

33567

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**Bilgisayar Destekli Olarak  
Çeşitli Geometrik Şekillere Sahip  
Gözenekli Ortamlarda  
Kurutma Prosesinin İncelenmesi**

Doktora Tezi

**Mustafa GÜNEŞ**

Mak.Y.Müh.

Balıkesir, Eylül 1994

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**Bilgisayar Destekli Olarak  
Çeşitli Geometrik Şekillere Sahip  
Gözenekli Ortamlarda  
Kurutma Prosesinin İncelenmesi**

Doktora Tezi

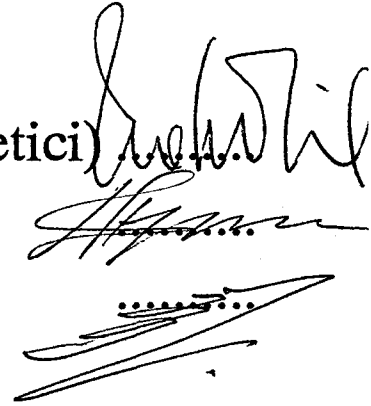
**Mustafa GÜNEŞ**  
Mak.Y.Müh.

Sınav günü :25.11.1994

Jüri Üyeleri :Prof.Dr. Eralp ÖZİL (Yönetici)

Prof.Dr. Doğan ÖZGÜR

Prof. Sabri SAVAŞ



Balıkesir, Eylül 1994

Doktora konumun belirlenmesinden sonra literatür araştırma devresinde, kurutma çalışmalarının en çok yayınlandığı *Int.J.Heat and Mass Transfer* isimli dergide yer alan makalelerin çoğunda A.V.Luikov ismine sürekli rastlamış olmam çalışmalarımın bu yazarın teorisi üzerinde yoğunlaşmasına neden oldu. Sayısal çözüm yöntemleri üzerine yapılan çalışmaların yayınlandığı *Int.Journal for Numerical Methods in Engineering* isimli dergide sonlu elemanlar yönteminin yoğun olarak kullanılmış olması ise *Luikov Teorisi*'ni *Sonlu Elemanlar Yöntemi*'yle çözme fikrini oluşturdu. Bu çalışmanın [eksiklerine rağmen] konuyla ilgilenen araştırmacı ve mühendislere faydalı olmasını diliyorum.

Böyle bir konuda çalışma yapma olanağını Hocam *Prof.Dr.Eralp ÖZİL* sağlamış ve çalışmalarına yaptığı olumlu eleştiriler ve katkılar bu tezin içeriğini belirlemiştir. Bölüm Başkanımız *Prof.Sabri SAVAŞ* lisans öğrenimimizden bu yana çalışmalarımızda bizleri sürekli teşvik etmiş ve desteklemiştir. Karşılaştığım matematiksel güçlükleri aşmamda *Erdal AKAS*, şekillerin çiziminde ise *M.Fahir ATALAYA* ve *Ali ORAL* yardımcı olmuşlardır. Kendilerine teşekkür etmeyi bir borç biliyorum.

Bu çalışmada mevcut gözenekli ortamda kurutma teorilerinden literatürde en çok kullanılanı seçilerek bu teoriye ait denklemlerin sonlu elemanlar yöntemiyle sayısal olarak çözümünü yapan PC uyumlu bir bilgisayar programı hazırlanmış ve örnek uygulamalar yapılmış, konuyla ilgili verilmesi gereken teorik bilgilere de kısaca değinilerek daha fazla bilgi için ilgili referanslar metin içinde aktarılmıştır.

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde kurutmanın tanımı yapıp ekonomik önemi vurgulanarak poroz ortam ve kurutma mekanizmasının açıklanması üzerinde kısaca durulmuştur.

İkinci bölümde çeşitli kurutma modelleri kısaca özetlenerek bu modellerin kullanıldığı analitik ve sayısal çalışmaların bir literatür taraması verilmiştir. Daha önceki yıllarda ilk adımları atılsa da kurutma teorilerinin ana yapıları 1930'lardan sonra kurulduğundan burada anlatılan çalışmalar 1930 öncesi ve sonrası olmak üzere iki ayrı devrede incelenmiştir.

En çok kullanılan kurutma teorilerinden Luikov ve Whitaker teorileri üçüncü bölümde karşılaştırılarak incelenmiş ve neticede iki kısmi diferansiyel denklemden oluşan ve formu sayısal yöntemlerle çözüme daha uygun olan Luikov Teorisi esas alınıp ana kabulleri üzerinde kısaca durularak sınırlamaları özetlenmiş ve

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = (k_q + \epsilon \lambda k_n \delta) \nabla^2 t + \epsilon \lambda k_n \nabla^2 u'$$

$$\rho_0 c_n \frac{\partial u'}{\partial \tau} = k_n \delta \nabla^2 t + k_n \nabla^2 u'$$

şeklindeki ısı ve kütle transferi denklemleri

$$t = t_w$$

$\Gamma_1$ 'de

$$k_q \nabla t \vec{n} + j_q + \alpha_q (t - t_w) + (1 - \epsilon) \lambda \alpha_n (u' - u'_w) = 0$$

$\Gamma_2$ 'de

$$u' = u'_w$$

$\Gamma_3$ 'de

$$k_n \nabla u \vec{n} + j_n + k_n \delta \nabla t \vec{n} + \alpha_n (u' - u'_m) = 0$$

$\Gamma_4$ 'de

sınır şartlarıyla birlikte tanıtılmıştır.

Bölüm 3'de verilen kurutma denklemlerinin analitik çözümlerinin zorluğuna işaret edilen Bölüm 4'de, bu tür denklemlerin çözümlerinin sayısal yöntemlerle yapılması gerektiği vurgulanarak son yıllarda bilgisayarların hızlı gelişimine paralel olarak geniş bir uygulama alanı bulan sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri kısaca tanıtılarak bu çalışmada kullanılacak sayısal yöntemi seçmek amacıyla örnek bir ısı transferi probleminin her iki yöntemle elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır. Tam çözüme yaklaşımda sonlu elemanlar yönteminin sonlu farklar yöntemine göre daha iyi sonuç vermesi nedeniyle diğer avantajları da gözönüne alınarak sayısal çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar yöntemi seçilmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminin kurutma denklemlerinin çözümünde kullanılabilmesi için gerekli bilgiler Bölüm 5'de tanıtılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemiyle ilgili verilen bilgiler kurutma denklemlerine benzerliği nedeniyle ısı transferi denklemler esas alınarak aktarılmıştır.

Bölüm 6'da karışık geometri, özellikleri yönleri göre değişen veya değişik malzemelerin sözkonusu olduğu problemlere kurutma denklemlerinin uygulanabilmesi için [Bölüm 5'de verilen bilgilerin ışığında] çeşitli kurutma problemleri için sonlu elemanlar formülasyonu yapılmış ve eleman matris denklemleri elde edilmiştir.

Bölüm 7'de bu çalışmada hazırlanan bilgisayar programının özellikleri tanıtılıp programın çalıştırılması hakkında bilgi verilmiş ve örnek problemlere ait uygulama sonuçları gösterilmiştir.

Tartışma ve sonuç bölümünde ise çalışmanın sonuçları değerlendirilerek özeleştirisi yapılmış ve bu noktadan sonra yapılabilecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

# Summary

---

This study is concerned with the solution of combined heat and mass transfer in a porous medium of an arbitrary shape. Existing theories are reviewed and a PC compatible computer program employing finite elements method, has been developed.

There are eight chapters in this thesis. The first chapter defines the process of drying and emphasis its importance from economics point of view.

Existing drying theories are reviewed in the second chapter with due emphasis on numerical methods. Luikov and Whitaker theories which are the two most widely used approaches are discussed and compared in Chapter 3. Luikov's approach has been chosen two form the basis of thesis and reasons for this choise are presented. Basically, Luikov's method is found to be more suitable for numerical methods. Heat and mass transfer equations governing porous media are given by the following:

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = (k_q + \epsilon \lambda k_n \delta) \nabla^2 t + \epsilon \lambda k_n \nabla^2 u'$$

$$\rho_0 c_n \frac{\partial u'}{\partial \tau} = k_n \delta \nabla^2 t + k_n \nabla^2 u'$$

A general set of boundary conditions for these equations are;

$$t = t_w \quad \text{on } \Gamma_1$$

$$k_q \nabla t \bar{n} + j_q + \alpha_q (t - t_w) + (1 - \epsilon) \lambda \alpha_n (u' - u'_w) = 0 \quad \text{on } \Gamma_2$$

$$u' = u'_w \quad \text{on } \Gamma_3$$

$$k_n \nabla u' \bar{n} + j_n + k_n \delta \nabla t \bar{n} + \alpha_n (u' - u'_w) = 0 \quad \text{on } \Gamma_4$$

Chapter 4, is devoted to comparison of numerical methods, namely finite differences and finite elements. Comparison of a very few available analytical solutions of porous media related problems with numerical methods have shown that finite element method yields better results and it can readily be made available in computer environment, and this aspect of the finite element method is discussed in great length in Chapter 5.

Chapter 6, takes various drying problems of complex geometries and shows the solution steps employing finite element method.

Chapter 7, presents the computer program developed as a result of the present work. Its advantages and disadvantages are discussed and the results for sample problems are given.

Chapter 8, the final chapter; summarized the work accomplished, discusses the steps of solving such complex problems with finite element methods, gives the important hints on the use of the computer program and the method to achieve best results in shortest computer time. Also, further possible improvements to the existing work are discussed.



# İçindekiler

Önsöz .....	iii
Özet .....	iv
Summary .....	vi
İçindekiler .....	viii
Tablo Listesi .....	xi
Şekil Listesi .....	xii
Semboller ve Terimler .....	xiv

<b>Bölüm I Giriş</b> .....	1
A. Gözenekli Ortam .....	3
B. Kurutma Mekanizması .....	4
1. Denge .....	4
2. Kurutma Hızı Eğrileri .....	5
3. Sabit Kurutma Hızı Devresi .....	7
4. Sabit Kurutma Hızı Devresi Sonu .....	8
5. Azalan Kurutma Hızı Devresi .....	8

<b>Bölüm II Gözenekli Ortamda Kurutma Çalışmalarının Tarihsel Gelişimi</b> .....	11
A. 1930 Öncesi Kurutma Teorileri .....	11
B. 1930'lardan Sonraki Kurutma Teorileri .....	12
1. Sıvı-Difüzyon Teorisi .....	12
2. Kapiler Teori .....	13
3. Krischer Teorisi .....	15
4. Philip ve DeVries Teorisi .....	16
5. Luikov Teorisi .....	16
6. Whitaker Teorisi .....	16
C. Diğer Çalışmalar .....	17



<b>Bölüm III Kurutmanın Genel Teorisi</b> .....	20
A. Isı ve Kütle Transfer Denklemleri .....	21
B. Isı ve Kütle Transferinin Sınır Şartları .....	26
<b>Bölüm IV Çözüm Yöntemlerine Giriş</b> .....	28
A. Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri .....	28
B. Sonlu Farklar Yaklaşımı .....	30
C. Sonlu Elemanlar Yaklaşımı .....	31
D. Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin Karşılaştırılması .....	33
<b>Bölüm V Sonlu Elemanlar Yöntemi</b> .....	36
A. Sonlu Elemanlar Yönteminde İşlem Adımları .....	36
1. Diferansiyel Denklemler ve Sınır Şartlarının Formülasyonu .....	36
a. Direkt Yöntem .....	37
b. Varyasyonel Yöntem .....	37
c. Ağırlıklı Artıklar Yöntemi .....	37
2. Problemin Sonlu Elemanlara Bölünmesi .....	39
3. İnterpolasyon [şekil, biçim] Fonksiyonunun Seçimi .....	40
a. Bir-Boyutlu Basit Eleman .....	40
(1). Bir-Boyutlu Eleman İnterpolasyon Fonksiyonu .....	40
(2). Bir-Boyutlu Piramit Fonksiyonları .....	41
(3). Bir-Boyutlu Eleman Türevleri ve İntegralleri .....	42
b. İki-Boyutlu Basit Eleman .....	45
(1). İki-Boyutlu Eleman İnterpolasyon Fonksiyonu .....	45
(2). İki-Boyutlu Piramit Fonksiyonları .....	47
(3). İki-Boyutlu Eleman Türevleri ve İntegralleri .....	48
4. Eleman Özelliklerinin Belirlenmesi .....	51
5. Sistem Denklemlerini Oluşturmak İçin Eleman Özelliklerinin Birleştirilmesi .....	51
6. Sistem Denklemlerinin Çözümü .....	51
7. Sonucun İncelenmesi .....	52
B. Model Denklemler ve Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması .....	52
1. Bir-Boyutlu Problemler .....	52
2. İki-Boyutlu Problemler .....	55
3. Eksenel Simetrik [Üç-Boyutlu] Problemler .....	59
4. Zamana Bağlı Problemler .....	64
<b>Bölüm VI Gözenekli Ortamda</b>	
<b>Kurutma Probleminin Formülasyonu</b> .....	71
A. Problemin Tanımı .....	71
B. İncelenen Kurutma Problemleri Çeşitleri ve Çözüm Yöntemleri .....	96
1. Kararsız Problemler .....	96
2. Kararlı Problemler .....	97

<b>Bölüm VII Bilgisayar Programı ve Örnek Uygulamalar</b> .....	98
A. Programın Akış Diyagramı .....	100
B. KPSEYAP'ın Genel Özellikleri .....	103
C. Programın Yapısı ve Yardımcı Modüller .....	106
1. Veri Giriş Modülü .....	107
2. Hesap Modülü .....	110
3. Rapor Modülü .....	111
C. Örnek Uygulamalar .....	112
<b>Bölüm VIII Tartışma ve Sonuç</b> .....	134
Referans Listesi .....	137
Özgeçmiş .....	142



# Tablo Listesi

---

	Sayfa	
Tablo 4.1	İncelenen 2-B karşılaştırmalı problemin sonuçları	34
Tablo 5.1	Uzunluk koordinatlarının integralleri	45
Tablo 5.2	Alan koordinatlarının integralleri	50
Tablo 5.3	İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı kondüksiyon probleminin değişik zaman adımlarında elde edilen iki elemanlı ileri farklar çözümlerinin tam çözümlerle karşılaştırılması.	69
Tablo 7.1	Kullanılacak PC'nin minimum donanım ve yazılım gereksinimi	99
Tablo 7.2	Bilgi giriş ekranında düzeltme için kontrol tuş vuruşları	105

# Şekil Listesi

	Sayfa	
Şekil 1.1	Gözenekli Ortam	3
Şekil 1.2	Oda Sıcaklığında Bazı Katıların Denge Eğrileri	5
Şekil 1.3	Zamanın Fonksiyonu Olarak Kurutma Hızı Eğrisi	6
Şekil 1.4	Özgül Nemin Fonksiyonu Olarak Kurutma Hızı Eğrisi	7
Şekil 1.5	Kurutmada Katı Maddede Arayüzey.	8
Şekil 2.1	Kum Tabakasının Kuruması Esnasında Nem Dağılımı.	14
Şekil 2.2	Kumun Kuruması Esnasında Nem Dağılımı.	14
Şekil 2.3	Tahta Kurutması Esnasında Nem Dağılımı	15
Şekil 3.1	Luikov'un kapiler gözenekli cisim [KGC] modeli	21
Şekil 3.2	Isı ve kütle transferinin sınır şartları	27
Şekil 4.1	Isı Kondüksiyon Problemi İçin Başlangıç ve Sınır Şartları	30
Şekil 4.2	İki Boyutlu Kondüksiyon	32
Şekil 4.3	Karşılaştırmalı Problem ve Düğüm Sistemleri	34
Şekil 5.1	Basit bir-boyutlu eleman için lineer interpolasyon fonksiyonu	42
Şekil 5.2	Bir-boyutlu basit eleman: Piramit fonksiyonları ve özellikleri	44
Şekil 5.3	Problemin Üç Düğüm Noktalı Üçgen Elemanlara Bölünmesi ve Lineer İnterpolasyon Fonksiyonu Yardımıyla Bağımsız Değişkenin Gösterimi	46
Şekil 5.4	İki Boyutlu Basit Eleman İçin Piramit Fonksiyonu	48
Şekil 5.5	İki Boyutlu Problemin Sonlu Elemanlarla Yaklaşık Çözümü	51
Şekil 5.6	r adet düğümü olan çizgi eleman	53
Şekil 5.7	İki Boyutlu Bölgede Isı Kondüksiyon Problemi	56
Şekil 5.8	Konveksiyon ve kondüksiyon ısı transferinin olduğu sınır eleman	59
Şekil 5.9	Eksenel simetrik problemler için geometri ve koordinat sistemi	60
Şekil 5.10	Eksenel simetrik basit halka elemanın geometrisi	61
Şekil 5.11	Eksenel simetrik basit elemanda radyal yaklaşım.	64
Şekil 5.12	Bir-boyutlu zamana bağlı problem için çözüm bölgesi	67
Şekil 5.13	Geri farklar yöntemi için hesaplanan düğümler	68
Şekil 5.14	İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı kondüksiyon problemi [8].	69

