

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**GRAFLAR, GRUPLAR VE YÜZEYLER
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özden KORUOĞLU

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

112643

Balıkesir, 2001

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

GRAFLAR, GRUPLAR VE YÜZEYLER
ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özden KORUOĞLU

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi :04. 07. 2001

Jüri Üyeleri

:Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK (Danışman- BA.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM (U.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR (BA.Ü.)

04.07.2001

A. Sinan Çevik

Osman Bizim
Hülya Gür

Balıkesir, 2001

ÖZET

GRAFLAR, GRUPLAR VE YÜZEYLER ÜZERİNE

Özden KORUOĞLU

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 2001

Bu tezde genel olarak, 1-kompleksler (graflar), 2-kompleksler ve gruplar arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Bu incelemeyi iki kısma ayırabiliriz. İlk kısımda, 1-kompleksler ve 2-kompleksler yardımıyla tanımlanan gruplar üzerinde durulmaktadır (bak. Bölüm 2 ve 3). İkinci kısımda ise herhangi bir gruptan elde edilen graflar sayesinde bazı grup çeşitleri ve 2-kompleksler tanımlanmaktadır (bak. Bölüm 4).

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümler için gerekli tanımlamalar, teoremler, örnekler ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde, 2-komplekslerden elde edilen Star kompleksler üzerinde durulmaktadır. Star komplekslerin özellikleri ile buradan tanımlanan gruplar üzerindeki gerekli teoremler ve örnekler incelenmektedir.

Üçüncü bölümde, 2-komplekslerden yararlanarak, $T(6)$ kompleksler ve X-gruplar tanımlanmaktadır. Ayrıca $T(6)$ sunuşları, bilinen gruplar üzerinde uygulanmaktadır.

Son bölümde ise bir gruptan elde edilen Cayley graf ve Cayley kompleksler üzerinde durulmaktadır. Buradan elde edilen bazı özel gruplar, detaylı olarak incelenmektedir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: serbest grup / grup sunuşu / graf / 1.Temel grup / 2-kompleks / Star kompleks / $T(6)$ kompleks / X-grup / $T(6)$ sunuşu / Cayley graf / Cayley kompleks

ABSTRACT

ON GRAPHS, GROUPS AND SURFACES

Özden KORUOĞLU
Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics Education

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK)

Balıkesir-Turkey, 2001

In this thesis, the relationships among 1-complexes, 2-complexes and groups have been studied. We can divide this thesis into two parts. In the first part, the groups which are related to 1-complexes and 2-complexes are investigated (see Chapters 2 and 3). In the second part, some group varieties and 2-complexes are defined by means of the graphs obtained in any group (see Chapter 4).

This work consists of four chapters.

In the first chapter, it is given that the definitions, examples and the results which are used for the other chapters.

In the second chapter, the Star complexes that is obtained in 2-complexes are investigated. The properties of Star complexes and the sufficient theorems and examples on the groups defined by means of Star complexes are studied.

In the third chapter, $T(6)$ complexes and X-groups are defined by means of 2-complexes. Besides of that, $T(6)$ presentations are practised on the known groups.

At the final chapter, Cayley graphs and Cayley complexes which are obtained by a group are investigated. Some special groups defined by these are studied throughout.

KEY WORDS : free group / presentation of group / graph / first fundamental group / 2-complex / Star complex / $T(6)$ complex/ X-group / $T(6)$ presentation / Cayley graph / Cayley complex

İÇİNDEKİLER	<u>Sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Serbest Gruplar	1
1.2 Grup Sunuşları	4
1.2.1 Direkt Çarpım Grubu	8
1.2.1.1 Direkt Çarpım Grubunun Sunuşu	9
1.2.2 Serbest Çarpım Grubu	9
1.2.2.1 Serbest Çarpım Grubunun Sunuşu	10
1.2.3 Karışımli Serbest Çarpım Grubu	11
1.3 1-Kompleksler	11
1.3.1 Graflar Arasındaki Dönüşümler	14
1.3.2 Starlar	16
1.3.3 Grafların Yerel Dönüşümleri	16
1.3.4 1.Temel Gruplar	17
1.3.5 1.Temel Grupların Özellikleri	22
1.4 2-Kompleksler	27
1.4.1 2-Komplekslerin Dönüşümleri	29
1.4.2 Bir K 2-Kompleksi Tarafından Tanımlanan Grupların Özellikleri	29
2. 2-KOMPLEKSLERİN BAZI UYGULAMALARI	34
2.1 Star Kompleksler	34
2.2 Star Graflar	40
2.3 Star Komplekslerin Genişlemesi	42
2.4 Star Komplekslerin Dönüşümleri	50
3. $T(6)$ KOMPLEKSLER VE UYGULAMALARI	53
3.1 $T(6)$ Kompleksler ve X-Gruplar	53
3.2 $T(6)$ Sunuşları ve Uygulamaları	66
4. CAYLEY GRAFLAR VE UYGULAMALARI	77
4.1 Cayley Graflar	77
4.2 Cayley Kompleksler	89
KAYNAKLAR	95

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı	Tanımı/Değeri
X	Üreteç sembollerinin kümesi	
1_w	Boş kelime	
$L(w)$	w kelimesinin uzunluğu	
$L_x(w)$	x harfinin w içindeki uzunluğu	
\sim	Serbest olarak eşit denklik bağıntısı	
$[w]$	w kelimesini içeren denklik sınıfı	
$F(X)$	X ile üretilen serbest grup	
\mathcal{R}	Bağıntı kelimelerinin kümesi	
\mathcal{P}	Grup sunuşu	$\mathcal{P} = \langle X; \mathcal{R} \rangle$
$\sim_{\mathcal{P}}$	\mathcal{P} sunuşuna bağlı denklik sınıfı	
$[w]_{\mathcal{P}}$	\mathcal{P} sunuşuna bağlı denklik sınıfı	
$G(\mathcal{P})$	\mathcal{P} sunuşu ile tanımlanan grup	$G(\mathcal{P}) \cong F(X)/N$
N	$\{[r] : r \in \mathcal{R}\}$ kümesinin normal kapanışı	
\bar{w}	$G(\mathcal{P})$ grubunun $[w]_{\mathcal{P}}$ yerine temsili	
$G \times H$	İki grubun direkt çarpım grubu	
$G * H$	İki grubun serbest çarpım grubu	
$G *_Z H$	Z alt grubu tarafından tanımlanan G ile H gruplarının karışımli serbest çarpım grubu	
Γ	Graf (1-kompleks)	
V	Γ grafının köşe kümesi	
E	Γ grafının kenar kümesi	
e^+	Γ grafının yönlendirilmiş kenar kümesi	
ι	Γ grafında başlangıç fonksiyonu	
τ	Γ grafında bitiş fonksiyonu	
\cdot^{-1}	Γ grafında ters fonksiyon	
$\iota(e)$	$e \in E$ kenarının başlangıç köşesi	
$\tau(e)$	$e \in E$ kenarının bitiş köşesi	
1_v	v köşesindeki boş yol	
T	Ağaç	
$Star(v)$	v köşesinin Star kümesi	
$d(v)$	v köşesinin derecesi	
$\Pi_1(\Gamma, v)$	v köşesindeki 1. Temel grup	
$[\alpha]$	α kapalı yolunu içeren denklik sınıfı	
$\iota(\alpha)$	α yolunun başlangıç köşesi	
$\tau(\alpha)$	α yolunun bitiş köşesi	
γ_v	$\Pi_1(\Gamma, o)$ için o köşesini seçilen T maksimal ağacında v köşesine birleştiren en kısa yol	
t_e	$\Pi_1(\Gamma, o)$ grubunun üreteç kümesinin elemanları	$[\gamma_{\iota(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}]$
\mathcal{K}	2-kompleks	$\langle \Gamma; \rho_{\lambda} (\lambda \in \Lambda) \rangle$
ρ_{λ}	Bağıntı yollarının kümesi	
Λ	Bağıntı yollarının sayısı	

Simge	Adı	Tanımı/Değeri
$\sim_{\mathcal{K}}$	\mathcal{K} 2-kompleksine göre denklik bağıntısı	
$[\alpha]_{\mathcal{K}}$	\mathcal{K} 2-kompleksine göre denklik sınıfı	
$\Pi_1(\mathcal{K}, \nu)$	\mathcal{K} 2-kompleksinin ν köşesinde tanımlanan grup	
$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \tau, e^+}$	$\Pi_1(\mathcal{K}, \nu)$ grubunun izomorf olduğu grubun sunuşu	$\langle x_e (e \in e^+, e \notin T); R_p (p \in \Lambda) \rangle$
$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \tau, e^+})$	$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \tau, e^+}$ tarafından sunulan grup	
$E(\mathcal{K})$	\mathcal{K} 2-kompleksinin kenar kümesi	
$V(\mathcal{K})$	\mathcal{K} 2-kompleksinin köşe kümesi	
\mathcal{K}^{st}	Star kompleks	
\mathcal{K}^{ST}	Star kompleksin genişlemesi	
$\mathcal{R}(\mathcal{K})$	Bağıntı yollarının devirli döngülerinin kümesi	
$\iota^{st}(\gamma)$	Star komplekste γ kenarının başlangıç köşesi	
$\tau^{st}(\gamma)$	Star komplekste γ kenarının bitiş köşesi	
$V(\mathcal{K}^{st})$	Star kompleksin köşe kümesi	
$E(\mathcal{K}^{st})$	Star kompleksin kenar kümesi	
$\Gamma(\mathcal{K}^{st})$	Star graf	
$(\lambda, \varepsilon, \gamma)$	\mathcal{K}^{ST} Star kompleks genişlemesinin bir kenarı	
$\iota^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)$	$(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ kenarının başlangıç köşesi	
$\tau^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)$	$(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ kenarının bitiş köşesi	
\mathcal{P}^{st}	\mathcal{P} sunuşunun Star kompleksi	
\mathcal{P}^{ST}	\mathcal{P} sunuşunun Star kompleksinin genişlemesi	
$L(\gamma)$	γ yolunun uzunluğu	
ϕ^{st}	Star komplekslerin dönüşümü	
$C(\mathcal{G}, \mathcal{S})$	Cayley graf	
$E(C(\mathcal{G}, \mathcal{S}))$	Cayley grafın kenar kümesi	
$V(C(\mathcal{G}, \mathcal{S}))$	Cayley grafın köşe kümesi	
S_n	Permütasyon grubu	
Z_n	n mertebeli devirli grup	
V_4	Klein-4 grubu	

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil Numarası	Adı	Sayfa
Şekil 1.1	e, e^{-1} kenarları ile bu kenarların başlangıç ve bitiş köşeleri	12
Şekil 1.2	1.3.1 Örnekteki Γ grafi	12
Şekil 1.3	Bir Γ grafında halka	13
Şekil 1.4	Bir Γ grafında yol	13
Şekil 1.5	1.3.1 Örnekteki Γ grafi için seçilen maksimal ağaç	14
Şekil 1.6	Grafların dönüşümünü gösteren grafik	15
Şekil 1.7	Γ ve Γ' grafları	15
Şekil 1.8	Γ ve Γ' grafları	17
Şekil 1.9	Yolların çarpımı	17
Şekil 1.10	1.3.4.1 Örnekteki Γ grafi	18
Şekil 1.11	u ile v köşelerini birbirine bağlayan yol ve u köşesindeki kapalı yol	20
Şekil 1.12	u ile v köşelerini birbirine bağlayan yol ve v köşesindeki kapalı yol	20
Şekil 1.13	$\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ ile $\gamma_{v_0}, \gamma_{v_1}, \dots, \gamma_{v_n}$ yolları	24
Şekil 1.14	Bir T ağacı ve u uç köşesi	26
Şekil 1.15	T ağacı	26
Şekil 1.16	T ağacı	26
Şekil 1.17	\mathcal{K} 2-kompleksinden seçilen T ağacı	31
Şekil 2.1	2.1.1 Örnekten elde edilen Star kompleks	35
Şekil 2.2	2.1.2 Örnek ile ilgili \mathcal{K}^{st} kompleksi	36
Şekil 2.3	2.1.3 Örnekteki 2-kompleksten elde edilen \mathcal{K}^{st} kompleksi	36
Şekil 2.4	2.1.4 Örnek ile ilgili Star kompleks	37
Şekil 2.5	$e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ kenarı	39
Şekil 2.6	2.1.1 Örnekten elde edilen Star graf	40
Şekil 2.7	2.1.2 Örnek ile ilgili bulunan Star graf	41
Şekil 2.8	2.1.3 Örnek yardımıyla elde edilen Star graf	41
Şekil 2.9	2.1.4 Örnekten elde edilen Star graf	41
Şekil 2.10	2.3.1 Örnekteki 2-kompleksten elde edilen Star kompleksin genişlemesi	43
Şekil 2.11	2.3.2 Örnekteki 2-kompleksten elde edilen Star kompleksin genişlemesi	43
Şekil 2.12	2.3.2 Örnekten elde edilen Star kompleks	43
Şekil 2.13	e^ε köşesindeki $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ kenarı	46
Şekil 2.14	T ağacı	47
Şekil 2.15	\mathcal{K} 2-kompleksinden elde edilen Star kompleks	47
Şekil 2.16	$c^{-1} a^{-1} b$ kenarı	49

Şekil Numarası	Adı	Sayfa
Şekil 2.17	K^{st} ve L^{st} Star kompleksleri	51
Şekil 2.18	K^{st} ve L^{st} Star kompleksleri	52
Şekil 3.1	K^{st} kompleksi	53
Şekil 3.2	Γ ve $\tilde{\Gamma}$ grafları	54
Şekil 3.3	$b\tilde{a}a$ kenarı	59
Şekil 3.4	xya^{-1} ve $ab\tilde{a}$ kenarları	59
Şekil 3.5	$a^{-1}xy$ ve $b\tilde{a}a$ kenarları	60
Şekil 3.6	aa_1b_1 ve $ab\tilde{a}$ kenarları	60
Şekil 3.7	aa_1b_1 , $ab\tilde{a}$ ve $b_1^{-1}a_2\tilde{a}$ kenarları	60
Şekil 3.8	aa_2b_2 ve ab_1a_1 kenarları	61
Şekil 3.9	$ab_2\tilde{a}^{-1}$, $\tilde{a}a_2b^{-1}$, aa_1b^1 kenarları	62
Şekil 3.10	K sunuşundan elde edilen Star kompleks	63
Şekil 3.11	Γ grafi ile T ağacı	64
Şekil 3.12	K_1^{st} Star kompleksi	65
Şekil 3.13	K^{st} Star kompleksi	65
Şekil 3.14	Γ grafi ile T ağacı	66
Şekil 3.15	\mathcal{P}_1^{st} Star kompleksi	67
Şekil 3.16	$x_1y_1z_1$, $y_1x_1z_1$, $z_1y_1x_1$ kenarları	68
Şekil 3.17	\mathcal{P}^{st} Star kompleksi	68
Şekil 3.18	x_1 köşesindeki en kısa indirgenmiş yol	69
Şekil 3.19	\mathbb{Z}_n devirli grubunun, Star kompleksi	69
Şekil 3.20	\mathcal{P}^{st} içindeki 4 uzunluklu kapalı yol	70
Şekil 3.21	\mathcal{P}^{st} Star kompleksi	71
Şekil 3.22	\mathcal{P}^{st} Star kompleksi	75
Şekil 4.1	\mathbb{Z}_3 devirli grubunun Cayley grafi	79
Şekil 4.2	\mathbb{Z}_n devirli grubundan elde edilen Cayley graf	79
Şekil 4.3	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ grubunun Cayley grafi	80
Şekil 4.4	S_3 permütasyon grubunun Cayley grafi	80
Şekil 4.5	Klein-4 grubunun işlem tablosu	81
Şekil 4.6	Klein-4 grubunun Cayley grafi	81
Şekil 4.7	Γ_i alt grafi	87
Şekil 4.8	Γ_i ve Γ_j alt grafları	88
Şekil 4.9	Γ grafi	88
Şekil 4.10	T ağacı	90
Şekil 4.11	Γ grafi	91
Şekil 4.12	T ağacı	91
Şekil 4.13	Γ grafi	92
Şekil 4.14	T ağacı	92
Şekil 4.15	Cayley kompleksteki graf	94

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda zamanını ayırarak, bilgilerinden faydalandırarak, her an tezimle ilgilenen, aynı zamanda çok kahrımı çeken sayın hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e ne kadar teşekkür etsem azdır.

Bilgisayar ve şekil çizimlerinde yardımcı olan Recep ŞAHİN'e, bilgisayarını kullandıran Prof. Dr. Musa ERDEM'e, tüm öğrenim hayatım boyunca emeği geçen tüm hocalarıma, anlayışları için çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan eşim Nergiz'e, beni yetiştiren ve bugünlere getiren aileme, uzun yıllarca yanında kaldığım sevgili babaanneme sonsuz teşekkürler...

Balıkesir, 2001

Özden KORUOĞLU



1. GİRİŞ

Bu bölümde tanımlanan bilgiler standarttır ve [3], [6], [10], [11], [13], [15], [17] gibi kaynaklarda bulunabilir.

1.1 Serbest Gruplar

X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ ($x \in X$) eşlemesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım ve $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. X^{\pm} kümesinin her bir elemanına **harf** denir. $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \quad (1.1)$$

ifadesine X üzerinde bir kelime denir ve w ile gösterilir. w kelimesinin **başlangıç harfi** $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve **bitiş harfi** de $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ olur. Burada $n=0$ ise **boş kelime** elde edilir ve 1_w ile gösterilir. (1.1) deki boş olmayan bir kelime için ($n>0$) $\varepsilon_i = +1$ oluyorsa w kelimesine **pozitif kelime** denir. Bir w kelimesinin tersi

$$x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$$

kelimesi olarak tanımlanır ve w^{-1} olarak gösterilir.

(1.1) de verilen w kelimesinin *uzunluğu*, w içindeki harflerin sayısı olarak tanımlanır ve $L(w)$ olarak gösterilir. w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu da $\sum_{x_i=x} |\varepsilon_i|$ olarak hesaplanır ve $L_x(w)$ ile gösterilir.

X kümesi üzerinde verilen iki kelime w ve u olsun. w ve u kelimelerinin *çarpımını*, w kelimesinin arkasına u kelimesini getirip yan yana koyarak elde ederiz ve bu çarpım wu ile gösterilir.

Kelimeler Üzerindeki İşlemler:

(1) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime içindeki $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa silinir. Bu yapılan işleme, kelime üzerindeki *indirgeme işlemi* denir.

$(1)^{-1}$ $\varepsilon = \pm 1$ için, herhangi bir kelime üzerinde $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenebilir. Bu işleme de kelime üzerinde *ekleme işlemi* denir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w ve w' olsun. Eğer bu kelimelerden biri, diğerine yukarıdaki (1) ve $(1)^{-1}$ işlemlerinin sonlu uygulamasıyla elde ediliyorsa bu iki kelimeye **serbest olarak eşit** denilir ve $w \sim w'$ ile gösterilir.

\sim olarak gösterilen serbest olarak eşitlik, bir denklik bağıntısıdır. Herhangi bir w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. X kümesi üzerinde tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesi $\mathcal{F}(X)$ ile gösterilsin. $\mathcal{F}(X)$ üzerindeki çarpma işlemi

$$[w] [u] = [wu] \quad (1.2)$$

olarak tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

1.1.1 Tanım: $\mathcal{F}(X)$ kümesi üzerinde (1.2) de tanımlanan işleme göre, oluşan gruba X üzerindeki **serbest (free) grup** denir ([10], [13]).

$\mathcal{F}(X)$ serbest grubu için

$$X_0 = \{ [x] : x \in X \} \quad (1.3)$$

bu grubun bir üreteç kümesidir. Açıkça görülür ki X_0 kümesinin eleman sayısı X kümesi ile aynıdır.

X kümesi üzerinde herhangi bir kelime, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ ($x \in X, \varepsilon = \pm 1$) çifti içermiyorsa bu kelimeye **indirgenmiş kelime** denir. Ayrıca (1.1) de verilen bir kelime için $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye **devirsel indirgenmiş kelime** denir.

1.1.2 Teorem: \mathcal{G} herhangi bir grup olmak üzere

$$\phi_0 : X_0 \rightarrow \mathcal{G}$$

herhangi bir dönüşüm için

$$\phi : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}$$

ϕ_0 dönüşümünün uzantısı olan bir tek grup homomorfizması vardır ([10]).□

1.1.3 Tanım: X kümesi üzerinde tanımlanan $\mathcal{F}(X)$ serbest çarpım grubu için X kümesinin eleman sayısına $\mathcal{F}(X)$ grubunun *rankı* denir ve $|X|$ ile gösterilir.

Verilen herhangi sonlu X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar $F(X)$ ile $F(Y)$ olsun. Bu grupların üreteç kümeleri X_0, Y_0 ve rankları sırasıyla $|X|$ ile $|Y|$ olmak üzere,

1.1.4 Teorem: X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar için,

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow F(X) \cong F(Y)$$

dir.

İspat: İlk önce $|X| = |Y| = n$ iken $F(X) \cong F(Y)$ olduğunu gösterelim.

$$\phi_0 : X_0 \rightarrow F(Y)$$

$$[x_i] \mapsto [y_i]$$

($x_i \in X, y_i \in Y$ ve $i = 1, 2, \dots, n$) birebir örten dönüşümü için 1.1.2 Teoremden,

$$\phi : F(X) \rightarrow F(Y)$$

ϕ_0 dönüşümünün uzantısı olan bir tek grup homomorfizması vardır. Aynı şekilde

$$\phi_1 = \phi_0^{-1} : Y_0 \rightarrow F(X)$$

birebir örten dönüşümü için de yine 1.1.2 Teoremden,

$$\Psi : F(Y) \rightarrow F(X)$$

ϕ_1 dönüşümünün uzantısı olan bir tek grup homomorfizması vardır. Biz burada ϕ veya Ψ dönüşümlerinden herhangi birinin birebir ve örten olduğunu gösterirsek ispat bitmiş olur. Bunun için bu iki dönüşümün birbirinin tersi olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $[w] \in F(Y)$ için $[w] = [y_1 y_2 \dots y_m]$ ($y_i \in Y, i = 1, 2, \dots, m$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} \phi\Psi([w]) &= \phi\Psi([y_1] [y_2] \dots [y_m]) \\ &= \phi(\Psi([y_1]) \Psi([y_2]) \dots \Psi([y_m])) \\ &= \phi(\phi_0^{-1}([y_1]) \phi_0^{-1}([y_2]) \dots \phi_0^{-1}([y_m])) \\ &= \phi_0 \phi_0^{-1}([y_1]) \phi_0 \phi_0^{-1}([y_2]) \dots \phi_0 \phi_0^{-1}([y_m]) \\ &= [y_1] [y_2] \dots [y_m] \\ &= [y_1 y_2 \dots y_m] \\ &= [w] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde $[u] \in F(X)$ için $\Psi\phi([u]) = [u]$ eşitliği de kolayca gösterilebilir. Bu eşitlikler bize $\phi = \Psi^{-1}$ veya $\Psi = \phi^{-1}$ olduğunu verir. Yani ϕ ve Ψ

birebir örten homomorfizmadır, dolayısıyla izomorfizma olurlar. Sonuç olarak $F(X) \cong F(Y)$ bulunur.

İspatın ikinci tarafı için varsayalım ki $F(X) \cong F(Y)$ olsun. $C=\{1,t\}$ olan 2 mertebeli devirli grubunu alalım.

$$\phi_o : X_o \rightarrow C$$

olacak şekilde $2^{|X|}$ tane dönüşüm vardır. 1.1.2 Teoremden, her dönüşüm için

$$\phi : F(X) \rightarrow C$$

olacak biçimde $2^{|X|}$ tane homomorfizma bulunur. Aynı şekilde

$$\phi_i : Y_o \rightarrow C$$

olacak biçimde $2^{|Y|}$ tane dönüşüm vardır ve 1.1.2 Teoremden de her dönüşüm için

$$\Psi : F(Y) \rightarrow C$$

olacak biçimde $2^{|Y|}$ tane homomorfizma bulunur. Burada $F(X)$ ve $F(Y)$ grupları izomorf olduğundan $2^{|X|} = 2^{|Y|}$ dolayısıyla $|X| = |Y|$ bulunmuş olur. \square

1.2 Grup Sunuşları

X bir küme (üreteç sembollerinin kümesi) ve X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme \mathcal{R} (bağıntı kelimelerinin kümesi) olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{P} = \langle X ; \mathcal{R} \rangle \tag{1.4}$$

ikilisine bir **grup sunuşu** denir ([10]). X ve \mathcal{R} kümelerinin her ikisi de sonlu ise \mathcal{P} sunuşunun da sonlu olduğunu söyleriz.

X kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıdaki (1) ve (1)⁻¹ işlemlerine ek olarak aşağıdaki işlemleri kullanarak, \mathcal{P} sunuşu ile bir grup tanımlarız. Bunun için X kümesi üzerinde bir kelime w olsun.

(2) w kelimesi r^ε ($r \in \mathcal{R}$, $\varepsilon = \pm 1$) şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimeyi sileriz.

$(2)^{-1}$ w kelimesi içinde herhangi bir yere r^ε ($r \in \mathcal{R}$, $\varepsilon = \pm 1$) alt kelimesini ekleriz.

X kümesi üzerinde iki kelime w_1 ve w_2 olsun. Eğer w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu $(1)^{\pm 1}$, $(2)^{\pm 1}$ tipindeki işlemler ile ulaşılabilirse, w_1 ve w_2 kelimelerine \mathcal{P} sunuşuna bağlı olarak **denk kelimeler** denir ve bu denklik $w_1 \sim_{\mathcal{P}} w_2$ ile gösterilir. Buradaki $\sim_{\mathcal{P}}$ bağıntısı X kümesi üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. w kelimesini içeren denklik sınıfını $[w]_{\mathcal{P}}$ ile gösterelim. Bu denklik sınıfı üzerinde çarpma işlemi

$$[w_1]_{\mathcal{P}} [w_2]_{\mathcal{P}} = [w_1 w_2]_{\mathcal{P}}$$

şeklinde tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu çarpma işlemi altında tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup olur. Bu grup \mathcal{P} ile tanımlanır ve $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ ile gösterilir. $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ grubunun birim elemanı $[1]_{\mathcal{P}}$ dir. $[w]_{\mathcal{P}}$ yerine çoğu zaman \bar{w} kullanılır.

Eğer $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}(\mathcal{P})$ ise \mathcal{G} grubu \mathcal{P} ile *sunuluyor* (ya da *tanımlanıyor*) denir. Ayrıca N , $\{ [r] : r \in \mathcal{R} \}$ kümesinin *normal kapanışı* olmak üzere aşağıdaki teorem elde edilir.

1.2.1 Teorem:

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}) \cong F(X)/N$$

İspat: \mathcal{P} sunuşu ile tanımlanan $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ grubu ve X kümesi için,

$$\theta_0 : X \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{P})$$

$$x \mapsto [x]_{\mathcal{P}}$$

dönüşümünü tanımlayalım. 1.1.2 Teoreminden, bu dönüşümün genişlemesi olan

$$\theta : F(X) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{P})$$

$$[w] \mapsto [w]_{\mathcal{P}}$$

bir tek homomorfizması vardır ve $\theta|_X = \theta_0$ dir. Buradaki θ homomorfizması örtendir. Ayrıca $\text{Çek}\theta = N$ dir. Dolayısıyla 1. izomorfizma teoremi ile (bak. [8])

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}) \cong F(X)/N$$

bulunur. \square

Bir G grubu (1.4) de verilen sunuşa sahip olmak üzere ve herhangi bir A grubu için

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

X kümesinde bir kelime olsun.

$$\theta : x \mapsto a_x$$

($a \in A$) olacak biçimde

$$\theta(w) = a_{x_1}^{\varepsilon_1} a_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{x_n}^{\varepsilon_n}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bunlardan yararlanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

1.2.2 Teorem:

$$\phi : G \rightarrow A$$

$$\bar{x} \mapsto a_x$$

olacak biçimde bir grup homomorfizması vardır ancak ve ancak $\forall r \in \mathcal{R}$ için $\theta(r) = \mathbf{1}_A$ dir.

İspat: Varsayalım ki $\forall r \in \mathcal{R}$ için $\theta(r) = \mathbf{1}_A$ olsun. 1.1.2 Teoreminden,

$$\phi : F(X) \rightarrow A$$

$$[x] \mapsto a_x$$

olacak biçimde bir tek grup homomorfizması vardır. Burada dikkat edilirse

$$\phi([w]) = \theta(w) = a_{x_1}^{\varepsilon_1} a_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{x_n}^{\varepsilon_n}$$

dir. $N = \{[r] : r \in \mathcal{R}\} \subset \text{Çek}\phi$ olarak bulunur. Çünkü $\phi([r]) = \theta(r) = \mathbf{1}_A$ dir. Ayrıca $\{[r] : r \in \mathcal{R}\}$ kümesini içeren en küçük normal alt grup N olduğundan, buradan da $N \subset \text{Çek}\phi$ yazabiliriz. Şimdi de

$$\phi_* : F(X)/N \rightarrow A$$

$$\phi_*([w]N) = \phi([w]) \quad (= \theta(w))$$

olarak tanımlayalım.

$[w_1]N = [w_2]N$ için $[w_1]^{-1} [w_2] \in N \subset \text{Çek}\phi$ olduğundan $\phi([w_1]^{-1} [w_2]) = \mathbf{1}_A$ bulunur. Dolayısıyla $\phi([w_1]) = \phi([w_2])$ eşitliğinden de $\phi_*([w_1]N) = \phi_*([w_2]N)$ bulunur

ki bu bize ϕ_* dönüşümünün iyi tanımlılığını verir. Ayrıca ϕ_* dönüşümünün bir grup homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Bundan başka

$$\phi_*(\bar{x}) = \phi_*(xN) = \phi([x]) = \theta(x) = a_x$$

eşitliği de sağlanmış olur.

Şimdi de ispatın diğer tarafı için, böyle bir ϕ homomorfizmasının olduğunu varsayalım. $r \in \mathcal{R}$ için

$$[r]N = 1_G$$

olduğunu biliyoruz.

$$r = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

olmak üzere

$$[r]N = [x_1]^{\varepsilon_1} N [x_2]^{\varepsilon_2} N \dots [x_n]^{\varepsilon_n} N = \bar{x}_1^{\varepsilon_1} \bar{x}_2^{\varepsilon_2} \dots \bar{x}_n^{\varepsilon_n}$$

olduğundan

$$\phi(\bar{x}_1^{\varepsilon_1} \bar{x}_2^{\varepsilon_2} \dots \bar{x}_n^{\varepsilon_n}) = \phi(1_G) = 1_A$$

bulunur.

$$\bar{x}_i \mapsto a_{x_i}$$

dönüşümü homomorfizma olduğundan

$$\phi(\bar{x}_1^{\varepsilon_1} \bar{x}_2^{\varepsilon_2} \dots \bar{x}_n^{\varepsilon_n}) = a_{x_1}^{\varepsilon_1} a_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{x_n}^{\varepsilon_n} = \theta(r)$$

olarak bulunur ki bu da bize $\forall r \in \mathcal{R}$ için $\theta(r) = 1_A$ olduğunu verir. \square

1.2.3 Teorem: X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $\mathcal{P} = \langle X ; \rangle$ şeklindedir ([10], [13]).

Burada dikkat edilirse bağıntı kelimelerinin kümesi olan $\mathcal{R} = \emptyset$ dir. \square

1.2.4 Teorem: Bir t elemanı tarafından üretilen sonsuz mertebeli devirli grubun sunuşu $\mathcal{P} = \langle t ; \rangle$ şeklindedir.

İspat: Sonsuz mertebeli devirli grupta, sonlu mertebeli bir eleman olmadığından $\mathcal{R} = \emptyset$ olur. \square

1.2.5 Teorem: Sonsuz mertebeli devirli gruplar, serbest gruptur.

İspat: 1.2.3 Teoreminden sonuç görülür.□

1.2.6 Sonuç: $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ([8]), rankı 1 olan serbest gruptur.

İspat: Bu grup 1 elemanı tarafından üretilen sonsuz mertebeli devirli grup olduğundan 1.2.5 Teoreminden, istenen sonuç çıkar.□

1.2.1 Direkt Çarpım Grubu

Bu grup ile ilgili ayrıntılı bilgiler [8], [10], [13] gibi kaynaklarda bulunabilir.

A ve B gibi herhangi iki grup verilsin. A ve B grupları üzerindeki işlemler yardımıyla $G = A \times B$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde yeni bir işlem tanımlayarak, G kümesinin bu işlem altında bir grup olduğunu söyleyeceğiz ve bu grubun sunuşunu vereceğiz.

A ve B çarpma işlemi altında tanımlı iki grup olsun. $(a, b), (a', b') \in G$ herhangi iki eleman ise, bunların çarpımı

$$(a, b) (a', b') = (aa', bb') \quad (1.5)$$

$(a, a' \in A, b, b' \in B)$ olarak tanımlayalım. Bu çarpımdaki aa' bileşeni A grubundaki işleme göre, bb' bileşeni B grubundaki işleme göre hesaplanmıştır.

1.2.1.1 Tanım: G kümesi (1.5) ile tanımlanan işleme göre bir gruptur. Bu gruba A ve B gruplarının **direkt çarpım grubu** denir ve $A \times B$ ile gösterilir. A ve B gruplarının her ikisinin de değişmeli olması halinde G grubunu da değişmeli olacağı açıktır. Sonuç olarak kartezyen çarpımdan dolayı

$$|G| = |A| |B|$$

dir.

