Balıkesir
Üniversitesi
FBE

baufbe@balikesir.edu.tr

2024

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORHAN KARACAN

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA SMARANDACHE EĞRİLERİ

Orhan KARACAN

Bilim Kod / Kodları : 20402

BALIKESİR, HAZİRAN-2024

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA SMARANDACHE EĞRİLERİ

ORHAN KARACAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Bengü BAYRAM (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK
Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ

BALIKESİR, HAZİRAN - 2024

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan “**3-Boyutlu Öklid Uzayında Tzitzeica Smarandache Eğrileri**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Orhan KARACAN

ÖZET

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA SMARANDACHE EĞRİLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ORHAN KARACAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. BENGÜ BAYRAM)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2024

Bu çalışmanın amacı Öklid uzayındaki Tzitzeica eğrileri ve Smarandache eğrileri arasındaki bağıntıları incelemektir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında Smarandache eğrilerinin Tzitzeica eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmış ve bununla ilgili örnekler verilmiştir. Tez sürecinde hali hazırda bulunan bazı tanımlardan faydalanılmış ve üzerine eklemeler yapılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez dört kısımdan oluşmaktadır.
Birinci kısım, giriş bölümüdür. Bu bölümde günümüze kadar yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiştir.
İkinci kısımda, çalışma süresince kullanılan, ihtiyaç duyulan temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir.
Üçüncü kısımda, $TN_1, TN_2, N_1N_2, TN_1N_2$ Smarandache eğrileri ele alınmış ve bu eğrilerin Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi) olma koşulları teker teker maddeler halinde incelenip ortaya çıkan teorem ve sonuçlar ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir.
Dördüncü kısımda ise ele alınan bazı birim hızlı eğrilerin $TN_1, TN_2, N_1N_2, TN_1N_2$ Smarandache eğrileri bulunarak bu eğrilerin Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi) olup olmadıkları ispatlarıyla beraber sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Tzitzeica Eğrisi, Smarandache Eğrisi, Düzlemsel Tzitzeica Eğrisi

Bilim Kod / Kodları : 20402 Sayfa Sayısı : 46

ABSTRACT

TZITZEICA SMARANDACHE CURVES IN THREE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE
MSC THESIS
ORHAN KARACAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. BENGÜ BAYRAM)

BALIKESİR, JUNE - 2024

The aim of this study is to examine the relations between Tzitzeica curves and Smarandache curves in Euclidean space. In addition, the necessary and sufficient conditions for Smarandache curves to be Tzitzeica curves in 3-dimensional Euclidean space are investigated and relevant examples are given. During the thesis process, some existing definitions were used and new results were obtained by making additions.

This thesis consists of four parts. The first part is the introduction. In this section, the studies carried out to date are mentioned.
In the second part, the basic concepts and definitions used and needed throughout the study are included.
In the third part, $TN_1, TN_2, N_1N_2, TN_1N_2$ Smarandache curves are discussed and the conditions for these curves to become Tzitzeica curves (Tz-curve) are examined one by one and the resulting theorems and results are expressed in detail.
In the fourth part, $TN_1, TN_2, N_1N_2, TN_1N_2$ Smarandache curves of some unit speed curves discussed are found and presented with proofs whether these curves are Tzitzeica curves (Tz-curve).

KEYWORDS: Tzitzeica Curves, Smarandache Curves, Planar Tzitzeica Curves

Science Code / Codes : 20402 Page Number : 46

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{E}^{\mathbf{3}}$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^{\mathbf{4}}$	: 4-boyutlu Öklid uzayı
V	: Vektör uzay
$\langle\, ,\rangle$	: İç çarpım
x	: Vektörel çarpım
$\lVert\ \rVert$	: Norm
$\boldsymbol{d}$	: Uzaklık fonksiyonu, Öklid metriği
$\boldsymbol{d_{osc}}$	: Eğrinin bir noktasındaki oskülatör düzleminin orijinden uzaklığı
$\boldsymbol{\alpha}$	: $\mathbb{E}^3$ de eğri
$\boldsymbol{\beta}$	: α nın Smarandache eğrisi
$\boldsymbol{v}$	: α eğrisinin hızı
$\boldsymbol{T}$	: Birim teğet vektör alanı
$\boldsymbol{N_1}$	: Asli normal vektör alanı
$\boldsymbol{N_2}$	: Binormal vektör alanı
$\boldsymbol{k_1}$	: Birinci eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{k_2}$	: İkinci eğrilik fonksiyonu (burulma)
$\boldsymbol{s}$	: α eğrisinin yay parametresi
$\boldsymbol{s_\beta}$	: β eğrisinin yay parametresi
$\boldsymbol{\beta_{TN_1}}$	: Verilen eğrinin TN_1- Smarandache eğrisi
$\boldsymbol{\beta_{TN_2}}$	: Verilen eğrinin TN_2- Smarandache eğrisi
$\boldsymbol{\beta_{N_1N_2}}$	: Verilen eğrinin N_1N_2- Smarandache eğrisi
$\boldsymbol{\beta_{TN_1N_2}}$	: Verilen eğrinin TN_1N_2- Smarandache eğrisi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans dönemim boyunca elini sırtımda hissettiğim özellikle tez hazırlık sürecimde anlayışlı yaklaşımıyla desteğini bir an olsun esirgemeyen, iletişime ve yardıma açık tutumu ile beni sorularım ile başbaşa bırakmayarak bana yol gösteren, akademik hayatıma dair bana heyecan ve cesaret aşılayan değerli danışman hocam Prof. Dr. Bengü Bayram'a içtenlikle teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca ışığıyla yolumu aydınlatan tüm hocalarıma, eğitimim için yıllarca emek veren sevgili annem ve babama, sağladığı motivasyon ile yanımda olan kıymetli arkadaşım Adviye'ye destekleri için teşekkür ederim.

Balıkesir, 2024 **Orhan Karacan**

1.GİRİŞ

Bu tezin amacı 3- boyutlu Öklid uzayındaki Smarandache eğrileri ve Tzitzeica eğrileri arasındaki bağıntıları incelemek aynı zamanda da Smarandache eğrilerinin hangi şart ve koşullar altında Tzitzeica eğrisi olduğunu ortaya koymaktır.

Smarandache eğrileri ilk olarak 2008 yılında Turgut ve Yılmaz tarafından [1] tanımlanmıştır. Yazarlar, konum vektörü diğer regüler eğrinin Frenet çatı vektörleriyle oluşturulan Minkowski uzaydaki regüler eğriye Smarandache eğrisi adını vermişlerdir. Bu eğrilerin özel durumlarını tanımlamışlar ve TB_2 eğrisini ifade etmişlerdir. [2] de yazar Öklid uzayda bazı özel Smarandache eğrilerini çalışmıştır. TN, NB, TNB Smarandache eğrilerini tanımlamıştır. [3] de yazarlar C birim Darboux vektörü olmak üzere NC Smarandache eğrisini tanımlamışlar ve bununla beraber NB ve TNB Smarandache eğrilerinin birinci ve ikinci eğriliklerini hesaplamışlardır. [4] de yazarlar bazı özel Smarandache eğrilerinin Frenet çatısı ve Darboux çatısına göre küresel görüntülerini çalışmışlardır. [5] de yazarlar 3-boyutlu Minkowski uzayında Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerini çalışmışlardır. Frenet ve Darboux çatısı arasındaki genel dönüşümü kullanarak timelike yüzey üzerinde tamamen yatan verilen timelike eğri için bazı özel Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. [6] da yazar 4-boyutlu Öklid uzayda Smarandache eğrilerini çalışmıştır. Smarandache eğrileri için Frenet-Serret ve Bishop değişmezlerini elde etmiştir. Smarandache eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğriliklerini hesaplamıştır. [7] de yazarlar Anti-Salkowski eğrisinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığı zaman Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplamışlardır. Bu değerler Anti-Salkowski eğrisine bağlı olarak ifade edilmiştir. [8] de yazar 4-boyutlu Öklid uzayda paralel öteleme çatısı yardımıyla bir eğriden elde edilen Smarandache eğrilerini çalışmıştır. [9] da yazarlar 4- boyutlu Galilean uzayda Smarandache eğrili hiperyüzey ailelerini incelemişlerdir. [10] da yazarlar Smarandache eğrilerini Frenet çatısından farklı bir alternatif çatı yardımıyla yeniden karakterize etmişlerdir. [11] de yazarlar Smarandache eğrilerinin integrallerinin alınmasıyla yeni eşlenik eğriler tanımlamışlar ve ana eğri ile elde edilen eğrinin Frenet vektörleri arasındaki bağıntılarını incelemişlerdir. [12] de yazarlar taban eğrisi, eğrinin Frenet vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrisi, doğrultman vektörü Smarandache eğrisinin birim vektörü olan Smarandace Ruled yüzeyleri çalışmışlardır. [13] de yazarlar 3-boyutlu Öklid uzayında Flc-çatısına göre bazı özel Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Yeni oluşturulan eğrilerin Frenet ve Flc-çatı vektörleri, eğrilik ve torsiyonu başlangıç eğri değişmezleri aracılığıyla ifade etmişlerdir.

Rumen Matematikçi Goerge Tzitzeica 1911 yılında Tzitzeica eğrileri olarak adlandırdığı bir eğri sınıfı tanımlamıştır [14]. 3-boyutlu Öklid uzayında bir Tzitzeica eğrisi, k_2 ikinci eğriliğinin eğrinin herhangi bir noktasındaki oskülatör düzleminin başlangıç noktasına olan uzaklığının (d_{osc}) karesiyle oranının sabit olmasıyla ifade edilir. [15] de yazarlar Minkowski uzayında Tzitzeica eğrileri ve yüzeyleri arasındaki bağıntıları incelemişlerdir. [16] da yazar Gauss eğriliği negatif olan Tzitzeica yüzeylerinin asimptotik çizgilerinin Tzitzeica eğrisi olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Öklid uzayında eliptik ve hiperbolik silindirik eğrilerin Tzitzeica koşulunu sağladığını göstermiştir. [17] ve [18] de sırasıyla hiperbolik ve eliptik silindirik eğriler Minkowski uzayına taşınmıştır. [19] da yazar bir uzay eğrisinin Tzitzeica eğrisi olması için gerekli ve yeterli şartı vermiştir. [20] de yazarlar 3-boyutlu Öklid uzayındaki Tzitzeica eğrilerini çalışmışlardır. Bu eğrilerin eğrilikleri karakterize edilmiştir. Sabit eğrilikli (W-eğrileri) Tzitzeica eğrilerinin olmadığı gösterilmiştir. [21] de yazarlar 3-boyutlu Öklid uzayındaki Tzitzeica yüzeylerini incelemişlerdir. Bazı yüzeyler için Tzitzeica yüzey şartı verilmiştir. Ayrıca düzlemsel Tzitzeica eğri tanımı ilk kez tanımlanmıştır. [22] ve [23] de yazarlar 4-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrilerini çalışmışlardır. $\mathbb{E}^4$ de birinci, ikinci ve üçüncü çeşit Tzitzeica eğri tanımlarını ifade etmişlerdir. Bazı hesaplamalar yaparak bunlarla ilgili örnekler vermişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Öklid Uzay, ikinci kısımda Tzitzeica eğrileri ve Smarandache eğrileri ele alınmıştır.