	-----	
Şekil 6.1	2-B örnek bir problemde sonlu elemanlar ağının seyrekleştirilmesi	75
Şekil 6.2	Doğrusal olmayan sınırlarda sonlu eleman kullanımı [geometrik hata].	75
Şekil 6.3	Malzeme farklılığının gözönüne alındığı doğal bölme.	76
Şekil 6.4	2-B problemde sınır şartlarının gözönüne alındığı bölme.	76
Şekil 6.5	Dört düğüm noktasında mümkün olan üçgen elemanlar.	77
Şekil 7.1	KPSEYAP'ın akış diyagramı	100
Şekil 7.2	KPSEYAP'ın dizin yapısı	103
Şekil 7.3	KPSEYAP ana menüsü.	103
Şekil 7.4	Örnek bir HELP ekranı.	104
Şekil 7.5	Örnek bir bilgi giriş ekranı.	105
Şekil 7.6	Programın yapısı.	106
Şekil 7.7	GIRIS modülünün menüsü.	107
Şekil 7.8	Problem parametreleri veri giriş ekranı.	108
Şekil 7.9	Fiziksel parametreler veri giriş ekranı.	109
Şekil 7.10	Sınır şartları alt programı menüsü.	109
Şekil 7.11	Rapor modülü menüsü.	112
Şekil 7.12	Tuğla kurutması.	114
Şekil 7.12	[devam] Tuğla kurutması. (b) $\tau=1200$ s'de potansiyel dağılımları	115
Şekil 7.12	[devam] Tuğla kurutması. (c) $\tau=2400$ s'de potansiyel dağılımları	116
Şekil 7.13	t ve u' değerlerinin zamanla değişimi (a)51 düğümü, (b) BB'nin orta noktası	117
Şekil 7.14	t ve u' değerlerinin zamanla değişimi (a) 6 ve 46 düğümleri, (b) 1 ve 48 düğümleri	118
Şekil 7.15	(a) Tuğla kurutması probleminde kullanılan farklı sonlu eleman ağı	119
Şekil 7.15	[devam] Tuğla kurutması (b) $\tau=1200$ s'de potansiyel dağılımları	120
Şekil 7.15	[devam] Tuğla kurutması. (c) $\tau=2400$ s'de potansiyel dağılımları	121
Şekil 7.16	Seramik malzemeden yapılmış eksenel simetrik elektrik izolatörünün kurutulması.	123
Şekil 7.16	[devam] Seramik kurutması (b) $\tau=3600$ s'de potansiyel dağılımları	124
Şekil 7.16	[devam] Seramik kurutması. (c) $\tau=18000$ s'de potansiyel dağılımları	125
Şekil 7.17	4 düğümünde zaman adımının çözüme etkisi. (a)sıcaklık değişimi, (b)nem potansiyeli değişimi	126
Şekil 7.18	31 düğümünde zaman adımının çözüme etkisi. (a)sıcaklık değişimi, (b)nem potansiyeli değişimi	127
Şekil 7.19	41 düğümünde zaman adımının çözüme etkisi. (a)sıcaklık değişimi, (b)nem potansiyeli değişimi	128
Şekil 7.20	Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi. (a)Geometri ve kullanılan ağı.	130
Şekil 7.20	[devam] Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi. (a)Geometri ve kullanılan ağı	131
Şekil 7.20	[devam] Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi. (b) Döşemede buhar bariyerinin olması durumunda potansiyel dağılımları(Durum-1)	132
Şekil 7.20	[devam] Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi. (c)Döşemeden buhar bariyerinin çıkarılması durumunda potansiyel dağılımları (Durum-2).	133

# Semboller ve Terimler

A	genelleştirilmiş konveksiyon katsayıları [-], yüzey [ $m^2$ ]
a,b,c	piramit fonksiyonu sabitleri
$a_q$	ısı difüzyon katsayısı [ $m^2/s$ ]
$a_n$	nem difüzyon katsayısı [ $m^2/s$ ]
$a_n^T$	ısı nem difüzyon katsayısı [ $kg \cdot m^2/kg \cdot s \cdot ^\circ K$ ]
$c_n$	nem kapasitesi [ $kg_{nem}/kg_{kuru\ cisim} \cdot ^\circ M$ ]
$c_q$	ısı kapasitesi [ $J/kg \cdot ^\circ K$ ]
D	difüzyon katsayısı [ $m^2/s$ ]
f	sınır şartları fonksiyonu
h	özgül entalpi [ $J/kg$ ]
I	kuru cismin birim hacmindeki kütle oluşum veya kaybolma hızı [ $kg/s \cdot m^3$ ]
J	genelleştirilmiş akılar
$j_n$	özgül kütle akısı [ $kg_{nem}/m^2 \cdot s$ ]
$j_q$	özgül ısı akısı [ $W/m^2$ ]
$k_n$	nem geçirgenliği [ $kg_{nem}/m \cdot s \cdot ^\circ M$ ]
$k_q$	ısı geçirgenliği [ $W/m \cdot ^\circ K$ ]
K	genelleştirilmiş geçirgenlik [-], toplam ısı transfer katsayısı [ $W/m^2 \cdot ^\circ K$ ]
$K_H$	hidrolik iletim katsayısı
$K_L$	sabit efektif difüzyon katsayısı
l	referans uzunluk [m]
L	uzunluk, sınır yüzey [m]
m	kütle [kg]
N	interpolasyon fonksiyonu
n	dışa dönük birim normal vektör, düğüm sayısı
p	basınç [Pa]
q	ısı akısı
r	radyal koordinat [m]
R	hata [artık], radyal koordinat [m]
t	sıcaklık [ $^\circ C$ , $^\circ K$ ]
T	$=t/t_0$ , boyutsuz sıcaklık, bağımsız değişken
u	nem miktarı [ $kg_{nem}/kg_{kuru\ cisim}$ ]
u'	kütle transfer potansiyeli [ $^\circ M$ ]
U	$=u/u_0$ , boyutsuz kütle transfer potansiyeli

V	hacim [m <sup>3</sup> ]
W	ağırlık fonksiyonu
w	hacimsal konsantrasyon [kg/m <sup>3</sup> ]
X,Y	boyutsuz koordinatlar (X=x/l , Y=y/l)
X	nem miktarı [%]
x,y	kartezyen koordinatlar [m]
z	silindirik koordinat [m]
$\alpha_n$	konveksiyon kütle-transfer katsayısı [kg <sub>nem</sub> /m <sup>2</sup> .s.°M], interpolasyon fonksiyonu parametresi
$\alpha_q$	konveksiyon ısı-transfer katsayısı [W/m <sup>2</sup> .°K]
$\Gamma$	sınır yüzey [m <sup>2</sup> ]
$\delta$	ısı-gradyan katsayısı [°M/°K]
$\epsilon$	buhar difüzyon katsayısının toplam nem difüzyon katsayısına oranı
$\Delta$	üçgen sonlu eleman veya alanı
$\tau$	zaman [s]
$\Theta$	$=\tau/\tau_0$ , boyutsuz zaman
$\theta$	kararsız problemlerde iterasyon tipi katsayısı
$\lambda$	faz değişim ısı [J/kg]
$\rho_0$	tam kuru cismin yoğunluğu [kg/m <sup>3</sup> ]
$\varsigma$	kapiler potansiyel
[ ]	matris
{ }	vektör [sütun matrisi]

#### Alt ve üst indisler

$\infty$	ortam
D	düzlemsel
E	eksenel
(e)	eleman
i	bileşen, başlangıç
L	sıvı
n	kütle, zaman seviyesi
q	ısı
x,y	x,y yönünde
w	yüzey
$\delta$	ısı-difüzyon
$\epsilon$	iç buharlaşmadan kaynaklanan ısı kaynağı
0	referans
*	eşdeğer
—	yaklaşım

## **Kısaltmalar**

1-B	Bir-boyutlu
2-B	İki-boyutlu
ADD	Adi diferansiyel denklem
C-N	Crank-Nicolson
DD	Diferansiyel denklem
KDD	Kısmi diferansiyel denklem
KGC	Kapiler poroz cisim
KPSEYAP	Kurutma problemlerinin sonlu elemanlar yöntemiyle analizi programı
PC	Kişisel bilgisayar
SE	Sonlu eleman
SEP	Sonlu eleman programı
SEY	Sonlu elemanlar yöntemi
SFY	Sonlu farklar yöntemi
SŞ	Sınır şartı
VÇA	Ve çalışma arkadaşları





Bu bölümde, yapılan çalışmanın hedefini belirtmek amacıyla kurutmanın tanımı yapıp ekonomik önemi vurgulanarak gözenekli ortam ve kurutma mekanizmasının açıklanması üzerinde kısaca durulacaktır.

Kurutma terimi genelde herhangi bir malzemeden nemin uzaklaştırılmasını içeren bir süreci tanımlamak amacıyla kullanılır. Ancak, nemin uzaklaştırılma yöntemi, uzaklaştırılan nemin miktarı ve kurutma işlemi sonunda elde edilen ürünler gözönüne alınarak daha dikkatli bir tanım yapmak gerekmektedir. Örneğin [süt tozu ve hazır çorba üretiminde olduğu gibi] bir çözeltinin sıcak bir gaz akımı içerisine damlacıklar halinde püskürtülmesi ve sıvısının buharlaştırılarak alınması teknik anlamda kurutma sayılmasına rağmen , aynı çözeltinin kaynatılarak sıvısının buharlaştırılması bundan farklı bir olaydır ve bu işlem buharlaştırma olarak bilinir. Benzen gibi bir sıvı içerdiği az miktardaki sudan damıtma denen bir işlemle ayrılabilirken gazlar ve sıvıları içerdikleri az miktardaki sudan yutma işlemiyle ayırmak mümkündür. Islak bir katının merdaneler arasında sıkıştırılarak neminin bir kısmının alınması ise sıkma olarak adlandırılır. Bu tartışma kurutmanın aşağıdaki tanımı yapılarak bitirilecektir:

Kurutma, katı bir ürün elde etmek amacıyla, bu katının içerdiği sıvının [genellikle su] kontrollü bir ısı işlem sonucu bir gaz fazına [genellikle hava] aktarılmasıdır.

Katı maddenin içerdiği nem, katıyı oluşturan moleküller arasındaki boşluklarda, kılcal borularda veya yüzey tarafından yutulmuş olarak bulunur. Böyle bir katı için, birim katı kütlelerinin içerdiği neme "özgül nem" denir.

Kurutma hem günlük ev işlerimizde hem de büyük ölçekli endüstriyel işlemlerde yer alan bir prosestir. İngiltere'de endüstriyel enerji gereksiniminin %7'si kurutma nedeniyledir[1]<sup>1</sup>. Lebedev ve Ginzburg[2] Sovyetler Birliği'nde kurutmada kullanılan yakıt tüketiminin daha da yüksek [%10] olduğunu kaydetmektedir. Bugün ilaç, boya, deterjan, metalurji, kağıt, yiyecek, tahıl, seramik, tekstil...gibi

---

1: Köşeli parantezler içinde verilen rakamlar yararlanılan kaynakları belirtmektedir. Bu kaynakların metinde yerleş sırasına göre bir listesi çalışma sonunda 'Referans Listesi'nde verilmiştir.

birçok sanayi dalında kurutma, üretimdeki rolü ve enerji tüketimi açısından önemli bir yer tutmaktadır.

Ülkemizde kurutmada kullanılan enerjinin genel enerji tüketimindeki payını veren bir çalışma bulunmamakla birlikte sanayileşme sürecinde bulunan ülkemizde kurutmanın enerji tüketimi açısından önemli bir yer tuttuğunu Özil ve çalışma arkadaşları[VÇA]nın<sup>1</sup> yaptığı çalışmalara[3,4] bakarak söylemek mümkündür.

Kurutma prosesi tasarlanırken ekonomik olması yanında kaliteli ürün eldesi de göz önünde tutulur. Kaliteli ürün eldesi kontrollü kurutmayı, kontrollü kurutma ise sıcaklık ve nem kontrolünü zorunlu hale getirmektedir. Bu kontrolün yapılabilmesi ise sıcaklık ve nem dağılımının belirlenmesiyle mümkündür.

Bölüm 2'de incelenecek olan kurutma teorilerinden de görüleceği üzere sıcaklık ve nem dağılımının analitik olarak belirlenebilmesi ancak bir-boyutlu [1-B] problemlerde belirli geometriler için yapılabilmektedir. Uygulamada karşılaşılan çok boyutlu ve karmaşık geometrili cisimlerde sıcaklık ve nem dağılımının belirlenebilmesi için sayısal yöntemlerin kullanılması bir zorunluluktur. Bölüm 3'de tanıtılacak ve bu çalışmada ele alınacak olan kurutma denklemlerinin çözümünde kullanılacak sayısal çözüm yöntemleri arasında sonlu elemanlar yöntemi [SEY] [Bölüm 4'de vurgulanacağı gibi] önemli avantajlara sahiptir ama bu yöntemde [sayısal yöntemlerin çoğunda olduğu gibi] bilgisayar kullanımı kaçınılmazdır.

Mühendislik problemlerinde karşılaşılan çeşitli problemlerin [ısı transferi, akışkanlar mekaniği, yapı statikliği, gerilme analizi, dinamik,...] çözümü amacıyla SEY 1940'lı yıllardan başlayarak kullanılmış, 1960'lı yıllardan başlayarak ise konuyla ilgili çeşitli yazılımlar geliştirilmiştir. Literatürde [5-9] tanıtılan bu yazılımların incelenmesinden görüleceği gibi

1. Yazılımlar genellikle [ilk yatırım ve işletme giderleri kişisel bilgisayar[PC]lara göre çok yüksek olan] orta ve/veya büyük boy bilgisayar sistemleri için yazılmıştır ve bunlar ancak yazıldıkları bilgisayar sistemlerinde çalışabilmektedir.
2. Kurutma problemlerinin çözümüne yönelik herhangi bir ticari yazılım yoktur.<sup>2</sup>

Özellikle 1980'lerin başından itibaren PC'lerin kullanımının yaygınlaşmasının paralelinde SEY için yazılan kitaplara [yukarıda sayılan klasik problemlerin çözümünde kullanılmak üzere] PC kullanıcılarının yararlanabileceği ve genellikle FORTRAN dilinde kodlanmış bilgisayar programlarının kaynak listesi eklenmiştir. Ancak hem bu programları kullanabilmek belirli ölçüde programlama bilgisi gerektirmekte hem de kurutma problemlerinin çözümü için yazılmış ticari bir bilgisayar programı zaten bulunmamaktadır.

Ülkemizde de PC'lerin küçüklü-büyükü pekçok firma tarafından kullanıldığı gözönüne alınacak olursa bu tür bilgisayarlarda çalıştırılacak ve Bölüm 5 ve 6'da açıklanacak problemlerde kurutulan ürün içinde sıcaklık ve nem dağılımını belirleyebilecek bir bilgisayar programının hazırlanması bu çalışmanın hedefini oluşturmuştur.

---

1: Yazar sayısı ikiden fazla ise ilk yazarın soyismi kullanılarak diğerleri VÇA şeklinde belirtilecektir.

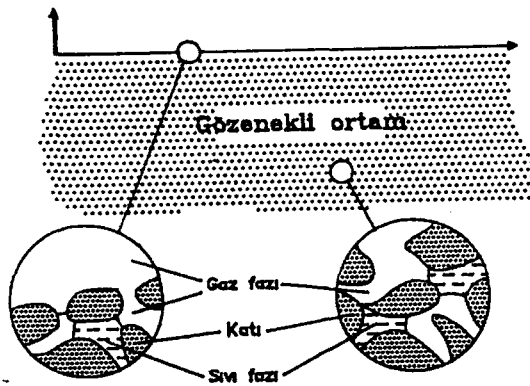
2: Ticari anlamda üretilen yazılımların da tanıtıldığı BYTE dergisinin 1985-1993 yılları arasındaki sayılarında yazar tarafından yapılan inceleme.

## A. Gözenekli ortam

Gözenekli cisimlerde ısı ve kütle transferi prensiplerinin bilinmesi için gözenekli cismin yapısal özellikleri bilinmelidir. Çevremizde gördüğümüz malzemelerin çoğunun iç yapısında gözle görülebilen veya görülemeyen irili ufaklı, sürekli veya süreksiz birçok boşluk vardır [Şekil 1.1]. Boşlukların özellikle iri ve sürekli olanları, malzeme içinden sıvı ve gazların geçmesini veya iç yüzeyleri tarafından gaz veya sıvıların yutulmasını sağlarlar. Gözenekli bir malzemenin toplam hacmi  $V$  ise bu, dolu hacim  $[V_d]$  ile boşluk hacmi  $[V_b]$ 'nin toplamına eşittir. "Porozite", cismin birim hacmindeki boşluk hacmidir  $[V_b / V]$ . "Komposite" ise cismin birim hacmindeki dolu hacmidir  $[V_d / V]$ . Bu iki tanımdan da anlaşılacağı gibi porozite ile kompositenin toplamı 1'e eşittir ve porozite 0 ile 1 arasında değişen bir büyüklüktür.

Boşlukların birbiriyle ilişkisi bakımından iki durum söz konusu olmaktadır: (1) boşlukların birbiri ile bağlantı halinde olmaması [kapalı boşluk]; (2) boşlukların birbirleriyle bağlantılı olması [açık boşluk]. Kapalı boşluk halinde boşluklar hiçbir zaman cismin dış yüzeyine ulaşmazlar. Kapalı boşlukları kürecikler, açık boşlukları ise silindirik borucuklar şeklinde düşünmek mümkündür. Böylece elde edilmiş basitleştirilmiş boşluklu malzeme modelinde boşluk çaplarının nasıl dağıldığı, ortalama değerlerinin ne olduğu ve toplam iç yüzeyin ne değerinde olduğu araştırılabilir.

Daha önce de vurgulandığı gibi gözenekli cisimlerde transfer prensiplerinin bilinmesi için, gözenekli cismin yapısal özellikleri belirlenmiş olmalıdır. Ancak, cisim içinde bulunan boşlukların gerçekte çok karışık durumda ve çeşitlerde olması araştırmacıları "model gözenekli cisimler" tanımları yaparak bu modeller üzerinde çalışmaya itmiştir. Bu modellerden en çok kullanılanı "kılcal gözenekli cisimler modeli"dir[10]. Bu modelde, boyutları genellikle mikron mertebesinde olan ve "kılcal" denilen silindirik boşluklar cisim içinde kılcal borular şebekesini meydana getirirler.



Şekil 1.1 Gözenekli Ortam

Cisim içinde bulunan boşlukları boyutlarına göre

- Moleküller arası boşluk
- Mikro porozite [boşluk boyutları 0.1 mikrondan küçüktür]
- Kılcal boşluk [boşluk boyutları 0.1 mikron ile 2.5 mm arasında değişir]
- Makro porozite [boşluk boyutları 2.5 mm'nin üzerindedir]

şeklinde sınıflandırmak mümkündür[11].