1.2.1.1 Direkt Çarpım Grubunu Sunuşu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun direkt çarpım grubunun sunuşu [10], [13] kaynaklarında aşağıdaki gibi verilmiştir.

1.2.1.1.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle X; S \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_B = \langle Y; T \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G nin sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle X, Y; S, T, \mathcal{R} \rangle \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{R} = \{ xyx^{-1}y^{-1} : x \in X, y \in Y \}$ dir.

1.2.2 Serbest Çarpım Grubu

Serbest çarpım grubu ile ilgili detaylı bilgiler [3], [10], [13] kaynaklarında bulunabilir.

G ve \mathcal{H} gibi iki grup verilsin. $a_i \in G$ (ya da \mathcal{H}), $i=1, 2, \dots, n$, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$a_1 a_2 \dots a_n \quad (1.7)$$

biçimindeki ifadeye G ve \mathcal{H} üzerinde bir **kelime** denir.

i) $n=0$ ise bu kelimeye boş kelime denir ve 1 ile gösterilir.

ii) (1.7) ifadesi a_1, a_2, \dots, a_n elemanlarının sonlu bir dizisidir.

iii) (1.7) ile verilen kelimenin tersi $a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ kelimesidir. Burada $a_i \in G$ (ya da \mathcal{H}) ise a_i^{-1} elemanı, a_i elemanının G (ya da \mathcal{H}) grubu içindeki tersidir.

Biz daima G ve \mathcal{H} gruplarını farklı kabul edeceğiz.

Kelimeler Üzerinde İşlemler:

(I) Bir kelimenin a_i terimlerinden bazıları G ya da \mathcal{H} grubunun birim elemanı iseler bu kelime üzerinden a_i elemanını sileriz.

(I)⁻¹ Yukarıdaki işlemin tersini yapabiliriz. Yani, a_i terimi G ya da \mathcal{H} grubunun birim elemanı olmak üzere bu a_i elemanını bir kelimeye ekleyebiliriz.

(II) Bir kelime içindeki a_i, a_{i+1} ardışık terimlerinin her ikisi de \mathcal{G} (ya da \mathcal{H}) grubu içinde ise bu iki terimi \mathcal{G} (ya da \mathcal{H}) grubu içindeki çarpımları olan tek bir eleman ile değiştirebiliriz.

(II)⁻¹ yukarıdaki (II) işleminin tersini yapabiliriz.

\mathcal{G} ve \mathcal{H} grupları üzerinde iki kelime u ve u' olsun. Bu iki kelimedenden biri, diğerine yukarıdaki işlemlerin sonlu sayıda uygulanmasından elde ediliyorsa bu iki kelimeye **denk kelimeler** denir ve $u \sim u'$ ile gösterilir.

Not: u ve u' kelimeleri üzerinde tanımlanan \sim bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

u ve v , \mathcal{G} ile \mathcal{H} grupları üzerinde birer kelime olmak üzere, u kelimesinin denklik sınıfı $[u]$ ile gösterilir. Bu denklik sınıfları üzerindeki çarpma işlemi

$$[u] [v] = [uv] \quad (1.8)$$

ile tanımlanır. Tanımlanan bu çarpma işlemi iyi tanımlıdır.

1.2.2.1 Teorem: Denklik sınıflarının kümesi (1.8) ile tanımlanan işlem altında, birim elemanı $[1]$ ve herhangi bir $[u]$ elemanının tersi $[u^{-1}]$ olan bir grup olur (bak. [10]).□

1.2.2.2 Tanım: 1.2.2.1 Teorem ile tanımlanan gruba \mathcal{G} ve \mathcal{H} gruplarının **serbest çarpım grubu** denir ve $\mathcal{G} * \mathcal{H}$ ile gösterilir.

1.2.2.1 Serbest Çarpım Grubunun Sunuşu

\mathcal{A} ve \mathcal{B} herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

1.2.2.1.1 Teorem: \mathcal{A} ve \mathcal{B} grupları sırasıyla

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \langle X; S \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \langle Y; T \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu durumda \mathcal{A} ve \mathcal{B} gruplarının serbest çarpımı olan $\mathcal{G} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$ grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \langle X, Y; S, T \rangle \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır ([10], [13]).□

1.2.3 Karışımli Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olsun. $C \leq A$ alt grubu verilsin. $\phi : C \rightarrow B$ birebir homomorfizması için A ve B gruplarının C alt grubu ile tanımladıkları karışımli serbest çarpım grubu ile ayrıntılı bilgiler [3], [10], [13] kaynaklarında bulunabilir. Bu grup $G = A *_C B$ ile gösterilir ve sunuşu aşağıdaki gibidir.

1.2.3.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle X; S \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_B = \langle Y; T \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. $C \leq A$ alt grubunun üreteç kümesi Z olmak üzere $G = A *_C B$ grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle X, Y; S, T, \{\phi(z)z^{-1} : z \in Z\} \rangle \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlanır. \square

1.3 1-Kompleksler (Graflar)

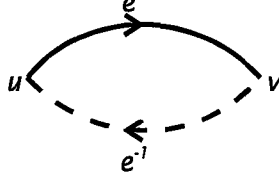
Bu bölümle ilgili ayrıntılı bilgiler [3], [6], [9], [15] kaynaklarında bulunabilir.

V ve E birbirinden ayrık iki küme ve

$$\iota : E \rightarrow V, \tau : E \rightarrow V, \cdot^{-1} : E \rightarrow E$$

bu kümeler arasında, her $e \in E$ için, $\iota(e) = \tau(e^{-1})$, $\tau(e) = \iota(e^{-1})$, $(e^{-1})^{-1} = e$ ve $e \neq e^{-1}$ koşullarını sağlayan üç fonksiyon olsun. V, E kümelerinden ve ι, τ, \cdot^{-1} fonksiyonlarından oluşan $(V, E, \iota, \tau, \cdot^{-1})$ yapısına **1-kompleks (graf)** denir ve Γ ile gösterilir (Genelde gruplarla ilgili konularda 1-kompleks olarak adlandırılır). Burada V ($V(\Gamma)$) kümesine **köşe kümesi**, E ($E(\Gamma)$) kümesine **kenar kümesi**, ι fonksiyonuna **başlangıç fonksiyonu**, τ fonksiyonuna **bitiş fonksiyonu**, \cdot^{-1} fonksiyonuna da **ters fonksiyon** denir. Ayrıca $e \in E$ için $\iota(e)$ köşesine e kenarının **başlangıç köşesi** ve $\tau(e)$ köşesine de e kenarının **bitiş köşesi** denir.

Bir graf çiziminde $\iota(e)=u$ ve $\tau(e)=v$ olan bir e kenarı u köşesinden başlayıp, v köşesinde biten yönlü bir doğru parçasıyla temsil edilir. Bu e kenarının tersi olan e^{-1} kenarı da, v köşesinden başlayıp, u köşesinde biter ve ters yönde yönlendirilir. Şekil olarak,



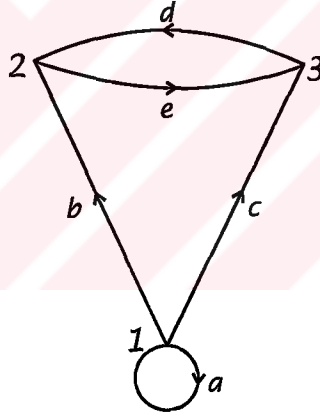
Şekil 1.1

ile gösterilir.

1.3.1 Örnek: Aşağıda verilen Γ grafının köşeleri ve kenarları

$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}, d, d^{-1}, e, e^{-1}\}$$

şeklindedir.



Şekil 1.2

Buradaki grafa d kenarı için $\iota(d)=3$, $\tau(d)=2$ dir. c^{-1} kenarı için $\iota(c^{-1})=3$, $\tau(c^{-1})=1$ olduğu görülmektedir. \diamond

E kenar kümesindeki e, e^{-1} kenar çiftlerinden sadece birinin seçilmesiyle oluşturulan kümeye Γ grafının **yönlendirilmiş kenar kümesi** denir ve e^+ ile gösterilir. Kenar kümesi e^+ olan grafa **yönlendirilmiş graf** denir. 1.3.1 Örnekte, $e^+ = \{a, b, c, d, e\}$ olarak verilebilir.

Bir $e \in E$ kenarı için $\iota(e)=\tau(e)$ oluyorsa bu kenara **halka** denir ve şekil olarak

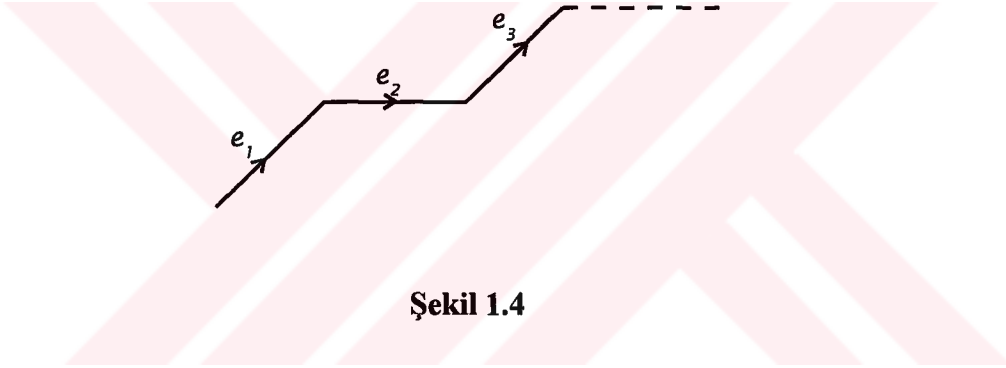


Şekil 1.3

ile gösterilir. 1.3.1 Örnekteki a kenarı bir halkadır.

Bir Γ grafında, $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ için, $\iota(e_1) = \iota(e_2)$ ve $\tau(e_1) = \tau(e_2)$ için $e_1 = e_2$ oluyorsa, bu Γ grafına **basit graf** denir. \mathcal{V}, \mathcal{E} kümelerinin her ikisinde sonlu ise Γ grafi da sonludur.

e_1, e_2, \dots, e_n kenarların sonlu bir dizisi olmak üzere, $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$ oluyorsa, e_1, e_2, \dots, e_n dizisine Γ grafında bir **yol** denir. Bir yoldaki kenarların sayısına **yolun uzunluğu** denir ve $L(\alpha)$ ile gösterilir.



Şekil 1.4

e_1, e_2, \dots, e_n yolunda, $\iota(e_i) = \tau(e_n)$ olan bir yol ise **kapalı yol**, her $1 \leq i \leq n$ için, $\iota(e_i)$ köşelerinin hepsi birbirinden farklı olan bir yol ise **basit yol** denir. \mathcal{V} köşesindeki bir v köşesine **boş yol** denir ve 1_v ile gösterilir. Bu boş yolda kenar olmadığı ve her $v \in \mathcal{V}$ için, $\tau(1_v) = \iota(1_v) = v$ ve $1_v = 1_v^{-1}$ dir. 1.3.1 Örneğine bakılırsa acd bir yol, $acdb^{-1}$ kapalı bir yoldur.

\mathcal{V} kümesinin bir alt kümesi \mathcal{V}' ve \mathcal{E} kümesinin bir alt kümesi de \mathcal{E}' olsun. Herhangi bir $e' \in \mathcal{E}'$ elemanı için,

i) $\iota(e'), \tau(e') \in \mathcal{V}'$,

ii) $(e')^{-1} \in \mathcal{E}'$

şartları sağlanıyorsa, \mathcal{V}' köşe kümesi, \mathcal{E}' kenar kümesinden oluşan Γ' grafına Γ grafının **alt grafi** denir.

Bir Γ grafi içindeki herhangi iki köşeyi birleştiren bir yol varsa, bu Γ grafına **bağlantılı graf** denir.

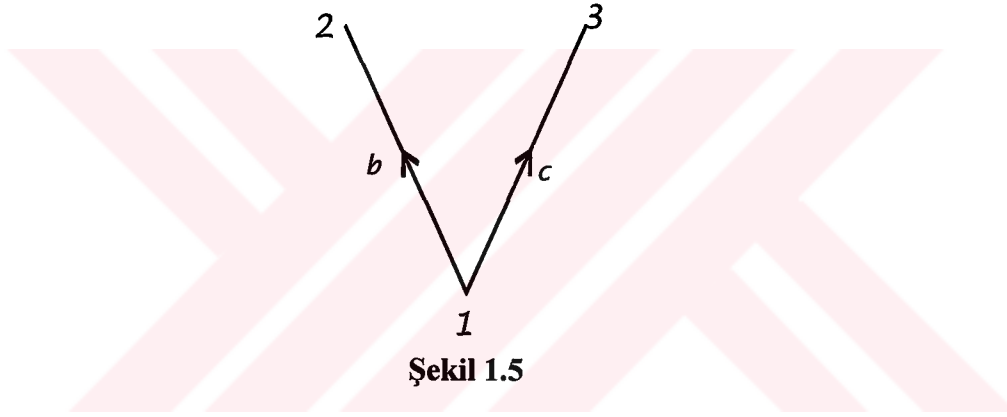
Bir Γ grafının içindeki herhangi bir e_1, e_2, \dots, e_n yolunu alalım. Bu yol içinde ee' olacak şekilde yan yana iki kenar yok ise bu yola **indirgenmiş yol** denir. 1.3.1 Örnekte acd indirgenmiş yol fakat $ace'ed$ yolu indirgenmiş bir yol değildir.

Bağlantılı olan ve içinde boş yol hariç, indirgenmiş kapalı yol olmayan bir Γ grafına **ağaç (tree)** denir. Ayrıca bağlantılı bir Γ grafının \mathcal{T} gibi alt grafi,

i) \mathcal{T} bir ağaç,

ii) \mathcal{T} nin köşe kümesiyle, Γ grafının köşe kümesi aynı,

şartlarını sağlıyorsa bu \mathcal{T} gibi alt grafa **maksimal ağaç** denir. 1.3.1 Örnek için Şekil 1.5 deki alt graf, bir maksimal ağaçtır.



1.3.1 Graflar Arasındaki Dönüşümler

$\Gamma(V, E, \iota, \tau, \cdot')$ ve $\Gamma'(V', E', \iota, \tau, \cdot')$ olarak iki graf verilsin. Köşeleri köşelere, kenarları kenarlara dönüştüren

$$\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

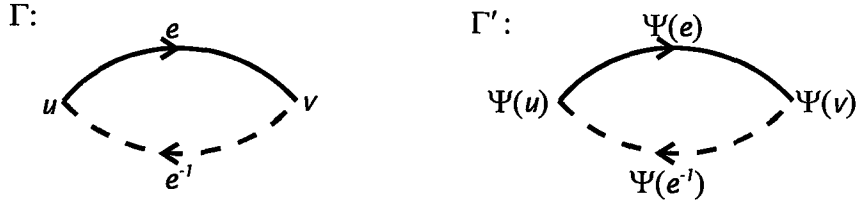
dönüşümü,

i) $\Psi(\iota(e)) = \iota(\Psi(e))$

ii) $\Psi(\tau(e)) = \tau(\Psi(e))$

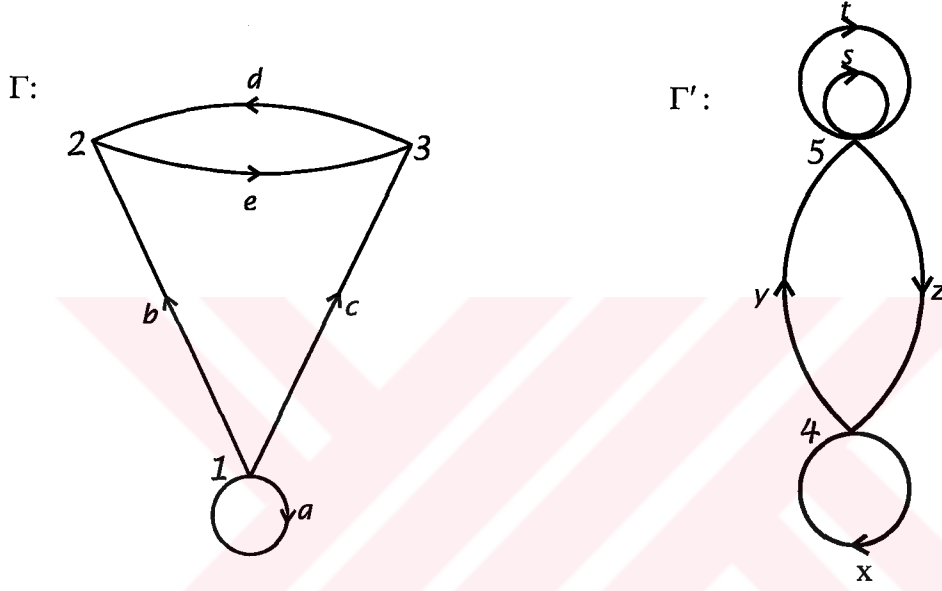
iii) $\Psi(e') = \Psi(e)'$

koşullarını sağlıyorsa Ψ dönüşümüne **grafların bir dönüşümü** denir.



Şekil 1.6

1.3.1.1 Örnek: Aşağıda Şekil 1.7 de verilen graflar için Ψ dönüşümü, graflar arasında bir dönüşümdür.



Şekil 1.7

$$\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

$$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 5$$

$$a \mapsto x (a^{-1} \mapsto x^{-1}), b \mapsto y (b^{-1} \mapsto y^{-1}), c \mapsto z^{-1} (c^{-1} \mapsto z), d \mapsto s (d^{-1} \mapsto s^{-1}) \diamond$$

Bir

$$\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

grafların dönüşümü için $v \in V(\Gamma)$ olmak üzere $\Psi(v) = v'$ ise v köşesine v' üzerine uzanıyor denir. α' , Γ' içinde bir yol ve $\iota(\alpha') = v'$ olsun. $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere, v köşesi v' üzerine uzanıyor ve $\Psi(\alpha) = \alpha'$ ise α yoluna, α' yolunun v köşesindeki **örtüsü** denir.

1.3.2 Starlar

Bir Γ grafi verilsin. Γ grafinin $v \in V$ köşesi için, başlangıç köşesi v olan kenarların kümesine v köşesinin **Star kümesi** denir ve $\text{Star}(v)$ ile gösterilir. Bu küme başka bir deyişle,

$$\text{Star}(v) = \{ e \in E : \iota(e) = v \}$$

şeklindedir. 1.3.1 Örneğine dikkat edilirse

$$\text{Star}(1) = \{ b, c, a, a^{-1} \}, \text{Star}(2) = \{ d^{-1}, e, b^{-1} \}, \text{Star}(3) = \{ d, e^{-1}, c^{-1} \}$$

olarak bulunur.

Bir $v \in V$ köşesinin Star kümesine ait olan elemanların sayısına v köşesinin **derecesi** denir ve $d(v)$ ile gösterilir. Toplam kenar sayısı $|E|$ olan bir Γ grafi için

$$|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

olduğu açıktır.

Bir Γ grafindaki bir v köşesi için $\text{Star}(v)$ kümesinin eleman sayısı 1 ise o köşeye **uç köşe** denir.

1.3.3 Grafların Yerel Dönüşümleri

Grafların,

$$\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

şeklinde bir dönüşümü verilsin. Bu grafların Star kümeleri için Ψ dönüşümünün

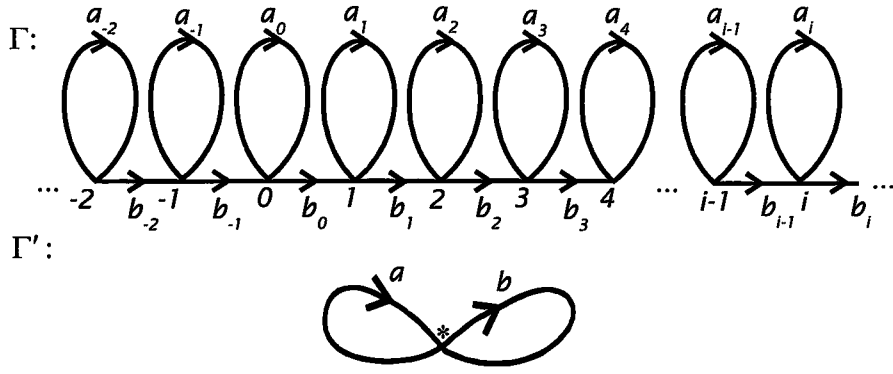
$$\text{Star}(v) \rightarrow \text{Star}(\Psi(v))$$

olan $\Psi|_{\text{Star}}$ kısıtlanmış dönüşümüne **grafların yerel dönüşümü** denir. Bir yerel dönüşüm birebir örten ise Ψ dönüşümü **yerel birebir örtendir** denir.

1.3.3.1 Örnek: Şekil 1.8 de verilen graflar için

$$\text{Star}(i) = \{ a_i, a_i^{-1}, b_i, b_i^{-1} \} \text{ ve } \text{Star}(*) = \{ a, a^{-1}, b, b^{-1} \}$$

dir.



Şekil 1.8

Bu graflar için

$$\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

$$0, 1, -1, \dots \mapsto *$$

$$a_i \mapsto a$$

$$b_i \mapsto b$$

dönüşümü yerel birebir örtendir. \diamond

1.3.4 1. Temel Gruplar

Bu bölümle ilgili ayrıntılı bilgilere [4], [13] kaynaklarında rastlanabilir.

Bir Γ grafi, tek köşeli ise kenarları harf olarak alıp, yolları da bir kelime olarak alabiliriz. Bu Γ grafindan, kenarlar ve yollar ile 1.1.1 Tanımdaki, serbest grubu elde edebiliriz. $[\alpha]$ şeklindeki yolların denklik sınıfları Γ üzerinde tanımlanan serbest grubun elemanlarıdır. Γ grafi her zaman tek köşeli olmayabilir. Bunun için aşağıdaki tanımları vereceğiz.

Yolların Çarpımı:

α ve β , Γ grafinda herhangi iki yol olsun. Bu iki yol için $\tau(\alpha) = \iota(\beta)$ ise bu iki yolu biz $\alpha\beta$ şeklinde yan yana yazarak yeni bir yol elde etmiş oluruz.



Şekil 1.9

Bu şekilde iki yol yan yana yazılabiliyorsa bu işleme **yolların çarpımı** denir. Bundan sonraki $\alpha\beta$ çarpımları için, $\tau(\alpha)=\iota(\beta)$ koşulunu sağladığımızı kabul edeceğiz.

Yollar Üzerindeki İşlemler:

(1) $\varepsilon=\pm 1$ olmak üzere, herhangi bir yol içindeki $e^\varepsilon e^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa silinir. Bu yapılan işleme, yol üzerindeki *indirgeme işlemi* denir.

(1)⁻¹ $\varepsilon=\pm 1$ için, herhangi bir yol üzerinde $e^\varepsilon e^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters kenar çiftleri eklenebilir. Bu işleme de yol üzerinde *ekleme işlemi* denir.

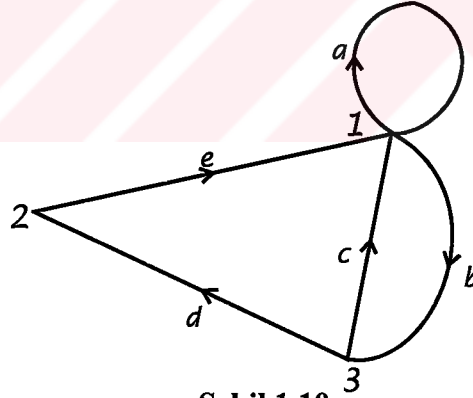
Γ içinde iki yol α ve α' olsun. Eğer bu yollardan biri, diğerine yukarıdaki (1) ve (1)⁻¹ işlemlerinin sonlu uygulamasıyla elde ediliyorsa bu iki yola **birbirine denktir** denir ve $\alpha \sim \alpha'$ ile gösterilir.

\sim olarak gösterilen denklik, bir denklik bağıntısıdır. Herhangi bir α yolunu bulunduran denklik sınıfı $[\alpha]$ ile gösterilir.

1.3.4.1 Örnek: Şekil 1.10 ile verilen Γ grafi için

$$dea^{-1}ac^{-1}b^{-1}b \sim dec^{-1}b^{-1}b \sim dec^{-1} \sim dee^{-1}e c^{-1}$$

olduğundan $dea^{-1}ac^{-1}b^{-1}b$ ve $dee^{-1}e c^{-1}$ yolları denktir.



Şekil 1.10

◇

Yolların denklik sınıfları için aşağıdaki çarpma işlemi tanımlayalım.

$$[\alpha] [\beta] = [\alpha\beta] \quad (1.11)$$

$\alpha \sim \alpha'$ ve $\beta \sim \beta'$ olmak üzere $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Buradan da (1.11) de tanımlanan işlemin iyi tanımlı olduğu görülür.

Bir Γ grafi içinde bir v köşesi verilsin. Bu köşedeki

$$\{[\alpha] : \iota(\alpha)=\tau(\alpha)=v\} \quad (1.12)$$

kapalı yolların denklik sınıflarının kümesini alalım.

1.3.4.2 Teorem: (1.12) kümesi, (1.11) şeklinde tanımlanan işleme göre bir gruptur.

İspat: $\mathcal{A} = \{[\alpha] : \iota(\alpha) = \tau(\alpha) = \nu\}$ şeklindeki kümenin (1.11) işlemine göre grup özelliklerini sağladığını gösterelim.

i) Kapalılık: $[\alpha], [\beta] \in \mathcal{A}$ için α ve β , ν köşesinde iki kapalı yoldur. Dolayısıyla $\alpha\beta$ yolu da ν köşesinde kapalı bir yol olur ki bu bize $[\alpha][\beta] \in \mathcal{A}$ sonucunu verir.

ii) Birleşme: $[\alpha], [\gamma], [\beta] \in \mathcal{A}$ için,

$([\alpha][\gamma])([\beta]) = ([\alpha\gamma])([\beta]) = [(\alpha\gamma)\beta] = [\alpha(\gamma\beta)] = ([\alpha])([\gamma\beta]) = ([\alpha])([\gamma][\beta])$ eşitliği bulunur.

iii) Birim eleman: $\mathbf{1}_\nu$ ile gösterilen ν köşesindeki boş yoldan elde edilen $[\mathbf{1}_\nu]$ denklik sınıfı birim elemandır. Gerçekten $[\alpha] \in \mathcal{A}$ için,

$$[\alpha][\mathbf{1}_\nu] = [\mathbf{1}_\nu][\alpha] = [\alpha]$$

eşitliği sağlanır. Çünkü $\alpha\mathbf{1}_\nu$ ile $\mathbf{1}_\nu\alpha$ yolları α yoluna denktir.

iv) Ters eleman: $n \in \mathbb{N}$, $e_i \in E(\Gamma)$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$\alpha = e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n} \text{ şeklinde } \nu \text{ köşesindeki bir kapalı yolun tersi } \alpha^{-1} = e_n^{-\varepsilon_n} e_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots e_1^{-\varepsilon_1}$$

olarak bulunur. Gerçekten $[\alpha\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}\alpha] = [\mathbf{1}_\nu]$ dir. Sadece $[\alpha^{-1}\alpha] = [\mathbf{1}_\nu]$ eşitliğini, $\alpha^{-1}\alpha \sim \mathbf{1}_\nu$ olarak aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$e_n^{-\varepsilon_n} e_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots e_1^{-\varepsilon_1} e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n} \sim e_n^{-\varepsilon_n} e_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots e_2^{-\varepsilon_2} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n} \sim \dots e_n^{-\varepsilon_n} e_n^{\varepsilon_n} \sim \mathbf{1}_\nu$$

Böylece grup olma özelliklerinin hepsi sağlanmış olur. \square

1.3.4.3 Tanım: 1.3.4.2 Teoremdeki gruba ν köşesindeki **1.Temel grup** denir ve $\Pi_1(\Gamma, \nu)$ ile gösterilir. Grubun birim elemanı ν köşesindeki boş yolun $[\mathbf{1}_\nu]$ denklik sınıfıdır. Herhangi $[\alpha]$ elemanın tersi de $[\alpha^{-1}]$ dir.

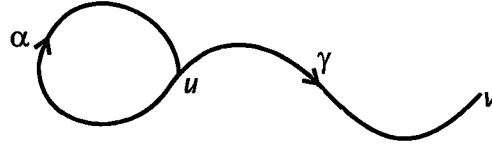
Şekil 1.10 da görüldüğü gibi buradan $\Pi_1(\Gamma, \mathbf{1})$, $\Pi_1(\Gamma, \mathbf{2})$ ve $\Pi_1(\Gamma, \mathbf{3})$ olmak üzere üç tane 1.Temel grup elde edebiliriz.

1.3.4.4 Teorem: u ve v bir Γ grafında birbirine bir yol ile bağlı iseler

$$\Pi_1(\Gamma, u) \cong \Pi_1(\Gamma, v)$$

dir.

İspat: Varsayalım ki γ , u ve v köşelerini bağlasın. α , u köşesinde bir kapalı yol olmak üzere kabaca bu yollar şu şekildedir.



Şekil 1.11

Şekilden de görüldüğü gibi $\gamma^{-1}\alpha\gamma$, v köşesinde bir kapalı yoldur. $\alpha \sim \alpha'$ iken $\gamma^{-1}\alpha\gamma \sim \gamma^{-1}\alpha'\gamma$ olduğu görülür ki bu bize aşağıda tanımlanan dönüşümün iyi tanımlılığını verir.

$$\Psi : \Pi_1(\Gamma, u) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, v)$$

$$[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$$

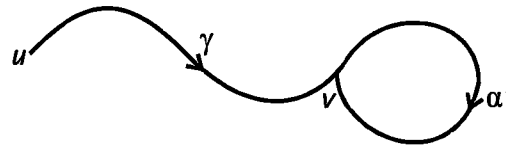
dönüşümü bir homomorfizmadır. Gerçekten

$$\Psi([\alpha] [\beta]) = \Psi([\alpha\beta]) = [\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma]$$

$$\Psi([\alpha])\Psi([\beta]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma] [\gamma^{-1}\beta\gamma] = [\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma] = [\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma]$$

eşitlikleri vardır.

α' , v köşesinde bir kapalı yol olmak üzere kabaca şu şekli çizebiliriz.



Şekil 1.12

$$\phi : \Pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, u)$$

$$[\alpha'] \mapsto [\gamma\alpha'\gamma^{-1}]$$

dönüşümünün de homomorfizma olduğu kolayca gösterilebilir.

α , u köşesinde herhangi bir kapalı yol olmak üzere $[\alpha]$ elemanı için,

$$\phi\Psi([\alpha]) = \phi([\gamma^{-1}\alpha\gamma]) = [\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma)\gamma^{-1}] = [\alpha]$$

olduğundan bu iki dönüşüm birbirinin tersidir. Tersisi olan bu homomorfizmalar birebir örten olacağından izomorfizmadırlar. Sonuç olarak,

$$\Pi_1(\Gamma, u) \cong \Pi_1(\Gamma, v)$$

bulunur. \square

Γ bir graf ve G bir grup olmak üzere

$$\theta : E \rightarrow G \quad (1.13)$$

$$e \mapsto g_e$$

dönüşümü için $g_{e^{-1}} = g_e^{-1}$ olarak tanımlanıyorsa, Γ grafının kenarları, G grubunun elemanları tarafından temsil edilmiş olur.

1.3.4.5 Örnek: Şekil 1.10 da verilen Γ grafi ve $G = \langle t \rangle$, 7 mertebeli devirli grubu için,

$$g_a = 1 \quad g_a^{-1} = 1$$

$$g_b = t \quad g_b^{-1} = t^5$$

$$g_c = t^4 \quad g_c^{-1} = t^2$$

$$g_d = t^3 \quad g_d^{-1} = t^3$$

$$g_e = t^3 \quad g_e^{-1} = t^3$$

olarak Γ grafının kenarlarını G grubunun elemanlarıyla temsil etmiş oluruz. \diamond

$\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ bir Γ grafi içinde bir yol olmak üzere (1.13) deki dönüşümü

$$\theta(\alpha) = g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_n} \quad (1.14)$$

olarak tanımlayalım. 1.3.4.5 Örnekteki abc^2b^{-1} yolu için

$$\theta(abc^2b^{-1}) = 1t(t^4)^2t^{-1} = t^8 = t$$

olarak bulunur. \diamond

1.3.4.6 Önteorem: (1.14) ile tanımlanan θ dönüşümü için $\alpha \sim \alpha'$ olmak üzere $\theta(\alpha) = \theta(\alpha')$ dır.

İspat: İlk önce özel durum için ispatı verip, daha sonra genelleştirelim.

Özel durum: Varsayalım ki α' yolu α yolundan ekleme işlemi ile elde edilmiş olsun. O halde

$$\alpha = e_1 e_2 \dots e_i e_{i+1} \dots e_n$$

olmak üzere

$$\alpha' = e_1 e_2 \dots e_i e e^{-1} e_{i+1} \dots e_n$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned} \theta(\alpha') &= g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_i} g_e g_{e^{-1}} g_{e_{i+1}} \dots g_{e_n} \\ &= g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_i} g_{e_{i+1}} \dots g_{e_n} \quad (g_{e^{-1}} = g_e^{-1}) \\ &= \theta(\alpha) \end{aligned}$$

Genel durum: $\alpha \sim \alpha'$ denkliği

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m = \alpha'$$

sonlu zinciri ile elde edilmiş olsun. Burada α_{j+1}, α_j den indirgeme veya ekleme işlemi ile elde edilmiştir ($j=0, 1, \dots, m$). Özel durumdan biliyoruz ki $\theta(\alpha) = \theta(\alpha_{j+1})$ idi. O halde bunu genelleştirirsek,

$$\theta(\alpha) = \theta(\alpha_0) = \theta(\alpha_1) = \dots = \theta(\alpha_m) = \theta(\alpha')$$

bulunur. □

\mathcal{G} herhangi bir grup olmak üzere, (1.14) dönüşümünden yararlanarak

$$\hat{\theta}: \Pi_1(\Gamma, \nu) \rightarrow \mathcal{G} \quad (1.15)$$

$$\hat{\theta}([\alpha]) = \theta(\alpha)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm 1.3.4.6 Önteorem ile iyi tanımlıdır. θ dönüşümünün (1.14) tanımından yararlanarak, $\hat{\theta}$ dönüşümünün bir grup homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Sonuç olarak, herhangi bir 1.Temel gruptan bir \mathcal{G} grubuna (1.15) şeklinde bir homomorfizma tanımlayabiliriz.

