T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

L^p UZAYLARINDA POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIM

112644

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yunus Emre YILDIRIR

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Balıkesir, 2001

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

L^p UZAYLARINDA POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yunus Emre YILDIRIR

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal Mehmetoğlu İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 04.07.2001
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal Mehmetoğlu İSRAFİLOV
Prof. Dr. Musa ERDEM
Doç. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Balıkesir, 2001

ÖZET

L^p UZAYLARINDA POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIM
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov)
Balıkesir, 2001

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, önce ilerideki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, gösterimler ve teoremler verilmiş, daha sonra yaklaşımın incelendiği ağırlıklı L^p uzayları tanımlanmış ve bunların bazı özellikleri ispatlanmıştır. Bu bölümde ayrıca Cauchy singüler integralinin tanımı ve Cauchy integralinin limit değerleriyle ilgili önemli bir teoremin ifade ve ispatı verilmiştir.

Bilindiği gibi yaklaşım teorisinde yaklaşımın mümkünlüğü dışında yaklaşan polinomların daha pratik bir şekilde inşa edilebilen olması da temel problemlerden biridir. Bu yönde yapılan araştırmaların büyük bir kısmında yaklaşan polinomlar Faber polinomları ve onların genelleşmeleri yardımıyla inşa edilmektedir. İkinci bölümde, bu genelleşmelerden biri olan p-Faber polinomları incelenmiştir. Aynı zamanda, $L^p(\Gamma)$ ve $L^p(\Gamma, \omega)$ uzaylarından olan fonksiyonların p-süreklilik modülleri ve p-Faber Laurent rasyonel fonksiyonları tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, önce $L^p(\Gamma)$ uzayından olan bir fonksiyona yaklaşan rasyonel fonksiyonlar inşa edilmiştir. Bu rasyonel fonksiyonlar verilen fonksiyonun Faber-Laurent kısmi toplamları yardımıyla ifade edilmiştir. Yaklaşan rasyonel fonksiyonların $L^p(\Gamma)$ uzayından olan bir fonksiyona yaklaşım hızı bu uzaylarda tanımlı olan p-süreklilik modülü yardımıyla değerlendirilmiştir.

Daha sonra, bir $f \in E^p(G, \omega)$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyonun Faber-Laurent serisine açılma yöntemi verilmiş, bu fonksiyon için ağırlıklı p-süreklilik modülü tanımlanmış ve inşa edilmiş Faber-Laurent kısmi toplamlar dizisinin verilen fonksiyona $E^p(G, \omega)$ normunda yaklaşım hızı ağırlıklı p-süreklilik modülüne göre değerlendirilmiştir.

Bu bölümün son kısmında yukarıdaki yöntem genelleştirilerek ağırlıklı $L^p(\Gamma, \omega)$ uzaylarında rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım hızı incelenmiştir. Ağırlık fonksiyonunun sağladığı koşullar literatürde daha önce bilinen A_p-Muckenhaupt koşullarıdır. Bu koşullar singüler integrallerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir. Aynı koşullar altında $L^p(\Gamma, \omega)$ uzaylarında ağırlıklı p-süreklilik modülü tanımlanmış ve bu modüle göre yaklaşım hızı değerlendirilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Smirnov sınıfı / ağırlık fonksiyonu / süreklilik modülü / p-Faber polinomu / p-Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu / yaklaşımın derecesi.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLYNOMİALS AND RATIONAL FUNCTIONS IN L^P SPACES

Balıkesir University, Institue of Science,
Department of Mathematics
(M. Sc. Thesis/ Supervisor: Prof. Dr. Daniyal M. Israfilov)
Balıkesir, 2001

This work consists of three chapters.

In the first chapter, at first, basic definitions, notations and theorems used in the following two chapters are given. Then the weighted L^p spaces in which the approximation is studied are defined and some properties of these are proved. In this chapter, also, the definition of Cauchy singular integral and the statement and proof of an important theorem on the limit values of Cauchy integral are given.

As known, in the approximation theory not only the possibility of the approximation but also the construction of the approximant polynomials by a more practic way is one of the basic problems. In most parts of studies on this subject the approximant polynomials are constructed with the help of Faber polynomials and their generalizations. In the second chapter, p- Faber polynomials, one of these generalizations, are studied. Besides, p-modulus of continuity and p- Faber–Laurent rational functions of the functions belonging to $L^p(\Gamma)$ and $L^p(\Gamma, \omega)$ are defined.

In the third chapter, at first, the rational functions approaching a function of $L^p(\Gamma)$ are constructed. These rational functions are constructed with the help of the Faber Laurent partial sums of the given function. The degree of approximation of the approximant rational functions to a function of $L^p(\Gamma)$ is estimated by p-modulus of continuity which is definite in these spaces.

Then, for a function $f \in E^p(G, \omega)$, the method of expansion to the Faber-Laurent series of this function is given, the weighted p-modulus of continuity is defined, and the rate of approximation of the Faber-Laurent partial sums which have been constructed for the given function in the $E^p(G, \omega)$ norm is estimated with respect to the weighted p-modulus of continuity.

At the end of this chapter, as a generalization of the mentioned method, the rate of approximation with the rational functions in the weighted $L^p(\Gamma, \omega)$ spaces is studied. The conditons that the weight functions satisfy are A_p-Muckenhaupt conditions known in the literature. These conditions are necessary and sufficient for the boundedness of the singular integrals in the weighted Lebesgue spaces. Under the same conditions in $L^p(\Gamma, \omega)$ spaces the weighted p-modulus of continuity is defined and the rate of approximation with respect to this modulus is estimated.

KEY WORDS: Class of Smirnov / weight function / modulus of continuity / p-Faber polynomial / p-Faber-Laurent rational function / degree of approximation.

İÇİNDEKİLER Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
C	Karmaşık sayılar kümesi
R	Gerçel sayılar kümesi
T	$\{z\in\mathbf{C}: \lvert z\rvert =1\}$kümesi (birim çember)
U	$\{z\in\mathbf{C}: \lvert z\rvert <1\}$ kümesi (açık birim disk)
$D(z_0, r)$	$\{z\in\mathbf{C}: \lvert z-z_0\rvert <r\}$ kümesi
$\overline{D}(z_0, r)$	$\{z\in\mathbf{C}: \lvert z-z_0\rvert \le r\}$ kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
∂A	A kümesinin sınırı
CA	C-A (A kümesinin tümleyeni)
A^-	$C\overline{A}$
$\lvert\Gamma\rvert$	Γ eğrisinin uzunluğu
Γ^-	Negatif yönlendirilmiş Γ eğrisi

ÖNSÖZ

Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında yaklaşım özelliklerini incelediğim bu çalışmam boyunca bana zaman ayıran, engin matematik bilgisini ve deneyimlerini yardımlarıyla benden esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov'a teşekkürlerimi sunarım.

Matematiği sevmemde ve kendimi geliştirmemde büyük katkıları olan, değerli hocalarım Prof. Dr. Turgut Başkan, Prof. Dr. Musa Erdem ve Prof. Dr. Seyit Ahmet Kılıç'a teşekkür ederim.

Ayrıca, benim bu noktaya gelmemde büyük emekleri olan ve maddi, manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim sevgili anne ve babama da teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2001 Yunus Emre Yıldırır

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1 Tanım: Karmaşık düzlemde bağlantılı ve açık bir kümeye bölge; bağlantılı ve kapalı bir kümeye de kontinyum denir [13, s:1].

1.1.2 Tanım: $[a,b] \subset \mathbf{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$$

fonksiyonuna karmaşık düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları; bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ oluyorsa Γ ya kapalı eğri; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için eğer, $\Gamma'(t) \neq 0$ oluyorsa Γ ya düzgün eğri; bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ oluyorsa Γ ya Jordan eğrisi denir [12].

1.1.3 Tanım: $[a,b] \subset \mathbf{R}$ olmak üzere

$$\Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayı olduğunda

$$t_1 = a < t_2 < t_3 < ... < t_{n+1} = b$$

koşulunu sağlayan $t_1,\ t_2,\ t_3, ..., t_{n+1}$ değerlerinin keyfi bir dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n} | z(t_{k+1}) - z(t_k) |$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir. Başka bir değişle, Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ ya sonlu uzunluklu eğri denir [5, s:417].

1.1.4 Tanım: Γ sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Eğer her $r > 0$ için

$$\sup\left\{ \left|\Gamma \cap \overline{D}(z,r)\right| : z \in \Gamma \right\} \leq K(\Gamma) r$$

koşulunu sağlayan sadece Γ ya bağlı bir $K(\Gamma) > 0$ sabiti varsa Γ ya regüler eğri denir [1, s:2].

1.1.5 Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset C$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini U ya

$$f(z_0) = 0 \quad \text{ve} \quad f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [12,s:8].

1.1.6 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise, G nin U ya her konform dönüşümü $\overline{G}$ ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde, G nin sınırı bir Jordan eğrisi ise, $C\overline{G}$ nin $C\overline{U}$ ye her konform dönüşümü CG ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir [13, s:24].

1.1.7 Teorem: $E \subset \mathbf{C}$ en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda, CE bölgesini $C\overline{U}$ ye

$$\phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\phi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek ϕ konform dönüşümü vardır [12,s:104].

1.1.8 Teorem(Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Teoremi): G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, CG bölgesinde analitik bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & : z \in C - \overline{G} \\ f(\infty) & : z \in G \end{cases}$$

olur [6, s:486].

E bir ölçüm uzayı olsun. Bu durumda

$$\int_E |f(x)|\, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine Lebesgue uzayı denir ve $L^p(E)$ ile gösterilir [5, s:388].

1.1.9 Teorem(Hölder Eşitsizliği): p>1, q>1 ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $f(x) \in L^p(E)$ ve $g(x) \in L^q(E)$ ise, $f(x)g(x) \in L^1(E)$ ve

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

olur [5, s:388].

1.1.10 Teorem(Minkowski Eşitsizliği): $p>1$ için $f(x), g(x) \in L^p(E)$ ise

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

olur [5, s:389].

1.1.11 Tanım: G, sınırı bir Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, $z_0 \in \Gamma$ ve Γ nın z_0 da bir tek teğeti var olsun ve de z_0 ın bir komşuluğunda Γ eğrisi normalin her iki yanı üzerinde bulunsun. Bu durumda, eğer G içinde bulunan ve z_0 noktasında son bulan sürekli bir ℓ eğrisinin, z_0 ın bir komşuluğundaki kısmı, köşesi z_0 da bulunan, büyüklüğü π den daha küçük olan ve açıortayı Γ ya içten normal ile çakışan bir açı içinde kalıyorsa bu ℓ eğrisine açısal yol denir. Eğer G içinde analitik olan bir f(z) fonksiyonu, z, Γ üzerindeki bir z_0 noktasına Γ içindeki keyfi bir açısal yol boyunca yaklaşırken bir a değerine yaklaşıyorsa, kısaca, f(z) açısal yollar boyunca a değerini alır veya f(z) Γ üzerinde açısal limit değerine sahiptir, diyeceğiz [5, s:428].