Whitaker[12] ise gözenekli yapıyı

- Matris [içinde sürekli boşluğu olan sürekli katı yapı]
- Tanecikli [içinde sürekli boşluğu olan süreksiz katı yapı]

olmak üzere iki kısma ayırarak incelemiştir.

Gözenekli ortamları dış görünüşlerine göre ise

- Lifli [yün, cam elyafı, kumaş...]
- Tanecikli [kum, tahıl yığınları...]
- Matris [tuğla, alçı, deri...]

yapılı ortamlar şeklinde sınıflandırmak mümkündür. Gözenekli ortamla ilgili daha detaylı bilgi literatürde[10,13] verilmiştir.

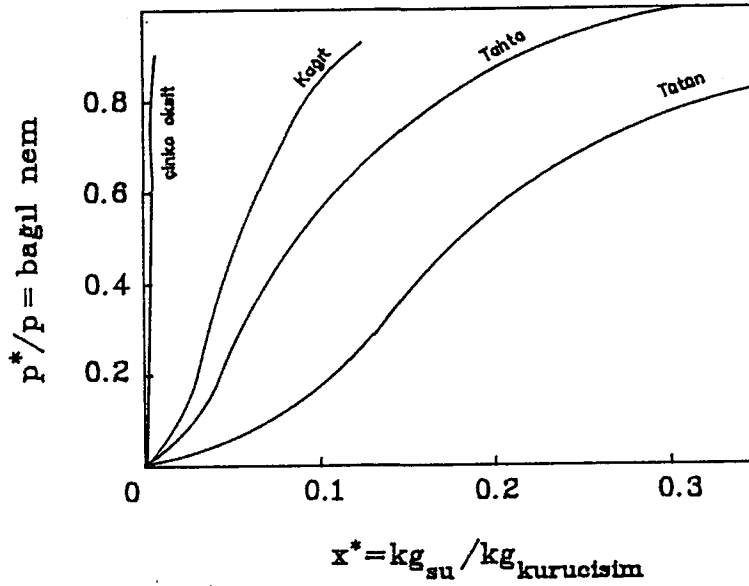
## B. Kurutma Mekanizması

Gözenekli ortam içinde sıcaklık ve nem dağılımını belirleyebilmek kurutma mekanizmasının nasıl oluştuğunun belirlenmesiyle mümkündür.

### 1. Denge

Su hangi fazda olursa olsun bulunduğu koşullara bağlı olarak belli bir buhar basıncı gösterir. Buzun ve sıvı haldeki suyun buhar basıncına "su buharı basıncı" denir. Buna karşılık havadaki su buharı basıncına havanın toplam basıncı içindeki miktarını vurgulamak için "su buharı kısmi basıncı  $p^*$ " denir. Su buharlaşmasındaki itici güç suyun buhar basıncıyla kendisini çevreleyen havanın "su buharı kısmi basıncı" arasındaki farkıdır. Bu nedenle bir sıvı çözelti veya ıslak katının içerdiği nem, katının doğal yapısına, sıcaklığına ve nem derecesine bağlı olarak buharlaşmak ister. Eğer nemli katı,  $p^*$  kısmi basıncı altında sürekli taze gaz sağlayacak bir etkinin altında ise katı ya buharlaşma ile nem kaybeder veya katı neminin buhar basıncı  $p^*$  değerine eşit oluncaya kadar nem kazanır. Katı ve gaz dengeye ulaştığında katının içerdiği nem, mevcut koşullarda katının "denge nemi" diye isimlendirilir. Bazı ürünlerin tipik kuruma denge eğrileri Şekil 1.2'de gösterilmiştir. Burada nemden kastedilen su'dur. Grafikte, denge durumunda, hareketli gazın su buharının kısmi basıncı  $p^*$ , saf suyun buhar basıncı  $p$ 'ye bölünerek gazın bağıl nemi veya bağıl doymuşluğu elde edilmiştir. Böylece eğriler sadece bir sıcaklık için faydalı olmak yerine en geniş sıcaklık bölgesine uygulanabilir hale getirilmiştir.

Özel durumlar dışında katıların çevre koşullarının belirlediği denge nem miktarı altındaki bir değere kurutulması gereksizdir çünkü, kurutucudan çıkan aşırı kurumuş katı bünyesindeki nem bir süre sonra çevresinden alacağı nem ile denge nem miktarına ulaşacaktır.



Şekil 1.2 Oda Sıcaklığında Bazı Katıların Denge Eğrileri [14]

Doymuş hava ile denge halinde bulunan maddenin sahip olabileceği en düşük su konsantrasyonuna "bağlı su" denir. Bağlı su içeren maddelere de "higroskopik maddeler" adı verilir.

Maddelerin içerdiği nemi tanımlamak için kullanılan belli terimler aşağıda özetlenmiştir[14]:

1. Nem içeriği[kuru bazda]  $[X_k]$ : 1 kg kuru maddenin içerdiği nemdir ve  $X_k$ -ile gösterilir.
2. Nem içeriği[ıslak bazda]  $[X]$ : 1 kg madde içindeki nemdir. Islak ve kuru bazda nem içeriği arasında

$$X = \frac{X_k}{1+X_k}$$

bağıntısı yazılabilir.

3. Denge nemi  $[X^*]$ : Verilen kısmi buhar basıncı ile denge sağlandığı zaman maddenin içerdiği nemdir.
4. Serbest nem: Bir maddenin içerdiği denge neminden fazla olan nemdir  $[X-X^*]$ . Yalnızca serbest nem buharlaştırılabilir ve katının içerdiği serbest nem, katının içinde bulunduğu ortamın buhar konsantrasyonuna bağlıdır.

## 2. Kurutma Hızı Eğrileri

Birim zamanda birim alandan buharlaşan su kütlesi "kurutma hızını" belirler. Kaliteli ürün eldesi ve ısı ekonomisi bakımlarından kurutma hızı büyük önem taşımaktadır. O halde, bir katı ürünü kuruturken en elverişli kurutma hızının ne olacağı sorusu öncelikle cevaplanmalıdır. Katı bir maddenin hava ile kurutulmasına dış koşulların etkisini inceleyen çalışmalardan elde edilen deneysel bilgiler, sabit kurutma koşulları [hava hızı, nem, sıcaklık ve basınç] altında katıya ait nem miktarının, zamanın bir fonksiyonu olduğunu ortaya koymuştur. Deneysel sonuçlarının ya grafik ya da sayısal yoldan türevi, kurutma hızını verir ve bu ya serbest nem ya da zamana karşı olarak çizilir. Aşağıda verilen Şekil 1.3 zamanın fonksiyonu olarak elde edilebilecek yaklaşık bir kurutma hızı eğrisini göstermektedir. Bu eğri incelendiğinde kuruma sürecinin dört kademedен oluştuğu görülür[14]:

(1)Yükselen Hız Devresi[AB]

Bu devrede verilen ısı miktarı, malzemenin ve bu malzemenin bünyesinde bulunan sıvının sıcaklığını yükseltmeye yarar. Bu devrede buharlaşma hızı hemen hemen üssel değişkenli bir kanun uyarınca, sıcaklıkla birlikte artar. Buharlaşma oranının gitgide artması nedeniyle bu devreye söz konusu isim verilmiştir.

(2)Sabit Hız Devresi[BC]

Bu devre boyunca malzemenin bütün açık yüzeyleri ıslaktır ve buharlaşma bu sıvı filmi yüzeyinden gerçekleşmektedir. Gerek buharlaşma hızı ve gerekse malzemenin ıslak yüzeylerinin sıcaklığı, bu süre boyunca maksimum düzeyde ve sabit değerdedir.

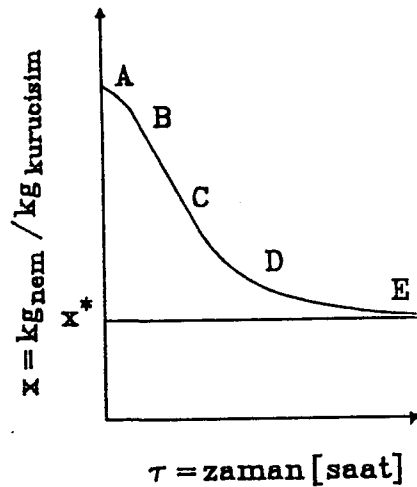
(3)Azalan Hız Ön Devresi[CD]

Malzeme yüzeyi üzerinde kuru lekeler görülmeye başladığı anda kritik nemlilik derecesine [ $X_c$ ] erişilmiş ve bu devreye girilmiş demektir. Bu devrede katı yüzeyine difüze edebilen su buharlaşmaktadır. Malzemenin ıslak yüzey alanı derece derece azaldıkça buharlaşma hızı da düşer. Malzemenin tüm açık yüzeyi kuruduğu zaman bu devre de sona erer.

(4)Azalan Hız Son Devresi[DE]

Bu devre sırasında nemlilik kayıp oranı dış hava şartlarından çok az etkilenirken buharlaşma hızı ve sıvının malzeme içinde yaptığı dağılma hareketlerinin nem kaybı üzerindeki etkisi daha fazladır.

Birinci ve dördüncü bölge, gerek zaman gerekse tüketilen enerji bakımından diğer bölgelere göre önem taşımamaktadır[14]. Bu nedenle ikinci ve üçüncü bölgeyi incelemek yeterli olmaktadır. Bu inceleme ilerleyen altbölümlerde yapılacaktır.

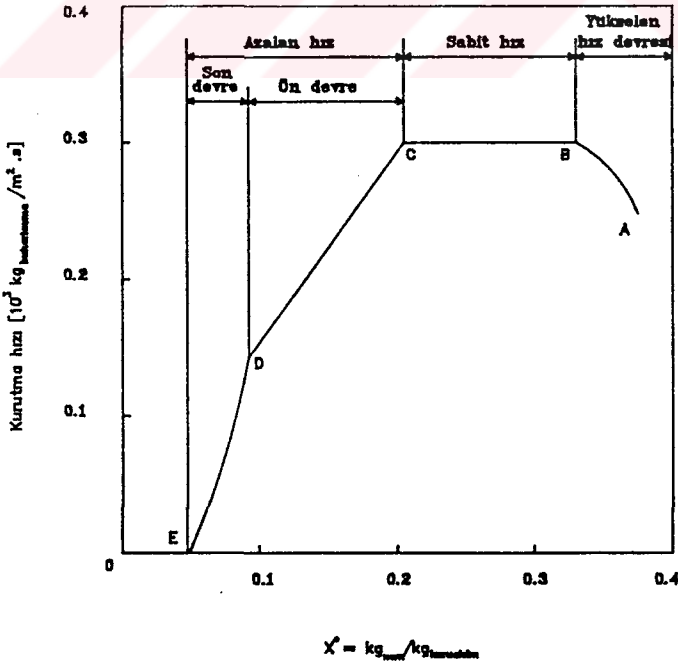


Şekil 1.3 Zamanın Fonksiyonu Olarak Kurutma Hızı Eğrisi[14]

Yukarıda birim zamanda birim alandan buharlaşan su kütlesi olarak tanımladığımız [ve kurutma prosesinin tasarımında çok kullanılan] kurutma hızının katının kuru bazda özgül nemine bağlı olarak değişimi ise Şekil 1.4'de gösterilmiştir. Uygulamada daha çok kullanılan bu eğri Şekil 1.3'deki eğriye çeşitli noktalarda çizilen teğetlerin eğimleri hesaplanarak çizilmiştir. Bu hesaplamalar literatürde[14,15] detaylı olarak verilmiştir.

### 3. Sabit Kurutma Hızı Devresi

Şekil 1.1'de gösterilen higroskopik gözenekli bir katı madde kurutulmaya başladıktan ve kısa bir dengeye ulaşma durumundan [Şekil 1.4'de AB arası] sonra "sabit kurutma" devresine girer [Şekil 1.4'de BC noktası]. Bu devrede kurutma hızı sabittir ve sadece katı maddenin yüzeyine etki eden değişkenler tarafından kontrol edilir. Bu değişkenler genellikle hava akımının hızı, akım modeli, sıcaklığı ve nem yüzdesidir. Sabit kurutma devresinde bu değişkenler sabit kaldığı sürece kurutma hızı da sabit kalır. Sıcak havadan katı maddeye aktarılan ısı katının içindeki nemi buharlaştırmada dengeli bir biçimde kullanıldığı için sabit kurutma hızı devresinde ısı ve kütle transferi arasında dinamik bir denge kurulur. Bu süreç esnasında katının iç nem hareketi tüm dış yüzeyi yaş olarak korumaya yeter çabukluktadır. Yani bu süreç boyunca dış yüzey her an neme doymuş durumdadır [Şekil 1.5a]. Dolayısıyla yaş katının kütle transfer alanı ısı transfer alanına eşittir. Başka bir deyişle kurutma hızı ısı transferi tarafından kontrol edilir.



Şekil 1.4 Özgül Nemin Fonksiyonu Olarak Kurutma Hızı Eğrisi[14]

Katı maddenin fiziksel özellikleri kurutma hızını etkilemediği için bu devrede yüzey şartlarında Newton soğuma ifadesi yardımıyla ısı ve kütle transferi arasındaki denge şöyle yazılabilir:

$$-\frac{dX}{d\tau} = \frac{KA_H(t_G - t_s)}{\lambda} = k_k A_k (P_s - P_G) \quad (1.1)$$

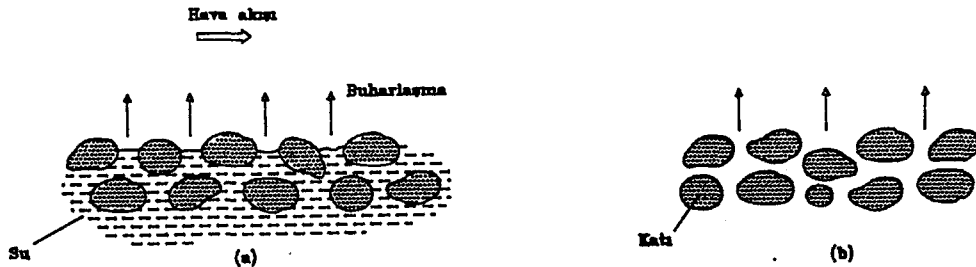
Burada  $X$  katının nem miktarı,  $\tau$  zaman,  $K$  radyasyon dahil toplam ısı transfer katsayısı,  $A_H$  ve  $A_K$  sırasıyla ısı ve kütle transfer yüzeyleri [hava akımı ile temasta olan ıslak yüzeyin alanı],  $t_G$  sıcak hava sıcaklığı,  $t_s$  ıslak yüzey sıcaklığı,  $\lambda$  [ $t_s$  sıcaklığındaki] suyun buharlaşma gizli ısı,  $k_k$  ıslak yüzeyden havaya kütle transfer katsayısı,  $P_s$  yüzey sıcaklığındaki sıvı buharının basıncı,  $P_G$  sıcak hava içindeki sıvının kısmi buhar basıncı ve  $dX/d\tau$  kurutma hızıdır[16]. Kurutma hızının hesaplanmasında (1.1) eşitliği her iki şekilde kullanılabilir. Bununla beraber, ısı transfer katsayısını kullanarak kurutma hızının hesaplanması daha güvenilir bir yol olarak önerilmektedir çünkü ıslak yüzey sıcaklığı  $t_s$ 'in bulunması esnasında yapılacak yanlışlık, itici güç olan  $t_G - t_s$  üzerinde  $P_s - P_G$  terimi üzerindeki orana daha az etkili olur. Bu devre için önerilen [analitik ve ampirik] çeşitli bağıntılar Treybal[14] ve Keey[15] tarafından verilmiştir.

#### 4. Sabit Kurutma Hızı Devresi Sonu

Sıcak havadan katı maddeye aktarılan ısı miktarında azalma olmamasına rağmen kurutma ilerledikçe katı içerisindeki nem miktarında devamlı olarak azalma meydana gelir. Bunun sonucu olarak da yüzeyin devamlı olarak ıslak kalması zorlaşır. Yüzeyde ilk kuru noktanın olduğu duruma "kritik nokta" adı verilir [Şekil 1.4'de C noktası]. Katının nemi de "kritik nem yüzdesi [ $X_c$ ]" diye tanımlanır. Kritik nokta, "sabit kurutma devresi"nin sonunu ve "azalan kurutma devresi"nin başlangıcını simgeler. Kritik nokta katının cinsine, büyüklüğüne ve şekline bağlı olduğu kadar sabit kurutma devresindeki kurutma hızına da bağlıdır.

#### 5. Azalan Kurutma Hızı Devresi

Kritik noktaya ulaşıldıktan sonra azalan kurutma hızı devresi başlar ve bu andan itibaren yüzeydeki ıslak alan miktarında devamlı bir azalma olur [Şekil 1.4'de CE hattı]. Bu durum Şekil 1.5b'de gösterilmiştir. Şekil 1.3'deki kurutma hızı eğrisinde CD hattına "Azalan hız ön devresi", hız eğrisinin geri kalan kısmına [DE] "azalan hız son devresi" adı verilir[15].



Şekil 1.5 Kurutmada Katı Maddede Arayüzey.

