T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKSTREMAL POLİNOMLAR VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burçin OKTAY

Balıkesir, Mayıs-2003

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKSTREMAL POLİNOMLAR VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burçin OKTAY

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 05. 05. 2003

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (Danışman-Ba.Ü.)

Prof. Dr. Musa ERDEM (Ba.Ü.)

Doç. Dr. Sedulla CAFEROV (Pamukkale Ü.)

Balıkesir, Mayıs-2003

ÖZET

EKSTREMAL POLİNOMLAR VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Burçin OKTAY
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof.Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir, 2003

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, önce ilerideki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiş, daha sonra yaklaşımın incelendiği bazı fonksiyonel uzaylar ve bu uzaylardaki en iyi yaklaşım sayıları tanımlanmıştır. Bölümün son kısmında ise ileride kvazikonform sınırlı bölgeler üzerinde yaklaşım değerlendirileceği için kvazikonform dönüşümler ve eğriler hakkında gereken bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, Lebesgue uzaylarının özel bir şekli olan Bergman Uzayları incelenmiştir. İlk önce Bergman uzayı tanımlanmış ve onun bazı özellikleri araştırılmıştır. Daha sonra Bergman uzaylarında önemli bir fonksiyon olan Bergman çekirdek fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyon ile konform dönüşümler arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Son bölümde ise, Bergman uzaylarında bir ekstremal problemin çözümü sonucu oluşturulan Bieberbach polinomları sınıfı tanımlanmış, daha sonra Bieberbach polinomlarının kapalı bölgelerde Riemann konform dönüşümüne yaklaşım hızı değerlendirilmiştir. Bu yaklaşım özellikle analitik ifadesi kolaylıkla bulunamayan konform dönüşümlerin pratik inşaası bakımından da önem taşımaktadır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: fonksiyonel uzay / en iyi yaklaşım sayıları / kvazikonform eğriler / Lebesgue uzayları / Bergman uzayı / Bergman çekirdek fonksiyonu / Riemann konform dönüşüm / Bieberbach polinomları

ABSTRACT

EXTREMAL POLYNOMIALS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

Burçin OKTAY
Balıkesir University, Institue of Science,
Department of Mathematics

(M.Sc. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir-Turkey, 2003

This work consists of three chapters.

In the first chapter, basic definitions and theorems which are used in the following chapters are given. After that, some functional spaces in which the approximation is investigated and the best approximant numbers in these spaces are defined. Since in the following chapters the approximatıon on the domains with quasiconformal boundary is investigated, at the final part of the chapter the necessary information about the quasiconformal mappings and curves are also given.

In the second chapter, an important subspace of the Lebesgue spaces called the Bergman space is investigated. Here at first, the Bergman spaces are defined and some properties of these spaces are studied. Later, the Bergman kernel function which places an important role in the Bergman spaces is defined and the relations between this function and conformal mappings are considered.

In the final chapter, the classes of Bieberbach polynomials, which are constructed as the solution of an extremal problem, are defined and then, in the closed domains the approximation rate of these polynomials to the Riemann conformal mapping is investigated. This approximation is important for approximately construction of the conformal mappings whose analytical expression is not simply obtained.

KEY WORDS : functional spaces / the best approximant numbers / quasiconformal curves / Lebesgue spaces / Bergman spaces / Bergman kernel function / Riemann conformal mapping / Bieberbach polynomials.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\mathbf{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\overline{\mathbf{C}}$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{D}$	$\{z \in \mathbf{C} : \lvert z \rvert < 1\}$ kümesi (açık birim disk)
$\mathrm{D}(z_0, r)$	$\{z \in \mathbf{C} : \lvert z - z_0 \rvert < r\}$ kümesi
$\overline{\mathrm{A}}$	A kümesinin kapanışı
$\partial \mathrm{A}$	A kümesinin sınırı
$\mathbf{C}\mathrm{A}$	$\overline{\mathbf{C}} - \mathrm{A}$ (A kümesinin tümleyeni)
$d\sigma_z$	Alan diferansiyeli
$\lVert f \rVert$	f fonksiyonunun normu

ÖNSÖZ

Bilim yolculuğumda beni yalnız bırakmayarak, bilgi ve tecrübelerini daima benimle paylaşan ve ufuklarıma ışık tutan değerli danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Matematiği bana sevdiren değerli hocalarım Prof. Dr. Turgut BAŞKAN, Prof. Dr. Seyit Ahmet KILIÇ, Prof. Dr. Musa ERDEM ve Prof. Dr. Mehmet ARISOY'a çok teşekkürler.

Hayatımın her aşamasında bana destek olan aileme teşekkürü bir borç biliyorum.

Balıkesir, 2003 **Burçin OKTAY**

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1 Tanım: *Kompleks düzlemde birim çemberin bir homeomorfik dönüşüm altındaki görüntüsüne Jordan eğrisi denir [26,s.1].*

1.1.2 Tanım: $\gamma : z(t)$ $(a \le t \le b)$ $\mathbf{C}$*'de bir eğri ve* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $[a,b]$ *kapalı aralığının bir bölüntüsü olsun. Eğer*

$$\sup \sum_{\nu=1}^{n} \left| z(t_\nu) - z(t_{\nu-1}) \right| < \infty$$

ise γ *eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir [30,s.246].*

1.1.3 Tanım: $a \le t \le b$ *aralığı için* $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ *türevi var ve sürekli ise* γ *eğrisi sürekli diferansiyellenebilirdir* (C^1 *sınıfındandır). Bununla birlikte* $a \le t \le b$ *için* $z'(t) \neq 0$ *oluyorsa* γ *eğrisine düzgün eğri denir.*

Her düzgün eğri sonlu uzunlukludur [21,s.154].

$[a,b]$ *kapalı aralığının sonlu sayıda noktası dışında,* $z'(t)$ *türevi var, sürekli ve* $z'(t) \neq 0$ *ise eğriye parçalı düzgün eğri denir.*

Her parçalı düzgün eğri sonlu uzunlukludur [21,s.155].

1.1.4 Tanım: *z=z(s), L eğrisinin parametrik denklemi olsun. Eğer* $z''(s)$ *fonksiyonu sınırlı ise z=z(s) denkleminin ifade ettiği eğriye sınırlı eğrilikli eğri denir [36].*

1.1.5 Tanım: γ, *sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun.* $z \in \gamma$ *için z merkezli r yarıçaplı daireyi D(z,r) ile gösterelim. Eğer*

$$\sup_{z\in\gamma}|D(z,r)\cap\gamma|\leq cr$$

eşitsizliği z noktası ve r yarıçapından bağımsız belirli bir c sabiti için sağlanıyorsa γ *eğrisine regüler eğri veya Carleson eğrisi denir [26,s.2].*

Bütün düzgün eğriler Carleson eğrisidir.

$\gamma := \{z\in C:\ z = x + i f(x),\ 0\leq x\leq 1\}$ ve

$$f(x) = x^{\alpha}\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f(0)=0$$

ise γ eğrisi,

$\alpha\geq 2$ olduğunda Carleson eğrisidir,

$1<\alpha<2$ olduğunda Carleson eğrisi değildir fakat sonlu uzunlukludur,

$0<\alpha\leq 1$ olduğunda sonlu uzunluklu değildir.

[26,s.5].

1.1.6 Tanım: $\gamma, \mathrm{z}=\mathrm{z}(\mathrm{t})$ $t\in[a,b]$ *parametrlk gösterimine sahip sonlu uzunluklu bir eğri olsun.* $0<\alpha\leq 1$ *olduğunda*

$$|z(t_1)-z(t_2)|\leq c|t_1-t_2|^{\alpha}$$

koşulu sağlanıyorsa γ *eğrisine* α *dereceden Lipschitz eğrisi denir ve* $\gamma\in Lip\alpha$ *ile gösterilir [16,s.35].*

1.1.7 Tanım: *Karmaşık düzlemde bağlantılı ve açık kümeye bölge denir [32,s.1].*

1.1.8 Tanım: *B,* ***C*** *de bir bölge olmak üzere* $f: B\rightarrow \mathbf{C}$ *sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir* $z_0\in B$ *noktasından geçen ve aralarında* α *açısı yapan herhangi iki düzgün* γ_1 ve γ_2 *eğrilerinin* $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ *resim eğrileri de* $w_0=f(z_0)$ *da aralarında yön ve büyüklük bakımından* α *açısı yapıyorlarsa* f *fonksiyonuna* z_0 *da bir konform dönüşümdür denir. Eğer her* $z_0\in B$ *noktasında* f *konform ise f, B de konformdur denir [10,s.313].*

Ölçülebilir bir A kümesinin konform dönüşüm altındaki görüntüsünün alanı,

$$Alan\, f(A)=\iint_A |f'(z)|^2\, dxdy,$$

$f:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$ konform dönüşümü için $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+$ ise

$$Alan\, f(\mathbf{D})=\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

olur [32,s.4].

1.1.9 Tanım: *C Jordan eğrisi bir* $\left[\frac{1}{\rho}<|z|<\rho\right]$, $\rho>1$ *halkasının analitik ve bire-bir* $\varphi(z)$ *dönüşümü altındaki görüntüsü ise C eğrisine analitik eğri denir [32,s.41].*

1.1.10 Teorem: *Eğer G bölgesinin sınırı analitik bir eğri ise, G bölgesinin* $\mathbf{D}$ *'ye her konform dönüşümü,* $\overline{G}$ *'yi kapsayan belirli bir bölgeye bire-bir ve analitik olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G 'nin sınırı analitik eğri ise,* $\mathbf{C}\overline{G}$ *bölgesinin* $\mathbf{C}\overline{\mathbf{D}}$ *'ye olan her konform dönüşümü* $\mathbf{C}G$ *'yi kapsayan bir bölgeye bire-bir ve analitik olarak genişletilebilir [32,s.41].*

1.1.11 Teorem: *Eğer G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise, G nin* $\mathbf{D}$ *'ye her konform dönüşümü* $\overline{G}$ *'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde, G nin sınırı bir Jordan eğrisi ise,* $\mathbf{C}\overline{G}$ *'nin* $\mathbf{C}\overline{\mathbf{D}}$ *'ye olan her konform dönüşümü* $\mathbf{C}G$ *'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir [32,s.24].*

1.1.12 Tanım: *Sınırlı bir bölgenin sınırı bağlantılı ise bölgeye basit bağlantılı, sınırı bağlantısız ise katlı bağlantılı bölge denir [30,s.67].*

1.1.13 Teorem (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi): $G\subset\mathbf{C}$ *sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve* $z_0\in G$ *olsun. Bu durumda, G bölgesini* $\mathbf{D}$ *'ye ,*

$$f(z_0)=0 \text{ ve } f'(z_0)>0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [30,s.8].

1.1.14 Tanım: *G, basit bağlantılı bir bölge, G_∞ ise $\mathbf{C}\overline{G}$ 'nin sonsuz noktasını içeren bileşeni olsun . Eğer G ve G_∞ aynı sınıra sahipseler, G bölgesine Carathédory bölgesi denir [30,s.38].*

Her Jordan bölgesi bir Carathédory bölgesidir fakat yarıçapı çıkarılmış bir disk Carathédory bölgesi olamaz. Ayrıca Carathédory bölgeleri polinom yaklaşımı (PA) özelliğine sahiptirler[16,s.17].

1.1.15 Teorem (Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Formülü): *G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, $\mathbf{C}G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z); & z \in \mathbf{C}\overline{G} \\ f(\infty) & ; \quad z \in G \end{cases}$$

olur [21,s.486].

1.1.16 Teorem (Green Formülü): *G bölgesi, parçalı düzgün ve pozitif yönlendirilmiş sınırı olan basit veya katlı bağlantılı bir bölge olsun. f ve g, G'de analitik, $\overline{G}$ 'de sürekli türevlenebilen fonksiyonlar ise*

$$\iint_G f\,\overline{g'}\,dm = \frac{1}{2i}\int_{\partial G} f\,\overline{g}\,dz$$

olur [16,s.10].

1.1.17 Teorem (Cauchy-Green Formülü): *G, sınırı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, f ise G bölgesinde sürekli kısmi türevlere sahip ve $\overline{G}$ 'de sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f_{\overline{z}}$ fonksiyonu G üzerinde integrallenebilir ise, her $z \in G$ için*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f_{\overline{\zeta}}}{\zeta - z}d\sigma_z$$

olur [11,s10].

1.1.18 Teorem (Rezidü Teoremi): *f, bir G bölgesinde ve sınırında sonlu tane* $z_1, z_2, ... z_n \in G$ *aykırılıkları hariç analitik ise*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}s(f, z_i)$$

olur [21,s.675].

1.1.19 Teorem (Lebesque Monoton Yakınsaklık Teoremi): *G, basit bağlantılı sınırlı bir bölge,* $\{f_n\}$ *integrallenebilen fonksiyonların hemen her yerde azalmayan ve* $\lim_{n\to\infty} \iint_G f_n \, d\sigma_z < \infty$ *koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. Bu durumda hemen her yerde* $f_n \uparrow f$ *koşulunu sağlayan bir f integrallenebilen fonksiyonu vardır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G f_n \, d\sigma_z = \iint_G f \, d\sigma_z$$

olur [2,s.134]

1.1.20 Teorem (Weierstrass Teoremi): *G, basit bağlantılı bir bölge ve* (g_k), *G bölgesinde analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer* (g_k)*dizisi G bölgesinin kompakt altkümelerinde bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{zz_0} g_k(z)\, dz = \int_{zz_0} g(z)\, dz$$

olur.

Burada $z_0 \in G$ ve $z_0 z \subset G$, z_0 ve z noktalarını birleştiren bir yaydır.

1.2 Bazı Fonksiyonel Uzaylar

1.2.1 Tanım: *G, sonlu uzunluklu bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve* $1 < p < \infty$ *olsun. Yay uzunluğuna göre* $|f|^p$ *nin Lebesgue integrallenebilir olduğu ölçülebilir, kompleks değerli fonksiyonların kümesine* $L^p(L)$ *uzayı denir [13,s.169].*

1.2.2 Tanım: *G, sonlu uzunluklu bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve f, G'de analitik bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\int_{L_n} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

olacak şekilde G bölgesinde, G'nin kompakt altkümelerini sınırlayan ve G'nin sınırına yaklaşan $L_1, L_2, ..., L_n$ *sonlu uzunluklu Jordan eğrileri dizisi varsa f fonksiyonu* $E^p(G)$ *uzayındandır denir [13,s.169]*

Özel halde G bölgesi bir birim disk ise $E^p(G)$ uzayları, bilinen $H^p(D)$ uzayları olur.

$L^p(L)$ ve $E^p(G)$ $p \geq 1$ olduğunda aşağıdaki norma göre Banach uzayıdırlar:

$$\|f\|_{E^p(G)} = \|f\|_{L^p(L)} := \left(\int_L |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}.$$

1.2.3 Tanım: *G bölgesinde hemen her yerde pozitif ve integrallenebilen fonksiyonların kümesi G'de ağırlık fonksiyonları kümesi olarak kabul edilir.*

1.2.4 Tanım: ω, *G'de bir ağırlık fonksiyonu olsun.*

$$L^p(L,\omega) := \{ f \in L^1(L) : \ |f|^p \omega \in L^1(L) \}$$

biçiminde tanımlanan uzaya ω*-ağırlıklı* L^p *uzayı denir [14].*

1.2.5 Tanım: ω, *G'de bir ağırlık fonksiyonu olsun.*

$$E^p(G,\omega) := \{ f \in E^1(G) : \ f \in L^p(L,\omega) \}$$

biçiminde tanımlanan uzaya G'de analitik fonksiyonların p. mertebeden ω*-ağırlıklı Smirnov uzayı denir [14].*

1.2.6 Teorem (Hölder eşitsizliği): $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{q} = 1$ *olsun.*

Eğer $f \in L^p$ ve $g \in L^q$ *ise* $fg \in L^1$ *dir ve*

$$\int_L |fg||dz| \leq \left(\int_L |f|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_L |g|^q |dz|\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

olur [2,s.256].

1.2.7 Tanım: *ω fonksiyonu L eğrisi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer*

$$\sup_{z\in L}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int_{L\cap D(z,r)} \omega(\zeta)|d\zeta|\right)\left(\frac{1}{r}\int_{L\cap D(z,r)} [\omega(\zeta)]^{-1/(p-1)}|d\zeta|\right)^{p-1} < \infty$$

oluyorsa ω fonksiyonu Muckenhoupt - A_p koşulunu sağlıyor denir.

L üzerinde Muckenhoupt - A_p koşulunu sağlayan bütün ağırlık fonksiyonlarının kümesi $A_p(L)$ ile gösterilir [26,s.28].

1.2.8 Tanım: T birim çember, $g \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in \mathrm{A_p}(T)$ olsun. g fonksiyonu için aşağıdaki şekilde bir öteleme tanımlayalım:

$$g_h(w) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} g(we^{it})dt, \qquad 0 < h < \pi, \qquad w \in T$$

olsun.

[15,s.110] gereği

$$\|g_h\|_{L^p(T,\omega)} \leq c_p \|g\|_{L^p(T,\omega)} \qquad 1 < p < \infty$$

yazılabilir.

$g \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ ise

$$\Omega_{p,\omega}(g,.) : [0,\infty) \to [0,\infty)$$
$$\Omega_{p,\omega}(g,\delta) := \sup\left\{\|g - g_h\|_{L^p(T,\omega)}, h \leq \delta\right\}, \quad 1 < p < \infty$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona p. mertebeden ω-ağırlıklı integral süreklilik modülü denir [25].

