\in L^1(\Gamma)$ olur. Γ Dini-düzgün bir eğri olduğundan $f\circ\psi\in L^1(\mathbf{T})$ olur ve böylece

$$f\left(\psi\left(w\right)\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{w^k} \tag{3.4}$$

alınabilir. Şimdi, çift ve negatif olmayan

$$K_n\left(\theta\right) = \sum_{m=-n}^{n} \lambda_m^{(n)} e^{im\theta}$$

trigonometrik polinomu her n doğal sayısı için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n\left(\theta\right) d\theta = 1, \tag{3.5}$$

$$\int_{0}^{\pi} \theta K_n\left(\theta\right) d\theta \le \frac{c_{25}}{n} \tag{3.6}$$

koşullarını sağlasın. (Örneğin, Jackson çekirdeği

$$J_n\left(\theta\right) := \frac{3\left(\sin\frac{n\theta}{2}\right)^4}{n\left(2n^2+1\right)\ \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}$$

yukarda bahsedilen koşullar sağlar, bkz, [30, s.203-204]).

$$I\left(\theta, z\right) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f\left(\varsigma_{-\theta}\right)}{\varsigma - z} d\varsigma, \quad z \in G \tag{3.7}$$

integralini göz önüne alalım. $\varsigma = \psi\left(e^{it}\right)$ değişken dönüşümü ile

$$I(\theta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\psi\left(e^{i(t-\theta)}\right)\right)\frac{\psi'\left(e^{it}\right)e^{it}}{\psi\left(e^{it}\right)-z}dt$$

olur. (3.4) ve (2.11) göz önüne alındığında

$$I(\theta,z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Phi_k(z)e^{-ik\theta}$$

elde edilir. $I(\theta,z)\in L^1([-\pi,\pi])$ ve K_n sınırlı değişimli olduğundan, genelleştirilmiş Parseval eşitliği [31, s.225-228] yardımıyla

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)I(\theta,z)d\theta=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}a_k\Phi_k(z)$$

elde edilir ve (3.7) ye göre

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varsigma-z}d\varsigma=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}a_k\Phi_k(z),\quad z\in G$$

çıkar. Buradan da görülür ki

$$P_n(z,f):=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma_{-\theta})}{\varsigma-z}d\varsigma,\quad z\in G$$

n dereceli cebirsel bir polinomdur. K_n çift fonksiyon olduğundan

$$P_n(z,f)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(\theta)d\theta\int_{\Gamma}\left(f(\varsigma_\theta)+f\left(\varsigma_{(-\theta)}\right)\right)\frac{d\varsigma}{\varsigma-z}$$

çıkar ve (2.5), (2.3) ten

$$\begin{aligned}P_n(z,f)&=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(\theta)d\theta\int_{\Gamma}\left(T_\theta f(\varsigma)+T_{(-\theta)}f(\varsigma)\right)\frac{d\varsigma}{\varsigma-z}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[(T_\theta f)^+(z)+\left(T_{(-\theta)}f\right)^+(z)\right]d\theta,\quad z\in G\end{aligned}$$

bulunur. $f\in E_M(G)$ ve $z'\in G$ olsun.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta=1$$

eşitliğinin her iki tarafını $f^+(z')$ ile çarparsak

$$f(z')=f^+(z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^+(z')K_n(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2f^+(z')K_n(\theta)d\theta$$

ve dolayısıyla

$$f(z')-P_n(z',f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left\{2f^+(z')-\left[(T_\theta f)^+(z')+\left(T_{(-\theta)}f\right)^+(z')\right]\right\}d\theta$$

bulunur. Γ ya içeriden açısal yollar boyunca, $z'\to z\in\Gamma$ limiti alınır ve (2.6) kullanılırsa, h.h. her $z\in\Gamma$ için

$$f(z)-P_n(z,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[2S_\Gamma f(z)+f(z)-S_\Gamma(T_\theta f)(z)-\frac{1}{2}T_\theta f(z)$$

$$-S_\Gamma\left(T_{(-\theta)}f\right)(z)-\frac{1}{2}\left(T_{(-\theta)}f\right)(z)\Big]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)+S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\Big]d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[(f-T_\theta f)(z)+\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\Big]d\theta$$

elde edilir. Son eşitlikte, $\rho(g;N)\le 1$ koşulunu sağlayan tüm $g\in L_N(\Gamma)$ ler üzerinden

$$\|f-P_n(\cdot,f)\|_{L_M(\Gamma)}=\sup\int_\Gamma |f(z)-P_n(z,f)||g(z)||dz|$$

$$\le\sup\int_\Gamma\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)+S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\Big]d\theta\right||g(z)||dz|$$

$$+\sup\int_\Gamma\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[(f-T_\theta f)(z)+\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\Big]d\theta\right||g(z)||dz|$$

$$\le\sup\int_\Gamma\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big(|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)|+\left|S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right|\Big)d\theta\right\}|g(z)||dz|$$

$$+\sup\int_\Gamma\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[|(f-T_\theta f)(z)|+\left|\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right|\Big]d\theta\right\}|g(z)||dz|$$

supremum alınır ve Fubini teoremi kullanılırsa

$$\|f-P_n(\cdot,f)\|_{L_M(\Gamma)}\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big\{\sup\int_\Gamma\Big[|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)|+$$

$$+\left|S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right|\Big]|g(z)||dz|\Big\}d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left\{\sup\int_{\Gamma}\left(\left|\left(f-T_\theta f\right)(z)\right|+\left|\left(f-T_{(-\theta)}f\right)(z)\right|\right)\left|g(z)\right|\left|dz\right|\right\}d\theta$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|S_\Gamma\left(f-T_\theta f\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|S_\Gamma\left(f-T_{(-\theta)}f\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|f-T_\theta f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{(-\theta)}f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta$$

bulunur. Şimdi, S_Γ nın sınırlılığına göre

$$\left\|f-P_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq c_{26}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|f-T_\theta f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{(-\theta)}f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta$$

ve (2.4) ten

$$\left\|f-P_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq c_{27}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\,\omega_M(f,\theta)\,d\theta$$
$$\leq c_{28}\,\omega_M(f,\frac{1}{n})\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)(n\theta+1)\,d\theta$$

elde edilir. Böylece (3.5), (3.6) dan Teorem 1 in ispatı bitmiş olur.□

Teorem 2 nin ispatı $z\in\Gamma_r$, $1<r<R$ ve p_n, $f\in E_M(G_R)$

fonksiyonuna en iyi yaklaşan, derecesi n yi aşmayan polinom olsun.