1.2 Bazı Fonksiyon Sınıfları

1.2.1 Tanım: Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Γ üzerinde tanımlı ve $1<p<\infty$ için

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|\right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların sınıfı $L^p(\Gamma)$ ile gösterilir [1, s:1]. Göstermek mümkündür ki, $L^p(\Gamma)$, $\|\cdot\|_{L^p(\Gamma)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

1.2.2 Tanım: $\zeta = x + iy$ veya kutupsal koordinatlarda $\zeta = re^{i\theta}$ olmak üzere, U içinde harmonik olan ve $0< r < 1$ ve $p>0$ için

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\theta)|^p d\theta$$

integralinin r den bağımsız bir M sayısıyla sınırlı olması özelliğine sahip $u(r,\theta)$ fonksiyonlarının sınıfı h_p ile gösterilir [5, s:385]. Özel halde, U içinde harmonik ve sınırlı olan bütün fonksiyonlar keyfi $p>0$ için h_p sınıfındandır. $0<p'< p$ ve bütün $x \geq 0$ için $x^{p'} < 1+ x^p$ eşitsizliği sağlandığından $h_p \subset h_{p'}$ kapsamasının gerçeklendiği kolayca görülebilir. Yani p büyüdükçe h_p sınıfı daralır. Eğer bir $u(r,\theta)$ fonksiyonu h_1 sınıfına aitse T üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir [5, s:388]. h_p sınıfı ile ilgili bu özelliği kullanarak U içinde analitik olan fonksiyonların limit değerlerinin varlığıyla ilgili sonuçlara kolayca ulaşabiliriz.

U içinde analitik ve sınırlı olan bir $f(\zeta)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun reel ve imajiner kısımları U içinde harmonik fonksiyonlardır ve özel olarak h_1 sınıfındandır. Dolayısıyla, bu fonksiyonlar T üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Bundan dolayı $f(\zeta)$ fonksiyonu da T üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Bu limit değerleri çember üzerinde $f(e^{i\theta})$ ile gösterilen bir fonksiyon belirler. Bu çok basit sonucu, ilk olarak Nevallinna tarafından oluşturulan N sınıfı fonksiyonlarına genelleştirebiliriz.

1.2.3 Tanım: U içinde analitik olan ve bu disk içinde

$$f(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\psi(\zeta)}$$

şeklinde iki analitik fonksiyonun oranı formunda yazılabilen fonksiyonların oluşturduğu sınıfa N sınıfı denir [5, s:369]. N sınıfını karakterize etmenin başka bir yolu şu teoremle verilir.

1.2.4 Teorem: Bir $f(\zeta)$ fonksiyonunun N sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul $0< r < 1$ için

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

integralinin r den bağımsız bir M sabitiyle sınırlı olmasıdır [5, s:394].

Burada, $\overset{+}{\log}$ gösterimi,

$$\overset{+}{\log} a = \begin{cases} \log a & : a \geq 1 \\ 0 & : 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

N sınıfına ait fonksiyonların sınır özellileri için de şu teorem geçerlidir.

1.2.5 Teorem: Eğer bir $f(\zeta)$ fonksiyonu N sınıfına aitse bu fonksiyon birim çember üzerinde hemen her yerde bütün açısal yollar boyunca belirli $f(e^{i\theta})$ limit değerlerine sahiptir [5, s:395].

1.2.6 Tanım: U içinde analitik olan ve 0< r < 1 ve p>0 için

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

integralinin r den bağımsız bir M sayısıyla sınırlı olması özelliğine sahip $f(\zeta)$ fonksiyonlarının sınıfı H_p ile gösterilir [5, s:402]. Açık olarak U içinde analitik ve sınırlı olan bütün fonksiyonlar keyfi p>0 için H_p sınıfındandır. Bununla beraber $0<p'<p$ ve bütün $x \geq 0$ için $x^{p'}<1+x^p$ eşitsizliği sağlandığından $H_p \subset H_{p'}$ kapsamasının gerçeklendiği kolayca görülebilir. Ayrıca, keyfi p>0 ve $x \geq 0$ için

$$\overset{+}{\log} x = \frac{1}{p} \overset{+}{\log} x^p \leq \frac{x^p}{p}$$

olduğundan her p>0 için $H_p \subset N$ kapsamasının sağlandığını görürüz. Bu son kapsama dolayısıyla diyebiliriz ki bir $f(\zeta) \in H_p$ fonksiyonu p>0 için birim çember üzerinde hemen her yerde açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahiptir ve bunlar bir $f\left(e^{i\theta}\right)$ limit fonksiyonu formundadır. Burada,

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

integraline $r \to 1$ için Fatou Lemmasını uygularsak $(0,2\pi)$ aralığında $f\left(e^{i\theta}\right) \in L^p$ sonucuna varırız.

1.2.7 Teorem: U içinde $f(\zeta)$ fonksiyonunun analitik olması, $r \to 1$ için $|\zeta| = 1$ çemberi üzerinde hemen her yerde $f(re^{it}) \to f(e^{it})$ olması, $(0,2\pi)$ aralığında $f\left(e^{i\theta}\right) \in L$ olması ve U içinde

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})de^{it}}{e^{it}-\zeta}$$

Cauchy formülünün sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $f(\zeta) \in H_1$ olmasıdır. Bununla beraber keyfi bir $f(\zeta) \in H_1$ fonksiyonu için Cauchy integral teoremi,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})de^{it} = 0$$

şeklinde sağlanır [5, s:408].

Şimdi daha genel bir fonksiyon sınıfını tanımlayalım. G, kompleks düzlemde sınırı kapalı sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. $\zeta=\chi(z)$ ile G bölgesini konform olarak U ya dönüştüren bir fonksiyonu gösterelim. $z=\omega(\zeta)$ onun ters fonksiyonu olsun. Γ_r ile $z=\omega(\zeta)$ dönüşümü altında $|\zeta| = r$ çemberine karşılık gelen G içindeki eğrileri gösterelim.

1.2.8 Tanım: G içinde analitik olan ve $p>0$ ve $0< r<1$ için

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz|$$

integralinin r den bağımsız bir M sayısıyla sınırlı olması özelliğine sahip f(z) fonksiyonlarının sınıfına Smirnov sınıfı denir ve $E^p(G)$ ile gösterilir [5, s:438]. Bu tanımda geçen $\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz|$ integralinde $z=\omega(\zeta)$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$\text{“} f(z) \in E^p(G) \Leftrightarrow f(\omega(\zeta))\sqrt[p]{\omega'(\zeta)} \in H_p \text{”}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla eğer f(z) fonksiyonu $E^p(G)$ sınıfına aitse, bu fonksiyon Γ üzerinde hemen her yerde bütün açısal yollar boyunca belirli $f(z')$ limit değerlerine sahiptir; $|f(z')|$, Γ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{r \to 1}\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| = \int_{\Gamma} |f(z')|^p |dz'|$$

olur [5]. $E^p(G)$ sınıfının konform dönüşümden bağımsız bir tanımı da verilebilir.

1.2.9 Tanım: G içinde analitik olan ve G içindeki $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir Γ_n dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz|$$

integralinin n den bağımsız sonlu bir sayıyla sınırlı olması özelliğine sahip fonksiyonların sınıfına Smirnov sınıfı denir [5, s:438].

1.2.10 Teorem: f(z), G içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun Γ üzerinde hemen her yerde açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahip olması ve G içinde her yerde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'-z} dz'$$

Cauchy formülünün sağlanması için gerekli ve yeterli koşul f(z) fonksiyonunun $E^1(G)$ sınıfından olmasıdır. Ayrıca $f(z) \in E^1(G)$ ise Cauchy integral teoremi

$$\int_{\Gamma} f(z')dz' = 0$$

şeklinde sağlanır [5, s:439].

1.3 Cauchy İntegralinin Limit Değerleri

Γ, kompleks düzlemde kapalı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'-z} dz'$$

Cauchy integralini göz önüne alalım. $z \notin \Gamma$ olduğunda bu integral bir analitik fonksiyon tanımlar. Şimdi Γ üzerinde bulunan bir z_0 noktasını göz önüne alalım. Keyfi bir $\varepsilon>0$ için $\Gamma_\varepsilon := \Gamma - \overline{D}(z_0, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z'-z_0} dz'$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun Cauchy singüler integrali denir ve

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z'-z_0} dz' \qquad \text{veya}$$

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \frac{1}{2\pi i} (\text{P.V.}) \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z_0} dz'$$

şeklinde gösterilir. Aşağıdaki teorem, Cauchy integralinin Γ üzerindeki limit değerleriyle, Cauchy singüler integralinin varlığı arasında bir ilişki kurar.

1.3.1 Teorem: Eğer Cauchy integrali Γ üzerinde hemen her yerde Γ nın bir tarafı üzerinde bulunan bütün açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve Cauchy integrali Γ nın diğer tarafı üzerinden Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcutsa Cauchy integrali Γ nın her iki tarafı üzerinden de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Burada,

$$\lim_{z\to z_0'} \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z} dz' = \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z_0'} dz' \pm \pi i f(z_0')$$

formülü Γ üzerinde hemen her yerde sağlanır. Bu formülde sol taraftaki limit açısal yollar boyunca alınır. Sağ tarafta pozitif işaret açısal yol eğrinin solunda; negatif işaret ise yol eğrinin sağında kaldığı zaman alınır.

İspat: $z_0' \in \Gamma$ olsun. z, z_0' noktasına herhangi bir açısal yol boyunca yaklaşırken

$$\int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z} dz' - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z'-z_0'} dz', \qquad \varepsilon = |z - z_0'|$$

farkının $\pm \pi i f(z_0')$ ne yaklaştığını göstermek yetecektir. Burada işaret, açısal yol z_0' noktasındaki teğetin solunda kaldığında pozitif, sağında kaldığında negatiftir. Eğer bu iddiayı ispatlayabilirsek, Γ üzerinde hemen her yerde ve özel olarak $f(z')$ nün sonlu olduğu noktalarda yukarıdaki integrallerin birinin varlığı diğer integral için karşılık gelen limitin varlığı anlamına gelecektir.

Önce, Γ üzerinde $f(z') \equiv 1$ olduğu bir özel durumu inceleyelim. $z_0' = z'(s_0)$, Γ üzerinde keyfi bir nokta ve $\left|\dfrac{dz'(s_0)}{ds_0}\right| = 1$ olsun. Bu durumda yukarıdaki integrallerin birincisi, z' noktası Γ eğrisi üzerinde bir tur yaptığında, $\log(z'-z)$ fonksiyonunun artışını verir. Bu artışın imajiner kısmı $z'-z$ vektörünün eğim açısındaki artıştır. Eğer Γ üzerindeki $(z'(s_0-\varepsilon), z'(s_0+\varepsilon))$ yayının yerine, bu yay ile aynı son noktalara sahip, Γ nın diğer yanı üzerinde yerleşmiş bir γ yarı çemberini düşünürsek $(\log(z'-z))_\Gamma$ değişmez. Diğer yandan, z' yeni yol etrafında bir tur attığında $\log(z'-z)$ fonksiyonunun artışı ile $\log(z'-z'_0)$ fonksiyonunun artışı arasındaki fark $\varepsilon \to 0$ için sıfıra yaklaşır. Açık olarak,

$$\int_\Gamma \frac{1}{z'-z} dz' - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z'-z'_0} dz'$$

farkı yeterince küçük bir ε için $\pm\pi i$ ye keyfi olarak yakın yapılabilen, $(\log(z'-z'_0))_\gamma$ daki artışa eşittir(Burada işaret, Γ üzerinden alınan integrasyonun yönüne bağlıdır). Bu, $\varepsilon \to 0$ için işaretin istenen seçimiyle yukarıdaki farkın $\pm\pi i$ ye yaklaştığını gösterir.