(a) Sabit Kurutma Hızı Devresi,

(b) Azalan Kurutma Hızı Devresi



Bu devredeki kurutma hızı katı maddenin iç gözenek yapısının ve katının içindeki nemin yüzeye doğru akmasına neden olan kuvvetlerin etkisi altındadır. Sıcak havanın özelliklerinin artık kurutma hızına olan etkisi kaybolmuş, onun yerini katının iç yapı özellikleri almıştır. Azalan hız devresinde uzaklaştırılan nem miktarı az olmakla birlikte bu devre için gerekli olan zaman çoğunlukla oldukça uzundur [14-17]. Diğer taraftan katı madde yüzeyindeki kuru alan gitgide arttığı için yüzeyin ve hatta katının yaş-hava sıcaklığında kaldığı söylenemez. Bunun sonucu olarak da kurutma hızının hesaplanmasında katının nem dağılımının yanında sıcaklık dağılımının da gözönünde bulundurulması gereklidir. Katı maddenin yüzeyinde meydana gelen farklı sıcaklıktaki bölgeler mevcut problemi daha da karmaşık bir duruma sokar çünkü yüzey buharlaşmasını formüle eden Newton soğuma kanunu bu durumda tam olarak uygulanamaz[15,16]. Yüzey sıcaklığı  $t_s$ , yüzey ıslak alanı  $A_K$  ve ısı transfer katsayısı  $K$  ve kütle transfer katsayısı  $k_K$  değışkendirler. Sonuç olarak, katı maddenin kurutulmasını [genellikle] azalan kurutma hızı devresi kontrol ettiği için azalan kurutma hızının hesaplanmasında pekçok araştırma yapılmış, değışik yaklaşımlar uygulanmış ve değışik kurutma modelleri bulunmuştur. Bu modeller Bölüm 2'de özetlenmiştir.

Azalan kurutma hızı devresinde kurutma hızının formüle edilmesi başlıca iki yoldan olabilir: (1)gözlemsel[amprik] yaklaşım, (2)kuramsal yaklaşım. Bu devrede kurutma hızı maddenin büyüklüğüne ve şekline önemli ölçüde bağılı olduğu için birinci tip yaklaşım [çok sınırlı bir sonuç vermesi nedeniyle] genellikle tercih edilmez. Kuramsal yaklaşımın iyi bir sonuç vermediğı durumlarda gözlemsel yaklaşım tercih edilmelidir. Kuramsal yaklaşımın başlıca özelliğı kurutulması istenen maddenin iç yapısal özelliklerini doğru olarak ölçmek ve elde edilen bu değerleri kurutma hızının hesaplanmasında kullanmaktır. Böyle bir yöntemle elde edilmiş kurutma hızı genellikle değışik katıların kurutulmasında kullanılabilir. Kuramsal yaklaşımla azalan kurutma hızının formüle edilmesinde karşılaşılan başlıca zorluklar şunlardır[1,16,18]:

1. Katı maddenin neminin tümü serbest durumda olmayabilir. Serbest olmayan nemin buharlaştırılması için fazla enerjiye ihtiyaç vardır ve bu enerjinin hesaplanması ve model içinde formüle edilmesi zordur.
2. Katı maddenin iç gözeneklerinde bulunan nem, kurutma sürecinde katının içinde buharlaşabilir ve sıvı-buhar karışımı halinde katı yüzeyine çekilir.
3. Kurutma sırasında katı madde bazı şekil değışikliğine uğrar ve ayrıca katı yüzeyinde ince bir kabuk tabakası meydana gelir. Bunun sonucunda modelin geometrik açıdan büyük zorlukları olur. Katının yüzeyinde oluşan ince kabuk tabakasının fiziksel özellikleri de katının fiziksel özelliklerinden tamamen başka bir değerde olabilir.
4. Sonucu ve belki de en büyük zorluk ise azalan kurutma hızı devresinde katının içindeki nemin yüzeye hangi mekanizmalar ile taşındığının belirlenmesidir. Fortes ve Okos[18] literatürde buldukları bu mekanizmaları aşağıdaki şekilde özetlemişlerdir:
  1. Konsantrasyon gradyanları nedeniyle oluşan sıvı difüzyonu,
  2. Katının şekil değışirmesi ya da iç buharlaşma nedeniyle gözeneklerde meydana gelen yüksek sıcaklıktaki bölgelerin yarattığı toplam basınç farkı ile meydana gelen buhar difüzyonu,
  3. Kılcal akım mekanizmasıyla hareket eden sıvı nem,

4. Katı yüzeydeki gözeneklerde bulunan nem ile yüzeye absorbe olmuş sıvı nem arasında meydana gelen yüzeysel difüzyon,
5. Katının içinde buharlaşan nem ile sıvı nem arasında oluşan buharlaşma-yoğunlaşma mekanizmasıyla meydana gelen aktarım,
6. Büyük gözenekli katılarda yerçekimi etkisi ile meydana gelen sıvı aktarımı.

Bundan sonraki bölümde kurutma modellerinden en fazla rağbet görenler kısaca özetlenecek ve bu modellerin kullanıldığı teorik ve deneysel çalışmaların literatür taraması verilecektir.



# Gözenekli Ortamda Kurutma Çalışmalarının Tarihsel Gelişimi

Bu bölümde çeşitli kurutma modelleri kısaca özetlenecek, bu modellerin kullanıldığı analitik ve sayısal çalışmaların bir literatür taraması verilecektir. Daha önceki yıllarda ilk adımları atılsa da kurutma teorilerinin ana yapıları 1930'lardan sonra kurulduğundan çalışmalar 1930 öncesi ve sonrası olmak üzere iki ayrı devrede incelenecektir.

## A. 1930 Öncesi Kurutma Teorileri [1,12,18]

İlk kurutucu patenti Almanya'da 1878'de alınmış ve bu kurutucunun tasarımına esas alınan teori yalnızca ısı transferi olmuştur. Bundan sonra 1920'lerde psikrometrinin gelişmesi ve kurutmanın uygun bir kinetik açıklamasının aranmaya başlamasından önce sıcaklık ve buharlaşma arasında matematiksel veya grafik bağıntılar olarak en kayda değer çalışmalar Grosvenor'un ve Mollier'in sıcaklık-entalpi-nem bağıntıları ve buna dayalı diyagramlarıdır.

1920'lerden çok önceleri Davies, buharlaşma hızının, sıvı buharı ve havanın "buhar gerilimi" farkına eşit olduğunu ifade etmiş ve çeşitli sıvılarla ıslatılıp elle sıkılarak kurutulan yün kumaşın kurummasının gelişimine ait değerler vermiştir. Genellikle son %10'luk rutubetin alınması için gerekli zaman ilk %50 için gerekenden fazla çıkmıştır. Burada belirtileri izlenen ve kurutmada en önemli önerme olarak alınabilecek olan "kurutma etkisiyle nem azaldıkça kurutma hızı da giderek azalır" önermesi Luikov'a göre 1908'de Kossovitch tarafından bulunmuştur[1]. Bir tekstil teknolojisti olan Fisher de boyanmamış tek bir yün elyafı ile yaptığı deneyler sonucunda kurutmayı üç devreye ayırarak bunlarla ilgili bağıntıları verip deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Fischer'in maddelerin nem kayıp davranışlarını incelediği yıllarda, ABD'de de Lewis kuruma sürecini belirlemeye çalışıyordu. Lewis bulgularını "Bir katının kuruması iki bağımsız işlemde oluşur: (1)katının dış yüzeyinden nemin buharlaşması, (2)nemin katının içlerinden dış yüzeye doğru yayılması" şeklinde özetlemiştir. Lewis yayılmanın sıvı fazda oluştuğunu varsaymış ve bazen birinci, bazen ikinci sürecin kurumayı belirlediğini kabul ederek bunu doğrulayan deney sonuçları vermiştir.

## B. 1930'lardan Sonraki Kurutma Teorileri [1,10,12,19-26]

Bu teorileri sıvı-difüzyon teorisi, kapiler teori, Krischer teorisi, Philip ve DeVries teorisi, Luikov teorisi ve Whitaker teorisi şeklinde sınıflandırmak mümkündür.

### 1. Sıvı-Difüzyon Teorisi

Bu gruba giren çalışmalarda kurutmada esas alınan olay, nemin sıvı yayılmasıyla hareketidir. En genel haliyle;

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = \nabla(K_L \nabla X) \quad (2.1)$$

şeklinde formüle edilen Fick denklemlerinin değişik form ve varsayımlarla ifade edildiği bu süreçte  $X$  [kuru baz esas alınarak hesaplanan] nem oranı,  $K_L$  sabit-effektif difüzyon katsayısıdır. Bu yönde ilk çalışma Lewis'indir ama Lewis de "bazı hallerde kurumanın yayılmayla, bazı hallerde ise yüzeyden buharlaşmayla belirlendiğini" not etmiştir. Bu fikir sonradan Sherwood tarafından bir dizi makalede işlenmiştir. Sherwood, tuğla çamuru gibi bazı malzemeler için difüzyon katsayıları belirlemiştir ama O da "sabun gibi bazı malzemelerde kurutma ilerledikçe, eğer deney sonuçlarına uyulmak isteniyorsa, yayılma katsayısının giderek küçüldüğünü kabul etmek gerekir" diyerek sıvı-difüzyon teorisinin sınırlılığını belirtmiştir. Sherwood ve Gilliland ve Sherwood'un sıvı difüzyon formülüyle çalıştığı yıllarda Newman da

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

formundaki difüzyon eşitliğinin bir dizi çözümünü vermiştir [20,21]. Burada  $C$  nem konsantrasyonu,  $\tau$  zaman,  $D$  deneysel olarak belirlenmiş difüzyon katsayısı ve  $x$  koordinattır.

Sıvı-difüzyon teorisi özellikle yiyecek kurutmasında günümüzde de tercih edilerek kullanılmakta ve bu çalışmalarda difüzyon katsayısı ya sabit ya da sıcaklık ve/veya nem konsantrasyonunun doğrusal bir fonksiyonu kabul edilmektedir[18].

Bu teoride sıvı hareketinin kurutmanın her devresinde nem transferinin tek belirleyicisi olarak alınması eleştirilebilir. Sıvı difüzyon eşitliklerinin (2.2) nolu eşitlikteki gibi kullanılması, difüzyonun sabit sıcaklıkta olduğunun kabulü ve böylece katı içindeki sıcaklık gradyanlarının ihmal edilmesiyle özdeştir. Difüzyon teorisi büzüşmeyi, yüzey sertleşmesini gözönüne almamaktadır; bu nedenle daha yeni teorilerde difüzyon katsayısı ya anlamını yitirmiş ya da nem konsantrasyonu ve sıcaklığa bağlı ve değişik etkilerin ortak karşılığı bir değer haline dönüşmüştür.

## 2. Kapiler Teori

Kapilerite, sıvının, bir katının çatlaklarından ve üst yüzeyinden sıvı ve katı arasındaki moleküler çekim nedeniyle akımı anlamına gelir. Bu kavram ilk defa Buckingham tarafından analiz edilerek doymamış kılcal akımın itici gücü olarak "kapiler potansiyel" kavramı öne sürülmüştür[22].

Kapiler potansiyel veya emme  $\psi$ , kılcal bir çatlakta eğrisel hava-su ara yüzeyinde hava ve su arasındaki basınç farkıdır. Ara yüzeyin eğriliği suyun yüzey geriliminden oluşur. Kılcal sıvı akım eşitliği,

$$j_L = -K_H \nabla \psi \quad (2.3)$$

şeklindedir. Burada  $K_H$  doymamış hidrolik iletim katsayısı,  $\psi$  kapiler potansiyeldir.

İzotermal koşullarda ise kapiler potansiyelin genellikle nem konsantrasyon gradyanıyla orantılı olduğu varsayılır ve (2.3) ifadesi

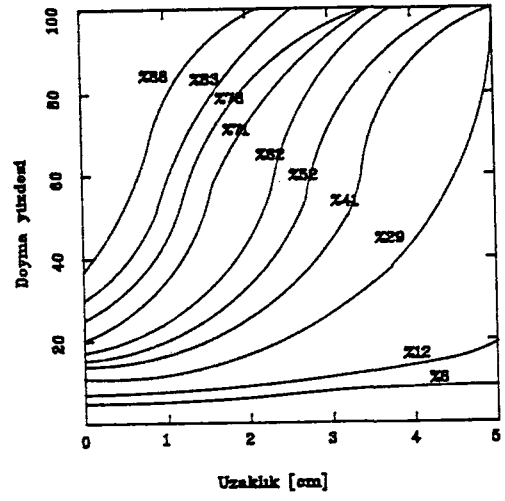
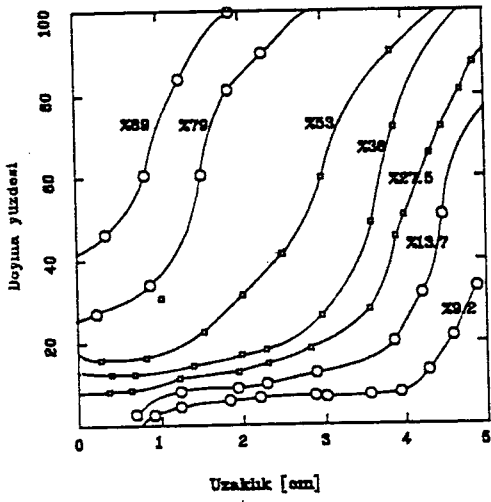
$$j_L = -K_H \rho \nabla X \quad (2.4)$$

şeklini alır[10,23]. Burada  $\rho$  katının özgül kütlesi,  $X$  nem miktarıdır.

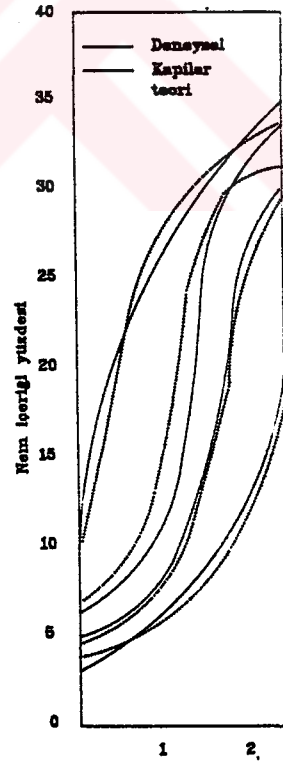
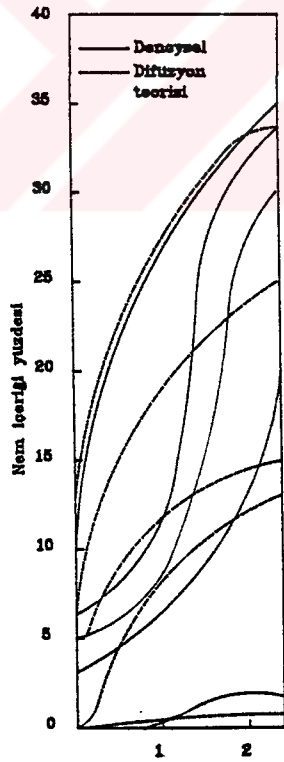
Doymamış gözenekli ortamda sıvı hareketlerinin incelenmesinde yüzey gerilim etkilerinin gözardı edilemeyeceğinin araştırmacılar tarafından ifade edilmesinden sonra Comings ve Sherwood da bu etkiyi çabucak anlamışlar ve kılcal olay sonucu sıvı hareketinin ve moleküler yayılma sonucu buhar hareketinin açıklanmasını içeren kısa bir not yayınlayıp kilin kurumasıyla ilgili bir dizi deney yapmışlardır. Ceaglske ve Hougan Haines'in kılcal basınç ve sıvı miktarı arasındaki bağıntı üzerine ayrıntılı çalışmasını kullanarak 2 inç kalınlığındaki bir kum tabakasının kuruması esnasındaki yoğunluk dağılımını hesaplayabilmişlerdir. Şekil 2.1 bu sonuçları göstermekte ve sözkonusu bu özel durum için, gözenekli bir katının kuruması esnasında nem hareketinde, kılcal etkinin hakim bir rol oynadığını açıkça sergilemektedir.

Bu çalışmaları Hougan VÇA'nın [22], çok uygun bir isimle "Kurutmada Difüzyon Eşitliklerinin Kullanımındaki Sınırlamalar" diye adlandırdıkları geniş araştırmaları izlemiştir. Burada deney bulgularıyla difüzyon eşitliğinin çözümleri ve kılcal basınç-yoğunluk eğrilerine dayanan hesaplamalar karşılaştırılmıştır. Kum için yapılan karşılaştırma Şekil 2.2'de görülmektedir.

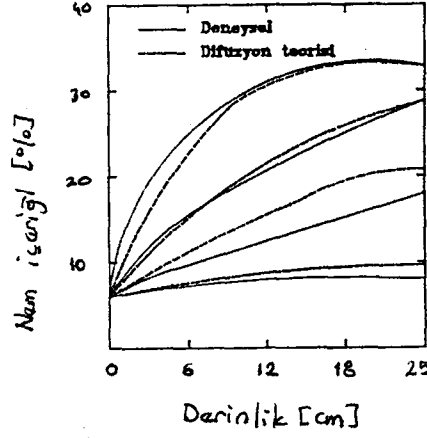
Burada sonuçlar belirli bir şekilde kapiler teori lehinedir. Araştırmada ayrıca kil, sabun, kağıt, kağıt hamuru, kurşun saçmasının kuruması ile ilgili sonuçlar verilmiş ve bunlarda sabit difüzyon katsayısı kullanılarak difüzyon eşitliğini deney bulgularıyla karşılaştırmanın mümkün olmadığı vurgulanmıştır. Tahta için ise durum farklıdır; nem miktarı belirli bir değer altında olduğu sürece deneysel değerlerle difüzyon eşitliği arasında oldukça iyi bir uyum elde edilmektedir. Tahta kurutması esnasında nem dağılımı için Tuttle tarafından elde edilen değerler ile difüzyon eşitliğinden hesaplanan değerler Şekil 2.3'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 2.1 Kum Tabakasının Kuruması Esnasında Nem Dağılımı.  
(a)DeneySEL, (b) Teorik [12].



Şekil 2.2 Kumun Kuruması Esnasında Nem Dağılımı.  
(a)Difüzyon Teorisiyle, (b)Kapılar Teoriyle Karşılaştırma [22].



Şekil 2.3 Tahta Kurutması Esnasında Nem Dağılımı [22].

Kapiler teori kurutma mekanizmasını difüzyon modeline göre daha iyi bir biçimde tanımlamasına rağmen modelin matematiksel formülasyonu oldukça karmaşıktır. Dolayısıyla elde edilen kurutma hızı modelleri birbirlerinden oldukça değişiktir ve uygulamaları da o oranda zordur[16].