$$I_1:=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right|\left|dt\right|$$

$$I_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\psi(w)) \frac{1}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

olarak tanımlandığında (2.21) den

$$\left| R_n(z,f) \right| \le I_1 + I_2 \tag{3.8}$$

olduğu görülür. (2.1) ve [25, s.74] kullanılarak

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| f(\varsigma) - p_n(\varsigma) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^k(z)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)} \right| \left| \varphi'(\varsigma) \right| |d\varsigma| \\ &\le \frac{c_{29}}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| f(\varsigma) - p_n(\varsigma) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^k(z)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)} \right| |d\varsigma| \\ &\le \frac{c_{30}}{2\pi} \left\{ \sup \int_{\Gamma_R} \left| f(\varsigma) - p_n(\varsigma) \right| \left| g(\varsigma) \right| |d\varsigma| \right\} \left\{ \sup \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^k(z)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)} \right| \left| h(\varsigma) \right| |d\varsigma| \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada, supremumlar sırasıyla, $\rho(g;N) \le 1$ koşulunu sağlayan tüm $g \in L_N(\Gamma)$ ve $\rho(h;M) \le 1$ koşulunu sağlayan tüm $h \in L_M(\Gamma)$ fonksiyonlar üzerinden alınmıştır. Böylece

$$\begin{aligned} I_1 &\le \frac{c_{31} E_n(f, G_R)_M}{2\pi} \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi^k(z)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)} \right| \left| h(\varsigma) \right| |d\varsigma|; \rho(h;M) \le 1 \right\} \\ &\le \frac{c_{32} E_n(f, G_R)_M}{2\pi} \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \frac{\left| \varphi(z) \right|^{n+1}}{\left| \varphi(\varsigma) \right|^{n+1} \left| \varphi(\varsigma) - \varphi(z) \right|} \left| h(\varsigma) \right| |d\varsigma|; \ \ \rho(h;M) \le 1 \right\} \\ &\le \frac{c_{33} E_n(f, G_R)_M}{2\pi} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \left| h(\varsigma) \right| |d\varsigma|; \rho(h;M) \le 1 \right\} \end{aligned}$$

ve [25, s.67] yardımıyla da

$$\sup\left\{\int_{\Gamma_R}|h(\varsigma)||d\varsigma|;\rho(h;\ M)\le 1\right\}\le 1+N(1)mes\Gamma_R\le c_{34} \tag{3.9}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$I_1\le\frac{c_{35}E_n(f,G_R)_M\, r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} \tag{3.10}$$

bulunur. Şimdi I_2 integralini değerlendirelim. (2.22) kullanılırsa

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}F(\tau,w)\,d\tau\right||dt|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r}\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

bulunur ve Fubini teoremine göre

$$I_2\le\frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\tau|=r}|F(\tau,w)|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\frac{|dt|}{|t-\tau|}\right\}|d\tau|$$

elde edilir. Sonra, en son integralde değişken değişimi yapılıp Hölder eşitsizliği [25, s.74] kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} \left|F(\tau,w)\right| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left|f(\varsigma)-p_n(\varsigma)\right| \frac{\left|\varphi'(\varsigma)\right|}{\left|\varphi(\varsigma)-\varphi(z)\right|} |d\varsigma| \right\} |d\tau| \\
&\le \frac{r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} \left|F(\tau,w)\right| \left\{ \left\|f(\varsigma)-p_n(\varsigma)\right\|_{L_M(\Gamma_R)} \cdot \left\| \frac{\varphi'(\cdot)}{\varphi(\cdot)-\varphi(z)} \right\|_{L_N(\Gamma_R)} \right\} |d\tau| \\
&\le \frac{c_{36} r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} \int_{|\tau|=r} \left|F(\tau,w)\right| \Big[E_n(f,G_R)_M \times \\
&\qquad \sup\left\{ \int_{\Gamma_R} \left|H(\varsigma)\right| |d\varsigma| ; \rho(H;N) \le 1 \right\} \Big] |d\tau|
\end{aligned}
$$

bulunur. Son eşitsizlikte (3.9) deki gibi bir değerlendirme göz önüne alınıp (2.23) kullanılırsa

$$
I_2 \le \frac{c_{37} r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} E_n(f,G_R)_M \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1} \ln \frac{r^2}{r^2-1}} \tag{3.11}
$$

çıkar. (3.8), (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden

$$
\left|R_n(z,f)\right| \le \frac{c_{38} r^{n+1} E_n(f,G_R)_M}{2\pi R^{n+1}(R-r)} \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1} \ln \frac{r^2}{r^2-1}}
$$

bulunur. Bu eşitsizlikte, $z \in K$ ve $r := 1 + 1/n$ alınarak

$$
\left|R_n(z,f)\right| \le \frac{c_{39}}{R^{n+1}(R-1)} E_n(f,G_R)_M \sqrt{n \ln n}
$$

elde edilir.□

Teorem 3 ün ispatı Bu teoremi ispatlamak için

$$U_n(z,f) := \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(1/z)$$

rasyonel fonksiyonunun aranan koşulları sağladığını göstereceğiz. Γ üzerinde h.h.her yerde $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ sağlandığından

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(1/z) \right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_{40} \tilde{\omega}^r_{\Gamma,M}\left(f, \frac{1}{n}\right) \tag{3.12}$$

ve

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_{41} \omega^r_{\Gamma,M}\left(f, \frac{1}{n}\right) \tag{3.13}$$

eşitsizliklerinin gösterilmesi yeterlidir.

$f \in L_M(\Gamma)$ olsun. Bu durumda $f_0, f_1 \in L_M(\mathbf{T})$ olur ve Γ üzerinde h.h.her yerde

$$f(\varsigma) = f_0^+(\varphi(\varsigma)) - f_0^-(\varphi(\varsigma)), \tag{3.14}$$

$$f(\varsigma) = f_1^+(\varphi_1(\varsigma)) - f_1^-(\varphi_1(\varsigma)) \tag{3.15}$$

sağlanır. Şimdi, $z' \in G \setminus \{0\}$ alalım. (3.15) ve (2.14) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z') = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\varsigma)}{\varsigma - z'} d\varsigma$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\varsigma) - f_1^+(\varphi_1(\varsigma)) \right)}{\varsigma - z'} d\varsigma$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z'} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1^-(\varphi_1(\varsigma))}{\varsigma - z'} d\varsigma$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\varsigma) - f_1^+(\varphi_1(\varsigma)) \right)}{\varsigma - z'} d\varsigma - f_1^-(\varphi_1(z')) - f^-(z')$$

bulunur. Γ ya içeriden açısal yollar boyunca $z' \to z \in \Gamma$ limitini alarak yaklaştığımızda Γ üzerinde h.h.her yerde

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z)) \right)$$
$$- S_\Gamma \left[\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k - \left(f_1^+ \circ \varphi_1 \right) \right] - f_1^-(\varphi_1(z)) - f^+(z)$$

bulunur. (2.8), (3.15), Minkowski eşitsizliği ve S_Γ operatörünün sınırlılığı ile

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) \right\|_{L_M(\Gamma)} = \left\| \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z)) \right) \right.$$
$$\left. - S_\Gamma \left[\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k - \left(f_1^+ \circ \varphi_1 \right) \right](z) \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\leq c_{42}\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq c_{43}\left\|f_1^+(w)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_kw^k\right\|_{L_M(\mathbf{T})}$$

elde edilir. Diğer yandan f nin $\tilde{a}_k$ Faber-Laurent katsayıları f_1^+ nın orijindeki Taylor katsayıları ile aynıdır. Dolayısıyla Önerme 4 kullanılırsa

$$\left\|f(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_kF_k(1/z)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq c_{44}\omega_M^r\left(f_1^+,\frac{1}{n}\right)=c_{44}\tilde{\omega}_{\Gamma,M}^r\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

bulunur ve (3.12) ispatlanmış olur.