2.1 Öklid Uzay

2.1.1 Tanım

Boş olmayan bir A cümlesi ve bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A\mathrm{x}A \to V$ fonksiyonu varsa A'ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir.

1) $\forall\, P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

2) $\forall\, P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [24].

2.1.2 Tanım

3-boyutlu reel standart afin uzay 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ ile eşlensin. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^3 \mathrm{x}\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

İç çarpımı $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\langle\,,\rangle\,(x,y) = \langle x, y\rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} x_{\mathrm{i}}\, y_{\mathrm{i}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de **Standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpımı** adı verilir. $\{\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle\}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standart afin uzay **3-boyutlu Öklid uzayı** adını alır ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir [24].

$\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} x_{\mathrm{i}}\, y_{\mathrm{i}}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu **Öklid uzayı** olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir [24].

2.1.3 Tanım

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere

$$d: \mathbb{E}^3 \text{x}\, \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to d(x, y) = \sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} (y_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i}})^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $\boldsymbol{d(x, y)}$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir [24].

2.1.4 Tanım

$$d: \mathbb{E}^3 \text{x}\, \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ de **Öklid metriği** denir [24].

2.1.5 Tanım

$\mathbb{E}^3$ de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine $\mathbb{E}^3$'ün bir **dik çatısı** veya **Öklid çatısı** denir [24].

2.1.6 Tanım

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere $\alpha: I \to \mathbb{E}^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ **de bir eğri** denir [25].

2.1.7 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α ya **birim hızlı eğri** denir. Ayrıca $\alpha' \neq 0$ ise α ya **regüler eğri** adı verilir [25].

2.1.8 Tanım

3-boyutu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için α nın türevleri $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)$ lineer bağımsız ve $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{\iota v}(s)$ lineer bağımlı ise α eğrisine **3-mertebeli Frenet eğrisi** denir. Her bir Frenet eğrisinin $\{T, N_1, N_2\}$ ortonormal 3-çatısı ve $k_1, k_2: I \to \mathbb{R}$ **Frenet eğrilik fonksiyonları** için

$$\begin{cases} T'(s) = vk_1(s)N_1(s) \\ N_1'(s) = -vk_1(s)T(s) + vk_2(s)N_2(s) \\ N_2'(s) = -vk_2(s)N_1(s) \end{cases} \tag{2.1}$$

Frenet denklemleri sağlanır. Burada v , α eğrisinin **hızıdır** [26].

$\mathbb{E}^3$ de eğer $v = \|\alpha'(s)\| = 1$ alınırsa α eğrisi **birim hızlı eğri** olur ve (2.1) Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T'(s) = k_1(s)N_1(s) \\ N_1'(s) = -k_1(s)T(s) + k_2(s)N_2(s) \\ N_2'(s) = -k_2(s)N_1(s) \end{cases} \tag{2.2}$$

formunu alır.

2.1.9 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$, α nın **birim teğet vektör alanı** olarak adlandırılır.

$k_1: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\forall s \in I$ için

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\| \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona α nın $\boldsymbol{k_1}$ **eğrilik fonksiyonu** ve $k_1(s)$ değerine de α nın $\boldsymbol{k_1}$ **eğriliği** denir. Ayrıca $k_1(s) > 0$ olmak üzere

$$N_1(s) = \frac{T^{'}(s)}{k_1(s)} = \frac{T^{'}(s)}{\left\|T^{'}(s)\right\|} \tag{2.4}$$

vektör alanı **asli normal vektör alanı**,

$$N_2(s) = T(s) \text{ x } N_1(s) \tag{2.5}$$

vektör alanı da **binormal vektör alanı** olarak adlandırılır.

$$k_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$k_2(s) = -\langle N_2'(s), N_1(s) \rangle \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona α nın $\boldsymbol{k_2}$ **eğrilik fonksiyonu** ve $k_2(s)$ değerine de α nın $\boldsymbol{k_2}$ **eğriliği (burulması)** denir.

2.1.10 Tanım

Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler eğrisi için eğer α nın k_1 eğriliği $k_1(s)$ ve k_2 eğriliği $k_2(s)$ sabit fonksiyonlar iseler bu durumda α bir **vida eğrisi** veya **helis eğrisi** olarak isimlendirilir [27].

Bu eğriler Öklid dönüşümlerinin bir parametreli gruplarının izleri olduklarından, F.Klein ve S. Lie tarafından **W-eğrileri** olarak isimlendirilmişlerdir [28].

Eğer $\mathbb{E}^3$ deki bir eğri için $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ oranı sıfırdan farklı sabit oluyor ise, bu eğri **genel helis** olarak adlandırılır [29].

2.1.11 Tanım

Bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler eğrisi için α nın her noktasında $\{T, N_1\}, \{T, N_2\}, \{N_1, N_2\}$ tarafından gerilen düzlemler sırasıyla **oskülatör düzlem**, **rektifiyan düzlem** ve **normal düzlem** olarak adlandırılır.

Eğer α eğrisinin yer vektörü rektifiyan düzlemde yatıyorsa $\boldsymbol{\alpha}$ **rektifiyan eğri**, oskülatör düzlemde yatıyorsa $\boldsymbol{\alpha}$ **oskülatör eğri**, normal düzlemde yatıyorsa $\boldsymbol{\alpha}$ **normal eğri** olarak isimlendirilir [30,31].

2.2 Tzitzeica Eğrileri ve Smarandache Eğrileri

2.2.1 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, $k_1(s) > 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere, birim hızı bir eğri olsun. a sıfırdan farklı sabit olmak üzere α nın k_2 eğriliği

$$\frac{k_2(s)}{d_{osc}^2} = \mathrm{a} \tag{2.7}$$

koşulunu sağlıyor ise bu durumda α ya **Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi)** denir. α nın oskülatör düzleminin orjinden uzaklığı

$$d_{osc} = \langle \alpha(s), N_2(s) \rangle \tag{2.8}$$

ifadesi ile verilir. Burada $N_2(s)$, α nın binormal vektör alanıdır [14].

2.2.2 Teorem

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α nın Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$k_2'(s)\langle N_2(s), \alpha(s) \rangle + 2k_2^2(s)\langle N_1(s), \alpha(s) \rangle = 0$$

olmasıdır [20].

2.2.3 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$, $(k_1(s) > 0)$ birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda a_1 sıfırdan farklı sabit olmak üzere

$$k_1(s) = \mathrm{a}_1 . d_{osc}^2 \tag{2.9}$$

şartı sağlanıyorsa α ya **düzlemsel Tzitzeica eğrisi (düzlemsel Tz-eğrisi)** denir. Burada $N_1(s)$ eğrinin birim normal vektör alanı olup

$$d_{osc} = \langle \alpha(s), N_1(s) \rangle \tag{2.10}$$

biçiminde tanımlanır [21].

2.2.4 Tanım

Minkowski uzayda regüler bir eğrinin pozisyon vektörü, diğer regüler eğri üzerindeki Frenet çatı vektörleriyle oluşuyorsa bu eğriye **Smarandache eğrisi** denir [1].

2.2.5 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$ olmak üzere

1) $\mathbf{TN_1}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T(s) + N_1(s)\big)$$

şeklinde,

2) $\boldsymbol{TN_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_2}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T(s) + N_2(s)\big)$$

şeklinde,

3) $\boldsymbol{N_1N_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_1N_2}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(N_1(s) + N_2(s)\big)$$

şeklinde,

4) $\boldsymbol{TN_1N_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1N_2}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(T(s) + N_1(s) + N_2(s)\big)$$

şeklinde tanımlanır [2]. Burada s_β eğrinin yay parametresidir.

3. $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölümde TN_1, TN_2 , $N_1\,N_2$, TN_1N_2 Smarandache eğrileri ele alınmıştır. Bu eğrilerin Tzitzeica eğri olma şartları incelenmiştir.

3.1 $\boldsymbol{TN_1}$- Smarandache Eğrisi

3.1.1 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, s yay parametresiyle parametrelendirilmiş birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$ ve $k_1(s), k_2(s)$ sıfırdan farklı sabit olmayan eğrilikler olmak üzere, TN_1 Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T(s) + N_1(s)\big) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

β_{TN_1} eğrisinin yay parametresini s_β ile gösterirsek ve β_{TN_1} eğrisinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned} \beta'_{TN_1}\big(s_\beta\big) &= \frac{d_{\beta_{TN_1}}}{d_{s_\beta}} \cdot \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T'(s) + N_1'(s)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-k_1(s)T(s) + k_1(s)N_1(s) + k_2(s)N_2(s)\big) \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Bu ifadenin normu $\left\|\frac{d_{\beta_{TN_1}}}{d_{s_\beta}}\right\| = 1$ olacağından

$$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{2k_1^2 + k_2^2}}{\sqrt{2}} \neq 0 \tag{3.3}$$

olmalıdır. Bu durumda β_{TN_1} eğrisinin teğet vektör alanı (3.2) ifadesinden

$$T_{\beta_{TN_1}} = \frac{d_{\beta_{TN_1}}}{d_{s_\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2k_1^2 + k_2^2}}\big(-k_1T + k_1N_1 + k_2N_2\big) \tag{3.4}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır ve (3.3) ifadesi yerine yazılırsa

$$(T_{\beta_{TN_1}})' = \left(\frac{d_{\beta_{TN_1}}}{d_{s_\beta}}\right)' \cdot \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \left(\frac{1}{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}}(-k_1T+k_1N_1+k_2N_2)\right)'$$

$$(T_{\beta_{TN_1}})' = \frac{\sqrt{2}}{(2k_1^2+k_2^2)^2}(AT+BN_1+CN_2) \tag{3.5}$$

elde edilir. Burada

$A(s) = -k_1^2(2k_1^2+k_2^2) - k_2(k_1'k_2 - k_1k_2')$

$B(s) = -k_1^2(2k_1^2+3k_2^2) + k_2(k_1'k_2 - k_1k_2' - k_2^3)$

$C(s) = k_1k_2(2k_1^2+k_2^2) - 2k_1(k_1'k_2 - k_1k_2')$

dir. β_{TN_1} eğrisinin eğriliği olan $k_{1\beta_{TN_1}}$ ise

$$k_{1\beta_{TN_1}} = \left\|T'_{\beta_{TN_1}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{(2k_1^2+k_2^2)^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2} \tag{3.6}$$

olur. Diğer taraftan β_{TN_1} eğrisinin asli normal vektör alanı (3.5) ve (3.6) ifadelerinden

$$N_{1\beta_{TN_1}} = \frac{T'_{\beta_{TN_1}}}{k_{1\beta_{TN_1}}} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(AT+BN_1+CN_2) \tag{3.7}$$

elde edilir. β_{TN_1} eğrisinin binormal vektör alanı (3.4) ve (3.7) ifadelerinden