Aynı iddiayı genel durumda ispatlamak için, her $z'_0 \in \Gamma$ için z, z'_0 noktasına açısal bir yol boyunca yaklaşırken

$$\begin{aligned} F(z,z'_0) &= \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z} dz' - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z'-z'_0} dz' - f(z'_0)\left[\int_\Gamma \frac{dz'}{z'-z} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz'}{z'-z'_0}\right] \\ &= \int_\Gamma \frac{f(z')-f(z'_0)}{z'-z} dz' - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')-f(z'_0)}{z'-z'_0} dz', \qquad \varepsilon = |z-z'_0| \end{aligned}$$

ifadesinin sıfıra yaklaştığını göstermek yeterlidir.

$z'_0 = z'(s_0)$, Γ üzerinde keyfi bir nokta $\left|\frac{dz'(s)}{ds}\right| = 1$ ve $f(z')$ sonlu olsun. χ_0, z'_0 noktasında Γ ye teğetin reel eksenle yaptığı eğim açısını göstersin. z, z'_0 noktasına bir ℓ açısal yolu boyunca yaklaşırken ve $z = z'_0 + i\varepsilon e^{i(\chi_0+\psi)}$ iken yeterince küçük bir ε için $\psi_0 < \rho/2$ olduğunda $|\psi| < \psi_0$ veya $|\pi-\psi| < \psi_0$ olduğu sonucuna ulaşırız.

Şimdi, $\eta>0$ verilsin. $h=h(\eta)>0$, $|s-s_0| < h$ için

$$\frac{z'(s)-z'_0}{s-s_0} = e^{i\chi_0} + \delta, \quad |\delta| < \eta$$

koşulunu sağlayan bir sayı ve ε, (0,h) aralığında keyfi bir sayıyı göstersin. Bu durumda,

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z')-f(z_o')}{z'-z}dz'=\int_{\Gamma}\frac{\left(f(z'(s))-f(z_o')\right)\frac{dz'(s)}{ds}ds}{(s-s_o)(e^{i\chi_o}+\delta)-\varepsilon ie^{i(\chi_o+\psi)}}$$

olur.

Eğer, $|\sigma|<h$ için $|m|<\eta$ olduğunda

$$\sigma:=s-s_0,\quad m(\sigma)=m:=\delta e^{-i\chi_o}\quad \text{ve}\quad \phi(\sigma):=\left(f(z'(s))-f(z_0')\right)\left(dz'(s)/ds\right)e^{-i\chi_o}$$

dersek,

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z')-f(z_o')}{z'-z}dz'=\int_{\Gamma}\frac{\phi(\sigma)d\sigma}{(1+m)\sigma-\varepsilon ie^{i\psi}}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$F(z,z_o')=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varepsilon ie^{i\psi}\phi(\sigma)d\sigma}{\left((1+m)\sigma-\varepsilon ie^{i\psi}\right)(1+m)\sigma}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\phi(\sigma)d\sigma}{(1+m)\sigma-\varepsilon ie^{i\psi}}$$

sonucuna ulaşırız.

Yine z_0' noktasının,

$$\Phi(\sigma):=\int_0^{\sigma}|\phi(\sigma)|d\sigma=\int_0^{\sigma}|f(z'(s_0+\sigma))-f(z'(s_0))|d\sigma$$

iken

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}=0$$

koşulunu sağladığını varsayalım.

Γ üzerindeki hemen hemen bütün noktaların bu varsayımı doğruladığını gösterelim. Düzlemdeki bütün noktaların rasyonel koordinatlı $\{r_1,r_2,...\}$ kümesini göz önüne alalım. Her r_k ve 0<s<S aralığındaki hemen hemen bütün s ler için Lebesgue teoreminden[11,s:19],

$$\frac{d}{ds}\int_0^{s}|f(z'(s)-r_k|ds=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_s^{s+\sigma}|f(z'(s)-r_k|ds=|f(z'(s)-r_k|$$

elde edilir. Dolayısıyla, eğer E_k, 0<s<S aralığında yukarıdaki eşitliğin doğrulanmadığı veya $f(z'(s))=\infty$ koşulunun sağlandığı noktaların kümesi ise $\text{mes}E_k=0$ olur.

Şimdi,

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

diyelim. Bu durumda mesE=0 olur. Eğer $s_0 \notin E$ ise keyfi $\varepsilon>0$ için r_k yı

$$|f(z'(s_0)-r_k|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde seçebiliriz. Yeterince küçük bir σ için

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^{\sigma}|f(z'(s_o+\sigma))-f(z'(s_o))|\,d\sigma \le \frac{1}{\sigma}\int_0^{\sigma}|f(z'(s_o+\sigma))-r_k|\,d\sigma$$

$$+\frac{1}{\sigma}\int_0^{\sigma}|f(z'(s_o))-r_k|\,ds \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur ve bu, E nin dışındaki bir s_0 için

$$\sigma \to 0 \text{ iken } \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \to 0$$

olması anlamına gelir.

Yaptığımız varsayım altında

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varepsilon i e^{i\psi}\phi(\sigma)d\sigma}{((1+m)\sigma-\varepsilon i e^{i\psi})(1+m)\sigma},\quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\phi(\sigma)d\sigma}{(1+m)\sigma-\varepsilon i e^{i\psi}}$$

integrallerinin herbiri için bir sınır bulalım.

$$R_1=\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\phi(\sigma)d\sigma}{(1+m)\sigma-\varepsilon i e^{i\psi}}\right| \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{|\phi(\sigma)|d\sigma}{|(1+m)\sigma-\varepsilon i e^{i\psi}|}$$

veya imajiner kısımla paydadaki modülü yer değiştirerek

$$R_1 \le \frac{1}{\cos\psi_o-\eta}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\phi(\sigma)|d\sigma \le \frac{1}{\cos\psi_o-\eta}\cdot 2\max_{|\sigma|<h}\left|\frac{\phi(\sigma)}{\sigma}\right|$$

elde ederiz. Şimdi

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varepsilon i e^{i\psi}\phi(\sigma)d\sigma}{((1+m)\sigma-\varepsilon i e^{i\psi})(1+m)\sigma}$$

integralini

$\Gamma_h := \Gamma-\overline{D}(z'_0,\varepsilon+h)$ ve $\Gamma_{\varepsilon h} := \left(z'(s_0-\varepsilon-h),\ z'(s_0-\varepsilon)\right)\cup\left(z'(s_0+\varepsilon),\ z'(s_0+\varepsilon+h)\right)$

yayları üzerinden iki integrale bölelim. Bu durumda,

$$R_2=\left|\int_{\Gamma_{\varepsilon h}}\frac{\varepsilon i e^{i\psi}\phi(\sigma)\,d\sigma}{\left((1+m)\sigma-\varepsilon i e^{i\psi}\right)(1+m)\sigma}\right| \le \int_{\Gamma_{\varepsilon h}}\frac{\varepsilon|\phi(\sigma)|\,d\sigma}{|(1+m)\sigma e^{-i\psi}-\varepsilon i|\,(1-\eta)\sigma}$$

veya reel kısımla paydadaki modülü yer değiştirerek,

$$R_2 \le \int_{\Gamma_{\varepsilon h}} \frac{\varepsilon |\phi(\sigma)|\, d\sigma}{\sigma^2 (\cos\psi_0 - \eta)(1-\eta)} = \frac{\varepsilon}{(\cos\psi_0 - \eta)(1-\eta)} \int_{\Gamma_{\varepsilon h}} \frac{|\phi(\sigma)|\, d\sigma}{\sigma^2}$$

elde ederiz. Kısmi integrasyondan

$$\int_{C_{\varepsilon h}} \frac{|\phi(\sigma)|\, d\sigma}{\sigma^2} = \left.\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma^2}\right|_{\Gamma_{\varepsilon h}} + 2\int_{\Gamma_{\varepsilon h}} \frac{\Phi(\sigma)\, d\sigma}{\sigma^3}$$

$$\le \max_{|\sigma|<h} \left|\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}\right| 3\left[\frac{1}{h} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{h} + \frac{1}{\varepsilon}\right] \le \frac{12}{\varepsilon} \max_{|\sigma|<h} \left|\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}\right|$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$R_2 \le \frac{12}{(\cos\psi_0 - \eta)(1-\eta)} \cdot \max_{|\sigma|<h} \left|\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}\right|$$

bulunur. Bu eşitsizlikler,

$$R(\eta) = \left(2 + \frac{12}{1-\eta}\right) \frac{1}{\cos\psi_0 - \eta} \cdot \max_{|\sigma|<h} \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}, \quad \lim_{\eta \to 0} R(\eta) = 0$$

iken

$$|F(z, z_0')| \le \left| \int_{\Gamma_h} \frac{\varepsilon i e^{i\psi} \phi(\sigma) d\sigma}{((1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi})(1+m)\sigma} \right| + R(\eta)$$

olmasını gerektirir.

Sonuncu integral, $\varepsilon \to 0$ için integral işareti altında limit alındığında, sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, $\varepsilon \to 0$ için $|F(z, z_0')|$ nin limit değerlerinin hiçbirinin $R(\eta)$ sayısını aşmadığı sonucuna ulaşılır. Ama bu limit değerleri η den bağımsız olduğundan ve $\eta \to 0$ iken $R(\eta) \to 0$ olduğundan bu, $\varepsilon \to 0$ iken yani ℓ eğrisi boyunca $z \to z_0'$ iken $F(z, z_0') \to 0$ olması anlamına gelir ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, G, Γ sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun. Genelliği kaybetmeden 0 orijininin G içinde olduğunu kabul edelim. Eğer $f \in L^p(\Gamma)$ ise

$$f^{+}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z')}{z'-z}dz', \qquad z\in G$$

$$f^{-}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z')}{z'-z}dz', \qquad z\in G^{-}$$

şeklinde tanımlanan $f^{+}:G \to \mathbf{C}$ ve $f^{-}:G^{-} \to \mathbf{C}$ fonksiyonları sırasıyla G ve G^{-} içinde analitiktirler ve $f^{-}(\infty)=0$ dır.

1.3.1 Teorem gereğince eğer f^{+} ve f^{-} Cauchy integrallerinden biri Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde vardır ve f^{+} ve f^{-} Cauchy integrallerinden diğeri de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde varsa, f^{+} ve f^{-} Cauchy integralleri Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Γ nın her iki tarafı üzerinde bulunan açısal yollar boyunca limit alarak, Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f^{+}(z) = S_{\Gamma}(f)(z) + \frac{1}{2}f(z)$$

$$f^{-}(z) = S_{\Gamma}(f)(z) - \frac{1}{2}f(z)$$

$$f(z) = f^{+}(z) - f^{-}(z)$$

formüllerini elde ederiz [1, s:2].