$f\in E_M(G)$ için $f_0=f\circ\psi\in L_M(\mathbf{T})$ olur. $f\in E^1(G)$ olduğundan

$$\int_\Gamma\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma=0,\qquad z'\in G^-$$

geçerlidir. Şimdi bir $z'\in G^-$ alalım. (2.13) ve (3.14) kullanarak

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z')=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(z')+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(z')+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(z')+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_0^+(\varphi(\varsigma))}{\varsigma-z'}d\varsigma+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_0^-(\varphi(\varsigma))}{\varsigma-z'}d\varsigma$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_0^-\left(\varphi(\varsigma)\right)}{\varsigma - z'}d\varsigma = -f_0^-\left(\varphi(z')\right)$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k\left(z'\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k\left(\varsigma\right) - f_0^+\left(\varphi(\varsigma)\right)}{\varsigma - z'}d\varsigma$$
$$+\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k\left(z'\right) - f_0^-\left(\varphi(z')\right)$$

sağlanır. Γ ya dışarıdan açısal yollar boyunca $z' \to z$ limiti ile yaklaşarak Γ üzerinde h.h. her yerde

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k\left(z\right) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k\left(z\right) - f_0^+\left(\varphi(z)\right)\right) +$$

$$S_\Gamma\left[\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k - \left(f_0^+\circ\varphi\right)\right] + \sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k\left(z\right) - f_0^-\left(\varphi(z)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k\left(z\right) - f_0^+\left(\varphi(z)\right)\right) + \left[f_0^+\left(\varphi(z)\right) - f_0^-\left(\varphi(z)\right)\right]$$
$$+S_\Gamma\left[\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k - \left(f_0^+\circ\varphi\right)\right]$$

elde edilir. (3.14), (2.1), Minkowski eşitsizliği ve S_Γ operatörünün sınırlılığı kullanılırsa

$$\left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right\|_{L_M(\Gamma)} = \left\| \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z)) \right) + S_\Gamma \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k - \left(f_0^+ \circ \varphi \right) \right] \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\leq c_{45} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z)) \right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_{46} \left\| f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T})}$$

olacağından Önerme 4 yardımıyla

$$\left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_{47} \omega_M^r \left(f_0^+, \frac{1}{n} \right)$$

elde edilir ve (3.13) ispatlanır.□

Teorem 4 ün ispatı $f \in E_M(G)$ alalım. Bu durumda $T(f_0^+) = f$ olur. $T : E_M(\mathbf{D}) \to E_M(G)$ operatörü doğrusal, sınırlı, birebir ve örten olduğundan $T^{-1} : E_M(G) \to E_M(\mathbf{D})$ operatörü doğrusal ve sınırlıdır. Bir $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ için

$$E_n(f,G)_M = \left\| f - p_n^* \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

sağlansın. O zaman $T^{-1}(p_n^*) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{D})$ olur ve T^{-1} operatörünün sınırlılığından

$$\begin{aligned} E_n(f_0^+, \mathbf{D})_M &\leq \left\| f_0^+ - T^{-1}(p_n^*) \right\|_{L_M(\mathbf{T})} = \left\| T^{-1}(f) - T^{-1}(p_n^*) \right\|_{L_M(\mathbf{T})} \\ &= \left\| T^{-1}(f - p_n^*) \right\|_{L_M(\mathbf{T})} \leq \left\| T^{-1} \right\| \left\| f - p_n^* \right\|_{L_M(\Gamma)} \qquad (3.16) \\ &= \left\| T^{-1} \right\| E_n(f,G)_M \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan [32]

$$\omega_M^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right)\leq\frac{c_{48}}{n^r}\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_k\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_M,\quad r=1,\ 2,\ \ldots$$

sağlandığından (3.16) ile

$$\begin{aligned}\omega_{\Gamma,M}^r\left(f,\frac{1}{n}\right)=\omega_M^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right)&\leq\frac{c_{49}}{n^r}\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_k\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_M\\&\leq\left\|T^{-1}\right\|\frac{c_{49}}{n^r}\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_k\left(f,G\right)_M,\quad r=1,\ 2,\ \ldots\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat biter.□

Teorem 5 in ispatı $f\in\tilde{E}_M\left(G^-\right)$ alalım. Bu durumda $\tilde{T}\left(f_1^+\right)=f$ olur. $\tilde{T}:E_M\left(\mathbf{D}\right)\to\tilde{E}_M\left(G^-\right)$ operatörü doğrusal, sınırlı, birebir ve örten olduğundan $\tilde{T}^{-1}:\tilde{E}_M\left(G^-\right)\to E_M\left(\mathbf{D}\right)$ operatörü de doğrusal ve sınırlıdır. $r_n^*\in\mathrm{R}_n$ için

$$\tilde{E}_n\left(f\right)_M=\left\|f-r_n^*\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

sağlanıyorsa $\tilde{T}^{-1}\left(r_n^*\right)\in\mathbf{P}_n\left(\mathbf{D}\right)$ olur ve

$$\begin{aligned}E_n\left(f_1^+\right)_M&\leq\left\|f_1^+-\tilde{T}^{-1}\left(r_n^*\right)\right\|_{L_M(\mathbf{T})}=\left\|\tilde{T}^{-1}\left(f\right)-\tilde{T}^{-1}\left(r_n^*\right)\right\|_{L_M(\mathbf{T})}\\&=\left\|\tilde{T}^{-1}\left(f-r_n^*\right)\right\|_{L_M(\mathbf{T})}\leq\left\|\tilde{T}^{-1}\right\|\left\|f-r_n^*\right\|_{L_M(\Gamma)}\\&=\left\|\tilde{T}^{-1}\right\|\tilde{E}_n\left(f\right)_M\end{aligned}\tag{3.17}$$

bulunur.