$$N_{2\beta_{TN_1}} = T_{\beta_{TN_1}} \text{x}\, N_{1\beta_{TN_1}} = \frac{1}{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{vmatrix} T & N_1 & N_2 \\ -k_1 & k_1 & k_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

$$N_{2\beta_{TN_1}} = \frac{1}{DE}[(Ck_1 - Bk_2)T + (Ck_1 + Ak_2)N_1 + (-Bk_1 - Ak_1)N_2] \tag{3.8}$$

olur. Burada

$D(s) = \sqrt{2k_1^2+k_2^2}$

$E(s) = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

dir. (3.8) ifadesinin türevi alınır ve (3.3) ifadesi yerine yazılırsa

$$(N_{2\beta_{TN_1}})'\frac{d_{s_\beta}}{d_s}=\left(\frac{1}{DE}\left[(Ck_1-Bk_2)T+(Ck_1+Ak_2)N_1+(-Bk_1-Ak_1)N_2\right]\right)'$$

$$(N_{2\beta_{TN_1}})'=\frac{\sqrt{2}}{D^3E^2}\begin{Bmatrix}[-(D'E+DE')(Ck_1-Bk_2)+DE(C'k_1+Ck_1'-B'k_2-Bk_2'-Ck_1^2-Ak_1k_2)]T\\+[-(D'E+DE')(Ck_1+Ak_2)+DE(Ck_1^2+C'k_1+Ck_1'+A'k_2+Ak_2'+Ak_1k_2)]N_1\\+[(D'E+DE')(k_1A+k_1B)+DE(Ck_1k_2+Ak_2^2-Ak_1'-Bk_1'-A'k_1-B'k_1)]N_2\end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.9) denklemleri yardımıyla $k_{2\beta_{TN_1}}$torsiyonu (burulması)

$$k_{2\beta_{TN_1}}=-\langle N'_{2\beta_{TN_1}},N_{1\beta_{TN_1}}\rangle \quad (3.10)$$

$$k_{2\beta_{TN_1}}=\frac{-\sqrt{2}}{D^2E^2}\begin{bmatrix}k_1\big(C'(A+B)-C(A'+B')\big)+k_2(-AB'+A'B)\\+k_1^2C(-A+B)+k_2^2AC+k_1k_2(-A^2+AB+C^2)\end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde bulunur.

3.1.2 Teorem

β_{TN_1}eğrisi $k_1,k_2\neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. β_{TN_1} Smarandache eğrisinin Tz-eğrisi olması için

$$\frac{k_{2\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2}=\frac{-2\sqrt{2}}{4C^2k_1^2+4Ck_1k_2(A-B)+k_2^2(A-B)^2}\begin{Bmatrix}k_1[C'(A+B)-C(A'+B')]\\+k_2(-AB'+A'B)\\+k_1^2C(B-A)+k_2^2AC\\+k_1k_2(-A^2+AB+C^2)\end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

ifadesinin sıfırdan farklı sabit olması gerekir.

İspat (3.1) ve (3.8) ifadeleri kullanılarak

$$d_{osc}=\langle\beta_{TN_1},N_{2\beta_{TN_1}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}DE}\big(2Ck_1+k_2(A-B)\big) \quad (3.13)$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (3.11) ve (3.13) denklemlerinden yararlanılarak (3.12) ifadesi elde edilir.

3.1.3 Sonuç

β_{TN_1} eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. Eğer $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\, sabit)$ ise β_{TN_1}Smarandache eğrisi düzlemsel bir eğri olur.

İspat Düzlemsel eğri olması için $k_{2\beta_{TN_1}} = 0$ olmalıdır. (3.11) ifadesinde k_1 yerine ck_2 yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

3.1.4 Teorem

β_{TN_1} eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\, sabit)$ olması durumunda β_{TN_1} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

İspat (3.1) ve (3.7) denklemleri yardımıyla

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1}, N_{1\beta_{TN_1}} \rangle = \frac{A+B}{\sqrt{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.6) ve (3.14) ifadesi ile düzlemsel Tz-eğri şartı (2.9) kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\right)^9} \begin{bmatrix} (2k_1^2+k_2^2)^2(k_1^2+k_2^2) \\ +2(k_1'k_2-k_1k_2')[k_1'k_2-k_1k_2'-k_2(2k_1^2+k_2^2)] \end{bmatrix}^{\frac{3}{2}} \tag{3.15}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede $k_1 = ck_2$ kullanılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2} = 2\sqrt{2}\left(\frac{c^2+1}{2c^2+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{sabit}$$

bulunur. Dolayısıyla β_{TN_1} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.1.5 Teorem

$\alpha(s)$ birim hızlı W-eğrisinin $(k_1, k_2 \neq 0\; sabit)$ β_{TN_1} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisidir.

İspat $k_1, k_2 \neq 0\; (sabit)$ olmak üzere (3.9) eşitliğinden $(N_{2\beta_{TN_1}})' = 0$ olduğu için (3.10) ifadesinden $k_{2\beta_{TN_1}} = 0$ elde edilir. Bu da β_{TN_1} Smarandache eğrisinin düzlemsel eğri olması demektir. (3.15) ifadesinde $k_1, k_2 \neq 0\; (sabit)$ yerine yazılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2} = \frac{2\sqrt{2}(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(2k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0\; (sabit)$$

olduğundan dolayı β_{TN_1} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.2 TN_2 - Smarandache Eğrisi

3.2.1 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, s yay parametresiyle parametrelendirilmiş birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$ ve $k_1(s), k_2(s)$ sıfırdan farklı sabit olmayan eğrilikler olmak üzere, TN_2 Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_2}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T(s) + N_2(s)\big) \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır.

β_{TN_2} eğrisinin yay parametresini s_β ile gösterirsek ve β_{TN_2} eğrisinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}\beta'_{TN_2}(s_\beta) &= \frac{d_{\beta_{TN_2}}}{d_{s_\beta}} \cdot \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T'(s) + N_2'(s)\big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(k_1(s)N_1(s) - k_2(s)N_1(s)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(k_1(s) - k_2(s)\big)N_1(s)\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Bu ifadenin normu $\left\|\frac{d_{\beta_{TN_2}}}{d_{s_\beta}}\right\| = 1$ olacağından

$$\frac{d_{s_\beta}}{d_s}=\frac{\sqrt{(k_1-k_2)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{2}}\neq 0 \tag{3.18}$$

olmalıdır. Bu durumda β_{TN_2} eğrisinin teğet vektör alanı (3.17) ifadesinden

$$T_{\beta_{TN_2}}=\frac{d_{\beta_{TN_2}}}{d_{s_\beta}}=\frac{(k_1-k_2)N_1}{|k_1-k_2|}=\begin{cases} N_1, & k_1>k_2\\ -N_1, & k_1<k_2\end{cases} \tag{3.19}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır ve (3.18) ifadesi yerine yazılırsa

$$(T_{\beta_{TN_2}})'=\left(\frac{d_{\beta_{TN_2}}}{d_{s_\beta}}\right)'\cdot\frac{d_{s_\beta}}{d_s}=\left(\begin{cases} N_1, & k_1>k_2\\ -N_1, & k_1<k_2\end{cases}\right)'$$

$$(T_{\beta_{TN_2}})'=\begin{cases} N_1', & k_1>k_2\\ -N_1', & k_1<k_2\end{cases}=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}(-k_1T+k_2N_2)}{|k_1-k_2|}, & k_1>k_2\\ \frac{-\sqrt{2}(-k_1T+k_2N_2)}{|k_1-k_2|}, & k_1<k_2\end{cases}$$

$$(T_{\beta_{TN_2}})'=\frac{-\sqrt{2}k_1}{(k_1-k_2)}T+\frac{\sqrt{2}k_2}{(k_1-k_2)}N_2 \tag{3.20}$$

elde edilir. β_{TN_2} eğrisinin eğriliği olan $k_{1\beta_{TN_2}}$ise

$$k_{1\beta_{TN_2}}=\left\|T'_{\beta_{TN_2}}\right\|=\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2}}{|k_1-k_2|} \tag{3.21}$$

olur. Diğer taraftan β_{TN_2} eğrisinin asli normal vektör alanı (3.20) ve (3.21) ifadelerinden

$$N_{1\beta_{TN_2}}=\frac{T'_{\beta_{TN_2}}}{k_{1\beta_{TN_2}}}=\begin{cases} \frac{-k_1T+k_2N_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, & k_1>k_2\\ \frac{k_1T-k_2N_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, & k_1<k_2\end{cases} \tag{3.22}$$

elde edilir. β_{TN_2} eğrisinin binormal vektör alanı (3.19) ve (3.22) ifadelerinden

$$N_{2\beta_{TN_2}} = T_{\beta_{TN_2}} \,\mathrm{x}\, N_{1\beta_{TN_2}} = \begin{cases} \begin{vmatrix} T & N_1 & N_2 \\ 0 & +1 & 0 \\ \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} & 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \end{vmatrix}, & k_1 > k_2 \\ \begin{vmatrix} T & N_1 & N_2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} & 0 & \frac{-k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \end{vmatrix}, & k_1 < k_2 \end{cases}$$

$$N_{2\beta_{TN_2}} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}(k_2T+k_1N_2) \tag{3.23}$$

dir. (3.23) ifadesinin türevi alınır ve (3.18) ifadesi yerine yazılırsa

$$(N_{2\beta_{TN_2}})'\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \left(\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}(k_2T+k_1N_2)\right)'$$

$$(N_{2\beta_{TN_2}})' = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(k_1'k_2-k_1k_2')}{(k_1-k_2)(k_1^2+k_2^2)^{\frac{3}{2}}}(-k_1T+k_2N_2), & k_1 > k_2 \\ \frac{-\sqrt{2}(k_1'k_2-k_1k_2')}{(k_1-k_2)(k_1^2+k_2^2)^{\frac{3}{2}}}(-k_1T+k_2N_2), & k_1 < k_2 \end{cases} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.22) ve (3.24) denklemleri yardımıyla $k_{2\beta_{TN_2}}$ torsiyonu (burulması)

$$k_{2\beta_{TN_2}} = -\langle N'_{2\beta_{TN_2}}, N_{1\beta_{TN_2}} \rangle \tag{3.25}$$

$$k_{2\beta_{TN_2}} = \frac{-\sqrt{2}(k_1'k_2-k_1k_2')}{(k_1-k_2)(k_1^2+k_2^2)} \tag{3.26}$$

şeklinde bulunur.

3.2.2 Teorem

β_{TN_2} eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. β_{TN_2} Smarandache eğrisinin Tz-eğrisi olması için

$$\frac{k_{2\beta_{TN_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{-2\sqrt{2}(k_1'k_2-k_1k_2')}{(k_1-k_2)(k_1+k_2)^2} \tag{3.27}$$

ifadesinin sıfırdan farklı sabit olması gerekir.

İspat (3.16) ve (3.23) ifadeleri kullanılarak

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_2}, N_{2\beta_{TN_2}} \rangle = \frac{k_2}{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2}} + \frac{k_1}{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2}} = \frac{k_1+k_2}{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \tag{3.28}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (3.26) ve (3.28) denklemlerinden yararlanılarak (3.27) ifadesi elde edilir.