1.3.5 1.Temel Grupların Özellikleri

Bu alt bölümde 1.Temel grupların üreteç kümesini bulup, 1.Temel grubun serbest grup olduğunu göstereceğiz.

1.3.5.1 Önteorem: Γ bağlantılı bir graf ve \mathcal{T} de bu grafın maksimal ağacı olsun. α , \mathcal{T} ağacı içinde bir kapalı yol olmak üzere $[\alpha] = [1_{\mathcal{U}(\alpha)}]$ dır.

İspat: Ağaç tanımında indirgenmiş kapalı yol yok idi. α , kapalı bir yol ise indirgeme işlemleriyle $\mathbf{1}_{\iota(\alpha)}$ boş yoluna denk olacaktır. Böylece istenilen sonuç elde edilir.□

Γ bağlantılı graf, \mathcal{T} bu grafın maksimal ağacı olsun. o , Γ grafında bir köşe olmak üzere $\Pi_1(\Gamma, o)$ grubunu alalım. γ_v , o köşesini v köşesine \mathcal{T} de bağlayan en kısa yol (geodesic) olsun. Γ nın bir e kenarı için

$$t_e = [\gamma_{\iota(e)} e \gamma^{-1}_{\tau(e)}] \quad (1.16)$$

o da kapalı yol olan $\gamma_{\iota(e)} e \gamma^{-1}_{\tau(e)}$ dan yararlanarak t_e denklik sınıfını tanımlayalım. Buna göre,

1.3.5.2 Önteorem: Bir $e \in \mathcal{T}$ için $t_e = [\mathbf{1}_o]$ olur.

İspat: $e \in \mathcal{T}$ olduğundan $t_e = [\gamma_{\iota(e)} e \gamma^{-1}_{\tau(e)}]$ denklik sınıfı içindeki $\gamma_{\iota(e)} e \gamma^{-1}_{\tau(e)}$ kapalı yolu \mathcal{T} içinde bir kapalı yol olur. Ağaç tanımından $\gamma_{\iota(e)} e \gamma^{-1}_{\tau(e)} \sim \mathbf{1}_o$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $t_e = [\mathbf{1}_o]$ bulunur.□

1.3.5.3 Önteorem: $\Pi_1(\Gamma, o)$ grubu içindeki t_e denklik sınıfı için $t_{e^{-1}} = t_e^{-1}$ dir.

İspat: $t_e^{-1} = [\gamma_{\iota(e)} e \gamma^{-1}_{\tau(e)}]^{-1} = [\gamma_{\tau(e)} e^{-1} \gamma^{-1}_{\iota(e)}] = [\gamma_{\iota(e^{-1})} e^{-1} \gamma^{-1}_{\tau(e^{-1})}] = t_{e^{-1}}$ olarak bulunur.□

1.3.5.4 Teorem: $\Pi_1(\Gamma, o)$ grubu, seçilen bir \mathcal{T} için $e \notin \mathcal{T}$ olmak üzere t_e elemanlarının oluşturduğu küme tarafından üretilir.

İspat: Bu ispatı yapabilmek için $\Pi_1(\Gamma, o)$ grubunun herhangi bir $[\alpha]$ elemanının $\{ t_e : e \notin \mathcal{T} \}$ kümesinin elemanlarının çarpımı şeklinde yazılabileceğini göstermeliyiz.

$\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ şeklinde o köşesindeki herhangi bir kapalı yol olsun. Şekil 1.13 den görülüyor ki $v_o = v_n = o$ köşesidir. Bu yüzden $\gamma_{v_o}, \gamma_{v_n}$ yolları o köşesindeki boş yollardır. α yoluna denk olan şu kapalı yol vardır:

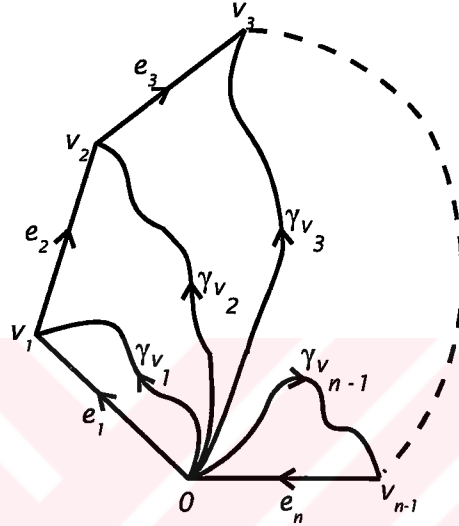
$$\alpha \sim \gamma_{v_o} e_1 \gamma_{v_1}^{-1} \gamma_{v_1} e_2 \gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_2} e_3 \gamma_{v_3}^{-1} \dots \gamma_{v_{n-1}} e_n \gamma_{v_n}^{-1}$$

Dikkat edilirse $\gamma_{v_0}, \gamma_{v_n}$ boş yollarının yanı sıra $i=1, 2, \dots, n$ için $\gamma_{v_i}^j, \gamma_{v_i}$ çiftleri de eklenerek α ya denk olan bu yol bulunmuştur. O halde

$$[\alpha] = [\gamma_{v_0} e_1 \gamma_{v_1}^j] [\gamma_{v_1} e_2 \gamma_{v_2}^j] [\gamma_{v_2} e_3 \gamma_{v_3}^j] \dots [\gamma_{v_{n-1}} e_n \gamma_{v_n}^j]$$

$$= t_{e_1} t_{e_2} \dots t_{e_n}$$

olarak bulunur.



Şekil 1.13

□

1.3.5.5 Teorem: Herhangi bir $\Pi_1(\Gamma, o)$ 1. Temel grubu, serbest gruptur.

İspat: Verilen Γ içinde T bir maksimal ağaç ve $\mathcal{F}, \{x_e : e \in e^+, e \notin T\}$ harflerin kümesi tarafından üretilen serbest grup olsun. Biz

$$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \Pi_1(\Gamma, o)$$

$$\phi([x_e]) = t_e$$

$(e \in e^+, e \notin T)$ dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterirsek ispatı bitirmiş oluruz.

1.1.2 Teoremden, ϕ dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu görülmektedir. Bu ϕ dönüşümünün tersi olacak şekilde $\Pi_1(\Gamma, o) \rightarrow \mathcal{F}$ olacak şekilde bir grup homomorfizması bulursak ϕ dönüşümünün izomorfizma olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi Γ grafinin kenarlarını seçilen T ağacı yardımıyla \mathcal{F} serbest grubunun elemanlarıyla şu şekilde işaretleyelim:

$$\begin{aligned}
e \in T \text{ ise } e &\mapsto 1_{\mathcal{F}} \\
e \in e^+ \text{ ve } e \notin T \text{ ise } e &\mapsto [x_e] \\
e^{-1} \in e^+ \text{ ve } e \notin T \text{ ise } e &\mapsto [x_e]^{-1}
\end{aligned}$$

olsun. (1.14) de tanımlanan θ dönüşümünden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} : \Pi_1(\Gamma, o) &\rightarrow \mathcal{F} \\
\hat{\theta}([\alpha]) &= \theta(\alpha)
\end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün grup homomorfizması olduğu (1.14) deki, θ tanımından açıktır. Ayrıca $\hat{\theta}$, ϕ dönüşümünün tersidir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\phi \hat{\theta}(t_e) &= \phi(\hat{\theta}([\gamma_{\tau(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}])) \\
&= \phi(\theta(\gamma_{\tau(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1})) \\
&= \phi([x_e]) \\
&= t_e
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\Pi_1(\Gamma, o)$ grubunun üreteç kümesinin elemanları olan t_e lardan yararlanarak $\phi \hat{\theta}$ bileşke dönüşümünün, $\Pi_1(\Gamma, o)$ nın birim dönüşümü olduğunu göstermiş olduk. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} \phi([x_e]) &= \hat{\theta}(t_e) \\
&= \theta([\gamma_{\tau(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}]) \\
&= [x_e]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $\hat{\theta} \phi$ dönüşümünün \mathcal{F} grubunun birim dönüşümü olduğunu göstermiş olduk. Tüm bu sonuçlardan ϕ ve $\hat{\theta}$ dönüşümlerinin birbirlerinin ters dönüşümü olduğu görülür. O halde

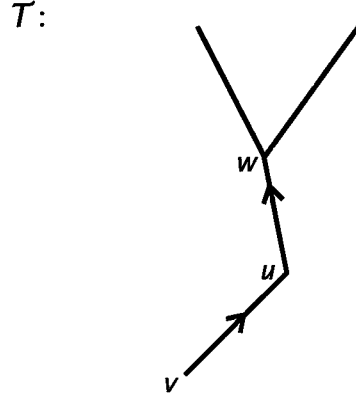
$$\Pi_1(\Gamma, o) \cong \mathcal{F}$$

dir. Yani herhangi bir 1.Temel grup, serbest gruptur. \square

1.3.5.6 Önteorem: Bir T ağacındaki bir uç köşe v olsun. $\text{Star}(v)$ kümesine ait olan tek e kenarı için $T - \{v, e, e^{-1}\}$ grafi da bir ağaçtır.

İspat: T bir ağaç olduğundan bağlantılı graf ve indirgenmiş kapalı yolu yoktur. Şekil 1.14 deki T ağacı ve v , uç köşesi için, görülüyor ki $\tau(e)=u$ köşesidir. T ağacı bağlantılı olduğundan u köşesinin bağlı olduğu v den farklı bir w köşesi vardır.

$T' = T - \{v, e, e^{-1}\}$ grafında u köşesi w köşesine bağlı olacağından ve indirgenmiş kapalı yol bulunmayacağından T' ağaç koşullarını sağlar.



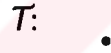
Şekil 1.14

□

1.3.5.7 Öntem: m köşeye sahip bir T ağacı, tersleriyle birlikte $2(m-1)$ kenara sahiptir.

İspat: Bu ispatı tümevarım yöntemi ile verelim.

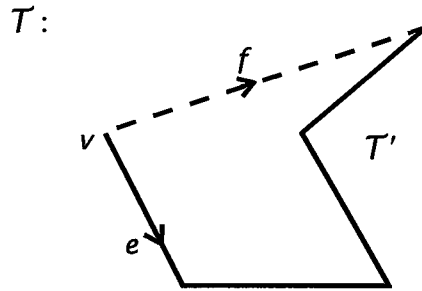
$m=1$ ise ağaç tanımından T ,



Şekil 1.15

şeklinde olacaktır. Buradan da $2(1-1)=0$ eşitliği gerçekleşir.

Varsayalım ki $m-1$ köşeli bir T' ağacı $2(m-1-1)=2(m-2)$ kenara sahip olsun. Bu T' ağacına bir köşe daha eklenirse T şeklinde m köşeye sahip olur. Eklenen köşe uç köşe olmak zorundadır. Varsayalım ki öyle olmasın. O halde Şekil 1.16 daki şekil ortaya çıkar.



Şekil 1.16

v uç nokta olmadığından $\text{Star}(v)$ nin eleman sayısı en az 2 olur. γ, T' ağacında $\tau(e)$ köşesini $\tau(f)$ köşesine birleştiren en kısa yol olmak üzere $e\gamma f^{-1}$ indirgenmiş kapalı yol olur ki bu ağaç tanımına aykırıdır. O halde v köşesi, bir uç köşedir. Yani $\text{Star}(v)=\{e\}$ şeklinde bir elemana sahiptir. O halde T' ağacına e ile e^{-1} kenarları eklenmiş olur. Varsayımımızdan da T ağacının kenar sayısı $2(m-2)+2=2(m-1)$ olarak bulunur.□

1.3.5.8 Teorem: Bir Γ grafi m köşe ve tersleriyle birlikte $2n$ kenara sahip olmak üzere bu graftaki herhangi bir o köşesi için, $\Pi_1(\Gamma, o)$ 1.Temel grubunun rankı $n-m+1$ dir.

İspat: Γ grafinin bir maksimal T ağacını seçelim. 1.3.5.4 Teoremden, $\Pi_1(\Gamma, o)$ serbest grubu

$$\mathcal{A} = \{t_e : e \notin T\} \quad (e \in e^+)$$

kümesi tarafından üretilir. 1.3.4.4 Teorem ile herhangi bir köşe için $\Pi_1(\Gamma, o)$ 1.Temel grubunu alabiliriz. 1.3.5.7 Önteoremden, seçilen T ağacı tersleriyle birlikte $2(m-1)$ kenara sahiptir. O halde T ağacında olmayan kenar sayısı,

$$2n-2(m-1)=2n-2m+2$$

bulunur. Sonuç olarak \mathcal{A} , üreteç kümesinin eleman sayısı, yani $\Pi_1(\Gamma, o)$ 1.Temel grubunun rankı

$$n-m+1$$

olarak bulunur.□

1.4 2-Kompleksler

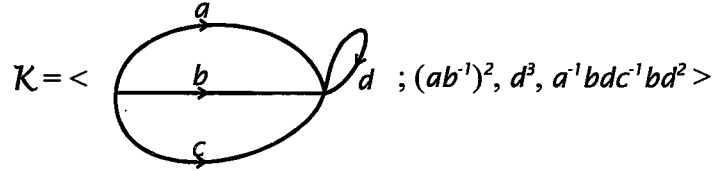
Bu bölümle ilgili detaylı bilgilere [6], [13] kaynaklarında rastlanabilir.

Γ bir graf ve $\rho_\lambda (\lambda \in \Lambda)$, bu graf içindeki bazı kapalı yolların kümesi olsun.

$$\mathcal{K} = \langle \Gamma ; \rho_\lambda (\lambda \in \Lambda) \rangle \quad (1.17)$$

şeklinde tanımlanan çifte **2-kompleks** denir. Buradaki ρ_λ kümesi, **bağıntı yolları kümesi** olarak adlandırılır, Λ kümesi de **bağıntı yollarının sayısıdır**. \mathcal{K} , içindeki Γ grafi bağlantılı ise, (1.17) deki **2-kompleks bağlantılıdır** denir.

1.4.1 Örnek:



Verilen \mathcal{K} , 2-kompleksi bağlantılıdır ve bağıntı yollarının kümesinin eleman sayısı 3 tür.

Yollar Üzerindeki İşlemler:

(I) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir yol içindeki $e^\varepsilon e^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa silinir.

Bu yapılan işleme, \mathcal{K} 2-kompleksinde yol üzerindeki *indirgeme işlemi* denir.

(I)⁻¹ $\varepsilon = \pm 1$ için, herhangi bir yol üzerinde $e^\varepsilon e^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters kenar çiftleri eklenebilir. Bu işleme de \mathcal{K} 2-kompleksinde yol üzerinde *ekleme işlemi* denir.

(II) $\varepsilon = \pm 1$ için, herhangi bir α yolu, $p \in \rho_\lambda^\varepsilon$ ($\lambda \in \Lambda$) şeklinde bir alt yol içeriyorsa bu yol silinir. Bu işleme \mathcal{K} 2-kompleksinde *bağıntı yolunu silme işlemi* denir.

(II)⁻¹ $\varepsilon = \pm 1$ için, herhangi bir α yoluna, $p \in \rho_\lambda^\varepsilon$ ($\lambda \in \Lambda$) şeklindeki bir alt yolu ekleyebiliriz (burada eklenecek kısmın bitiş köşesi önemlidir). Bu işleme de \mathcal{K} 2-kompleksindeki *bağıntı yolu ekleme işlemi* denir.

\mathcal{K} içinde iki yol demek, aslında Γ içinde iki yol demektir. α ve α' Γ grafi içinde iki yol olsun.

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m = \alpha'$$

sonlu bir zincir ile α' yolu α yolundan yukarıdaki işlemlerle elde ediliyorsa iki yola \mathcal{K} içinde **birbirine denktir** denir ve $\alpha \sim_{\mathcal{K}} \alpha'$ ile gösterilir.

$\sim_{\mathcal{K}}$ olarak gösterilen denklik, bir denklik bağıntısıdır. Herhangi bir α yolunu içeren denklik sınıfı $[\alpha]_{\mathcal{K}}$ ile gösterilir. Bu denklik sınıflarından yararlanarak, denklik

sınıflarının çarpma işlemini tanımlayalım. Burada tanımlanan işlemin iyi tanımlı olduğu kolayca görülebilir.

$$[\alpha]_{\mathcal{K}} [\beta]_{\mathcal{K}} = [\alpha\beta]_{\mathcal{K}} \quad (1.18)$$

Bir \mathcal{K} 2-kompleksi içinde bir ν köşesi verilsin. Bu köşedeki

$$\{[\alpha]_{\mathcal{K}} : \iota(\alpha)=\tau(\alpha)=\nu\} \quad (1.19)$$

kapalı yolların denklik sınıflarının kümesini alalım. Buna göre,

1.4.2 Teorem: (1.19) ile verilen küme (1.18) deki işleme göre bir gruptur. Grubun birim elemanı ν köşesindeki boş yolun $[1_{\nu}]_{\mathcal{K}}$ denklik sınıfıdır. Herhangi $[\alpha]_{\mathcal{K}}$ elemanın tersi de $[\alpha^{-1}]_{\mathcal{K}}$ dir. Bu grup $\Pi_1(\mathcal{K}, \nu)$ ile gösterilir.

1.4.1 2-Komplekslerin Dönüşümleri

$\mathcal{K} = \langle \Gamma ; \rho_{\lambda} (\lambda \in \Lambda) \rangle$ ve $\mathcal{K}' = \langle \Gamma' ; \rho'_{\lambda'} (\lambda' \in \Lambda') \rangle$ şeklinde iki 2-kompleks verilsin.

$$\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}' \quad (1.20)$$

dönüşümünün 2-komplekslerin bir dönüşümü olması için, aşağıdaki iki şartı sağlamalıdır.

i) $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ grafların bir dönüşümü,

ii) \mathcal{K} içindeki her bağıntı yolunun, bu dönüşüm altındaki görüntüsü, \mathcal{K}' 2-kompleksinin bağıntı yolları kümesine ait olmalıdır. Diğer bir deyişle \mathcal{K}' , bağıntı yolları kümesinin elemanlarının örtüleri, \mathcal{K} nın bağıntı yolları kümesine ait olmalıdır.

(1.20) ile verilen 2-komplekslerin dönüşümünde, $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ grafların dönüşümü yerel birebir örten ise (1.20) deki dönüşüme de 2-komplekslerin yerel birebir örten dönüşümü denir.

1.4.2 Bir \mathcal{K} 2-kompleksi Tarafından Tanımlanan Grupların Özellikleri

(1.17) de verilen 2-kompleks ve G herhangi bir grup olmak üzere, \mathcal{K} nın kenarlarını (Γ nın kenarları) için,

$$\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \quad (1.21)$$

$$e \mapsto g_e$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm $g_{e^{-1}} = g_e^{-1}$ ile bağlantı yolları kümesinin her p şeklindeki elemanı için, $\theta(p) = 1_{\mathcal{G}}$ şartlarını sağlıyorsa \mathcal{K} 2-kompleksini kenarları, \mathcal{G} grubunun elemanları tarafından temsil edilmiş olur.

$\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ yolu, \mathcal{K} 2-kompleksi içinde olmak üzere

$$\theta(\alpha) = g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_n} \quad (1.22)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün iyi tanımlı olduğu açıktır.

\mathcal{G} herhangi bir grup olmak üzere, (1.22) dönüşümünden yararlanarak

$$\hat{\theta} : \Pi_1(\mathcal{K}, v) \rightarrow \mathcal{G} \quad (1.23)$$

$$\hat{\theta}([\alpha]_{\mathcal{K}}) = \theta(\alpha)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm θ dönüşümü ile tanımlandığından iyi tanımlıdır. Ayrıca (1.22) dönüşümünün tanımından $\hat{\theta}$ dönüşümünün bir grup homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Yani,

$$[\alpha]_{\mathcal{K}}, [\beta]_{\mathcal{K}} \in \Pi_1(\mathcal{K}, v) \text{ için } \hat{\theta}([\alpha\beta]_{\mathcal{K}}) = \hat{\theta}([\alpha]_{\mathcal{K}}) \hat{\theta}([\beta]_{\mathcal{K}})$$

dır.

(1.17) ile verilen 2-kompleksi bağlantılı ve \mathcal{T} buradaki Γ grafının maksimal ağacı olsun. o , Γ grafında bir köşe olmak üzere $\Pi_1(\mathcal{K}, o)$ grubunu alalım. γ_v , o köşesini v köşesine \mathcal{T} de bağlayan en kısa yol (geodesic) olsun. \mathcal{K} nın bir e kenarı için

$$t_e = [\gamma_{v(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}] \quad (1.24)$$

o da kapalı yol olan, $\gamma_{v(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}$ dan yararlanarak t_e denklik sınıfını tanımlayalım.

1.4.2.1 Teorem: Herhangi bir bağlantılı $\Pi_1(\mathcal{K}, o)$ grubu, $e \notin \mathcal{T}$ olmak üzere (1.24) şeklinde tanımlanan denklik sınıflarının kümesi tarafından üretilir.

İspat: 1.3.5.4 Teoremin ispatına benzer olarak kolayca görülür. \square

(1.17) şeklinde verilen bağlantılı bir 2-kompleks alalım. \mathcal{T} , buradaki Γ grafının maksimal ağacı olmak üzere

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+} = \langle x_e (e \in e^+, e \notin \mathcal{T}); \mathcal{R}_p (p \in \Lambda) \rangle \quad (1.25)$$

şeklinde bir grup sunuşu tanımlayalım. Buradaki \mathcal{R}_p bağıntı kümesinin elemanları şu şekilde oluşturulur. $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, \mathcal{K} 2-kompleksindeki

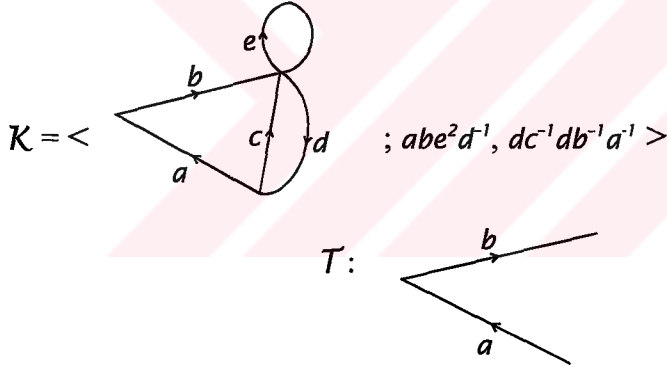
$$p = e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n}$$

bağıntı yolu için, $e_i^{\varepsilon_i} \leftrightarrow x_{e_i}^{\varepsilon_i}$ eşlemesi ile $x_{e_i}^{\varepsilon_i}$ şeklindeki harflerden, kelimeler elde

edilir. \mathcal{K} 2-kompleksinin bu bağıntı yolundaki, $e_i^{\varepsilon_i}$ şeklindeki bazı kenarları seçilen

\mathcal{T} ağacında ise bunlarla eşleşen $x_{e_i}^{\varepsilon_i}$ harfleri silinerek oluşturulan kelimeler, \mathcal{R}_p

bağıntı kümesinin elemanlarını oluştururlar. Örneğin,



Şekil 1.17

2-kompleksi için \mathcal{T} ağacı yukarıdaki gibi seçilirse,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+} = \langle x_c, x_d, x_e; x_e^2 x_d^{-1}, x_d x_c^{-1} x_d \rangle$$

olarak bulunur.

1.4.2.2 Teorem: Bağlantılı bir \mathcal{K} 2-kompleksinden elde edilen $\Pi_1(\mathcal{K}, o)$ grubu ve (1.25) şeklinde tanımlanan sunuş, $G(\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+})$ grubunu temsil ediyorsa

$$\Pi_1(\mathcal{K}, o) \cong G(\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+})$$

dir.

İspat: Biz grup sunuşlarından biliyoruz ki (1.25) deki sunuş için, F $\{x_e : (e \in e^+, e \notin T)\}$ harfler kümesi tarafından üretilen, N ise $\{[\mathcal{R}_p] : p \in \Lambda\}$ kümesinin normal kapanışı olmak üzere $G(\mathcal{P}_{\kappa, \tau, e^+}) \cong F/N$ idi. $G(\mathcal{P}_{\kappa, \tau, e^+})$ grubunun $[x_e]N$ elemanını \bar{x}_e ile temsil edelim. t_e elemanları (1.24) deki tanımına göre, 1.4.2.1 Teoreminden, $\Pi_1(\mathcal{K}, o)$ grubunun üreteç kümesiydi. Tüm bunlara göre,

$$\varphi : \{x_e : e \in e^+, e \notin T\} \rightarrow \Pi_1(\mathcal{K}, o)$$

dönüşümünü her $p \in \Lambda$ için, $\varphi(x_e) = t_e$ ve $\varphi(\mathcal{R}_p) = [1_o]$ olacak şekilde tanımlayalım.

1.2.2 Teoreminden,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : G(\mathcal{P}_{\kappa, \tau, e^+}) &\rightarrow \Pi_1(\mathcal{K}, o) \\ \bar{x}_e &\mapsto t_e \end{aligned}$$

şeklinde bir homomorfizma vardır.

$$\begin{aligned} e \in T \text{ ise } e &\mapsto 1_g \\ e \in e^+ \text{ ve } e \notin T \text{ ise } e &\mapsto \bar{x}_e \\ e^{-1} \in e^+ \text{ ve } e \notin T \text{ ise } e &\mapsto \bar{x}_e^{-1} \end{aligned}$$

olarak \mathcal{K} 2-kompleksinin kenarlarını işaretleyelim. Bu şekilde (1.22) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : \Pi_1(\mathcal{K}, v) &\rightarrow G(\mathcal{P}_{\kappa, \tau, e^+}) \\ \hat{\theta}([\alpha]_{\mathcal{K}}) &= \theta(\alpha) \end{aligned}$$

dönüşümünü alalım. $\hat{\theta}$ nın bir homomorfizma olduğunu biliyoruz.

(1.23) deki dönüşümden,

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : \Pi_1(\mathcal{K}, o) &\rightarrow G(\mathcal{P}_{\kappa, \tau, e^+}) \\ \hat{\theta}([\alpha]_{\mathcal{K}}) &= \theta(\alpha) \end{aligned}$$

olacak şekilde grup homomorfizması tanımlayabiliriz. $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ dönüşümünün tersidir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\hat{\varphi}(\bar{x}_e)) &= \hat{\theta}(t_e) \\ &= \hat{\theta}([\gamma_{\tau(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}]) \\ &= \theta(\gamma_{\tau(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}) \\ &= \bar{x}_e \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\hat{\theta}(t_e)) &= \hat{\phi}(\hat{\theta}([\gamma_{v_{(e)}} e \gamma^{-1}_{\tau_{(e)}}])) \\ &= \hat{\phi}(\theta(\gamma_{v_{(e)}} e \gamma^{-1}_{\tau_{(e)}})) \\ &= \hat{\phi}(\bar{x}_e) \\ &= t_e\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da sonuç olarak,

$$\Pi_{\Gamma}(\mathcal{K}, o) \cong \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \tau, e^+})$$

yazabiliriz. \square

1.4.2.3 Sonuç: (1.17) ile verilen \mathcal{K} 2-kompleksindeki Γ grafi tek köşeli ise $\Pi_{\Gamma}(\mathcal{K}, o)$ grubunun 1.4.2.2 Teoremdeki, izomorf olduğu grubun sunuşunda, üreteç kümesi \mathcal{K} nın kenarları ve bu sunuşun bağıntı kümesinin elemanlarını, \mathcal{K} nın bağıntı yollarının kümesi olarak alabiliriz.

İspat: Γ grafi tek köşeli ise buradan seçilecek olan \mathcal{T} ağacı Şekil 1.15 deki gibi sadece bir köşeye sahiptir. Buradan da açıkça görülüyor ki \mathcal{T} ağacında hiçbir kenar olmadığından $\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \tau, e^+}$ sunuşunu oluşturur iken \mathcal{K} 2-kompleksindeki hiçbir kenarı silemeyiz. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. \square

2. 2-KOMPLEKSLERİN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde tanımlanan bazı materyaller ve sonuçlar standart olup, [6] da bulunabilir. Bununla birlikte 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8, 2.3.15 Sonuçları ile 2.3.8, 2.3.10 ve 2.3.12 Teoremleri şu ana kadar herhangi bir kaynakta bulunamamıştır.

2.1 Star Kompleksler

Bir

$$\mathcal{K} = \langle \Gamma ; \rho_\lambda (\lambda \in \Lambda) \rangle \quad (2.1)$$

şeklinde 2-kompleks verilsin. ρ_λ elemanlarından oluşan bağıntı yolları kümesinin devirli döngülerinden oluşan $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ kümesini alalım. $(\gamma^n \in \rho_\lambda (n \in \mathbb{Z} - \{0\}))$ şeklinde bağıntı yolları var ise, bu durumda 2-kompleksin bazı uygulamalarında $\gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, \gamma^n$ lerin birbirinden farklı devirli döngüleri alınır). Verilen \mathcal{K} 2-kompleksinden yararlanılarak,

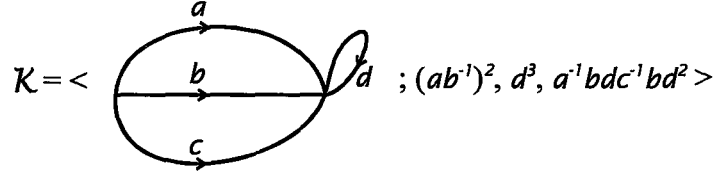
Köşeler : $E(\mathcal{K})$ kenarlar kümesi,

Kenarlar : $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ kümesinin elemanları,

kümelerinden oluşan grafa **Star kompleks** denir ve \mathcal{K}^{st} ile gösterilir. Burada γ, \mathcal{K}^{st} nin bir kenarı ise bu kenarın tersi $\gamma^{-1} \in \mathcal{R}(\mathcal{K})$ olan \mathcal{K} 2-kompleksindeki γ kapalı yolunun tersidir. \mathcal{K}^{st} de bir kenar olan γ nın başlangıç köşesi $\iota^{st}(\gamma)$, bitiş köşesi $\tau^{st}(\gamma)$ ile gösterilir ve $\iota^{st}(\gamma); \mathcal{K}$ daki γ yolunun başlangıç kenarı, $\tau^{st}(\gamma)$ ise; \mathcal{K} daki γ kapalı yolunun son kenarının tersi olarak tanımlanır. Örneğin \mathcal{K} da $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ nın bir elemanı olarak $abc^{-1}ab$ şeklindeki kapalı bir yol olsun. Burada $abc^{-1}ab, \mathcal{K}^{st}$ de bir kenardır ve de $\iota^{st}(\gamma)=a, \tau^{st}(\gamma)=b^{-1}$ dir. \mathcal{K}^{st} nin tanımlı olabilmesi için $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ nın elemanlarının terslerinin kendisine eşit olmaması gerekir. Çünkü $\gamma=\gamma^{-1}$ olur ise, \mathcal{K}^{st} kompleksi 1-kompleks (graf) olamaz. Örneğin $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ nın aba^{-1} şeklinde bir elemanı var ise \mathcal{K}^{st} kompleksini tanımlayamayız.

Bir $\gamma = e_1 e_2 \dots e_n \in \mathcal{R}(K)$, K^{st} nin bir kenarı ise açıkça görülür ki $\iota^{st}(\gamma^{-1}) = \tau^{st}(\gamma) = e_n^{-1}$ ve $\iota^{st}(\gamma) = \tau^{st}(\gamma^{-1}) = e_1$ dir. Ayrıca $\gamma \neq \gamma^{-1}$ olarak K^{st} yi tanımladığımızdan, K^{st} 1-kompleks şartlarını sağlamaktadır.