$$\omega_M^r\left(f_1^+,\frac{1}{n}\right)\leq\frac{c_{50}}{n^r}\left\{E_0\left(f_1^+\right)_M+\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_k\left(f_1^+\right)_M\right\},\quad r=1,\ 2,\ \ldots$$

sağlandığından, (3.17) ile

$$\tilde{\omega}_{\Gamma,M}^r\left(f,\frac{1}{n}\right)=\omega_M^r\left(f_1^+,\frac{1}{n}\right)\leq\frac{c_{50}}{n^r}\left\{E_0\left(f_1^+\right)_M+\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_k\left(f_1^+\right)_M\right\}$$

$$\leq\left\|\tilde{T}^{-1}\right\|\frac{c_{50}}{n^r}\left\{\tilde{E}_0\left(f\right)_M+\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}\tilde{E}_k\left(f\right)_M\right\},\quad r=1,\ 2,\ \ldots$$

çıkar.□

4. AĞIRLIKLI SMIRNOV-ORLICZ UZAYLARINDA CEBİRSEL POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

4.1 Temel Sonuçlar

Teorem 6 *G sınırlı, basit bağlantılı ve sınırı Dini-düzgün eğri olan bir bölge, $L_M(\Gamma)$, Boyd indisleri $0<\alpha_M \le \beta_M <1$ koşulunu sağlayan bir Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M}(\Gamma) \cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in L_M(\Gamma)$ ise her n doğal sayısı için*

$$\left\| f - U_n(\cdot,f) \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le c_{51}\left\{ \Omega^r_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) + \tilde{\Omega}^r_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \right\},\ r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlayan $c_{51}>0$ sabiti vardır. Burada $U_n(\cdot,f)$, f nin Faber-Laurent serisinin n. kısmi toplamıdır.

Sonuç 10 *Teorem 6 in koşulları altında, eğer $f \in E_M(G,\omega)$ ise her n doğal sayısı için*

$$E_n(f,G)_{M,\omega} \le c_{52}\Omega^r_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n+1}\right), \quad r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlayan n den bağımsız bir $c_{52}>0$ sabiti vardır.

Teorem 7 *Teorem 6 in koşulları altında*

$$\Omega^r_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_{53}}{n^{2r}}\left\{ E_0(f,G)_{M,\omega} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1}E_k(f,G)_{M,\omega} \right\},\ r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlanır.

Sonuç 11 *Teorem* 6 *in koşulları altında, eğer*

$$E_n(f,G)_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ise $f \in E_M(G,\omega)$ *için*

$$\Omega^r_{\Gamma,M,\omega}(f,\delta) = \begin{cases} O\left(\delta^{\alpha}\right) & , \ r > \alpha/2; \\ O\left(\delta^{\alpha}\log\dfrac{1}{\delta}\right) & , \ r = \alpha/2; \\ O\left(\delta^{2r}\right) & , \ r < \alpha/2 \end{cases}$$

olur.

Sonuç 12 *Teorem* 6 *in koşulları altında, eğer*

$$E_n(f,G)_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ise $f \in \mathrm{Lip}^*\alpha(M,\omega)$ *olur.*

Sonuç 13 Eğer $\alpha > 0$ *ise Teorem* 6 *nın koşulları altında aşağıdakiler denktir.*

(a) $f \in \mathrm{Lip}^*\alpha(M,\omega)$

(b) $E_n(f,G)_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$

Sonuç 14 *Teorem* 6 *in koşulları altında eğer* $f \in \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right)$ *ise her n doğal sayısı için*

$$\tilde{E}_n(f,G)_{M,\omega} \le c_{54}\tilde{\Omega}^r_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n+1}\right), \quad r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlayan n den bağımsız bir $c_{54} > 0$ *sabiti vardır.*

Teorem 8 *Teorem* 6 *in koşulları altında eğer* $f \in \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right)$ *ise*

$$\tilde{\Omega}^r_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_{55}}{n^{2r}}\left\{\tilde{E}_0(f,G)_{M,\omega} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1}\tilde{E}_k(f,G)_{M,\omega}\right\}, \quad r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

sağlanır.

Sonuç 15 *Teorem* 6 *nın koşulları altında, eğer*

$$\tilde{E}_n(f,G)_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha>0, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ise $f \in \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right)$ *için*

$$\tilde{\Omega}^r_{\Gamma,M,\omega}(f,\delta) = \begin{cases} O\left(\delta^{\alpha}\right) & ,\ r>\alpha/2\ ; \\ O\left(\delta^{\alpha}\log\frac{1}{\delta}\right) & ,\ r=\alpha/2\ ; \\ O\left(\delta^{2r}\right) & ,\ r<\alpha/2 \end{cases}$$

olur.

Sonuç 16 *Teorem* 6 *nın koşulları altında, eğer*

$$\tilde{E}_n(f,G)_{M,\omega} = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad \alpha>0, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ise $f \in Lip^{*}\alpha(M,\omega)$ *olur.*

Sonuç 17 *Eğer* $\alpha > 0$ *ise Teorem* 6 *nın koşulları altında aşağıdakiler denktir.*

(a) $f \in Lip^{*}\alpha(M,\omega)$

(b) $\tilde{E}_n(f,G)_{M,\omega} = O(n^{-\alpha}), \quad n = 1, 2, 3, ...$

4.2 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları

Önerme 5 $0 < \alpha_M, \ \beta_M < 1, \ \omega \in A_{1/\alpha_M}(\Gamma) \cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ ve $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ *ise* $f^{+} \in E_M(G,\omega)$ ve $f^{-} \in E_M(G^{-},\omega)$ *olur.*

İspat $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ alalım. Bu durumda öyle $p, \ q \in (1,\infty)$ sayıları vardır ki $1 < p < 1/\beta_M \le 1/\alpha_M < q < \infty$ ve $\omega \in A_p(\Gamma) \cap A_q(\Gamma)$ sağlanır [18, s. 58, teo. 2.31]. Böylece [33, son. 2.b.3, s. 132]

$$L^{q}(\Gamma) \subset L_M(\Gamma) \subset L^{p}(\Gamma)$$

sürekli gömmeleri vardır ve buradan da $f \in L^{p}(\Gamma,\omega)$ olur. Şimdi [11] deki Lemma 2 ve Lemma 3 ü kullanarak

$$f^{+} \in E^{1}(G) \ \text{ ve } \ f^{-} \in E^{1}(G^{-})$$

elde edilir. (2.6), (2.7) ve S_Γ singüler operatörünün ağırlıklı Orlicz uzayında sınırlılığı [34] kullanılırsa

$$f^{+} \in L_M(\Gamma,\omega) \text{ ve } f^{-} \in L_M(\Gamma,\omega)$$

elde edilir ve ispat biter.□

Önerme 6 [35] $0<\alpha_M,\ \beta_M<1,\ \omega \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$ *ve* $g \in E_M(\mathbf{D},\omega)$ *ise her n doğal sayısı için n den bağımsız öyle* $c_{56}>0$ *sabiti vardır ki*

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} \le c_{56} \Omega_{M,\omega}^{r}\left(g, \frac{1}{n+1}\right)$$

sağlanır, burada $\alpha_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ *değerleri g nın orijindeki Taylor katsayılarıdır.*

2.2 Bölümde verilen Faber operatörleri ağırlıklı Smirnov-Orlicz uzaylarında da aynı biçimde tanımlanır. S_Γ singüler operatörü ağırlıklı Orlicz uzayında sınırlı olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Önerme 7 Γ *Dini-düzgün bir eğri,* $0<\alpha_M,\ \beta_M<1$ *ve* $\omega \in A_{1/\alpha_M}(\Gamma) \cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ *ise*

$$T:\mathbf{P}(\mathbf{D}) \to E_M(G,\omega) \text{ ve } \tilde{T}:\mathbf{P}(\mathbf{D}) \to \tilde{E}_M(G^{-},\omega)$$

doğrusal operatörleri sınırlıdır.