3.2.3 Sonuç

β_{TN_2} eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\ sabit)$ olması için gerek ve yeter şart β_{TN_2} Smarandache eğrisinin düzlemsel bir eğri $\left(k_{2\beta_{TN_2}} = 0\right)$ olmasıdır.

İspat $\Longrightarrow$: $k_1 = ck_2$ olsun. (3.26) ifadesinde k_1 yerine ck_2 yazılırsa $k_{2\beta_{TN_2}} = 0$ elde edilir.

$\Longleftarrow$: β_{TN_2} Smarandache eğrisinin düzlemsel bir eğri $\left(k_{2\beta_{TN_2}} = 0\right)$ olsun. (3.26) ifadesinden $k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0$ olur. Buradan $k_1 = ck_2$ elde edilir.

3.2.4 Teorem

β_{TN_2} eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\ sabit)$ olması durumunda β_{TN_2} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

İspat (3.16) ve (3.22) denklemleri yardımıyla

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_2}, N_{1\beta_{TN_2}} \rangle = \begin{cases} \dfrac{-(k_1-k_2)}{\sqrt{2}\sqrt{(k_1^2+k_2^2)}}, & k_1 > k_2 \\[2ex] \dfrac{(k_1-k_2)}{\sqrt{2}\sqrt{(k_1^2+k_2^2)}}, & k_1 < k_2 \end{cases} \tag{3.29}$$

bulunur. (3.21) ve (3.29) ifadesi ile düzlemsel Tz-eğri şartı (2.9) kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_2}}}{d_{osc}^2}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(k_1-k_2)^3}, & k_1>k_2\\ \frac{2\sqrt{2}\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-(k_1-k_2)^3}, & k_1<k_2\end{cases} \tag{3.30}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede $k_1=ck_2$ kullanılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{TN_2}}}{d_{osc}^2}=\mp\frac{2\sqrt{2}\left(c^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{(c-1)^3}=\text{sabit}$$

bulunur. Dolayısıyla β_{TN_2} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.2.5 Teorem

$\alpha(s)$ birim hızlı W-eğrisinin $(k_1,k_2\neq 0\; sabit)$ β_{TN_2} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisidir.

İspat $k_1,k_2\neq 0\;(sabit)$ olmak üzere (3.24) eşitliğindeki $(N_{2\beta_{TN_2}})'=0$ olduğu için (3.25) ifadesinden $k_{2\beta_{TN_2}}=0$ elde edilir. Bu da β_{TN_2} Smarandache eğrisinin düzlemsel eğri olması demektir. (3.30) ifadesinde $k_1,k_2\neq 0\;(sabit)$ yerine yazılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{TN_2}}}{d_{osc}^2}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(k_1-k_2)^3}, & k_1>k_2\\ \frac{2\sqrt{2}\left(k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-(k_1-k_2)^3}, & k_1<k_2\end{cases}\neq 0\;(\text{sabit})$$

olduğundan dolayı β_{TN_2} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.3 N_1N_2-Smarandache Eğrisi

3.3.1 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, s yay parametresiyle parametrelendirilmiş birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$ ve $k_1(s), k_2(s)$ sıfırdan farklı sabit olmayan eğrilikler olmak üzere, N_1N_2 Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_1N_2}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(N_1(s) + N_2(s)\big) \tag{3.31}$$

şeklinde tanımlanır.

$\beta_{N_1N_2}$ eğrisinin yay parametresini s_β ile gösterirsek ve $\beta_{N_1N_2}$ eğrisinin türevini alırsak

$$\begin{aligned}\beta'_{N_1N_2}(s_\beta) &= \frac{d_{\beta_{N_1N_2}}}{d_{s_\beta}} \cdot \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(N_1'(s) + N_2'(s)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-k_1(s)T(s) - k_2(s)N_1(s) + k_2(s)N_2(s)\big) \end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Bu ifadenin normu $\left\|\frac{d_{\beta_{N_1N_2}}}{d_{s_\beta}}\right\| = 1$ olacağından

$$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}}{\sqrt{2}} \neq 0 \tag{3.33}$$

olmalıdır. Bu durumda $\beta_{N_1N_2}$ eğrisinin teğet vektör alanı (3.32) ifadesinden

$$T_{\beta_{N_1N_2}} = \frac{d_{\beta_{N_1N_2}}}{d_{s_\beta}} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}}(-k_1T - k_2N_1 + k_2N_2) \tag{3.34}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır ve (3.33) ifadesi yerine yazılırsa

$$(T_{\beta_{N_1N_2}})' = \left(\frac{d_{\beta_{N_1N_2}}}{d_{s_\beta}}\right)' \cdot \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \left(\frac{1}{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}(-k_1T - k_2N_1 + k_2N_2)\right)'$$

$$(T_{\beta_{N_1N_2}})' = \frac{\sqrt{2}}{B^2}\begin{bmatrix}(-2k_2A + k_1k_2B)T \\ +(k_1A - (k_1^2 + k_2^2)B)N_1 \\ +(-k_1A - k_2^2B)N_2\end{bmatrix} \tag{3.35}$$

elde edilir. Burada

$A(s) = k_1'k_2 - k_1k_2'$

$B(s) = k_1^2 + 2k_2^2$

dir. $\beta_{N_1N_2}$ eğrisinin eğriliği olan $k_{1\beta_{N_1N_2}}$ ise

$$k_{1\beta_{N_1N_2}} = \left\|T'_{\beta_{N_1N_2}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{B^{\frac{3}{2}}}\sqrt{2A^2 + (k_1^2 + k_2^2)B^2 - 2k_1AB} \tag{3.36}$$

olur. $C(s) = \sqrt{2A^2 + (k_1^2 + k_2^2)B^2 - 2k_1AB}$ denirse (3.36) ifadesi

$$k_{1\beta_{N_1N_2}} = \left\|T'_{\beta_{N_1N_2}}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{B^{\frac{3}{2}}}C \tag{3.37}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\beta_{N_1N_2}$ eğrisinin asli normal vektör alanı (3.35) ve (3.37) ifadelerinden

$$N_{1\beta_{N_1N_2}} = \frac{T'_{\beta_{N_1N_2}}}{k_{1\beta_{N_1N_2}}} = \frac{1}{\sqrt{B}C}\begin{bmatrix}(-2k_2A + k_1k_2B)T \\ +(k_1A - (k_1^2 + k_2^2)B)N_1 \\ +(-k_1A - k_2^2B)N_2\end{bmatrix} \tag{3.38}$$

elde edilir. $\beta_{N_1N_2}$ eğrisinin binormal vektör alanı (3.34) ve (3.38) ifadelerinden

$$N_{2\beta_{N_1N_2}} = T_{\beta_{N_1N_2}} \text{x}\, N_{1\beta_{N_1N_2}} = \begin{vmatrix} T & N_1 & N_2 \\ \frac{-k_1}{\sqrt{B}} & \frac{-k_2}{\sqrt{B}} & \frac{k_2}{\sqrt{B}} \\ \frac{-2k_2A+k_1k_2B}{\sqrt{B}C} & \frac{k_1A-(k_1^2+k_2^2)B}{\sqrt{B}C} & \frac{-k_1A-k_2^2B}{\sqrt{B}C}\end{vmatrix}$$

$$N_{2\beta_{N_1N_2}} = \frac{1}{C}[(k_2B)T - AN_1 + (-A + k_1B)N_2] \tag{3.39}$$

olur. (3.39) ifadesinin türevi alınır ve (3.33) ifadesi yerine yazılırsa

$$(N_{2\beta_{N_1N_2}})' \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \left(\frac{1}{C}[(k_2B)T - AN_1 + (-A + k_1B)N_2]\right)'$$

$$(N_{2\beta_{N_1N_2}})' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{B}C^2}\left\{\begin{array}{l}[-k_2BC' + C(k_2'B + k_2B'+k_1A)]T \\ +[AC' + C(k_2A - A')]N_1 \\ +[C'(A - k_1B) + C(-k_2A - A' + k_1'B + k_1B')]N_2\end{array}\right\} \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.38) ve (3.40) denklemleri yardımıyla $k_{2\beta_{N_1N_2}}$ torsiyonu (burulması)

$$k_{2\beta_{N_1N_2}} = -\langle N'_{2\beta_{N_1N_2}}, N_{1\beta_{N_1N_2}}\rangle \tag{3.41}$$

$$k_{2\beta_{N_1N_2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}C^2}[-3AB' + 2B(A' - k_2A)] \tag{3.42}$$

şeklinde bulunur.

3.3.2 Teorem

$\beta_{N_1N_2}$ eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $\beta_{N_1N_2}$ Smarandache eğrisinin Tz-eğrisi olması için

$$\frac{k_{2\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{-\sqrt{2}[-3AB'+2B(A'-k_2A)]}{(-2A+k_1B)^2} \tag{3.43}$$

ifadesinin sıfırdan farklı sabit olması gerekir.

İspat (3.31) ve (3.39) ifadeleri kullanılarak

$$d_{osc} = \langle \beta_{N_1N_2}, N_{2\beta_{N_1N_2}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}C}(-2A + k_1B) \tag{3.44}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (3.42) ve (3.44) denklemlerinden yararlanılarak (3.43) ifadesi elde edilir.

3.3.3 Sonuç

$\beta_{N_1N_2}$ eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. Eğer $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\; sabit)$ ise $\beta_{N_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel bir eğri olur.

İspat Düzlemsel eğri olması için $k_{2\beta_{N_1N_2}} = 0$ olmalıdır. (3.42) ifadesinde k_1 yerine ck_2 yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

3.3.4 Teorem

$\beta_{N_1N_2}$ eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\; sabit)$ olması durumunda $\beta_{N_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

İspat (3.31) ve (3.38) denklemleri yardımıyla

$$d_{osc} = \langle \beta_{N_1N_2}, N_{1\beta_{N_1N_2}} \rangle = \frac{-B\sqrt{B}}{\sqrt{2}C} \tag{3.45}$$

bulunur. (3.37) , (3.45) ifadeleri ile düzlemsel Tz-eğri şartı (2.9) kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{2\sqrt{2}C^3}{B^{\frac{9}{2}}} \tag{3.46}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede $k_1 = ck_2$ kullanılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = 2\sqrt{2}\left(\frac{c^2+1}{c^2+2}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{sabit}$$

bulunur. Dolayısıyla β_{TN_1} Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.3.5 Teorem

$\alpha(s)$ birim hızlı W-eğrisinin $k_1, k_2 \neq 0\ (sabit)$ $\beta_{N_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisidir.

İspat $k_1, k_2 \neq 0\ (sabit)$ olmak üzere (3.40) eşitliğinden $(N_{2\beta_{N_1N_2}})' = 0$ olduğu için (3.41) ifadesinden $k_{2\beta_{N_1N_2}} = 0$ elde edilir. Bu da $\beta_{N_1N_2}$ Smarandache eğrisinin düzlemsel eğri olması demektir. (3.46) ifadesinde $k_1, k_2 \neq 0\ (sabit)$ yerine yazılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{2\sqrt{2}(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0\ (\text{sabit})$$

olduğundan dolayı $\beta_{N_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.4 TN_1N_2- Smarandache Eğrisi

3.4.1 Tanım

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, s yay parametresiyle parametrelendirilmiş birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$ ve $k_1(s), k_2(s)$ sıfırdan farklı sabit olmayan eğrilikler olmak üzere, TN_1N_2 Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1N_2}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T(s) + N_1(s) + N_2(s)) \tag{3.47}$$

şeklinde tanımlanır.