2.1.1 Örnek: Bir K 2-kompleksi,

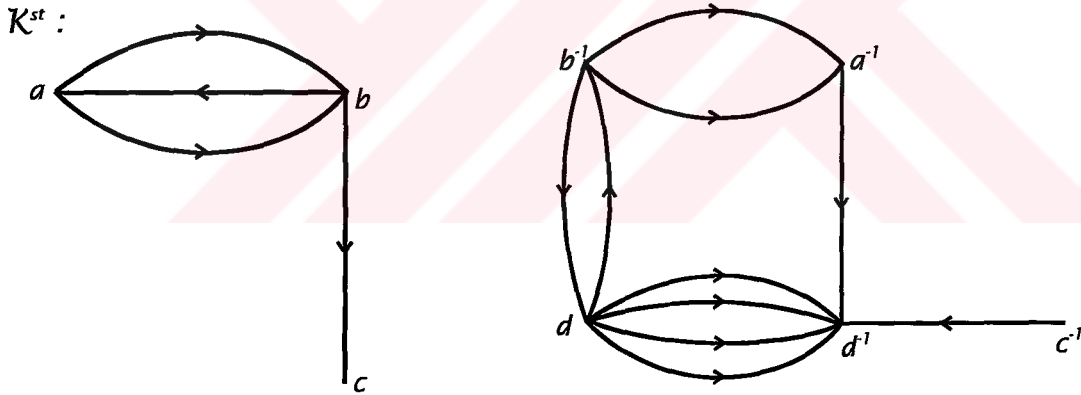


olmak üzere, K^{st} kompleksinin köşe ve kenar kümeleri sırasıyla

$$V(K^{st}) = \{ a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}, d, d^{-1} \},$$

$$E(K^{st}) = \{ ab^{-1}, b^{-1}a, ab^{-1}ab^{-1}, b^{-1}ab^{-1}a, d, d^2, d^3, a^{-1} b d c^{-1} b d^2, b d c^{-1} b d^2 a^{-1}, d c^{-1} b d^2 a^{-1} b, c^{-1} b d^2 a^{-1} b d, b d^2 a^{-1} b d c^{-1}, d^2 a^{-1} b d c^{-1} b, d a^{-1} b d c^{-1} b d \}$$

dir. Buna göre K^{st} nin geometrik ifadesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1

◇

2.1.2 Örnek: Aşağıda verilen

$$K = \langle \text{diagram} ; a^{-1} b^2 a b^{-3} \rangle$$

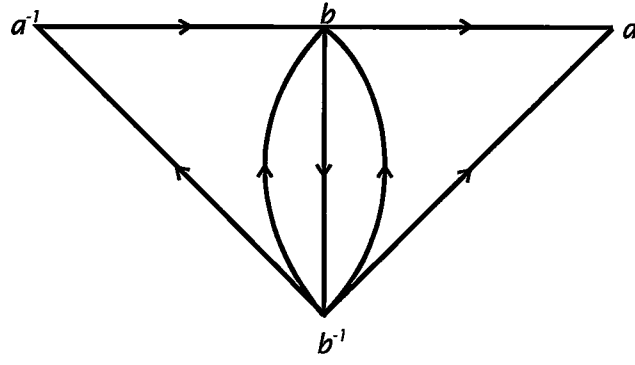
2-kompleksinden elde edilen, K^{st} kompleksinin köşe ve kenar kümeleri

$$V(K^{st}) = \{ a, a^{-1}, b, b^{-1} \},$$

$$E(K^{st}) = \{ a^{-1} b^2 a b^{-3}, b^2 a b^{-3} a^{-1}, b a b^{-3} a^{-1} b, a b^{-3} a^{-1} b^2, b^{-3} a^{-1} b^2 a, b^2 a^{-1} b^2 a b^{-1}, b^{-1} a^{-1} b^2 a b^{-2} \}$$

şeklinde oluşturulur. O halde K^{st} nin grafiği aşağıdaki şekildedir.

K^{st} :



Şekil 2.2

◇

2.1.3 Örnek: Verilen

$$K = \langle \text{diagram} ; abc^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$$

The diagram is a four-lobed flower shape with vertices a, b, c, d at the top and $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}$ at the bottom. Directed edges connect $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow d$, $d \rightarrow a$ and $a^{-1} \rightarrow b^{-1}$, $b^{-1} \rightarrow c^{-1}$, $c^{-1} \rightarrow d^{-1}$, $d^{-1} \rightarrow a^{-1}$.

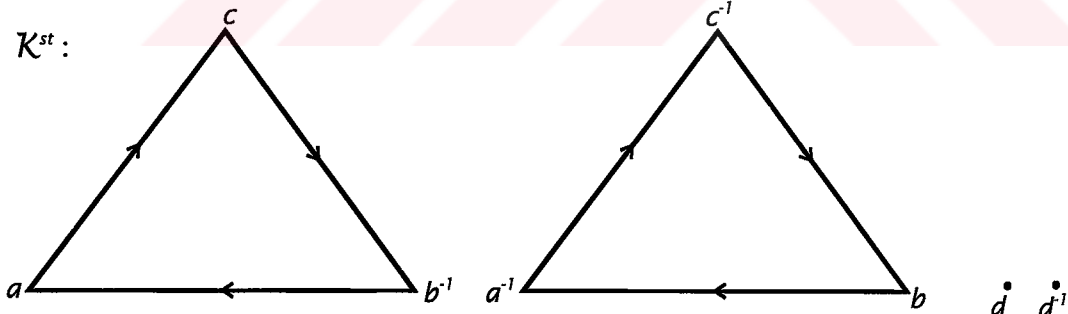
2-kompleksinden , K^{st} kompleksinin köşe ve kenar kümeleri

$$V(K^{st}) = \{ a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}, d, d^{-1} \},$$

$$E(K^{st}) = \{ abc^{-1}b^{-1}c^{-1}, bca^{-1}b^{-1}c^{-1}a, ca^{-1}b^{-1}c^{-1}ab, a^{-1}b^{-1}c^{-1}abc, b^{-1}c^{-1}abca^{-1}, c^{-1}abca^{-1}b^{-1} \}$$

olarak bulunur. Bu durumda K^{st} kompleksinin geometrik yorumu aşağıdaki gibidir.

K^{st} :



Şekil 2.3

◇

2.1.4 Örnek:

$$K = \langle \text{diagram} ; abc^2b^2a^{-1} \rangle$$

The diagram is a three-lobed flower shape with vertices a, b, c at the top and a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} at the bottom. Directed edges connect $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow a$ and $a^{-1} \rightarrow b^{-1}$, $b^{-1} \rightarrow c^{-1}$, $c^{-1} \rightarrow a^{-1}$.

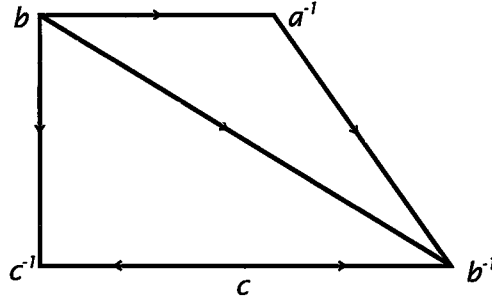
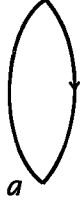
ile verilen 2-kompleksi için, K^{st} kompleksinin köşe ve kenar kümeleri

$$V(K^{st}) = \{ a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1} \},$$

$$E(K^{st}) = \{ abc^2b^2a^{-1}, bc^2b^2a^{-1}a, c^2b^2a^{-1}ab, cb^2a^{-1}abc, b^2a^{-1}abc^2, ba^{-1}abc^2b, a^{-1}abc^2b^2 \}$$

olmak üzere, K^{st} kompleksi

K^{st} :



Şekil 2.4

şekliyle ifade edilir. ◊

Herhangi $e^\varepsilon \in E(K)$ ($\varepsilon = \pm 1$) kenarını alalım. Bu durumda K^{st} nin bir köşesi olan bu kenar için aşağıdaki soru düşünülebilir.

Soru: Acaba bu $e^\varepsilon \in V(K^{st})$ köşesine hangi $f^\varepsilon \in E(K)$ ($\varepsilon = \pm 1$) köşesi bağlıdır?

Bu soruya aşağıdaki şekilde cevaplar bulunabilir:

2.1.5 Sonuç: e^ε veya $e^{-\varepsilon}$, ρ_λ ($\lambda \in \Lambda$) bağıntı yolları kümesinin hiçbir elemanında yer almıyorsa, K^{st} de bu e^ε köşesine hiçbir kenar bağlı olamaz. Dolayısıyla K^{st} 1-kompleksinde sadece

$$\bullet e^\varepsilon$$

şeklinde, hiçbir kenar bağlı olmayan, bir köşe olacaktır. 2.1.3 Örnekteki $d, d^{-1} \in V(K^{st})$ köşelerini örnek olarak gösterebiliriz.

2.1.6 Sonuç: e^ε veya $e^{-\varepsilon}$ kenarlarından en az biri ρ_λ ($\lambda \in \Lambda$) bağıntı yolları kümesinin bir elemanında yer alıyorsa, K^{st} nin e^ε köşesine mutlaka bir kenar bağlı olacaktır ve bağlı olan bu kenar, e^ε ile K da aynı Star kümesine ait olacaktır.

İspat: Varsayalım ki e^ε , ρ_λ kümesinin bir elemanında yer alsın. O halde γ , \mathcal{K} da bir yol olmak üzere $e^\varepsilon \gamma f^{\varepsilon'} \in \mathcal{E}(\mathcal{K}^{st})$ ($\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$) şeklinde bir kenar vardır. Öyleyse e^ε köşesi bu kenarın başlangıç köşesidir. Yani $\iota^{st}(e^\varepsilon \gamma f^{\varepsilon'}) = e^\varepsilon$ dir. Diğer taraftan u , \mathcal{K} da bir köşe olmak üzere, $\iota(e^\varepsilon) = u$ olsun. Burada $e^\varepsilon \gamma f^{\varepsilon'}$ kenarı \mathcal{K} da kapalı bir yoldur, yani $\iota(e^\varepsilon) = \tau(f^{\varepsilon'}) = u$ olur. Ayrıca \mathcal{K} 1-kompleks olduğundan,

$$\iota(e^\varepsilon) = \iota(f^{\varepsilon'}) = u$$

bulunur. Yani e^ε ve $f^{\varepsilon'}$, $\text{Star}(u)$ kümesinin elemanlarıdır. \mathcal{K}^{st} nin tanımından $e^\varepsilon \gamma f^{\varepsilon'} \in \mathcal{E}(\mathcal{K}^{st})$ kenarının başlangıç köşesi e^ε ve bitiş köşesi $f^{\varepsilon'}$ dir. Buradan çıkan sonuç; e^ε köşesine \mathcal{K} da aynı Star kümesine ait $f^{\varepsilon'}$ bağlı olur.

Varsayalım ki $e^{-\varepsilon}$, ρ_λ nın bir elemanında yer alsın. O halde β , \mathcal{K} da bir yol olmak üzere $g^{\varepsilon''} \beta e^{-\varepsilon} \in \mathcal{E}(\mathcal{K}^{st})$ ($\varepsilon, \varepsilon'' = \pm 1$) şeklinde bir kenar vardır. Bu kenarın, Star kompleks tanımına göre, \mathcal{K}^{st} de bitiş köşesi $e^{-\varepsilon}$ dir. Yani $\tau^{st}(g^{\varepsilon''} \beta e^{-\varepsilon}) = e^{-\varepsilon}$ olur. Bununla beraber $g^{\varepsilon''} \beta e^{-\varepsilon}$, \mathcal{K} da bir kapalı yol olduğundan, $\iota(g^{\varepsilon''}) = \tau(e^{-\varepsilon})$ ve de 1-kompleksin tanımından

$$\iota(e^{-\varepsilon}) = \iota(g^{\varepsilon''}) = u$$

olur. Buradan \mathcal{K}^{st} de $e^{-\varepsilon}$ köşesi, buna bağlı olan $g^{\varepsilon''}$ köşesi ile, \mathcal{K} da aynı Star kümesinde yer alır.

Bir bağıntı yolunda, e^ε ve $e^{-\varepsilon}$ kenarları birlikte bulunsun. Ayrıca bu kenarlar, ait oldukları bağıntı yolunda ardı ardına gelmesin. Bu durumda γ_1 ve γ_2 , \mathcal{K} da birer yol olmak üzere, $e^{-\varepsilon} \in \gamma_1$, $e^\varepsilon \in \gamma_2$ olmak şartıyla $e^\varepsilon \gamma_1 f^{\varepsilon'}$, $g^{\varepsilon''} \gamma_2 e^{-\varepsilon}$ şeklinde \mathcal{K}^{st} nin iki kenarı vardır. Yukarıdaki sonuçlardan çıkarılabileceği üzere, e^ε na bağlı olan $f^{\varepsilon'}$ ve $g^{\varepsilon''}$ köşeleri aynı Star kümesinin elemanlarıdır. Diğer bir durum γ , \mathcal{K} da bir yol olmak üzere bir bağıntı yolunda $e^{-\varepsilon}$ ve e^ε kenarları ardı ardına geliyorsa, $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$

şeklinde \mathcal{K}^{st} nin bir kenarı olacaktır. Bu $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ kenarının başlangıç ve bitiş köşesi e^ε dir ve aşağıdaki şekil ile gösterilebilir.



Şekil 2.5

Her $e^\varepsilon \in E(\mathcal{K})$ için, e^ε veya $e^{-\varepsilon}$ dan biri bağıntı yollarında yer alıyorsa, e^ε köşesine bir kenar bağlı olacaktır. Özel olarak $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ şeklinde bir kenar yok ise, e^ε köşesine, e^ε köşesinden farklı $h^{\varepsilon'}$ köşesi bağlıdır ve e^ε ile $h^{\varepsilon'}$, \mathcal{K} da aynı Star kümesinin elemanlarıdır. O halde;

2.1.7 Sonuç: \mathcal{K} nın farklı u_1 ve u_2 köşeleri için, $e^\varepsilon \in \text{Star}(u_1)$, $h^{\varepsilon'} \in \text{Star}(u_2)$ kenarları \mathcal{K}^{st} de köşedirler ve bunlar bir kenar ile birbirine bağlanamaz. Daha genel olarak, $m \geq 2$ köşeli \mathcal{K} kompleksi için m tane farklı Star kümesi vardır ve bu Star kümelerinin elemanları, \mathcal{K}^{st} de farklı birer köşedir ve de bu köşeler bir kenar ile birbirine bağlanamaz.

2.1.7 Sonucuna bağlı olarak;

2.1.8 Sonuç: $m \geq 2$ köşeli \mathcal{K} kompleksi için, \mathcal{K}^{st} birbirinden ayrık en az m tane 1-kompleksten oluşur. \square

Bir \mathcal{K}^{st} kompleksinin e ve e' köşelerine bağlı kenar sayısı eşit olsun. Bu durumda, $\text{Star}(e)$ ve $\text{Star}(e')$ kümeleri arasında şu şekilde birebir, örten dönüşüm vardır:

$$\psi: \text{Star}(e) \rightarrow \text{Star}(e')$$

$$e\alpha \mapsto e'\alpha^{-1}$$

olmak üzere, bir $\gamma \in \text{Star}(e)$ için α , \mathcal{K}^{st} de bir yol iken $\gamma = e\alpha$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan $e^{-1}\alpha^{-1} \in \text{Star}(e^{-1})$ bulunur. Benzer olarak, herhangi bir $\gamma \in \text{Star}(e^{-1})$ için, $\gamma = e^{-1}\beta$ şeklinde yazılabilir. Buradan da $e\beta^{-1} \in \text{Star}(e)$ elde edilir. Dolayısıyla tanımlanan ψ dönüşümü örtendir. Ayrıca $e^{-1}\alpha_1^{-1}$, $e^{-1}\alpha_2^{-1} \in \text{Star}(e^{-1})$ için, $e^{-1}\alpha_1^{-1} = e^{-1}\alpha_2^{-1}$ alalım. Buradan $\alpha_1^{-1} = \alpha_2^{-1}$ ve $\alpha_1 = \alpha_2$ elde ederiz. Bu da ψ dönüşümünün birebirliğini gösterir.

2.2 Star Graflar

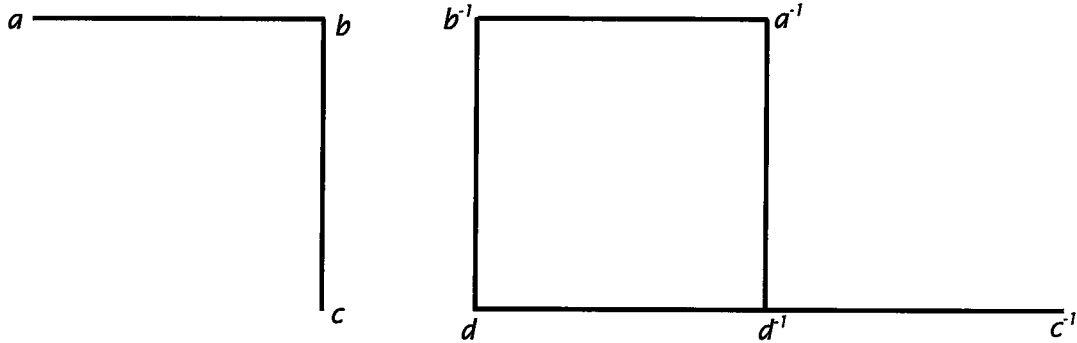
\mathcal{K}^{st} kompleksinde,

$$\text{ya } \iota^{st}(\gamma_1) = \iota^{st}(\gamma_2) \text{ ve } \tau^{st}(\gamma_1) = \tau^{st}(\gamma_2) \text{ veya } \iota^{st}(\gamma_1) = \tau^{st}(\gamma_2) \text{ ve } \iota^{st}(\gamma_2) = \tau^{st}(\gamma_1) \quad (2.2)$$

koşullarını sağlayan kenarları tek bir kenarla temsil ederek oluşturulan grafa **Star graf** denir ve $\Gamma(\mathcal{K}^{st})$ ile gösterilir. 2.1 Bölümde verilen örneklerdeki \mathcal{K}^{st} komplekslerinin Star grafları aşağıdaki şekildedir.

2.1.1 Örnekten elde edilen Star graf, \mathcal{K}^{st} kompleksinden (2.2) deki koşulları sağlayan kenarları, bir kenar ile temsil ederek elde edilmiştir ve şekli aşağıdaki gibidir.

$\Gamma(\mathcal{K}^{st})$:

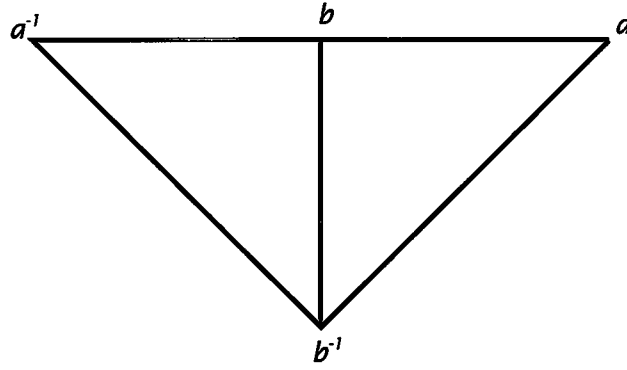


Şekil 2.6

◇

2.1.2 Örnekten elde edilen Star graf, \mathcal{K}^{st} kompleksinde, (2.2) de belirtilen özellikteki üç kenar, bir kenar ile temsil edilir ve grafiği aşağıdaki gibidir.

$\Gamma(K^{st})$:

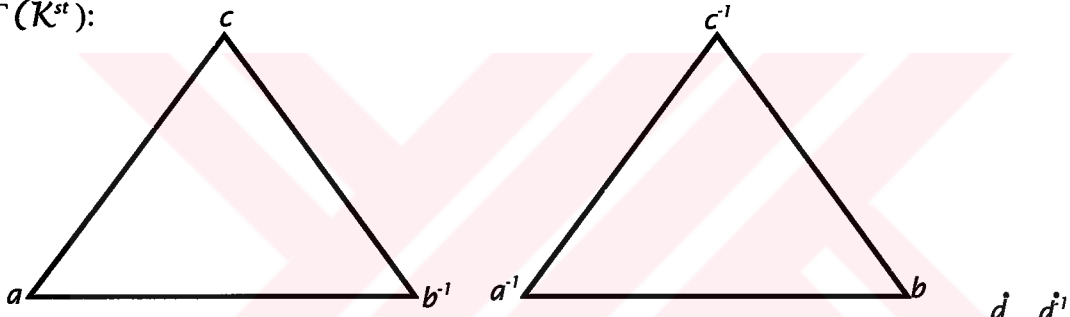


Şekil 2.7

◇

2.1.3 Örnekte elde ettiğimiz Star grafi çizerken, K^{st} kompleksinden hiçbir kenarı silmeyiz. Çünkü (2.2) de belirtilen özellikleri sağlayan kenarlar yoktur. Dolayısıyla 2.1.3.Örnek ile aynı olur. Diğer bir deyişle,

$\Gamma(K^{st})$:

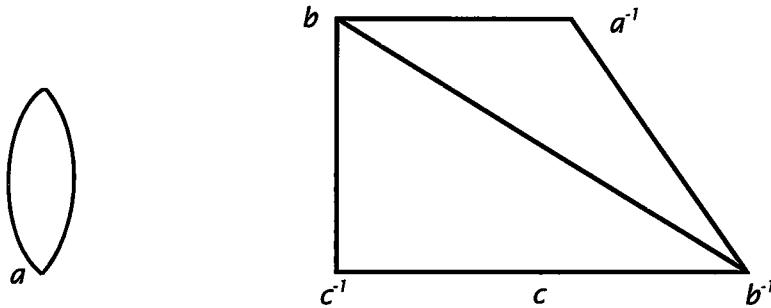


Şekil 2.8

şeklindedir.◇

2.1.4 Örnekte elde edilen Star graf, K^{st} kompleksinden yine hiçbir kenar silinmeyerek elde edilmiştir ve

$\Gamma(K^{st})$:



Şekil 2.9

olarak bulunur.◇

Dikkat edildiği üzere, K^{st} den $\Gamma(K^{st})$ ye geçerken, (2.2) koşullarını sağlayan kenarlar silinir ve bunları temsil eden bir kenar çizilir. Bununla, kenarlar ve bunların

yönleri de silineceğinden bazı bilgiler kaybolur. Bu geçişte değişmeyen ise, $\Gamma(K^{st})$ \mathcal{I} -kompleksinin

$$e \xrightarrow{\quad} f$$

şeklindeki bir kenarında, K nın bazı bağıntı yolları içinde f^{-1} den önce e nin gelmesidir.

2.3 Star Komplekslerin Genişlemesi

(2.1) şeklinde bir K 2-kompleks verilsin. Bu K dan elde edilen K^{st} kompleksinden yararlanarak,

Köşeler : $E(K)$ kenarlar kümesi ve

Kenarlar: $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ ($\lambda \in \Lambda$, $\varepsilon = \pm 1$, γ bağıntı yolları ve terslerinin, devirli döngüsü)

olarak tanımlanan grafa, K^{st} kompleksinin genişlemesi denir ve K^{ST} ile gösterilir.

Burada $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$, K^{ST} nin kenarı ve $\gamma = e_1 e_2 \dots e_n$ olmak üzere, $\iota^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ fonksiyonu γ nın ilk kenarını, $\tau^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ fonksiyonu γ nın son kenarının tersini tanımlar ve

$$(\lambda, \varepsilon, \gamma)^{-1} = (\lambda, -\varepsilon, \gamma^{-1}) \quad (2.3)$$

eşitliği sağlanır. Bunlara bağlı olarak,

a) $\iota^{ST}(\lambda, -\varepsilon, \gamma^{-1}) = e_n^{-1}$ ve $\tau^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma) = e_n^{-1}$ olup, $\iota^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)^{-1} = \tau^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ dir.

b) $\iota^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma) = e_1$ ve $\tau^{ST}(\lambda, -\varepsilon, \gamma^{-1}) = e_1$ olup, $\iota^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma) = \tau^{ST}(\lambda, \varepsilon, \gamma)^{-1}$ dir.

Ayrıca bu $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ kenarı için,

$$((\lambda, \varepsilon, \gamma)^{-1})^{-1} = (\lambda, -\varepsilon, \gamma^{-1})^{-1} = (\lambda, \varepsilon, \gamma)$$

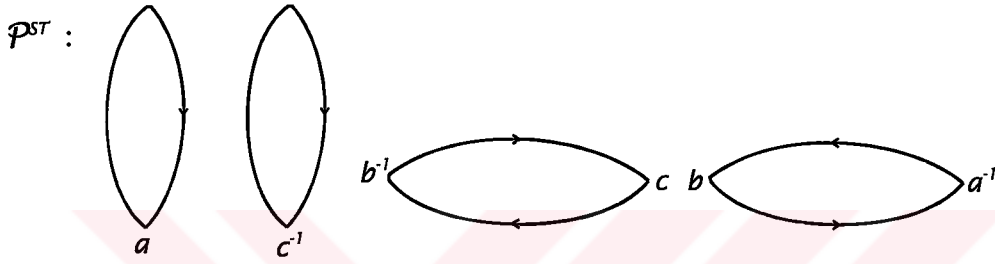
eşitlikleri de sağlanır. Bu son eşitliklerden ve (2.3) den de, $(\lambda, \varepsilon, \gamma)^{-1} \neq (\lambda, \varepsilon, \gamma)$ olduğu görülür. Çünkü bu kenarların 2. koordinatları farklıdır. Bu sonuçlardan K^{ST} , \mathcal{I} -komplekstir ve K^{st} kompleksinin bir genişlemesidir. K^{st} nin tanımlı olabilmesi için $\gamma \in \mathcal{R}(K)$ için $\gamma \neq \gamma^{-1}$ olması gerektiğini belirtmiştik. Dolayısıyla K^{st} her zaman tanımlı olmayabilir fakat K^{ST} her zaman tanımlıdır.

(2.1) ile verilen bir K 2-kompleksi, Γ grafi tek köşeli ise Γ nın kenarları grubun üreteç kümesi olmak üzere, grup sunuşu olarak alınabilir. Örneğin

$$K = \langle \text{loop with } a \text{ and } b \text{ arrows}; a^{-1}b^2ab^{-3} \rangle$$

2-kompleksi, 1.2 Bölümdeki grup sunuşlarındaki gibi, $\mathcal{P} = \langle a, b; a^{-1}b^2ab^{-3} \rangle$ sunuşu olarak verilebilir. Aşağıda \mathcal{P} sunuşu ile verilen örnekler aslında tek köşeli birer özel 2-komplekstirler ve bunları yukarıda belirttiğimiz gibi bir grup sunuşu olarak gösterebiliriz.

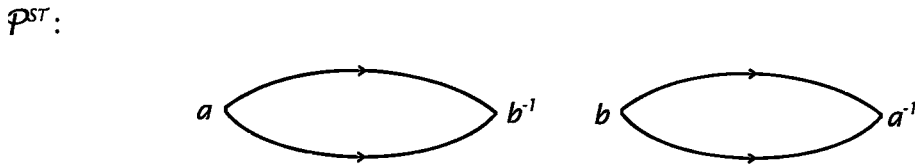
2.3.1 Örnek: $\mathcal{P} = \langle a, b, c; abcc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$ ile verilen 2-kompleksi için, \mathcal{P}^{st} kompleksi ve bunun genişlemesi olan \mathcal{P}^{ST} yi bulalım. Burada



Şekil 2.10

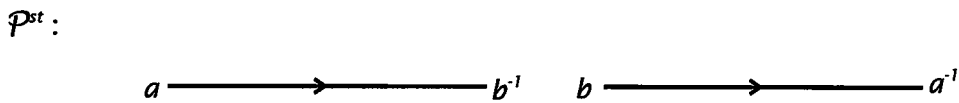
dir. Bununla birlikte \mathcal{P}^{st} tanımlanamaz. Çünkü $(abcc^{-1}b^{-1}a^{-1})^{-1} = abcc^{-1}b^{-1}a^{-1}$ dir ve bu da Star kompleksin tanımına aykırıdır. ◊

2.3.2 Örnek: $\mathcal{P} = \langle a, b; ab, ab \rangle$ bir 2-kompleks olmak üzere, \mathcal{P}^{st} kompleksini ve bunun genişlemesi olan \mathcal{P}^{ST} yi bulalım. Burada



Şekil 2.11

dir. Bununla birlikte \mathcal{P}^{st} de aşağıdaki şekildedir.



Şekil 2.12

◊

Eğer \mathcal{K}^{st} tanımlı ise, aşağıdaki şekilde grafların (\mathcal{I} -komplekslerin) bir dönüşümü vardır.

$$\eta: \mathcal{K}^{st} \rightarrow \mathcal{K}^{st}$$

köşeler arasında birim dönüşüm ve kenarlar arasında da \mathcal{K}^{st} nin $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ kenarını, \mathcal{K}^{st} nin γ kenarına götüren bir dönüşüm tanımlanır ise, bu η dönüşümünün örten olduğu açıktır. Dolayısıyla η nin bijective (birebir ve örten) olması için kenarlar arasındaki dönüşümün birebir olması yeterlidir. Çünkü köşeler arasındaki birim dönüşüm birebirdir.

2.3.3 Tanım: (2.1) deki gibi bir \mathcal{K} 2-kompleksi için, \mathcal{K}^{st} tanımlı ve $\eta: \mathcal{K}^{st} \rightarrow \mathcal{K}^{st}$ dönüşümü birebir, örten ise \mathcal{K} ya **ince 2-kompleks** denir.

2.3.4 Teorem: Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(1) \mathcal{K} bir ince 2-komplekstir.

(2) \mathcal{K} 2-kompleksi aşağıdaki iki durumu sağlar:

(i) $\lambda, \mu \in \Lambda$ için, $\lambda \neq \mu$ ise ρ_μ ; ρ_λ^ε ($\varepsilon = \pm 1$) nin devirli döngülerinden biri değildir,

(ii) $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ nin elemanları olan ρ_λ lar $\alpha\alpha^{-1}$ şeklinde değildir.

İspat: (1 \Rightarrow 2) Varsayalım ki \mathcal{K} ince 2-kompleks olsun. λ ve μ , Λ nin birbirinden farklı elemanları ve γ da ρ_λ^ε ($\varepsilon = \pm 1$) nin bir devirli döngüsü olsun. Biz $\gamma \neq \rho_\mu$ olduğunu göstereceğiz. $(\mu, 1, \rho_\mu)$ ve $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$, \mathcal{K}^{st} nin iki kenarıdır ve 1. koordinatları farklı olduğundan birbirlerine eşit değildirler. \mathcal{K} ince 2-kompleks olduğundan, tanımlanan η dönüşümü birebir ve örtendir, dolayısıyla $(\mu, 1, \rho_\mu)$ ve $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ nin görüntüleri olan γ ve ρ_μ de birbirinden farklı olacaktır. Yani $\gamma \neq \rho_\mu$ dır. Ayrıca, yine \mathcal{K} ince 2-kompleks olduğundan, \mathcal{K}^{st} tanımlıdır ve tersi kendisine eşit olan ρ_μ elemanı yoktur. Dolayısıyla ρ_λ lar $\alpha\alpha^{-1}$ şeklinde değildir.

(2 \Rightarrow 1) Varsayalım ki (i) ve (ii) koşulları sağlansın. (ii) den $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ nin hiçbir elemanının tersi kendisine eşit değildir. Böylece \mathcal{K}^{st} tanımlıdır. Ayrıca $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ ve $(\lambda', \varepsilon', \gamma')$, \mathcal{K}^{st} nin birbirinden farklı iki kenarı olsun. Amacımız η dönüşümü altında

bu kenarların görüntülerinin birbirinden farklı olduğunu göstermektedir. γ , ρ_λ^ε nin devirli bir döngüsü ve γ' de $\rho_{\lambda'}^{\varepsilon'}$ nin bir devirli döngüsü olsun.

$\lambda \neq \lambda'$ için (ii) den $\gamma \neq \gamma'$ olduğunu biliyoruz. Buradan $(\lambda, \varepsilon, \gamma) \neq (\lambda', \varepsilon', \gamma')$ için $\gamma \neq \gamma'$ dir.

Varsayalım ki $\lambda = \lambda'$ olsun. Eğer $\varepsilon = \varepsilon'$ ise $\gamma \neq \gamma'$ dir. Çünkü $(\lambda, \varepsilon, \gamma)$ ve $(\lambda', \varepsilon', \gamma')$, K^{ST} nin birbirinden farklı elemanları olduğundan, 3. koordinatlar olan γ ve γ' birbirinden farklı olmalıdır.

Son olarak $\lambda = \lambda'$ ve $\varepsilon = -\varepsilon'$ olsun. Eğer $\gamma = \gamma'$ ise, ρ_λ nin bir devirli döngüsü de $\rho_{\lambda'}^{-1}$ dir. Bunun olabilmesi için ρ_λ nin bazı devirli döngülerinin $\alpha\alpha^{-1}$ şeklinde olması gerekir. Buda (ii) ile çelişir.

Bütün bu sonuçlardan $(\lambda, \varepsilon, \gamma) \neq (\lambda', \varepsilon', \gamma')$ için, bunların $\eta: K^{ST} \rightarrow K^{st}$ dönüşümü altındaki görüntülerini $\gamma \neq \gamma'$ olarak buluruz. Yani η dönüşümü birebir, örtendir ve \mathcal{K} ince 2-komplekstir. \square

2.3.5 Örnek: Bir $\mathcal{P} = \langle a, b, c ; abcc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$ sunuşunu alalım. Burada $abcc^{-1}b^{-1}a^{-1}$ bağıntı yolu $(abc)(abc)^{-1}$ olarak yazılabilir. O halde 2.3.4 Teoreminden, $\alpha\alpha^{-1}$ şeklinde bir bağıntı yolu bulunduğundan, \mathcal{P} sunuşu ince 2-kompleks değildir.

Bu sunuş,

$$\mathcal{P} = \langle a, b, c ; abcc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$$

şeklinde olsaydı bir ince 2-kompleks olurdu. \diamond

2.3.6 Örnek: Bir $\mathcal{P} = \langle a, b ; ab, ba \rangle$ 2-kompleksi verilsin. Bu sunuşta $\rho_\lambda = ab$ ve $\rho_\mu = ba$ dır. Burada ρ_λ^ε ($\varepsilon = \pm 1$) nin devirli bir döngüsü olan ba , ρ_μ ye eşittir. Dolayısıyla 2.3.4 Teoreminden, verilen \mathcal{P} ince 2-kompleks olamaz.