Trigonometrik polinomların kümesi $L_M([-\pi,\pi],\omega)$ uzayında yoğun [35] olduğundan, cebirsel polinomlar kümesi $E_M(\mathbf{D},\omega)$ uzayında yoğun olur. Böylece Önerme 7 yardımıyla T ve $\tilde{T}$ operatörlerini $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ den sırasıyla $E_M(\mathbf{D},\omega_0)$ ve $E_M(\mathbf{D},\omega_1)$ uzaylarına doğrusal ve sınırlı olacak şekilde genişletebiliriz. Genişlemeleri yine aynı işaretle gösterirsek

$$T : E_M(\mathbf{D},\omega_0) \to E_M(G,\omega) \text{ ve } \tilde{T} : E_M(\mathbf{D},\omega_1) \to \tilde{E}_M(G^-,\omega)$$

operatörleri için

$$T(g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{g(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw, \quad z \in G, \quad g \in E_M(\mathbf{D},\omega_0)$$

$$\tilde{T}(g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{g(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw, \quad z \in G^-, \quad g \in E_M(\mathbf{D},\omega_1)$$

gösterimleri elde edilir.

Önerme 8 $0 < \alpha_M,\ \beta_M < 1,\ \omega \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$ *ve* $L_M(\mathbf{T})$ *yansımalı Orlicz uzayı ve* $f \in L_M(\mathbf{T},\omega)$ varsayalım.

$$P_r(f)(e^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) f(e^{it})dt, \quad 0 < r < 1$$

olmak üzere

$$\left\| P_r(f) - f \right\|_{L_M(\mathbf{T},\,\omega)} \to 0, \quad r \to 1^-$$

yakınsaması sağlanır.

İspat $p,q \in (1,\infty)$ sayıları

$$1 < p < 1/\beta_X \leq 1/\alpha_X < q < \infty \quad \text{ve} \quad \omega \in A_p(\mathbf{T}) \cap A_q(\mathbf{T})$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda, P_r operatörü $L^p(\mathbf{T},\omega)$ ve $L^q(\mathbf{T},\omega)$ uzaylarında sınırlıdır [36]. Dolayısıyla $W_r := \omega P_r \omega^{-1} I$ operatörü $L^p(\mathbf{T})$ ve $L^q(\mathbf{T})$ uzaylarında sınırlıdır. Şimdi, Boyd interpolasyon teoremini [37] kullanırsak W_r operatörü $L_M(\mathbf{T})$ uzayında sınırlı olur. Böylece

$$\left\| P_r(f) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} \leq c_{59} \left\| f \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} \tag{4.1}$$

olur. $L_M(\mathbf{T})$ yansımalı olduğundan $L_M(\mathbf{T},\omega)$ de yansımalıdır [38] ve böylece $\mathbf{T}$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi $L_M(\mathbf{T},\omega)$ uzayında yoğundur [39]. Dolayısıyla, verilen $f \in L_M(\mathbf{T},\omega)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| f - f^* \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} < \varepsilon \tag{4.2}$$

olacak şekilde $\mathbf{T}$ üzerinde sürekli bir f^* fonksiyonu vardır.

Diğer taraftan, sürekli bir fonksiyonun Poisson integrali $\mathbf{T}$ üzerinde kendisine düzgün yakınsadığından [40, s.239]

$$\left\|P_r\left(f^*\right)-f^*\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} = \sup_{\|g\|_{L_N(\mathbf{T})}\leq 1} \int_{\mathbf{T}} \left|P_r\left(f^*\right)(w)-f^*(w)\right|\left|g(w)\right|\omega(w)\left|dw\right|$$

$$< \varepsilon \sup_{\|g\|_{L_N(\mathbf{T})}\leq 1} \int_{\mathbf{T}} \omega(w)\left|g(w)\right|\left|dw\right| = \varepsilon\|\omega\|_{L_M(\mathbf{T})} \tag{4.3}$$

bulunur. (4.1), (4.2) ve (4.3) kullanılarak

$$\left\|P_r(f)-f\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} \leq \left\|P_r(f)-P_r\left(f^*\right)\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} + \left\|P_r\left(f^*\right)-f^*\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} + \left\|f^*-f\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)}$$

$$= \left\|P_r\left(f-f^*\right)\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} + \left\|P_r\left(f^*\right)-f^*\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} + \left\|f^*-f\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)}$$

$$\leq c_{60}\left\|f^*-f\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} + \left\|P_r\left(f^*\right)-f^*\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega)} < \left\{c_{61}+\|\omega\|_{L_M(\mathbf{T})}\right\}\varepsilon$$

elde edilir. $\omega \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$ olduğundan $\omega \in L_M(\mathbf{T})$ olur ve ispat biter.□

Önerme 9 Γ *Dini-düzgün bir eğri,* $0<\alpha_M$, $\beta_M<1$, $\omega \in A_{1/\alpha_M}(\Gamma) \cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ *ve* $L_M(\mathbf{T})$ *yansımalı bir Orlicz uzayı ise*

$$T: E_M(\mathbf{D},\omega_0) \to E_M(G,\omega) \text{ ve } \tilde{T}: E_M(\mathbf{D},\omega_1) \to \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right)$$

operatörleri birebir ve örtendir.

İspat Biz T operatörünü göz önüne alalım. $\tilde{T}$ operatörü için benzer bir ispat yöntemi ile aynı sonuca ulaşabiliriz. $g \in E_M(\mathbf{D}, \omega_0)$ olmak üzere g nin Taylor açılımı

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k, \quad w \in \mathbf{D}$$

olsun. Kolayca görülebilir ki, eğer Γ Dini-düzgün ise $\omega \in A_{1/\alpha_M}(\Gamma) \cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ ile $\omega_0 \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$, $\omega_1 \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$ koşulları denktir. $\omega_0 \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$ olduğundan öyle p, $q \in (1, \infty)$ sabitleri vardır ki

$$1 < p < 1/\beta_M \le 1/\alpha_M < q < \infty \text{ ve } \omega_0 \in A_p(\mathbf{T}) \cap A_q(\mathbf{T})$$

sağlanır ve

$$L^q(\mathbf{T}) \subset L_M(\mathbf{T}) \subset L^p(\mathbf{T})$$

sürekli gömmeleri vardır.