### 3. Krischer Teorisi

Değişik gözenekli ortamlarda ısı ve kütle transferini analiz eden Krischer, kurutmada ısı transferinin rolünü açıklayan ilk bilim adamlarındandır ve O'nun çalışmaları geliştirilen kurutma teorilerinin çoğu için temel oluşturmuştur[1].

Krischer, nemi yüzeye ulaştıran etkinin difüzyonal etki ile kapiler etkinin toplamı olduğunu düşünmüş ve buhar fazındaki hareketin difüzyonla, sıvı fazdaki hareketin ise kılcal boru etkisi ile olduğunu ve her iki fazda hareketin tek yönlü olduğunu kabul etmiş ve Henry'nin yazmış olduğu sıcaklık ve nem içeriği arasındaki lineer bağıntıyı kullanarak sıcaklık ve nem yoğunluğunu zamanın bir fonksiyonu olarak ifade etmiştir. Ancak, teorinin kurutma zamanını doğru bir biçimde hesaplayabilmesi için gözenekli cismin iki fiziksel özelliğinin bilinmesi gereklidir. Bunlardan birincisi kapiler geçirkenlik, ikincisi difüzyonal direnç katsayısıdır. Bu iki katsayı genellikle gözenekli cisimde gözeneklerin yapısına, sıcaklığına ve nem dağılımına bağlıdır [27].

Modelin kullanılabilmesi için gerekli katsayıların fazlalığı, deneysel yöntemlerle elde edilebilme mecburiyeti, sıcaklık ve nem yoğunluğunun fonksiyonu olması ve hatta tüm bunlar sağlansa bile kurutma zamanını hesaplamak için çok karmaşık ve uzun hesaplama yöntemine ihtiyaç göstermesi Krischer teorisinin başlıca arzu edilmeyen tarafıdır[12].

#### 4. Philip ve DeVries Teorisi

Krischer teorisine benzer bir yolu izleyen Philip ve DeVries[23], gözenekli ortamda sıvı ve buhar hareketinde sıcaklık gradyanlarının etkisini açıklayan bir denklem grubu türetmişlerdir. Bu yazarların yaklaşımı da temel olarak nemin hem buhar difüzyonu hem de kılcal olaylarla hareket ettiğini varsayan bir yaklaşımdır.

Bu teori daha sonraları nemlendirme ısısının ve duyulur ısı transferinin katılması ve sıvı ve buhar fazlarında nem içeriğinin değişimlerinin ayırılmasıyla DeVries[24] tarafından daha da geliştirilmiştir.

Kolay algılanabilir fiziksel temeline rağmen difüzyon denklemlerine benzeyen denklemlerinin katsayılarının hem ancak dikkatli deneyler sonucu saptanabilmesi hem de bu yaklaşımla gerçek proses koşullarındaki kurutma olayını açıklamanın zorluğu bu teorisin çok fazla rağbet görmemesinin başlıca nedenleridir[1].

#### 5. Luikov Teorisi

Kurutmada devrim kabul edilen Luikov teorisi esas itibarıyla aynı kalarak günümüzde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada [Bölüm 3'de açıklanacak nedenlerden dolayı] Luikov teorisi baz olarak alındığından geniş bir değerlendirme daha ileride ele alınacaktır.

#### 6. Whitaker Teorisi

Gözenekli ortamda kurutma sürecini fizik kanunlarından çıkararak en genel haliyle çözmeye çalışan Whitaker; katı, gaz ve sıvı fazlarından meydana gelen gözenekli ortam modeline hacimsel ortalama uygulamış ve 4'ü kısmi diferansiyel denklem olan 12 adet denkleme ulaşırken yaptığı aşağıdaki kabulleri yapmıştır:

Herbir fazın ısıl geçirgenliği sabit; entalpiler basınçtan bağımsız olup sıcaklığın fonksiyonudur. Sıvı fazda sürtünme, gaz fazda kimyasal reaksiyon ihmal edilir. Sıvı fazın yoğunluğu sabittir ve gaz fazı ideal gaz gibi davranır.

Sonuç bölümünde yazarın da belirttiği gibi bu sınırlamaların geçerliliği ve kabullerin doğruluğu teorik ve deneysel olarak sınanmalı ve kanıtlanmalıdır. Ancak bunun zorluğuna kendisi de işaret eden Whitaker bu parametrelerin tahmini için değişik kurutma proseslerini uygun şekilde açıklayan özel teorilerin gerektiğini söylemektedir.

### C. Diğer Çalışmalar

Krischer teorisini esas alan Berger ve Pei[26,28], çeşitli iç ve dış fiziksel parametrelere bağlı olarak kurutma hızını incelerken Schadler ve Kast[29] higroskopik olmayan cisimleri sıvılarla doyurduktan sonra bir deney düzeneğinde kurutmuş; kurutucunun, sıvıların ve değişik yapılardaki örnekleri sistematik bir şekilde değiştirerek deneysel ve teorik bulgularını karşılaştırmışlardır.



Somasundaram VÇA[30], Philip ve DeVries teorisinden hareketle iki boyutlu doymamış gözenekli ortamda ısı ve kütle transferi problemini Laplace transformasyon tekniğini kullanarak çözmüşlerdir. Masmoudi ve Prat[31] ise yine doymamış gözenekli ortam ve dış hava arasındaki ısı ve kütle transferini hesaba katan sayısal bir yöntem sunmuşlardır.

Kumar[32]'in Luikov denklemlerinin genişletilmiş bir varyasyonel formülasyonunu vermesinden sonra Gupta[33], Cho[34], Mikhailov[35] ve Palancz[36] hareketli buharlaşma cephesi tekniğini kullanarak kurutma probleminin sayısal çözümlerini vermişlerdir. Luikov[37], kapiler gözenekli cisimlerde nem ve sıcaklığın zamana ve kurutulan malzemenin içindeki konumuna bağlı olarak değişimini gösteren kısmi diferansiyel denklemlerini tekrar gözden geçirerek bu denklemlerin sınırlamaları üzerinde durmuştur. Sıcak levha ile temasta olan nemli malzemelerin kurutulmasını inceleyen Mikhailov ve Shishedjiev[38] sıcaklık ve nem potansiyel dağılımları üzerine boyutsuz parametrelerin etkisini sayısal kurutma mekanizması üzerinde durarak sıcaklık ve nem içeriğinin yanısıra basıncın da yerel değerini en genel sınır şartları altında analitik olarak hesaplayıp Laplace transformasyon tekniğini kullanarak çözmüşlerdir. Luikov'un ısı ve kütle transferi teorisindeki bazı genel teoremleri üzerinde duran Wyrwal[40] bu tür problemlerde karşılaşılabilecek bazı sınır ve başlangıç şartlarını incelemiştir. Comini ve Lewis[41] tuğla, seramik elektrik izolatörü ve soğuk depo duvar ve döşemesinde sıcaklık ve nem dağılımı problemini; Thomas VÇA[42] ise fiziksel özellikleri sıcaklık ve neme bağlı olarak değişen tahta kurutma problemini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüş ve sıcaklık ve nem dağılımı diyagramlarını vermişlerdir. Liu ve Cheng[43] ise tahtada kararsız kurutma problemini kompleks özdeğerleri de gözönünde tutarak çözmüş ve bulgularını hem deneysel sonuçlarla hem de Thomas VÇA[42]'nin verdiği sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Whitaker denklemlerini kullanan Kaviany ve Mittal[44] higroskopik olmayan ve başlangıçta sıvı ile doyurulmuş tanecikli gözenekli ortam [cam boncuk] kurutmasını inceleyerek teorik ve deneysel bulguları karşılaştırmış ve sonuçların uyum içinde olduğunu göstermiştir. Tahta ve tuğla kurutmasında sıcaklık, nem ve basınç hesabı sonlu farklar yöntemi kullanılarak Nasrallah ve Perre[45] tarafından yapılmıştır. Shonnard ve Whitaker[46] nokta teması gözenekli ortam için efektif ısıl geçirgenliği deneysel olarak ölçmüş; Ilic ve Turner[47] ise nemli gözenekli malzemelerin sıcak kuru havayla sağlanan cebri konveksiyon yardımıyla kurutma sürecini tasvir için kullanılan kısmi diferansiyel denklemleri sonlu farklar yöntemiyle çözmüşlerdir. Tao VÇA[48] cam yünü tabakasında tek boyutlu kararsız nem ve don toplanmasını analiz etmişlerdir.

Kurutma için matematiksel modellerin geliştirildiği çalışmalarda Kolesnikov[49] ısı ve kütle transferinin genelleştirilmiş sınır şartlarını incelemiş; Chen ve Pei[50] higroskopik olan veya olmayan malzemelerin kuruma davranışlarını tasvirde kullanılacak bir kurutma modeli önermiş, sabit hız devresini ve azalan hız ön devresi ve son devresini ayrı ayrı ele almış, bu modelin geçerliliğini değerlendirebilmek için nem emme özellikleri değişiklik gösteren yün, tuğla ve hububat gibi üç sistem seçip diferansiyel eşitliklerin sayısal çözümü için hareketli sonlu elemanlar yöntemini kullanıp elde edilen sonuçların deneysel bulgularla uyum içinde olduğunu vurgulamışlardır. Smirnov ve Lysenko[51] deneysel verileri kullanarak hata fonksiyonları yardımıyla kurutma eğrilerinin nasıl belirleneceği üzerinde durmuş, Polyanin ve Dil'man[52] difüzyon akışları için basit cebirsel denklemler bulmayı mümkün kılan yeni yaklaşık bir analitik metod sunmuş, Stanish VÇA[53] ise higroskopik gözenekli ortam için geliştirdikleri modellerini örnek bir kurutma problemine uygulayarak teorik ve deneysel sonuçların uyum içinde olduğunu vurgulamışlardır.

Kurutmada ısı ve kütle transferi katsayılarını deneysel olarak belirleyen Shah VÇA [54] nemli ve doymamış iki çeşit toprak için ölçüm yaparken Zumbunnen VÇA[55] gözenekli katı ortamda ısı transferi için bir termal geçirgenlik modeli oluşturarak geniş bir sıcaklık aralığında değişik gözenekli katıların ısı geçirgenliklerini tüm yapı boyunca ölçebilmek için özel bir geliştirerek kullanmışlardır. Dutta VÇA[56] küresel taneciklerin, Wang ve Yu[57] ise yaş kumun transfer katsayılarını belirlemişlerdir.

Kurutmada ısı transferinin etkisini inceleyen Haber VÇA[58] yarı sonsuz gözenekli bir maddenin yüksek bir dış sıcaklığın etkisi altına girmesi halinde faz değişikliklerini de içeren değişik hızlı süreçlerin analitik bir incelemesini yapmış; Mori VÇA[59] ise düz levha yüzeyinden levha üzerindeki laminer sınır tabakaya buharlaşmayı teorik olarak analiz etmişlerdir.

Kereste kurutmasını inceleyen Plumb VÇA[60] kapiler hareket nedeniyle sıvı transferini içeren bir model geliştirerek hesaplanan sonuçların deneysel sonuçlarla uyum içinde olduğunu belirtmiş, Motakef ve El-Masri[61] kerestede aynı anda oluşan faz değişimli ısı ve kütle transferini analitik olarak incelemişlerdir. Shapiro ve Motakef[62] gözenekli tahta diliminde faz değişimli kararsız bir boyutlu ısı ve kütle transferini analitik olarak incelemiş ve çözümlerin deneysel verilerle uyum içinde olduğunu vurgulamışlardır.

Rubin ve Schweitzer[63] faz değişimi olan gözenekli ortamda ısı transferini inceleyerek kağıt kurutmasında sıvı ve buhar bölgesini ayıran hareketli buharlaşma cephesi üzerine çalışıp sabit fiziksel özellikli gözenekli ortamda kararsız problemin yaklaşık bir çözümünü bulmuştur. Gözenekli higroskopik cisimlerin terleme kurutmasını deneysel ve teorik olarak inceleyen Raj ve Emmons[64] da kağıt kurutmasını ele almış ve analitik ve deneysel sonuçların uyum içinde olduğunu göstermiştir.

Gözenekli ortamda basit bir kurutma modeli düşünen Cross VÇA[65], küresel kurutma için analitik çözüm sunarak maksimum basıncı hesaplamış ve analizde demir cevherini gözönüne almışlardır. Ilic ve Turner[66] ise, nemli tabakalardan oluşan büyük ölçekli stoklarda zorlanmış sıcak havanın konveksiyon etkisiyle sağladığı kurutmayı formüle eden bir modeli sunarak ızgaralı fırın sisteminde demir cevherinin kurutmasına uygulamışlardır.

Dinulescu ve Eckert[67] kum tabakasında bir boyutlu nem dağılımı için analitik bir çözüm vererek güneşin etkisi altındaki kısımda nem dağılım problemini çözmüşlerdir.

Rogers ve Kaviany[68] cam küre ve etanoldan meydana gelmiş tanecikli yatağın konveksiyon kurutmasında hareketli buharlaşma cephesi tekniğiyle kütle transfer hızı, sıcaklık ve basınç değerlerini hesaplamış ve deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Lyons VÇA[69] iç ısı üretimli gözenekli ortamı kurutma probleminde mikrodalga ısıtmasıyla desteklenmiş [pamuk gibi] absorbent malzemelerin aksiyal, radyal ve her iki yönden kurutulmasını deneysel olarak incelemişlerdir.

Gibson VÇA[70] sonlu kalınlıkta gözenekli şekillerin kurutulmasında ortaya çıkan basınç gradyanlerini açıklamak için matematiksel bir model oluşturarak refrakter malzeme kurutmasına uygulamıştır.

Huang VÇA[25] bitişik duvarlarda nem dağılımını zamanın fonksiyonu olarak belirlemek için geliştirdiği matematiksel modeli kullanmış ve çimento macununu analiz ederek sıcaklık, nem ve basıncın zamanla değişimini hesaplamışlardır.

Ateşe maruz gözenekli ortamda ısı ve kütle transferini inceleyen Sahota ve Pagni[71] oluşturdukları ısı ve kütle transferi denklemlerini alüminyum toz için sonlu farklar yöntemiyle sayısal olarak çözmüş ve sonuçları ASTM limitleriyle karşılaştırmışlardır.

Eckert ve Faghri[72] bir yüzeyin sıcaklığının aniden daha yüksek bir değere çıkması durumunda, doymamış gözenekli malzeme tabakasında nem hareketini açıklayan genel bir analiz vermişlerdir.

Bundan sonraki bölümde bu çalışmada çözülecek problemde kullanılacak kurutma teorisi seçilerek bu teorinin ana kabulleri üzerinde durulacak, ana fikirleri ve sınırlamaları özetlenecektir.

## Kurutmanın Genel Teorisi

Önceki bölümde kurutma çalışmalarının kısa bir tarihsel gelişimi verilmiş ve kurutma süreçlerini açıklamak için geliştirilen ve en fazla rağbet gören kurutma teorileri kısaca özetlenmiş ve literatür incelemesinin sonuçları verilmişti. Bu bölümde, kurutma ile ilgili problemlerin çözümünde kullanılmak üzere mevcut kurutma teorileri arasından en uygun olan seçilecek ve bu teori hakkında daha detaylı bilgi verilecektir.

Bölüm 1'de vurgulanan nedenlerden dolayı kurutma ile ilgili problemlerin çözümünde amaç, kurutulan ürün içinde sıcaklık ve nem dağılımını ve ürünün çevre ile ısı ve kütle alışverişini sağlıklı olarak belirlemektir. Bölüm 2'de detaylı olarak incelenen çalışmalardan görüleceği gibi kurutma olayının açıklanmasında difüzyon teorisinin tek başına yeterli olmadığını anlaşılmasından sonra yapılan çalışmalarda kapiler teori de kullanılmış ve bunun yanısıra kurutmada ısı transferinin etkisinin ilk olarak Krischer tarafından kendi adıyla anılan teorisinde gözönüne alınmasından sonra araştırmacılar kapiler etkinin yanısıra ısı transferinin etkisini de gözönüne alacak kurutma teorilerinin oluşturulması çalışmalarına yönelmişlerdir. Bu nedenle burada seçilecek teori hem kapiler etkiyi hem de ısı transferi etkisini gözönüne almalıdır. Bu amaçla geliştirilen teoriler genel olarak Luikov ve Whitaker yaklaşımları olarak iki grupta toplanabilirler. Bunlardan Luikov, teorisini kurmadan önce uzun yıllar deney yapmış ve bu deney sonuçlarını yayınlamış Whitaker ise bu konuda Luikov'a nazaran çok daha az deney sonucu vermiştir. Öte yandan Luikov'un teorisini kullanılarak [basit durumlar için bile olsa] analitik çözümler elde edilmişken Whitaker'ın teorisini için 1993 yılı sonuna kadar yapılmış herhangi bir analitik çözüme rastlanmamıştır. Her iki teori de sayısal çözüm yöntemlerine uygundur ancak deneysel olarak belirlenmesi gereken bazı katsayılar ihtiyaç duymaktadır. Literatürde Luikov Teorisi'nin Whitaker Teorisi'ne nazaran daha fazla kullanıldığı gözlenmiştir ve her iki sayısal çözüm yönteminden elde edilen sonuçların deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığı çalışma çok azdır.