Bu örnekte bağıntı yolları kümesi, $\rho_\lambda = ab$ ve $\rho_\mu = ba^2$ elemanlarından oluşsaydı, 2.3.4 Teoreminden, \mathcal{P} ince 2-kompleks tanımını sağlardı. \diamond

2.3.7 Örnek: Bir $\mathcal{P} = \langle a, b ; a^{-1}b^2ab^{-3} \rangle$ şeklindeki sunuş için, tek bir bağıntı yolu olduğundan, $\lambda \neq \mu$ için ρ_λ^ε ($\varepsilon = \pm 1$) nün bir devirli döngüsü ρ_μ ye eşit olamaz. Ayrıca $\alpha\alpha^{-1}$ şeklinde bağıntı yolu da yoktur. O halde bu 2-kompleks incedir.

Bu örnekte bağıntı yolu $a^{-1}b^2b^{-2}a$ şeklinde verilseydi, bu yol $\alpha\alpha^{-1}$ olarak yazılabileceğinden, yine 2.3.4 Teoremden, \mathcal{P} sunuşu ince 2-kompleks olmazdı.◊

2.3.8 Teorem: (2.1) şeklinde \mathcal{K} 2-kompleksi verilsin. Burada \mathcal{K}^{st} 1-kompleksi tanımlı ve bir $e^\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ ($\varepsilon = \pm 1$) için, e^ε ile $e^{-\varepsilon}$ bu ρ_λ ($\lambda \in \Lambda$) bağıntı yollarında sadece bir kez $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ şeklinde yer alıyorsa, \mathcal{K}^{st} nin e^ε köşesindeki *Birinci Temel grubu*, $(\mathbb{Z}, +)$ ile izomorftur. Diğer bir deyişle

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^\varepsilon) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

dır.

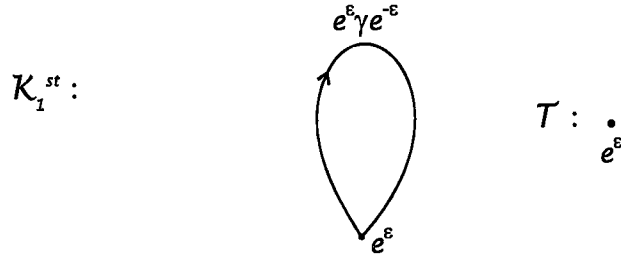
İspat:

$\mathcal{K}_1^{st} :$



Şekil 2.13

olmak üzere, \mathcal{K}_2^{st} diğer köşe ve kenarlardan oluşan, varsayım gereği de \mathcal{K}_1^{st} ye bir yol ile bağlı olmayan 1-komplekstir. O halde \mathcal{K} nın Star kompleksi birbirinden ayrık \mathcal{K}_1^{st} ile \mathcal{K}_2^{st} nin birleşiminden oluşur. Yani $\mathcal{K}^{st} = \mathcal{K}_1^{st} \cup \mathcal{K}_2^{st}$ dir. Hipotezimizden e^ε ile $e^{-\varepsilon}$ sadece $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ kapalı yolunda bir kez yer aldığından, e^ε köşesine bağlı $e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon}$ ve $(e^\varepsilon \gamma e^{-\varepsilon})^{-1}$ kenarları hariç başka bir kenar yoktur. Verilen \mathcal{K}^{st} içinde e^ε köşesindeki 1.Temel grubun elemanlarını bulurken sadece \mathcal{K}_1^{st} grafını kullanırız. Çünkü başlangıç ve bitiş köşesi e^ε olan kapalı yollar \mathcal{K}_2^{st} de yoktur. Bu \mathcal{K}_1^{st} grafından yararlanarak Temel grubun üreteç kümesini bulmak için, \mathcal{T} ağacını şu şekilde seçebiliriz:



Şekil 2.14

1.3.5.4 Teoremden, grubumuzun üreteç kümesinin eleman sayısı birdir ve bu eleman, $h=e^\epsilon \gamma e^{-\epsilon}$ olmak üzere, $t_h = [1_{e^\epsilon} (e^\epsilon \gamma e^{-\epsilon}) 1_{e^\epsilon}^{-1}] = [1_{e^\epsilon} (e^\epsilon \gamma e^{-\epsilon}) 1_{e^\epsilon}] = [(e^\epsilon \gamma e^{-\epsilon})]$ denklik sınıfıdır. 1.3.5.5 Teoremden, 1.Temel gruplar serbest grup olup, 1.2.6 Teoremden, bir üreteçli serbest gruplar; $(\mathbb{Z}, +)$ ye izomorftur. Diğer bir deyişle,

$$\Pi_1(K^{st}, e^\epsilon) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

dır.□

2.3.9 Örnek: Verilen

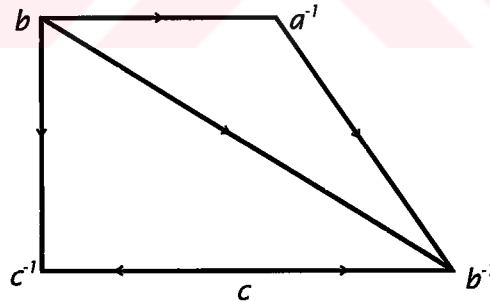


2-kompleksinde, $a \in \bar{E}(K)$ kenarı 2.3.8 Teoremin koşullarını sağlamaktadır.

K_1^{st} :



K_2^{st} :



Şekil 2.15

$K^{st} = K_1^{st} \cup K_2^{st}$ 1-kompleksinin, a köşesindeki 1.Temel grubun üreteç kümesi, $h=abc^2b^2a^{-1}$ olmak üzere, $t_h = \{ [abc^2b^2a^{-1}] \}$ dir. 2.3.8 Teoremden,

$$\Pi_1(K^{st}, a) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

bulunur.◇

2.3.10 Teorem: (2.1) şeklindeki \mathcal{K} , ince 2-kompleks ve bundan elde edilen \mathcal{K}^{st} bağlantılı 1-kompleks olsun. Bu 2-komplekste her $e^\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ ($\varepsilon = \pm 1$) kenarı, ρ_λ bağıntı yollarında sadece e^ε olarak bir kez yer alıyorsa, \mathcal{K}^{st} nin herhangi bir köşesindeki 1.Temel grup, $(\mathbb{Z}, +)$ ya izomorf olur.

İspat: Bu \mathcal{K} kompleksi için Star kompleks bağlantılı olarak verildiğinden, 1.3.4.4 Teoremden, \mathcal{K}^{st} nin her köşesindeki 1.Temel grup birbirine izomorftur. 1.Temel grubun rankını hesaplamak için \mathcal{K}^{st} nin köşe ve kenar sayılarını hesaplamamız gerekmektedir. 2.1 Bölümdeki Star kompleks tanımından $\mathcal{V}(\mathcal{K}^{st})$ kümesi, \mathcal{K} nin $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ kümesidir. Dolayısıyla $\mathcal{V}(\mathcal{K}^{st})$ kümesinin eleman sayısı $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ kümesinin eleman sayısına eşittir. Bu sayıya m diyelim. Burada $\mathcal{E}(\mathcal{K}^{st})$ kümesi, 2.1 Bölümde \mathcal{K}^{st} nin tanımından ρ_λ ($\lambda \in \Lambda$) bağıntı yollarının, devirli döngüleri ve terslerinden oluşur. Her ρ_λ bağıntı yolunda, tüm $e^\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ kenarları sadece bir kez yer alacağından elde edeceğimiz toplam devirli döngü sayısı $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ kenar kümesinin eleman sayısına eşit olacaktır. Ayrıca bu kenarların tersleri de olacağından \mathcal{K}^{st} nin kenar sayısı, $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ kümesinin eleman sayısı m olduğundan, $2m$ olacaktır. 1.3.5.8 Teoremden, herhangi $e^\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathcal{K}^{st})$ için 1.Temel grubun rankı

$$m - m + 1 = 1$$

dir. 1.3.5.5 Teorem ile, $\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^\varepsilon)$ aslında serbest gruptur ve 1.2.6 Teoremden $(\mathbb{Z}, +)$ ye izomorftur. \square

2.3.11 Örnek: Bir $\mathcal{P} = \langle a, b, c ; abc^{-1}, a^{-1}b^{-1}c \rangle$ 2-kompleksi için, verilen her kenar, bağıntı yollarında bir kez yer almıştır. O halde, 2.3.10 Teoremden, herhangi e^ε kenarı için

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^\varepsilon) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

bulunur. \diamond

2.3.12 Teorem: (2.1) şeklinde verilen \mathcal{K} 2-kompleksinde, ρ_λ bağıntı yolları kümesinde, birbiri ardına gelen iki kenar sırasıyla $e^\varepsilon, f^{\varepsilon'}$ ($\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$) olsun. Bu

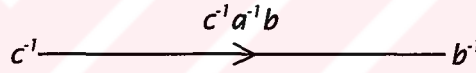
durumda \mathcal{K}^{st} kompleksi tanımlı ise $e^{-\varepsilon}$ ve f^{ε} köşelerindeki 1.Temel gruplar birbirine izomorftur.

İspat: γ, β verilen \mathcal{K} da iki yol olsun. Bu durumda, varsayım gereği, bir bağlantı yolu $\rho_\lambda = \gamma e^\varepsilon f^{\varepsilon}$ β şeklinde olur. 2.1 Bölümdeki Star kompleksin tanımından, ρ_λ nin bir devirli döngüsü olan $f^{\varepsilon} \beta \gamma e^\varepsilon$; başlangıç köşesi f^{ε} , bitiş köşesi $e^{-\varepsilon}$ olan bir kenardır. Dolayısıyla \mathcal{K}^{st} de $e^{-\varepsilon}$ ve f^{ε} , köşeleri $f^{\varepsilon} \beta \gamma e^\varepsilon$ kenarı ile birbirine bağlıdır. O halde 1.3.4.4 Teoremden,

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^{-\varepsilon}) \cong \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, f^{\varepsilon})$$

sağlanır. \square

2.3.13 Örnek: Bir $\mathcal{P} = \langle a, b, c ; abc, a^{-1}bc^{-1} \rangle$ sunuşunda, $a^{-1}bc^{-1}$ bağlantı yolunu örnek alırsak, b kenarı, c^{-1} kenarından önce gelmektedir. Buradaki $a^{-1}bc^{-1}$ kapalı yolunun bir devirli döngüsü olan $c^{-1}a^{-1}b$, \mathcal{P}^{st} de c^{-1} ve b^{-1} köşelerini birbirine bağlayan kenardır.



Şekil 2.16

2.3.12 Teoremden,

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, c^{-1}) \cong \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, b^{-1})$$

dir. \diamond

2.3.14 Sonuç: (2.1) şeklindeki \mathcal{K} 2-kompleksi için, \mathcal{K}^{st} tanımlı olsun. Bu durumda $f^{\varepsilon} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ ($\varepsilon = \pm 1$) şeklindeki bir kenar iki bağlantı yolunda da yer alıyor ise ve bu kenardan önce $e^\varepsilon, g^{\varepsilon}$ ($\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$) şeklinde kenarlar geliyorsa,

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^{-\varepsilon}) \cong \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, g^{-\varepsilon})$$

dir.

İspat: 2.3.12 Teoremden,

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^{-\varepsilon}) \cong \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, f^{\varepsilon}) \text{ ve } \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, g^{-\varepsilon}) \cong \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, f^{\varepsilon})$$

olur. Ama izomorfizim bir denklik bağıntısı olduğundan,

$$\Pi_1(\mathcal{K}^{st}, e^{-\varepsilon}) \cong \Pi_1(\mathcal{K}^{st}, g^{-\varepsilon})$$

sonucu bulunur. \square

2.3.15 Örnek: Tanımlanan $\mathcal{P} = \langle a, b, c, d; abc^{-1}d, a^{-1}c^{-1}d^{-1} \rangle$ sunuşunda, c^{-1} iki bağıntı yolunda da yer almış olup, sırasıyla b ile a^{-1} kenarlarından sonra gelmektedir. 2.3.14 Sonuçtan,

$$\Pi_1(\mathcal{P}^{st}, b^{-1}) \cong \Pi_1(\mathcal{P}^{st}, a)$$

izomorfluğu bulunur. \diamond

2.4 Star Komplekslerin Dönüşümleri

\mathcal{K} ve \mathcal{L} birer 2-kompleks olsun ve

$$\phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$$

şeklinde 2-komplekslerin bir dönüşümünü alalım. ϕ dönüşümünden yararlanarak \mathcal{K}^{st} ve \mathcal{L}^{st} için,

$$\phi^{st} : \mathcal{K}^{st} \rightarrow \mathcal{L}^{st} \tag{2.4}$$

gibi 1-komplekslerin bir dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm şu şekildedir.

Bir $e \in \mathcal{V}(\mathcal{K}^{st})$ köşesini, $\phi(e) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}^{st})$ nin ilk kenarına götürür ve $\gamma \in \mathcal{E}(\mathcal{K}^{st})$ kenarı için $\phi^{st}(\gamma) = \phi(\gamma)$ şeklinde tanımlanır.

Bir $e_i \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) kenarının ϕ altındaki görüntüsü bir yol olabilir. (Kimi zaman, bu yol tek bir elemandan oluşabilir. Bu durumda görüntü bu tek elemandır). Bu yolun içindeki toplam eleman (kenar) sayısını $r(i)$ ile gösterelim. $\gamma = e_1 e_2 \dots e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{K}^{st})$ alalım. $\phi(e_i) = f_{i_1} \dots f_{i_{r(i)}}$ olmak üzere, $\phi^{st}(\iota^{st}(\gamma)) = \phi^{st}(e_i) = f_{i_1}$, yani $\phi(e_i)$ in ilk kenarıdır. Bununla beraber $\iota^{st}(\phi^{st}(\gamma)) = \iota^{st}(\phi(e_1) \dots \phi(e_n)) = f_{i_1}$ eşitliğinden de $\iota^{st}(\phi^{st}(\gamma)) = \phi^{st}(\iota^{st}(\gamma))$ bulunur.

Ayrıca $\phi^{st}(\tau^{st}(\gamma)) = \phi^{st}(e_n^{-1}) = f_{n_{r(n)}^{-1}}$, $\tau^{st}(\phi^{st}(\gamma)) = \tau^{st}(\phi(e_1) \dots \phi(e_n)) = f_{n_{r(n)}^{-1}}$ olup, buradan da $\tau^{st}(\phi^{st}(\gamma)) = \phi^{st}(\tau^{st}(\gamma))$ eşitliği bulunur ve de $\phi^{st}(\gamma^{-1}) = \phi(\gamma^{-1}) = \phi(\gamma)^{-1} = \phi^{st}(\gamma)^{-1}$

olduğundan, tüm bu sonuçlardan ϕ^{st} nin \mathcal{I} -komplekslerin bir dönüşümü olduğu kolayca anlaşılır.

2.4.1 Örnek: Bir

$$\phi : \mathcal{K} = \langle a, b, c; ab^2c \rangle \rightarrow \mathcal{L} = \langle a, b, c; a^2b^2c^2 \rangle$$

dönüşümü

$$a \mapsto a^2, b \mapsto b, c \mapsto c^2$$

şeklinde verilsin. Bu dönüşümden yararlanarak, bir

$$\phi^{st} : \mathcal{K}^{st} \rightarrow \mathcal{L}^{st}$$

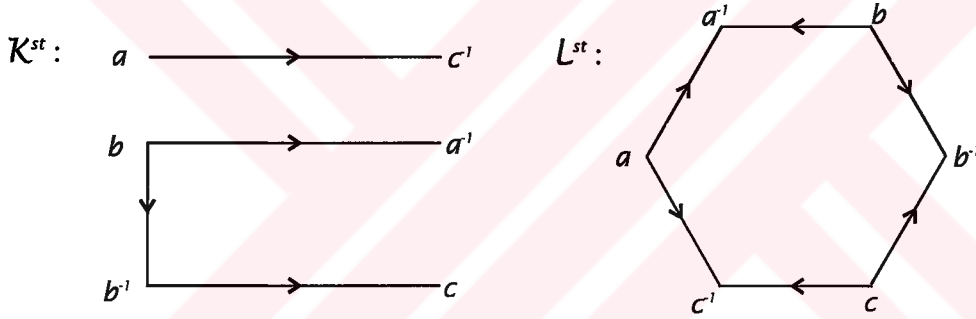
$$a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto c, a' \mapsto a', b' \mapsto b', c' \mapsto c'$$

(köşeler arasındaki dönüşüm),

$$ab^2c \mapsto a^2b^2c^2, b^2ca \mapsto b^2c^2a^2, bcab \mapsto bc^2a^2b, cab^2 \mapsto c^2a^2b^2$$

(kenarlar arasındaki dönüşüm),

dönüşümü elde edilir. Burada \mathcal{K}^{st} ve \mathcal{L}^{st} komplekslerinin şekilleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.17

◇

2.4.2 Örnek: Bir

$$\phi : \mathcal{K} = \langle a, b, c, d; abcd \rangle \rightarrow \mathcal{L} = \langle a, b, c, d; a^2b^2c^2d^2 \rangle$$

dönüşümü

$$a \mapsto ab, b \mapsto bc, c \mapsto cd, d \mapsto da$$

şeklinde verilsin. Bu dönüşümden yararlanarak,

$$a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto c, d \mapsto d, a' \mapsto b', b' \mapsto c', c' \mapsto d', d' \mapsto a'$$

(köşeler arasındaki dönüşüm),

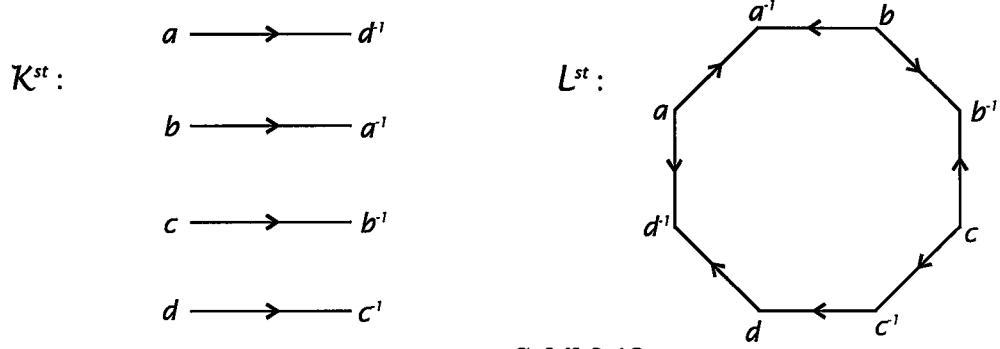
$$abcd \mapsto a^2b^2c^2d^2, bcda \mapsto b^2c^2d^2a^2, cdab \mapsto c^2d^2a^2b^2, dabc \mapsto d^2a^2b^2c^2$$

(kenarlar arasındaki dönüşüm)

olmak üzere,

$$\phi^{st} : \mathcal{K}^{st} \rightarrow \mathcal{L}^{st}$$

dönüşümü elde edilir. Yine burada \mathcal{K}^{st} ve \mathcal{L}^{st} komplekslerinin şekilleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.18

◇

3. $T(6)$ KOMPLEKSLER VE UYGULAMALARI

Bu bölümdeki temel tanımlar ve bu tanımlara bağlı olan bazı sonuçlar [6] da bulunabilir. Ama 3.1.10, 3.2.6, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11 Teoremleri ile 3.1.11, 3.2.7 Sonuçları şu ana kadar herhangi bir kaynaktan bulunamamış olup, ispatları tarafımdan yapılmıştır.

3.1 $T(6)$ Kompleksler ve X-Gruplar

Bir

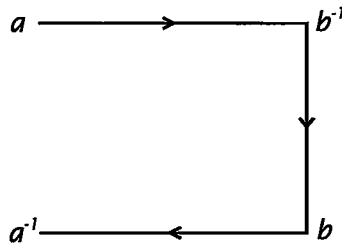
$$\mathcal{K} = \langle \Gamma ; \rho_\lambda (\lambda \in \Lambda) \rangle \quad (3.1)$$

şeklinde 2-kompleks verilsin. Bu 2-kompleksteki $\rho_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ bağıntı yolları, devirsel indirgenmiş (başlangıç ve bitiş köşeleri birbirinin tersi olmayan) ve $L(\rho_\lambda) \geq 3$ olsun. Burada \mathcal{K} dan elde edilen \mathcal{K}^{st} Star kompleksinde, $3 \leq L(\gamma) < q$ ($q \in \mathbb{Z}^+$) olacak şekilde γ indirgenmiş kapalı yolu yok ise, (3.1) deki 2-komplekse $T(q)$ kompleks denir. Özel olarak $q=6$ için $T(6)$ kompleks elde edilmiş olur. O halde bir 2-kompleksin $T(6)$ olabilmesi için bağıntı yollarının elemanları devirli indirgenmiş ve uzunluklarının 3 veya 3 den büyük; ayrıca buradan elde edilen Star kompleks içinde 3,4 ve 5 uzunluklu indirgenmiş kapalı yol olmamalıdır.

3.1.1 Örnek: Verilen

$$\mathcal{K} = \langle \text{Şekil 3.1} ; ab^2 \rangle$$

2-kompleksi için \mathcal{K}^{st} kompleksi,



Şekil 3.1

şeklindedir. $\rho, =ab^2$ için $L(\rho)=3$ olup, dikkat edilirse K^{st} de $3 \leq L(\gamma) < 6$ özelliğinde indirgenmiş γ kapalı yolu yoktur. O halde bu örnekteki K , bir $T(6)$ komplekstir. \diamond

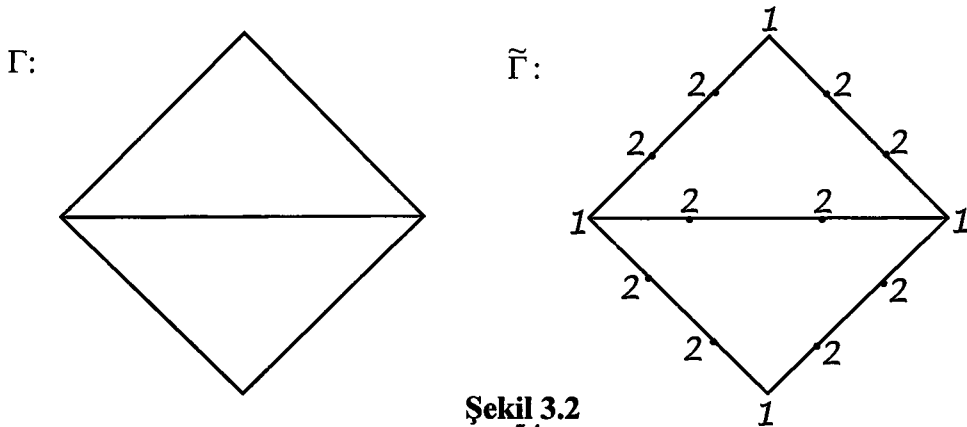
3.1.2 Tanım: Bir Γ grafi aşağıda verilen üç maddeyi sağlıyor ise, bu Γ ya **trisected** denir.

1) Γ nın köşeleri boş olmayan, ayrık iki kümeye ayrılmıştır. Burada e^+ olarak, her elemanına 2 kenar bağlı olan birinci köşeler kümesine **çeşit(2)** kümesi denir. 2 ve 2 den farklı kenar bağlı olan köşelerin oluşturduğu diğer kümeye **çeşit(1)** kümesi denir. İki kenar bağlı olan köşe **çeşit(1)** kümesine ait olabilir. Fakat bir köşeye 2 den farklı kenar bağlı ise o köşe **çeşit(2)** kümesindedir.

2) Γ 1-kompleksindeki kenarlar **(1,2)** ve **(2,2)** olmak üzere iki kümeye ayrılmıştır. **(1,2)** kenarların bir köşesi **çeşit(1)** kümesine, diğer köşesi de **çeşit(2)** ye aittir. **(2,2)** kenarlarının ise her iki köşesi de **çeşit(2)** kümesine aittir. Bir $v \in \text{çeşit(1)}$ için $\text{Star}(v)$ kümesine ait elemanlar **(1,2)** kenardır. Eğer $v \in \text{çeşit(2)}$ olur ise tanımdan dolayı bu köşeye iki kenar bağlı olacaktır ve $\text{Star}(v)$ nin elemanlarından birisi **(1,2)** kenar, diğeri **(2,2)** kenardır.

3) Γ 1-kompleksinde, indirgenmiş ve uzunluğu 3 olan hiçbir kapalı yol yoktur.

Özel olarak herhangi Γ grafından trisected graf elde etmek için $E(\Gamma)$ kenarlar kümesinin elemanlarının her birini üç kenara bölerek yeni bir 1-kompleks elde edilir. Bu şekilde bulunan graf trisected olur. Şekil 3.2 de bir Γ grafının her kenarını 3 kenara bölünerek elde edilen $\tilde{\Gamma}$ trisected 1-kompleks görülmektedir.



Şekil 3.2
54

3.1.3 Sonuç: Trisected \mathcal{I} -komplekste indirgenmiş kapalı yolların uzunluğu 3 ün bir katıdır ve bu uzunluk en az 6 olur.

İspat: Herhangi Γ trisected \mathcal{I} -kompleksi için, $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ köşesindeki indirgenmiş γ şeklindeki bir kapalı yolu düşünelim.

1) $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ olsun. $\text{Star}(v)$ nin her elemanı $(1,2)$ kenar olduğundan, γ kapalı yolunun ilk kenarının bitiş köşesi $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ ye aittir. Bu köşe \tilde{v} olsun. $\text{Star}(\tilde{v})$ kümesinin eleman sayısı 2 dir. Biri $(1,2)$ diğeri $(2,2)$ kenar olduğundan, γ indirgenmiş kapalı yolunun ikinci kenarı $(2,2)$ olmak zorundadır. O halde ikinci kenarın bitiş köşesi de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ ye aittir. Bu köşeye de $\tilde{\tilde{v}}$ diyelim. $\text{Star}(\tilde{\tilde{v}})$ nin aynı şekilde $(1,2)$ ve $(2,2)$ kenarı vardır. $(2,2)$ olan kenar \tilde{v} köşesinden $\tilde{\tilde{v}}$ köşesine bağlı kenar olduğundan, γ indirgenmiş kapalı yolunun üçüncü kenarı $(1,2)$ olmalıdır. Bu üçüncü kenarın bitiş köşesi başlangıçtaki $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ köşesi olabilir. Öyleyse 3 uzunluklu bir yol olduğu görülür. Eğer değilse, aynı işlemler tekrar edildiğinde, indirgenmiş γ şeklindeki kapalı yolun uzunluğunun 3 ün bir katı olduğu görülür.

2) $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ olsun. O halde bu köşeye bağlı kenarlardan biri $(1,2)$ diğeri $(2,2)$ dir. Varsayalım ki, γ indirgenmiş kapalı yolunun ilk kenarı $(1,2)$ olsun. O halde bu kenarın bitiş köşesi $\tilde{v} \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ olur. $\text{Star}(\tilde{v})$ nin bütün elemanları $(1,2)$ olduğundan γ nın ikinci kenarının bitiş köşesi $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ ye aittir. Bu köşeye $\tilde{\tilde{v}}$ diyelim. $\text{Star}(\tilde{\tilde{v}})$ kümesinin $(1,2)$ ve $(2,2)$ kenar olacak şekilde iki kenarı vardır. Eğer γ nın üçüncü kenarı $(2,2)$ ise bu kenarın bitiş köşesi v olabilir. Öyleyse 3 uzunluklu indirgenmiş yol olur. Fakat γ nın üçüncü kenarı $(1,2)$ ise bitiş köşesi $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ kümesine ait olacaktır ve 1) maddesindeki aynı işlemler takip edilirse, yine indirgenmiş γ şeklindeki kapalı yolun uzunluğu 3 ün bir katı olur. Benzer olarak γ nın $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$ köşesinden başlayan ilk kenarının $(2,2)$ olduğu düşünülerek de istenilen sonuca ulaşılır.

Ayrıca 3.1.2 Tanımın son maddesinden, boş olmayan ve indirgenmiş herhangi bir kapalı yolun uzunluğu en az 6 olur. \square

3.1.4 Tanım: \mathcal{K} , (3.1) şeklinde bağlantılı bir 2-kompleks olsun. Eğer \mathcal{K} için,

i) \mathcal{K}^{st} trisected 1-komplekstir,

ii) Her $e, e' \in \mathcal{V}(\mathcal{K}^{st})$ köşeleri aynı $\text{çeşit}()$ ($\text{çeşit}(1)$ veya $\text{çeşit}(2)$) kümesine aittir ($e \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$),

iii) \mathcal{K} nın her bağıntı yolunun uzunluğu 3 tür,

özellikleri sağlanıyorsa, \mathcal{K} ya bir **X kompleks** denir. Bu 2-komplekse izomorf olan gruba da **X-grup** denir.

3.1.5 Sonuç: Her X-kompleks, $\mathcal{T}(6)$ komplekstir fakat tersi doğru değildir.

İspat: \mathcal{K} nın her bağıntı yolunun uzunluğu 3 olduğundan $\mathcal{T}(6)$ kompleks olmasının ilk şartı sağlanmış olur. Ayrıca \mathcal{K}^{st} trisected 1-kompleks olduğundan, indirgenmiş kapalı yolların uzunluğu en az 6 olur. Tüm bunlardan da istenen sonuç elde edilir.

Bağıntı yollarının uzunluğu 3 ten farklı olan $\mathcal{T}(6)$ kompleksler, X-kompleks tanımını sağlamaz. Yani her $\mathcal{T}(6)$ kompleks, X-kompleks değildir. \square

3.1.6 Önteorem: Verilen

$$\Psi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$$

1-komplekslerin yerel birebir örten dönüşümü için, eğer Γ trisected ise $\tilde{\Gamma}$ de trisected olur.

İspat: $\tilde{\Gamma}$ nın 3.1.2 Tanımını sağladığını gösterelim.

1) Burada $\Psi(\tilde{v}) \in \mathcal{V}(\Gamma)$ köşesi, $\text{çeşit}(1)$ veya $\text{çeşit}(2)$ nin elemanı olmak üzere, $\tilde{v} \in \mathcal{V}(\tilde{\Gamma})$ köşesi $\text{çeşit}(1)$ veya $\text{çeşit}(2)$ nin elemanı olsun. Amacımız $\tilde{v} \in \text{çeşit}(2)$ iken, \tilde{v} ye bağlı kenar sayısının 2 olduğunu göstereceğiz. O halde $\tilde{v} \in \text{çeşit}(2)$ olarak alırsak, 3.1.2 Tanımdan, $\Psi(\tilde{v}) \in \text{çeşit}(2)$ olur. Γ trisected olduğundan, bu köşeye bağlı kenar sayısı 2 dir. Ψ yerel birebir örten olduğundan da,

$$\text{Star}(\tilde{v}) \rightarrow \text{Star}(\Psi(\tilde{v}))$$

dönüşümü birebir örtendir. Dolayısıyla bu bize, \tilde{v} köşesine bağlı kenar sayısının 2 olduğunu verecektir.

2) $\tilde{\Gamma}$ içinde $\text{çeşit}(1)$ kümesine ait bir \tilde{u} köşesini alalım. Şimdi $\text{Star}(\tilde{u})$ nun her kenarının aslında $(1,2)$ kenar olduğunu göstermeliyiz. O halde $\tilde{e} \in \text{Star}(\tilde{u})$ olsun. Buradan

$$\Psi(\tilde{e}) \in \text{Star}(\Psi(\tilde{u}))$$

dir. $\Psi(\tilde{u}) \in \text{çeşit}(1)$ olduğundan, $\tau(\Psi(\tilde{e})) \in \text{çeşit}(2)$ bulunur. Ayrıca 1 -kompleks tanımından,

$$\tau(\Psi(\tilde{e})) = \Psi(\tau(\tilde{e}))$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\Psi(\tau(\tilde{e})) \in \text{çeşit}(2)$ ve de $\tau(\tilde{e}) \in \text{çeşit}(2)$ olur. Böylece $\tilde{e} \in \text{Star}(\tilde{u})$ kenarının başlangıç köşesi $\text{çeşit}(1)$, bitiş köşesi de $\text{çeşit}(2)$ kümesine ait olur. Yani \tilde{e} kenarı $(1,2)$ dir. Benzer olarak, $\tilde{\Gamma}$ nin $\tilde{w} \in \text{çeşit}(2)$ içinde $\text{Star}(\tilde{w})$ nin bir kenarı $(1,2)$ ise diğer kenarı $(2,2)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

3) $\tilde{\beta}$, $\tilde{\Gamma}$ de indirgenmiş kapalı yol olsun. Ψ yerel birebir örten olduğundan, $\Psi(\tilde{\beta})$ yine bir indirgenmiş kapalı yol olur. Γ trisected olduğundan, 3 uzunluklu kapalı yol yoktur. O halde $\tilde{\beta}$ yolunun uzunluğu da 3 değildir. Yani $L(\tilde{\beta}) \neq 3$ tür.

Tüm bu yapılanlar bize $\tilde{\Gamma}$ nin trisected olduğunu gösterir. \square

3.1.7 Teorem: 2-komplekslerin, yerel birebir ve örten bir

$$\phi: \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$$

dönüşümü için, eğer \mathcal{K} X-kompleks ise $\tilde{\mathcal{K}}$ da X-komplekstir.

İspat: $\tilde{\mathcal{K}}$ nın X-kompleks olduğunu göstermek için, 3.1.4 Tanımı uygulayalım. Varsayımda, ϕ 2-komplekslerin yerel birebir örten dönüşümü olduğundan, 1.4.1 Bölümdeki tanımdan, $\tilde{\mathcal{K}}$ 2-kompleksinin bağıntı yolları, \mathcal{K} nın bağıntı yollarının örtüleridir. \mathcal{K} daki her bağıntı yolunun uzunluğu 3 olduğundan, $\tilde{\mathcal{K}}$ 2-kompleksinin bağıntı yollarının uzunluğu 3 olur.