$g_r(w) := g(rw)$, $0 < r < 1$ olsun. $g \in E^1(\mathbf{D})$, sınır değerlerinin yardımıyla Poisson integral gösterimine sahip olduğundan [27, s. 41] Önerme 8 ile

$$\|g_r - g\|_{L_M(\mathbf{T}, \omega_0)} = \|P_r(g) - g\|_{L_M(\mathbf{T}, \omega_0)}$$

ve böylece

$$\left\| g_r - g \right\|_{L_M(\mathbf{T},\,\omega_0)} \to 0, \quad r \to 1^-$$

bulunur. T operatörünün sınırlılığı

$$\left\| T(g_r) - T(g) \right\|_{L_M(\Gamma,\,\omega)} \to 0, \quad r \to 1^- \tag{4.4}$$

olduğunu verir. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k w^k$ serisi $\mathbf{T}$ de düzgün yakınsadığından

$$\begin{aligned} T(g_r)(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{g_r(w)\psi'(w)}{\psi(w) - z'} dw = \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{w^m \psi'(w)}{\psi(w) - z'} dw \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^m \Phi_m(z'), \quad z' \in G \end{aligned}$$

bulunur. [29, s. 43] deki Lemma 3 ve son eşitlik bize $a_k\left(T(g_r)\right)$ Faber katsayıları için

$$\begin{aligned} a_k\left(T(g_r)\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{T(g_r)\left(\psi(w)\right)}{w^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^m \Phi_m\left(\psi(w)\right)}{w^{k+1}} dw \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{\Phi_m\left(\psi(w)\right)}{w^{k+1}} dw = \alpha_k r^k \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$a_k\left(T\left(g_r\right)\right) \to \alpha_k, \quad r \to 1^- \tag{4.5}$$

yakınsamasını verir. (2.1), Hölder eşitsizliği ve [34] daki Teorem 2.1 sırasıyla uygulanırsa

$$\left|a_k\left(T\left(g_r\right)\right) - a_k\left(T\left(g\right)\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{\left(T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right)\left(\psi\left(w\right)\right)}{w^{k+1}} dw\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} \left|\left[T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right]\left(\psi\left(w\right)\right)\right|\left|dw\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \left|\left[T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right]\left(z\right)\right|\left|\varphi'\left(z\right)\right|\left|dz\right|$$

$$\leq \frac{c_{62}}{2\pi}\int_{\Gamma} \left|\left[T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right]\left(z\right)\right|\left|dz\right| = \frac{c_{63}}{2\pi}\int_{\Gamma} \left|\left[T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right]\left(z\right)\right|\omega\left(z\right)\omega^{-1}\left(z\right)\left|dz\right|$$

$$\leq \frac{c_{64}}{2\pi}\left\|\left(T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right)\omega\left(z\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}\left\|\omega^{-1}\left(\cdot\right)\right\|_{L_N(\Gamma)} \leq \frac{c_{65}}{2\pi}\left\|T\left(g_r\right) - T\left(g\right)\right\|_{L_M(\Gamma,\,\omega)}$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve (4.4) ten

$$a_k\left(T\left(g_r\right)\right) \to a_k\left(T\left(g\right)\right), \quad r \to 1^-$$

ve (4.5) ten de $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ için $a_k\left(T\left(g\right)\right) = \alpha_k$ olduğu çıkar. Eğer $T\left(g\right) = 0$ ise $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ için $\alpha_k = a_k\left(T\left(g\right)\right) = 0$ ve dolayısıyla $g = 0$ olduğu bulunur. T operatörünün birebir olduğu gösterilmiş olur.

$f \in E_M\left(G,\omega\right)$ alalım ve $f_0 = f \circ \psi \in L_M\left(\mathbf{T},\omega_0\right)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{f_0\left(\tau\right)}{\tau - w} d\tau$$

Cauchy tipli integrali $\mathbf{D}$ de f_0^+ analitik fonksiyonu ve $\mathbf{D}^-$ de f_0^- analitik fonksiyonunu temsil eder. $\omega_0 \in A_{1/\alpha_M}(\mathbf{T}) \cap A_{1/\beta_M}(\mathbf{T})$ olduğundan Önerme 5 ile

$$f_0^+ \in E_M(\mathbf{D},\omega_0) \quad \text{ve} \quad f_0^- \in E_M(\mathbf{D}^-,\omega_0)$$

olur. $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ değerleri aynı zamanda f_0^+ fonksiyonunun orijindeki Taylor katsayıları olur, yani

$$f_0^+(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad w \in \mathbf{D}$$

geçerlidir. Buradan

$$T(f_0^+) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k$$

elde edilir. $E_M(G,\omega)$ uzayında aynı Faber katsayılarına sahip birbirinden farklı iki fonksiyon olamayacağından $T(f_0^+) = f$ olmalıdır. Bu bize T operatörünün örten olduğunu verir.□

4.3 Temel Sonuçların İspatları

Teorem 6 nın ispatı Bu teoremi ispatlamak için

$$U_n(z,f) := \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k F_k(1/z)$$

rasyonel fonksiyonunun aranan koşulları sağladığını göstereceğiz. Γ üzerinde h.h.her yerde $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ sağlandığından

$$\left\| f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k F_k(1/z)\right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le c_{66}\tilde{\Omega}^{r}_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \tag{4.6}$$

ve

$$\left\| f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k \Phi_k(z)\right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le c_{67}\Omega^{r}_{\Gamma,M,\omega}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \tag{4.7}$$

eşitsizliklerinin gösterilmesi yeterlidir.

$f\in L_M(\Gamma,\omega)$ olsun. Bu durumda $f_1\in L_M(\mathbf{T},\omega_1)$, $f_0\in L_M(\mathbf{T},\omega_0)$ olur. $z'\in G\backslash\{0\}$ aldığımızda Γ üzerinde h.h.her yerde

$$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k(1/z)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(z)-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right)$$
$$-S_{\Gamma}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}-\left(f_1^{+}\circ\varphi_1\right)\right]-f_1^{-}(\varphi_1(z))-f^{+}(z)$$

bulunur. (2.14), (3.15), Minkowski eşitsizliği ve S_{Γ} operatörünün sınırlılığı ile

$$\left\| f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k(1/z)\right\|_{L_M(\Gamma,\ \omega)} = \left\|\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^{k}(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right)\right.$$

$$-S_{\Gamma}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k-\left(f_1^+\circ\varphi_1\right)\right](z)\Bigg\|_{L_M(\Gamma,\omega)}$$

$$\leq c_{68}\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right\|_{L_M(\Gamma,\omega)}\leq c_{69}\left\|f_1^+(w)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k\right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_1)}$$

elde edilir. Diğer yandan f nin $\tilde{a}_k$ Faber-Laurent katsayıları f_1^+ nın orijindeki Taylor katsayıları ile aynıdır. Dolayısıyla Önerme 6 kullanılırsa

$$\left\|f+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k(1/z)\right\|_{L_M(\Gamma,\omega)}\leq c_{70}\Omega_{M,\omega_1}^{r}\left(f_1^+,\frac{1}{n+1}\right)=c_{70}\tilde{\Omega}_{\Gamma,M,\omega}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

bulunur ve (4.6) ispatlanmış olur.