$\Omega_{p,\omega}(g,.)$ sürekli, negatif olmayan, azalmayan ve

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega_{p,\omega}(g,\delta) = 0$$
$$\Omega_{p,\omega}(g_1 + g_2,.) \leq \Omega_{p,\omega}(g_1,.) + \Omega_{p,\omega}(g_2,.)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

1.2.9 Tanım: *G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ de sürekli olan f fonksiyonlarının oluşturduğu uzayı $A(\overline{G})$ ile göstereceğiz.*

Bu uzayda norm

$$\|f\|_{\overline{G}} := \max_{z\in \overline{G}} |f(z)| < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

$h \in L^p(C)$, $1 < \mathrm{p} < \infty$ ve

$$Th(\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi} \iint_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dxdy$$

olsun. Bu operatörle ilgili aşağıdaki teorem geçerlidir.

1.2.10 Teorem(Calderon-Zygmund eşitsizliği): *$h \in L^p(C)$ ve $1 < \mathrm{p} < \infty$ ise*

$$\|Th\|_p \le c_p \|h\|_p$$

olur. Burada c_p sadece p'ye bağlı olan bir sabittir [1,s.106].

1.2.11 Teorem: *H bir Hilbert uzay ve $S \subset H$ olsun. Eğer $u, v \in S$ olduğunda*

$$(u,v) = \begin{cases} 1, & u = v \\ 0, & u \ne v \end{cases}$$

oluyorsa S altkümesine H'de bir ON sistem (orthonormal sistem) denir [16,s.5].

$\{v_j\}$ H Hilbert uzayında bir ON sistem olsun. Eğer (v_j) nin lineer birleşimleri H'de yoğunsa yani $x \in H$ 'ye istenen kadar yakınsa $\{v_j\}$ sistemine CON sistem(tam orthonormal sistem) denir [16,s.25].

1.3 En İyi Yaklaşım Sayıları

1.3.1 Tanım: *$G \subset C$, L sınırlı bir bölge, $\omega \in A_p(L)$, $f \in E^p(G,\omega)$ ve $1 \le p < \infty$ olsun. P_n $(n = 1,2,...)$ derecesi n'yi aşmayan polinomlar olduğunda, f fonksiyonuna $E^p(G,\omega)$ uzayındaki en iyi yaklaşım sayısı*

$$E_n^{\circ}(f,\omega)_p := \inf_{p_n} \|f - p_n\|_{L^p(L,\omega)}$$

formülü ile, $L^p(G)$ *uzaylarındaki en iyi yaklaşım sayısı ise* $f \in L^p(G)$ *için*

$$\varepsilon_n(f)_p := \inf_{p_n} \|f - p_n\|_{L^p(G)}$$

formülü ile tanımlanır [14].

1.3.2 Teorem: *G, düzgün sınırlı bir bölge,* $1 < p < \infty, \omega \in A^p(L)$ *ve* $f \in E^1(G)$ *olsun. Bu durumda* $\forall n = 1, 2, \ldots$ *için*

$$\varepsilon_n(f,\omega)_p \leq c\, n^{-1/p} E_n^{\circ}(f,\omega)_p$$

olur.

Özel halde $\omega = |\varphi'|^{-1/p}$ ise

$$\varepsilon_n(f)_p \leq c n^{-1/p} E_n^{\circ}\left(f, \frac{1}{|\varphi'|^{1/p}}\right)_p$$

olur [14].

1.4 Kvazikonform Dönüşümler ve Eğriler

1.4.1 Tanım: $I \subset \mathbf{R}$ *ve* $f : I \to \mathbf{R}$ *olsun.* $\forall \varepsilon > 0$ *için ikişer arakesitleri boş olan ve uç noktaları I'ya ait olan* $(a_i, b_i) \subset I$ *aralıkları için* $\sum_i |b_i - a_i| < \delta$ *olduğunda* $\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ *olacak şekilde* $\delta = \delta(\varepsilon, f)$ *sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu I'da mutlak süreklidir denir [29,s.20].*

Her mutlak sürekli fonksiyon süreklidir.

1.4.2 Tanım: $G \subset \mathbf{C}$ *bir bölge ve u, G'de tanımlı, reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, kapanışı G'de bulunan ve kenarları x ve y eksenlerine paralel olan her R dikdörtgeni için, u fonksiyonu R'de çizilen yatay ve düşey doğru parçalarının hemen hepsi üzerinde mutlak sürekli ise, u fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir denir.*

Bir $h:G\to\mathbf{C}$ fonksiyonunun reel ve sanal bileşenleri G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli iseler, h fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir denir ve $h\in ACL(G)$ ile gösterilir [29,s.127].

$G\subset\mathbf{C}$ bir bölge ve $z=x+iy$ olmak üzere $h(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda u ve v fonksiyonları $x=c$ ve $y=c$ doğruları üzerinde sırasıyla y ve x'e bağlı fonksiyonlardır ve bu doğruların hemen hepsi üzerinde mutlak süreklidirler. Bu nedenle, G'de hemen her yerde u_x ve v_x kısmi türevleri vardır. Aynı şekilde G'de hemen her yerde u_y ve v_y kısmi türevleri vardır. Bu nedenle G'de hemen her yerde

$$h_z=\frac{1}{2}\left(h_x-ih_y\right) \text{ ve } h_{\bar z}=\frac{1}{2}\left(h_x+ih_y\right)$$

kısmi türevleri mevcuttur.

1.4.3 Tanım: *$G\subset\mathbf{C}$ bir bölge, $h:G\to\mathbf{C}$ bir homeomorfizm ve $K\geq 1$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa h dönüşümüne G üzerinde bir K-kvazikonform dönüşüm denir [1,s.24].*

1-) h, G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir.

2-) $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ olmak üzere, G'de hemen her yerde $|h_{\bar z}|\leq k|h_z|$ olur.

Bir kvazikonform dönüşümün bir yansıma ile bileşkesine yön değiştiren kvazikonform dönüşüm veya antikvazikonform dönüşüm denir [1,s.16]

1.4.4 Teorem: *Kvazikonform dönüşümlerin aşağıdaki özellikleri vardır:*

a-) Konform dönüşümler 1-kvazikonformdur. Tersine, 1-kvazikonform dönüşümler de konformdurlar.

b-) K-kvazikonform bir dönüşümün tersi de K-kvazikonformdur.

c-) K_1-kvazikonform bir dönüşüm ile K_2-kvazikonform bir dönüşümün bileşkesi K_1K_2-kvazikonformdur [1,s.22].

1.4.5 Teorem: *w birim diskin kendine K-kvazikonform dönüşümü ve $w(0)=0$ olsun. Bu durumda keyfi iki z_1 ve z_2 noktaları için*

$$|w(z_1)-w(z_2)|\leq 16|z_1-z_2|^{1/K},\quad |z_1|\leq 1,\ |z_2|\leq 1,\ K\geq 1$$

1.4.6 Teorem: *G bölgesinin K-kvazikonform w dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm G'nin her kompakt M altkümesinde* $\frac{1}{K}$*. mertebeden Hölder sınıfındandır:*

$$|w(z_1)-w(z_2)| \le c|z_1-z_2|^{1/K}, \qquad \forall z_1,z_2 \in M.$$

[1,s.51].

1.4.7 Sonuç: *Birim diskin birim diske her kvazikonform dönüşümü kapalı disklerin homeomorfizmine genişletilebilir [1,s.47].*

1.4.8 Teorem: *G ve G' kvazikonform sınırlı iki bölge ise G bölgesinden G' bölgesine her konform dönüşüm düzlemin düzleme kvazikonform dönüşümü olarak genişletilebilir [29,s.98].*

Eğer G bölgesinin sınırı K-kvazikonform ise genişletilmiş fonksiyon K^2-kvazikonform olur.

1.4.9 Teorem (Goldstein teoremi): *G basit bağlantılı, sınırlı bir bölge ve w G bölgesinin K-kvazikonform bir dönüşümü olsun. Bu durumda ölçülebilen her $M \subset G$ kümesi ve her $\delta \in \left(0,\frac{1}{K}\right)$ için*

$$mes(w(M)) \le c(mes\, m)^{\delta}$$

olacak şekilde c=c(K) sabiti mevcuttur [20].

1.4.10 Tanım: *$\overline{\mathbb{C}}$ nin kendi üzerine K-kvazikonform bir dönüşümü altında bir çemberin görüntüsüne K-kvazikonform eğri denir [29,s.97].*

Her kvazikonform eğri bir Jordan eğrisidir. Ayrıca her analitik eğri bir kvazikonform eğridir. Bir kvazikonform eğrinin 2 boyutlu Lebesque ölçümü sıfırdır. 1 boyutlu Lebesque ölçümü ise sonlu olmayabilir. Bir başka deyişle kvazikonform bir eğri sonlu uzunluklu olmayabilir. Fakat sivri açısı olan eğriler kesinlikle kvazikonform değildir [29,s.104].

1.4.11 Tanım: *L kvazikonform eğrisiyle sınırlı bir G bölgesi verilmiş olsun. G bölgesini G bölgesinin dışına $(G \to C\overline{G})$, G bölgesinin dışını G bölgesine*

1.4.11 Tanım: *L kvazikonform eğrisiyle sınırlı bir G bölgesi verilmiş olsun. G bölgesini G bölgesinin dışına $\left(G \to C\overline{G}\right)$, G bölgesinin dışını G bölgesine $\left(C\overline{G} \to G\right)$ resmeden ve L'de idantik olan y: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ antikvazikonform dönüşüme L eğrisine göre kvazikonform yansıma denir [29, s. 98].*

Bir bölgenin sınırı kvazikonform bir eğri ise mutlaka kvazikonform bir yansıma vardır.

Ayrıca bir Jordan eğrisinin kvazikonform bir yansımaya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul kvazikonform bir eğri olmasıdır.

L bir K-kvazikonform eğri olsun. L'nin sınırladığı sınırlı bölgeyi G ile gösterelim ve $0 \in G$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{\mathbf{C}}$'nin kendi üzerine, birim çemberi L'ye resmeden bir w K-kvazikonform dönüşümü vardır. Bu dönüşüm $\mathbf{D}$'yi G'ye ve $\mathbf{C}\overline{D}$'yi $\mathbf{C}\overline{G}$'ye resmeder. Birim çembere göre $j(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ yansımasını gözönüne alalım. Bu durumda $y = wojow^{-1}$ dönüşümü G'yi $\mathbf{C}\overline{G}$ 'ye, $\mathbf{C}\overline{G}$'yi G'ye resmeden ve L'nin noktalarını sabit bırakan K^2-antikvazikonform bir dönüşümdür. Yani L'ye göre K^2-kvazikonform bir yansımadır.

Tersine, L Jordan eğrisinin bir y kvazikonform yansımaya sahip olduğunu varsayalım. $\mathbf{D}$'nin G'ye bir f konform dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & ; z \in \overline{\mathbf{D}} \\ (yofoj)(z) & ; z \in \mathbf{C}\overline{\mathbf{D}} \end{cases}$$

dönüşümü, birim çemberi L'ye resmeden, $\overline{\mathbf{C}}$'den $\overline{\mathbf{C}}$'ye kvazikonform bir dönüşümdür. O halde L bir kvazikonform eğri olur.

2. BERGMAN UZAYLARI

2.1 Bergman Uzayları ve Özellikleri

$G \subset \mathbf{C}$ bir bölge, f, G bölgesinde analitik bir fonksiyon ve

$$I[f] := \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \tag{2.1}$$

olsun. Yukarıdaki integral bölge üzerinden bir Lebesgue integralidir. Bu integral Riemann integralinin bir limiti olarak da düşünülebilir. Gerçekten;

$\{G_n\}$, G ye yaklaşan ve aşağıdaki özelliklere sahip olan altkümelerin bir dizisi olsun.

i-) Her G_n kümesi sınırı sonlu sayıda Jordan eğrilerinden oluşan bir bölgedir.

ii-) Her n için $G_n \subset G_{n+1} \subset G$ dir.

iii-) Her $P \in G$ için $n > n_0$ olduğunda $P \in G_n$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(P)$ vardır.

$$\phi_n(z) := \begin{cases} |f(z)|^2, & z \in \overline{G_n} \\ 0, & z \in G/\overline{G_n} \end{cases}$$

olsun. G içinde $\phi_n \uparrow |f|^2$ olduğu gösterilebilir. Lebesgue monoton yakınsaklık teoremi gereğince

$$\iint_G \phi_n \, d\sigma_z \to \iint_G |f|^2 d\sigma_z \qquad (n \to \infty)$$

olur. Buradan

$$\iint_{G_n} |f|^2 d\sigma_z \to I[f] = \iint_G |f|^2 d\sigma_z \qquad (n \to \infty)$$

yazılabilir. Bu son ifade (2.1) integralinin Riemann integrallerinin bir limiti olarak yazılabileceğini gösterir.

Özel halde

$$G=\{z:\ r<|z|<R\} \qquad (0\le r<R<\infty)$$

ve

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad (z\in G)$$

ise

$$I[f]=\int_r^R\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\rho^n e^{in\phi}\Big)\Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{a_m}\rho^m e^{-im\phi}\Big)\rho\, d\phi d\rho$$

$$=\int_r^R\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\rho^{2n+1}d\phi d\rho$$

$$=2\pi\int_r^R\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\rho^{2n+1}d\rho$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\int_r^R\rho^{2n+1}d\rho$$

olur.

Yukarıdaki 2. eşitlik serilerin $\rho\in(r,R)$ olduğunda ϕ ye göre mutlak ve düzgün yakınsaklığından, sonuncu eşitlik ise terimleri negatif olmayan seriler için toplam ve integral işlemlerinin yerdeğişiminin mümkünlüğünden dolayı elde edilir

$r=0$ için f, $0<|z|<R$ çıkarılmış komşuluğunda analitik ve $I[f]<\infty$ ise $n<0$ için $a_n=0$ dır. Gerçekten, bilindiği gibi

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \qquad n=0,\pm1,\pm2,...$$

dir. Burada $\gamma=\{z:\ |z|=\rho\quad \rho\in(r,R)\}$ ve f, γ üzerinde sınırlı olduğundan

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}\int_\gamma|dz|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^{n}}$$

olur. Sonuncu eşitlikte $n<0$ olduğunda ρ sıfıra giderken $\rho^{n}\to\infty$ ve dolayısıyla $a_n\to 0$ olur.

Böylece $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ yazılabilir. Bu ise $z=0$ noktasının kaldırılabilir ayrık singüler nokta olduğunu gösterir. Böylece

$$I[f]=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left|an\right|^{2}\int_{r}^{R}\rho^{2n+1}\,d\rho$$

$$=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^{2}\frac{1}{2n+2}\left(R^{2n+2}-r^{2n+2}\right)$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^{2}\frac{1}{n+1}\left(R^{2n+2}-r^{2n+2}\right)$$

ve burada $r=0$ olduğunu dikkate alırsak

$$I[f]=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|an\right|^{2}}{n+1}R^{2n+2} \tag{2.2}$$

olur.

2.1.1 Tanım: *G'de analitik ve $I[f]<\infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesi L^2 (G) ile gösterilir. Bir başka deyişle*

$$L^2(G)=\{f:\ f, G \text{ de analitik ve } I[f]<\infty\}$$

olur.

Görüldüğü gibi $A(\overline{G})\subset L^2(G)$dir.

2.1.2 Lemma: *$f\in L^2(G)$ ise $z\in G$ ve $d_z:=dist(z,\partial G)$ olduğunda*

$$\left|f(z)\right|^{2}\le\frac{I[f]}{\pi d_z^{2}} \tag{2.3}$$

olur.

İspat: D, $\overline{D}\subset G$ koşulunu sağlayan z merkezli d_z yarıçaplı bir disk olsun. (2.2) eşitliğinden

$$\iint_D |f(z)|^2 d\sigma_z = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} R^{2n+2}$$

$$\geq \pi |a_0|^2 R^2$$

$$= \pi |f(z)|^2 d_z^2$$

olur. Buradan

$$\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \geq \iint_D |f(z)|^2 d\sigma_z$$

$$\geq \pi |f(z)|^2 d_z^2$$

ve sonuç olarak

$$|f(z)|^2 \leq \frac{\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z}{\pi d_z^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

f, G bölgesinde analitik ve $p \geq 1$ olduğunda

$$\|f\|_p := \left\{ \iint_G |f(z)|^p d\sigma_z \right\}^{1/p}$$

normunu tanımlayalım. Eğer $\|f\|_p < \infty$ ise $f \in L^p(G)$ olur.

Yukarıdaki lemmanın aşağıdaki şekilde ifade edilen bir genelleşmesi de sağlanır.

2.1.3 Lemma: *$f \in L^p(G)$ ise $z_0 \in G$ ve $d_{z_0} := dist(z_0, \partial G)$ olduğunda*

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi d_{z_0}^2} \|f\|_p^p$$

olur.

İspat: Sadelik için $z_0 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda f fonksiyonu $D(0, d_0)$ diskinde analitiktir. Bundan dolayı $0 < r < d_0$ olduğunda

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

eşitsizliği sağlanır.[34,s.432]

Bu eşitsizliğin her iki tarafını rdr ile çarptoktan sonra $[0, \mathrm{d}_0]$ aralığı üzerinden integrallersek

$$\frac{|f(0)|^p \, \mathrm{d}_0^2}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{D(0,d_0)} |f(z)|^p \, d\sigma_z$$

Buradan ise

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{\pi d_0^2} \|f\|_p^p$$

elde edilir.

$f, g \in L^2(G)$ keyfi iki fonksiyon olsun.

$$|a+b|^2 \leq 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$$

eşitsizliğinden

$$|af(z) + bg(z)|^2 \leq 2\left(|a|^2 |f(z)|^2 + |b|^2 |g(z)|^2\right) \tag{2.4}$$

olduğu görülür.