$\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin yay parametresini s_β ile gösterirsek ve $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin türevini alırsak,

$$\beta'_{TN_1N_2}(s_\beta) = \frac{d\beta_{TN_1N_2}}{ds_\beta} \cdot \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(T'(s) + N_1'(s) + N_2'(s)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-k_1(s)T(s) + (k_1(s) - k_2(s))N_1(s) + k_2(s)N_2(s) \tag{3.48}$$

elde edilir. Bu ifadenin normu $\left\|\frac{d_{\beta_{TN_1N_2}}}{d_{s_\beta}}\right\| = 1$ olacağından

$$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_1k_2}}{\sqrt{3}} \neq 0 \tag{3.49}$$

olmalıdır. Bu durumda $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin teğet vektör alanı (3.48) ifadesinden

$$T_{\beta_{TN_1N_2}} = \frac{d_{\beta_{TN_1N_2}}}{d_{s_\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2}A}(-k_1T + (k_1-k_2)N_1 + k_2N_2) \tag{3.50}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır ve (3.49) ifadesi yerine yazılırsa

$$(T_{\beta_{TN_1N_2}})' = \left(\frac{d_{\beta_{TN_1N_2}}}{d_{s_\beta}}\right)' \cdot \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}A}(-k_1T + (k_1-k_2)N_1 + k_2N_2)\right)'$$

$$(T_{\beta_{TN_1N_2}})' = \frac{\sqrt{3}}{4(A)^4}(BT + CN_1 + DN_2) \tag{3.51}$$

elde edilir. Burada

$A(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2}$

$B(s) = (k_1'k_2 - k_1k_2')(k_1-2k_2) - 2k_1(k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2)(k_1 - k_2)$

$C(s) = (k_1 + k_2)(k_1'k_2 - k_1k_2') - 2(k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2)(k_1^2 + k_2^2)$

$D(s) = -(k_1'k_2 - k_1k_2')(2k_1-k_2) + 2k_2(k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2)(k_1 - k_2)$

dir. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin eğriliği olan $k_{1\beta_{TN_1N_2}}$ise

$$k_{1\beta_{TN_1N_2}} = \left\|T'_{\beta_{TN_1N_2}}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{4(A)^4}\sqrt{B^2 + C^2 + D^2} \tag{3.52}$$

olur. Diğer taraftan $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin asli normal vektör alanı (3.51) ve (3.52) ifadelerinden

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}} = \frac{T'_{\beta_{TN_1N_2}}}{k_{1\beta_{TN_1N_2}}} = \frac{1}{\sqrt{B^2+C^2+D^2}}(BT + CN_1 + DN_2) \tag{3.53}$$

elde edilir. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin binormal vektör alanı (3.50) ve (3.53) ifadelerinden

$$N_{2\beta_{TN_1N_2}} = T_{\beta_{TN_1N_2}} \mathrm{x}\, N_{1\beta_{TN_1N_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}A} \cdot \frac{1}{\sqrt{B^2+C^2+D^2}} \begin{vmatrix} T & N_1 & N_2 \\ -k_1 & (k_1 - k_2) & k_2 \\ B & C & D \end{vmatrix}$$

$$N_{2\beta_{TN_1N_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}A\sqrt{B^2+C^2+D^2}} \begin{Bmatrix} (Dk_1 - (D+C)k_2)T \\ +(Dk_1 + Bk_2)N_1 \\ +(-(B+C)k_1 + Bk_2)N_2 \end{Bmatrix} \tag{3.54}$$

olur. (3.54) ifadesinin türevi alınır ve (3.49) ifadesi yerine yazılırsa

$$(N_{2\beta_{TN_1N_2}})' \frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \left(\frac{\begin{bmatrix} (Dk_1-(D+C)k_2)T \\ +(Dk_1+Bk_2)N_1 \\ +(-(B+C)k_1+Bk_2)N_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}A\sqrt{B^2+C^2+D^2}} \right)'$$

$$(N_{2\beta_{TN_1N_2}})' =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2A^3(B^2+C^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} EDk_1 - (D+C)Ek_2 \\ +A(B^2+C^2+D^2)[D(k_1' - k_2' - k_1^2) + D'(k_1 - k_2) - Ck_2' - C'k_2 - k_1k_2B] \end{bmatrix} T \\ + \begin{bmatrix} EDk_1 + EBk_2 \\ +A(B^2+C^2+D^2)[D(k_1^2 - k_1k_2 + k_1') + B(-k_2^2 + k_1k_2 + k_2') + D'k_1 + B'k_2] \end{bmatrix} N_1 \\ + \begin{bmatrix} -E(B+C)k_1 + EBk_2 \\ +A(B^2+C^2+D^2)[D(k_1k_2) + B(k_2^2 - k_1' + k_2') + B'(-k_1 + k_2) - Ck_1' - C'k_1] \end{bmatrix} N_2 \end{Bmatrix} \tag{3.55}$$

elde edilir. Burada

$$E(s) = -A'(B^2 + C^2 + D^2) - A(BB' + CC' + DD')$$

dir. (3.53) ve (3.55) denklemleri yardımıyla $k_{2\beta_{TN_1N_2}}$ torsiyonu (burulması)

$$k_{2\beta_{TN_1N_2}} = -\langle N'_{2\beta_{TN_1N_2}}, N_{1\beta_{TN_1N_2}} \rangle \tag{3.56}$$

$$k_{2\beta_{TN_1N_2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2A^2(B^2+C^2+D^2)} \begin{bmatrix} k_1\big(D'(B+C) - D(B'+C')\big) \\ +k_2\big(-B(C'+D') + B'(C+D)\big) \\ +k_1^2 D(C-B) + k_2^2 B(D-C) \\ +k_1k_2(-B^2 + BC - DC + D^2) \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

şeklinde bulunur.

3.4.2 Teorem

$\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $\beta_{TN_1N_2}$ Smarandache eğrisinin Tz-eğrisi olması için

$$\frac{k_{2\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{-3\sqrt{3}}{\left(D(2k_1-k_2)-C(k_1+k_2)+B(2k_2-k_1)\right)^2}\left\{\begin{matrix} k_1\left(D'(B+C)-D(B'+C')\right) \\ +k_2\left(-B(C'+D')+B'(C+D)\right) \\ +k_1^2 D(C-B)+k_2^2 B(D-C) \\ +k_1k_2(-B^2+BC-DC+D^2) \end{matrix}\right\} \tag{3.58}$$

ifadesinin sıfırdan farklı sabit olması gerekir.

İspat (3.47) ve (3.54) ifadeleri kullanılarak

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1N_2}, N_{2\beta_{TN_1N_2}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}A\sqrt{B^2+C^2+D^2}}\left(D(2k_1-k_2)-C(k_1+k_2)+B(2k_2-k_1)\right) \tag{3.59}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (3.57) ve (3.59) denklemlerinden yararlanılarak (3.58) ifadesi elde edilir.

3.4.3 Sonuç

$\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. Eğer $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\ sabit)$ ise $\beta_{TN_1N_2}$Smarandache eğrisi düzlemsel bir eğri olur.

İspat Düzlemsel eğri olması için $k_{2\beta_{TN_1N_2}} = 0$ olmalıdır. (3.57) ifadesinde k_1 yerine ck_2 yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

3.4.4 Teorem

$\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi $k_1, k_2 \neq 0$ sabit olmayan eğrilikler olmak üzere $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin Smarandache eğrisi olsun. $k_1 = ck_2$ $(c \neq 0\ sabit)$ olması durumunda $\beta_{TN_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

İspat (3.47) ve (3.53) denklemleri yardımıyla

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1N_2}, N_{1\beta_{TN_1N_2}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{B^2+C^2+D^2}}(B + C + D) \quad (3.60)$$

bulunur. (3.52) ve (3.60) ifadesi ile düzlemsel Tz-eğri şartı (2.9) kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{3\sqrt{3}(B^2+C^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}{4A^4(B+C+D)^2} \quad (3.61)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede $k_1 = ck_2$ kullanılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{c^2+1}{c^2-c+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{sabit}$$

bulunur. Dolayısıyla $\beta_{TN_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

3.4.5 Teorem

$\alpha(s)$ birim hızlı W-eğrisinin $(k_1, k_2 \neq 0 \; sabit)$ $\beta_{TN_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisidir.

İspat $k_1, k_2 \neq 0 \; (sabit)$ olmak üzere (3.55) eşitliğinden $(N_{2\beta_{TN_1N_2}})' = 0$ olduğu için (3.56) ifadesinden $k_{2\beta_{TN_1N_2}} = 0$ elde edilir. Bu da $\beta_{TN_1N_2}$ Smarandache eğrisinin düzlemsel eğri olması demektir. (3.61) ifadesinde $k_1, k_2 \neq 0 \; (sabit)$ yerine yazılırsa

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{3\sqrt{3}(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}(k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \; (sabit)$$

olduğundan dolayı $\beta_{TN_1N_2}$ Smarandache eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4. ÖRNEKLER

4.1 Birinci Örnek

$\alpha_1(s) = \left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ parametrizasyonuyla verilen birim hızlı helis eğrisini (W-eğrisi) göz önüne alalım **(Şekil 4.1)**. $\alpha_1(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$T_{\alpha_1}(s) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N_{1\alpha_1}(s) = \left(- cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

$$N_{2\alpha_1}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{-1}{\sqrt{2}} cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$k_{1\alpha_1}(s) = \frac{1}{2}$ ve $k_{2\alpha_1}(s) = \frac{1}{2}$

olur.

4.1.1 $\boldsymbol{\alpha_1(s)}$ eğrisinin $\boldsymbol{TN_1}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{\alpha_1} + N_{1\alpha_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.2)**. Bu eğri $z = \frac{1}{2}$ düzleminde yatar. β_{TN_1} eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.4), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.11) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2} sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sqrt{2} cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\, sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta) = (0,0,1)$$

$k_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ve $k_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta) = 0$

şeklinde elde edilir. (3.3) denkleminden

$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{2k_1^2 + k_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ise $s_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} s$ olur. Buradan $s = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s_\beta$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right),-\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right)-\sqrt{2}\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right),0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right)+\sqrt{2}\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right),-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right),0\right)$$

olur. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta)=0$ olduğu için β_{TN_1} eğrisi düzlemsel eğri olur. β_{TN_1}eğrisi için (3.14) denkleminden

$$d_{osc}=\langle\beta_{TN_1}(s_\beta),N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)\rangle=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. (3.15) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan β_{TN_1} eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.1.2 $\boldsymbol{\alpha_1(s)}$ eğrisinin $\boldsymbol{TN_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{\alpha_1}+N_{2\alpha_1}\right)=(0,0,1)$$

dir.