Gösterilmiştir ki, Γ nın bir regüler eğri olması için gerekli ve yeterli koşul p>1 ve her $f\in L^{p}(\Gamma)$ için $S_{\Gamma}(f)$ in var ve $L^{p}(\Gamma)$ ya ait olması ve sınırlı olmasıdır. Yani p>1 ve her $f\in L^{p}(\Gamma)$ için

$$\|S_{\Gamma}(f)\|_{L^{p}(\Gamma)} \le C(p,\Gamma)\|f\|_{L^{p}(\Gamma)}$$

olacak biçimde bir $C(p,\Gamma) > 0$ sabitinin var olmasıdır[2]. Bununla beraber, eğer S_{Γ} singüler operatörü sınırlı ise her $f\in L^{p}(\Gamma)$ için yukarıda tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları sırasıyla $E^{p}(G)$ ve $E^{p}(G^{-})$ Simirnov sınıflarına aittir [8]. Ayrıca Γ regüler bir eğri ve $f\in L^{p}(\Gamma)$ ise yukarıda verilen formüller gereğince f^{+} ve f^{-} fonksiyonları $L^{p}(\Gamma)$ sınıfındandır.

1.4 Ağırlıklı Fonksiyon Sınıfları:

1.4.1 Tanım: ω, Γ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu, yani Γ üzerinde negatif olmayan, ölçülebilir bir fonksiyon ve p>0 olsun. Eğer

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int_{\Gamma\cap D(z,r)}\omega(\varsigma)\,|d\varsigma|\right)\left(\frac{1}{r}\int_{\Gamma\cap D(z,r)}(\omega(\varsigma))^{-1/(p-1)}|d\varsigma|\right)^{p-1}<\infty$$

oluyorsa ω, Γ üzerinde A_p-Muckenhaupt koşullarını sağlıyor denir [10, s:3].

Γ üzerinde A_p-Muckenhaupt koşullarını sağlayan bütün ağırlık fonksiyonlarının kümesini $A_p(\Gamma)$ ile gösteririz. Eğer $\omega\in A_p(\Gamma)$ ise

$$\omega^{-1/p}\in L^{p/(p-1)}(\Gamma)$$

olduğu açıktır.

1.4.2 Tanım: $L^p(\Gamma,\omega):=\{\,f\in L^1(\Gamma):|f|^p\,\omega\in L^1(\Gamma)\,\}$ kümesine ω-ağırlıklı L^p-uzayı denir [10, s:3].

1.4.3 Tanım: $E^p(G,\omega):=\{\,f\in E^1(G):f\in L^p(\Gamma,\omega)\,\}$ kümesine G içindeki analitik fonksiyonların p. dereceden ω-ağırlıklı Smirnov sınıfı denir [10, s:3].

1.4.4 Teorem: Γ bir regüler eğri, ω, Γ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $1<p<\infty$ olsun. Bu durumda her $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ için

$$\|S_\Gamma(f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)}\le c_1\|f\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\omega\in A_p(\Gamma)$ olmasıdır [10, s:4].

1.4.5 Lemma: Eğer $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega\in A_p(\Gamma)$ ise $f\in L^r(\Gamma)$ olacak biçimde bir $r>1$ sayısı vardır.

İspat: $\omega\in A_p(\Gamma)$ olduğundan $\omega\in A_q(\Gamma)$ olacak biçimde bir $q\in(1,p)$ sayısı vardır [4]. $r:=\frac{p}{q}$ olsun. $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ olduğundan

$$|f|^r\,\omega^{1/q}\in L^q(\Gamma)$$

olur. Diğer yandan,

$$\omega^{-1/p}\in L^{p/(p-1)}(\Gamma)$$

olduğundan Hölder eşitsizliği $f\in L^r(\Gamma)$ olduğunu gösterir.

1.4.6 Lemma: Γ, bir regüler eğri ve $\omega\in A_p(\Gamma)$ ise her $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ için $f^+\in E^p(G,\omega)$ ve $f^-\in E^p(G^-,\omega)$ olur.

İspat: $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ olsun. 1.4.4 Teorem gereğince $S_\Gamma(f)\in L^p(\Gamma,\omega)$ olduğunu elde ederiz. Diğer yandan, 1.4.5 Lemma gereğince $f\in L^r(\Gamma)$ olacak biçimde bir $r>1$ sayısı vardır. $1<r<\infty$ ve Γ, regüler olduğundan $S_\Gamma : L^r(\Gamma)\to L^r(\Gamma)$ sınırlı bir lineer operatördür [2]. Dolayısıyla f^+ ve f^- fonksiyonları sırasıyla $E^r(G)$ ve $E^r(G^-)$ sınıflarındandır. Bununla beraber, Γ üzerinde hemen her yerde

$$f^+(z)=S_\Gamma(f)(z)+\frac{1}{2}f(z) \quad \text{ve} \quad f^-(z)=S_\Gamma(f)(z)-\frac{1}{2}f(z)$$

eşitlikleri sağlandığından f^+ ve f^- fonksiyonlarının $L^p(\Gamma,\omega)$ ya ait oldukları ortaya çıkar. $E^r(G)\subset E^1(G)$ ve $E^r(G^-)\subset E^1(G^-)$ kapsamalarını dikkate alırsak ispat tamamlanır.

2. $L^p(\Gamma,\omega)$ UZAYLARINDA p-FABER POLİNOMLARI SERİSİ VE p-SÜREKLİLİK MODÜLLERİ

2.1 $F_{k,p}(z)$ p-Faber polinomu ve $\widetilde{F}_{k,p}(\frac{1}{z})$ p-Faber Esas Kısmı

G, sınırı sonlu uzunluklu kapalı Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. ϕ ve ϕ_1 sırasıyla G^- ve G bölgelerini U^- bölgesine,

$$\phi(\infty)=\infty, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0, \quad \phi_1(0)=\infty, \quad \lim_{z\to 0} z\,\phi_1(z)>0$$

koşulları altında resmeden konform dönüşümler olsun. Ψ ve Ψ_1 sırasıyla ϕ ve ϕ_1 in ters dönüşümleri olsun. 1.1.5 Teorem gereğince ϕ ve ϕ_1 fonksiyonları Γ ya; Ψ ve Ψ_1 fonksiyonları da T ye sürekli olarak genişletilebilir. Yine $\phi'(z)$, G^- içinde; $\phi_1'(z)$, G içinde; $\psi'(w), \psi_1'(w)$ fonksiyonları da U^- içinde sıfırdan farklıdır.

k, negatif olmayan bir sayı olsun. $\phi(z)$, G^- de analitik ve

$$\phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0$$

olduğundan $[\phi(z)]^k\sqrt[p]{\phi'(z)}$ fonksiyonu ∞ noktasında k. dereceden bir kutba sahiptir. Dolayısıyla bu fonksiyonun ∞ daki Laurent açılımını düşünürsek her $z\in G^-$ için

$$[\phi(z)]^k\sqrt[p]{\phi'(z)} = F_{k,p}(z)+E_{k,p}(z)$$

olacak biçimde k. dereceden bir $F_{k,p}(z)$ polinomu ve $E_{k,p}(\infty)=0$ koşulunu sağlayan G^- de analitik bir $E_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır. Bu son eşitlikten R>1 ve her $z\in G$ için,

$$\Gamma_R := \{\zeta\in G^- : |\phi(\zeta)|=R\}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

elde ederiz. Burada sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülü gereğince,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=E_{k,p}(\infty)=0$$

ve Cauchy integral formülü gereğince,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=F_{k,p}(z)$$

olur. Dolayısıyla, R>1 ve her $z\in G$ için

$$F_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

integral gösterimini elde ederiz. Aynı zamanda $\phi(\zeta)=w$ dönüşümü yapılarak,

$$F_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^k[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z}dw$$

elde edilir.

2.1.1 Tanım: $F_{k,p}(z)$ polinomuna Γ eğrisi için k. dereceden p- Faber polinomu denir.

Şimdi $[\phi_1(z)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(z)}$ fonksiyonunu dikkate alalım. Bu fonksiyon $G\backslash\{0\}$ da analitiktir ve 0 noktasında k. dereceden bir kutba sahiptir. Eğer bu fonksiyonun 0 daki Laurent açılımının esas kısmını $\widetilde{F}_{k,p}(1/z)$ ile gösterirsek, her $z\in G\backslash\{0\}$ için

$$[\phi_1(z)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(z)}=\widetilde{F}_{k,p}(1/z)+\widetilde{E}_{k,p}(z)$$

olacak biçimde G içinde analitik olan bir $\widetilde{E}_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır. Bu son eşitlikten R>1 ve her $z\in G^-$ için

$$\widetilde{\Gamma}_R:=\{\zeta\in G:|\phi_1(\zeta)|=R\}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_R}\frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_R}\frac{\widetilde{F}_{k,p}(1/z)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_R}\frac{\widetilde{E}_{k,p}(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

elde edilir. Burada Cauchy integral teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_R}\frac{\widetilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$$

ve sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_R}\frac{\widetilde{F}_{k,p}(1/\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\widetilde{F}_{k,p}(\infty)-\widetilde{F}_{k,p}(1/z)=-\widetilde{F}_{k,p}(1/z)$$

elde edilir. Dolayısıyla R>1 ve her $z\in G^-$ için

$$\widetilde{F}_{k,p}(1/z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_R}\frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

integral gösterimini elde ederiz. Bu integralde yapacağımız $\phi_1(\zeta)=w$ dönüşümüyle bu eşitlik,

$$\widetilde{F}_{k,p}(1/a)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^{k-2/p}[\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}dw$$

biçiminde yazılır.

2.1.2 Tanım: $\widetilde{F}_{k,p}(1/z)$ rasyonel fonksiyonuna Γ eğrisi için k. dereceden p-Faber esas kısmı denir.

2.1.3 Lemma: n bir doğal sayı ve $\Gamma_{1+1/n}:=\{\zeta\in G^-:|\phi(\zeta)|=1+1/n\}$ olsun. Eğer $z\in G^-$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_{1+1/n}}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat: $d(z,\Gamma_{1+1/n}):=\inf\{|\zeta-z|:\zeta\in\Gamma_{1+1/n}\}$ diyelim ve n_o, $1+1/n<|\phi(z)|$ koşulunu sağlayan en küçük doğal sayı olsun. Bu durumda, $n\geq n_o$ özelliğindeki her doğal sayı için

$$d(z,\Gamma_{1+1/(n+1)})>d(z,\Gamma_{1+1/n})\geq d(z,\Gamma_{1+1/n_o})$$

olur. q>1 için, eğer $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise

$$\int_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{[\phi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\theta}\left[\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) - z} i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta} d\theta$$

elde ederiz. Açık olarak, her $n \geq n_o$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\theta}\left[\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) - z} i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta} \right|^q d\theta$$

$$\leq \frac{2^{q(k+1)-1}}{d^q(z, \Gamma_{1+1/n_o})} \int_0^{2\pi} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

olur. Bu durumda,

$$\int_0^{2\pi} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right)\right| d\theta \leq B|\Gamma|$$

olacak biçimde n den bağımsız bir B sabitinin varlığı ispatlanabilir. Son iki eşitsizlik

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left| \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\theta}\left[\psi'\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) - z} i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta} \right|^q d\theta \right\}$$

dizisinin $n \geq n_o$ için düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k e^{ik\theta}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi'\left(e^{i\theta}\right)\right]^{1/q}}{\psi\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) - z} i\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}\left[\psi'(e^{i\theta})\right]^{1/q}}{\psi(e^{i\theta}) - z} ie^{i\theta} d\theta = \int_T \frac{w^k[\psi'(w)]^{1/q}}{\psi(w) - z} dw = \int_\Gamma \frac{[\phi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

bulunur. Bu, ispatı tamamlar.