2.1.4 Tanım: *$f, g \in L^2(G)$ olmak üzere*

$$(f, g) := \iint_G f(z)\overline{g(z)} \, d\sigma_z$$

kompleks sayısına f ve g nin iç çarpımı denir.

2.1.5 Teorem: *$L^2(G)$ bir Hilbert uzaydır.*

İspat: $L^2(G)$'nin bir tam iç çarpım uzayı olduğunun gösterilmesi gerekir.

a-) $L^2(G)$ bir lineer uzaydır. Gerçekten $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ve $f, g \in L^2(G)$ olduğunda (2.4) eşitsizliğinden dolayı $\alpha f + \beta g \in L^2(G)$ dir.

b-) $L^2(G)$ aşağıdaki özellikleri sağladığından bir iç çarpım uzayıdır.

$(f, f) \geq 0$ ve $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$

$(f, g) = \overline{(g, f)}$

$$(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$$

c-) $L^2(G)$ normlu bir uzaydır ve bu uzayda norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|f\| := (f, f)^{1/2} = \sqrt{\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z}\ .$$

d-) $L^2(G)$ bu norma göre tamdır.

İspat: $\{f_n\}$, L^2 (G) de bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall\, \varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda

$$\|f_n - f_m\|^2 = (f_n - f_m, f_n - f_m)$$
$$= \iint_G |f_n - f_m|^2 d\sigma_z < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. 2.1.2 Lemma'ya göre G'nin her kompakt B altkümesi için $d = dist(B, \partial G)$ olduğunda

$$|f_n(z) - f_m(z)|^2 \le \frac{\iint_G |f_n - f_m|^2 d\sigma_z}{\pi d_z^2} < \frac{\varepsilon}{\pi d^2} \qquad (z \in B)$$

Bu ise, $\{f_n\}$ fonksiyonel dizisinin G'nin her B kompakt altkümesinde belirli bir F analitik fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını gerektirir.

$$f_n(z) \Rightarrow F(z) \qquad (n \to \infty,\ z \in B \subset G)$$

$$\iint_G |f_n - f_m|^2 d\sigma_z < \varepsilon \Rightarrow \iint_B |f_n - f_m|^2 d\sigma_z < \varepsilon \qquad (n, m > N)$$

Sonuncu eşitsizlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa $\iint_B |f_n - F|^2 d\sigma_z \le \varepsilon\ (n > N)$ olur. Bu bağıntı her B kompakt altkümesi için yazılabildiğinden $\iint_G |f_n - F|^2 d\sigma_z < \varepsilon$ olur. Bu eşitsizlik $F \in L^2(G)$ ve $\|f_n - F\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğunu gösterir. Böylece $L^2(G)$ de her Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu ise $L^2(G)$ uzayının tam olduğunu gösterir.

2.2 Bergman Çekirdek Fonksiyonu

Bu bölümde kompleks analizin önemli fonksiyonlarından biri olan Bergman çekirdek fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyonun bazı özellikleri incelenecektir.

H bir Hilbert uzayı, L bu uzayda sınırlı lineer fonksiyonel olsun. Bilindiği gibi bu fonksiyonel H uzayında

$$L(x)=(x,u) \qquad (x\in H)$$

olacak şekilde bir tek $u\in H$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanır.

G keyfi bir bölge olmak üzere $H=L^2(G)$ ve $\zeta\in G$ olsun. 2.1.2 lemma gereği

$$|f(\zeta)|\leq\frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}\,d_\zeta}, \qquad d_\zeta=dist(\zeta,\partial G)$$

olduğundan

$$L(f):=f(\zeta) \qquad (f\in L^2(G))$$

fonksiyoneli sabit her $\zeta\in G$ için $L^2(G)$ de sınırlıdır. Böylece

$$f(\zeta)=(f,u_\zeta) \qquad (f\in L^2(G))$$

olacak şekilde bir tek $u_\zeta\in L^2(G)$ fonksiyonu vardır.

2.2.1 Tanım: $K(z,\zeta):=u_\zeta(z)$ *olarak tanımlanan fonksiyona G'nin Bergman çekirdek fonksiyonu denir.*

Bu tanım gereği $\zeta\in G$ olduğunda $f(\zeta)$ fonksiyoneli

$$f(\zeta)=(f,K(.,\zeta))=\iint_G f(z)\overline{K(z,\zeta)}d\sigma_z \qquad (f\in L^2(G)) \qquad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir.

K çekirdek fonksiyonunun tanımından aşağıdaki özellikler elde edilir.

1-) $\|K(.,\zeta)\|^2=K(\zeta,\zeta) \qquad (\zeta\in G)$

2-) $z_1,z_2\in G$ için $K(z_1,z_2)=\overline{K(z_2,z_1)}$

Burada 1.özellik (2.5) eşitliğinde $f:=K(.,\zeta)$ yazılarak görülür.

(2.5) eşitliğinde $f = K(.,z_2)$ ve $\zeta = z_1$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
(f, K(.,\zeta)) &= (K(.,z_2), K(.,z_1)) \\
&= \iint_G K(z,z_2)\overline{K(z,z_1)}\,d\sigma_z \\
&= \overline{\iint_G \overline{K(z,z_2)}K(z,z_1)\,d\sigma_z} \\
&= \overline{\iint_G K(z,z_1)\overline{K(z,z_2)}\,d\sigma_z} \\
&= \overline{K(z_2,z_1)}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür ve böylece 2. özellik de ispatlanmış olur.

$\zeta \in G$ için $M = \{f \in L^2(G) : f(\zeta) = 1\}$ olsun.

Çekirdek fonksiyonu ile M kümesinde tanımlı bir minimizasyon problemi arasındaki ilişki aşağıdaki teorem yardımıyla verilir.

2.2.2 Teorem: $\min\limits_{f \in M} \|f\| = \|f_0\|$ *olacak şekilde bir tek* $f_0 \in M$ *vardır*

ve

$$f_0(z) = \frac{K(z,\zeta)}{K(\zeta,\zeta)}, \quad K(z,\zeta) = \frac{f_0(z)}{\|f_0\|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: $\forall f \in M \subset L^2(G)$ için (2.5) özelliğine göre $f(\zeta) = (f, K(.,\zeta))$ olur. $f(\zeta) = 1$ olduğundan Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak $f \in M$ olduğunda

$$1 = f(\zeta) = (f, K(.,\zeta)) \le \|f\| . \|K(.,\zeta)\| = \|f\|\sqrt{K(\zeta,\zeta)}$$

olduğu görülür. Sonuncu eşitsizlikte eşitlik sadece

$$f = f_0 = CK(.,\zeta)$$

olduğunda sağlanır. Bu durumda

$$1 = f_0(\zeta) = CK(\zeta,\zeta)$$

bağıntısından $C = \dfrac{1}{K(\zeta,\zeta)}$ ve sonuç olarak

$$f_0(z) = K(z,\zeta) / K(\zeta,\zeta)$$

olduğu görülür. Aynı zamanda sonuncu eşitlikten

$$K(z,\zeta)=f_0(z).K(\zeta,\zeta)=f_0(z)/\|f_0\|^2$$

elde edilir.

2.3 Bergman Çekirdek Fonksiyonunun Seri Açılımı

Çekirdek fonksiyonunun açık biçimde ifadesi bazı özel durumlarda elde edilebilir. Bununla birlikte çekirdek fonksiyonunun $\{\phi_j\}$ *CON* sisteme göre bir seri açılımını bulmak mümkündür. Gerçekten

$$\gamma_j=\left(K(.,\zeta),\ \phi_J\right)=\overline{\phi_J(\zeta)} \qquad \text{(j=1,2,...)}$$

Fourier katsayıları olmak üzere $K(z,\zeta)$ fonksiyonuna [16, Teorem 3] uygulandığında aşağıdaki teorem ifade edilir.

2.3.1 Teorem: *$\{\phi_j\}$ keyfi bir CON sistem ise $\forall\zeta\in G$ için Bergman çekirdek fonksiyonu*

$$K(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\phi_j(\zeta)}\phi_j(z) \qquad (z,\zeta\in G) \tag{2.6}$$

seri açılımına sahiptir. Bu seri G'nin her B kompakt altkümesinde düzgün yakınsaktır.

Özel halde G=**D**= $\{z:\ |z|<1\}$ ise

$$P_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n \qquad (n=0,1,2,...)$$

olacağından, **D** nin çekirdek fonksiyonu

$$\begin{aligned}K(z,\zeta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,z^n\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\overline{\zeta}^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi}\left(z\overline{\zeta}\right)^n\\&=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

olur.

Yukarıdaki seri $\zeta \in \mathbf{D}$ olduğunda z'ye göre $\overline{\mathbf{D}}$ de yakınsar. Fakat $\zeta, \partial\mathbf{D}$ ye yaklaştıkça yaklaşım hızı gittikçe kötüleşir. (2.5) ve (2.7) eşitliklerinden

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)}{\left(1-\bar{z}\zeta\right)^2}dm_z \qquad (\zeta \in D)$$

elde edilir ve bu ifade $\forall f \in L^2(D)$ için yazılabilir.

2.4 Bergman Uzaylarında İntegral Gösterimi

Şimdi kvazikonform yansıma kullanarak özel halde Bergman uzaylarında yeni bir integral gösterimi elde edeceğiz.

$f \in A(\overline{G})$ alalım ve f fonksiyonunun $\overline{G}$'yi içine alan daha geniş bir bölgeye genişlemesini $\zeta = y(z)$ yansımasını kullanarak aşağıdaki şekilde gerçekleştirelim.

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z), & z \in \overline{G} \\ f(y(z)), & z \in C\overline{G}. \end{cases}$$

Bilinen

$$(foy)_z = (f_\zeta oy)y_z + (f_{\bar{\zeta}}oy)\bar{y}_z,$$
$$(foy)_{\bar{z}} = (f_\zeta oy)y_{\bar{z}} + (f_{\bar{\zeta}}oy)\bar{y}_{\bar{z}}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\tilde{f}_{\bar{z}} = \begin{cases} 0, & z \in \overline{G} \\ (f_\zeta oy)y_{\bar{z}}, & z \in C\overline{G} \end{cases}$$

olduğu görülür. $z \in \overline{G}$ olduğunda

$$F(z)=\int_\gamma f(t)dt$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada γ, 0 ve z noktalarını birleştiren ve tümüyle G içinde kalan sonlu uzunluklu bir yaydır. Görüldüğü gibi F, G'de analitik, $\overline{G}$'de sürekli türevlenebilirdir.

F fonksiyonunun

$$\tilde{F}(z)=\begin{cases} F(z), & z \in \overline{G} \\ F(y(z)), & z \in C\overline{G} \end{cases}$$

ÖZET

EKSTREMAL POLİNOMLAR VE ONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Burçin OKTAY
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof.Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir, 2003

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, önce ilerideki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiş, daha sonra yaklaşımın incelendiği bazı fonksiyonel uzaylar ve bu uzaylardaki en iyi yaklaşım sayıları tanımlanmıştır. Bölümün son kısmında ise ileride kvazikonform sınırlı bölgeler üzerinde yaklaşım değerlendirileceği için kvazikonform dönüşümler ve eğriler hakkında gereken bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, Lebesgue uzaylarının özel bir şekli olan Bergman Uzayları incelenmiştir. İlk önce Bergman uzayı tanımlanmış ve onun bazı özellikleri araştırılmıştır. Daha sonra Bergman uzaylarında önemli bir fonksiyon olan Bergman çekirdek fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyon ile konform dönüşümler arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Son bölümde ise, Bergman uzaylarında bir ekstremal problemin çözümü sonucu oluşturulan Bieberbach polinomları sınıfı tanımlanmış, daha sonra Bieberbach polinomlarının kapalı bölgelerde Riemann konform dönüşümüne yaklaşım hızı değerlendirilmiştir. Bu yaklaşım özellikle analitik ifadesi kolaylıkla bulunamayan konform dönüşümlerin pratik inşaası bakımından da önem taşımaktadır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: fonksiyonel uzay / en iyi yaklaşım sayıları / kvazikonform eğriler / Lebesgue uzayları / Bergman uzayı / Bergman çekirdek fonksiyonu / Riemann konform dönüşüm / Bieberbach polinomları

ABSTRACT

EXTREMAL POLYNOMIALS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

Burçin OKTAY
Balıkesir University, Institue of Science,
Department of Mathematics

(M.Sc. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir-Turkey, 2003

This work consists of three chapters.

In the first chapter, basic definitions and theorems which are used in the following chapters are given. After that, some functional spaces in which the approximation is investigated and the best approximant numbers in these spaces are defined. Since in the following chapters the approximatıon on the domains with quasiconformal boundary is investigated, at the final part of the chapter the necessary information about the quasiconformal mappings and curves are also given.

In the second chapter, an important subspace of the Lebesgue spaces called the Bergman space is investigated. Here at first, the Bergman spaces are defined and some properties of these spaces are studied. Later, the Bergman kernel function which places an important role in the Bergman spaces is defined and the relations between this function and conformal mappings are considered.

In the final chapter, the classes of Bieberbach polynomials, which are constructed as the solution of an extremal problem, are defined and then, in the closed domains the approximation rate of these polynomials to the Riemann conformal mapping is investigated. This approximation is important for approximately construction of the conformal mappings whose analytical expression is not simply obtained.

KEY WORDS : functional spaces / the best approximant numbers / quasiconformal curves / Lebesgue spaces / Bergman spaces / Bergman kernel function / Riemann conformal mapping / Bieberbach polynomials.

sürekli genişlemesini tanımlayalım. $\widetilde{F}$ fonksiyonu $\overline{\mathbf{C}}$ de sürekli ve sınırlıdır. $\widetilde{F}(\infty)=\widetilde{F}(0)=F(0)=0$ dır ve $\widetilde{F}_z$ ve $\widetilde{F}_{\bar{z}}$ türevleri vardır. $z \in \overline{G}$ olduğunda ise $F'(z)=f(z)$ dir.

Şimdi $\widetilde{F}_{\bar{z}} \in L^2(C)$ olduğunu gösterelim.

$\zeta = y(z)$ kvazikonform bir yansıma olduğundan antikvazikonform bir dönüşümdür. Bunun $\overline{y(z)}$ eşleniği ise kvazikonform olur. Bu durumda

$$\left|\frac{\overline{y_{\bar{z}}}}{\overline{y_z}}\right| = \left|\frac{y_z}{y_{\bar{z}}}\right| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1$$

olur. y'nin jakobiyeni $J(y)=|y_z|^2-|y_{\bar{z}}|^2<0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\iint_{CG}|y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z &= \iint_{CG}\left(1-\left|\frac{y_z}{y_{\bar{z}}}\right|^2\right)^{-1}|J(y)|\,d\sigma_z \\
&\leq \frac{1}{1-k^2}\iint_{CG}|J(y)|\,d\sigma_z \\
&= \frac{1}{1-k^2}\iint_{G}d\sigma_z \\
&= \frac{1}{1-k^2}\,alan(G) < \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\widetilde{F}, G$ de analitik olduğundan her $z \in G$ için $\widetilde{F}_{\bar{z}}=0$ olur. Ayrıca L eğrisinin 2 boyutlu Lebesgue ölçümü 0 olduğundan

$$\iint_{G}|\widetilde{F}_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{C}}|\widetilde{F}_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z = \iint_{CG}|\widetilde{F}_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z &= \iint_{CG}|F_y o\, y(z)|^2 |y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z \\
&= \iint_{CG}|f(y(z))|^2|y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z \\
&\leq M^2\iint_{CG}|y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z < \infty
\end{aligned}$$

olur. Buradaki M sabiti $f(y(z))$ fonksiyonunun sürekli dolayısıyla sınırlı oluşundan gelmektedir ve $M := \max\limits_{\zeta \in \overline{G}}|f(\zeta)|$ dir. Böylece $\widetilde{F}_{\bar{z}} \in L^2(C)$ olduğu gösterilmiş olur.

2.4.1 Teorem: $f \in A(\overline{G}), 0 \in G$ ve G *bir kvazidisk ise* $\forall z \in G$ *için*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{G}} \frac{f o y(\zeta)}{(\zeta - z)^2} y_{\overline{\zeta}}(\zeta) d\sigma_\zeta$$

eşitliği vardır [8,s.105].

İspat: $f \in A(\overline{G})$ ve $F(z) := \int_0^z f(\zeta) d\zeta$ olsun

$$\widetilde{F}(z) = \begin{cases} F(z), & z \in \overline{G} \\ F(y(z)), & z \in C\overline{G} \end{cases}$$

genişlemesini oluşturalım ve $\widetilde{F}(z) \in ACL(\overline{G})$ olduğunu gösterelim.