Şimdi de $\tilde{\mathcal{K}}^{st}$ 1-kompleksinin trisected olduğunu gösterelim. 2.4 Bölümde belirtildiği üzere,

$$\phi: \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$$

yerel birebir örten dönüşümü için, 1-komplekslerin

$$\phi^{st}: \tilde{\mathcal{K}}^{st} \rightarrow \mathcal{K}^{st}$$

yerel birebir ve örten dönüşümü vardır. 3.1.4 Tanım ve 3.1.6 Önteoremden, $\tilde{\mathcal{K}}$ nin trisected olduğu sonucu çıkar. ϕ^{st} nin tanımından (bak. 2.4 Bölüm),

$$\phi^{st}(\tilde{e}) = \phi(\tilde{e}) = e, \quad \phi^{st}(\tilde{e}^{-1}) = \phi(\tilde{e}^{-1}) = e^{-1}$$

dir. \mathcal{K} bir X-kompleks olduğundan, \mathcal{K}^{st} de e ve e^{-1} aynı $\text{çeşit}()$ kümesine aittir. Aynı zamanda, ϕ^{st} yerel birebir örten olduğundan, \tilde{e} ile \tilde{e}^{-1} köşeleri de aynı $\text{çeşit}()$ kümesine ait olur. Bütün bu sonuçlardan, $\tilde{\mathcal{K}}$ nin X-kompleks olduğu bulunur. \square

\mathcal{R} , (3.1) de verilen 2-kompleksteki bağıntı yollarını gösteren küme olmak üzere,

3.1.8 Teorem: Bir

$$\mathcal{K} = \langle \Gamma; \mathcal{R} \rangle$$

2-kompleksi verilsin. Bu komplekste, her bağıntı yolunun uzunluğu 3 olmak üzere, aşağıda verilenler denktir.

i) \mathcal{K} bir X-komplekstir.

ii) \mathcal{K} şu özelliklere sahiptir:

1) \mathcal{K} nin kenarları, boş olmayan birbirinden ayrık ve ters elemanların da aynı kümede olduğu, \mathcal{A} ile \mathcal{B} gibi iki kümeye ayrılmıştır.

2) Bağıntı yollarının formu $ab\tilde{a}$ şeklindedir ($a, \tilde{a} \in \mathcal{A}$ ve $b \in \mathcal{B}$).

3) Her $a \in \mathcal{A}$ kenarı, $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ kümesinde bir kez sağda ve de bir kez solda olmak üzere, tam iki kere yer alır.

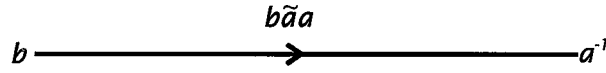
4) Eğer $a_1 b_1 a, ab\tilde{a}, \tilde{a} b_2 a_2 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ ise $b_1 \neq b_2^{-1}$ dir.

İspat: İlk önce i) den ii) nin elde edildiğini gösterelim. Varsayalım ki, \mathcal{K} X-kompleks olsun.

1) \mathcal{K} bir X-kompleks olduğundan, \mathcal{K}^{st} 1-kompleksi trisected olur. O halde 3.1.2 Tanımdan, \mathcal{K}^{st} boş olmayan birbirinden ayrık, $\mathcal{B} = \text{çeşit}(1)$ ve $\mathcal{A} = \text{çeşit}(2)$ olmak üzere, köşelerin iki kümesine ayrılmıştır. Biliyoruz ki, \mathcal{K}^{st} nin köşelerinin kümesi \mathcal{K} nin kenarlarının kümesidir. Ayrıca yine X-kompleks tanımından, $e, e^{-1} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$

kenarları aynı \mathcal{C} kümesine aittir. Buradan da, \mathcal{A} ve \mathcal{B} kümeleri her elemanın tersini de bulundurur. Başka bir deyişle ters elemana göre kapalıdır.

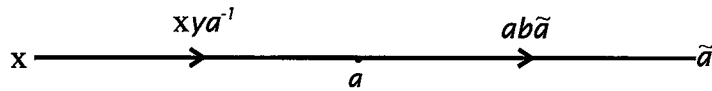
2) Bağlantı yollarının formunun $ab\tilde{a}$ ($a, \tilde{a} \in \mathcal{A}$ ve $b \in \mathcal{B}$) şeklinde olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak bir bağlantı yolunun en çok bir $b \in \mathcal{B}$ şeklinde bir elemana sahip olabileceğini gösterelim. Varsayalım ki, bir bağlantı yolu $\rho = ab\tilde{a}$ ($a, b \in \mathcal{B}$) olsun. Bu kenarın bir devirli döngüsü olan $b\tilde{a}a$, \mathcal{K}^{st} de bir kenardır.



Şekil 3.3

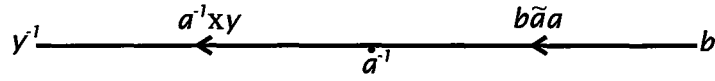
Bu kenar $\text{Star}(b)$ nin elemanıdır. \mathcal{K}^{st} trisected olduğundan, bu kenarın (1,2) kenar olması gerekmektedir. Fakat $a \in \mathcal{B}$ (\mathcal{C} (1)) olduğundan, bu bize bir çelişki verir. O halde, \mathcal{K} daki her bağlantı yolu en çok bir tane \mathcal{B} kümesinin elemanını içerir.

İkinci olarak bağlantı yollarının en az bir tane $b \in \mathcal{B}$ bulundurması gerektiğini göstermeliyiz. Dolayısıyla $a, \tilde{a} \in \mathcal{A}$ olmak üzere, $\rho = ab\tilde{a}$ şeklindeki bağlantı yolu için, $b \in \mathcal{B}$ olduğunu göstermeliyiz. \mathcal{K}^{st} içinde, $a \in \mathcal{A}$ (\mathcal{C} (2)) olduğundan, bu köşeye iki kenar bağlı olacaktır. Bu kenarlar Şekil 3.4 de görüldüğü gibi, biri $ab\tilde{a}$ ve diğeri de xya^{-1} kenarlarıdır ($x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$).



Şekil 3.4

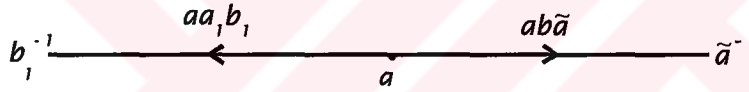
Burada $x \in \mathcal{C}$ (1) olmak zorundadır, çünkü $\text{Star}(a)$ kümesinin iki elemanından biri (1,2) diğeri de (2,2) kenardır. X-kompleks tanımından, $\tilde{a} \in \mathcal{A}$ için $\tilde{a}^{-1} \in \mathcal{A}$ dır. Dolayısıyla $ab\tilde{a}$ kenarı (2,2) kenar ve xya^{-1} kenarı da (1,2) kenar olur. Bir bağlantı yolunda \mathcal{B} (\mathcal{C} (1)) kümesine ait bir tek eleman olabileceğinden, xya^{-1} kenarı için $y \in \mathcal{A}$ olur. \mathcal{K}^{st} içinde, Şekil 3.5 deki gibi $a^{-1}xy$ ve $b\tilde{a}a$ kenarları vardır (çünkü $ab\tilde{a}$ ve xya^{-1} kenarlarının birer devirli döngüleridir).



Şekil 3.5

Yine X-kompleks tanımından $a^{-1}, y^{-1} \in \mathcal{A}$ olacağından $a^{-1}xy$ kenarı (2,2) dir ve $b\tilde{a}a$ kenarı (1,2) olmak zorundadır (çünkü $\text{Star}(a^{-1})$ kümesine (1,2) ve (2,2) kenar bağlı olmalıdır). Tüm bunlardan çıkan sonuç ise, $b \in \mathcal{B}$ (*çeşit(1)*) dir. Yani $ab\tilde{a}$ gibi herhangi bir bağıntı yolunda, \mathcal{B} kümesinin en az bir elemanı vardır. İki kısımda incelediğimiz $ab\tilde{a}$ bağıntı yolu için, $a, \tilde{a} \in \mathcal{A}$ ve $b \in \mathcal{B}$ olmalıdır.

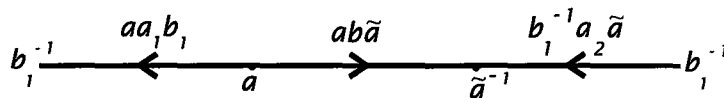
3) Şimdi de her $a \in \mathcal{A}$ nın, $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ kümesinde bir kez sağda ve de bir kez solda olmak üzere iki kez yer aldığını gösterelim. 3.1.2 Tanımdan, $\rho = ab\tilde{a}$ ($a, \tilde{a} \in \mathcal{A}$ ve $b \in \mathcal{B}$) bağıntı yolu için, a köşesine bağlı kenar sayısı iki olacağından, Şekil 3.6 da görüldüğü gibi bu köşeye $\mu = aa_1b_1$ şeklinde bir kenar daha bağlıdır.



Şekil 3.6

a ile $\tilde{a}^{-1} \in \mathcal{A}$ olduğundan, $\rho = ab\tilde{a}$ devirli döngüsü (2,2) kenardır. Dolayısıyla $\mu = aa_1b_1$ kenarı da (1,2) kenar olur. Buradan da Şekil 3.6 da görüldüğü gibi bu kenarın bitiş köşesi b_1^{-1} , *çeşit(1)* kümesine aittir. Bir bağıntı yolunda *çeşit(1)* kümesinin elemanı bir kez yer aldığından, $a_1 \in \text{çeşit}(2)$ dir. O halde aa_1b_1 kenarından elde ettiğimiz bağıntı yolu a_1b_1a şeklindedir. Böylece herhangi $a \in \mathcal{A}$ nın, $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ kümesinde bir kez sağda ve de bir kez solda yer aldığını göstermiş olduk.

4) Varsayalım ki, $a_1b_1a, ab\tilde{a}, \tilde{a}b_2a_2 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ ve $b_1 = b_2^{-1}$ olsun. O halde \mathcal{K}^{st} içinde, Şekil 3.7 de belirtilen kenarlar vardır.



Şekil 3.7

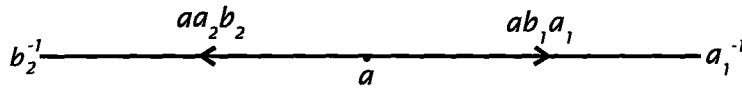
Buradan açıkça görülüyor ki, K^{st} içinde 3 uzunluklu indirgenmiş bir kapalı yol vardır. Bu da K^{st} nin trisected olmasıyla çelişir.

Şimdi de ii) koşulları var ise i) nin sağlandığını gösterelim. İlk olarak, X-kompleksin şartlarından, K^{st} nin trisected olduğunu gösterelim.

- ii) nin 1) maddesinden, K nın kenarları boş olmayan birbirinden ayrık ve ters elemanların da aynı kümede olduğu, A ve B gibi iki kümeye ayrılmış idi. Buradaki kümeleri yine $B=\text{çeşit}(1)$ ve $A=\text{çeşit}(2)$ olarak alalım. O halde 3) maddesinden, $a \in A$ elemanları $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ kümesinde $ab\bar{a}$ ve a_1b_1a olarak bir kez sağda ve de bir kez solda yer aldığından, $ab\bar{a}$ ile aa_1b_1 olacak şekilde bu köşelere bağlı kenar sayısı 2 olur. Böylece K^{st} nin trisected olması için ilk şart sağlanmış olur.

- Bir $b \in \text{çeşit}(1)$ olan K^{st} nin köşesini alalım. Şimdi $\text{Star}(b)$ nin elemanlarının $(1,2)$ kenar olduğunu göstermeliyiz. Bu b köşesine bağlı $\gamma=ba_1a_2$ şeklindeki kenar için 2) maddesinden $a_1, a_2 \in A$ olur. Bu γ kenarı için, $\tau^{st}(\gamma) \in A$ olur ki buradan da, $\text{Star}(b)$ nin elemanlarının $(1,2)$ kenar olduğu görülür.

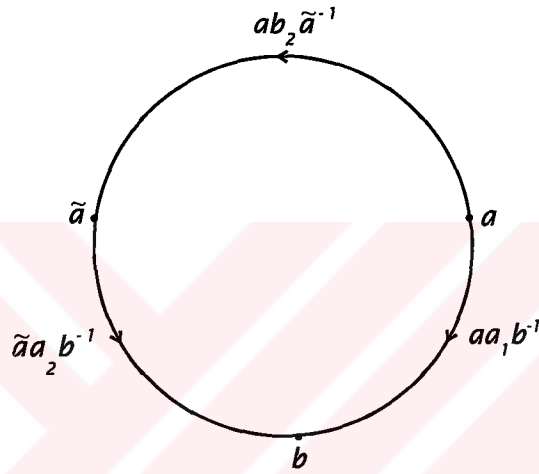
Şimdi de $a \in \text{çeşit}(2)$ köşesini alalım. 3) maddesinden, A nın elemanları bağlantı yollarında bir kez solda bir kez de sağda yer aldığından, $ab_1a_1, a_2b_2a \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ bağlantı yolları vardır ($a_1, a_2 \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$). O halde K^{st} de $\text{Star}(a)$ kümesinin elemanları ab_1a_1 ve aa_2b_2 olur.



Şekil 3.8

Şekil 3.8 den görüldüğü gibi $\text{Star}(a)$ nın ab_1a_1 elemanı $(2,2)$ kenar ve aa_2b_2 elemanı da $(1,2)$ kenardır.

• K^{st} nin trisected olması için, son şart olan 3 uzunluklu indirgenmiş kapalı yol olmadığını göstereyim. Kabul edelim ki, böyle bir kapalı yol olsun. Bu kapalı yola ait üç köşeden ikisi $\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(2)$ kümesine aittir biri de $\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(1)$ kümesindedir. Çünkü $v \in \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(1)$ kümesine ait bir köşe için, $\text{Star}(v)$ nin elemanları $(1,2)$ kenar olduğundan, bitiş köşesi $\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(2)$ kümesine ait olacaktır. Bu bitiş köşesine bağlı kenarların biri $(1,2)$ diğeri de $(2,2)$ kenar olduğundan, takip eden köşe yine $\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(2)$ kümesinin elemanı olacaktır. Son olarak da bu köşe v köşesine bağlı olacaktır. Tüm bunlardan Şekil 3.9 daki şekil karşımıza çıkar.



Şekil 3.9

Buradaki $a, b^{-1}a$, $ab_2 \tilde{a}^{-1}$ ve $\tilde{a}^{-1}b a_2^{-1}$ bağıntı yolları için $a, \tilde{a}, a_1, a_2 \in \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(2)$ ve $b, b_2 \in \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{T}(1)$ dir. Bu da 4) maddesi ile çelişmektedir. Çünkü bu şekilde bağıntı yolları var ise, $b^{-1} \neq b^{-1}$ olmalıdır fakat bu iki kenar birbirine eşit olduğundan bu bir çelişkidir. O halde indirgenmiş 3 uzunluklu kapalı yol yoktur. Dolayısıyla yukarıdaki maddelerle, K^{st} nin trisected olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca 1) maddesinden, \mathcal{A} ve \mathcal{B} kümeleri ters elemana göre kapalı idi. Bu kümeler için,

$$E(K) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

oldüğünden, X-kompleks olmanın ikinci şartı da sağlanmış olur.

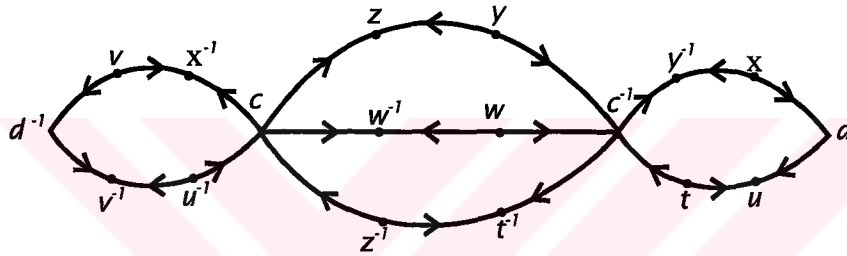
Son olarak hipotezden, her bağıntı yolunun uzunluğu 3 olarak alındığından, \mathcal{K} 2-kompleksinin X-kompleks olma için tüm şartlar sağlanmış olur. \square

Bir köşeli Γ grafindan elde edilen 2-kompleksin bir grup sunuşu olarak alınabildiğini 1.4.2.3 Sonucundan, biliyoruz. Aşağıda verilen grup sunuşu aslında bir köşeli graftan elde edilen bir 2-komplekstir.

3.1.9 Örnek: Verilen

$$\mathcal{P} = \langle c, d, x, y, z, t, u, v, w; xcy, yc^1z^1, z^1ct, tc^1u^1, u^1dv, vd^1x, wcw \rangle$$

sunuşu için elde edilen Star kompleksin geometrik ifadesi Şekil 3.10 daki gibidir.



Şekil 3.10

Bu \mathcal{P} sunuşu (2-kompleksi) bir X-sunuşudur (X-komplekstir). Çünkü 3.1.8 Teoreminin tüm koşullarını sağlamaktadır. Ayrıca, yine 3.1.8 Teoremdeki \mathcal{A} ve \mathcal{B} kümeleri

$$\mathcal{A} = \{ x, y, z, t, u, v, w \} \quad \text{ve} \quad \mathcal{B} = \{ c, d \}$$

şeklindedir. \diamond

3.1.10 Teorem: Bir X-kompleks tek bağıntı yoluna sahip olsun. Bu X-komplekse izomorf olan X-grubunun, minimum üreteç kümesinin eleman sayısı 2 ve bu grup tekilden farklıdır.

İspat: Verilen X-kompleks

$$\mathcal{K} = \langle \Gamma; r \rangle$$

şeklinde olsun. Burada $L(r)=3$ tür (X-kompleks tanımından). \mathcal{K} , X-kompleks olduğundan, Star kompleksinin $\mathcal{V}(\mathcal{K}^n)$ köşeler kümesi boş olmayan birbirinden ayrık

$\mathcal{C}(1)$ ve $\mathcal{C}(2)$ kümelerine ayrılmıştır. $V(K^{\text{st}})$ kümesinin elemanları K nın kenarlar kümesi olan $E(K)$ dan oluşmaktadır. 3.1.8 Teoremde belirtildiği gibi, X-kompleksin bağıntı yolları kümesi

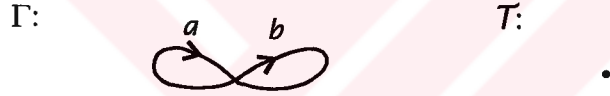
$$\mathcal{R} = \{ ab\bar{a} : a, \bar{a} \in \mathcal{C}(2) \text{ ve } b \in \mathcal{C}(1) \}$$

şeklindedir ve her $a \in \mathcal{C}(2)$ bağıntı yollarında bir kez sağda bir kez de solda yer almaktadır. K , tek bağıntı yoluna sahip olduğundan, $r=aba$ şeklinde olmalıdır. Bunun kapalı bir yol olabilmesi için seçilebilecek tek graf, bir köşeli olmak zorundadır. O halde bu X-kompleks,

$$K = \langle \text{[diagram]} ; aba \rangle$$

şeklindedir.

X-grup, bu X-kompleksin temsil ettiği gruba izomorf idi. K nın izomorf olduğu grubun sunuşunu bulabilmek için, 1.4.2.2 Teoreminden, T ağacı Şekil 3.11 deki gibi bulunur.



Şekil 3.11

O halde X-kompleksin izomorf olduğu grubun sunuşu,

$$\mathcal{P} = \langle x_a, x_b ; x_a x_b x_a \rangle$$

şeklinde olur. Burada bağıntı yolları arasında hiçbir indirgeme işlemi (bak. [2], [5]) yapılamayacağından, X-grubunun minimum üreteç kümesinin eleman sayısı 2 dir ve bu grup tekil değildir.□

K_1, K_2, \dots, K_n ler birbirinden farklı tek bağıntı yoluna sahip, X-kompleksler olmak üzere,

3.1.11 Sonuç: $K = K_1 * K_2 * \dots * K_n$ serbest çarpımı bir X-komplekstir. Aynı zamanda buna izomorf olan X-grup tekil değildir.

İspat: 3.1.10 Teoreminden, bu X-kompleksler tek köşeli graftan oluştuğundan, sunuş olarak

$$K_1 = \langle a_1, b_1 ; a_1 b_1 a_1 \rangle, K_2 = \langle a_2, b_2 ; a_2 b_2 a_2 \rangle, \dots, K_n = \langle a_n, b_n ; a_n b_n a_n \rangle$$

diğeri de $(2,2)$ kenardır (a_i, b_i, b_i, a_i) kenarları $(1,2)$ ve a_i, b_i, a_i kenarları $(2,2)$ dir). Ayrıca \mathcal{K}^{st} de uzunluğu 3 olan indirgenmiş kapalı yol da yoktur. Bu sonuçlardan \mathcal{K}^{st} trisected olur.

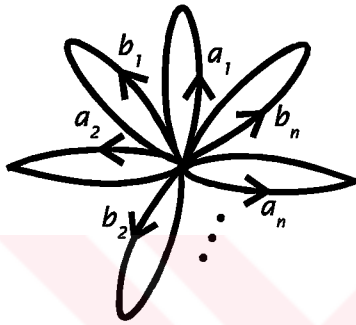
ii) Her $e \in \mathcal{V}(\mathcal{K}^{st})$ için, e ve e^{-1} aynı çeşit kümesine aittir.

iii) \mathcal{K} nın her bağıntı yolunun uzunluğu 3 tür.

i), ii) ve iii) den, \mathcal{K} bir X-komplekstir.

(3.2) deki \mathcal{K} X-kompleksi için seçilen Γ grafi ve \mathcal{T} ağacı, Şekil 3.14 deki gibidir.

Γ :



\mathcal{T} :



Şekil 3.14

Buradan da \mathcal{K} nın temsil ettiği grubun sunuşu, 1.4.2.2 Teoreminden,

$$\mathcal{P} = \langle x_{a_i}, x_{b_i}; x_{a_i} x_{b_i} x_{a_i} \rangle$$

şeklinde olacağı açıktır. Bu sunuş X-kompleksinden elde edildiğinden, aslında \mathcal{P} , bu X-komplekse izomorf olan X-grubunun sunuşudur. Ayrıca $1 \leq i \leq n$ olmak üzere x_{a_i} ve x_{b_i} ler birbirinden farklı olduklarından, \mathcal{P} sunuşu üzerinde hiçbir “indirgeme” operasyonu uygulanamaz. Böylece \mathcal{P} nin tekil bir grubu temsil etmediği görülür. \square

3.2 $\mathcal{T}(6)$ Sunuşları ve Uygulamaları

Yukarıdaki bölümde, (3.1) şeklinde verilen bir \mathcal{K} 2-kompleksinin, $\mathcal{T}(6)$ kompleks olabilmesi için gerekli şartları incelemiştik. Buradaki Γ grafi tek köşeli ise bu 2-kompleksten özel olarak $\mathcal{T}(6)$ sunuşu elde edilir. Bu $\mathcal{T}(6)$ sunuşunu

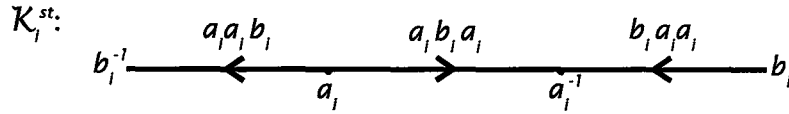
verilebilir. 1.2.2.1.1 Teoreminden, serbest çarpım grubunun sunuşu,

$$\mathcal{K} = \langle a_i, b_i; a_i b_i a_i (1 \leq i \leq n) \rangle \quad (3.2)$$

şeklinde olur. \mathcal{K} nın X-kompleks olduğu ve temsil ettiği X-grubun tekilden farklı olduğu 3.1.8 Teoreminden görülür.

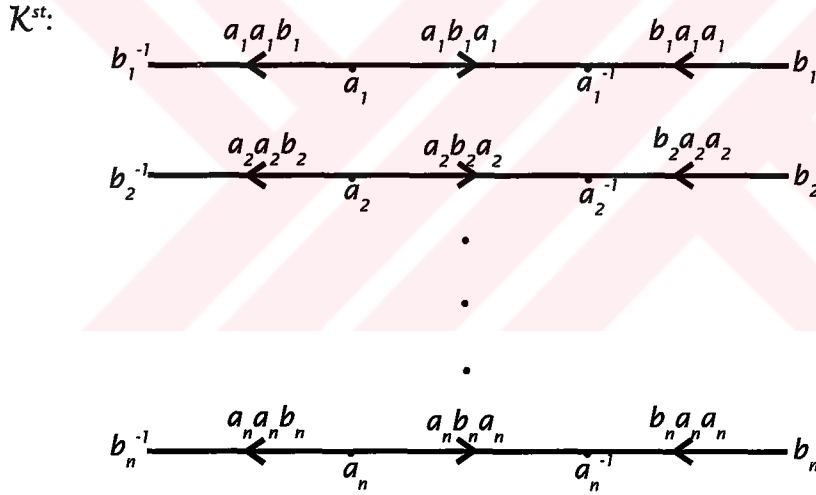
Bir de bu ispatı X-kompleks tanımının, tüm koşullarını sağladığını göstererek yapalım:

$1 \leq i \leq n$ olmak üzere, \mathcal{K}_i lerin Star kompleksi,



Şekil 3.12

şeklinde dir. Buradan \mathcal{K} nın Star kompleksi,



Şekil 3.13

olarak bulunur. Şekil 3.13 den,

i) \mathcal{K}^{st} nin köşeleri boş olmayan, birbirinden ayrık *çeşit(1)* ve *çeşit(2)* kümelerine ayrılmıştır. Bu kümeler

$$\text{çeşit}(1) = \{ b_i, b_i^{-1} : 1 \leq i \leq n \} \quad \text{ve} \quad \text{çeşit}(2) = \{ a_i, a_i^{-1} : 1 \leq i \leq n \}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $v \in \text{çeşit}(1)$ olmak üzere, $\text{Star}(v)$ nin bütün kenarları (1,2)

kenardır. Ayrıca $\tilde{v} \in \text{çeşit}(2)$ olmak üzere $\text{Star}(\tilde{v})$ nin iki kenarından biri (1,2)

$$\mathcal{P} = \langle X; \mathcal{R} \rangle \quad (3.3)$$

olarak gösterelim. (3.3) teki \mathcal{P} sunuşunda, \mathcal{R} nin elemanı olan kelimeleri (bağıntı yolları) oluşturan harflerin üsleri pozitif ise bu sunuşa **pozitif $T(6)$ sunuşu** denir.

3.2.1 Teorem: Verilen

$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_n; \mathcal{R}_1 \rangle$, $\mathcal{P}_2 = \langle y_1, y_2, \dots, y_n; \mathcal{R}_2 \rangle$, $\mathcal{P}_3 = \langle z_1, z_2, \dots, z_n; \mathcal{R}_3 \rangle$ pozitif $T(6)$ sunuşları için,

$$\mathcal{P} = \langle x_i, y_i, z_i; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, z_i y_i x_i \ (1 \leq i \leq n) \rangle$$

2-kompleksi pozitif $T(6)$ sunuşudur.

İspat: Verilen \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 ve \mathcal{P}_3 birer pozitif $T(6)$ sunuşları olduklarından, \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{R}_3 kümelerinin elemanlarının üsleri pozitifdir. Buna ek olarak $z_i y_i x_i$ bağıntı yolu da pozitif üslü olduğundan, \mathcal{P} nin bağıntı yolları kümesinin elemanlarının pozitif üslü olduğu görülür. Aynı şekilde \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 ve \mathcal{R}_3 kümelerinin elemanlarının uzunlukları 3 den büyük veya 3 tür ve de $L(z_i y_i x_i) = 3$ olduğundan, \mathcal{P} nin bağıntı yolları kümesinin uzunlukları 3 ve 3 den büyüktür.

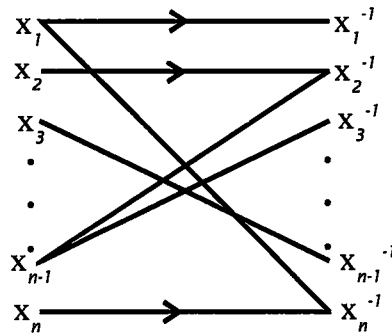
\mathcal{P}_1 için Star kompleksinin (\mathcal{P}_1^{st}) kenarlarının başlangıç köşelerinin kümesi

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

bitiş köşesi de

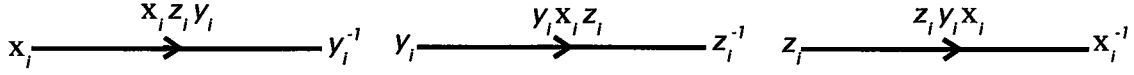
$$\{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$$

olur. Çünkü Star komplekste, başlangıç köşesini bulurken bağıntı yolunun ilk kenarı, bitiş köşesi de bağıntı yolunun son kenarının tersi olarak alınıyor idi. Bütün harfler pozitif olduğundan bu sonuç bulunur. Aynı işlemler \mathcal{P}_2^{st} , \mathcal{P}_3^{st} Star kompleksleri içinde geçerlidir. Kabaca \mathcal{P}_1^{st} nin grafiği aşağıdaki gibidir.



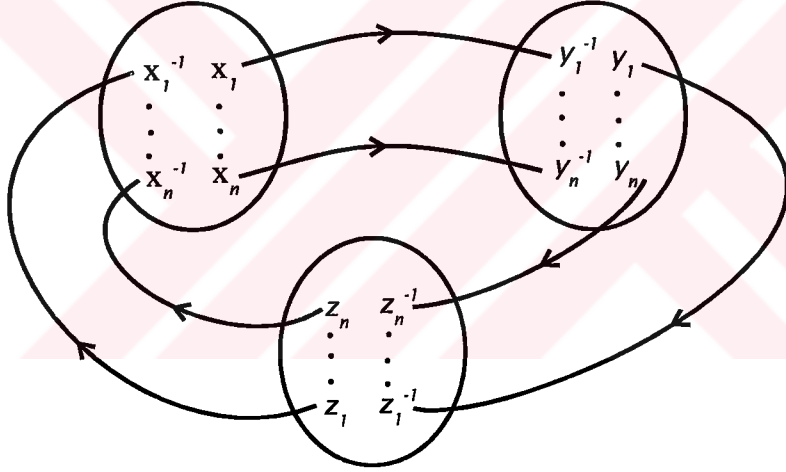
Şekil 3.15

Şekil 3.15 de belirtilen bu Star komplekste, $T(6)$ kompleks tanımından, $3 \leq L(\gamma) < 6$ olacak şekilde indirgenmiş kapalı yol yoktur. Benzer olarak \mathcal{P}_2 ve \mathcal{P}_3 sunuşlarının Star kompleksleri için de aynı şartlar geçerlidir. Tanımlanan \mathcal{P} 2-kompleksinde, z_i, y_i, x_i bağıntı yolları olduğundan, \mathcal{P}^{st} Star kompleksi \mathcal{P}_1^{st} , \mathcal{P}_2^{st} ve \mathcal{P}_3^{st} grafiklerinin birleşiminden hariç, Şekil 3.16 daki kenarlara da sahiptir.



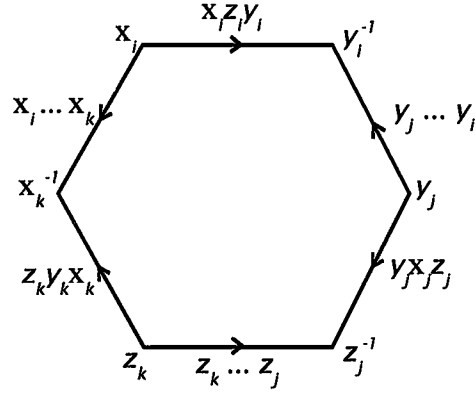
Şekil 3.16

Acaba \mathcal{P}^{st} de $3 \leq L(\gamma) < 6$ olacak şekilde indirgenmiş kapalı yol var mıdır? Bunun için, herhangi bir $x_i \in V(\mathcal{P}^{st})$ deki kapalı yolları inceleyelim. \mathcal{P}^{st} nin şekli kabaca aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.17

x_i köşesindeki en kısa indirgenmiş kapalı yol, Şekil 3.18 deki gibidir. Bunları herhangi y_i, z_i köşeleri içinde yapabiliriz. Sonuç olarak, Şekil 3.18 den görülüyor ki, indirgenmiş kapalı yolların uzunluğu 6 dır. Yani \mathcal{P}^{st} de $3 \leq L(\gamma) < 6$ olacak şekilde indirgenmiş kapalı yol yoktur ve \mathcal{P} pozitif $T(6)$ sunuşudur.