2.1.4 Lemma: Her $z \in G$ ve her $w \in U^-$ için

$$\frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

olur.

İspat: $z \in G$ olsun. $[\psi'(w)]^{1-1/p} / [\psi(w)-z]$ fonksiyonu U^- içinde analitik,

$$\psi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{w \to \infty} \frac{\psi(w)}{w} > 0$$

olduğundan, bu fonksiyon U^- nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün olarak yakınsayan

$$\frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

şeklinde bir tek Laurent serisine sahiptir. Bu eşitlik kullanılarak, $R>1$ ve $n \in \mathbf{Z}^+$ için,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^n [\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{k,p}(z)}{w^{k+1}} \right) dw$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^n}{w^{k+1}} dw \right) A_{k,p}(z)$$

bulunur. Buradan, $F_{n,p}(z) = A_{n,p}(z)$ olduğu kolayca görülür. Bu, ispatı tamamlar.

2.1.5. Lemma: Eğer $z \in G^-$ ise

$$F_{k,p}(z) = [\phi(z)]^k \sqrt[p]{\phi'(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[\phi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: $z \in G^-$ olsun. Eğer $R > 1$ ise yeterince büyük seçilen bir n doğal sayısı için z, $\Gamma_R \cup \Gamma_{1+1/n}^-$ ile sınırlı bir bölgenin bir iç noktası olur. Dolayısıyla, Cauchy integral formülü gereğince,

$$[\phi(z)]^k \sqrt[p]{\phi'(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R \cup \Gamma_{1+1/n}^-} \frac{[\phi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{[\phi(\zeta)]^k \sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

elde ederiz. 2.1.3 Lemma kullanılarak istenen elde edilir.

2.1.6 Lemma: n, bir doğal sayı ve

$$\widetilde{\Gamma}_{1+1/n} := \left\{ \zeta \in G : |\phi_1(\zeta)| = 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

olsun. Bu durumda, her $z \in G$ için

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{\Gamma}_{1+1/n}} \frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: 2.1.3.Lemmanın ispatı gibidir.

2.1.7 Lemma: Eğer $z \in G^-$ ve $w \in U^-$ ise

$$\frac{w^{-2/p} [\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\widetilde{F}_{k,p}(1/z)}{w^{k+1}}$$

olur.

İspat: $w^{-2/p} [\psi_1'(w)]^{1-1/p} / (\psi_1(w) - z)$ fonksiyonu U^- içinde analitik ve ∞ da ikinci kerteden bir sıfıra sahip olduğundan onun U^- içindeki Laurent serisi açılımı

$$\frac{w^{-2/p} [\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{A}_{k,p}(z)}{w^{k+2}}$$

formundadır. Sağ yandaki seri U^- nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla eğer $R>1$ ve n bir doğal sayı ise

$$-\widetilde{F}_{n,p}(1/z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^{n-p/2} [\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{A}_{k,p}(z)}{w^{k+2}} \right) dw$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^n}{w^{k+2}} dw \right) \widetilde{A}_{k,p}(z)$$

olur. Buradan

$$-\widetilde{F}_{n,p}(1/z) = \widetilde{A}_{n-1,p}(z)$$

olduğu görülür. $\widetilde{F}_{0,p}(1/z)=0$ olduğundan

$$\frac{w^{-2/p}[\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{\widetilde{F}_{k,p}(1/z)}{w^{k+1}}$$

çıkar.

2.1.8 Lemma: Eğer $z\in G\setminus\{0\}$ ise

$$\widetilde{F}_{k,p}(1/z)=[\phi_1(z)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat : Eğer ε küçük seçilirse ve n yeterince büyük alınırsa $z\in G\setminus\{0\}$ noktası $\widetilde{\Gamma}_{1+1/n}\cup\partial D^{-}(0,\varepsilon)$ eğrisiyle sınırlı bölgenin bir iç noktası olur ve $[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}$ fonksiyonu bu bölgede analitik olur. Dolayısıyla, Cauchy integral formülünden,

$$[\phi_1(z)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\Gamma}_{1+1/n}}\frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)}\frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

elde ederiz. $E_{k,p}(\zeta)/(\zeta-z)$ fonksiyonu D(0,ε) da analitik olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)}\frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)}\frac{\widetilde{F}_{k,p}(1/\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\widetilde{F}_{k,p}(1/z)$$

olduğu kolayca görülür. Bu, ispatı tamamlar.

2.2 $L^p(\Gamma)$ ve $L^p(\Gamma,\omega)$ Uzaylarındaki Fonksiyonların p-Süreklilik Modülleri

2.2.1 Tanım: p>1 ve $g \in L^p(T)$ olsun. Bu durumda,

$$\omega_p(g,t) := \sup_{|h|\le t}\left(\int_0^{2\pi}\left|g\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

ile tanımlanan $\omega_p(g,t):(0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna g nin p-süreklilik modülü denir. Her $g \in L^p(T)$ için $\lim_{t\to 0}\omega_p(g,t)=0$ olduğu görülebilir [3]. Bununla beraber her $g_1, g_2 \in L^p(T)$ için

$$\omega_p(g_1+g_2,\cdot) \le \omega_p(g_1,\cdot)+\omega_p(g_2,\cdot)$$

olduğu Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\omega_p(g_1+g_2,t) = \sup_{|h|\le t}\left(\int_0^{2\pi}\left|(g_1+g_2)\left(e^{i(\theta+h)}\right)-(g_1+g_2)\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

$$= \sup_{|h|\le t}\left(\int_0^{2\pi}\left|g_1\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g_1\left(e^{i\theta}\right)+g_2\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g_2\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

$$\le \sup_{|h|\le t}\left\{\left(\int_0^{2\pi}\left|g_1\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g_1\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}+\left(\int_0^{2\pi}\left|g_2\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g_2\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}\right\}$$

$$\le \sup_{|h|\le t}\left\{\left(\int_0^{2\pi}\left|g_1\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g_1\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}\right\}+\sup_{|h|\le t}\left\{\left(\int_0^{2\pi}\left|g_2\left(e^{i(\theta+h)}\right)-g_2\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}\right\}$$

$$= \omega_p(g_1,t)+\omega_p(g_2,t)$$

şeklinde gösterilebilir.

2.2.1 Lemma: Eğer $g \in L^p(T)$ ise bu durumda her $t \in (0,\infty)$ için

$$\omega_p(S(g),t) \le c_p\,\omega_p(g,t)$$

olur.

İspat: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{ik\theta}$, $g\in L^p(T)$ nin Fourier serisi ve $S_n(g,\theta)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ik\theta}$ onun n. kısmi toplamı olsun. $g\in E^p(U)$ olduğundan, $k<0$ için $\alpha_k = 0$ ve $k\geq 0$ için $b_k = \alpha_k$ olduğunu biliyoruz [3]. Dolayısıyla

$$g(e^{i\theta})-\sum_{k=0}^{n}b_k e^{i\theta}= g(e^{i\theta})-S_n(g,\theta)$$

olur. Bu,

$$\left\| g(w)-\sum_{k=0}^{n}b_k w^k \right\|_{L^p(T)} \leq \left\| g(e^{i\theta})-S_n(g,\theta)\right\|_{L^p(T)}$$

olduğunu gösterir. Diğer yandan, her n doğal sayısı için

$$\left\| g(e^{i\theta})-S_n(g,\theta)\right\|_{L^p(T)} \leq K_p\omega_p\left(g,\frac{1}{n+1}\right)$$

olacak biçimde sadece p ye bağlı pozitif bir K_p sayısı vardır [14, s:205, 207]. Son iki eşitsizlik ispatı tamamlar.

2.2.4.Tanım: $f\in L^p(\Gamma)$ olsun. Eğer $f_0, f_1 : T\rightarrow \mathbf{C}$ fonksiyonları hemen her yerde

$$f_0(w):=f(\psi(w))\sqrt[p]{\psi'(w)}$$

$$f_1(w):=f(\psi_1(w))\sqrt[p]{\psi_1{}'(w)}w^{2/p}$$

ile tanımlanıyorsa

$$\Omega_p(f,\cdot):=\Omega_p(f_0,\cdot)+\Omega_p(f_1,\cdot)$$

olarak tanımlanan

$$\Omega_p(f,\cdot):(0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$$

fonksiyonuna $f\in L^p(\Gamma)$ nın p-genelleştirilmiş süreklilik modülü denir. Burada $f_0, f_1\in L_p(T)$ olduğu açıktır.

$f\in L^p(\Gamma)$ için verilen bu tanımı ağırlıklı $L^p(\Gamma,\omega)$ uzayından olan fonksiyonlar için de verebiliriz. Şimdi bu tanımı vermeye çalışalım.

$g\in L^p(T,\omega)$ ve $\omega\in A_p(T)$ olsun. Bu durumda,

$$g_h(w)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}g(we^{it})dt, \qquad 0<h<\pi$$

fonksiyonunu dikkate alalım. [4, s:110] da ispatlanan

$$\|g_h\|_{L^p(T,\omega)} \leq c_p \|g\|_{L^p(T,\omega)} \;, \qquad 1<p<\infty$$

bağıntısını kullanarak, $g\in L^p(T,\omega)$ için $g_h \in L^p(T,\omega)$ olduğunu elde ederiz.

2.2.5 Tanım: Eğer $g\in L^p(T,\omega)$ ve $\omega\in A_p(T)$ ise bu durumda,

$$\Omega_{p,\omega}(g,\delta) := \sup \{ \|g-g_h\|_{L^p(T,\omega)} : h \leq \delta \}, \qquad 1<p<\infty$$

ile tanımlanan $\Omega_{p,\omega}(g,\cdot) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna g için p. dereceden ω-ağırlıklı süreklilik modülü denir.

$\Omega_{p,\omega}(g,\cdot)$ fonksiyonunun sürekli, negatif olmayan, azalmayan ve

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_{p,\omega}(g,\delta) = 0 \;, \qquad \omega_{p,\omega}(g_1+g_2,\cdot) \leq \omega_{p,\omega}(g_1,\cdot) + \omega_{p,\omega}(g_2,\cdot)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olduğunu kolayca göstermek mümkündür.

2.2.6 Lemma: Eğer $g\in L^p(T,\omega)$ ve $\omega\in A_p(T)$ ise bu durumda,

$$\omega_{p,\omega}(S_T(g),\cdot) \leq c_2 \omega_{p,\omega}(g,\cdot)$$

olur.

İspat: $\delta\in(0,2\pi)$, $h<\delta$ ve $\omega\in A_p(T)$ olsun. Fubini teoremini uygulayarak,

$$[S_T(g)]_h(w) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} S_T\left(g(we^{i\theta})\right)d\theta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \frac{1}{2\pi i}\left((P.V.)\int_T \frac{g(\tau)d\tau}{\tau - we^{i\theta}}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \frac{1}{2\pi i}\left((P.V.)\int_T \frac{g\left(\tau e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\tau}{\tau e^{i\theta} - we^{i\theta}}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \frac{1}{2\pi i}\left((P.V.)\int_T \frac{g\left(\tau e^{i\theta}\right)d\tau}{\tau - w}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P.V.)\int_T \frac{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} g\left(\tau e^{i\theta}\right)d\theta}{\tau - w}d\tau = \frac{1}{2\pi i}(P.V.)\int_T \frac{g_h(\tau)}{\tau - w}d\tau = [S_T(g_h)](w)$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$[S_T(g)](w) - [S_T(g)]_h(w) = [S_T(g-g_h)](w)$$

olur ve buradan,

$$\|S_T(g) - [S_T(g)]_h\|_{L^p(T,\omega)} = \|S_T(g-g_h)\|_{L^p(T,\omega)} \leq c_2 \|g-g_h\|_{L^p(T,\omega)}$$

elde edilir. Son eşitsizlik, $\omega_{p,\omega}(S_T(g),\cdot) \leq c_2 \omega_{p,\omega}(g,\cdot)$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

2.2.7 Lemma: Eğer $g \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ ise bu durumda,

$$\Omega_{p,\omega}(g^+,\cdot) \le (c_2 + 1/2)\Omega_{p,\omega}(g,\cdot)$$

olur.