R, kenarları koordinat eksenlerine paralel bir dikdörtgen ve $\varepsilon > 0$ olsun. *R* dikdörtgeninin bir yatay doğru ile kesişimi sonucu elde edilen doğru parçası üzerinde yerleşen ve kesişmeyen $(z_1, z_1'), (z_2, z_2'), \ldots (z_n, z_n')$ aralıklarını gözönüne alalım. Bu durumda

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \left|\widetilde{F}(z_k') - \widetilde{F}(z_k)\right| \le \sum_{(1)} \left|F(z_k') - F(z_k)\right| + \sum_{(2)} \left|F(y(z_k')) - F(y(z_k))\right| + \sum_{(3)} \left|\widetilde{F}(z_k') - \widetilde{F}(z_k)\right|$$

olur. Burada $\sum_{(1)}$ bütünüyle *G* bölgesinin içinde olan, $\sum_{(2)}$ bütünüyle dışında olan, $\sum_{(3)}$ ise bir ucu *G*'nin içinde diğeri dışında olan aralıklar üzerinden alınan toplamlar olsun.

z_k^*, $[z_k, z_k']$ aralığından olan ve bölgenin sınırında yerleşen bir nokta olmak üzere

$$\sum_{(3)} \left|\widetilde{F}(z_k') - \widetilde{F}(z_k)\right| \le \sum_{(3)} \left|\widetilde{F}(z_k') - \widetilde{F}(z_k^*)\right| + \sum_{(3)} \left|F(z_k^*) - F(z_k)\right|$$

yazılabildiğinden ve *F(z)* $\overline{G}$ 'de *Lip1* sınıfından olduğundan,

$$\sigma_n \le M\left(\sum_{(1)} |z_k' - z_k| + \sum_{(2)} |y(z_k') - y(z_k)| + \sum_{(3)} |y(z_k') - y(z_k^*)| + \sum_{(3)} |z_k^* - z_k|\right)$$

olur. $y(z)$ kvazikonform dönüşüm ve bundan dolayı mutlak sürekli olduğundan her $\epsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_k'| < \delta$ olduğunda

$$\sum_{(2)}\left|y(z_k')-y(z_k)\right|+\sum_{(3)}\left|y(z_k')-y(z_k^*)\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

olur. Şimdi $\delta := \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{2M}\right)$ seçersek

$$\sigma_n \le M\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\widetilde{F}\in ACL(\overline{G})$ olduğu gösterilmiş olur. $\widetilde{F}_{\bar z}\in L^2(C)$ olduğu da bilindiğinden $\widetilde{F}$ 'ye Cauchy-Green formülü uygulanabilir. Buna göre G yi kapsayan yeterince büyük r yarıçaplı dairede

$$\widetilde{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<r}\frac{\widetilde{F}_{\bar\zeta}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$$

olur. Burada $z\in G$ olduğunu düşünerek türev aldığımızda

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<r}\frac{\widetilde{F}_{\bar\zeta}}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta$$

bulunur. $\zeta\in G$ ise F, G'de analitik olduğundan $F_{\bar\zeta}=0$ olacaktır. Bu durumda $|\zeta|<r$ yerine $\{|\zeta|<r\}/G$ yazabiliriz. Diğer yandan

$$\widetilde{F}(\zeta)=\begin{cases}F(\zeta), & \zeta\in\overline{G}\\ (Foy)(\zeta), & \zeta\in C\overline{G}\end{cases}$$

olduğundan

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{\{|\zeta|<r\}-G}\frac{foy(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\bar\zeta}\,d\sigma_\zeta$$

eşitliği yazılabilir ve burada $r\to\infty$ için limit alınırsa ilk integralin değeri sıfır olacaktır. Çünkü r yeterince büyük olduğunda $\frac{r}{2}\le|\zeta-z|$ eşitsizliği yazılabildiğinden

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\le\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\max_{|\zeta|=r}\left|\widetilde{F}(\zeta)\right|\frac{4}{r^2}\int_{|\zeta|=r}|d\zeta|=\lim_{r\to\infty}\max_{|\zeta|=r}\left|\widetilde{F}(\zeta)\right|\frac{4}{r}=0$$

olur. .

Ayrıca $r\to\infty$ için $\{\zeta:|\zeta|\le r\}\to\overline{\mathbf{C}}$ olduğundan, $\forall z\in G$ için

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{CG}\frac{foy(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\bar\zeta}\,d\sigma_z$$

elde edilir. Buradan da L eğrisinin 2 boyutlu Lebesgue ölçüsünün sıfır olduğu dikkate alındığında

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{C\bar{G}}\frac{foy(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\bar{\zeta}}d\sigma_z$$

sonucuna varılır.

Yukarıdaki teorem $f\in A(\bar{G})$ olduğunda ilk defa V. I. Belyi tarafından ispatlanmıştır. Daha sonra I. M. Batchaev bu teoremi Bergman uzaylarından daha geniş olan uzaylara genişletmiş ve integral gösteriminin sağlanması için aşağıdaki gerekli ve yeterli koşulu elde etmiştir.

2.4.2 Teorem: *G, sınırlı, basit bağlantılı bir kvazidisk olsun.*

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{C\bar{G}}\frac{(foy)(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\sigma_\zeta,$$

integral gösteriminin sağlanması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun G bölgesinde analitik ve

$$\iint_G|f(z)|\,d\sigma_z$$

integralinin sonlu olmasıdır[8,s.110].

2.5 Bergman Çekirdek Fonksiyonu ile Konform Dönüşümler Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda Bergman çekirdek fonksiyonu ile Konform dönüşümler arasındaki bağlantılar incelenecektir.

$G\subset\mathbf{C}$ ($G\neq\mathbf{C}$) basit bağlantılı bir bölge, ζ, G de sabit bir nokta ve F, G'den $\mathbf{D}$'ye

$$F(\zeta)=0,\qquad F'(\zeta)>0$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm olsun. Bilindiği gibi (Riemann konform dönüşüm teoremine göre) bu koşulları sağlayan bir tek F konform dönüşümü vardır.

2.5.1 Teorem: *F konform dönüşümü ile K çekirdek fonksiyonu arasında*

$$F'(z)=\sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}}K(z,\zeta) \qquad K(z,\zeta)=\frac{1}{\pi}F'(z)\overline{F'(\zeta)} \qquad (z\in G)$$

bağıntıları vardır.

İspat: $F'(z)\overline{F'(\zeta)}/\pi$ nin $K(z,\zeta)$ ya eşit olduğunu görebilmek için $F'(z)\overline{F'(\zeta)}/\pi$ nin (2.5) eşitliğini sağladığını göstermek gerekir.

$f\in L^2(G)$ ve $G_\rho:=\{z:|F(z)|<\rho\}$ $(0<\rho<1)$ olsun. $z\in\partial G_\rho$ için $\overline{F(z)}F(z)=\rho^2$ olduğundan Green formülü gereğince

$$\iint_{G_\rho} f\overline{F'}d\sigma_z=\frac{1}{2i}\int_{\partial G_\rho} f\overline{F}dz$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{\partial G_\rho} f\frac{\rho^2}{F}dz$$

$$=\frac{\rho^2}{2i}\int_{\partial G_\rho}\frac{f}{F}dz$$

olur. $F(\zeta)=0$ olduğundan ζ noktası $\frac{f}{F}$ fonksiyonu için bir aykırı noktadır. Buna göre sonuncu integral, rezidü teoremi kullanılarak yazıldığında

$$\iint_{G_\rho} f\overline{F'}\,d\sigma_z=\frac{\rho^2}{2i}2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{f}{F},\zeta\right)$$

olur. *f* ve *F*, ζ da analitik $f(\zeta)\neq 0, \mathrm{F}(\zeta)=0$ ve $\mathrm{F}'(\zeta)\neq 0$ olduğundan $\frac{f}{F}$ fonksiyonu ζ 'da basit kutba sahiptir. Bu durumda $\operatorname{Res}\left(\frac{f}{F},\zeta\right)=\frac{f(\zeta)}{F'(\zeta)}$ olur. Böylece

$$\iint_{G_\rho} f\overline{F'}\,d\sigma_z=\frac{\rho^2}{2i}2\pi i\frac{f(\zeta)}{F'(\zeta)}$$

$$=\rho^2\pi\frac{f(\zeta)}{F'(\zeta)}$$

elde edilir. Buradan

$$f(\zeta)=\frac{1}{\rho^2}\iint_{G_\rho} f(z)\frac{\overline{F'(z)}F'(\zeta)}{\pi}d\sigma_z$$

ve $\rho\to 1$ için limit alınırsa

$$f(\zeta)=\iint_G f(z)\,\frac{\overline{F'(z)}F'(\zeta)}{\pi}\,d\sigma_z$$

olur. Bunu (2.5) eşitliği ile karşılaştırdığımızda

$$K(z,\zeta)=\frac{\overline{F'(z)}F'(\zeta)}{\pi} \tag{2.8}$$

olduğu görülür.

Sonuncu eşitlikte z yerine ζ yazılırsa

$$K(\zeta,\zeta)=\frac{\left(F'(\zeta)\right)^2}{\pi}$$

ve buradan

$$F'(\zeta)=\sqrt{\pi}\sqrt{K(\zeta,\zeta)}$$

olur. $F'(\zeta)$ nin bu ifadesi (2.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\overline{F'(z)}=\sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}}K(z,\zeta)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Özet olarak, G bölgesinden **D**'ye

$$F(\zeta)=0, \qquad F'(\zeta)>0$$

koşullarını sağlayan F konform dönüşümü, K çekirdek fonksiyonunun (2.6) seri açılımı kullanılarak;

$$F(z)=\sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}}\int_{v=\zeta}^{z}\overline{K(v,\zeta)}dv \qquad (z\in G)$$

biçiminde ifade edilir.

Eğer f, G den $\{w:|w|<r\}$ diskine

$$f(\zeta)=0, \qquad f'(\zeta)=1$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm ise $r=\left(\pi K(\zeta,\zeta)\right)^{-1/2}$ olur ve f konform dönüşümü

$$f(z)=\frac{F(z)}{F'(\zeta)}=\frac{1}{K(\zeta,\zeta)}\int_{v=\zeta}^{z}\overline{K(v,\zeta)}dv \qquad (z\in G) \tag{2.9}$$

olarak bulunur.

3. BİEBERBACH POLİNOMLARI

Bu bölümde matematik ve mekaniğin birçok alanlarında sık kullanılan Riemann konform dönüşüm fonksiyonunun pratik olarak bulunması için bir yöntem verilecektir.

3.1 Bieberbach Polinomları ve Özellikleri

Bergman çekirdek fonksiyonunun (2.6)' daki ifadesinde serinin *n-1.* kısmi toplamı

$$K_{n-1}(z,\zeta)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{P_j(\zeta)}P_j(z) \qquad (n=1,2,...)$$

şeklinde olur. Burada $P_j(z)$'ler G bölgesine göre belirlenen orthonormal polinomlardır.

G bölgesinden $\{w:|w|<r\}$ diskine $f(\zeta)=0,\ f'(\zeta)=1$ koşullarını sağlayan f konform dönüşümünün (2.9) 'daki ifadesinde Bergman çekirdek fonksiyonunun seri açılımındaki *n-1.* kısmi toplamı yazıldığında *n* dereceli *(n=0,1,2,...)* polinomlar dizisi elde edilir. Bu polinomlar dizisi f'ye G bölgesinin kompakt altkümelerinde düzgün olarak yaklaşır.

3.1.1 Tanım: *G, Jordan bölgesi,* $P_j(z)$*, G nin orthonormal polinomları ve*

$$K_{n-1}(z,\zeta)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{P_j(\zeta)}P_j(z) \qquad (n=1,2,...)$$

olsun.

$$\pi_n(z):=\frac{1}{K_{n-1}(\zeta,\zeta)}\int_{v=\zeta}^{z}K_{n-1}(v,\zeta)dv$$

polinomlarına (G,ζ) *çifti için Bieberbach polinomları denir.*

Sonuncu eşitlikte $z=\zeta$ yazıldığında kolayca görülür ki $\pi_n(\zeta)=0$ dır. $\pi_n(z)$'in türevi alınırsa,

$$\pi_n'(z)=\frac{1}{K_{n-1}(\zeta,\zeta)}K_{n-1}(z,\zeta)$$

olur. Buradan da $z=\zeta$ yazıldığında $\pi_n'(\zeta)=1$ olduğu görülür.

Göstermek mümkündür ki bu polinomlar $p_n(\zeta)=0,\ p_n'(\zeta)=1$ koşullarını sağlayan n.dereceden p_n polinomlarının sınıfında $\|p_n'\|$ integralini minimize ederler. Bir başka deyişle,

$$\|\pi_n'\|=\min\|p_n'\|=\min\left(\iint_G |p_n'|^2 d\sigma_z\right)^{1/2}$$

dir. Diğer yandan $n\to\infty$ için $\pi_n(z)$ polinomlarının $f(z)$ fonksiyonuna G'nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsadığını görmek mümkündür. Gerçekten 2.3.1 teorem gereği

$$K(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\phi_j(\zeta)}\phi_j(z)$$

açılımı G'nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\pi_n'(z)=\frac{K_{n-1}(z,\zeta)}{K_{n-1}(\zeta,\zeta)}$$

ve

$$f'(z)=\frac{K(z,\zeta)}{K(\zeta,\zeta)}$$

eşitlikleri kullanılarak $\pi_n'(z)$ polinomlarının $f'(z)$ fonksiyonuna kompakt altkümelerde düzgün yakınsak olduğu görülür. Buradan ise Weierstrass teoremine göre $\pi_n(z)$ polinomlarının $f(z)$ fonksiyonuna kompakt altkümelerde düzgün yakınsaklığı elde edilir.

Bieberbach polinomlarının konform dönüşüm fonksiyonuna yaklaşım problemleri ve bölgenin geometrik özelliklerine göre yaklaşım hızının değerlendirilmesi ile ilgili çeşitli bilimsel araştırmalar yapılmıştır. Bu konuda ilk çalışan M.V.Keldych (1939) dir. Keldych G bölgesinin sınırı , sınırlı eğrilikli düzgün Jordan eğrisi olduğunda $\forall\varepsilon > 0$ ve n'den bağımsız belirli bir $c = c(\varepsilon)$ sabiti için

$$\|\varphi - \pi_n\|_{\overline{G}} \leq \frac{c}{n^{1-\varepsilon}} \tag{3.1}$$

olduğunu ispatlamıştır. Burada φ, G bölgesinden $\{w : |w| < r_0\}$ diskine $\varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan bir konform dönüşümdür. Keldych, bu çalışmasında yoğun bir sınır noktaları kümesinde Bieberbach polinomlarının ıraksadığı, sonlu uzunluklu sınırı olan bir bölge örneği verir. Keldych'den sonra S.N.Mergelyan (1951) Bieberbach polinomlarının yaklaşımı üzerine çalışmış, Keldych'in koyduğu sınırın sınırlı eğrilikli olma koşulunu kaldırarak, L (bölgenin sınırı) sadece düzgün Jordan eğrisi olduğunda $\forall\varepsilon > 0$ ve n'den bağımsız belirli bir $c = c(\varepsilon)$ sabiti için

$$\|\varphi - \pi_n\|_{\overline{G}} \leq \frac{c}{n^{1/2-\varepsilon}} \tag{3.2}$$

olduğunu göstermiştir. (Mergelyan (3.2) bağıntısındaki $\frac{1}{2}$-ε sayısı yerine 1-ε sayısının da alınabileceğini ifade etmiştir.)

Bieberbach polinomlarının yaklaşımı ile ilgili çalışmalar Keldych ve Mergelyan'dan sonra Wu Xue-Mou ile devam etmiştir. Onun bu konudaki çalışması aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

L eğrisi $z = z(s)$ $(0 \leq s \leq l)$ gösterimine sahip düzgün bir eğri olsun. Burada *s*, *L*'nin yay uzunluğu ve *l*, *L*'nin uzunluğudur. *L* eğrisine teğet doğru ile pozitif reel eksen arasındaki açı $\theta(s)$ olsun. *L*, düzgün eğri olduğundan, $\theta(s)$ 0<s<*l* üzerinde süreklidir.

3.1.2 Teorem: *L düzgün Jordan eğrisi ve $\theta^p(s) \in Lip(\alpha)$ ise n'den bağımsız bir c sabiti için 0< $\alpha < 1$ olduğunda*

$$\|\varphi(z) - \pi_n(z)\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{1}{n}\right)^{p+\frac{1}{2}+\alpha} \log n \tag{3.3}$$

ve $\alpha = 1$ olduğunda

$$\| \varphi(z) - \pi_n(z) \|_{\overline{G}} \le c\left(\frac{1}{n}\right)^{p+\frac{3}{2}} (\log n)^2 \tag{3.4}$$

olur. (Burada p negatif olmayan bir tamsayıdır.)

L sınırlı eğrilikli bir eğri ise $\theta'(s)$ sınırlıdır. Böylece $\theta(s)$ $0 \le s \le l$ üzerinde 1. dereceden Lipschitz koşulunu sağlar. Sonuç olarak teoremin ikinci eşitsizliğinde $p=0$ yazılırsa

$$\| \varphi(z) - \pi_n(z) \|_{\overline{G}} \le c\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} (\log n)^2 \tag{3.5}$$

olur. Buradan görülür ki (3.5) eşitsizliğinin sağlamış olduğu hız (3.1) eşitsizliğinin sağlamış olduğu hızdan daha yüksektir. Böylece Wu Xue-Mou tarafından elde edilen sonucun Keldych'in elde ettiği sonuçtan daha iyi olduğu görülür.

C, G bölgesinin sınırı olsun. Eğer C, sonlu uzunluklu, $z = z(s)$ gösterimine sahip ve p ninci türevi $Lip\,\alpha$ $(p = 1,2,\ldots\ 0 < \alpha \le 1)$ sınıfından ise bunu $C \in C(p,\alpha)$ şeklinde yazacağız. Bu tip değişik geometrik özelliklere sahip eğrilerle sınırlı bölgelerde, Bieberbach polinomlarının yaklaşım hızlarının değerlendirilmeleri, Suetin (1974) tarafından araştırılmış ve bulunan sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.1.3 Teorem: *π_n Bieberbach polinomları,*

a-) $C \in C(p,\alpha)$ *ve* $p + \alpha \ge \frac{7}{4}$ *ise*

$$\| \varphi(z) - \pi_n(z) \|_{\overline{G}} \le c\frac{\log n}{n^{p+\alpha}} \tag{3.6}$$

b-) $C \in C(1,\alpha)$ *ve* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ *ise*

$$\| \varphi(z) - \pi_n(z) \|_{\overline{G}} \le \frac{c}{n^{3\alpha - 1/2}} \tag{3.7}$$

c-) $C \in C(1,\alpha)$ *ve* $\alpha > 0$ *ise*

$$\| \varphi(z) - \pi_n(z) \|_{\overline{G}} \le \frac{c(\log n)^{1/2}}{n^{\alpha+1/2}} \tag{3.8}$$

d-) C sınırı düzgün ve sınırlı eğrilikli ise

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \leq \frac{c(\log n)^2}{n^2} \qquad (3.9)$$

bağıntılarını sağlarlar.