4.1.3 $\boldsymbol{\alpha_1(s)}$ eğrisinin $\boldsymbol{N_1N_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_1N_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(N_{1\alpha_1}+N_{2\alpha_1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.3)**. Bu eğri $z=\frac{1}{2}$ düzleminde yatar. $\beta_{N_1N_2}$eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.34), (3.36), (3.38), (3.39) ve (3.42) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{N_1N_2}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sqrt{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)$$

$$N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\sqrt{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)$$

$$N_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta)=(0,0,1)$$

$k_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ve $k_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = 0$

şeklinde elde edilir. (3.33) denkleminden

$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ise $s_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s$ olur. Buradan $s = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s_\beta$ dır.

Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right) + cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right), -\sqrt{2}cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right) + sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right), 0\right)$$

$$N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right) - sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right), \sqrt{2}sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right) + cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s_\beta\right), 0\right)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $k_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi düzlemsel eğri olur. $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi için (3.45) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{N_1N_2}(s_\beta), N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta)\rangle = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. (3.46) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.1.4 $\boldsymbol{\alpha_1(s)}$ eğrisinin $\boldsymbol{TN_1N_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1N_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(T_{\alpha_1} + N_{1\alpha_1} + N_{2\alpha_1}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.4)**. Bu eğri $z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ düzleminde yatar. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.50), (3.52), (3.53), (3.54) ve (3.57) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \left(sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = (0,0,1)$$

$$k_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \sqrt{3} \text{ ve } k_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.49) denkleminden

$$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_1k_2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ ise } s_\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}s \text{ olur. Buradan } s = \sqrt{6}\, s_\beta \text{ dır.}$$

Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \left(sin(\sqrt{3}\, s_\beta), -cos(\sqrt{3}\, s_\beta), 0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \left(-cos(\sqrt{3}\, s_\beta), -sin(\sqrt{3}\, s_\beta), 0\right)$$

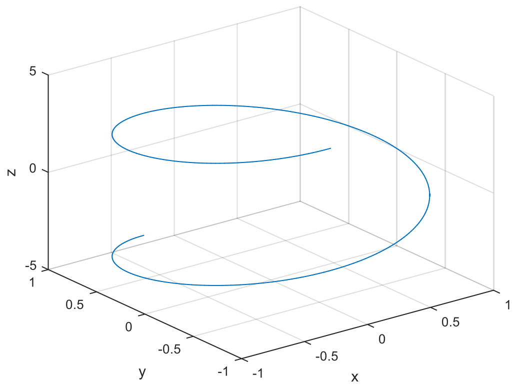
olur. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi düzlemsel eğri olur. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi için (3.60) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1N_2}(s_\beta), N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta)\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

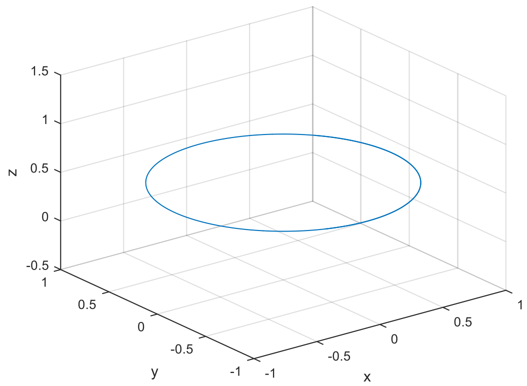
bulunur. (3.61) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = 3\sqrt{3}$$

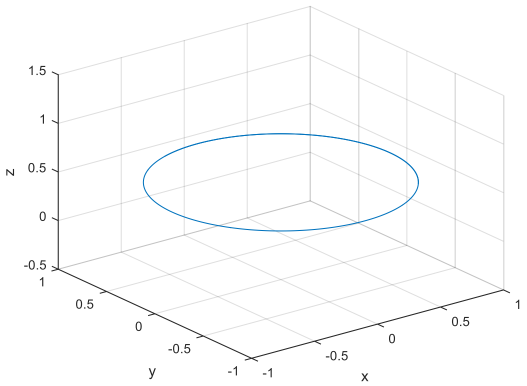
sıfırdan farklı sabit olduğundan $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.



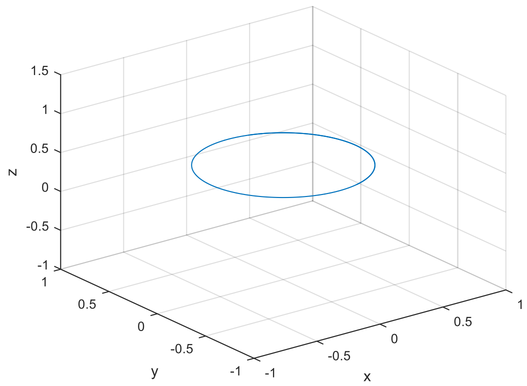
Şekil 4.1 $\alpha_1(s)$ birim hızlı helis eğrisi



Şekil 4.2 $\alpha_1(s)$ eğrisinin TN_1-Smarandache eğrisi



Şekil 4.3: $\alpha_1(s)$ eğrisinin N_1N_2-Smarandache eğrisi



Şekil 4.4: $\alpha_1(s)$ eğrisinin TN_1N_2-Smarandache eğrisi

4.2 İkinci Örnek

$\alpha_2(s)=\left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3},\frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ parametrizasyonuyla verilen birim hızlı silindirik helis eğrisini göz önüne alalım **(Şekil 4.5)**. $\alpha_2(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$T_{\alpha_2}(s)=\left(\frac{\sqrt{(1+s)}}{2},\frac{-\sqrt{(1-s)}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N_{1\alpha_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(1-s)},\sqrt{(1+s)},0\right)$$

$$N_{2\alpha_2}(s)=\left(\frac{-\sqrt{(1+s)}}{2},\frac{\sqrt{(1-s)}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$k_{1\alpha_2}(s)=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{(1-s^2)}} \text{ ve } k_{2\alpha_2}(s)=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{(1-s^2)}}$$

olur.

4.2.1 $\alpha_2(s)$ eğrisinin TN_1-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{\alpha_2}+N_{1\alpha_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}}+\sqrt{(1-s)},\frac{-\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}}+\sqrt{(1+s)},1\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.6)**. Bu eğri $z=\frac{1}{2}$ düzleminde yatar. β_{TN_1} eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.4), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.11) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{(1+s)}+\frac{\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}},\sqrt{(1-s)}+\frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{(1-s)}-\frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}},-\sqrt{(1+s)}+\frac{\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta)=(0,0,1)$$

$$k_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ve } k_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta)=0$$

şeklinde elde edilir. (3.3) denkleminden

$\frac{d_{s_\beta}}{d_s}=\frac{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}k_1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{(1-s^2)}}$ ise $s_\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}arcsin(s)$ olur. Buradan $s=sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)},\frac{\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)},0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)},\frac{\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)},0\right)$$

olur. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta)=0$ olduğu için β_{TN_1} eğrisi düzlemsel eğri olur. β_{TN_1}eğrisi için (3.14) denkleminden

$$d_{osc}=\langle\beta_{TN_1}(s_\beta),N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)\rangle=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. (3.15) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan β_{TN_1} eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.2.2 $\boldsymbol{\alpha_2(s)}$ eğrisinin $\boldsymbol{TN_2}$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{\alpha_2}+N_{2\alpha_2}\right)=(0,0,1)$$

dir.

4.2.3 $\alpha_2(s)$ eğrisinin N_1N_2-Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_1N_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(N_{1\alpha_2} + N_{2\alpha_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(1-s)} - \frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}}, \sqrt{(1+s)} + \frac{\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.7)**. Bu eğri $z = \frac{1}{2}$ düzleminde yatar. $\beta_{N_1N_2}$eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.34), (3.36), (3.38), (3.39) ve (3.42) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{(1+s)} - \frac{\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}}, \sqrt{(1-s)} - \frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{(1-s)} + \frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}}, -\sqrt{(1+s)} - \frac{\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$N_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = (0,0,1)$$

$$k_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ve } k_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.33) denkleminden

$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}k_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{(1-s^2)}}$ ise $s_\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} arcsin(s)$ olur. Buradan $s = sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)} - \frac{\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}, \sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)} - \frac{\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)} + \frac{\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\left(1+sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)} - \frac{\sqrt{\left(1-sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)}}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

olur. Bu durumda $k_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi düzlemsel eğri olur. $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi için (3.45) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{N_1N_2}(s_\beta), N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) \rangle = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. (3.46) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.2.4 $\alpha_2(s)$ eğrisinin TN_1N_2-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1N_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(T_{\alpha_2} + N_{1\alpha_2} + N_{2\alpha_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{(1-s)}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{(1+s)}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.8)**. Bu eğri $z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ düzleminde yatar. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.50), (3.52), (3.53), (3.54) ve (3.57) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{(1+s)}, \sqrt{(1-s)}, 0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{(1-s)}, -\sqrt{(1+s)}, 0\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = (0,0,1)$$

$$k_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \sqrt{3} \text{ ve } k_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.49) denkleminden

$$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{(1-s^2)}} \text{ ise } s_\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} arcsin(s) \text{ olur. } s = sin\left(2\sqrt{3}\right)s_\beta \text{ dır.}$$

Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\left(1 + sin\left(2\sqrt{3}\right)s_\beta\right)}, \sqrt{\left(1 - sin\left(2\sqrt{3}\right)s_\beta\right)}, 0\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\left(1 - sin\left(2\sqrt{3}\right)s_\beta\right)}, -\sqrt{\left(1 + sin\left(2\sqrt{3}\right)s_\beta\right)}, 0\right)$$

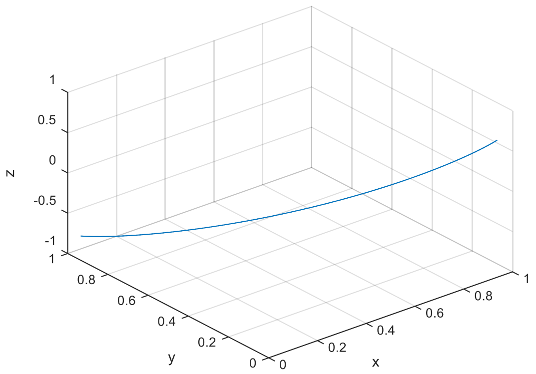
olur. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi düzlemsel eğri olur. $\beta_{TN_1N_2}$eğrisi için (3.60) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1N_2}(s_\beta), N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

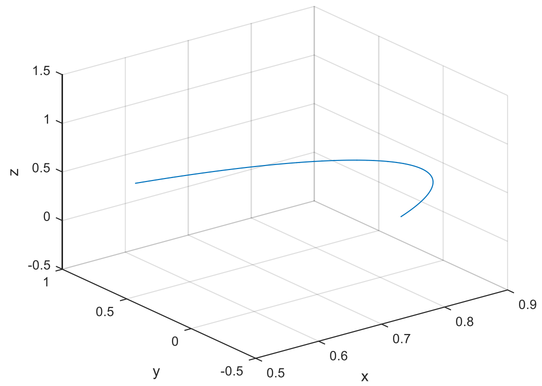
bulunur. (3.61) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = 3\sqrt{3}$$

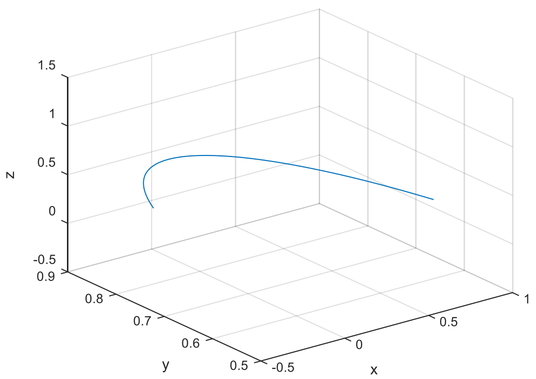
sıfırdan farklı sabit olduğundan $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.