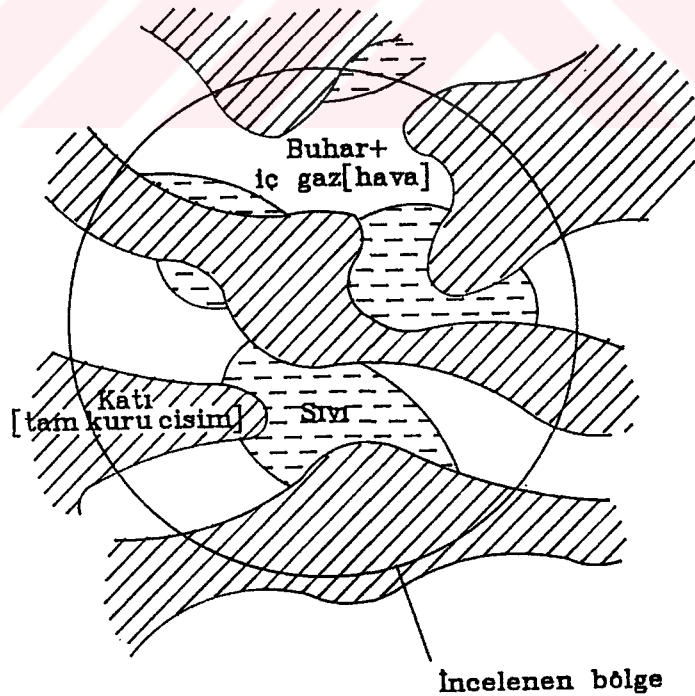
Bu çalışmada [dördü kısmi diferansiyel denklem olan] oniki adet denklemlerle ifade edilen Whitaker Teorisi elimine edilerek iki adet kısmi diferansiyel denklemden oluşan ve formu sayısal yöntemlerle çözüme daha uygun olan Luikov Teorisi esas alınacaktır. Bu teori hakkında detaylı bilgi literatürde [10,37,73-75] verildiğinden burada Luikov Teorisi'nin ana kabulleri üzerinde kısaca durularak sınırlamaları özetlenecek ve ısı ve kütle transferi denklemleri tanıtılacaktır.

## A. Isı ve Kütle Transferi Denklemleri [10,37,73,74,75]

Luikov, gözenekli ortamda ısı ve kütle transferi denklemlerini oluştururken Şekil 3.1'de verilen kapiler gözenekli cisim[KGC] modelini kullanmıştır. Bu modelde KGC ve KGC'yi oluşturan bileşenler [bağlı maddeler] gözönüne alındığında sıcaklık  $0^{\circ}\text{C}$ 'ın üzerinde ise gözeneklerde sıvı, buhar ve iç gaz [genellikle hava] bulunabilir. [Luikov kurutma olayını açıklayacak denklemleri oluştururken nemin katı bileşeni olan buz da gözönüne almıştır ama bu çalışmada donma kurutması incelenmeyeceğinden nemin bu bileşeni gözardı edilecektir.] Bundan sonraki gösterimlerde KGC'yi meydana getiren bileşenler aşağıdaki indislerle gösterilecektir:

- 0 : tam kuru cisim [cismin kafesi, iskeleti]
- 1 : su buharı
- 2 : sıvı [su]
- 3 : iç gaz [hava].

Kapiler gözenekli cisimlerde boşluk ve kapilerler nem ile kısmen dolar; yani, cisim içinde kapillerlerin bazıları sıvı kalını ise buhar-gaz karışımı ile dolar. Hangisini ele alırsak alalım mevcut nem miktarı, ısı ve kütle transferi işlemlerinde değişecektir. Bu nedenle transfer denklemleri hem cismin kapilerlerindeki nem konsantrasyonundaki değişimi hem de akışın ayrıntılarını göz önünde tutmalıdır.



Şekil 3.1 Luikov'un kapiler gözenekli cisim [KGC] modeli

Cisim içindeki kapilerlerde bulunan bağlı kütlelerin [iç gaz, buhar ve sıvı] hacımsal konsantrasyonu

$$w = \frac{m}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 m_i = \sum_{i=1}^3 w_i \quad (3.1)$$

ifadesine eşittir. Burada

$m$  madde kütlesi,  
 $V$  cismin hacmi,  
 $m_i$   $i$  durumundaki bileşenin [bağlı maddenin] kütlesi ve  
 $w_i$   $i$  durumundaki bileşenin [bağlı maddenin] hacımsal konsantrasyonu olup KGC'de bağlı madde kütlesi

$$m = \sum_{i=1}^3 m_i \quad (3.2)$$

denkliğiyle bulunur. Ancak çoğu durumda bağlı maddenin hacımsal konsantrasyonu yerine bağlı konsantrasyon [veya özgül kütle içeriği]  $u$  kullanılır:

$$u = \frac{m}{m_0} = \frac{w}{\rho_0} \quad (3.3)$$

bu denklemde ise

$m$  bağlı madde kütlesi,  
 $m_0$  tam kuru cisim kütlesi,  
 $\rho_0$  tam kuru cismin yoğunluğu

olarak kullanılmıştır. Kapiler gözenekli cismin özgül kütle içeriği ise farklı durumlardaki bağlı maddenin özgül kütle içeriklerinin toplamına eşittir:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i \quad (3.4)$$

Normal koşullar altında, kapilerlerdeki hava, buhar ve sıvı kütlesiyle karşılaştırıldığında önemsizmeyecek kadar küçüktür. B.A.Posnov'un hesaplamalarına göre maksimum poroziteli cisim için normal koşullar altında kapilerlerdeki nemli hava kütlesi sıvı kütlelerinin %10<sup>-3</sup>'üne sahiptir[10]. Bu yüzden cismin özgül kütle içeriği [yüksek bir doğrulukla] sıvının özgül kütle içeriğine eşit alınabilir:

$$u \approx u_1 + u_2. \quad (3.5)$$

Buna göre ısı ve kütle transferinin birlikte olduğu durum için temel korunum denklemleri Luikov tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir[74]:

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{j}_q - \sum_{i=1}^2 h_i I_i \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial (\rho_0 u_i)}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{j}_i + I_i \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial (\rho_0 u)}{\partial \tau} = -\text{div} \sum_{i=1}^2 \vec{j}_i \quad (3.8)$$

Bunlardan (3.6) denklemi ısı enerji dengesini gösterir. Burada

- $t$  sıcaklık,
- $\tau$  zaman,
- $\rho_0$  tam kuru cismin yoğunluğu
- $\rho_0 c_q$  ısı kapasitesi,
- $j_q$  ısı akış vektörü [=Q/A $\tau$ ],
- $h$  özgül entalpi,
- $I$  kuru cismin birim hacminde kütle oluşum veya kaybolma hızı ve  $\sum h_i I_i$  ısı kaynağı

olarak kullanılmıştır. Bu denklemde ilk terim kuru malzemenin birim hacmi başına ısı miktarındaki değişim hızını, ikinci terim birim hacim başına ısı transfer hızını ve üçüncü terim faz değişimleri tarafından birim hacim başına üretilen veya tüketilen ısıyı gösterir.

Denklem (3.7) herhangi bir faz için kütle dengesini gösterir. Burada

- $u_i$  nem miktarı
- $j_i$  [=m/A $\tau$ ] i bileşenin toplam kütle akış vektörü [akış yönüne dik birim alan başına kütle akış hızı]

şeklindedir.

Denklem (3.8) ise tüm bileşenler için (3.7) denkleminin toplanmış halidir.

Bu denklemlerin türetilmesinde aşağıdaki kabuller yapılmıştır:

1. Kapillerlerde bulunan nem yalnızca sıvı ve buhar formundadır ve i=1 ve i=2 indisi sırasıyla buhar ve sıvıyı gösterir.
2. Sıvı, buhar ve kuru cisim sıcaklığı temas noktalarında dengededir.
3. Su kaybıyla ilgili kimyasal reaksiyonlar ihmal edilmiştir.
4. KGC'de boyut değişimleri son derece küçüktür.

Malzeme içinde nem miktarı ve sıcaklık dağılımında geçerli temel denklemler (3.6), (3.7) ve (3.8) denklemleridir. Bu durumda kütle ve ısı akıları [nem miktarı ve sıcaklık gradyanı gibi] ölçülebilir büyüklükler ve uygun iletim ve difüzyon katsayıları cinsinden ifade edilmelidir ve bu aşağıda yapılacaktır.

Kütle transferi durumunda KGC'nin gözeneklerinde toplam net akı vektörü  $[j_n]$ , buhar difüzyonuna gereken akı  $[j_1]$  ve sıvı su transferine gereken akıların  $[j_2]$  toplamına eşit olur:

$$\vec{j}_n = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \quad (3.9)$$

Öte yandan kütle akısı yalnızca nem konsantrasyonu gradyeniyle ilgili değil aynı zamanda sıcaklık gradyeniyle de ilgilidir ve bu olay Soret Etkisi olarak bilinir ve aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\vec{j}_1 = -a_{n1}\rho_0\nabla u - a_{n1}^T\rho_0\nabla t \quad (3.10a)$$

$$\vec{j}_2 = -a_{n2}\rho_0\nabla u - a_{n2}^T\rho_0\nabla t \quad (3.10b)$$

Burada

$a_{ni}$  i durumu için efektif nem difüzyon katsayısı

$a_{ni}^T$  i durumu için efektif ısı nem difüzyon katsayısıdır. Yukarıdaki açıklamanın ışığında (3.10) denklemleri (3.9)'da yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\vec{j}_n = -\rho_0 a_n (\nabla u + \delta' \nabla t) \quad (3.11)$$

yazılır. Burada

$$a_n = \frac{k_n}{\rho_0 c_n} = a_{n1} + a_{n2}$$

$$\delta' = \frac{a_{n1}^T + a_{n2}^T}{a_{n1} + a_{n2}}$$

$$\delta = \frac{\delta'}{c_n}$$

şeklindedir. Bu denklemlerde

$a_n$  toplam nem difüzyon katsayısı,

$k_n$  nem geçirgenliği,

$c_n$  nem kapasitesi,

$\delta$  ısı gradyen katsayısı ve

$\delta'$   $\delta$  ve  $c_n$  katsayılarına bağlı bir oran sabiti

olarak kullanılmıştır. Tam kuru cismin özgül kütlesi  $[\rho_0]$  sabit kabul edilerek (3.11) denklemi (3.8) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \text{div}[a_n (\nabla u + \delta' \nabla t)] \quad (3.12)$$

elde edilir.



Benzer şekilde ısı akısı vektörü  $j_q$  normal olarak sıcaklık gradyeniyle ilgili olmasına rağmen ısı ve kütle transferinin birlikte olduğu durumda [zayıf da olsa] nem gradyenine de bağlıdır. "Dufour Etkisi" olarak bilinen bu olayın kurutma uygulamasında önemsiz olduğu kabul edilerek ihmal edilir ve

$$\vec{j}_q = -k_q \nabla t \quad (3.13)$$

denklemini yazılır. Burada  $k_q$  KGC'nin toplam ısı geçirgenlik katsayısını gösterir ve bu değer tam kuru cisme ve kapillerlerinde bulunan bileşenlerine [sıvı ve buhar] bağlıdır. Denklem (3.6)'daki son terim için faz değişiminin özgül entalpisi  $\lambda$

$$\lambda = h_1 - h_2 \quad (3.14)$$

ve faz dönüşüm faktörü  $I$

$$I = \varepsilon \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (3.15)$$

olarak tanımlanırsa (3.6) denklemi

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}(k_q \nabla t) + \varepsilon \lambda \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\varepsilon$  buhar difüzyon katsayısına nemin toplam difüzyon katsayısının oranıdır ve değeri aşağıda verilmiştir:

$$\varepsilon = \frac{a_{n1}}{a_n} = \frac{a_{n1}}{a_{n1} + a_{n2}} \quad (3.17)$$

Eğer  $\delta$ ' yerine ısı-gradyen katsayısı tanımından  $\delta c_n$  ve özgül kütle içeriği  $u$  için de

$$u = c_n u' \quad (3.18)$$

tanımı yapılır ve bunlar (3.12) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial(c_n u')}{\partial \tau} = \text{div}[a_n [\nabla(c_n u') + \delta c_n \nabla t]]$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \tau} = \text{div}[a_n (\nabla u' + \delta \nabla t)]$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \tau} = \text{div}\left[\frac{k_n}{\rho_0 c_n} (\nabla u' + \delta \nabla t)\right] \quad (3.19a)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.16) denklemi de

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}(k_q \nabla t) + \varepsilon \lambda \rho_0 \frac{\partial (c_n u')}{\partial \tau}$$

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}(k_q \nabla t) + \varepsilon \lambda c_n \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial \tau} \quad (3.19b)$$

şeklini alır. Bu denklemlerde  $a_n$ ,  $k_q$ ,  $c_q$ ,  $\varepsilon$  ve  $\delta$  büyüklükleri  $u'$  ve/veya  $t'$ ye bağlıdır. Problemin alt bölgelere ayrılarak incelendiği hesaplama sistemi [örneğin sonlu elemanlar, sonlu farklar] için bu katsayılar alt bölgelerin herbirinde sabit alınıp her bölgedeki ortalama değerlerine eşit olacağından (3.19) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = k_q \nabla^2 t + \varepsilon \lambda \rho_0 c_n \frac{\partial u'}{\partial \tau} \quad (3.20a)$$

$$\rho_0 c_n \frac{\partial u'}{\partial \tau} = k_n \delta \nabla^2 t + k_n \nabla^2 u' \quad (3.20b)$$

veya ikinci denklem birinci denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\rho_0 c_q \frac{\partial t}{\partial \tau} = (k_q + \varepsilon \lambda k_n \delta) \nabla^2 t + \varepsilon \lambda k_n \nabla^2 u' \quad (3.21)$$

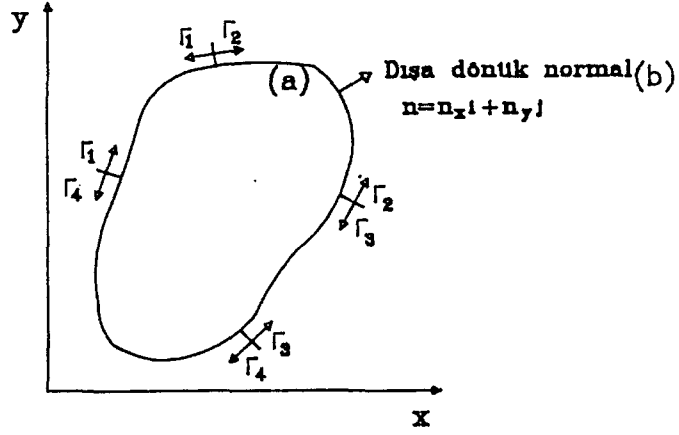
$$\rho_0 c_n \frac{\partial u'}{\partial \tau} = k_n \delta \nabla^2 t + k_n \nabla^2 u' \quad (3.22)$$

denklemleri elde edilir. Laplace operatörü  $[\nabla^2]$ 'nin kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlardaki değerleri gözönüne alınacak olursa burada elde edilen (3.21) ve (3.22) bağıntıları istenilen koordinat sisteminde ve boyutta değişik geometrilere sahip gözenekli cisimlerde kullanılabilecek ısı ve kütle transferinin kısmi diferansiyel denklemleridir.

## B. Isı ve Kütle Transferinin Sınır Şartları

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözülebilmesi için sınır şartlarının [ve zamana bağlı problemlerde başlangıç şartlarının] da belirtilmesi gerekir<sup>1</sup>. Bu çalışmada (3.21) ve (3.22) denklemleri için Luikov[10,75] ve Luikov ve Mikhailov[73,74] tarafından verilen ısı ve kütle transferi sınır şartları kullanılacaktır ve bunlar Şekil 3.2'de verilen sınırlarda aşağıdaki gibi alınabilir:

1: Sınır şartları ve başlangıç şartlarıyla ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 4'de verilecektir.



Şekil 3.2 Isı ve kütle transferinin sınır şartları

#### Isı transferi sınır şartları

$\Gamma_1$  sınırında [sıcaklığı sabit olan sınır bölgesi]

$$t = t_w \quad (3.23)$$

$\Gamma_2$  sınırında [sabit ısı akısı etkisi altındaki sınır bölgesi] ise

$$k_q \nabla t \vec{n} + j_q + \alpha_q (t - t_\infty) + (1 - \epsilon) \lambda \alpha_n (u' - u'_\infty) = 0 \quad (3.24)$$

#### Kütle transferi sınır şartları

$\Gamma_3$  sınırında [nem potansiyeli sabit olan sınır bölgesi]

$$u' = u'_w \quad (3.25)$$

$\Gamma_4$  sınırında [nem akısı etkisi altındaki sınır bölgesi]

$$k_n \nabla u \vec{n} + j_n + k_n \delta \nabla t \vec{n} + \alpha_n (u' - u'_\infty) = 0 \quad (3.26)$$

Bu eşitliklerdeki  $t_w, u'_w, t_\infty, u'_\infty, j_q, j_n, \alpha_q, \alpha_n$  değişkenleri genellikle yer ve zamanın bilinen fonksiyonu olup anlamları aşağıda açıklanmıştır:

- $\alpha_q$  konveksiyon ısı transfer katsayısı,
- $\alpha_n$  konveksiyon kütle transfer katsayısı,
- $j_q$  öz ısı akısı,
- $j_n$  öz kütle akısı,
- $t_\infty$  çevre sıcaklığı,
- $u'_\infty$  çevre kütle transfer potansiyeli,
- $t_w$  yüzey sıcaklığı,
- $u'_w$  yüzey kütle transfer potansiyeli

Sonraki bölümde bu denklemlerin çözümünde kullanılabilecek sayısal yöntemler üzerinde durularak Bölüm 6'da kullanılacak olan seçilecektir.

## Çözüm Yöntemlerine Giriş

Analitik çözüm incelenen ortam içindeki herhangi bir noktada aranan bir bilinmeyen değerini veren matematiksel bir ifadedir ve ortam içinde bulunan sonsuz sayıdaki diğer noktalarda da geçerlidir. Kartezyen, silindirik veya küresel koordinatlarla kolayca tanımlanan problemlerin analitik çözümü mümkün olmakla birlikte genellikle kompleks geometrik şekilli problemlerin analitik çözümü zor ve çoğunlukla imkansızdır. Böyle bir problemle karşılaşan çözümleyici doğal olarak "sayısal" adı verilen çözüme başvuracaktır. Sayısal çözüm yöntemlerinde bilinmeyen yaklaşık değeri sadece sistem içindeki belirli noktalarda elde edilir. Kabul edilebilir hassaslıkta bir çözüm eğer makul bir zaman harcayarak elde edilebiliyorsa sayısal çözüm tercih edilmelidir.