$C \in C(p,\alpha)$ olduğunda $\varphi(z)$ fonksiyonu $\overline{G}$ de p ninci kez sürekli diferansiyellenebilir ve $\varphi'(z) \in Lip\alpha$ olur. Buna göre $p+\alpha \geq \frac{7}{4}$ olduğunda (3.6) eşitsizliğinin sağladığı hız (3.3) dekinden daha yüksektir. Gerçekten $\theta^p(s) \in Lip\alpha$ ise $\varphi(z)$ fonksiyonu $\overline{G}$ de $p+1$. kez sürekli diferansiyellenebilir ve $\varphi^{p+1}(z) \in Lip\alpha$ olur [38]. G bölgesinin parçalı düzgün sınırlı olması durumunda Bieberbach polinomlarının yaklaşım hızının değerlendirildiği ilk çalışmanın Simonenko tarafından yapıldığı bilinir. Simonenko çalışmasında G bölgesini Lipschitz bölgesi olarak alır (bölge bir poligon da olabilir) ve bu özellikteki bir bölge de bütün n doğal sayıları için

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \leq cn^{-\gamma} \qquad (3.10)$$

eşitsizliğini sağlayan $c>0$ $\gamma>0$ sabitlerinin olduğunu gösterir.

Birinci bölümde kvazikonform eğrilerden bahsedilmişti. Şüphesiz kvazikonform eğriler sınıfı Lipschitz eğrilerini de içine alan oldukça geniş bir eğri sınıfıdır. G bölgesinin kvazikonform sınırlı bir bölge olması durumunda V.V.Andrievski, Bieberbach polinomlarının yaklaşım hızını değerlendirmiş, böylece Simonenko'nun yukarıda verilen çalışmasını kvazikonform eğrilere genişletmiştir. Andrievski'nin bu önemli çalışması aşağıdaki teorem ile ifade edilmektedir.

3.1.4 Teorem: *G bölgesi kvazikonform sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda n'den bağımsız $\gamma>0$ ve $c>0$ sabitleri için*

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \leq cn^{-\gamma} \qquad (3.11)$$

olur.

Simonenko ve Andrievski'nin yukarıda verilen çalışmaları Gaier (1988) tarafından sırasıyla 3.1.5 teorem ve 3.1.6 teoremde verilen sonuçlarla geliştirilmiştir.

3.1.5 Teorem: *G bölgesi, L sınırı parçalı düzgün Jordan eğrisi olan bir bölge ve $\lambda\pi(0<\lambda<2)$, L'nin keyfi iki düzgün yayının oluşturduğu en küçük dış açı olsun. Bu durumda $0\in G$ ye göre π_n Bieberbach polinomları*

$$\gamma<\min\left(\frac{\lambda}{2-\lambda},\frac{1}{2}\right)$$

özelliğindeki γ sayısı için

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}}\leq cn^{-\gamma} \qquad (n=1,\,2,\,...) \tag{3.12}$$

bağıntısını sağlarlar.

Özel halde dış açılar$\geq\frac{2\pi}{3}$ ise $\frac{\lambda}{2-\lambda}\geq\frac{1}{2}$ olduğundan (3.12) eşitsizliği $\gamma<\frac{1}{2}$ için sağlanır. Bu ise Mergelyan'ın, düzgün sınırlı eğriler için (3.2) bağıntısı ile verilen sonucunu genişletir.

ψ, $\{w:|w|>1\}$ bölgesini L eğrisinin dışına konform olarak resmeden ve

$$\psi(\infty)=\infty, \qquad \psi'(\infty)>0$$

koşullarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bilindiği gibi $1\leq|w_1|,\ |w_2|\leq 2$ ve belirli bir c sabiti için

$$|\psi(w_1)-\psi(w_2)|\leq c|w_1-w_2|^{\beta}$$

ise $\psi\in Lip\beta$ $(0<\beta\leq 1)$ dir. Aynı şekilde $z_1,z_2\in\overline{G}$ ve belirli bir c sabiti için

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|\leq c|z_1-z_2|^{\alpha}$$

ise $\varphi\in Lip\alpha$ $(0<\alpha\leq 1)$ dir.

Eğer L eğrisi kvazikonform eğri, $\varphi\in Lip\alpha$ ve $\psi\in Lip\beta$ ise bunu $L\in K(\alpha,\beta)$ olarak göstereceğiz.

3.1.6 Teorem: *G, L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $L\in K(\alpha,\beta)$ $(0<\alpha,\beta\leq 1)$ ise, (G,0) çiftine göre π_n Bieberbach polinomları, $\gamma<\frac{\alpha\beta}{2}$ biçiminde bir γ sayısı için (3.12) bağıntısını sağlarlar.*

L, düzgün eğri ise $0<\alpha,\beta<1$ şeklinde her α,β için $L\in K(\alpha,\beta)$ olduğundan (3.12) bağıntısı herhangi bir $\gamma<\frac{1}{2}$ için sağlanır ki bu Mergelyan'ın (3.2) ile gösterilen sonucunu verir.

Şimdi Gaier'in, bölgenin sınırının parçalı analitik Jordan eğrisi olması durumunda elde ettiği sonuçlarını inceleyelim.

3.1.7 Teorem: *G bölgesi, dış sivri açıları olmayan, parçalı analitik bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve* $\lambda\pi(0<\lambda<2)$ *L'nin iki analitik yayının oluşturduğu en küçük dış açı olsun. Bu durumda* $\gamma=\frac{\lambda}{2-\lambda}$ *olduğunda (G,0) çiftine göre* π_n *Bieberbach polinomları için*

$$\|\varphi-\pi_n\|_{C(\bar{G})}=O(\log n)\frac{1}{n^{\gamma}} \tag{3.13}$$

olur.

$\gamma>\frac{\lambda}{2-\lambda}$ olduğunda (3.13) bağıntısının sağlanmadığı [17]' de gösterilmiştir. Yukarıdaki teoremin ispatı Warschawski'nin bir teoreminden yararlanarak üç adımda yapılmıştır.

z_j'ler sınırın köşeleri, $P(z):=\prod(z-z_j)$ ve $g=\varphi' P$ olduğunda

1-) Uygun bir g için $\|g-P_n\|_{C(\bar{G})}$ normuyla, Q_n derecesi n'yi aşmayan belirli bir polinom olduğunda $\|\varphi'-Q_n\|_{L^2(G)}$ normunun değerlendirilmesi

2-) $\|g-P_n\|_{C(\bar{G})}$ normunun değerlendirilmesi

3-) $\|\varphi-\pi_n\|_{L^2(G)}$ normunun değerlendirilmesi.

Şimdi V.V. Andrievski ve D.Gaier'in birlikte yaptıkları bir çalışmayı incelemeden önce bazı tanımlar vereceğiz.

3.1.8 Tanım: *Bir L Jordan yayı, birim diskin, belirli bir kvazidiske* φ *konform dönüşümü altında,* $[-1,+1]$ *aralığının görüntüsü ise L Jordan yayına kvazianalitik denir.* Kvazianalitik bir yay kvazidüzgündür. Yani $\forall z_1,z_2\in L$ için $\gamma(z_1,z_2)$, z_1 ve z_2 arasındaki yay olduğunda belirli bir c sabiti için

$$|\gamma(z_1,z_2)| \le c|z_1-z_2|$$

koşulunu sağlar.

3.1.9 Tanım: *Bir L Jordan eğrisi verildiğinde*

1-) L, bir kvazikonform eğri,

2-) L, sonlu sayıda kvazianalitik yaydan oluşur

koşulları sağlanıyorsa L eğrisine parçalı kvazianalitik eğri denir.

L'nin iki kvazianalitik yaylarının kesiştiği noktalar $z_j = (j=1,2,...m)$ ile gösterilsin. z_j'de φ fonksiyonunun sürekliliği

$$\omega_j(\delta) := \sup\left\{ |\varphi(z)-\varphi(z_j)| : \ |z-z_j| \le \delta, z \in \overline{G} \right\}$$

fonksiyonuyla ölçülür.

ϕ, L'nin dışından $\Delta = [\tau : |\tau| > 1]$ bölgesine

$$\phi(\infty) = \infty, \quad \phi'(\infty) > 0$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm ve ψ, ϕ 'nin tersi olsun.

$\phi(z_j) = \tau_j$ 'de ψ dönüşümünün sürekliliği

$$\eta_j(\delta) := \sup\left\{ |\psi(\tau)-\psi(\tau_j)| : \ |\tau-\tau_j| \le \delta, \tau \in \overline{\Delta} \right\}$$

fonksiyonuyla ölçülür.

G bölgesinin parçalı kvazianalitik Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge olması durumunda Bieberbach polinomlarının yakınsaklığının incelendiği aşağıdaki teoremler, V.V.Andrievski ve D.Gaier'in [7] deki çalışmalarından alınmıştır.

3.1.10 Teorem. *G bölgesi parçalı kvazianalitik Jordan eğrisiyle sınırlı ise Bieberbach polinomları için*

$$\|\varphi-\pi_n\|_{C(\overline{G})} \le const \max_j \omega_j\left[\mu_j\left(\frac{1}{\eta}\right)\right].\sqrt{\log n} \qquad (n=2,3,...) \qquad (3.14)$$

olur.

Yukarıda bulunan sonuç ile Gaier'in [18]'de bulduğu sonuç arasındaki bağlantıyı görebilmek için;

L, parçalı analitik ve z_j $(0 < \lambda_j < 2)$ köşelerinde $\lambda_j \pi$ dış açısına sahip olan bir eğri olsun. Bu durumda pozitif c_1 ve c_2 sabitleri için,

$$\omega_j(\delta) \leq c_1 \delta^{1/(2-\lambda_j)} \qquad \text{ve} \qquad \mu_j(\delta) \leq c_2 \delta^{\lambda_j}$$

olur ve (3.14) bağıntısından

$$\|\varphi - \pi_n\|_{C(\overline{G})} \leq const.\, n^{-\gamma}.\sqrt{\log n}\ , \qquad \gamma = \min \frac{\lambda_j}{2-\lambda_j}$$

bulunur. Burada $\sqrt{\log n}$ yerine Gaier'in [18]'de verilen sonuçtaki *logn* çarpanı gelmiştir.

Gaier'in, G bölgesi sivri açısı olmayan, parçalı analitik sınırlı bir bölge ve $\lambda\pi(0 < \lambda < 2)$ sınırın analitik yaylarının oluşturduğu en küçük dış açı olduğunda bulduğu sonuçlar daha önce verilmişti. Şimdi Gaier'in sınırın köşelerinde π / N $(N = 1,2,...)$ biçiminde iç açılar olması durumunda, Bieberbach polinomlarının G bölgesini birim diske dönüştüren φ_0 konform dönüşümüne yaklaşımlarıyla ilgili sonuçları inceleyelim. Burada G bölgesinin sınırı yine parçalı analitik olduğu ve dış sivri açısının olmadığı kabul edilir. Sınırın ζ_j ile gösterilen köşelerinde iç açılar $\alpha_j\pi\ (0 < \alpha_j < 2)$, dış açılar ise $\lambda_j\pi$ ile gösterilsin. Buradan görülür ki $\alpha_j + \lambda_j = 2$ dir.

Gaier daha önceki çalışmalarında bölgenin sınırı π / N $(N = 1,2,...)$ biçiminde $\alpha_j\pi$ iç açılarına sahip olmadıkça $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ üssünün artırılamayacağını göstermişti. Gaier'in aşağıda verilen çalışmasında ise özel halde, $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ üssünün artırılabileceği gösterilmiştir.

Belirli N_j doğal sayıları için $\alpha_j = \frac{1}{N_j}$ olduğunda, ζ_j köşelerine sınırın özel köşeleri, diğer durumlarda ise normal köşeleri diyelim.

$$\gamma_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{2-\lambda_j} & \text{eğer } \zeta_j \text{ normal köşe ise} \\[2ex] \dfrac{2\lambda_j}{2-\lambda_j} & \text{eğer } \zeta_j \text{ özel köşe ise} \end{cases}$$

olsun. Burada $\lambda_j = 2 - \alpha_j$ dir.

Bulunan sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

3.1.11 Teorem. *G bölgesi parçalı analitik sınırlı, sivri açısı olmayan ve köşelerinde $\alpha_j \pi$ dış açılarına sahip olan bir bölge olsun. Bu durumda $\gamma = \min \gamma_j$ için*

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O(n^{-\gamma}) \qquad (n \to \infty) \tag{3.15}$$

eşitliği vardır.

Örneğin; G bölgesinin sınırı, dik açılarda kesişen dört analitik yaydan oluşsun. Burada $\alpha_j = \frac{1}{2}, \lambda_j = \frac{3}{2}$ ve bütün köşeler özel köşelerdir. $\gamma_j = 6$ olduğundan yukarıdaki teorem gereği

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O(n^{-6}) \qquad (n \to \infty)$$

olur.

Bazı bölgeler için yakınsaklık derecesi daha da iyileştirilebilir. Örneğin G bir kareyse, $\varphi_0, \overline{G}$ de regüler olacaktır ve q<1 için [16,s.35] gereği $\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O(q^n)$ $(n \to \infty)$ olur. Bununla birlikte yukarıdaki teoremde verilen γ üssü artırılamaz.

3.1.12 Teorem. *Bölgenin sınırı 3.1.13 teoreminde ifade edilen biçimdeyse $\gamma = \min \gamma_j$ olduğunda*

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O(\log n)(n^{-\gamma}) \qquad (n \to \infty) \tag{3.16}$$

bağıntısı sağlanır.

Burada da γ üssü genelde artırılamaz.

Köşelerin π / N $(N = 1,2,...)$ biçiminde iç açılara sahip olması durumunda (3.15) ve (3.16) bağıntılarındaki yakınsama hızı (3.12) ve (3.13) bağıntılarındaki yakınsama hızından daha yüksektir.

Bilindiği gibi, kvazikonform eğrilerde sıfır açı bulunmaz. Andrievski'nin, kvazikonform eğrilerde Bieberbach polinomlarının yaklaşımı ile ilgili çalışması daha önce verilmişti. Andrievski sıfır açısı olan bölgeler üzerinde de çalışmış ve bu özellikteki bölgelerde Bieberbach polinomlarının yaklaşımı üzerine ilk sonuçları vermiştir [6]. Pritsker ise onun yöntemini kullanarak, benzeri sonuçları iç sıfır açılı bölgeler için ispatlamıştır [33]. Daha sonra Andrievski ve Pritsker birlikte [9]'da yaptıkları çalışmada, iç sıfır açılı belirli bölgelerde bazı sonuçlar elde etmişler ve bir iç sıfır açıda Bieberbach polinomlarının ıraksadığı Keldysh-tipi bölge örneği vermişlerdir. Bu çalışmada iç sıfır açıyı oluşturan yayların dokunma dereceleri incelenir ve bu dereceye göre Bieberbach polinomlarının yakınsak veya ıraksaklığı araştırılır.

G, parçalı kvazianalitik L eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun ve eğrinin kvazianalitik yayları $z_j \in L, \mathrm{j}=1,\dots,\mathrm{m}$ noktalarında birleşsin. Eğer, z_j noktasının yerel koordinat sistemindeki bir komşuluğu için,

$$(x,y)\in L_j \Rightarrow c_1 x^P \le y \le c_2 x^p$$

ve

$$(x,y)\in L_{j+1} \Rightarrow -c_2 x^p \le y \le -c_1 x^P$$

oluyorsa $L_j \subset L$ ve $L_{j+1} \subset L$ kvazianalitik yayları x^p-tipi iç sıfır açı oluştururlar. Burada $P \ge p > 1$ ve $c_1, c_2 > 0$ dır. Verilen notasyonlar dikkate alındığında Bieberbach polinomlarının yakınsaması üzerine sonuçlar aşağıdaki teoremlerde ifade edilir.

3.1.13 Teorem. *G bölgesinin sınırı, $\{z_j\}$ noktalarında x^p-tipi iç sıfır açılara sahip olan parçalı kvazianalitik bir eğri ise*

$$\|\varphi - \pi_n\|_{C(\overline{G})} \le C q^{n^r}, \qquad n \in N$$

olacak şekilde $q = q(G), r = r(G), 0 < q, r < 1$ ve $C = C(G)$ sayıları vardır.

Yukarıdaki teoremde $r=1$ olamaz. Çünkü $r=1$ olursa $q<1$ olacağından [16,s.27] gereği $\varphi, \overline{G}$ de analitik olacaktır.

3.1.14 Teorem. *Parçalı düzgün eğri ile sınırlı ve sınırdaki sivri açıda Bieberbach polinomlarının ıraksadığı bir bölge vardır ve bu bölgenin sınırı sivri noktanın belirli bir komşuluğu dışında analitiktir.*

3.2 Kvazikonform Sınırlı Bölgelerde Bieberbach Polinomlarının Yaklaşım Özellikleri

$G \subset \mathbf{C}$, L Jordan eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bir bölge olsun. Riemann Konform Dönüşüm Teoremine göre G bölgesinin $\{w : |w| < r_0\}$ diskine

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) = 1$$

koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır. Diskin r_0 yarıçapına, G'nin z_0'a göre konform yarıçapı denir.

$z = \psi(w)$, $\varphi(z)$ dönüşümünün tersi olsun ve G'de verilen bir f fonksiyonu ve $p>0$ için,

$$\|f\|_{\overline{G}} := \sup\left\{|f(z)|,\ z \in \overline{G}\right\},$$

$$\|f\|_{L_p(G)}^p := \iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z\,, \tag{3.17}$$

$$\|f\|_{L_p^1(G)}^p := \iint_G |f'(z)|^p \, d\sigma_z\,,$$

olsun.