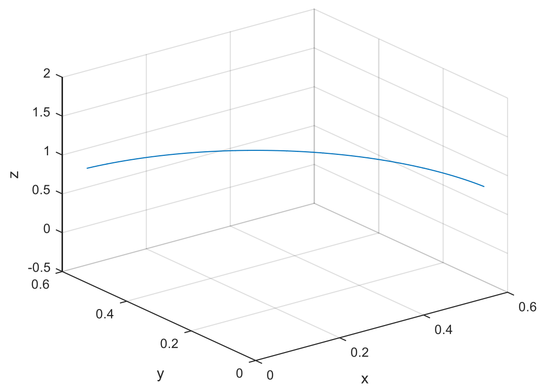
Şekil 4.5: $\alpha_2(s)$ birim hızlı silindirik helis eğrisi



Şekil 4.6: $\alpha_2(s)$ eğrisinin TN_1-Smarandache eğrisi



Şekil 4.7: $\alpha_2(s)$ eğrisinin N_1N_2-Smarandache eğrisi



Şekil 4.8: $\alpha_2(s)$ eğrisinin TN_1N_2-Smarandache eğrisi

4.3 Üçüncü Örnek

$\alpha_3(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{1+s^2}, 2s, \ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right)$ parametrizasyonuyla verilen birim hızlı silindirik helis eğrisini göz önüne alalım **(Şekil 4.9)**. $\alpha_3(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$T_{\alpha_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, 2, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{1\alpha_3}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{-s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{2\alpha_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-2s}{\sqrt{1+s^2}}, 1, \frac{-2}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$k_{1\alpha_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}(1+s^2)} \text{ ve } k_{2\alpha_3}(s) = \frac{2}{\sqrt{5}(1+s^2)}$$

olur.

4.3.1 $\alpha_3(s)$ eğrisinin TN_1-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{\alpha_3} + N_{1\alpha_3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{s+\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}, 2, \frac{1-\sqrt{5}s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.10)**. Bu eğri $y = \frac{2}{\sqrt{10}}$ düzleminde yatar. β_{TN_1}eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.4), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.11) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-\sqrt{5}s+1}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{-s-\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-s-\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{\sqrt{5}s-1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta) = (0,1,0)$$

$$k_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \text{ ve } k_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.3) denkleminden

$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}k_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}(1+s^2)}$ ise $s_\beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}arctan(s)$ olur. Buradan $s = tan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right)$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right) - \sqrt{5}sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right), 0, -\sqrt{5}cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right) - sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right) - \sqrt{5}cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right), 0, \sqrt{5}sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right) - cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}s_\beta\right)\right)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_1}}(s_\beta) = 0$ olduğu için β_{TN_1} eğrisi düzlemsel eğri olur. β_{TN_1} eğrisi için (3.14) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1}(s_\beta), N_{1\beta_{TN_1}}(s_\beta)\rangle = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

bulunur. (3.15) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1}}}{d_{osc}^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan β_{TN_1} eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.3.2 $\alpha_3(s)$ eğrisinin TN_2-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{\alpha_3} + N_{2\alpha_3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-s}{\sqrt{5}\sqrt{1+s^2}}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{1+s^2}}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.11)**. Bu eğri $y = \frac{3}{\sqrt{10}}$ düzleminde yatar. β_{TN_2}eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.19), (3.21), (3.22), (3.23) ve (3.26) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_2}}(s_\beta) = \left(\frac{-1}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_2}}(s_\beta) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_2}}(s_\beta) = (0,1,0)$$

$$k_{1\beta_{TN_2}}(s_\beta) = \sqrt{10} \ \text{ ve } \ k_{2\beta_{TN_2}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.18) denkleminden

$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{(k_1-k_2)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{k_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}(1+s^2)}$ ise $s_\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} arctan(s)$ olur. Buradan $s = tan\left(\sqrt{10}s_\beta\right)$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_2}}(s_\beta) = \left(-cos\left(\sqrt{10}s_\beta\right), 0, sin\left(\sqrt{10}s_\beta\right)\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_2}}(s_\beta) = \left(sin\left(\sqrt{10}s_\beta\right), 0, cos\left(\sqrt{10}s_\beta\right)\right)$$

olur. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için β_{TN_2} eğrisi düzlemsel eğri olur. β_{TN_2}eğrisi için (3.29) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_2}(s_\beta), N_{1\beta_{TN_2}}(s_\beta)\rangle = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

bulunur. (3.30) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_2}}}{d_{osc}^2} = 10\sqrt{10}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan β_{TN_2} eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.3.3 $\alpha_3(s)$ eğrisinin N_1N_2-Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_1N_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(N_{1\alpha_3} + N_{2\alpha_3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{\sqrt{5}-2s}{\sqrt{1+s^2}}, 1, \frac{-2-\sqrt{5}s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.12)**. Bu eğri $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ düzleminde yatar. $\beta_{N_1N_2}$eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.34), (3.36), (3.38), (3.39) ve (3.42) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{3}\left(\frac{-\sqrt{5}s-2}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{2s-\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{3}\left(\frac{2s-\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{\sqrt{5}s+2}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = (0,1,0)$$

$$k_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{\sqrt{10}}{3} \qquad \text{ve} \quad k_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.33) denkleminden

$\frac{d_{s_\beta}}{d_s} = \frac{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{3k_1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}(1+s^2)}$ ise $s_\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} arctan(s)$ olur. Buradan $s = tan\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right)$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{5}sin\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right) - 2cos\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right), 0, -\sqrt{5}cos\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right) + 2sin\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right)\right)$$

$$N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{5}cos\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right) + 2sin\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right), 0, \sqrt{5}sin\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right) + 2cos\left(\frac{\sqrt{10}}{3}s_\beta\right)\right)$$

olur. Bu durumda $k_{2\beta_{N_1N_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi düzlemsel eğri olur. $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi için (3.45) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{N_1N_2}(s_\beta), N_{1\beta_{N_1N_2}}(s_\beta)\rangle = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

bulunur. (3.46) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{N_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{10\sqrt{10}}{27}$$

sıfırdan farklı sabit olduğundan $\beta_{N_1N_2}$ eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.

4.3.4 $\alpha_3(s)$ eğrisinin TN_1N_2-Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN_1N_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(T_{\alpha_3} + N_{1\alpha_3} + N_{2\alpha_3}\right) = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\frac{\sqrt{5}-s}{\sqrt{1+s^2}}, 3, \frac{-1-\sqrt{5}s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

eğrisi elde edilir **(Şekil 4.13)**. Bu eğri $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ düzleminde yatar. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması (3.50), (3.52), (3.53), (3.54) ve (3.57) denklemleri kullanılarak

$$T_{\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-\sqrt{5}s-1}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{s-\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{s-\sqrt{5}}{\sqrt{1+s^2}}, 0, \frac{\sqrt{5}s+1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

$$N_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = (0,1,0)$$

$$k_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{ ve } k_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.49) denkleminden

$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_1k_2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}k_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1+s^2)}$ ise $s_\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}arctan(s)$ olur. Buradan $s = tan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right)$ dır. Bu ifade yukarıdaki Frenet çatı vektör alanlarında yerine yazılırsa

$$T_{\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right) - \sqrt{5}sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right), 0, -\sqrt{5}cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right) + sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right)\right)$$

$$N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right) - \sqrt{5}cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right), 0, \sqrt{5}sin\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right) + cos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}s_\beta\right)\right)$$

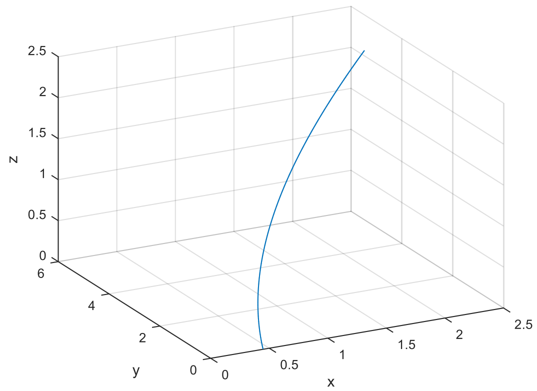
şeklinde elde edilir. Bu durumda $k_{2\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta) = 0$ olduğu için $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi düzlemsel eğri olur. $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi için (3.60) denkleminden

$$d_{osc} = \langle \beta_{TN_1N_2}(s_\beta), N_{1\beta_{TN_1N_2}}(s_\beta)\rangle = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

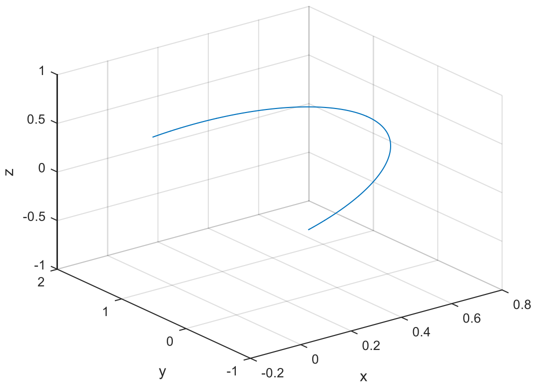
bulunur. (3.61) denklemi kullanılarak

$$\frac{k_{1\beta_{TN_1N_2}}}{d_{osc}^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

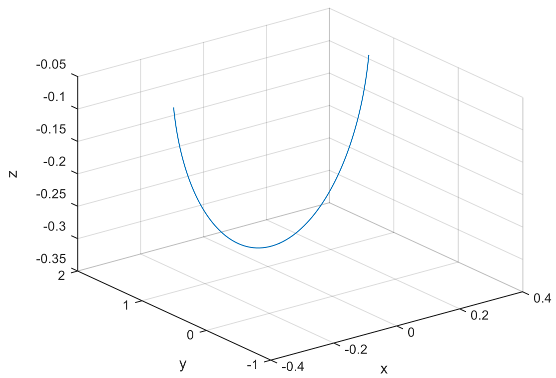
sıfırdan farklı sabit olduğundan $\beta_{TN_1N_2}$ eğrisi düzlemsel Tz-eğrisi olur.