Sayısal çözüm yöntemleri arasında diferansiyel denklem[DD]lerin çözümü önemli bir yer tutar. Bu bölümde [Bölüm 3'de incelenen kurutma denklemleri kısmi diferansiyel denklem[KDD]ler olduğundan] KDD'lerin çözümü üzerinde kısaca durulacak ve Bölüm 5 ve 6'da kullanılacak olan çözüm yönteminin seçiliş nedeni kısaca anlatılarak bu yöntemin esası hakkında bilgi verilecektir.

### A. Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Bir DD'nin çözümü deyimiyle türev hariç bağımlı ve bağımsız değişkenleri arasındaki bağıntıyı gösteren eşitlik anlaşılır. Değişkenlerin ayrışması, serilerle çözüm, Laplace transformasyonları, sonlu farklar, sonlu elemanlar KDD'lerin çözümünde kullanılan yöntemlerden bazılarıdır. Bu yöntemlerin birbirlerine üstünlükleri probleme ve sınır şartları[SS]na göre değişir. Burada Bölüm 3'de verilen ve kurutma olayını açıklayan KDD'lerin çözümünde etkili olarak kullanılan sonlu farklar yöntemi [SFY] ve sonlu elemanlar yöntemi [SEY] üzerinde kısaca durulacak; bu inceleme konuya yakınlığı nedeniyle ısı transferi problemi üzerinde yapılacaktır. Diğer yöntemlerle ilgili ayrıntılı bilgi literatürde [76,77,78] verilmiştir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin sonsuz sayıda çözümleri olmasına rağmen verilmiş olan SS'leri ve zamana bağlı problemler için başlangıç şartını sağlayan çözümü tektir. Constantinides [78]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_{\tau} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

şeklindeki tek boyutlu zamana bağlı ısı kondüksiyon denklemi yardımıyla [t sıcaklık, τ zaman, x koordinat, a<sub>τ</sub> ısıl difüzyon katsayısı] KDD'lerin başlangıç ve sınır şartlarını Dirichlet, Cauchy ve Robbins şartları olmak üzere üç kategoriye [Şekil 4.1] ayırarak incelemiştir:

### 1. Başlangıç Şartları

Özellikle zamana bağlı ısı transferi probleminin çözümü için herhangi bir zamanda [genellikle işlemin başlangıcı olan τ=0 anında] cisim içerisindeki sıcaklık dağılımı verilmeli ve bu şart sistemin her noktasında gerçekleşmelidir.

### 2. Birinci Çeşit [Dirichlet] Sınır Şartları

Cismi sınırlayan yüzeylerin sıcaklığının belirli olmasıdır. Sınırdaki sıcaklık sabit, zamanın ve koordinatların bir fonksiyonu, yalnız koordinatların veya yalnız zamanın bir fonksiyonu olabilir. Buna göre Dirichlet sınır şartları

$$\begin{array}{llll} \tau = 0 & \text{ve} & 0 \leq x \leq l & \text{'de} & t = f(x) \\ \text{veya} & \tau = 0 & \text{ve} & 0 \leq x \leq l & \text{'de} & t = t_0, \\ \text{veya} & \tau > 0 & \text{ve} & x = 0 & \text{'da} & t = f(\tau) \\ \text{ve} & \tau > 0 & \text{ve} & x = l & \text{'de} & t = t_1 \end{array}$$

olarak ifade edilir [Şekil 4.1a].

### 3. İkinci Çeşit [Neumann] Sınır Şartları

Cismi sınırlayan yüzeylerdeki ısı akısının belirli olmasıdır. Sınırdaki ısı akısı dağılımı sabit, zamanın ve koordinatların bir fonksiyonu, yalnız koordinatların veya yalnız zamanın fonksiyonu olabilir. Yüzeyde ısı kaybı yok ise adyabatik durum söz konusudur:

$$x = l \quad \text{ve} \quad \tau \geq 0 \text{'da} \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Bu şart sağ sınırdaki sıcaklık gradyanının sıfır olduğunu belirler [Şekil 4.1b].

### 4. Üçüncü Çeşit [Robbins] Sınır Şartları

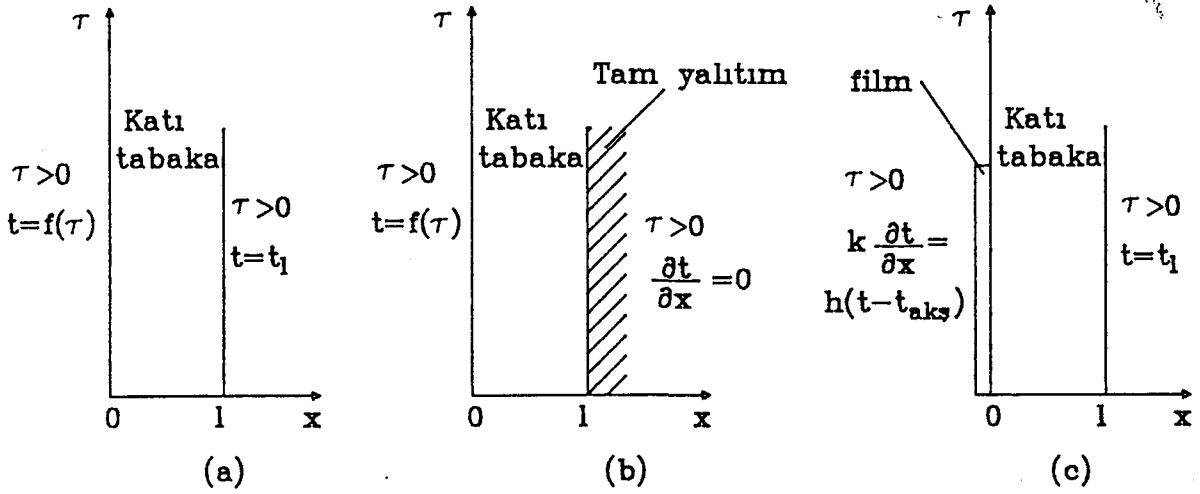
Bağımlı değişkenin türevinin bağımlı değişkenin fonksiyonu olarak verilmesidir. Isı kondüksiyon probleminde katı-akışkan arayüzündeki ısı akısı arayüzdeki sıcaklık ve akışkan sıcaklığı arasındaki farkla ilişkilendirilebilir. Yani

$$x = 0 \quad \text{ve} \quad \tau \geq 0 \text{'da} \quad k \frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_{akışkan})$$

burada h akışkanın ısı taşınım katsayısıdır [Şekil 4.1c].

### 5. Cauchy Şartları

Bir problem Dirichlet ve Neumann şartlarının ikisini de içeriyorsa bu Cauchy şartları olarak adlandırılır [Şekil 4.1b].



Şekil 4.1 Isı Kondüksiyon Problemi İçin Başlangıç ve Sınır Şartları [78]

- (a) Dirichlet Şartları,
- (b) Cauchy [Dirichlet ve Neumann] Şartları,
- (c) Robbins Şartları

## B. Sonlu Farklar Yaklaşımı [78-80]

Isı iletimi problemlerinin SFY ile formülasyonunda temel prensip, sürekli sıcaklık dağılımını gösteren diferansiyel denklemi, katı cisim içerisinde belirli noktalarda sıcaklık dağılımını sağlayan sonlu farklar denklemi cinsinden yazmaktır. Örnek olarak Şekil 4.2a'da gösterildiği gibi x ve y yönünde kafeslere bölünmüş iki boyutlu katı cisim gözönüne alalım. İç ısı üretiminin olduğu kararlı hal iki boyutlu ısı iletiminin kartezyen koordinatlarda diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q^* = 0 \quad (4.1)$$

şeklindedir[80]. Burada  $k_x$  ve  $k_y$  sırasıyla x ve y yönündeki kondüksiyon katsayıları,  $q^*$  ise iç ısı üretimidir ve bunlar x ve y koordinatlarının bilinen fonksiyonudurlar. Bu denklemi sonlu farklar cinsinden yazabilmek için türevlerin [sıcaklık basamaklarının] ayrı ayrı sonlu farklar cinsinden ifade edilmesi gerekir. Buna göre Şekil 4.2a'da gösterilen m,n noktasında  $\partial t / \partial x$  türevi, ileri sonlu fark cinsinden

$$\frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{t(x+\Delta x, y) - t(x, y)}{\Delta x} \quad (4.2)$$

olarak yazılır [Şekil 4.2c]. Şekil 4.2a'da görüleceği gibi, x yönünde  $\Delta x$  artımlarının sayısını m, y yönünde  $\Delta y$  artımlarının sayısını da n ile gösterirsek (4.2) türevini genel olarak

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{m+1/2,n} \approx \frac{t(x+\Delta x, y) - t(x, y)}{\Delta x} = \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} \quad (4.3)$$

ve geri fark cinsinden ise

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{m-1/2,n} \approx \frac{t_{m,n} - t_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (4.4)$$

olarak yazabiliriz [Şekil 4.2c]. İkinci türevin tanımından  $\partial^2 t / \partial x^2$  ise merkezi fark cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{m+1/2,n} - \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{m-1/2,n} \right] \quad (4.5)$$

Yukarıda elde edilen (4.3) ve (4.4) ifadeleri (4.5)'de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \approx \frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (4.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \approx \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.7)$$

yazılır. Hesapları kolaylaştırmak için  $k_x = k_y = k$  ve  $\Delta x = \Delta y$  seçilip, (4.6) ve (4.7) denklemleri (4.1) diferansiyel denkleminde yerlerine konur ve düzenlenirse

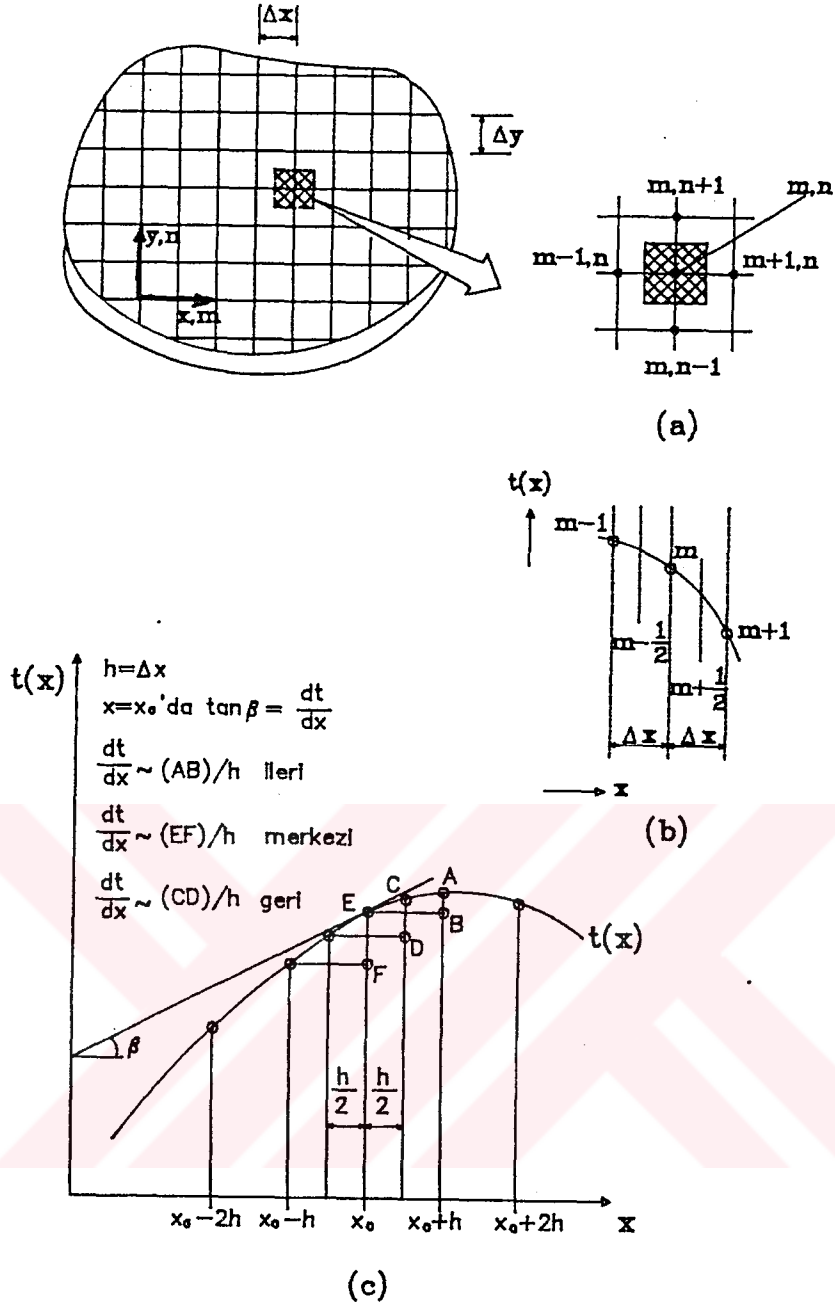
$$t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + \frac{q^* (\Delta x)^2}{k} - 4t_{m,n} = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu denklem katı cismin içerisinde kafesin her kesim noktası için geçerlidir. Sınırlara yaklaştıkça sınır sıcaklıklarının hesabı için sınır şartlarının da bilinmesi gerekir. Sonlu farklar yöntemi için bu sınır şartlarından bazıları literatürde [79] özetlenmiştir.

Görüldüğü gibi (4.1) KDD'si yerine [düğüm sayısına bağlı olarak] (4.8) denkleminle verilen cebirsel denklem takımı elde edilmiştir. Bundan sonraki adım bu cebirsel denklem takımının çözümüdür ve literatürde [76-78] bu konuda ayrıntılı bilgi bulunabilir.

## C. Sonlu Elemanlar Yaklaşımı

Sonlu elemanlar yönteminde de amaç [SFY'de olduğu gibi] KDD'leri cebirsel denklemler haline getirmektir. İncelenen ortam sonlu farklar yaklaşımında noktalar kümesinin çözümü olarak alınırken SEY'de problem sonlu eleman [SE] denen küçük elemanlarla temsil edilir. Böylece elemanlara bölünmeden önce sonsuz çözümü olan problem sonlu sayıda bilinmeyeni olan bir probleme dönüşür.



Şekil 4.2 İki Boyutlu Kondüksiyon

- (a) Düğüm Şebekesi,
- (b) Sonlu Fark Yaklaşımı [79]
- (c) Birinci türev yaklaşımı [91]

Sonlu farklar yönteminde elde edilen çözümle karşılaştırma yapabilmek amacıyla burada da kararlı iki boyutlu ısı kondüksiyon denkleminin [denklem 4.1] sonlu elemanlar çözümü [yöntem hakkında ayrıntılı bilgi ileriki konularda verileceğinden] kısaca verilecektir. Bu yöntemde her bir eleman içindeki sıcaklık dağılımı

$$t^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) t_i = [N] \{t\}^{(e)} \quad (4.9)$$



olarak kabul edilir. Burada  $n$  incelenen (e) elemanındaki düğüm sayısı,  $t_i$  sıcaklığın  $i$  düğüm noktasındaki yaklaşık değeri,  $N_i$  ise [sonraki bölümlerde açıklanacak olan] interpolasyon [şekil, biçim] fonksiyonudur. [Yine ileride açıklanacak olan] Galerkin yaklaşımı yardımıyla ve çözüm bölgesinde üç düğüm noktalı üçgen sonlu eleman kullanılması ve  $k_x = k_y = k$  kabulünün yapılmasıyla (4.1) denkleminin SEY çözümü aşağıda verilmiştir [5]:

$$\frac{k}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ \text{smt.} & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta q_i^*}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.10)$$

burada  $\Delta$  SE olarak kullanılan üçgenin alanı,  $b_n$  ve  $c_n$  sonraki bölümlerde incelenecek olan interpolasyon fonksiyonuyla ilgili olan sabitler,  $q_n^*$  iç ısı üretiminin  $n$  düğüm noktasındaki değeri,  $t_n$  ise [denklemin çözülmesiyle bulunacak olan] sıcaklığın  $n$  düğümündeki değeridir. Görüldüğü gibi yine (4.1) KDD'si yerine eleman interpolasyon fonksiyonunun seçilmesiyle iki boyutlu elemanın sıcaklık dağılımı, herbir eleman için yazılan (4.10) denkleminin ileride açıklanacak olan uygun yöntemlerle birleştirilmesiyle oluşturulacak cebirsel denklem takımının çözülmesiyle belirlenebilir.

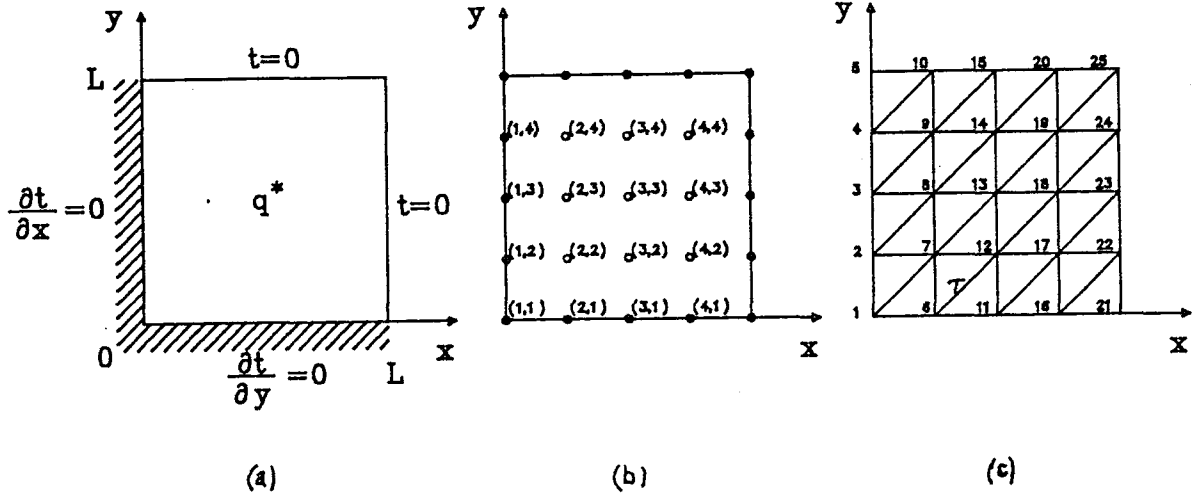
## D. Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Son yıllarda her iki yöntemde de özellikle bilgisayar olanaklarının gelişmesi ve kullanımının yaygınlaşmasının paralelinde diğer sayısal çözüm yöntemlerine göre çok büyük gelişmeler kaydedilmiştir. Çözümü zor olarak bilinen problemler bu yöntemlerle daha kolay çözülebilmektedir.