Bilindiği gibi $\varphi_p(z) := \int_{z_0}^{z} [\varphi'(\zeta)]^{2/p} \, d\zeta \quad (z \in G)$ fonksiyonu $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan ve G'de analitik fonksiyonların sınıfında $\|f\|_{L_p^1(G)}^p \ (p > 0)$ integralini minimize eder [34].

π_n, $p_n(z_0) = 0, p_n'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan ve derecesi $\leq n$ olan p_n polinomlarının sınıfı olsun. π_n'de $\|\varphi_p - p_n\|_{L_p^1(G)}^p$ integralini minumum yapan bir $\pi_{n,p}(z)$ polinomu vardır [12]. Bu $\pi_{n,p}(z)$ extremal polinomlarına (G, z_0) çifti için genelleştirilmiş Bieberbach polinomları denir. Özel halde $p=2$ için bu polinomlar bilinen Bieberbach polinomlarıdır. Eğer G Carathédory bölgesi ise G, polinom yaklaşımı özelliğine sahiptir. Diğer bir değişle $n \to \infty$ olduğunda $\|\varphi_p - P_n\|_{L_p^1(G)} \to 0$ olacak şekilde en az bir $\{P_n\}$ polinom dizisi vardır. Buradan

Bieberbach polinomlarının extremal özelliği gereği $\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \to 0$ yazmak münkündür. 2.1.2 lemma kullanılarak $\forall B \subset G$ için

$$\left|\varphi'_p - \pi'_{n,p}\right| \le \frac{\left\|\varphi'_p - \pi'_{n,p}\right\|_{L_p(G)}}{\left(\pi d^2\right)^{1/p}} \qquad d{=}dist\left(B, \partial G\right) \tag{3.18}$$

yazılabileceğinden G'nin kompakt altkümelerinde düzgün olarak $\pi'_{n,p}(z) \to \varphi'_p(z)$ olur. Buradan da Weierstrass teoremi sonucu B'nin kompakt altkümelerinde

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{n,p}(z) = \varphi_p(z)$$

eşitliği sağlanır.

G$\subset$**C**, K-kvazikonform sınırlı bir bölge, $D := \{w : |w| < 1\}$ ve $\varphi_1(z), C\overline{G} := \overline{C} \setminus \overline{G}$ den $C\overline{D} := \overline{C} \setminus \overline{D}$ ye

$$\varphi_1(\infty) = \infty, \quad \varphi'_1(\infty) > 0$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm olsun. φ ve φ_1 dönüşümleri, G'den sırasıyla $C\overline{G}$ ye ve $\overline{\mathrm{C}}$ ye K^2 kvazikonform genişlemeye sahiptirler. ψ ve ψ_1, sırasıyla φ ve φ_1 dönüşümlerinin tersleri olsun.

G bölgesinde analitik olan bir fonksiyon aynı zamanda G'de sürekli olduğundan onun kompakt altkümelerinde düzgün süreklidir. Böylece yukarıda tanımlamış olduğumuz $\varphi_p(z)$ fonksiyonu da G'de sürekli, G'nin kompakt altkümelerinde ise düzgün sürekli olur. φ_p nin $\overline{G}$ ye sürekli genişletilebilenliğini söyleyebilmemiz için onun G'de düzgün sürekli olduğunun gösterilmesi gerekir.

3.2.1 Lemma. *G, K-kvazikonform sınırlı bir bölge ve p>1 ise* φ_p *G'de düzgün süreklidir.*

İspat. z ve ζ G'de keyfi iki nokta, w:=$\varphi(z)$, $\tau := \varphi(\zeta)$

$\left(|z-\zeta|, \ dist(z, L), dist(\zeta, L)\right.$ yeterince küçük ve $|\mathrm{w}| \le |\tau|$, $\left.\arg \mathrm{w} \le \arg \tau\right)$ olsun.

Bu taktirde

$$\left|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)\right| = \left|\int_{z_0}^{z}[\varphi'(\zeta)]^{2/p}d\zeta - \int_{z_0}^{\zeta}[\varphi'(\zeta)]^{2/p}d\zeta\right|$$

$$= \left|\int_{s(z,\zeta)}[\varphi'(\xi)]^{2/p}d\xi\right|$$

$$= \left|\int_{s(w,\tau)}[\psi'(t)]^{1-\frac{2}{p}}dt\right|$$

olur. Burada $s(z,\zeta)$, G'de z ve ζ yı birleştiren herhangi bir sonlu uzunluklu Jordan yayı ve $s(w,\tau):=\varphi(s(z,\zeta))$ dir. Analitik fonksiyonun integrali yoldan bağımsız olduğundan sonuncu integralin değerlendirilmesi için

$$s_1 := \{t : \arg t = \arg w; |w| \ge |t| \ge |w| - |w-\tau|\},$$
$$s_2 := \{t : \arg w \le \arg t \le \arg \tau; |t| = |w| - |w-\tau|\},$$
$$s_3 := \{t : \arg t = \arg \tau; |w| - |w-\tau| \le |t| \le |\tau|\}$$

$$s(w,\tau) := s_1 \cup s_2 \cup s_3, \quad s(z,\zeta) := \psi(s(w,\tau))$$

olsun.

$$c_1 \frac{dist(\xi,L)}{r_0 - |t|} \le |\psi'(t)| \le c_2 \frac{dist(\xi,L)}{r_0 - |t|}$$

[32, s.22] bağıntısı kullanılarak $t \in s(w,t)$ için

$$\left|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)\right| \le c_3 \int_{s(w,\tau)}\left[\frac{dist(\xi,L)}{r_0-|t|}\right]^{1-2/p}|dt| \tag{3.19}$$

elde ederiz.

Diğer yandan $\varphi(z)$, $\overline{G}$de düzgün olarak $\frac{1}{K^2}$ dereceli Hölder koşulunu sağladığından $\xi_L := \psi[r_0\varphi(\xi)/|\varphi(\xi)|]$ için

$$\left|\psi(t)-\psi\left(\frac{r_0 t}{|t|}\right)\right| = |\xi - \xi_L| \le c_4 \left|t - \frac{r_0 t}{|t|}\right|^{1/K^2} = c_4\left(r_0 - |t|\right)^{1/K^2}$$

bulunur.

Eğer $p \ge 2$ ise $1 - \frac{2}{p} \ge 0$ dır ve $dist(\xi,L) \le |\xi - \xi_L|$ olduğu dikkate alınırsa sonuncu eşitlik ve (3.19) eşitliğinden

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_5 \int_{s(w,\tau)} \left[\frac{(r_0-|t|)^{1/K^2}}{r_0-|t|}\right]^{1-\frac{2}{p}} |dt|$$

$$= c_5 \int_{s(w,\tau)} \frac{|dt|}{(r_0-|t|)^{\alpha_1}}$$

$$\le c_6 |w-\tau|^{1-\alpha_1}$$

$$= c_6 |\varphi(z)-\varphi(\zeta)|^{1-\alpha_1}$$

elde edilir. Burada $\alpha_1 = (1-K^{-2})\left(1-\dfrac{2}{p}\right) < 1$ dir. $\varphi(z)$ fonksiyonu $\dfrac{1}{K^2}$ dereceden Hölder koşulunu sağladığından sonuç olarak

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_7 |z-\zeta|^{\frac{1-\alpha_1}{K^2}}$$

bulunur.

Eğer $1 < p < 2$ ise $1-\dfrac{2}{p} > 0$ dır.

$$dist(\xi, L) \ge c(r_0-|t|)^2$$

olduğundan ve (3.19) eşitsizliğinden

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_8 \int_{s(w,\tau)} (r_0-|t|)^{1-\frac{2}{p}} |dt| \le c_6 |w-\tau|^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

bulunur. Buradan da Hölder eşitsizliği gereği

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_7 |z-\zeta|^{\frac{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}{K^2}} \tag{3.20}$$

elde edilir. Böylece φ_p fonksiyonunun G' de düzgün sürekli olduğu görülür.

3.2.2 Sonuç. *G, K-kvazikonform sınırlı sonlu bir bölge ve p>1 olsun. Bu durumda*

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{2K^2+p-2}{pK^4}, & p \ge 2 \\ \dfrac{2(p-1)}{pK^2}, & 1 < p < 2. \end{cases}$$

için $\overline{G}$ *de* $\varphi_p \in Lip\alpha$ *olur.*

y, L eğrisine göre kvazikonform bir yansıma olsun. Bu yansıma, L'nin bir komşuluğunda, L'deki noktalar hariç hemen her yerde

$$|J_y(z)| := |y_{\bar{z}}(z)|^2 - |y_z(z)|^2 \leq c \tag{3.21}$$

koşulunu sağlayan sürekli kısmi türevlere sahiptir.

$$\widetilde{\varphi}_p(z) := \begin{cases} \varphi_p(z), & z \in \overline{G} \\ \varphi_p(y(z)), & z \in C\overline{G}. \end{cases}$$

$\varphi_p(z)$'nin tüm düzleme genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z) := \frac{\partial \widetilde{\varphi}_p(z)}{\partial \bar{z}} = \begin{cases} 0, & z \in \overline{G} \\ (\varphi'_{p,y} o y)(z).(y_{\bar{z}}(z)), & z \in C\overline{G}. \end{cases} \tag{3.22}$$

olur.

$u \in (0,1)$ için

$$L_u := \{z : |\varphi_1(z)| = 1 + u\}, \quad \Omega_u := (\operatorname{int} L_u) \backslash \overline{G}$$

olsun.

3.2.3 Lemma. *L, K-kvazikonform bir eğri ve $u \in (0,1)$ olsun. Bu durumda $\forall p > 1$ ve $\forall \gamma \in \left(0, \frac{1}{pK^2}\right)$ için*

$$\left\| \widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z) \right\|_{L_p(\Omega_u)} \leq c u^{\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.22) bağıntısından

$$\left\| \widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z) \right\|_{L_p(\Omega_u)} = \left(\iint_{\Omega_u} |(\varphi'_{p,y} o\, y)(z).\, y_{\bar{z}}(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{1/p}$$

olduğu görülür ve $\varphi'_p(z) = [\varphi'(z)]^{2/p}$ eşitliği gereği

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z) \right\|_{L_p(\Omega_u)} &= \left(\iint_{\Omega_u} |(\varphi' o\, y)(z)|^2 \, |y_{\bar{z}}(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{1/p} \\ &\leq c_8 \left(\iint_{\Omega_u} |\varphi' o\, y(z)|^2 \, d\sigma_z \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\le c_9\left[mes\left(\varphi\left(y\left(\Omega_u\right)\right)\right)\right]^{1/p}$$

$$\le c_9\left[mes\left(\varphi o y o \psi_1\right) o \varphi_1\left(\Omega_u\right)\right]^{1/p}$$

$$= c_9\left(\iint_{\varphi_1(\Omega_u)}\left|J_{\varphi o y o \psi_1}(w)\right| d\sigma_w\right)^{1/p}$$

$$\le c_{10}\left(\iint_{\varphi_1(\Omega_u)} J_{\varphi o \psi_1}(w)\, d\sigma_w\right)^{1/p}$$

$$\le c_{10}\left[mes\left(\left(\varphi o \psi_1\right) o \varphi_1\left(\Omega_u\right)\right)\right]^{1/p}.$$

bulunur. $\varphi o \psi_1$, L'nin belirli bir komşuluğunda K^2-kvazikonform dönüşüm olduğundan Goldstein teoremi gereği $\forall \gamma_0 \in \left(0, \frac{1}{K^2}\right)$ için

$$mes\left(\left(\varphi o \psi_1\right) o \varphi_1\left(\Omega_u\right)\right) \le c_{11}\left[mes\left(\varphi_1\left(\Omega_u\right)\right)\right]^{\gamma_0} \le c_{12} u^{\gamma_0}$$

elde edilir. $\gamma := \gamma_0 / p$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

3.2.4 Lemma. *G, K-kvazikonform sınırlı, sonlu bir bölge ve p>1 ise* $\forall \gamma_0 \in \left(0, \frac{1}{pK^2}\right)$ *için*

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \le c n^{-\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. φ fonksiyonu G'de konform olduğundan bu bölgede her kerteden türevleri analitiktir. Özel halde $\varphi_p'(z)$ türevi de G'de analitiktir. Ayrıca $\varphi_p'(z)$ G'de Lebesgue toplanabilirdir. Bu durumda

$$\varphi_p'(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{G}} \frac{\widetilde{\varphi}_{p,\overline{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta, \quad z \in G \tag{3.23}$$

integral gösterimi yazılabilir.

Keyfi bir $n \in N$ ve 1'e yeterince yakın 0< γ <1 için

$$u := n^{-\gamma}, \quad B_u := \left\{z : z \in C\overline{G}, \left|\varphi_1(z)\right| > 1 + u\right\},$$

$$J_1(z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_u} \frac{\widetilde{\varphi}_{p,\overline{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta, \quad J_2(z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{B_u} \frac{\widetilde{\varphi}_{p,\overline{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta \tag{3.24}$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_p'(z)=J_1(z)+J_2(z), \qquad z\in G \tag{3.25}$$

olur. $J_2(z)$ toplananı $\mathbf{C}\setminus\overline{B_u}$ bölgesinde analitik olduğundan $z\in\overline{G}$ için

$$|J_2(z)-q_{n-1}(z)|\le\frac{c_{13}}{n} \tag{3.26}$$

eşitsizliğini sağlayan *n-1.* dereceden bir $q_{n-1}(z)$ polinomu vardır.

$$p_n(z):=\int_{z_0}^{z}q_{n-1}(\zeta)d\zeta \tag{3.27}$$

olsun. (3.25) ve (3.27) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_p'-p_n'\right\|_{L_p(G)}&=\left\|J_1(z)+J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}\\&\le\left\|J_1(z)\right\|_{L_p(G)}+\left\|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}=\left(\iint_G|J_2(z)-q_{n-1}(z)|^p\,d\sigma_z\right)^{1/p}$$

olduğuna göre (3.26) eşitsizliğinden

$$\left\|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}\le\frac{c_{14}}{n}$$

bulunur.

$$\left\|\varphi_p-p_n\right\|_{L_p^1(G)}:=\left\|\varphi_p'-p_n'\right\|_{L_p(G)}$$

olduğu dikkate alındığında

$$\left\|\varphi_p-p_n\right\|_{L_p^1(G)}\le\left\|J_1(z)\right\|_{L_p(G)}+\frac{c_{14}}{n} \tag{3.28}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan $L_p,(p>1)$ uzaylarında Hilbert dönüşümünün sınırlılığı ile ilgili Calderon-Zygmund eşitsizliği ve 3.2.3 Lemma'dan $\forall\gamma\in\left(0,\frac{1}{pK^2}\right)$ için

$$\left\|J_1\right\|_{L_p(G)}\le c_{15}\left\|\widetilde{\varphi}_{p,\bar{\zeta}}\right\|_{L_p(\Omega_u)}\le c_{16}u^{\gamma} \tag{3.29}$$

sonucuna varılır.

$$\hat{p}_n(z):=p_n(z)+\left[1-p_n'(z_0)(z-z_0)\right] \tag{3.30}$$

olsun. Görüldüğü gibi

$$\hat{p}_n(z_0)=0, \qquad \hat{p}_n'(z_0)=1$$

olur. (3.28), (3.29) ve (3.30) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_p-\hat{p}_n\right\|_{L_p^1(G)}&=\left\|\varphi_p-p_n-\left[1-p_n'(z_0)\right](z-z_0)\right\|_{L_p^1(G)}\\&\le\left\|\varphi_p-p_n\right\|_{L_p^1(G)}+\left\|\left[1-p_n'(z_0)\right](z-z_0)\right\|_{L_p^1(G)}\\&\le\frac{c_{14}}{n}+c_{16}u^{\gamma}+\left\|\left[1-p_n'(z_0)\right](z-z_0)\right\|_{L_p^1(G)}\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.25), (3.26) ve (3.29)'dan ise

$$\begin{aligned}\left\|\left[1-p_n'(z_0)\right](z-z_0)\right\|_{L_p^1(G)}&=\left\|1-p_n'(z_0)\right\|_{L_p(G)}\\&\le\left\|J_1(z_0)\right\|_{L_p(G)}+\left\|J_2(z_0)-p_n'(z_0)\right\|_{L_p(G)}\\&\le c_{17}u^{\gamma}+\frac{c_{18}}{n}\end{aligned} \tag{3.32}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.31) ve (3.32) eşitsizlikleri gereği

$$\left\|\varphi_p-\hat{p}_n\right\|_{L^1(G)}\le\frac{c_{14}}{n}+c_{16}u^{\gamma}+c_{17}u^{\gamma}+\frac{c_{18}}{n}$$

olur. Sonuç olarak $u:=n^{\gamma}$ ve γ, 1'e yeterince yakın alınırsa $\forall\gamma\in\left(0,\frac{1}{pK^2}\right)$ için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)}\le\left\|\varphi_p-\hat{p}_n\right\|_{L_p^1(G)}\le c_{19}u^{-\gamma}$$

olduğu görülür.

U, $\overline{G}\subset U$ olacak şekilde yeterince büyük yarıçaplı bir disk, $W_p^1(U)$ $(p>1)$ ise U'da tanımlı, U'da genelleşmiş birinci mertebeden türevleri p integrallenebilir fonksiyonların sınıfı ve $f\in W_p^1(U)$ için

$$\|f\|_{W_p^1(U)}=\left[\iint_U\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma\right]^{\frac{1}{p}},\qquad \zeta=x+iy \tag{3.33}$$

olsun.