$f\in E_M(G,\omega)$ olsun. Bu durumda $f_0\in L_M(\mathbf{T},\omega_0)$ ve

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma=0,\qquad z'\in G^-$$

sağlanır. $z'\in G^-$ alalım. Γ üzerinde h.h.her yerde

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(z)-f_0^+\left(\varphi(z)\right)\right)+S_{\Gamma}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k-\left(f_0^+\circ\varphi\right)\right]$$
$$+\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(z)-f_0^-\left(\varphi(z)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k (z) - f_0^+ (\varphi(z))\right) + \left[f_0^+ (\varphi(z)) - f_0^- (\varphi(z))\right]$$
$$+S_\Gamma \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k - \left(f_0^+ \circ \varphi\right)\right]$$

olduğundan (2.13), (3.14), Minkowski eşitsizliği ve S_Γ operatörünün sınırlılığı ile

$$\begin{aligned}\left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k (z) \right\|_{L_M(\Gamma,\, \omega)} &= \left\| \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k (z) - f_0^+ (\varphi(z))\right) + \right. \\ &\quad \left. +S_\Gamma \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k - \left(f_0^+ \circ \varphi\right)\right] \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \\ &\le c_{71} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k (z) - f_0^+ (\varphi(z)) \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \\ &\le c_{71} \left\| f_0^+ (w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_0)}\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan f nin a_k Faber katsayıları f_1^+ nın orijindeki Taylor katsayıları ile aynıdır. Dolayısıyla Önerme 6 kullanılırsa

$$\left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k (z) \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le c_{72} \Omega^r_{M,\omega_0} \left(f_0^+, \frac{1}{n+1} \right) = c_{72} \Omega^r_{\Gamma,M,\omega} \left(f, \frac{1}{n+1} \right)$$

çıkar ve teoremin ispatı sona erer.□

Teorem 7 nin ispatı $f \in E_M(G,\omega)$ olsun. Önerme 9 dan $T\left(f_0^+\right) = f$ dır. $T : E_M(\mathbf{D},\omega_0) \to E_M(G,\omega)$ operatörü doğrusal, sınırlı, birebir ve örten olduğundan $T^{-1}: E_M(G,\omega) \to E_M(\mathbf{D},\omega_0)$ operatörü de doğrusal ve sınırlıdır. $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ için

$$E_n(f,G)_{M,\omega} = \left\| f - p_n^* \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)}$$

sağlandığında $T^{-1}(p_n^*) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{D})$ olur ve T^{-1} operatörü sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} E_n\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_{M,\omega_0} &\le \left\| f_0^+ - T^{-1}\left(p_n^*\right) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_0)} = \left\| T^{-1}(f) - T^{-1}\left(p_n^*\right) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_0)} \\ &= \left\| T^{-1}\left(f - p_n^*\right) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_0)} \le \left\| T^{-1} \right\| \left\| f - p_n^* \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \\ &= \left\| T^{-1} \right\| E_n(f,G)_{M,\omega} \end{aligned} \tag{4.8}$$

sağlanır. Diğer yandan [35]

$$\Omega_{M,\omega_0}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_{73}}{n^{2r}}\left\{E_0\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_{M,\omega_0} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_{M,\omega_0}\right\}, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots$$

olur ve buradan (4.8) yardımıyla

$$\begin{aligned} \Omega_{\Gamma,M,\omega}^r\left(f,\frac{1}{n}\right) &= \Omega_{M,\omega_0}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right) \\ &\le \frac{c_{74}}{n^{2r}}\left\{E_0\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_{M,\omega_0} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k\left(f_0^+,\mathbf{D}\right)_{M,\omega_0}\right\} \\ &\le \left\| T^{-1} \right\| \frac{c_{74}}{n^{2r}}\left\{E_0(f,G)_{M,\omega} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k(f,G)_{M,\omega}\right\}, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}$$

çıkar.□

Teorem 8 in ispatı $f \in \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right)$ alalım. Önerme 9 dan $\tilde{T}\left(f_1^+\right)=f$ olur. $\tilde{T}: E_M\left(\mathbf{D},\omega_1\right) \to \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right)$ operatörü doğrusal, sınırlı, birebir ve örten olduğundan $\tilde{T}^{-1}: \tilde{E}_M\left(G^-,\omega\right) \to E_M\left(\mathbf{D},\omega_1\right)$ operatörü de doğrusal ve sınırlıdır. $r_n^* \in \mathbf{R}_n$ için

$$\tilde{E}_n(f)_{M,\,\omega} = \left\| f - r_n^* \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)}$$

oluyorsa $\tilde{T}^{-1}\left(r_n^*\right) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{D})$ ve

$$\begin{aligned} E_n\left(f_1^+\right)_{M,\,\omega_1} &\le \left\| f_1^+ - \tilde{T}^{-1}\left(r_n^*\right) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_1)} = \left\| \tilde{T}^{-1}(f) - \tilde{T}^{-1}\left(r_n^*\right) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_1)} \\ &= \left\| \tilde{T}^{-1}\left(f - r_n^*\right) \right\|_{L_M(\mathbf{T},\omega_1)} \le \left\| \tilde{T}^{-1} \right\| \left\| f - r_n^* \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \\ &= \left\| \tilde{T}^{-1} \right\| \tilde{E}_n(f)_{M,\omega} \end{aligned} \tag{4.9}$$

sağlanır.

$$\Omega_{M,\omega_1}^r\left(f_1^+,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_{75}}{n^{2r}}\left\{ E_0\left(f_1^+\right)_{M,\omega_1} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k\left(f_1^+\right)_{M,\omega_1} \right\}, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots$$

olduğundan, (4.9) ile

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\Gamma,M,\omega}^r\left(f,\frac{1}{n}\right) &= \Omega_{M,\omega_1}^r\left(f_1^+,\frac{1}{n}\right) \\ &\le \frac{c_{76}}{n^{2r}}\left\{ E_0\left(f_1^+\right)_{M,\omega_1} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k\left(f_1^+\right)_{M,\omega_1} \right\} \\ &\le \left\| \tilde{T}^{-1} \right\| \frac{c_{76}}{n^{2r}}\left\{ \tilde{E}_0(f)_{M,\omega} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} \tilde{E}_k(f)_{M,\omega} \right\}, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}$$

çıkar.□

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi belirtilebilir.