İspat: T üzerinde hemen her yerde $g^+ = S_T(g) + \frac{1}{2}g$ olduğundan, 2.2.6 Lemmadan istenen elde edilir.

2.2.8 Lemma: $g \in E^p(U,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. Eğer $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k$, orijinde g nin Taylor serisinin n. kısmi toplamı ise bu durumda her n doğal sayısı için

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k \right\|_{L^p(T,\omega)} \le c_3\Omega_{p,\omega}(g,1/n)$$

olacak biçimde bir $c_3>0$ sayısı vardır.

İspat: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k e^{ik\theta}$, $g \in E^p(U,\omega)$ nın Fourier serisi ve $S_n(g,\theta) = \sum_{k=-n}^{n}\beta_k e^{ik\theta}$, onun n. kısmi toplamı olsun. $g \in E^1(U)$ olduğundan $k<0$ için $\beta_k=0$ ve $k \ge 0$ için $\beta_k=\alpha_k(g)$ olur [3, s:38]. Dolayısıyla,

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k \right\|_{L^p(T,\omega)} = \left\| g(e^{i\theta}) - S_n(g,\theta) \right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

olur. $T_n^*(g,\theta)$, $g(e^{i\theta})$ için $L^p([0,2\pi],\omega)$ da en iyi yaklaşan trigonometrik polinom olsun. Yani,

$$E_{n,p}(g,\omega) := \inf\{ \|g - T\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} : T \in \pi_n \}$$

derecesi n yi aşmayan trigonometrik polinomlarla g ye yaklaşımdaki minimum hatayı gösterirken,

$$\left\| g - T_n^* \right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} = E_{n,p}(g,\omega)$$

olsun. Bu durumda,

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k \right\|_{L^p(T,\omega)} = \left\| g(e^{i\theta}) - S_n(g,\theta) \right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

$$\le \left\| g(e^{i\theta}) - T_n^*(g,\theta) \right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} + \left\| S_n(g - T_n^*,\theta) \right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

olur. Diğer yandan,

$$\left\|S_n(g - T_n^*, \theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \le c_4 \left\|g\left(e^{i\theta}\right) - T_n^*(g,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

olacak biçimde bir $c_4 > 0$ sabiti vardır [9]. Dolayısıyla,

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(g) w^k\right\|_{L^p(T,\omega)} \le (c_4 + 1) E_{n,p}(g,\omega)$$

bulunur. Buradan [7] de ispatlanan

$$E_{n,p}(g,\omega) \le c_5 \Omega_{p,\omega}(g, 1/n)$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(g) w^k\right\|_{L^p(T,\omega)} \le c_3 \Omega_{p,\omega}(g, 1/n)$$

elde edilir. Bu, ispatı tamamlar.

2.2.9 Tanım: $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ olsun.

$$\omega_0 := \omega(\psi(w)), \quad \omega_1 := \omega(\psi_1(w)) w^{-2}$$

olmak üzere 2.2.4 te tanımlanan f_0, f_1 fonksiyonları için

$$\Omega_{p,\omega}(f, \cdot) := \Omega_{p,\omega_0}(f_0, \cdot) + \Omega_{p,\omega_1}(f_1, \cdot)$$

şeklinde tanımlanan $\Omega_p(f,\cdot):(0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ nın p-genelleştirilmiş süreklilik modülü denir.

Burada, $f_0 \in L^p(T,\omega_0)$ ve $f_1 \in L^p(T,\omega_1)$ olduğu kolayca görülebilir.

2.3 $L^p(\Gamma)$ ve $L^p(\Gamma,\omega)$ daki Fonksiyonların p-Faber –Laurent Rasyonel Fonksiyonları

$f \in L^p(\Gamma)$ olsun. 1.3 bölümde tanımlanan $f^+ \in E^p(G)$ ve $f^- \in E^p(G^-)$ fonksiyonlarının her birisi 2.2.4 tanımda verilen f_0, f_1 fonksiyonları cinsinden sırasıyla aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T f_0(w) \frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w) - z} dw, \qquad z \in G$$

$$f^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{T} f_1(w)\frac{w^{-2/p}[\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}dw, \qquad z\in G^{-}$$

$f=f^{+}-f^{-}$ olduğundan 2.1.4 ve 2.1.7 gereğince $f\in L^p(\Gamma)$ fonksiyonuna,

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}-\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

şeklinde gösterilen genelleştirilmiş p- Faber Laurent serisi karşılık gelir. Burada a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları,

$$a_k:=\int_T\frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$\tilde{a}_k:=\int_T\frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

ile tanımlanır. Bu katsayılara $f\in L^p(\Gamma)$ nın p-Faber-Laurent katsayıları denir. $f_0,f_1\in L^p(T)$ olduğundan, $f_0^{+},f_1^{+}\in E^p(U)$ ve $f_0^{-}(\infty)=0$, $f_1^{-}(\infty)=0$ olmak üzere T üzerinde hemen her yerde

$$f_0(w)=f_0^{+}(w)-f_0^{-}(w), \qquad f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w)$$

olur. Bunları kullanarak $k=0,1,2,\ldots$ için,

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_0^{+}(w)}{w^{k+1}}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_0^{-}(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_0^{+}(w)}{w^{k+1}}dw$$

$$\tilde{a}_k=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_1^{+}(w)}{w^{k+1}}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_1^{-}(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_1^{+}(w)}{w^{k+1}}dw$$

elde edilir. Yani, a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları sırasıyla $f_0^{+},f_1^{+}\in E^p(U)$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır. Dolayısıyla, 2.2.2 ve 2.2.3 Lemmalardan, her n doğal sayısı için

$$\left\|f_0^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k w^k\right\|_{L^p(T)}\le\left(\frac{1}{2}+C_p\right)K_p\omega_p\left(f_0,\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left\|f_1^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k w^k\right\|_{L^p(T)}\le\left(\frac{1}{2}+C_p\right)K_p\omega_p\left(f_1,\frac{1}{n+1}\right).$$

elde ederiz.

2.3.1 Tanım: $f\in L^p(\Gamma)$, a_k ve $\tilde{a}_k$ onun p-Faber-Laurent katsayıları olsun. Bu durumda,

$$R_{n,p}(f,z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}-\widetilde{a}_k \widetilde{F}_{k,p}(1/z)$$

rasyonel fonksiyonuna f nin n. dereceden p- Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu denir.

Şimdi, benzer bir tanımı $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ için verelim. $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega\in A_p(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, $f\in L^1(\Gamma)$ olacağından,

$$f^+ : G \to \mathbf{C}, \quad f^+(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$f^- : G^- \to \mathbf{C}, \quad f^-(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

fonksiyonlarını tanımlayabiliriz ve Γ üzerinde hemen her yerde $f(z)=f^+(z)-f^-(z)$ dir. Burada $f^+\in E^p(G,\omega)$ ve $f^-\in E^p(G^-,\omega)$ olduğu 1.4.6 Lemma gereğince açıktır ve bu fonksiyonların herbirisi yukarıda olduğu şekilde 2.2.4 tanımda verilen f_0 ve f_1 fonksiyonları cinsinden sırasıyla aşağıdaki integral gösterimlerine sahiptir.

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(w)\frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z}dw, \qquad z\in G$$

$$f^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T f_1(w)\frac{w^{-2/p}[\psi_1'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}dw, \qquad z\in G^-$$

Dolayısıyla, 2.1.4 ve 2.1.7 gereğince $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ fonksiyonuna,

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}-\widetilde{a}_k \widetilde{F}_{k,p}(1/z)$$

şeklinde bir genelleştirilmiş p- Faber Laurent serisi karşılık gelir. Burada a_k ve $\widetilde{a}_k$ katsayıları,

$$a_k:=\int_T \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$\widetilde{a}_k:=\int_T \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

ile tanımlanır. Bu katsayılara $f\in L^p(\Gamma,\omega)$ nın p-Faber –Laurent katsayıları denir. $f_0\in L^p(T,\omega_0)$ olduğundan,

$$f_0^+(w)\in E^p(U,\omega_0),\ f_0^-(w)\in E^p(U^-,\omega_0)$$

ve $f_1 \in L^p(T,\omega_1)$ olduğundan,

$$f_1^+(w) \in E_p(U,\omega_1),\ \ f_1^-(w) \in E_p(U^-,\omega_1)$$

olur ve T üzerinde hemen her yerde

$$f_0 = f_0^+ - f_0^- \ \text{ ve } \ f_1 = f_1^+ - f_1^-$$

gerçeklenir. Bunları kullanarak,

$$a_k = \int_T \frac{f_o^+(w)}{w^{k+1}} dw \quad \text{ve} \quad \tilde{a}_k = \int_T \frac{f_1^+(w)}{w^{k+1}} dw$$

elde ederiz ki bu katsayılar sırasıyla $f_o^+ \in E^p(U,\omega_o)$ ve $f_1^+ \in E^p(U,\omega_1)$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır. Dolayısıyla 2.2.8 ve 2.2.7 lemmaları ardarda uygulandığında,

$$\left\| f_o^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L^p(T,\omega_o)} \leq c_3\left(\frac{1}{2} + c_2\right)\omega_{p,\omega_o}\left(f_o, \frac{1}{n}\right)$$

$$\left\| f_1^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k w^k \right\|_{L^p(T,\omega_1)} \leq c_3\left(\frac{1}{2} + c_2\right)\omega_{p,\omega_1}\left(f_1, \frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz.

2.3.2 Tanım: $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve a_k ve $\tilde{a}_k$ onun p-Faber-Laurent katsayıları olsun. Bu durumda,

$$R_{n,p}(f,z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} - \tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

rasyonel fonksiyonuna f nin n. dereceden p- Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu denir.

Şimdi, $f \in E^p(G,\omega)$ olsun. 1.4.3 Tanım gereği, $f \in E^1(G)$ olacağından her $z \in G$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_T f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p} \frac{(\psi'(w))^{1-1/p}}{\psi(w) - z} dw$$

elde ederiz. Diğer yandan, $w \in U^-$ ve $z \in G$ için,

$$\frac{(\psi'(w))^{1-1/p}}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

olduğundan eğer

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p}}{w^{k+1}}\,dw$$

dersek $f \in E^p(G,\omega)$ fonksiyonuna $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)F_{k,p}(z)$ serisinin karşılık geldiğini görürüz ve

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)F_{k,p}(z)$$

olarak yazarız. Bu seriye f nin p-Faber polinomu serisi ve $a_k(f)$ katsayılarına f nin p-Faber katsayıları denir.