Derecesi en fazla n olan her p_n polinomunun U'ya genişlemesi,

$$\hat{p}_n(z) := \begin{cases} p_n(z), & z \in \overline{G} \\ p_n(y(z)), & z \in U/\overline{G} \end{cases} \tag{3.34}$$

şeklinde tanımlansın. $\hat{p}_n(z)$ genişlemesinin yukarıdaki tanımı gereği

$$\|\tilde{p}_n\|_{\overline{U}} = \|\tilde{p}_n\|_{\overline{G}}$$

ve y'nin diferansiyellenebilirlik özelliği ile (3.21) eşitsizliği gereği

$$\|p_n\|_{W_p^1(G)} \leq \|\tilde{p}_n\|_{W_p^1(U)} \leq c\|p_n\|_{W_p^1(G)} \tag{3.35}$$

bağıntıları yazılabilir.

Diğer yandan da $\tilde{p}_n(z_0) = 0$ koşulu altında $\tilde{p}_n \in W_p^1(U)$ için

$$\tilde{p}_n(z) = \frac{1}{\chi} \iint_U \frac{u(\zeta, z)}{|\zeta - z|^2} \left[\frac{\partial \tilde{p}_n(\zeta)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \tilde{p}_n(\zeta)}{\partial y}(y - y_0) \right] d\sigma_\zeta, \quad z \in U \tag{3.36}$$

integral gösterimi yazılabilir. Burada

$$\zeta = x + iy, z = x_0 + iy_0, u(\zeta, z) = -\int_{|\zeta - z|}^{\infty} v\left(r\frac{\zeta - z}{|\zeta - z|} + z \right) dr, \chi = \iint_C v(\zeta) d\sigma_\zeta,$$

ve

$$v(\zeta) = \begin{cases} \exp \dfrac{|\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2 - h^2}, & |\zeta - z_0| < h \\ 0, & |\zeta - z_0| \geq h. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $h>0$, $\{\zeta : |\zeta - z_0| < h\} \subset G$ koşulunu sağlayan bir sayıdır.

3.2.5 Lemma. *G, K-kvazikonform sınırlı bir bölge ve* $p_n(z)$ *derecesi en fazla n olan ve* $p_n(z_0) = 0$ *koşulunu sağlayan bir polinom olsun. Bu durumda*

$$
\|p_n\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} c\sqrt{\log n}\,\|p_n\|_{L_p^1(G)}, & p=2 \\ c\|p_n\|_{L_p^1(G)}, & p>2 \\ cn^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}\|p_n\|_{L_p^1(G)}, & 1<p<2 \end{cases}
$$

olur.

İspat. $p=2$ ve $p>2$ olduğunda teoremin ispatı sırasıyla [4] ve [23]'de verilmiştir. Burada 1<p<2 durumu incelenecektir.

$$
\alpha := \frac{2K^2}{1+K^2}
$$

olsun. [3]'de verilen

$$
\|p_n'\|_{\overline{G}} \leq c_{20} n^{\alpha} \|p_n\|_{\overline{G}}
$$

eşitsizliğine ve (3.35), (3.36) bağıntılarına göre $z \in \overline{G}$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$
|p_n(z)| \leq c_{21}\left[\iint\limits_{|\zeta-z|<\varepsilon n^{-\alpha}}\left(\left|\frac{\partial\widetilde{p}_n}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\widetilde{p}_n}{\partial y}\right|\right)\frac{\partial\alpha_\zeta}{|\zeta-z|}\right]+\left[\iint\limits_{U-\{\zeta:|\zeta-z|<\varepsilon n^{-\alpha}\}}\left(\left|\frac{\partial\widetilde{p}_n}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\widetilde{p}_n}{\partial y}\right|\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|}\right]
$$

$$
\leq c_{22}\frac{\varepsilon n^{\alpha}}{n^{\alpha}}\|\widetilde{p}_n\|_{\overline{G}} + c_{23}\|\widetilde{p}_n\|_{W_p^1(U)}\left(\iint\limits_{U-\{\zeta:|\zeta-z|<\varepsilon n^{-\alpha}\}}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^q}\right)^{\frac{1}{q}}
$$

$$
\leq c_{23}\,\varepsilon\|\widetilde{p}_n\|_{\overline{G}} + c_{24}\,n^{\alpha\left(\frac{2}{p}-1\right)}\|\widetilde{p}_n\|_{W_p^1(U)}
$$

bulunur. Burada ε yeterince küçük seçilerek

$$
\|p_n\|_{\overline{G}} \leq c\,n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\alpha}\|p_n\|_{L_p^1(G)}
$$

elde edilir.

3.2.6 Teorem: *G, K-kvazikonform sınırlı bir bölge ve* $2-\frac{1}{2K^2}\left(1+\frac{1}{K^2}\right)<p<\infty$ *ise* $\forall n\geq 2$ *doğal sayıları ve her*

$$\gamma\in\begin{cases}\left(0,\dfrac{1}{pK^2}\right), & p\geq 2\\ \left(0,\dfrac{1}{\mathrm{p}\mathrm{K}^2}-\dfrac{2K^2}{1+K^2}\left(\dfrac{2}{P}-1\right)\right), & 2-\dfrac{1}{2K^2}\left(1+\dfrac{1}{K^2}\right)<p<2\end{cases}$$

için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\frac{c}{n^\gamma}$$

olacak şekilde bir c=c(p,G)>0 sayısı vardır.

$p=2$ durumunda teoremin ispatı [28]'de verilmiştir.

İspat: $2^j\leq n\leq 2^{j+1}$ koşulunu sağlayan $n\geq 2$ doğal sayıları ve her $\gamma\in\left(0,\frac{1}{pK^2}\right)$ için 3.2.4 lemma gereği

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)}\leq c_{25}n^{-\gamma}$$

ve 3.2.5 Lemma gereği

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases}c_{26}n^{-\gamma}, & \mathrm{p}>2\\ \mathrm{c}_{27}n^{-\gamma+\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)}, & 1<p<2\end{cases}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{2^j,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases}\mathrm{c}_{28}2^{-j\gamma}, & \mathrm{p}>2\\ \mathrm{c}_{29}2^{-j\left[\gamma-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}, & 1<p<2\end{cases}$$

ve

$$\varphi_p(z)-\pi_{n,p}(z)=\left[\pi_{2^{j+1},p}(z)-\pi_{n,p}(z)\right]+\sum_{m>j}\left[\pi_{2^{m+1},p}(z)+\pi_{2^m,p}(z)\right] \qquad z\in G$$

olduğundan

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\le\begin{cases} c_{26}n^{-\gamma}+c_{28}\sum\limits_{m>j}2^{-m\gamma}, & p>2\\ c_{27}n^{-\left[\gamma-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]} & \\ \quad +c_{29}\sum\limits_{m>j}2^{-m\left[\gamma-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}, & 1<p<2\end{cases} \tag{3.37}$$

eşitsizliği elde edilir.

γ, $\left(0,\dfrac{1}{pK^2}\right)$ aralığında değişebileceğinden $2-\dfrac{1}{2K^2}\left(1+\dfrac{1}{K^2}\right)<p<2$ için

$$\gamma-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)>0$$

bulunur ve (3.37) deki sonuncu toplam

$$c_{29}2^{-j\left[\gamma-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}\le c_{30}n^{-\left[\gamma-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}$$

olarak değerlendirilir.

Böylece (3.37)'den $\forall n\ge 2$ ve her

$$\gamma\in\begin{cases}\left(0,\dfrac{1}{pK^2}\right), & p\ge 2\\ \left(0,\dfrac{1}{\mathrm{p}K^2}-\dfrac{2K^2}{1+K^2}\left(\dfrac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\dfrac{1}{2K^2}\left(1+\dfrac{1}{K^2}\right)<p<2\end{cases}$$

için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\le\frac{c}{n^\gamma}$$

sonucuna varılır.

3.2.7 Teorem: *$G, L \in K(\alpha,\beta)$ $(0<\alpha,\beta\le 1)$, Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ise $\forall n \ge 2$ doğal sayıları ve her*

$$\gamma \in \begin{cases} \left(0, \dfrac{\alpha\beta}{p}\right), & p \ge 2 \\ \left(0, \dfrac{\alpha\beta}{p} - \dfrac{2K^2}{1+K^2}\left(\dfrac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\dfrac{1+K^2}{2K^2}\alpha\beta < p < 2 \end{cases}$$

için n=1, 2, ... olduğunda

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le \frac{c}{n^\gamma}$$

olacak şekilde bir c=c(p,G) sabiti vardır.

3.2.8 Teorem: *G, parçalı düzgün L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $\lambda\pi$ $(0<\lambda<2)$ L'nin iki düzgün yayının oluşturduğu en küçük dış açı olsun. Bu durumda her*

$$\gamma \in \begin{cases} \left(0, \dfrac{1}{p}\min\left(\dfrac{2\lambda}{2-\lambda},1\right)\right), & p \ge 2 \\ \left(0, \min\left(\dfrac{2\lambda}{2-\lambda},1\right) - \dfrac{2K^2}{1+K^2}\left(\dfrac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\dfrac{1+K^2}{2K^2}\min\left(\dfrac{2\lambda}{2-\lambda},1\right) < p < 2 \end{cases}$$

için

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\| \le \frac{c}{n^\gamma}$$

olur. Burada K, L'nin kvazikonformluk katsayısıdır.

Yukarıdaki teoremlerin ispatları 3.2.6 teoremin ispatına benzer şekilde ve [17]'de verilen

$L \in K(\alpha,\beta)$ olduğunda;

$$mes\varphi(y(\Omega_u)) \leq cu^{\alpha\beta},$$

L, parçalı düzgün eğri olduğunda ise,

$$mes\varphi(y(\Omega_u)) \leq cu^{\mu}, \qquad \mu < \min\left(\frac{2\lambda}{2-\lambda}, 1\right)$$

değerlendirmeleri kullanılarak yapılır.

3.3 Düzgün Sınırlı Bölgelerde Bieberbach Polinomlarının Yaklaşım Özellikleri

$G \subset \mathbf{C}$ basit bağlantılı L sınırlı bir bölge, $L := \partial G$, $z_0 \in G$, $w = \varphi_0(z)$, $G'den$ $D(0, r_0) := \{w : |w| < r_0\}$ diskine $\varphi_0(z_0) = 0, \varphi'_0(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm ve $\psi_0(w)$ ise $\varphi_0(z)$ dönüşümünün tersi olsun. φ dönüşümü, G bölgesinin dışını birim diskin dışına konform olarak resmeden ve

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir dönüşüm, $\psi(w)$ dönüşümü de $\varphi(z)$ dönüşümünün tersi olarak tanımlansın. ω, L eğrisi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun.

3.3.1 Lemma: *G, düzgün L eğrisiyle sınırlı bir bölge ise.* $\forall p \in (1,\infty)$ *için* $\frac{1}{|\varphi_0'|}$ ve $\frac{1}{|\varphi'|}$, $A_P(L)$ *'ye aittir.*

İspat: G bölgesinin sınırı düzgün eğri olduğunda, $\forall p > 1$ için $|\varphi'|, |\varphi_0'| \in A_p(L)$ ve $|\psi_0'| \in A_p(\partial D(0,r_0))$ olduğu [14,Teorem3]'de ispatlanmıştır. $|\psi_0'| \in A_p(\partial D(0,r_0))$ ilişkisi $q := p/(p-1)$ olduğunda $\forall I \subset L$ için

$$\frac{\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'|^q |dz|\right)^{1/q}}{\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'| |dz|\right)} \leq c < \infty \tag{3.38}$$

eşitsizliğine denktir.

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'|^{-1}\,|dz|\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'|^{1/(p-1)}\,|dz|\right)^{(p-1)}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'||dz|\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'|^{-1}\,|dz|\right)\right]\times\frac{\left[\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'|^{1/(p-1)}|dz|\right)^{p-1}\right]}{\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi_0'||dz|\right)}$$

yazılırsa, buradaki 1. çarpan $|\varphi_0'| \in A_2(L)$ olduğundan sınırlı olur. 2. çarpanın sınırlılığı ise (3.38) eşitsizliğinde $q = 1/(p-1)$ yazılarak görülür. Böylece $\frac{1}{|\varphi_0'|} \in A_p(L)$ olur. $\frac{1}{|\varphi'|} \in A_p(L)$ olduğu da benzer şekilde ispat yapılarak görülür.

3.3.2 Teorem: *G, sınırı düzgün Jordan eğrisi olan sonlu bir bölge olsun. Bu durumda (G, z_0) çiftine göre π_n Bieberbach polinomları için,*

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{\bar{G}} \le c\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2} \Omega_{2,\omega_0}\left(\varphi_0'[\psi(w)]\,(\psi'(w))^{1/2}, \frac{1}{n}\right), \quad n \ge 2$$

olur.

Burada $\omega := 1/|\varphi'|$, $\omega_0 := |\psi'|$, ve $\Omega_{2,\omega_0}(.,1/n)$ ise $\varphi_0'[\psi(w)](\psi'(w))^{1/2}$ için 2. mertebeden ω_0 ağırlıklı integral süreklilik modülüdür.

İspat: *G,* düzgün sınırlı bir bölge olduğundan $|\varphi'|$ ve $\frac{1}{|\varphi_0'|}$ fonksiyonları sırasıyla [15] ve 3.3.1 Lemma gereği $A_p(L)$'ye aittirler. Hölder eşitsizliği kullanılarak $\varphi_0' \in L^2(L, 1/|\varphi'|)$ elde edilir. Diğer yandan $\varphi_0' \in E^1(G)$ dir. Böylece tanım gereği $\varphi_0' \in E^2(G, 1/|\varphi'|)$ olur. [14, Teorem 11]'de $\omega := 1/|\varphi'|$ ve p=2 yazılarak φ_0' için

$$\varepsilon_n(\varphi_0')_2 \le c_{30}\, n^{-1/2}\, E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2 \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir.

φ_0''ne $\|\cdot\|_{L_2(G)}$ normunda en iyi yaklaşan $q_n(z)$ polinomları için

$$Q_n(z) := \int_{z_0}^{z} q_n(t)\,dt, \qquad t_n(z) = Q_n(z) + [1 - q_n(z_0)](z - z_0)$$

olsun. Bu durumda $t_n(z_0) = 0,\ t_n'(z_0) = 1$ ve (3.39)'dan

$$\begin{aligned}
\|\varphi_0' - t_n'\|_{L_2(G)} &= \|\varphi_0' - q_n - 1 + q_n(z_0)\|_{L_2(G)} \\
&\le \|\varphi_0' - q_n\|_{L_2(G)} + \|1 - q_n(z_0)\|_{L_2(G)} \\
&\le c_{31}\, n^{-1/2}\, E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2 + \|\varphi'_0(z_0) - q_n(z_0)\|_{L_2(G)}
\end{aligned}$$

elde edilir. 2.1.2 Lemma kullanılırsa

$$|\varphi_0'(z_0) - q_n(z_0)| \le \frac{\|\varphi_0'(z) - q_n(z)\|_{L_2(G)}}{dist(z_0, L)}$$

eşitsizliğinden

$$\|\varphi_0' - t_n'\|_{L_2(G)} \le c_{31}\, n^{-1/2}\, E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2 + \frac{\varepsilon_n(\varphi_0')_2}{dist(z_0, L)}$$

ve buradan da

$$\|\varphi_0' - t_n'\|_{L_2(G)} \le c_{31}\, n^{-1/2}\, E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

bulunur.

Böylece π_n Bieberbach polinomlarının ekstremal özelliğinden

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{L_2^1(G)} \leq c_{31}\, n^{-1/2}\, E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe [5] gereği

$$\|p_n\|_{\overline{G}} \leq c(\ln n)^{1/2} \|p_n\|_{L_2^1(G)}$$

bağıntısı uygulanırsa

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{\overline{G}} \leq c_{32} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2} E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2 \qquad n \geq 2$$

elde edilir.

Diğer yandan 3.3.1 Lemma gereği $\omega = 1/|\varphi'| \in A_2(L)$ ve [14, lemma 3] gereği $\omega_0 = |\psi'| \in A_2(T)$ dir. Bunlara ek olarak L eğrisinin düzgün olduğu ve $\varphi_0' \in E^2(G, 1/|\varphi'|)$ olduğu da göz önünde tutulursa [25, Teo.11] koşulları sağlanır.

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2} \Omega_{2,\omega_0}\left(\varphi_0'[\psi(w)]\,(\psi'(w))^{1/2}, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 2$$

şeklinde yazılabildiğinden teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım gereği $\Omega_{2,\omega_0}\left(f_0, \frac{1}{n}\right)$ yakınsak olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.3 Sonuç: *G, düzgün sınırlı bir bölge ise π_n Bieberbach polinomları için*

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2} \qquad n \geq 2$$

bağıntısı vardır.

Bu sonuçta elde edilen eşitsizlik Mergelyan'ın (3.2) de verilen eşitsizliğinden daha hızlı sıfıra yaklaşmaktadır. Böylece (3.2.) den daha iyi bir sonuç elde edilmiştir.