Şekil 3.18

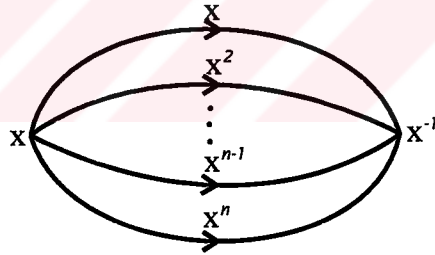
□

3.2.2 Teorem: Her \mathbb{Z}_n ($n \geq 3$) devirli grubunun sunuşu aslında $T(6)$ dır.

İspat: \mathbb{Z}_n devirli grubunun sunuşu,

$$\mathcal{P} = \langle x ; x^n \rangle$$

şeklindedir([10]). Burada $n \geq 3$ olduğundan, x^n bağıntı yolunun uzunluğu da ≥ 3 olacaktır. \mathcal{P} 2-kompleksinin (sunuşunun) Star kompleksi de



Şekil 3.19

şeklindedir. Görülür ki, Star komplekste indirgenmiş $3 \leq L(\gamma) < 6$ olacak biçimde bir γ kapalı yolu yoktur. O halde verilen \mathcal{P} sunuşu $T(6)$ dır.□

3.2.3 Teorem: Devirli olmayan değişmeli grupların sunuşu $T(6)$ değildir.

İspat: \mathcal{G} devirli olmayan herhangi değişmeli bir grup olsun. Bu grubun sunuşu

$$\mathcal{P} = \langle X ; \mathcal{R} \rangle$$

olmak üzere,

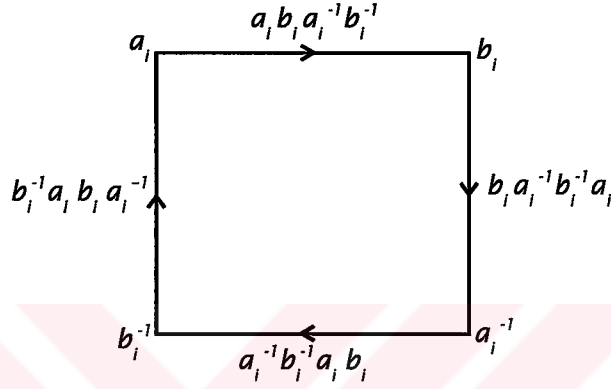
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \{ a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} : a_i, b_i \in X \}$$

dir (burada \mathcal{R}_1 , diğer bağıntı yollarını temsil eden kümedir). \mathcal{P} nin Star kompleksi

de $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ bağıntı yolunun devirli döngüleri olan

$$\{ a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, b_i a_i^{-1} b_i^{-1} a_i, a_i^{-1} b_i^{-1} a_i b_i, b_i^{-1} a_i b_i a_i^{-1} \}$$

kenarlarına sahiptir. Buradan, Şekil 3.20 de görülen indirgenmiş kapalı yol, \mathcal{P}^{st} içindedir.



Şekil 3.20

O halde

$$\gamma = (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) (b_i a_i^{-1} b_i^{-1} a_i) (a_i^{-1} b_i^{-1} a_i b_i) (b_i^{-1} a_i b_i a_i^{-1})$$

kapalı yolunun uzunluğu 4 olduğundan, \mathcal{P} sunuşu $\mathcal{T}(6)$ değildir. \square

3.2.4 Uyarı: Direk çarpım grubunun sunuşu, $\mathcal{T}(6)$ sunuşları için iyi tanımlı değildir.

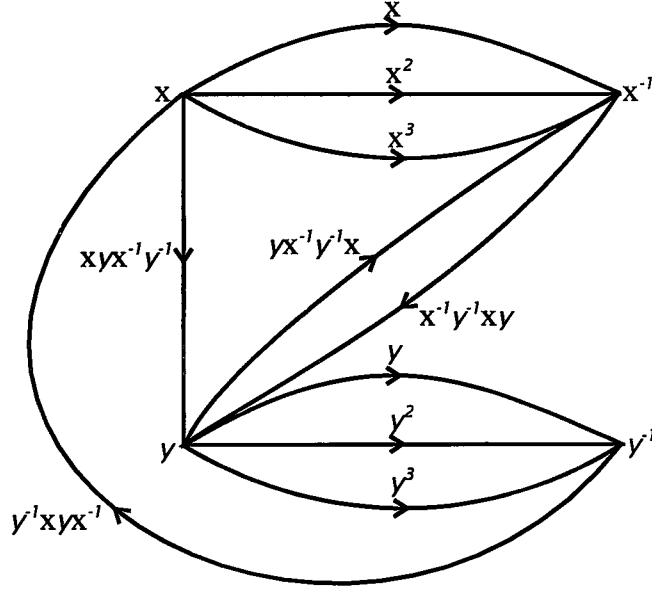
3.2.5 Örnek: Verilen 3 mertebeli iki devirli grubun sunuşu

$$\mathcal{P}_1 = \langle x; x^3 \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \langle y; y^3 \rangle$$

olsun. Bu grupların direk çarpım grubunun sunuşu 1.2.1.1.1 Teoremden,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \langle x, y; x^3, y^3, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

olur. O halde \mathcal{P}^{st} nin geometrik ifadesi



Şekil 3.21

olarak bulunur. Oluşturulan \mathcal{P}^{st} nin köşelerinin kümesi

$$V(\mathcal{P}^{st}) = \{ x, y, x^{-1}, y^{-1} \},$$

kenarlarının kümesi ise

$$E(\mathcal{P}^{st}) = \{ x, x^2, x^3, y, y^2, y^3, xyx^{-1}y^{-1}, yx^{-1}y^{-1}x, x^{-1}y^{-1}xy, y^{-1}xyx^{-1} \}$$

şeklindedir. Bu grafikten de görüldüğü ki

$$\gamma = (xyx^{-1}y^{-1})(yx^{-1}y^{-1}x)(x^{-1}y^{-1}xy)(y^3)(y^{-1}xy^{-1})$$

indirgenmiş kapalı yolu için $L(\gamma)=5$ olduğundan, $T(6)$ sunuş tanımına aykırıdır. \diamond

3.2.6 Teorem: Birbirinden farklı grupları temsil eden

$$\mathcal{P}_1 = \langle X_1; \mathcal{R}_1 \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \langle X_2; \mathcal{R}_2 \rangle$$

$T(6)$ sunuşları için tanımlanan, serbest çarpım grubunun sunuşu $T(6)$ dir.

İspat: 1.2.2.1.1 Teoreminden, \mathcal{P}_1 ve \mathcal{P}_2 nin serbest çarpım grubunun sunuşu

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2 = \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \rangle$$

şeklindedir. Amacımız \mathcal{P} nin $T(6)$ sunuşu olduğunu göstermektir. O halde,

i) \mathcal{P}_1 ve \mathcal{P}_2 birer $T(6)$ sunuşu olduklarından, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ kümelerinin elemanları olan bağıntı yollarının uzunlukları 3 den büyük veya eşittir. O halde \mathcal{P} nin bağıntı yollarının uzunlukları da 3 den büyük veya eşit olarak bulunur.

ii) \mathcal{P}_1^{st} ve \mathcal{P}_2^{st} nin $3 \leq L(\gamma) < 6$ olacak biçimde indirgenmiş kapalı yolu yoktur

ve

$$\mathcal{P}^{st} = \mathcal{P}_1^{st} \cup \mathcal{P}_2^{st}$$

olduğu açıktır. Ayrıca \mathcal{P}_1^{st} ve \mathcal{P}_2^{st} nin köşeleri birbirine bağlı olmadığından, \mathcal{P}^{st} de \mathcal{P}_1^{st} ve \mathcal{P}_2^{st} dekiler haricinde yeni bir indirgenmiş kapalı yol yoktur. Dolayısıyla \mathcal{P}^{st} içinde $3 \leq L(\gamma) < 6$ olacak biçimde indirgenmiş kapalı yolu olamaz.

O halde, i) ve ii) den \mathcal{P} nin bir $T(6)$ sunuşu olduğu bulunmuş olur. \square

$$\mathcal{P}_1 = \langle X_1; \mathcal{R}_1 \rangle, \mathcal{P}_2 = \langle X_2; \mathcal{R}_2 \rangle, \dots, \mathcal{P}_n = \langle X_n; \mathcal{R}_n \rangle$$

sunuşları farklı grupları temsil eden $T(6)$ sunuşları olsun.

3.2.7 Sonuç: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2 * \dots * \mathcal{P}_n$ serbest çarpım grubunun sunuşu $T(6)$ olur.

İspat: Serbest çarpım grubunun tanımından, \mathcal{P} sunuşu

$$\mathcal{P} = \langle X_1, X_2, \dots, X_n; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n \rangle$$

olur. 3.2.6 Teoremden, $\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2$ sunuşu $T(6)$ dır. Aynı şekilde $\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2$ ile \mathcal{P}_3 ün serbest çarpımı da $T(6)$ olur. Bunu genelleştirirsek,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2 * \dots * \mathcal{P}_n$$

bir $T(6)$ sunuşu olarak bulunur. \square

$m, n \geq 3$ olacak şekilde

$$\mathcal{G} = \langle x; x^m \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{H} = \langle y; y^n \rangle \quad (3.4)$$

$T(6)$ sunuşları olsun.

3.2.8 Teorem: (3.4) de verilen grup sunuşları ve $I \leq \mathcal{G}$ tekil alt grubu için $\mathcal{G} *_I \mathcal{H}$ grubunun (bak. [3], [10], [13]) sunuşu $T(6)$ dır.

İspat: $\mathcal{G} *_I \mathcal{H}$ nin sunuşunu bulabilmek için

$$\phi : I \rightarrow \mathcal{H}$$

olacak şekilde birebir homomorfizma bulmalıyız. Bu da ancak

$$1_{\mathcal{G}} \mapsto 1_{\mathcal{H}}$$

dönüşümü ile mümkündür. Yine 1.2.3.1 Teoreminden, $G *_I \mathcal{H}$ grubunun sunuşu,

$$G *_I \mathcal{H} = \langle x, y; x^m, y^n, \phi(1_G)1_G^{-1} \rangle$$

şeklindedir. Buradan da bu sunuştan

$$\begin{aligned} G *_I \mathcal{H} &= \langle x, y; x^m, y^n, 1_{\mathcal{H}}1_G^{-1} \rangle \\ &= \langle x, y; x^m, y^n \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ki bu, G ve \mathcal{H} nin serbest çarpım grubunun sunuşudur. 3.2.6 Teoreminden, biliyoruz ki $G *_I \mathcal{H}$ grubunun sunuşu $T(6)$ olur. \square

3.2.9 Teorem: Verilen

$$G = \langle X_1; \mathcal{R}_1 \rangle \quad \text{ile} \quad \mathcal{H} = \langle X_2; \mathcal{R}_2 \rangle$$

$T(6)$ sunuşları için $I \leq G$ tekil alt grubu tarafından tanımlanan, karışımli serbest çarpım grubunun sunuşu $T(6)$ dır.

İspat: Karışımli serbest çarpım grubunun sunuşunu bulabilmek için

$$1_G \mapsto 1_{\mathcal{H}}$$

olmak üzere bir tek

$$\phi : I \rightarrow \mathcal{H}$$

dönüşümü vardır. Öyleyse $G *_I \mathcal{H}$ grubunun sunuşu,

$$G *_I \mathcal{H} = \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \phi(1_G)1_G^{-1} \rangle$$

olur ki, bu sunuşu

$$G *_I \mathcal{H} = \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \rangle$$

olarak da yazabileceğimiz açıktır. Dikkat edilirse bu sunuş, iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşudur. 3.2.6 Teoreminden, $G *_I \mathcal{H}$ karışımli serbest çarpım grubunun sunuşu $T(6)$ olarak bulunur. \square

3.2.10 Teorem: (3.4) de verilen $T(6)$ sunuşları için, $G *_G \mathcal{H}$ karışımli serbest çarpım grubu tanımlanabiliyorsa, bu grubun sunuşu da $T(6)$ olur.

İspat: $G *_G \mathcal{H}$ grubu tanımlanabiliyorsa,

$$\phi : G \rightarrow \mathcal{H}$$

$$x \mapsto y'$$

($0 < r \leq n-1$) olacak biçimde birebir homomorfizma vardır. Burada

$$\phi(x^m) = (y^r)^m = 1_{\mathcal{H}}$$

olur. Buradan da $n \mid rm$ bulunur. O halde

$$rm = kn \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \quad (3.5)$$

yazılabilir. 1.2.3.1 Teoremden, $G *_G \mathcal{H}$ grubunun sunuşu,

$$G *_G \mathcal{H} = \langle x, y; x^m, y^n, \phi(x) x^{-1} \rangle$$

bulunur. [2] de yer alan *Tietze* dönüşümlerini ve (3.5) eşitliğini kullanarak bu sunuşu

$$= \langle x, y; x^m, y^n, y^r = x \rangle$$

$$= \langle y; (y^r)^m, y^n \rangle$$

$$= \langle y; y^{kn}, y^n \rangle$$

$$= \langle y; y^n \rangle$$

(en son olarak $kn > n$ olduğundan sadece y^n yi kullanabiliriz) olarak buluruz ki bu \mathcal{H} grubunun sunuşudur. Dolayısıyla $G *_G \mathcal{H}$ nin sunuşu $T(6)$ olarak bulunur. \square

3.2.11 Teorem: $m \mid n$ olmak üzere (3.4) deki $T(6)$ sunuşları verilsin. $d \mid m$ için G nin

$$Z = \langle x^{\frac{m}{d}} \rangle$$

tekil olmayan düzgün alt grubu ([7]) için

$$\phi : Z \rightarrow \mathcal{H}$$

$$x^{\frac{m}{d}} \mapsto y^{\frac{n}{d}}$$

dönüşümü için tanımlanan $G *_Z \mathcal{H}$ grubunun sunuşu $T(6)$ değildir.

İspat: $m \mid n$ ve $d \mid m$ olduğundan $d \mid n$ dir. Yani \mathcal{H} içinde $y^{\frac{n}{d}}$ şeklinde bir eleman vardır ve

$$\phi : Z \rightarrow \mathcal{H}$$

$$x^{\frac{m}{d}} \mapsto y^{\frac{n}{d}}$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. $G *_Z \mathcal{H}$ grubunu tanımlayabilmemiz için önce ϕ nin birebir homomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

$$\phi(x^m) = \phi(x^{\frac{m}{d}})^d = (y^{\frac{n}{d}})^d = y^n = 1_{\mathcal{H}}$$

dir. 1.2.2 Teoremden, ϕ bir homomorfizmadır. Şimdi de ϕ nin çekirdeğini bulalım.

$$\phi(x^{\frac{m}{d}})^t = (y^{\frac{n}{d}})^t = 1_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow d \mid t$$

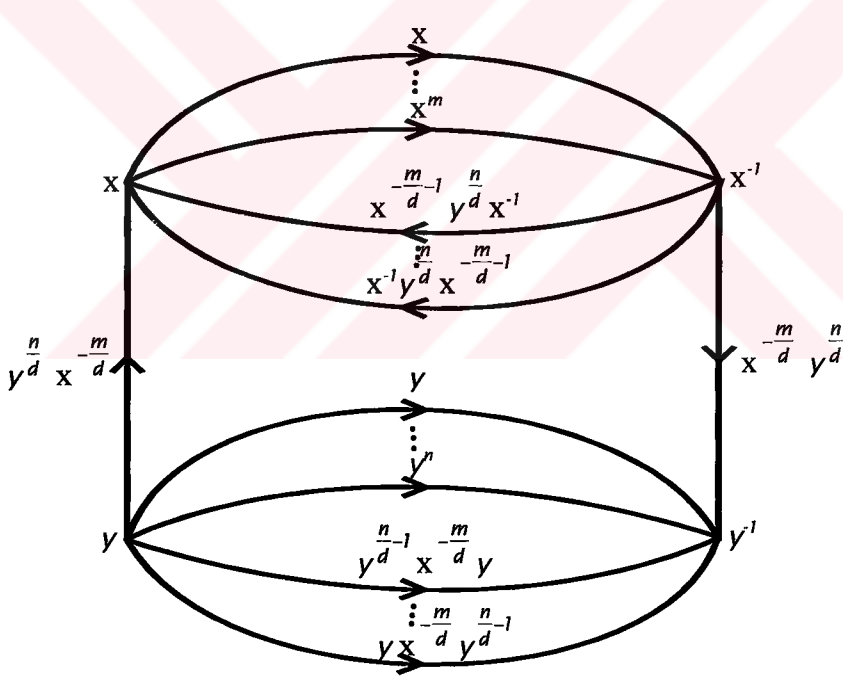
(çünkü n nin $\frac{t}{d}$ katı olması için) bulunur. O halde

$$\text{Çek } \phi = \{(x^{\frac{m}{d}})^t\} = \{(x^m)^{\frac{t}{d}}\} = \{1_G\} = \{1_Z\} \Leftrightarrow \phi \text{ birebirdir.}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} \mathcal{G} *_z \mathcal{H} &= \langle x, y; x^m, y^n, \phi(x^{\frac{m}{d}}) x^{-\frac{m}{d}} \rangle \\ &= \langle x, y; x^m, y^n, y^{\frac{n}{d}} x^{-\frac{m}{d}} \rangle \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $\mathcal{G} *_z \mathcal{H}$ nin Star kompleksi Şekil 3.22 deki gibi olur.



Şekil 3.22

Star komplekste dikkat edilirse x köşesinde

$$\gamma = (x^m) (x^{-\frac{m}{d}} y^{\frac{n}{d}}) (y^n) (y^{\frac{n}{d}} x^{-\frac{m}{d}})$$

indirgenmiş kapalı yolu vardır ki $L(\gamma)=4$ tür. $3 \leq L(\gamma) < 6$ şeklinde yol olmamalıydı.

Sonuç olarak $\mathcal{G} *_z \mathcal{H}$ sunuşu $T(6)$ değildir. □

3.2.12 Örnek: Devirli iki grubun sunuşu

$$G = \langle x; x^8 \rangle \quad \text{ve} \quad H = \langle y; y^{16} \rangle$$

olarak verilsin. $d=4$ için elde edilen

$$Z = \langle x^2 \rangle$$

olacak şekilde G nin alt grubu için

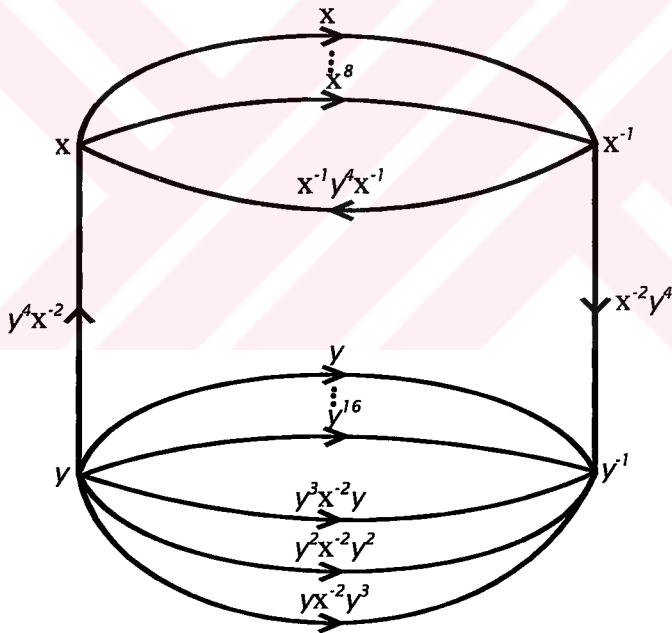
$$\phi: Z \rightarrow H$$

$$x^2 \mapsto y^8$$

dönüşümünü alalım. Bu dönüşüm altında

$$\begin{aligned} G *_Z H &= \langle x, y; x^8, y^{16}, \phi(x^2) x^{-2} \rangle \\ &= \langle x, y; x^8, y^{16}, y^4 = x^2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da Star kompleksin geometrik ifadesi Şekil 3.23 deki gibidir.



Şekil 3.23

Bu grafikten de görülüyor ki

$$\gamma = (x^8) (x^{-2}y^4) (y^{-16}) (y^4x^{-2})$$

yolunun uzunluğu 4 tür ve bu $T(6)$ sunuşunun tanımına aykırıdır. \diamond

4. CAYLEY GRAFLAR VE UYGULAMALARI

Bu bölümde verilen bazı tanımlamalar ve materyaller [3], [6], [15] gibi kaynaklarda bulunabilir. Bununla birlikte, bu bölümde verilen 4.1.8, 4.1.14, 4.1.16, 4.2.1, 4.2.4 Teoremleri ve 4.1.11, 4.1.13, 4.1.17, 4.1.19 Sonuçlarına literatürde rastlanamamış olup, ispatları tarafımdan yapılmıştır.

4.1 Cayley Graflar

Verilen sonlu bir G grubu için S , bu grubun üreteç kümesi olmak üzere,

Köşeler : G grubunun elemanları,

Kenarlar : $G \times S = \{ (g, s) : g \in G, s \in S \}$ kümesinin elemanları ve bunların tersleri,

kümelerinden oluşan grafa **Cayley graf** denir ve $C(G, S)$ ile gösterilir. Burada (g, s) kenarının başlangıç köşesi g , bitiş köşesi gs dir. Ayrıca bu (g, s) kenarının tersi (gs, s^{-1}) olarak tanımlanır. Yani,

$$\iota(g, s) = g, \quad \tau(g, s) = gs, \quad (g, s)^{-1} = (gs, s^{-1})$$

dir. Bu tanımlamalardan da,

$\iota(g, s) = \tau((g, s)^{-1}) = g$, $\tau(g, s) = \iota((g, s)^{-1}) = gs$ ve $((g, s)^{-1})^{-1} = (gs, s^{-1})^{-1} = (g, s)$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $(g, s) \neq (g, s)^{-1}$ dir (Çünkü bu kenarların yönleri farklıdır).

Tüm bu sonuçlardan $C(G, S)$ bir 1-kompleks (graf) tanımlar.

4.1.1 Önerme: G sonlu bir grup olmak üzere,

$$|V(C(G, S))| = |G| \text{ ve } |E(C(G, S))| = 2|G||S|$$

dir.

İspat: Bir Cayley grafa köşeler, G grubunun elemanları olduğundan $V(C(G, S))$ köşeler kümesinin eleman sayısı, G grubunun eleman sayısına eşittir. Dolayısıyla,

$$|V(C(G, S))| = |G|$$

dir. Bu Cayley grafın kenarlarının kümesi, $G \times S$ kümesinin elemanları ve bu kenarların terslerinden oluştuğundan $E(C(G, S))$ nin eleman sayısı $G \times S$ nin eleman sayısının iki katına eşit olur. Yani,

$$|E(C(G, S))| = 2|G| |S|$$

bulunur. \square

Örneğin bir G grubunun üreteç kümesinin eleman sayısı 2 ve bu grubun mertebesi 6 ise, elde edilen $C(G, S)$ nin köşe sayısı 6, kenar sayısı da tersleriyle birlikte 24 olur.

4.1.2 Önerme: Herhangi sonlu bir G grubu için, elde edilen Cayley graf bağlantılıdır.

İspat: Bir grafın bağlantılı olduğunu göstermek için her köşesinin belli bir köşeye bir yol ile bağlı olduğunu göstermek yeterlidir. Sonlu olan G grubu, $S = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ şeklinde üreteç kümesine sahip olsun. O halde $\forall g \in G$ için, $g = s_{g1}^{\varepsilon_1} s_{g2}^{\varepsilon_2} \dots s_{gn}^{\varepsilon_n}$ ($s_{gi} \in S$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$) olarak ifade edilebilir. Buradan görülüyor ki, $C(G, S)$ nin $1 \in G$ köşesi g köşesine

$$\rho = (1, s_{g1}^{\varepsilon_1})(s_{g1}^{\varepsilon_1}, s_{g2}^{\varepsilon_2}) \dots (s_{g1}^{\varepsilon_1} s_{g2}^{\varepsilon_2} \dots s_{g(n-1)}^{\varepsilon_{n-1}}, s_{gn}^{\varepsilon_n})$$

yolu ile bağlanabilir. Burada $\iota(\rho) = 1$ (bu yolun, ilk kenarının başlangıç köşesi) ve $\tau(\rho) = s_{g1}^{\varepsilon_1} s_{g2}^{\varepsilon_2} \dots s_{gn}^{\varepsilon_n} = g$ (ρ yolunun, son kenarının bitiş köşesi) olur. Bu şekilde G grubunun her elemanını (yani $C(G, S)$ nin her köşesini), 1 köşesine bu yol ile bağlayabileceğimizden elde edilen Cayley graf bağlantılı olur. \square

Şimdi Cayley grafların köşe ve kenar kümeleri ile ilgili bazı örnekler verelim.

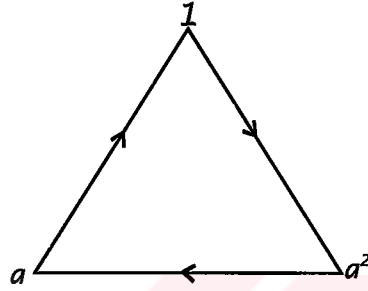
4.1.3 Örnek: Sunuşu $\mathcal{P} = \langle a ; a^3 \rangle$ olan $([10])$ 3 mertebeli \mathbb{Z}_3 devirli grubu için, kolayca görüleceği gibi $G = \{ 1, a, a^2 \}$ ve $S = \{ a \}$ dir. Böylece $C(G, S)$ nin köşelerinin kümesi,

$$V(C(G, S)) = \{ 1, a, a^2 \}$$

ve kenarlarının kümesi de tersleriyle birlikte,

$$E(C(G, S)) = \{ (1, a)^{\pm 1}, (a, a^2)^{\pm 1}, (a^2, 1)^{\pm 1} \}$$

olur. Bu gruptan elde edilen Cayley grafın şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1

◇

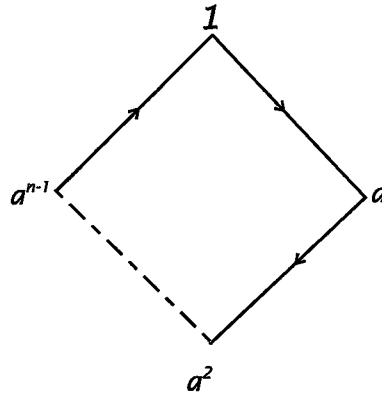
4.1.4 Örnek: Bir $\mathcal{P} = \langle a ; a^n \rangle$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sonlu mertebeli devirli grubunun Cayley grafi,

$$V(C(G, S)) = \{ 1, a, \dots, a^{n-1} \}$$

köşeler kümesine ve tersleriyle birlikte,

$$E(C(G, S)) = \{ (1, a)^{\pm 1}, (a, a^2)^{\pm 1}, \dots, (a^{n-2}, a^{n-1})^{\pm 1}, (a^{n-1}, 1)^{\pm 1} \}$$

kenarlar kümesine sahiptir. Bu grafın geometrik ifadesi,



Şekil 4.2

şeklindedir.◇

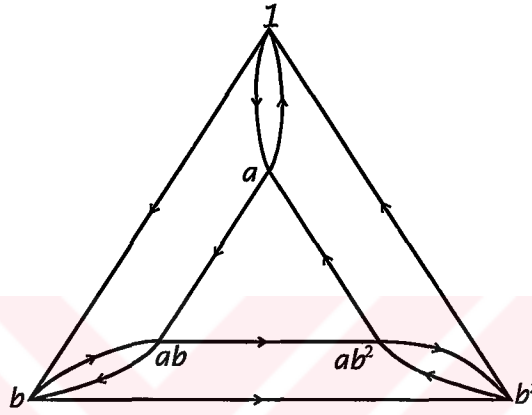
4.1.5 Örnek: Sunuşu $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ olarak verilen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ grubunun ([8], [10]) Cayley grafının köşelerinin kümesi,

$$V(C(\mathcal{G}, S)) = \{ 1, a, b, b^2, ab, ab^2 \}$$

ve kenarlarının kümesi de tersleriyle birlikte,

$$E(C(\mathcal{G}, S)) = \{ (1, a)^{\pm 1}, (1, b)^{\pm 1}, (a, a)^{\pm 1}, (a, b)^{\pm 1}, (b, a)^{\pm 1}, (b, b)^{\pm 1}, (b^2, a)^{\pm 1}, \\ (b^2, b)^{\pm 1}, (ab, a)^{\pm 1}, (ab, b)^{\pm 1}, (ab^2, a)^{\pm 1}, (ab^2, b)^{\pm 1} \}$$

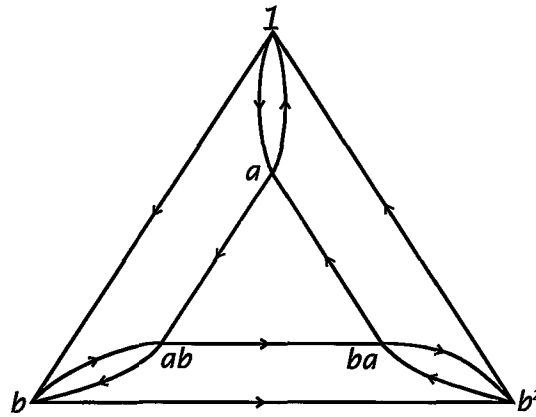
şeklindedir. Buradan da bu grubun Cayley grafi,



Şekil 4.3

şeklinde bulunur.◊

4.1.6 Örnek: Sunuşu $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^3, (ab)^2 \rangle$ olan ([10]) S_3 permütasyon grubunun Cayley grafi şu şekildedir.



Şekil 4.4

Bu graftaki köşeler ve tersleriyle birlikte kenarlarının kümesi,

$$V(C(\mathcal{G}, S)) = \{ 1, a, b, b^2, ab, ba \},$$

$$E(C(\mathcal{G}, S)) = \{ (1, a)^{\pm 1}, (1, b)^{\pm 1}, (a, a)^{\pm 1}, (a, b)^{\pm 1}, (b, a)^{\pm 1}, (b, b)^{\pm 1}, (b^2, a)^{\pm 1}, \\ (b^2, b)^{\pm 1}, (ab, a)^{\pm 1}, (ab, b)^{\pm 1}, (ba, a)^{\pm 1}, (ba, b)^{\pm 1} \}$$

dir.
◊

4.1.7 Örnek:

•	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

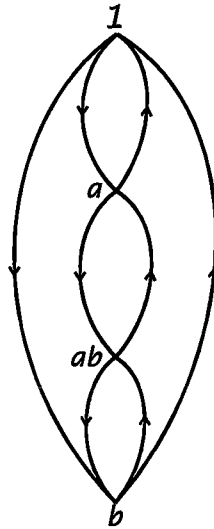
Şekil 4.5

Şekil 4.5 de işlem tablosu verilen Klein-4 grubu (V_4) ([8], [10]) için, Cayley graftan yararlanarak, bu grubun $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ direk çarpım grubuna izomorf olduğunu gösterelim.

Tabloyu kullanarak;

$$a^2=1, b^2=1, c^2=1, ba=c, ab=c, ca=b, ac=b, bc=a, cb=a$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $c \in V_4$ elemanını $c=ab$ olarak yazabildiğimizden, bu grubun üreteç kümesini $S=\{ a, b \}$ olarak seçebiliriz. Bunlardan yararlanarak da, V_4 grubun Cayley grafini Şekil 4.6 daki gibi çizebiliriz.



Şekil 4.6

Şekil 4.6 da belirtilen Cayley grafinin 1 köşesindeki,

$$\rho_1=(1, a)(a, a), \quad \rho_2=(1, b)(b, b), \quad \rho_3=(1, a)(a, b)(ab, a)(b, b)$$

kapalı yollarının herbir kenarının 2. koordinatlarından faydalanarak sırasıyla $r_1=a^2$, $r_2=b^2$, $r_3=(ab)^2$ kelimelerini elde ederiz. Dikkat edilirse, $r_1=1$, $r_2=1$ ve $r_3=1$ dir. Klein-4 grubunun S üreteç kümesini alarak ve $\mathcal{R}=\{r_1, r_2, r_3\}$ kümesini oluşturarak,

$$\mathcal{P}_1 = \langle a, b; a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$$

sunuşunu yazabiliriz. Yine bu Cayley grafinin 1 köşesindeki,

$$\mu_1=(1, a)(a, a), \quad \mu_2=(1, b)(b, b), \quad \mu_3=(1, a)(a, b)(ab, a^{-1})(b, b^{-1})$$

(burada $(ab, a^{-1})=(b, a)^{-1}$ ve $(b, b^{-1})=(1, b)^{-1}$) kapalı yollarından faydalanarak, benzer şekilde

$$\mathcal{P}_2 = \langle a, b; a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

şeklinde $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ direk çarpım grubunun sunuşunu elde ederiz. (Not: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ direk çarpım grubunun Cayley grafi de Şekil 4.6 daki ile aynıdır.)