3. AĞIRLIKLI $L^p(\Gamma,\omega)$ UZAYLARINDA FABER-LAURENT RASYONEL FONKSİYONLARIYLA YAKLAŞIM

3.1 Teorem: $f \in L^p(\Gamma)$ ve $R_{n,p}(f,z)$ bu fonksiyonun n. dereceden p-Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu olsun. Bu durumda her n doğal sayısı ve p>1 için,

$$\left\|f(z)-R_{n,p}(f,z)\right\|_{L^p(\Gamma)} \le A(p,\Gamma)\Omega_p\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

olacak biçimde sadece p ve Γ ya bağlı bir A(p,Γ)>0 sayısı vardır.

İspat: Biliyoruz ki eğer $f \in L^p(\Gamma)$ ise Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z)=f^+(z)-f^-(z)$$

geçerlidir. Şimdi,

$$\left\|f^+(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p}(z)\right\|_{L^p(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2}+C(p,\Gamma)\right)\left\|f_o{}^+-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right\|_{L^p(T)}$$

$$\left\|f^-(z)-\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a}_k\widetilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^p(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2}+C(p,\Gamma)\right)\left\|f_1{}^+(w)-\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a}_kw^k\right\|_{L^p(T)}$$

eşitsizliklerinin doğruluğunu gösterelim. 2.2.4 de tanımladığımız,

$$f_o(w)=f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p}$$

fonksiyonunda w yerine $\phi(z)$ ve

$$f_1(w)=f(\psi_1(w))(\psi_1'(w))^{1/p}w^{2/p}$$

fonksiyonunda da w yerine $\phi_1(z)$ koyarak,

$$f(z)=f_o(\phi(z))(\phi'(z))^{1/p}$$

$$f(z)=f_1(\phi_1(z))(\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p}$$

elde ederiz. Buradan da Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f(z)=\left[f_o{}^+(\phi(z))-f_o{}^-(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}$$

$$f(z)=\left[f_1{}^+(\phi_1(z))-f_1{}^-(\phi_1(z))\right](\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p}$$

eşitliklerine ulaşılır. $z' \in G$ olsun. 2.1.5 Lemma gereğince k=0,1,2,… için,

$$F_{k,p}(z') = (\phi(z'))^k (\phi'(z'))^{1/p} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\phi(\zeta))^k (\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta$$

olduğunu biliyoruz. Bunu ve

$$f(z) = \left[f_o^+(\phi(z)) - f_o^-(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}$$

eşitliğini kullanarak,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z') = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(\phi(z))^k (\phi'(z))^{1/p} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\phi(\zeta))^k (\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (\phi(z'))^k (\phi'(z'))^{1/p} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (\phi(\zeta))^k (\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{-f_o^+(\phi(\zeta))(\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} + \frac{f_o^-(\phi(\zeta))(\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} + \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} \right] d\zeta$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (\phi(z'))^k (\phi'(z'))^{1/p} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k (\phi(\zeta))^k - f_o^+(\phi(\zeta)) \right] (\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_o^-(\phi(\zeta))(\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta$$

elde ederiz. $f_o^-(\phi(\zeta))(\phi'(\zeta))^{1/p}$ fonksiyonu $E^p(G^-)$ uzayındandır ve sonsuzda bir sıfıra sahiptir. Dolayısıyla, sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülü gereğince,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_o^-(\phi(\zeta))(\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta = -f_o^-(\phi(z'))(\phi'(z'))^{1/p}$$

olur ve

$$f^-(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z') = \sum_{k=0}^{n} a_k (\phi(z'))^k (\phi'(z'))^{1/p} + f^-(z')$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k (\phi(\zeta))^k - f_o^+(\phi(\zeta)) \right] (\phi'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} d\zeta - f_o^-(\phi(z'))(\phi'(z'))^{1/p}$$

elde edilir. Burada hemen her $z\in\Gamma$ için Γ nın dışından açısal olarak limit alırsak ve Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z),$$

$$f^{-}(z)=S(f(z))-\frac{1}{2}f(z)$$

$$f(z)=\left[f_0^{+}(\phi(z))-f_0^{-}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}$$

olduğunu dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p}(z) &= f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k(\phi'(z))^{1/p}\\
&-S\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k-f_0^{+}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k-f_0^{+}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}+f_0^{-}(\phi(z))(\phi'(z))^{1/p}-f^{-}(z)\\
&=\left[f_0^{+}(\phi(z))-f_0^{-}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}-\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k(\phi'(z))^{1/p}\\
&+S\left\{\left[f_0^{+}(\phi(z))-\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k\right](\phi'(z))^{1/p}\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k-f_0^{+}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}+f_0^{-}(\phi(z))(\phi'(z))^{1/p}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada gerekli düzenlemeleri yaparak,

$$\begin{aligned}
f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p}(z) &= S\left\{\left[f_0^{+}(\phi(z))-\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k\right](\phi'(z))^{1/p}\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left[f_0^{+}(\phi(z))-\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k\right](\phi'(z))^{1/p}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $S:L^p(\Gamma)\to L^p(\Gamma)$ singüler operatörü sınırlı ve

$$\left\|f_0^{+}(\phi(z))-\sum_{k=0}^{n}a_k(\phi(z))^k(\phi'(z))^{1/p}\right\|_{L^p(\Gamma)}=\left\|f_0^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right\|_{L^p(T)}$$

olduğundan,

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p}(z)\right\|_{L^p(\Gamma)}\leq\left(\frac{1}{2}+C(p,\Gamma)\right)\left\|f_0^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right\|_{L^p(T)}$$

elde edilir.

Benzer bir yoldan, $z' \in G - \{0\}$ için 2.1.8 Lemma ve

$$f(z) = \left[f_1^+(\phi_1(z)) - f_1^-(\phi_1(z))\right](\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p}$$

eşitliği kullanılarak ve Γ nın içinden açısal limit alınarak,

$$\left\| f^-(z) - \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k \widetilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L^p(\Gamma)} \le \left(\frac{1}{2} + C(p,\Gamma)\right) \left\| f_1^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k w^k \right\|_{L^p(T)}$$

eşitsizliğinin doğruluğu ispatlanabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left\| f(z) - R_{n,p}(f,z) \right\|_{L^p(\Gamma)} &\le \left\| f^+(z) - f^-(z) - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=0}^{n} - \widetilde{a}_k \widetilde{F}_{k,p}(z) \right) \right\|_{L^p(T)} \\
&\le \left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) \right\|_{L^p(\Gamma)} + \left\| f^-(z) - \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k \widetilde{F}_{k,p}(z) \right\|_{L^p(\Gamma)} \\
&\le \left(\frac{1}{2} + C(p,\Gamma)\right) \left(\left\| f_o^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L^p(T)} + \left\| f_1^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k w^k \right\|_{L^p(T)} \right) \\
&\le \left(\frac{1}{2} + C(p,\Gamma)\right) K_p \left(\frac{1}{2} + c_p\right) \left(\omega_p\left(f_o, \frac{1}{n+1}\right) + \omega_p\left(f_1, \frac{1}{n+1}\right) \right) \\
&\le \left(\frac{1}{2} + C(p,\Gamma)\right) K_p \left(\frac{1}{2} + c_p\right) \Omega_p\left(f, \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$A(p,\Gamma) := \left(\frac{1}{2} + C(p,\Gamma)\right) K_p \left(\frac{1}{2} + c_p\right)$$

alınırsa her n doğal sayısı için,

$$\left\| f(z) - R_{n,p}(f,z) \right\|_{L^p(\Gamma)} \le A(p,\Gamma)\, \Omega_p\left(f, \frac{1}{n+1}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.2 Teorem: $S_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(f) F_{k.p}(z)$, $\quad f \in E^p(G,\omega)$ fonksiyonunun p-Faber polinomu serisinin n. kısmi toplamı ve $w \in T$ için

$$\omega_0(w) := \omega(\psi(w)) \text{ ve } f_o(w) := f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p}$$

olsun. Bu durumda, eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $\omega_o \in A_p(T)$ ise her n doğal sayısı ve p>1 için,

$$\|f - S_n(f,\cdot)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le c_6\, \Omega_{p,\omega_o}\left(f_o, \frac{1}{n}\right)$$

olacak biçimde bir c_6 sabiti vardır.

İspat: $f_0 \in L^p(T, \omega_o)$ olduğunu biliyoruz.

$$f_o^+(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_o(\tau)}{\tau - w}\, d\tau, \qquad w \in U$$

$$f_o^-(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_o(\tau)}{\tau - w}\, d\tau, \qquad w \in U^-$$

şeklinde tanımlanan f_0^+ ve f_0^- fonksiyonlarını göz önüne alalım. $a_k(f)$, $f \in E^p(G,\omega)$ fonksiyonunun k. p-Faber katsayısı olsun. 1.4.6 Lemma gereğince $f_o^+ \in E^p(U, \omega_o)$ ve $f_o^- \in E^p(U^-, \omega_o)$ olur. Bununla beraber, $f_o^-(\infty) = 0$, T üzerinde hemen her yerde $f_0 = f_0^+ - f_0^-$ ve

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_o(\tau)}{\tau^{k+1}}\, d\tau$$

olduğundan

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_o^+(\tau)}{\tau^{k+1}}\, d\tau$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f \in E^p(G,\omega)$ fonksiyonunun k. p-Faber katsayısının, $f_o^+ \in E^p(U, \omega_o)$ fonksiyonunun orijindeki k. Taylor katsayısı olduğu görülür. $f \in E^p(G,\omega)$ olduğundan her $z' \in G^-$ için $\int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z'}\, d\tau = 0$ olur. Diğer yandan, T üzerinde hemen her yerde $f_0 = f_0^+ - f_0^-$ olduğu göz önüne alınırsa Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z) = \left[f_o^+(\phi(z)) - f_o^-(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}$$

elde edilir. Şimdi, bir $z' \in G^-$ alalım. 2.1.5 Lemma ve son eşitlik kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z') = (\phi'(z'))^{1/p} \sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(z'))^k$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\phi'(\zeta))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(\zeta))^k}{\zeta - z'}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$= (\phi'(z'))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(z'))^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\phi'(\zeta))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(\zeta))^k}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\phi'(\zeta))^{1/p} f_0^{+}(\phi(\zeta))}{\zeta - z'}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\phi'(\zeta))^{1/p} f_0^{-}(\phi(\zeta))}{\zeta - z'}d\zeta$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\phi'(\zeta))^{1/p} f_0^{-}(\phi(\zeta))}{\zeta - z'}d\zeta = -(\phi'(z'))^{1/p} f_0^{-}(\phi(z'))$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z') = (\phi'(z'))^{1/p}\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(z'))^k$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\phi'(\zeta))^{1/p}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(\zeta))^k - f_0^{+}(\phi(\zeta))\right]}{\zeta - z'}d\zeta - (\phi'(z'))^{1/p} f_0^{-}(\phi(z'))$$

elde edilir. Şimdi, Γ nın dışından tüm açısal yollar boyunca $z' \to z$ limitini alarak, Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) = (\phi'(z))^{1/p}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(z))^k - f_0^{+}(\phi(z))\right]$$

$$+\left[f_0^{+}(\phi(z)) - f_0^{-}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p} + S\left\{(\phi'(z))^{1/p}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k(f)(\phi(z))^k - f_0^{+}(\phi(z))\right]\right\}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece Minkowski eşitsizliği, 1.4.4 Teorem ve değişken dönüşümüyle ,

$$\|f - S_n(f,\cdot)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\left\| f_0^{+}(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k(f) w^k \right\|_{L^p(T,\omega_0)}$$

eşitsizliği elde edilir ve 2.2.7, 2.2.8 Lemmaları ispatı tamamlar.