3.4 Düzgün Sınırlı Bölgelerde Genelleştirilmiş Bieberbach Polinomları ile Yaklaşım

Teorem: *G, düzgün sınırlı bir bölge olduğunda her n doğal sayısı ve her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\bar{G}} \leq \begin{cases} c_1 n^{-1/p}, & p > 2 \\ c_2 n^{-\left(1-\frac{1}{p}+\varepsilon\left(1-\frac{2}{p}\right)\right)}, & 1 < p < 2 \end{cases}$$

olacak şekilde $c_i = c_i(p,G,\varepsilon) > 0$ *(i=1,2) sayıları vardır.*

İspat: φ_0, G bölgesini $D(0,r_0)$'a konform olarak resmeden bir dönüşüm olsun. $\varphi_p(z) := \int_{z_0}^{z} [\varphi_0'(\zeta)]^{2/p} d\zeta$ olduğundan ve [37] gereği $\left|\varphi_0'\right|$ $\forall p > 0$ için istenilen mertebeden L^p sınıfından olduğundan

$$\int_L \left|\varphi_p'\right| |dz| = \int_L \left|\varphi_0'\right|^{2/p} |dz| < \infty$$

yazılabilir. φ_p' fonksiyonunun G'de analitik bir fonksiyon olduğu da dikkate alındığında $\varphi_p' \in E^1(G)$ olur. Diğer yandan G düzgün sınırlı bir bölge ve 3.3.1 lemma gereği $w = \dfrac{1}{|\varphi'|} \in A_p(L)$ olduğundan *n=1, 2, ...* için 1.4.2. teorem gereği

$$\varepsilon_n\left(\varphi_p'\right)_p \leq c n^{-1/p} E_n^{\circ}\left(\varphi_p', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_p \tag{3.40}$$

bağıntısı yazılabilir.

$q_n(z)$, φ_p' fonksiyonuna $\|.\|_{L_p(G)}$ normunda en iyi yaklaşan polinom,

$$p_n(z) := \int_{z_0}^{z} q_n(\zeta)\,d\zeta$$

ve

$$\hat{p}_n(z) := p_n(z) + [1 - q_n(z_0)](z - z_0)$$

olsun. Sonuncu eşitlikten görülür ki $\hat{p}_n(z_0) = 0$ ve $\hat{p}_n'(z_0) = 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_p' - \hat{p}_n'\right\|_{L_p(G)} &= \left\|\varphi_p' - q_n - 1 + q_n(z_0)\right\|_{L_p(G)} \\
&\le \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + \left\|1 - q_n(z_0)\right\|_{L_p(G)} \\
&= \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + \left\|\varphi_p'(z_0) - q_n(z_0)\right\|_{L_p(G)} \\
&= \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + c_1\left|\varphi_p'(z_0) - q_n(z_0)\right|
\end{aligned}$$

olur. Biz burada $\left[\varphi_0'\right]^{2/p}$ fonksiyonunun z_0'da 1'e eşit olan dalını alıyoruz

$\forall f \in L_p(G)$ için

$$|f(z_0)| \le \frac{\|f(z)\|_{L_p(G)}}{\left(\pi d^2\right)^{1/p}}$$

yazılabildiğinden

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_p' - \hat{p}_n'\right\|_{L_p(G)} &\le \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + c_1 \frac{\left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)}}{\left(\pi d^2\right)^{1/p}} \\
&\le \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} \left(1 + \frac{c_1}{\left(\pi d^2\right)^{1/p}}\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan da (3.40) bağıntısı kullanılarak

$$\left\|\varphi_p{}' - \hat{p}_n{}'\right\|_{L_p(G)} \le c_2 n^{-1/p} \overset{\circ}{E}_n\left(\varphi_p', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_p, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

bulunur. Böylece $\pi_{n,p}$ Bieberbach polinomlarının extremal özelliği gereği

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \le c_2\, n^{-1/p} \overset{\circ}{E}_n\left(\varphi_p{}', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_p$$

yazılabilir. $\left\{\overset{\circ}{E}_n\left(\varphi_p{}', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_p\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. Bu yüzden

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \le c_3\, n^{-1/p} \tag{3.41}$$

olur.

$2^j \le n \le 2^{j+1}$ koşulunu sağlayan $n \ge 2$ doğal sayıları için

$$\begin{aligned}\left\|\pi_{2^{j+1},p} - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} &\le \left\|\pi_{2^{j+1},p} - \varphi_p\right\|_{L_p^1(G)} + \left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \\ &\le c_4\left(2^{j+1}\right)^{-1/p} + c_5 n^{-1/p} \\ &\le c_6 n^{-1/p}\end{aligned}$$

bağıntısı yazılabilir. Sonuncu eşitsizliğe, düzgün eğrilerin kvazikonform eğriler sınıfından olduğu dikkate alınarak 3.2.5 lemma uygulandığında

$$\begin{aligned}\left\|\pi_{2^{j+1},p} - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} &\le \begin{cases} c_7\left\|\pi_{2^{j+1},p} - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)}, & p > 2 \\ c_8 n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}\left\|\pi_{2^{j+1},p} - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)}, & 1 < p < 2 \end{cases} \\ &\le \begin{cases} c_9 n^{-1/p}, & p > 2 \\ c_{10} n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}} n^{-1/p}, & 1 < p < 2 \end{cases}\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} c_9 n^{-1/p}, & p>2 \\ c_{10} n^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases} \tag{3.42}$$

bağıntısı elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\left\|\pi_{2^j,p}-\pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} &\leq \left\|\pi_{2^j,p}-\varphi_p\right\|_{L_p^1(G)}+\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \\ &\leq c_{11}\left(2^j\right)^{-1/p}+c_{12}n^{-1/p} \\ &\leq c_{13}\left(2^j\right)^{-1/p}\end{aligned}$$

olur. Yine 3.2.5 lemma uygulandığında

$$\left\|\pi_{2^j,p}-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} c_{14}\left\|\pi_{2^j,p}-\pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)}, & p>2 \\ c_{15} n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}\left\|\pi_{2^j,p}-\pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)}, & 1<p<2 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} c_{16}\left(2^j\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{17}\left(2^j\right)^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}\left(2^j\right)^{-1/p}, & 1<p<2 \end{cases}$$

ve buradan da

$$\left\|\pi_{2^j,p}-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} c_{16}\left(2^j\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{17}\left(2^j\right)^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases} \tag{3.43}$$

bağıntısı elde edilir.

(3.42) ve (3.43) bağıntıları

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{2^j,p}\right\|_{\overline{G}} \leq \left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}+\left\|\pi_{n,p}-\pi_{2^j,p}\right\|_{\overline{G}}$$

eşitsizliğinde yerlerine yazıldığında

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{2^j,p}\right\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} c_9 n^{-1/p}, & p>2 \\ c_{10} n^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases} + \begin{cases} c_{16}\left(2^j\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{17}\left(2^j\right)^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} c_9\left(2^j\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{10}\left(2^j\right)^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases} + \begin{cases} c_{16}\left(2^j\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{17}\left(2^j\right)^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases}$$

ve sonuç olarak

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{2^j,p}\right\|_{\overline{G}}=\begin{cases} c_{18}\left(2^j\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{19}\left(2^j\right)^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases} \tag{3.44}$$

bulunur.

$$\varphi_p(z)-\pi_{n,p}(z)=\left[\pi_{2^{j+1},p}(z)-\pi_{n,p}(z)\right]+\sum_{m>j}\left[\pi_{2^{m+1},p}(z)-\pi_{2^m,p}(z)\right], \qquad z\in G$$

olduğundan

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\left\|\pi_{2^{j+1},p}(z)-\pi_{n,p}(z)\right\|_{\overline{G}}+\sum_{m>j}\left\|\pi_{2^{m+1},p}(z)-\pi_{2^m,p}(z)\right\|_{\overline{G}}$$

eşitsizliği yazılabilir.

(3.42) ve (3.44) bağıntıları kullanılarak

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases} c_9 n^{-1/p}, & p>2 \\ c_{10} n^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases}+\begin{cases} c_{18}\sum\limits_{m>j}\left(2^m\right)^{-1/p}, & p>2 \\ c_{19}\sum\limits_{m>j}\left(2^m\right)^{-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}, & 1<p<2 \end{cases}$$

ve buradan da

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases} c_9 n^{-1/p}+c_{18}\sum\limits_{m>j}2^{-m/p}, & p>2 \\ c_{10} n^{-\left[\frac{1}{p}-\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}\right]}+c_{19}\sum\limits_{m>j}2^{-m\left[\frac{1}{p}-\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}\right]}, & 1<p<2 \end{cases} \tag{3.45}$$

bağıntısı elde edilir.

Buradaki $p>2$ durumu gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} c_9 n^{-1/p}+c_{18}\sum_{m>j}2^{-m/p} &= c_9 n^{-1/p}+c_{18}\sum_{m>j}\left(\frac{1}{2^{1/p}}\right)^m \\ &\leq c_9 n^{-1/p}+c_{18}\frac{\left(\frac{1}{2^{1/p}}\right)^j}{1-\frac{1}{2^{1/p}}} \\ &\leq c_9 n^{-1/p}+c_{20}\left(\frac{1}{2^{1/p}}\right)^j \\ &= c_9 n^{-1/p}+c_{20}2^{-j/p} \\ &\leq c_9 n^{-1/p}+c_{20}n^{-1/p} \\ &= c_{21}n^{-1/p} \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan $\frac{3K^2-1}{2K^2}<p<\infty$ için $\frac{1}{p}-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)>0$ olduğu dikkate

alınıp, $\alpha:=\frac{1}{p}-\frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)>0$ için (3.45) bağıntısındaki *1<p<2* durumu

incelendiğinde

$$
\begin{aligned}
c_{10}n^{-\alpha}+c_{19}\sum_{m>j}2^{-m\alpha} &= c_{10}n^{-\alpha}+c_{19}\sum_{m>j}\left(\frac{1}{2^{\alpha}}\right)^{m} \\
&\le c_{10}n^{-\alpha}+c_{19}\frac{\left(\frac{1}{2^{\alpha}}\right)^{j}}{1-\frac{1}{2^{\alpha}}} \\
&\le c_{10}n^{-\alpha}+c_{22}\left(\frac{1}{2^{\alpha}}\right)^{j} \\
&\le c_{10}n^{-\alpha}+c_{22}n^{-\alpha} \\
&= c_{23}n^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

olur.

Böylece (3.45) bağıntısı

$$
\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\bar{G}}\le\begin{cases} c_{21}n^{-1/p}, & p>2 \\ c_{23}n^{-\left[\frac{1}{p}-\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}\right]}, & \frac{3K^2-1}{2K^2}<p<2 \end{cases} \tag{3.46}
$$

şeklinde yazılabilir.

Düzgün bir eğri [35] gereğince $\forall\varepsilon>0$ için $1+\varepsilon$ katsayılı kvazikonform bir eğri olduğundan $p>\frac{3K^2-1}{2K^2}$ koşulu $p>1$ koşulu ile değiştirilebilir. Gerçekten burada K yerine $1+\varepsilon$ yazıldığında

$$
p>\frac{3K^2-1}{2K^2}=\frac{3(1+\varepsilon)^2-1}{2(1+\varepsilon)^2}=\frac{3\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)-1}{2\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\frac{2+6\varepsilon+3\varepsilon^2}{2+4\varepsilon+2\varepsilon^2}
$$

bulunur. Sonuncu ifade 1'den büyük kalarak 1'e istenilen kadar yakın olduğundan $p>\frac{3K^2-1}{2K^2}$ koşulu $p>1$ koşuluna denk olur. Buna göre (3.46) bağıntısı

$$
\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\bar{G}}\le\begin{cases} c_{21}n^{-1/p}, & p>2 \\ c_{23}n^{-\left[\frac{1}{p}-\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}\right]}, & 1<p<2 \end{cases}
$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer yandan $\dfrac{2K^2}{1+K^2}$ ifadesinde de K yerine $1+\varepsilon$ yazıldığında

$$\frac{2K^2}{1+K^2}=\frac{2\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}{1+\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\frac{2+4\varepsilon+2\varepsilon^2}{2+2\varepsilon+\varepsilon^2}=1+\varepsilon$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}-\left[\frac{1}{p}-\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}\right]&=-\left[\frac{1}{p}-\left(\frac{2}{p}-1\right)(1+\varepsilon)\right]\\&=-\left(\frac{1}{\mathrm{p}}-\frac{2}{p}+1-\frac{2\varepsilon}{p}+\varepsilon\right)\\&=-\left(1-\frac{1}{\mathrm{p}}+\varepsilon\left(1-\frac{2}{p}\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece sonuncu eşitlik (3.46) bağıntısında yerine yazıldığında

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases}c_{20}n^{-1/p}, & p>2\\ \mathrm{c}_{21}n^{-\left(1-\frac{1}{p}+\varepsilon\left(1-\frac{2}{p}\right)\right)}, & 1<p<2\end{cases}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Ahlfors, L.V., "Lectures on quasiconformal mappings", Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California (1987).

[2] Aliprantis, C.D. and Burkinsaw O, "Principles of real analysis ", Academic Press, San Diego, London, New York (1998).

[3] Andersson, J.M., Gehring, F.W. and Hınkkanen, A., "Polynomial approximation on Quasidisk", *Differential Geometry and Complex Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985), 75-86.

[4] Andrievski, V.V., "Convergence of Bieberbach polynomials in domains with quasiconformal boundary ", *All Union Symposium of Approximation Theory in Complex Plane,* Ufa (1980), 295-299.

[5] Andrievski, V.V., "Convergence of Bieberbach polynomials in domains with quasiconformal boundary ", *Ukranian Math* J. 35, 3, (1983), 273-277.

[6] Andrievski, V.V., "Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise- quasiconformal boundary ", *Theory of Mappings and Approximation of Functions,* Naukova Dumka, Kiev, (1983), 3-18.

[7] Andrievski, V.V. and Gaier, D., "Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise quasianalytic boundary", *Mıtteılungen aus dem Mathem. Semınar Gıessen, Sonderdruck aus Heft,* 211, (1992), 49.

[8] Andrievski, V.V., Belyi, V.I., Dzjadyk, V.K., "Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable", Advanced series in

mathematical science and engineering world federation publishers company, Atlanta, Georgia (1995).

[9] Andrievski, V.V. and Pritsker, I.E., “Convergence of Bieberbach Polynomials in domains with interior cusps”, *J. d'Analyse Math. 82,* (2000), 315-332..

[10] Başkan, T., “Kompleks fonksiyonlar teorisi”, Vipaş A.Ş., Bursa (2000).

[11] Conway, J.B., “Functions of one complex variable II”, Springer-Verlag, Berlin, New York, London (1995).

[12] Davis, P.J., “Interpolation and approximation”, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London (1963).

[13] Duren, P.L., “Theory of H_p spaces”, Academic Press, New York, San Francisco, London (1970).

[14] Dyn'kın, E.M., “The rate of polynomial approximation in the complex domain”, *Complex Analysis and Spectral Theory,* Springer-Verlag, Berlin, (1981), 90-142.

[15] Dyn'kın, E.M., Osılenker, B.P.,”Weighted estimates for singular integrals and their applications“, *Mathematical Analysis,* Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform.,Moscow, 21, (1983), 42-129.

[16] Gaier, D., “Lectures on complex approximation”, Birkhauser,Boston, Basel, Stutgart (1987).

[17] Gaier, D., “On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners”, *Constructive Approximation,* Springer-Verlag, New York Inc, 4 (1988), 289-305.

[18] Gaier, D., “On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with piecewise analytic boundary”, *Arc. Math,* Birkhauser Verlag, Basel, 58, (1992), 462-470.

[19] Gaier, D., "Polynomial approximation of conformal maps", *Constructive Approximation,* Springer-Verlag New York,14, (1988), 27-40.

[20] Goldstein, V.M., "The degree of summability of generalized derivatives of plane quasiconformal homeomorfizm", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* (1980), 250.

[21] Gonzalez, M.O., "Classical Complex Analysis", Marcel Dekker, Inc., New York (1991).

[22] Haaser, N.B., Sullivan, J.A., "Real Analysis", Von Nostrand Reinhold Company, New York ,Cincinnati, Toronto, London, Melbourne, (1971).

[23] Israfilov, D.M., "On the approximatıon properties of the extremal polynomials", Dep. VINITI, No:5461, (1981), 23.

[24] Israfilov, D.M., "Uniform convergence of some extremal polynomials in domains with quasiconformal boundary", *East Journal On Approximations",4, 4,* (1998), 527-539.

[25] Israfilov, D.M., "Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,w)$ and the Bieberbach polynomials", *Constructive Approximation,* Springer Verlag, New York Inc. 17,)2001), 335-351.

[26] Karlovich, Y.I., Böttcher, A., "Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplıtz operators", D'estvdıs Catalans Barcelona Instıtvt, Barcelona (1997).

[27] Keldych, M.V.,"Sur I'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques", Mat. Sb. 5(47), (1939), 391-401.

[28] Leclerc, M., "A note on a theorem of V.V. Andrievski", Arch. Math., 46, (1986), 159-161.

[29] Lehto, O. and Virtanen, K. "Quasiconformal mappings in the plane", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).

[30] Markushevich, A.I.,"Theory of functions of a complex variable III", Prentice Hall, Inc.(1967).

[31] Mergelyan, S.N., “Certain questions of the constructive theory of functions”, *Proc. Steklov Mat.Inst.*, 37, (1951), 1-91.

[32] Pommerenke, Ch., “Boundary behaviour of conformal maps”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1992).

[33] Pritsker, I.E. “On the convergence of Bieberbach polynomials in domains with interior zero angels”, *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics,* Leningrand, (1991). A.A. Gonchar and E.B. Saff, eds. Lecture Notes in Math. 1550, (1992), 169-172.

[34] Privalov, I.I.,”Introduction to the theory of functions of a complex variable”, Nauka, Moscow (1984).

[35] Rickman, S. *“Characterization of quasiconformal maps”, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A., Mathematica”,* (1966), 395.

[36] Suetin, P.K., “Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach polynomials”, *Trudy Mat.Inst. Steklov,* (1971), 100.

[37] Warschawski, S.E., Schober, G.E. “Conformal mapping of certain classes of Jordan domains”, *Arch. Rational Mech Anal.* 22, (1966, 201-209.

[38] We Xue- Mou, “On Bieberbach polynomials”, Acta Math. Sinica, 13, (1963), 141-145.