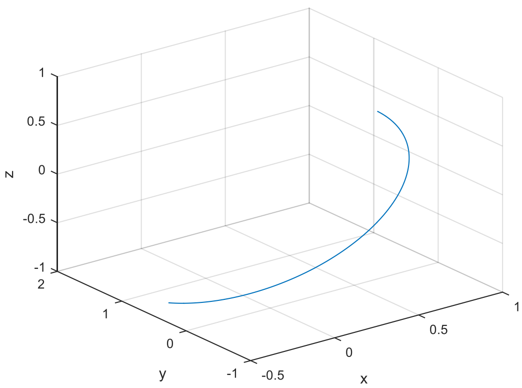
Şekil 4.9: $\alpha_3(s)$ birim hızlı silindirik helis eğrisi



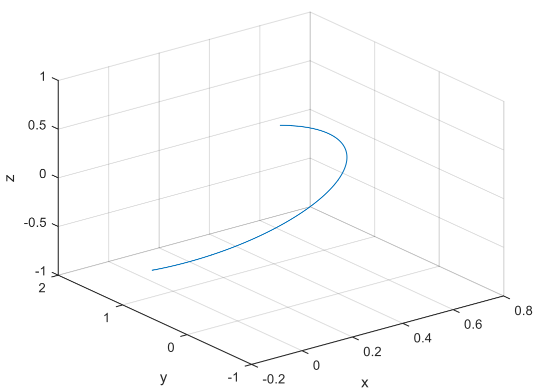
Şekil 4.10: $\alpha_3(s)$ eğrisinin TN_1-Smarandache eğrisi



Şekil 4.11: $\alpha_3(s)$ eğrisinin TN_2-Smarandache eğrisi



Şekil 4.12: $\alpha_3(s)$ eğrisinin N_1N_2-Smarandache eğrisi



Şekil 4.13: $\alpha_3(s)$ eğrisinin TN_1N_2-Smarandache eğrisi

SONUÇ VE ÖNERİLER

Üçüncü kısımda, Smarandache eğrilerinin Tzitzeica eğrileri ile arasındaki bağıntılar hesaplandı. 3.1.2 Teoremi ile (3.12) denkleminde TN_1 Smarandache eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı verildi. 3.1.3 Sonuç ile TN_1 Smarandache eğrisinin $k_1 = ck_2$ şartı altında düzlemsel eğri olduğu sonucuna ulaşıldı. 3.1.4 Teoremde ise TN_1 Smarandache eğrisinin düzlemsel Tzitzeica eğri şartı gösterildi. Bununla beraber 3.1.5 Teorem ile $k_1, k_2 \neq 0\ (sabit)$ W-eğrisinin düzlemsel Tzitzeica eğrisi olduğu ifade edildi. Yine aynı teorem içerisinde TN_1 Smarandache eğrisinin düzlemsel Tzitzeica eğrisi olma koşulu sunuldu. 3.2.2 Teoremi ile (3.27) denkleminde TN_2 Smarandache eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı verildi. 3.2.3 Sonuç ve 3.2.4 Teorem ile $k_1 = ck_2$ şartı altında eğrinin düzlemsel Tzitzeica eğrisi olduğu sonucuna varıldı. Ayrıca 3.2.5 Teorem ile k_1 ve k_2 eğriliklerinin ilişkisine bağlı olarak TN_2 Smarandache eğrisinin düzlemsel Tzitzeica eğrisi olma şartı 2 durumlu olarak sunuldu. Aynı şekilde 3.3.2 Teoremi ile (3.43) denkleminde N_1N_2 Smarandache eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı ifade edildi. 3.3.3 Sonuç, 3.3.4 Teorem ve 3.3.5 Teorem ile N_1N_2 Smarandache eğrisinin düzlemsel eğri olma durumları ve düzlemsel Tzitzeica eğrisi olma şartları gösterildi. Son olarak TN_1N_2 Smarandache eğrisinin Tzitzeica eğrisi olması için gerek ve yeter şart 3.4.2 Teoreminde, düzlemsel eğri olma durumları ve düzlemsel Tzitzeica eğrisi olma şartları ise 3.4.3 Sonuç, 3.4.4 ve 3.4.5 Teoremlerinde elde edildi. Sonuç olarak eğer $\alpha(s)$ eğrisi genel helis eğrisi $(k_1 = ck_2)$ ise elde edilen $\beta(s_\beta)$ Smarandache eğrilerinin düzlemsel Tzitzeica eğrisi olduğu gösterildi.

Dördüncü kısımda, konu ile alakalı üç örnek paylaşıldı. Bu örneklerin (4.1.1), (4.2.1) ve (4.3.1) maddelerinde α eğrisinin TN_1 Smarandache eğrisi; (4.1.2), (4.2.2) ve (4.3.2) maddelerinde α eğrisinin TN_2 Smarandache eğrisi; (4.1.3), (4.2.3) ve (4.3.3) maddelerinde α eğrisinin N_1N_2 Smarandache eğrisi ve (4.1.4), (4.2.4) ve (4.3.4) maddelerinde ise α eğrisinin TN_1N_2 Smarandache eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma durumları ele alındı.

İlerleyen zamanlarda, yapmış olduğumuz bu hesaplamalar farklı eğriler içinde kullanılabilir veya farklı uzaylarda ve farklı boyutlarda benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] M. Turgut, S. Yilmaz, "Smarandache curves in Minkowski space-time", *International J. Math. Combin.,* vol. 3, pp. 51-55, 2008.

[2] A. T. Ali, "Special Smarandache curve in the Euclidean space", *International J. Math. Combin.,* vol. 2, pp. 30-36, 2010.

[3] S. Şenyurt, S. Sivas, "An application of Smarandache curve", *Ordu Univ. J. Sci. Tech.,* vol. 3, no. 1, pp. 46-60, 2013.

[4] V. Bulut, A. Caliskan, "Spherical images of special Smarandache curves in $\mathbb{E}^3$", *International J. Math. Combin.,* vol. 3, pp. 43-54, 2015.

[5] H. S. Abdel-Aziz, M. Khaalifa Saad, "Computation of Smarandache curves according to Darboux frame in Minkowski 3-space", *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* vol. 25, pp. 382-390, 2017.

[6] M. Elzawy, "Smarandache curves in Euclidean 4-space $\mathbb{E}^4$ ", *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* vol. 25, pp. 268-271, 2017.

[7] S. Şenyurt, B. Öztürk, "Smarandache curves of Anti-Salkowski curve according to Frenet frame", *Proceedings of The International Conference on Mathematical Studies and Application,* Karamanoğlu Mehmetbey University, Karaman, Turkey, 4-6 October 2018.

[8] S. Lal, "Smarandache curves in Euclidean space of parallel transport frame", *Journal of Energing Technologies and Innovative Research,* vol. 6, no. 7, 2019.

[9] M. Altın, A. Kazan and H. B. Karadağ, "Hypersurface families with Smarandache curves in Galilean 4-space", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.,* vol. 70, no. 2, pp. 744-761, 2021.

[10] Ş. Alıç, B. Yılmaz, "Smarandache curves according to alternative frame in $\mathbb{E}^3$", *Journal of Universal Mathematics,* vol. 4, no. 2, pp. 140-156, 2021.

[11] S. Kaya Nurkan, İ. A. Güven, "A New approach for Smarandache curve", *Turk. J. Math. Comput. Sci.,* vol. 14, no. 1, pp. 155-165, 2022.

[12] S. Şenyurt, D. Canlı, E. Çan and S. G. Mazlum, "Some special Smarandache Ruled surfaces by Frenet frame in $\mathbb{E}^3$-2", *Honam Mathematical Journal,* vol. 44, no. 4, pp. 594-617, 2022.

[13] S. Şenyurt, K. H. Ayvacı and D. Canlı, "Smarandache curves according to Flc-frame in Euclidean 3-space", *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 16-30, 2023.

[14] G. Tzitzeica, "Sur certaines courbes gauches", *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure,* vol. 28, no. 3, pp. 9-32, 1911.

[15] A. Bobe, W. G. Boskoff and M. G. Ciuca, "Tzitzeica type centro-affine invariants in Minkowski space", *An. St. Univ. Ovidius Constanta,* vol. 20, no. 2, pp. 27-34, 2012.

[16] M. Crasmareanu, "Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators", *Balkan Journal of Geometry and Its Applications,* vol. 7, no. 1, pp. 37-42, 2002.

[17] M. K. Karacan, B. Bükcü, "On the hyperbolic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space", *BAÜ FBE Dergisi,* vol. 10, no. 1, pp. 46-51, 2009.

[18] M. K. Karacan, B. Bükcü, "On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space", *Scientia Magna,* vol. 5, no. 3, pp. 44-48, 2009.

[19] N. Bila, "Symmetry reductions for the Tzitzeica curve equation", *Math and Computer Science Working Papers,* vol. 16, 2012.

[20] B. Bayram, E. Tunç, K. Arslan, G. Öztürk, "On Tzitzeica curves in Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$", *Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics,* vol. 33, no. 3, pp. 409-416, 2018.

[21] B. Bayram, E. Tunç, "On tzitzeica surfaces in euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$", *Journal of Balikesir University Institute of Science and Technology,* vol. 23, no. 1, pp. 277-290, 2021.

[22] B. Bayram, E. Tunç, "A New characterization of Tzitzeica curves in Euclidean 4-space", *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences,* vol. 4, no. 2, pp. 77-86, 2023

[23] B. Bayram, E. Tunç, “A Note on Tzitzeica curve in Euclidean 4-spaces $\mathbb{E}^4$”, *International Theory, Research and Reviews in Science and Mathematics,* Chapter. 10, Serüven Yayınevi, pp. 141-166, 2023

[24] H. H. Hacısalihoğlu, “Diferensiyel Geometri 1. Cilt”, *Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Böl.,* 1998.

[25] B. O’Neill, “Elementary Differential Geometry”, *Academic Press,* Londra 1966.

[26] H. Gluck, “Higher curvatures of curves in Euclidean space”, *The American Mathematical Monthly,* vol. 73, no. 7, pp. 243-245, 1966.

[27] A. Gray, “Modern differential geometry of curves and surfaces”, *CRC Press,* 1993.

[28] F. Klein, S. Lie, “Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vartauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen”, *The American Mathematical Monthly,* vol. 4, pp. 50-84, 1871.

[29] G. Öztürk, K. Arslan, H. Hacısalihoğlu, “A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^n$”, *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences,* vol. 57, pp. 217-224, 2008.

[30] B. Y. Chen, “When does the position vector of a space curve always lies in its rectifying plane?”, *The American Mathematical Monthly,* vol. 110, pp. 147-152, 2003.

[31] K. İlarslan, E. Nesovic, “Some characterizations of osculating curves in the Euclidean spaces”, *Demonstratio Mathematica,* vol. 16, no. 4, pp. 931-939, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Orhan Karacan

Doğum tarihi ve yeri : 19/01/1998, Balıkesir

E-posta : orhankaracan212@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik	2021-2024
Lisans	Marmara Üniversitesi/ Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği	2016-2020
Lise	Açık Öğretim Lisesi	2015-2016
Lise	Rahmi Kula Anadolu Lisesi	2012-2015