\mathcal{P}_1 sunuşundan (veya \mathcal{P}_2 sunuşundan) Tietze dönüşümlerini ([2], [5], [10]) kullanarak \mathcal{P}_2 sunuşunu (veya \mathcal{P}_1 sunuşunu) elde edebiliriz. Buna göre \mathcal{P}_1 sunuşunu alalım:

$$(ab)^2=1 \Rightarrow abab=1$$

olduğundan, birinci Tietze dönüşümü ile $abab=1$ eşitliğini ekleyip, ikinci Tietze dönüşümü ile $(ab)^2=1$ yi silelim. Şimdi,

$$a^2=1 \Rightarrow a=a^{-1} \text{ ve } b^2=1 \Rightarrow b=b^{-1}$$

olduğundan,

$$abab=1 \Rightarrow aba^{-1}b^{-1}=1$$

den de, yine birinci Tietze dönüşümü ile $abab=1$ eşitliğini silip, ikinci Tietze dönüşümü ile $aba^{-1}b^{-1}=1$ eşitliğini eklersek, \mathcal{P}_2 yi elde etmiş oluruz. \diamond

\mathcal{G}_1 ve \mathcal{G}_2 sonlu herhangi iki grup olsun. Bu grupların en az elemanlı üreteç kümelerini sırasıyla S_1 ve S_2 ile gösterelim. $C_1(\mathcal{G}_1, S_1)$, $C_2(\mathcal{G}_2, S_2)$ sırasıyla \mathcal{G}_1 ile \mathcal{G}_2 nin Cayley grafları ve v_1, v_2 de bu graflar da herhangi iki köşe olsun. Buna göre;

4.1.8 Teorem: \mathcal{G}_1 ve \mathcal{G}_2 gruplarının mertebeleri ile S_1 ve S_2 kümelerinin eleman sayıları eşit ise bu grupların Cayley graflarında herhangi bir köşe için elde edilen 1.Temel gruplar izomorftur. Yani,

$$\Pi_1(C_1(\mathcal{G}_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(\mathcal{G}_2, S_2), v_2)$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki, $|\mathcal{G}_1| = |\mathcal{G}_2| = m$ ve $|S_1| = |S_2| = n$ olsun. 4.1.1 Önermeden, $C_1(\mathcal{G}_1, S_1)$ ve $C_2(\mathcal{G}_2, S_2)$ Cayley graflarındaki kenar sayısı sırasıyla $2|\mathcal{G}_1||S_1|$ ve $2|\mathcal{G}_2||S_2|$ dir. Dolayısıyla bu iki graftaki kenar sayısı eşittir ve $2mn$ olur. Bu grupların elemanları grafların köşeleri olduğundan, $C_1(\mathcal{G}_1, S_1)$ in köşe sayısı $|\mathcal{G}_1|$ ve $C_2(\mathcal{G}_2, S_2)$ in köşe sayısı $|\mathcal{G}_2|$ dir. Buradan da iki Cayley grafin köşe sayıları da eşittir ve m dir. 1.3.5.5 Teoremden, 1.Temel gruplar serbest grup idi. Ayrıca 4.1.2 Önermeden, $C_1(\mathcal{G}_1, S_1)$, $C_2(\mathcal{G}_2, S_2)$ Cayley grafları bağlantılı ve 1.3.4.4 Teoremden, bağlantılı graflar da, her köşedeki 1.Temel gruplar birbiriyle izomorftur. Burada serbest grup olan 1.Temel grupların izomorflüğünü incelediğimizden, $\Pi_1(C_1(\mathcal{G}_1, S_1), v_1)$ ve $\Pi_1(C_2(\mathcal{G}_2, S_2), v_2)$ gruplarının ranklarını hesaplamalıyız. 1.3.5.8 Teoremden, $\Pi_1(C_1(\mathcal{G}_1, S_1), v_1)$ nin rankı $|X_1|$ olmak üzere,

$$|X_1| = mn - m + 1$$

ve aynı şekilde $\Pi_1(C_2(\mathcal{G}_2, S_2), v_2)$ nin rankı $|X_2|$ ise,

$$|X_2| = mn - m + 1$$

olarak bulunur. O halde $|X_1| = |X_2|$ eşitliğinden ve 1.1.4 Teoremden,

$$\Pi_1(C_1(\mathcal{G}_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(\mathcal{G}_2, S_2), v_2)$$

sonucu bulunur. \square

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için varsayalım ki, $\Pi_1(C_1(\mathcal{G}_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(\mathcal{G}_2, S_2), v_2)$ olsun. 1.1.4 Teoremden, $|X_1| = |X_2|$ dir. Fakat bu eşitlik, $|\mathcal{G}_1| = |\mathcal{G}_2|$ ve $|S_1| = |S_2|$ sonuçlarını vermez. Buradan ancak şu şekilde bir sonuç çıkarabiliriz:

$$\Pi_1(C_1(\mathcal{G}_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(\mathcal{G}_2, S_2), v_2) \text{ ise}$$

$$|\mathcal{G}_1| = |\mathcal{G}_2| \Rightarrow |S_1| = |S_2| \text{ veya } |S_1| = |S_2| \Rightarrow |\mathcal{G}_1| = |\mathcal{G}_2|$$

dir.

4.1.9 Örnek: Klein-4 grubu ile $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ direk çarpım gruplarını ele alalım.

4.1.7 Örnekten, bu grupların sunuşlarının sırasıyla

$$\mathcal{P}_1 = \langle a, b; a^2, b^2, (ab)^2 \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \langle c, d; c^2, d^2, cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olduğu bilinmektedir. Bu iki izomorf grup için $G_1 = V_4$ ve $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olsun. O halde bu grupların Cayley grafları sırasıyla $C_1(G_1, S_1)$, $C_2(G_2, S_2)$ (bak. Şekil 4.6) ve bu iki grafin herhangi iki köşesi v_1, v_2 olmak üzere,

$$\Pi_1(C_1(G_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(G_2, S_2), v_2)$$

dir. Çünkü $|G_1| = 4$, $|S_1| = 2$ ve $|G_2| = 4$, $|S_2| = 2$ eşitlikleri vardır ve de 4.1.8 Teoremden, istenen sonuç bulunur. \diamond

4.1.10 Örnek: S_3 permütasyon grubu ile $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ direk çarpım grubunun birbirlerine izomorf olmadığını biliyoruz. Bu grupların sunuşlarını sırasıyla

$$\mathcal{P}_1 = \langle a, b; a^2, b^3, (ab)^2 \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \langle c, d; c^2, d^3, cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

olarak alalım. Burada $G_1 = S_3$ için $|G_1| = 6$, $|S_1| = 2$ ve $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ için $|G_2| = 6$, $|S_2| = 2$ dir. İki grubun Cayley grafları sırasıyla $C_1(G_1, S_1)$, $C_2(G_2, S_2)$ (bak. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4) ve v_1, v_2 de sırasıyla bu iki grafta herhangi iki köşe olmak üzere, 4.1.8 Teoremden,

$$\Pi_1(C_1(G_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(G_2, S_2), v_2)$$

izomorfluğu bulunur. \diamond

4.1.10 Örnek ve 4.1.8 Teorem bize aşağıdaki sonucu verir:

4.1.11 Sonuç: İzomorf olmayan G_1 ve G_2 grupları için, bu grupların Cayley graflarının herhangi bir köşesindeki 1. Temel gruplarının rankları eşit ise,

$$\Pi_1(C_1(G_1, S_1), v_1) \cong \Pi_1(C_2(G_2, S_2), v_2)$$

dir.

4.1.12 Örnek: Herhangi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $(m, n) = 1$ iken, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ile \mathbb{Z}_{mn} grupları için $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ olup, bu grupların sunuşları sırasıyla

$$\mathcal{P}_1 = \langle a, b; a^m, b^n, aba^{-1}b^{-1} \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \langle c; c^{mn} \rangle$$

şeklinde olsun. Burada $G_1 = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ için elde edilen Cayley graf $C_1(G_1, S_1)$ olmak üzere, v_1 de bu grafa herhangi bir köşe iken $|G_1| = mn$, $|S_1| = 2$ dir. Bu graftan elde edilen 1. Temel grubun rankı ise,

$$|X_1| = 2mn - mn + 1 = mn + 1$$

olur. Ayrıca $G_2 = \mathbb{Z}_{mn}$ için de elde edilen Cayley graf $C_2(G_2, S_2)$ ve v_2 de bu grafa herhangi bir köşe iken $|G_2| = mn$, $|S_2| = 1$ olur. Böylece elde edilen 1. Temel grubun rankı,

$$|X_2| = mn - mn + 1 = 1$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $|X_1| \neq |X_2|$ olduğu görülmektedir. O halde 1.1.4 Teorem ile 1.3.5.5 Teoremden, $\Pi_1(C_1(G_1, S_1), v_1)$ grubu ile $\Pi_1(C_2(G_2, S_2), v_2)$ birbirine izomorf olmadığı açıktır.

4.1.12 Örnek ve 4.1.8 Teorem bize şu sonucu verir:

4.1.13 Sonuç: Verilen G_1 ve G_2 grupları için, $G_1 \cong G_2$ iken, grupların Cayley graflarının herhangi bir köşesindeki 1. Temel gruplarının rankları eşit değil ise, $\Pi_1(C_1(G_1, S_1), v_1)$ ile $\Pi_1(C_2(G_2, S_2), v_2)$ grupları birbirine izomorf değildir.

Verilen herhangi sonlu G grubu için aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

4.1.14 Teorem: Üreteç kümesinin eleman sayısı $|S| = 1$ olan sonlu gruplardan elde edilen Cayley grafın, herhangi bir v köşesindeki 1. Temel grup ile $(\mathbb{Z}, +)$ izomorftur.

İspat: Herhangi sonlu bir G grubu için $|G| = n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olsun. Bu gruptan elde edilen Cayley graf $C(G, S)$ olmak üzere, kenar sayısı $2|G||S| = 2n$ ve köşe sayısı n olur. 1.3.5.8 Teoremden, herhangi $v \in V(C(G, S))$ elemanı için $\Pi_1(C(G, S), v)$ grubunun rankı,

$$n - n + 1 = 1$$

dir. Buradan da, 1.1.4 Teorem ve 1.3.5.5 Teorem yardımıyla

$$\Pi_1(C(G, S), v) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

sonucu bulunur. \square

Herhangi bir sonlu \mathcal{G} grubunun

$$\mathcal{P} = \langle S; \mathcal{R} \rangle \quad (4.1)$$

sunuşunda $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) ve $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \dots, a_n^{m_n} \in \mathcal{R}$ şeklinde n tane üreteç kümesinin elemanı var olsun. Bunlardan yararlanarak, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$\{ 1, a_p, a_i^2, \dots, a_i^{m_i-1} \}$$

köşeleri ve

$$\{ (1, a_p), (a_p, a_i), \dots, (a_i^{m_i-1}, a_i) \}$$

kenarlarından oluşan $C(\mathcal{G}, S)$ nin alt grafi olan Γ_i alt graflarını alalım. Bu alt graflardan yararlanarak,

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i \quad (4.2)$$

kümesini tanımlayalım.

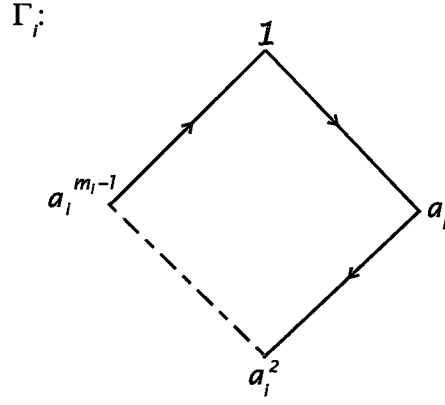
4.1.15 Önerme: Γ kümesi $C(\mathcal{G}, S)$ nin bir alt grafıdır.

İspat: Γ nın, $1 \leq i \leq n$ için, $\{ (1, a_p), (a_p, a_i), \dots, (a_i^{m_i-1}, a_i) \}$ kenarlarından oluşan kümenin her bir elemanı aynı zamanda $C(\mathcal{G}, S)$ nin bir elemanıdır. Bu kenarların herbiri için başlangıç ve bitiş köşeleri olan $1, a_p, a_i^2, \dots, a_i^{m_i-1}$ elemanları, $A = \{ 1, a_p, a_i^2, \dots, a_i^{m_i-1} \} \subset V(\Gamma)$ olan A kümesine ait olduklarından, Γ_i alt graf tanımının tüm koşullarını sağlar ([15]). O halde Γ , $C(\mathcal{G}, S)$ nin bir alt grafıdır.

Bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.1.16 Teorem: (4.1) deki gibi bir \mathcal{P} sunuşunda, $C(\mathcal{G}, S)$ nin Γ alt grafının herhangi bir v köşesindeki 1. Temel grubun rankı n dir.

İspat: Γ kümesinden alınan herhangi bir Γ_i alt grafının geometrik yorumu Şekil 4.7 de gösterilmiştir. Kolayca görülebilir ki, Γ kümesindeki Γ_i ler için $\bigcap_{i=1}^n \Gamma_i = 1$ dir.



Şekil 4.7

O halde $\bigcap_{i=1}^n \Gamma_i = \mathbf{1}$ ve $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ olduğundan, Γ nın köşelerinin kümesi;

$$\mathcal{V}(\Gamma) = \{ \mathbf{1}, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{m_1-1}, \dots, a_n, a_n^2, \dots, a_n^{m_n-1} \}$$

ve de bu kümenin eleman sayısı

$$|\mathcal{V}(\Gamma)| = 1 + (m_1 - 1) + \dots + (m_n - 1)$$

olarak bulunur.

Yine Γ grafının kenarlarının kümesi tersleriyle birlikte,

$$\mathcal{E}(\Gamma) = \{ (\mathbf{1}, a_1)^{\pm 1}, (a_1, a_1)^{\pm 1}, \dots, (a_1^{m_1-1}, a_1)^{\pm 1}, \dots, (\mathbf{1}, a_n)^{\pm 1}, (a_n, a_n)^{\pm 1}, \dots, (a_n^{m_n-1}, a_n)^{\pm 1} \}$$

ve

$$|\mathcal{E}(\Gamma)| = 2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

dir. Elde edilen Γ bağlantılı olduğundan, 1.3.4.4 Teorem ile herhangi $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ köşesindeki 1.Temel grubu alabiliriz. Biliyoruz ki bu 1.Temel grup, 1.3.5.5 Teorem ile bir serbest grup tanımlar ve bu serbest grubun rankı da, 1.3.5.8 Teoremden,

$$\{(m_1 + m_2 + \dots + m_n) - [1 + (m_1 - 1) + \dots + (m_n - 1)] + 1\} = n$$

olarak bulunur. \square

Herhangi iki sonlu G_1 ve G_2 grubunun sunuşları sırasıyla

$$\mathcal{P}_1 = \langle S_1; \mathcal{R}_1 \rangle \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \langle S_2; \mathcal{R}_2 \rangle$$

olarak verilsin. Verilen \mathcal{P}_1 sunuşunda $a_1, a_2, \dots, a_n \in S_1$ ve $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}^+$ için

$a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \dots, a_n^{m_n} \in \mathcal{R}_1$; ayrıca \mathcal{P}_2 için de $b_1, b_2, \dots, b_k \in S_2$ üreteç kümesinin

elemanları ile $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $b_1^{c_1}, b_2^{c_2}, \dots, b_k^{c_k} \in \mathcal{R}_2$ şeklinde bağıntı

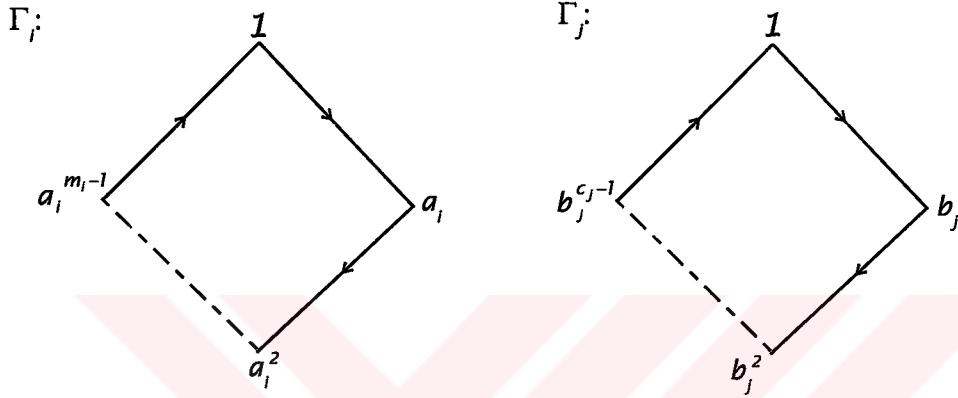
yolları olsun. 4.1.16 Teoremin bir sonucu olarak;

4.1.17 Sonuç: $G_1 * G_2$ serbest çarpım grubunun (4.2) de tanımlanan Γ grafi için 1. Temel grubunun rankı $n+k$ dir.

İspat: $G_1 * G_2$ serbest çarpım grubunun sunuşu, 1.2.2.1.1 Teoremde, belirtildiği gibi;

$$\mathcal{P} = \langle S_1, S_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Bu grubun Γ alt grafi, Şekil 4.8 de gösterilen Γ_i ve Γ_j lerin birleşimidir ($1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq k$).

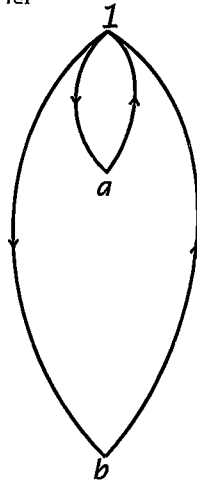


Şekil 4.8

Dolayısıyla 4.1.16 Teorem ile aranılan sonuç bulunur. \square

4.1.18 Örnek: Sunuşu $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ olan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ direk çarpım

grubu için, (4.2) de tanımlanan $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ grafının şekli



Şekil 4.9

olarak bulunur. Bağlantılı bu graf için $|V(\Gamma)|=3$ ve $|E(\Gamma)|=8$ dir. 1.3.5.8 Teorem ve 4.1.16 Teoremden, Γ nın herhangi v köşesindeki 1.Temel grubun rankı, $4-3+1=2$ bulunur.◊

Şimdi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $G = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ direk çarpım grubunun sunuşunu

$$\mathcal{P} = \langle a, b; a^m, b^n, aba^{-1}b^{-1} \rangle \quad (4.3)$$

olarak alalım. Yine 4.1.16 Teoremden, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.1.19 Sonuç: G direk çarpım grubunun, (4.2) de tanımlanan alt grafının herhangi bir v köşesindeki 1.Temel grubun rankı 2 dir.

İspat: Direk çarpım grubunun (4.3) de verilen sunuşunda, a^m, b^n biçiminde, 4.1.16 Teoremde belirtilen özellikte iki bağıntı yolu olduğundan, yine 4.1.16 Teoreme göre, bu bağıntı yollarından elde edilecek Γ alt grafındaki 1.Temel grubun rankı 2 olur.□

4.2 Cayley Kompleksler

Bu bölümde Cayley grafların uygulaması olarak bazı özel durumlarda Cayley kompleksler tanımlanıp, irdelenmiştir.

Sonlu bir G grubunun \mathcal{P} sunuşu, (4.1) şeklinde verilsin. \mathcal{P} nin üreteç kümesi içindeki bazı a_i ($1 \leq i \leq n$) elemanları için, \mathcal{R} kümesinin içinde $a_i^{m_i}$ ($m_i \in \mathbb{Z}^+$) şeklinde elemanları (bağıntı yolları) olsun. Bu $a_i^{m_i}$ elemanlarından yararlanarak, $C(G, S)$ nin (4.2) deki Γ alt grafını alalım. Bu Γ grafında, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$(1, a_p)(a_p, a_p) \dots (a_i^{m_i-1}, a_p)$$

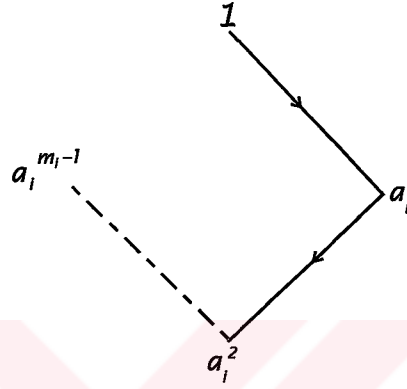
kapalı yollarını bağıntı yolları olarak alıp,

$$\mathcal{K} = \langle \Gamma; (1, a_p)(a_p, a_p) \dots (a_i^{m_i-1}, a_p) \rangle \quad (4.4)$$

2-kompleksi tanımlanabilir.

4.2.1 Teorem: (4.1) de verilen bir \mathcal{P} sunuşu, $a_i^{m_i}$ olacak şekilde bağıntı yollarına sahip ise (4.4) de tanımlanan 2-kompleksin temsil ettiği grup, tekil gruba izomorftur.

İspat: Bu G grubu için elde edilen Cayley grafın Γ alt grafi Şekil 4.7 de gösterilen Γ_i alt graflarının birleşimidir. Γ alt grafının bir \mathcal{T} ağacı, Şekil 4.10 da gösterilen Γ_i lere ait ağaçların birleşimidir.



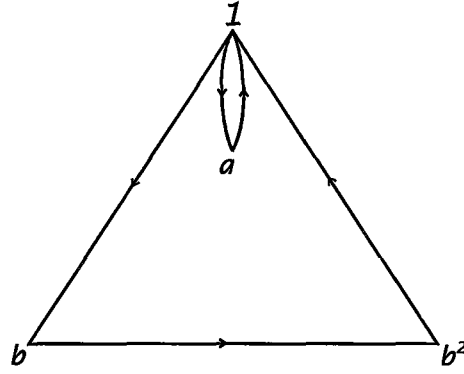
Şekil 4.10

1.4.2.2 Teoremden, (4.4) şeklinde tanımlanan 2-kompleksin temsil ettiği gruba izomorf olan grubun sunuşu, $t_i = (a_i^{m_i-1}, a_i)$ ler olmak üzere, (1.25) den,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+} = \langle x_{t_i}; x_{t_i} \rangle$$

şeklindedir (çünkü diğer tüm kenarlar ağacın elemanıdır). Bu grubun üreteç kümesinin elemanlarının hepsi bağıntı yolları kümesinin elemanı olduğundan, 1 'e eşittir ve tekil grubun sunuşudur. \square

4.2.2 Örnek Sunuşu $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ olan $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ direk çarpım grubunun, $C(G, \mathcal{S})$ Cayley grafının, (4.2) de belirtilen Γ alt grafının geometrik yorumu Şekil 4.11 deki gibidir.

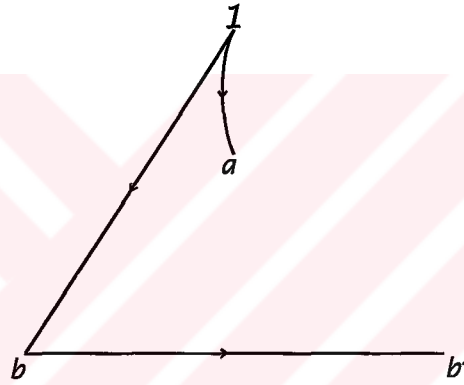


Şekil 4.11

Bu Γ için, (4.4) deki gibi bir 2-kompleks,

$$\mathcal{K} = \langle \Gamma ; (1, a)(a, a), (1, b)(b, b)(b^2, b) \rangle$$

dir. Yine bu Γ grafının bir \mathcal{T} ağacı



Şekil 4.12

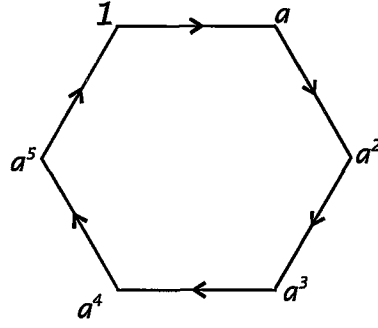
şeklinde seçilirse, bu 2-kompleksten elde edilen gruba izomorf olan grubun sunuşu,

$t_1=(a, a)$ ve $t_2=(b^2, b)$ olmak üzere, (1.25) den,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+} = \langle x_{t_1}, x_{t_2} ; x_{t_1} x_{t_2} \rangle$$

olarak bulunur. Buradan görülmüştür ki, bu sunuş tekil grubu temsil eder. \diamond

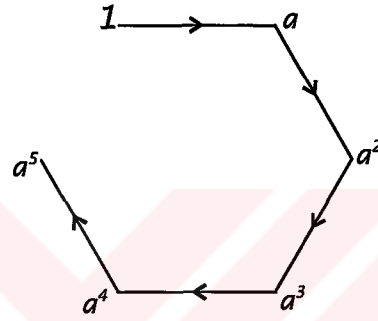
4.2.3 Örnek: Bir sunuş $\mathcal{P} = \langle a ; a^6 \rangle$ olan $G = \mathbb{Z}_6$ grubu için, (4.2) de belirtilen Γ alt grafi, bu grubun Cayley grafına eşittir ve şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.13

Buradan,

$\mathcal{K} = \langle \Gamma ; (1, a)(a, a)(a^2, a)(a^3, a)(a^4, a)(a^5, a) \rangle$
 olup, Γ nın \mathcal{T} ağacı ise



Şekil 4.14

olarak seçilebilir. Bu 2-kompleksin temsil ettiği grubun, izomorf olduğu grubun sunuşu da, $t=(a^5, a)$ olmak üzere, (1.25) den,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \tau, e^+} = \langle x_i ; x_i \rangle$$

olur ki, bu da tekil grubun sunuşudur. \diamond

Verilen $m, n \in \mathbb{Z}^+$ sayıları için, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ direk çarpım grubunun sunuşu (4.3) de verilmiş idi. Buradan, bu grubun üreteç kümesi $S = \{ a, b \}$ dir. Bu \mathcal{G} grubunun Cayley grafında,

$$\rho_1 = (1, a)(a, a) \dots (a^{m-1}, a) \quad \text{ve} \quad \rho_2 = (1, b)(b, b) \dots (b^{n-1}, b)$$

kapalı yollarını alalım. Cayley grafın tanımından $\iota(\rho_1) = 1$ ve $\tau(\rho_1) = a^{m-1}a = 1$ dir. Çünkü bu yolun başlangıç köşesi ilk kenarının başlangıç köşesi ve bitiş köşesi de son kenarının bitiş köşesidir. Benzer şekilde, $\iota(\rho_2) = 1$, $\tau(\rho_2) = b^{n-1}b = 1$ olup, bu eşitliklerden ρ_1 ve ρ_2 nin kapalı yol oldukları görülür. Bu \mathcal{G} direk çarpım grubu için,

$$\mathcal{K} = \langle C(\mathcal{G}, S) ; (1, a)(a, a) \dots (a^{m-1}, a), (1, b)(b, b) \dots (b^{n-1}, b) \rangle \quad (4.5)$$

2-kompleksini tanımlayalım. Buradaki $C(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ için şu şekilde bir T^* ağacı oluşturalım:

$$(1, a), (a, a), \dots, (a^{m-2}, a), (1, b), (b, b), \dots, (b^{n-2}, b) \quad (4.6)$$

kenarları bu T^* ağacında olsun (bu kenarlara $(a^{m-1}, a), (b^{n-1}, b)$ kenarlarını dahil edemeyiz, çünkü bu kenarları da alırsak iki kapalı yol elde ederiz ki, bu ağaç tanımına aykırıdır).

4.2.4 Teorem: (4.3) de verilen direk çarpım grubunun sunuşu için (4.5) şeklindeki Cayley kompleks tarafından temsil edilen grup, (4.6) daki gibi T^* olarak alınan bir ağaç için, $mn-1$ ranklı bir serbest gruba izomorftur.

İspat: 4.1.1 Önermeden, $C(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ grafi mn köşeye ve de tersleriyle birlikte $4mn$ kenara sahiptir. 1.3.5.7 Önteoremden, T^* ağacının $2(mn-1)$ kenarı vardır. O halde T^* ağacında olmayan kenar sayısı $4mn-2(mn-1)=2mn+2$ dir. Bununla birlikte kendisi ve tersinden sadece biri seçilmiş kenarlar düşünüldüğünde (orientantion), $mn+1$ kenara sahiptir. (1.25) den, bu Cayley kompleks tarafından temsil edilen gruba izomorf olan grubun üreteç kümesinin eleman sayısı $mn+1$ dir. Burada $mn+1$ üreteç kümesinden ikisi $(a^{m-1}, a), (b^{n-1}, b)$ kenarlarını temsil etmektedir. Bütün bunlardan yararlanarak $t_{m-1}=(a^{m-1}, a), t_{n-1}=(b^{n-1}, b)$ ve $S=S_1 \cup \{x_{t_{m-1}}, x_{t_{n-1}}\}$ olmak üzere bu grubun sunuşu, (1.25) den,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, T^*, e^+} = \langle S ; x_{t_{m-1}}, x_{t_{n-1}} \rangle$$

dir. Bu $\mathcal{P}_{\mathcal{K}, T^*, e^+}$ sunuşunda, üreteç kümesinin elemanları olan $x_{t_{m-1}}$ ve $x_{t_{n-1}}$ elemanları, bağıntı yolları kümesinin (yani \mathcal{R} nin) elemanları olduğundan, bu elemanlar \mathcal{I} 'e eşittir. Öyleyse $\mathcal{P}_{\mathcal{K}, T^*, e^+}$ ye izomorf olan

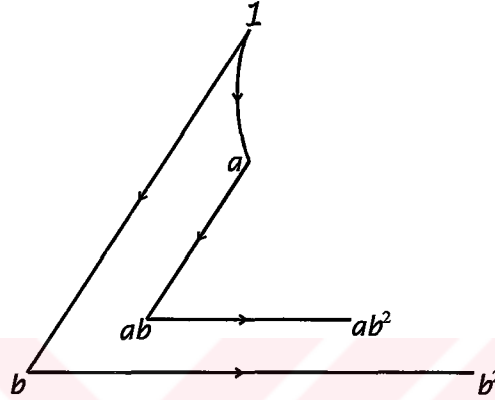
$$\mathcal{P} = \langle S_1 ; \quad \rangle$$

sunuşunu elde ederiz. Bu da üreteç kümesi S_1 olan serbest grup sunuşudur. Çünkü bağıntı yollarının kümesi boştur ([10]). Ayrıca $|S|=mn+1$ olduğundan, bu S kümesinden $x_{t_{m-1}}, x_{t_{n-1}}$ elemanlarını çıkararak, S_1 kümesini elde ettiğimizden, $|S_1|=mn-1$ olur. \square

4.2.5 Örnek: Sunuşu $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ olan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ direk çarpım grubunun Cayley grafi Şekil 4.3 de belirtilmiştir. Bu graftan yararlanarak (4.5) deki gibi tanımlanan Cayley kompleks,

$$\mathcal{K} = \langle C(\mathcal{G}, \mathcal{S}); (1, a)(a, a), (1, b)(b, b)(b^2, b) \rangle$$

olur. Bu grubun Cayley grafindan yararlanarak $(1, a)$, $(1, b)$, (b, b) kenarlarının bulunduğu bir ağacı şu şekilde seçebiliriz.



Şekil 4.15

O halde

$$t_1=(b, a), t_2=(b^2, a), t_3=(ab, a), t_4=(ab^2, a), t_5=(ab^2, b), t_6=(a, a), t_7=(b^2, b)$$

olmak üzere, 1.4.2.2 Teoreminden, elde ettiğimiz \mathcal{K} kompleksi tarafından temsil edilen grubun izomorf olduğu grubun sunuşu,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+} = \langle x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, x_{t_4}, x_{t_5}, x_{t_6}, x_{t_7}; x_{t_6}, x_{t_7} \rangle$$

olarak bulunur. Burada üreteç kümesinin elemanları olan x_{t_6} , x_{t_7} elemanları, bağıntı kümesinin elemanları olduklarından, $\mathcal{P}_{\mathcal{K}, \mathcal{T}, e^+}$ nin temsil ettiği gruba izomorf olan

$$\mathcal{P} = \langle x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, x_{t_4}, x_{t_5}; \quad \rangle$$

grubunun sunuşu elde edilir. Bu sunuşun temsil ettiği grup ise, rankı 5 olan serbest gruptur.

KAYNAKLAR

- [1] Aschbacher, M., Finite group theory, Cambridge University press, printed in the United States of America, (1986), p. 53, 141.
- [2] Baik, Y. G., Generators of the second homotopy module of group presentations with applications, Ph. D. Thesis, University of Glasgow, (1992), p. 18, 22, 42, 46.
- [3] Baumslag, G., Topics in combinatorial group theory, Birkhauser Verlag, printed in Germany, (1993), p. 42, 58, 103, 123-126.
- [4] Cohen, D. E., Combinatorial group theory: a topological approach, London Math. Soc. Texts 14, Cambridge University Press, (1989), p. 1, 3, 12, 18, 24, 30, 74, 117, 123, 182, 199.
- [5] Coxeter, H. S. and Moser, W. O. J., Generators and relations for discrete groups, Springer Verlag, printed in Germany, (1965), p. 3, 19, 33.
- [6] El-Mosalamy, M. S. H., Applications of Star complexes in group theory, Ph. D. Thesis, University of Glasgow, (1987), p. 1-36, 55-63, 84-86.
- [7] Fine, B. and Rosenberger G., Algebraic generalizations of discrete groups, Marcel Dekker-Inc., New York, (1999), p. 6, 9, 11.
- [8] Fraleigh, J. B., First course in abstract algebra, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, (1988), p. 85, 105, 181-189, 224, 231.
- [9] Gross, J. L. and Tucker, T. W., Topological graph theory, A Wiley-Interscience Publication, United States of America, (1987), p. 5, 8, 10.
- [10] Johnson, D. L., Presentations of groups, Cambridge University press, printed in Great Britain, (1990), p. 1-17, 41-45.
- [11] Lyndon, R. C. and Schupp P., Combinatorial group theory, Springer Verlag New York, (1977), p. 1, 12, 30, 87, 116, 167, 174, 274.
- [12] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar D., Combinatorial group theory, Dover Publications-Inc., New York, (1976), p. 48, 56, 180-197.
- [13] Rotman, J. J., An introduction to the theory of groups, Wm. C. Brown Publishers, printed in the United States of America, (1988), 11-28, 299-328.
- [14] Serre, J. P., Trees, Springer Verlag, New York, (1980), p. 13-17, 25-27.
- [15] White A. T., Graphs, groups and surfaces, Elsevier Science Publishers B. V., printed in the Netherlands, (1984), p. 23-35.

[16] Whitelaw, T. A., B. Sc., Ph. D., Introduction to abstract algebra, Great Britain by St. Edmundsbury Press Ltd. Bury St. Edmunds, Suffolk, (1988), p. 124-149.

[17] Wilson, R. J., Introduction to graph theory, Academic Press New York@ London, (1974), p. 44-53.