3.3 Teorem: $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $R_{n,p}(f,z)$ bu fonksiyonun n. dereceden p-Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu olsun. $w \in T$ için

$$\omega_o(w) := \omega(\psi(w)) \quad \text{ve} \quad \omega_1(w) := \omega(\psi_1(w))\,w^{-2}$$

olmak üzere

$$f_o(w) := f(\psi(w))(\psi'(w))^{1/p}$$

$$f_1(w) := f(\psi_1(w))\left(\psi_1'(w)\right)^{1/p} w^{2/p}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda, eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $\omega_o, \omega_1 \in A_p(T)$ ise her n doğal sayısı ve p>1 için,

$$\left\| f(z) - R_{n,p}(f,z) \right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le C\,\Omega_p\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat: $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ ise Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi,

$$\left\| f^-(z) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le \left(\frac{1}{2} + c_1\right) \left\| f_1^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k w^k \right\|_{L^p(T,\omega_1)}$$

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) \right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le \left(\frac{1}{2} + c_1\right) \left\| f_o^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L^p(T,\omega_o)}$$

eşitliklerinin sağlandığını gösterelim.

$f_o \in L^p(T, \omega_o)$ olduğundan 1.4.6 Lemma gereğince $f_o^+ \in E^p(U, \omega_o)$, $f_o^- \in E^p(U^-, \omega_o)$, $f_o^-(\infty) = 0$ ve Γ üzerinde hemen her yerde

$$f_o(w) = f_o^+(w) - f_o^-(w)$$

sağlanır. Yine, $f_1 \in L^p(T, \omega_1)$ olduğundan 1.4.6 Lemma gereğince $f_1^+ \in E^p(U, \omega_1)$, $f_1^- \in E^p(U^-, \omega_1)$, $f_1^-(\infty) = 0$ ve Γ üzerinde hemen her yerde

$$f_o(w) = f_o^+(w) - f_o^-(w)$$

sağlanır. Bunları kullanarak,

$$f(z) = \left[f_o^+(\phi(z)) - f_o^-(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}$$

$$f(z) = \left[f_1^+(\phi_1(z)) - f_1^-(\phi_1(z))\right](\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p}$$

eşitliklerini elde ederiz. Şimdi, $z' \in G - \{0\}$ olsun. 2.1.8 Lemma gereğince,

$$F_{k,p}(1/z') = (\phi_1(z'))^{k-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\phi_1(\zeta))^{k-2/p}(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'}d\zeta$$

olduğunu biliyoruz. Bunu ve

$$f(z) = \left[f_1^+(\phi_1(z)) - f_1^-(\phi_1(z))\right](\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p}$$

eşitliğini kullanarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z') = \sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z'))^{k-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(\zeta))^{k-2/p}(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z'))^{k-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1^+(\phi_1(\zeta))(\phi_1(\zeta))^{-2/p}(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(f_1^+(\phi_1(\zeta))(\phi_1(\zeta))^{-2/p} - \sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(\zeta))^{k-2/p}\right)(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1^-(\phi_1(\zeta))(\phi_1(\zeta))^{-2/p}(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'} - \frac{f_1^+(\phi_1(\zeta))(\phi_1(\zeta))^{-2/p}(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta - z'}d\zeta$$

elde ederiz.

$f_1^+ \in E^p(U, \omega_1)$ olduğundan,

$$f_1^+(\phi_1(z))(\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p} \in E^p(G, \omega)$$

ve $f_1^- \in E^p(U^-, \omega_1)$ olduğundan,

$$f_1^-(\phi_1(z))(\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p} \in E^p(G, \omega)$$

olur. Cauchy integral formülünden,

$$\int_\Gamma \frac{f_1^+(\phi_1(\zeta))(\phi_1'(\zeta))^{1/p}(\phi_1(\zeta))^{-2/p}}{\zeta - z'}d\zeta = f_1^+(\phi_1(z'))(\phi_1'(z'))^{1/p}(\phi_1(z'))^{-2/p}$$

$$\int_\Gamma \frac{f_1^-(\phi_1(\zeta))(\phi_1'(\zeta))^{1/p}(\phi_1(\zeta))^{-2/p}}{\zeta - z'}d\zeta = f_1^-(\phi_1(z'))(\phi_1'(z'))^{1/p}(\phi_1(z'))^{-2/p}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$f^+(z') := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta$$

olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}(1/z') = \sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z'))^{k-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p} + f^+(z')$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\left(f_1^+(\phi_1(\zeta))(\phi_1(\zeta))^{-2/p}-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(\zeta))^{k-2/p}\right)(\phi_1'(\zeta))^{1/p}}{\zeta-z'}d\zeta$$

$$-2f_1^+(\phi_1(z'))(\phi_1(z'))^{-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p}+f_1^-(\phi_1(z'))(\phi_1(z'))^{-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p}$$

elde edilir. Burada, hemen her $z\in\Gamma$ için Γ nın içinden açısal olarak $z'\to z$ limitini alır ve

$$f(z)=\left[f_1^+(\phi_1(z))-f_1^-(\phi_1(z))\right](\phi_1'(z))^{1/p}(\phi_1(z))^{-2/p}$$

eşitliğini kullanırsak,

$$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z'}\right)-f^-(z')=\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z'))^{k-2/p}(\phi_1'(z'))^{1/p}+$$

$$+S\left\{\left[f_1^+(\phi_1(z))(\phi_1(z))^{-2/p}-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z))^{k-2/p}\right](\phi_1'(z))^{1/p}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_1^+(\phi_1(z))(\phi_1(z))^{-2/p}-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z))^{k-2/p}\right](\phi_1'(z))^{1/p}$$

$$-2f_1^+(\phi_1(z))(\phi_1(z))^{-2/p}(\phi_1'(z))^{1/p}+f_1^-(\phi_1(z))(\phi_1(z))^{-2/p}(\phi_1'(z))^{1/p}$$

$$+\left[f_1^+(\phi_1(z))-f_1^-(\phi_1(z))\right](\phi_1(z))^{-2/p}(\phi_1'(z))^{1/p}$$

elde ederiz. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z'}\right)-f^-(z')=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z))^{k-2/p}-f_1^+(\phi_1(z))(\phi_1(z))^{-2/p}\right](\phi_1'(z))^{1/p}$$

$$+S\left\{\left[f_1^+(\phi_1(z))(\phi_1(z))^{-2/p}-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z))^{k-2/p}\right](\phi_1'(z))^{1/p}\right\}$$

bulunur.

$$\left\|\left(f_1^+(\phi_1(z))^{-2/p}-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(\phi_1(z))^{k-2/p}\right)(\phi_1'(z))^{1/p}\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}=\left\|f_1^+(w)-\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k w^k\right\|_{L^p(T,\omega_1)}$$

eşitliği ve 1.4.4 teorem,

$$\left\| f^{-}(z)-\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a}_k\widetilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le \left(\frac{1}{2}+c_1\right)\left\| f_1^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a}_k w^k\right\|_{L^p(T,\omega_1)}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterir. Benzer bir yoldan $z' \in G$ için 2.1.5 Lemma ve

$$f(z)=\left[f_o^{+}(\phi(z))-f_o^{-}(\phi(z))\right](\phi'(z))^{1/p}$$

eşitliği kullanılıp, Γ nın dışından açısal limit alınarak,

$$\left\| f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k F_{k,p}(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le \left(\frac{1}{2}+c_1\right)\left\| f_o^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k w^k\right\|_{L^p(T,\omega_o)}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Son iki eşitsizlikten,

$$\begin{aligned}
\left\| f(z)-R_{n,p}(f,z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} &\le \left\| f^{+}(z)-f^{-}(z)-\left(\sum_{k=0}^{n}a_k F_{k,p}(z)+\sum_{k=0}^{n}-\widetilde{a}_k\widetilde{F}_{k,p}(z)\right)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \\
&\le \left\| f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k F_{k,p}(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}+\left\| f^{-}(z)-\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a}_k\widetilde{F}_{k,p}(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \\
&\le \left(\frac{1}{2}+c_1\right)\left(\left\| f_o^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k w^k\right\|_{L^p(T,\omega_o)}+\left\| f_1^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a}_k w^k\right\|_{L^p(T,\omega_1)}\right) \\
&\le \left(\frac{1}{2}+c_1\right)c_3\left(\frac{1}{2}+c_2\right)\left(\Omega_{p,\omega_o}\left(f_o,\frac{1}{n}\right)+\Omega_{p,\omega_1}\left(f_1,\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki burada $C:=\left(\frac{1}{2}+c_1\right)c_3\left(\frac{1}{2}+c_2\right)$ denirse,

$$\left\| f(z)-R_{n,p}(f,z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le C\,\Omega_p\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

olur ve ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Çavuş, A., Israfilov, D.M., Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L_p(\Gamma)$ with $1<p<\infty$, Approximation Theory App., Vol.11, No.1(1995), p. 105-118.

[2] David, G., Operateurs integraux singulers sur certaines courbes du plan complexe, Ann. Sci. Ecol. Norm. Super. 4, Ser. 17 (1984), p. 157.

[3] Duren, P.L, Theory of H^p- Spaces, Academic Press (1970), p. 38.

[4] Dyn'kin, E.M., Osilenker, B.P., Hilbert transformations and Calderon-Zygmund's theory (Russian), Collections of Science and Technics, Mathematical Analysis, Vol.21, Moscow (1983), p.42-129.

[5] Goluzin, G.M, Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translations of Mathematical Monographs, Vol.26, Amer.Math. Soc (1969), p. 382-453.

[6] Gonzalez, M.O., Classical Complex Analysis, Marcel Dekker, Inc. (1992), p. 486.

[7] Haciyava, E.A., Investigation the properties of functions with quasimonotone of Fourier coeffients in generalized Nikolsky-Besov spaces(Russian), Author's Summary Candidates dissertation, Tbilisi(1986), p. 53.

[8] Havin, V.P., Boundary properties of Cauchy type and conjugate harmonic functions in region with rectifiable boundary (Russian), Math. Sb. (N.S.), 68(110), (1965), p. 499-517

[9] Hunt, R.A., Young, W.S., A weighted norm inequalities for Fourier seies, Bull. Amer. Soc.,Vol.80, No.2 (1974), p. 274-277.

[10] Israfilov, D.M., Approximation by p-Faber polynomials in the Weighted Smirnov Class $E^p(G, \omega)$ and the Bieberbach Polinomials, Constructive Approximation, Vol 17, Springer-Verlag New York (2001), p. 335-351.

[11] Koosis, P., Introduction to H_p Spaces, Cambridge University Press (1998), p. 19.

[12] Markushevich, A.I., Theory of functions of a complex variable III, Prentice hall, Inc. (1967), p. 8-104.

[13] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975), p. 1-24.

[14] Stephanetz, A.I. Classifications and Approximations of Periodic functions (Russian), Naukova Dumka, Kiev (1987), p. 205-207.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU DOKÜMANTASYON MERKEZİ