Üçüncü bölümde, önce Smirnov-Orlicz uzayında cebirsel polinomlarla yaklaşımın düz teoremi birinci düzgünlük modülüne göre elde edilmiştir ve Faber serilerinin maksimal yakınsaklık özelliği ile ilgili bir teorem ispatlanmıştır. Daha sonra eğri üzerinde tanımlı Orlicz uzayı göz önüne alınarak rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımın bir düz teoremi ispatlanmıştır. Bunun sonuçları olarak, kapalı Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı Smirnov-Orlicz uzaylarında Faber polinomları ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşımın düz teoremleri elde edilmiştir. Diğer yandan, bu uzaylarda yaklaşım teorisinin ters teoremleri ispatlanmıştır. Bu elde edilen ters ve düz teoremlerinin sonucu olarak genelleştirilmiş Lipschitz sınıfının bir karakterizasyonu verilmiştir.

Dördüncü bölümde Muckenhoupt ağırlıkları göz önüne alınarak yukarıda bahsedilen problemler ağırlıklı Smirnov-Orlicz uzaylarında incelenmiştir ve ağırlık üzerindeki bazı koşullara göre benzer teoremler ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Walsh, J. L. and Russel, H. G., “Integrated contiunity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 (1959), 355.

[2] Al'per, S. Y., “Approximation in the Mean of Analytic Functions of class E^p” *Gosudarstv. Izdat. Fiz-Mat. Lit., Moscow*, (1960), 273.

[3] Kokilashvili, V. M., “Approximation in the mean of analytic functions of class E_p”, *Sov. Math., Dokl.*, 8 (1967), 1393.

[4] Kokilashvili, V. M., “A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials”, *Sov. Math., Dokl.*, 10 (1969), 411.

[5] Ibragimov, I. I. and Mamedhanov, D. I., “Constructive characterization of a certain class of functions”, *Sov. Math., Dokl.,* 16, (1975), 820.

[6] Andersson, J. E., “On the degree of polynomial approximation in $E^p(D)$”, *J. Approximation theory*, 19, (1977), 61.

[7] Andrasko, M. I., “On the approximation in the mean of analytic functions in regions with smooth boundaries", Problems in mathematical physics and function theory, Izdat. Akad. Nauk Ukrain. RSR, 1, p.3, Kiev, (1963).

[8] Galan, D. M., “Approximation in the mean of regular functions of class E^1 In regions with smooth boundaries”, *Dopovidi Akad. Nauk. Ukrain. RSR Ser A*, p.673, (1967).

[9] Israfilov, D. M., “Approximate properties of generalized Faber series in an integral metric”, *Izv. Akad. Nauk. Az SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk*, 2 (1987),10.

[10] Cavus, A., and Israfilov, D. M., “Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of class $L^p(\Gamma)$ with $1<p<\infty$”, *Approximation Theory Appl.*, 11, 1, (1995), 105.

[11] Israfilov, D. M., “Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E_p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials”, *Constr. Approx.*, 17, 3 (2001), 335.

[12] Israfilov, D. M., “Approximation by p-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces”, *Czechoslovak Math. J.*, 54 (2004), 751.

[13] Kokilashvili, V. M., “On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes”, *Studia Math.,* 31 (1968), p.43.

[14] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Polynomial approximation in Smirnov-Orlicz classes”, *Comput. Methods and Function Theory*, 2, 2 (2002), 509.

[15] Israfilov, D. M., Oktay, B. and Akgun, R. , “Approximation in Smirnov-Orlicz classes”, *Glasnik Matematički*, 40, 1, (2005), 87.

[16] Israfilov, D. M., and Akgün, R., “Approximation in weighted Smirnov-Orlicz class”, *J. Math. Kyoto Univ.,* 46, 4 (2006).

[17] Warschawski, S. E., “Über das ranverhalten der Ableitung der Abildungsfunktion bei konformer Abbildung”, *Math. Z.*, 35 (1932), 321.

[18] Böttcher, A. and Karlovich, Y. A., Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators, 154, Progress in Mathematics, Birkhauser Verlag, Cambridge, (1997).

[19] Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Translation of Mathematical Monographs, 26, AMS, Providence, (1969).

[20] Suetin, P. K., Series of Faber Polynomials, Gordon and Breach, Reading, (1998).

[21] Karlovich, A. Y., “Algebras of singular integral operators with piecewise continious coefficients in reflexive Orlicz spaces”, *Math. Nachr.*, 179 (1996), 187.

[22] Rao, M. M. and Ren, Z. D., Theory of Orlicz Spaces Marcel Dekker, New York, 1991.

[23] Havin, V. P., “Continuity in L_p of an integral operator with the Cauchy kernel”, *Vestnik Leningrad Univ.,* 22, 7 (1967), 103.

[24] Zygmund, A., Trigonometric series, vol: I and II, Cambridge, (1959).

[25] Krasnoselskii, M. A. and Rutickii, Y. B., Convex Functions and Orlicz Spaces, P. Noordhoff Ltd., Groningen, (1961).

[26] Ryan, R., “On the conjugate functions in Orlicz space”, *Pacific J. Math.*, 13 (1963), 1371.

[27] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, Academic Press, 38, New York, (1970).

[28] Ramazanov, A-R. K., “On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces”, *Anal. Math.* 10 (1984), 117.

[29] Gaier, D., Lectures on Complex Approximation, Birkhäuser, Boston, (1987).

[30] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, (1993).

[31] Bary, N. K., A Treatise on Trigonometric Series, Volume I, Pergamon Press, Oxford, (1964).

[32] Kokilashvili, V. M., “O priblijeniy periodiceskih funktsii”, *Tbilisi Math. Inst.*, 34, (1968), 51.

[33] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces I and II, Classics in mathematics, Springer-Verlag, (1996).

[34] Karlovich, A. Y., “Algebras of singular integral operators with PC coefficients in rearrangement-invariant spaces with Muckenhoupt weights”, *J. Oper. Theory*, 47 (2002), 303.

[35] Israfilov, D. M. and Guven, A., “Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces”, *Studia Math.*, 174, 2 (2006), 147.

[36] Muckenhoupt, B., “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 167 (1972), 207.

[37] Boyd, D. W., “Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18 (1967), 215.

[38] Karlovich, A. Y., “Fredholmness of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on weighted Banach function spaces”, *J. Integ. Eq. Appl.*, 15 (2003), 263.

[39] Karlovich, A. Y., “The essential norm of the Cauchy singular integral operator in weighted rearrangement invariant spaces”, *Integ. Eq. and Oper. Th*. 38, (2000), 28.

[40] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 3rd edition, (1987).