Her iki yöntemin karşılaştırılmasıyla ilgili olarak çok sayıda yayın [78,80-84] vardır. Bunlardan Myers [80], Şekil 4.3a'da gösterilen üniform enerji üretimi olan kare bölgede, malzeme özelliklerinin her yerde aynı olduğu ve  $z$  yönünde sıcaklık değişiminin olmadığı kabuluyla ve

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 & \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\ t(L, y) &= t_0 & t(x, L) &= t_0 \end{aligned}$$

sınır şartlarını da kullanarak sıcaklık dağılımının hesaplanması probleminde Şekil 4.3b'de gösterilen düğüm sistemiyle sonlu farklar ve Şekil 4.3c'de gösterilen düğüm sistemiyle de sonlu elemanlar çözümünü incelemiştir. Tez konusunda kullanılan yöntemin seçimine katkıda bulunması nedeniyle bu çalışmanın sonuçları Tablo 4.1'de özetlenmiştir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi bu tip problemlerde tam çözüme yaklaşımda SEY SFY'ye göre daha etkilidir.



Şekil 4.3 Karşılaştırmalı Problem ve Düğüm Sistemleri [80]

- (a) İncelenen problem,
- (b) Sonlu farklar düğüm sistemi,
- (c) Sonlu elemanlar düğüm sistemi

Tablo 4.1 İncelenen İki Boyutlu Karşılaştırmalı Problemin Sonuçları

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ				SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ			
Düğüm No	Tam Çözüm	SFY Çözümü	Hata Tam-SFY	Düğüm No	Tam Çözüm	SEY Çözümü	Hata Tam-SEY
1,1	0.2947	0.2911	0.0036	1	0.2947	0.3013	-0.0066
1,2	0.2789	0.2755	0.0034	2	0.2789	0.2805	-0.0016
1,3	0.2293	0.2266	0.0027	3	0.2293	0.2292	0.0001
1,4	0.1397	0.1381	0.0016	4	0.1397	0.1392	0.0005
2,1	0.2789	0.2755	0.0034	6	0.2789	0.2805	-0.0016
2,2	0.2642	0.2609	0.0033	7	0.2642	0.2645	-0.0003
2,3	0.2178	0.2151	0.0027	8	0.2178	0.2172	0.0006
2,4	0.1333	0.1317	0.0016	9	0.1333	0.1327	0.0006
3,1	0.2293	0.2266	0.0027	11	0.2293	0.2292	0.0001
3,2	0.2178	0.2151	0.0027	12	0.2178	0.2172	0.0006
3,3	0.1811	0.1787	0.0024	13	0.1811	0.1801	0.0010
3,4	0.1127	0.1110	0.0017	14	0.1127	0.1117	0.0010
4,1	0.1397	0.1381	0.0016	16	0.1397	0.1392	0.0005
4,2	0.1333	0.1317	0.0016	17	0.1333	0.1327	0.0006
4,3	0.1127	0.1110	0.0017	18	0.1127	0.1117	0.0010
4,4	0.0728	0.0711	0.0017	19	0.0728	0.0715	0.0013
ΣHata=			0.0384	ΣHata=			-0.0022
ΣMutlak hata=			0.0384	ΣMutlak hata=			0.0180

Sonlu farklar yöntemine göre daha fazla zaman ve uğraş gerektirmekle birlikte bu çalışmada esas yöntem olarak tercih edilen SEY'in başlıca avantajları aşağıda belirtilmiştir [85,86]:

1. SEY, geometrisi karmaşık şekillerin incelenmesinde kolaylıklar sağlar.
2. Değişik ve karmaşık malzeme özellikleri olan sistemlere kolaylıkla uygulanabilir.
3. Malzeme özelliklerinin zamana bağlı değişimleri kolayca gözönüne alınabilir.
4. Sınır şartları sistemin temel denklemleri kurulduktan sonra denklemlere eklenebilir.

Sonlu farklar yöntemini aynı şekilde kritik bir değerlendirmeye tabi tuttuğumuzda yöntem yukarıda verilen işlemlerde önemli ölçüde zorluklar gösterir[85,86].

Sonlu elemanlar yönteminin yukarıda açıklanan avantajlarının yanında aşağıdaki sınırları da belirtilmelidir [86]:

1. SEY genellikle büyük bilgisayar belleğine ve zamanına ihtiyaç gösterir.
2. Doğru sonuç elde edebilmek için ortamın elemanlara bölünmesi ve çok sayıdaki giriş bilgileri hatasız olmalıdır.
3. SEY, ancak malzeme parametreleri veya katsayıları iyi tanımlanmışsa gerçekçi sonuçlar verir.
4. Diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi, SEY'den alınan sonuçlar da dikkatlice değerlendirilmelidir. Formülasyonda kullanılan varsayımlar, olası sayısal zorluklar ve kullanılan malzeme özelliklerinde yapılan yaklaşımlar üzerinde dikkatli olunmalıdır.

Sonuç olarak yukarıda belirtilen avantajlarından dolayı kurutma denklemlerinin çözümünde sayısal yöntem olarak SEY kullanılacaktır.

## Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi hakkında ayrıntılı bilgi literatürde [5–8,85,87,88] verildiğinden burada sonraki bölümde incelenecek olan kurutma probleminin SEY formülasyonunda kullanılacak bazı genel bilgilere değinilecektir. Bu amaçla önce SEY'de işlem adımları anlatılarak genel bilgiler verilecek daha sonra burada verilen bilgiler değişik boyut ve geometrideki problemlerde geçerli olan model denklemlere uygulanacaktır.

### A. Sonlu Elemanlar Yönteminde İşlem Adımları

Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bir problemin çözümünde işlemlerin çok fazla oluşu bunların sistematik bir sırayla yapılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu amaçla Huebner[6] ve Allaire[8], bir problemin SEY kullanılarak çözümünde aşağıdaki adımların izlenmesini önermiştir:

- 1.Diferansiyel denklemler ve sınır şartlarının formülasyonu,
- 2.Problemin sonlu elemanlara bölünmesi,
- 3.İnterpolasyon [şekil, biçim] fonksiyonunun seçimi,
- 4.Eleman özelliklerinin belirlenmesi,
- 5.Sistem denklemlerini oluşturmak için eleman özelliklerinin birleştirilmesi,
- 6.Sistem denklemlerinin çözümü,
- 7.Sonucun incelenmesi.

Bu adımlar aşağıda detaylı olarak açıklanacaktır.

#### 1. Diferansiyel Denklemler ve Sınır Şartlarının Formülasyonu

Sonlu elemanlar yönteminin esas itibariyle DD'nin [düğüm noktalarında hesaplanmış bilinmeyen değişkenlerle yaklaşık olarak ifade edilmiş] cebirsel denklem takımına dönüştürmek olduğu açıklanmıştır. Bu denklemlerin oluşturulmasında birkaç farklı yaklaşım kullanılabilir ve SEY çoğunlukla kullanılan bu yöntemlerin adıyla birlikte adlandırılır. Bu bölümde direkt, varyasyonel ve ağırlıklı artıklar yöntemleri tartışılacaktır. Literatürde daha az kullanılan diğer yöntemler de bulunmaktadır [5–8,85,87,88].

### a. Direkt Yöntem

Sonlu elemanlar yöntemi başlangıçta gerilme analizi problemlerinin çözülmesi sırasında, sadece birkaç ayrı düğüm noktasında fiziksel olarak birleşmiş elemanlardan oluşan sistemlerin çözümünde kullanılmıştır ve bu aşamada yapılan çalışmalar sonraları "direkt yöntem" olarak adlandırılmıştır. Yöntemin ana prensibi fiziksel parametrelerin, alt bölgelere ayrılmış tüm ortamda ayrı ayrı hesaplanarak bu değerlerin birleştirilmesiyle oluşturulan sistem denklemlerinin çözülmesi şeklinde özetlenebilir. Basit ve tek boyutlu yapı analizi problemlerinin çözümü için günümüzde de kullanılan bu yöntemi iki ve üç boyutlu problemlere uygulamak çok zordur[8].

### b. Varyasyonel Yöntem

Varyasyonel yöntem "fonksiyonel" olarak adlandırılmış bir büyüklük içerir. Fonksiyonel, bir sınır değer probleminde<sup>1</sup> elde edilebilir. Problemin tam çözümü  $T$  yerine sonlu eleman fonksiyonundan elde edilen yaklaşık çözüm değeri  $T^*$  bulunur. Burada  $T$  ve  $T^*$  sıcaklık, nem, akışkan hızı gibi bağımsız değişkenleri gösterir. Eleman sayısı  $E$  olan bir problem için yaklaşık çözüm

$$T^* = \sum_{e=1}^E T^{(e)}$$

şeklinde dir. Buradaki  $T^{(e)}$ 'nin herbiri düğüm noktalarındaki  $T$  değerlerine bağlıdır ve genellikle türev ve integrali kolay olan polinom şeklinde bir fonksiyon yardımıyla belirlenir. Varyasyonel yöntem bu düğüm değerlerinin herbirine göre fonksiyonel değerini minimize eder.

Sonlu elemanlar denklemlerinin formülasyon yöntemleri arasında en popüler olan varyasyonel yöntemin avantajı iki ve üç boyutlu problemlere uygulanabilmesidir. Dezavantajı ise ancak belirli problemler için varyasyonel fonksiyonun olmasıdır [Örneğin zamana bağlı problemlerin varyasyonel formu yoktur[6]]. Bu nedenle de fonksiyonali olmayan problemler ağırlıklı artıklar yöntemi ile çözülür.

### c. Ağırlıklı Artıklar Yöntemi

Üç yöntem arasında en genel yöntem olan ağırlıklı artıklar yöntemi de genellikle olaya hakim olan bir sınır değer problemiyle başlar. Yöntemde önce DD eşitliğinin bir tarafı sıfır olacak şekilde yazılır. Eğer tam çözüm  $T$  bilinip bu değer DD'de yazılacak olursa sonucun sıfır olacağı açıktır ama tam çözüm bilinmediğinden yaklaşık çözüm  $T^*$  bu denklemde yazılır ve sonuçta bir  $r$  artık değeri kalır. Bu  $r$  artık değerinin ağırlık fonksiyonu  $W$  ile çarpılmasıyla elde edilen sonuç, incelenen çözüm bölgesi üzerinde integre edilir. Sonuç  $R$  artığı olarak adlandırılır ve çözüm bölgesinde sıfıra eşitlenir. Bilinmeyen düğüm değerlerinin herbiri için bir ağırlık fonksiyonu  $W$  ve artık  $R$  olduğundan sonuçta sistemin cebirsel denklem takımı elde edilir.

1: Diferansiyel denklemin çözümü, bağımsız değişkenin sınırlarda belirlenmiş bazı değerlerini sağlamak zorundadır. Bu problemlere "sınır değer problemleri" denir.

Ağırlıklı artıklar yönteminin ana avantajı sınır değer problemi olarak yazılan herhangi bir probleme uygulanabilmesidir. Yöntem özellikle varyasyonel yöntemin uygulanamadığı problemlere uygulanması nedeniyle rağbet görmektedir.

Diferansiyel denklemler ve sınır şartlarının formülasyonunda vurgulandığı gibi direkt yöntemin günümüzde pek kullanılmadığı varyasyonel yöntemin ise hem zamana bağlı problemlere uygulanamaması hem de kurutma denklemlerinin varyasyonel formunun olmamasının gözönüne alınmasıyla bu çalışmada SEY formülasyonunda ağırlıklı artıklar yöntemi kullanılacaktır. Bu nedenle [bütünlük oluşturması açısından] ağırlıklı artıklar yönteminin nasıl uygulandığını göstermek için bağımsız değişkeni  $T$  ve sınır şartları fonksiyonu  $f$  olan aşağıdaki denklemi gözönüne alalım [5]:

$$\mathcal{L}(T) - f = 0 . \quad (5.1)$$

Böyle bir problemde ağırlıklı artıklar yöntemi iki adımdan oluşur. Önce, bilinmeyen tam çözüm  $T$ , yaklaşık çözüm  $T^*$  ile değiştirilir:

$$T \approx T^* = \sum_{i=1}^E N_i T_i . \quad (5.2)$$

burada  $N_i$ ,  $E$  adet eleman için sınır şartlarını sağlayan [örneğin  $x$  ve  $y$ 'ye bağlı] önceden tahmin edilen fonksiyonları ve  $T_i$  ise bilinmeyen parametreleri gösterir.

Denklem (5.2)'de verilen  $T^*$  ifadesi (5.1) denkleminde yazılırsa

$$\mathcal{L}(T^*) - f \neq 0 \quad (5.3)$$

olacaktır yani  $T^*$  gerçek çözüm olmadığından (5.1) sağlanmayacak ve bir artık değer  $[R]$  kalacaktır:

$$R = \mathcal{L}(T^*) - f . \quad (5.4)$$

Eğer  $T^*=T$  alınırsa [ki bu tam çözümdür]  $R$  değeri doğal olarak sıfır olacaktır.

Ağırlıklı artıklar yönteminde amaç  $E$  adet  $T_i$  değerini tüm çözüm alanı içinde öyle belirlemektir ki  $R$  tüm çözüm alanı içinde çok küçük kalsın. Bunu yapabilmek için  $R$ 'nin ağırlıklı ortalaması oluşturulur ve  $R$  bir bakıma çözüm alanında kaybolurcasına küçülmeye zorlanır. Bu amaçla  $D$  çözüm bölgesinde ağırlık fonksiyonu olarak  $W_k$ 'nin seçilmesiyle

$$\int_D W R dD = 0 \quad (5.5a)$$

durumu oluşturulur. Eğer bilinmeyen parametre sayısı  $s$  ise  $s$  adet bağımsız ağırlık fonksiyonu olacağından (5.5a) denklemi

$$\int_D W_k R dD = \int_D W_k [\mathcal{L}(T^*) - f] dD = 0 \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (5.5b)$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradan görüleceği gibi (5.5b) denklemleri ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesiyle s adet denklem takımı meydana getirir.

Ağırlık fonksiyonları olarak literatürde [5,8,9] alt alan, en küçük kareler, gruplama, Galerkin vb. yöntemlerden bahsedilmekte ama bunlar arasında türev ve integrali kolay olan [ve ileride açıklanacak olan] polinom şeklindeki interpolasyon fonksiyonunu ağırlık fonksiyonu olarak alan "Galerkin Yaklaşımı"nın kullanılması önerilmektedir. Buna göre "Ağırlıklı Artıklar Yönteminde Galerkin Yaklaşımı"nda (5.5b) denklemi incelenen E elemanlı bir problem için

$$\int_D [\mathcal{L}(T^*) - f] N_i dD = 0, \quad i = 1, 2, \dots, E \quad (5.6)$$

şeklinde yazılacağından her bir eleman için [s (e) elemanındaki bilinmeyen parametre sayısı olmak üzere] aşağıdaki bağıntı geçerlidir[5]:

$$\int_{D^{(e)}} [\mathcal{L}(T^*)^{(e)} - f^{(e)}] N_i^{(e)} dD^{(e)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (5.7)$$

Ağırlıklı artıklar yönteminde ikinci adım (5.5) denklemlerini  $T_i$  için çözerek  $T$  değerini yaklaşık olarak elde etmektir. Bu yöntemler literatürde [76-78,81,82,84] verilmiştir.

## 2. Problemin Sonlu Elemanlara Bölünmesi

Sonlu elemanlar yöntemi parçadan bütüne gitme genel prensibine dayandığından ve çözümün hassasiyeti genel ölçüde sistemin sonlu elemanlara bölünüş tarzıyla belirlendiğinden uygun eleman seçimi önemlidir. Sistemin SE'lere bölünmesi esas olarak mühendislik önsezisine dayanır ve problemi çözüme bağlıdır. Sonlu elemanların boyutu, sayısı, şekli, büyüklüğü ve geometrisi, gerçek sisteme uygun olarak seçilmelidir. Burada genel amaç, doğru çözüme basit interpolasyon fonksiyonlarıyla yaklaşma imkanını verecek olan yeteri kadar küçük SE'lerin seçilmesidir ancak SE'nin sayısının fazlalığının ve şeklinin karmaşıklığının bilgisayar maliyetini arttıracığı unutulmamalıdır. İncelenen problem tamamiyle düzgün bir ağ ile bölünebilir veya bağımsız değişkenin daha hızlı değişmesi beklenen bölgelerde daha küçük SE'ler kullanılabilir. Eğri sınırlar kenarları doğru olan SE'ler ile yaklaşık olarak gösterilebilir. Sistem süreksizlik noktalarından yani geometrisinin, malzemenin ani olarak değiştiği yerlerden bölünmelidir ve bu işlem "doğal bölme" olarak adlandırılır.

Bilgisayar programı için SE'ler ve düğüm noktaları uygun şekilde numaralanmalıdır. Wood ve Lewis[89] iki boyutlu kararsız ısı transferinin çözümünü 4 düğüm noktalı lineer eleman, 8 düğüm noktalı parabolik eleman ve 12 düğüm noktalı kübik elemanla yapmışlar ve tam çözüme yaklaşımda farkın az olduğunu göstermişlerdir. Bu nedenle bu çalışmada ele alınan problemi ifade edebilecek en basit [bir-boyutlu problemde düğüm noktaları kenarlarda olan çizgi, iki-boyutlu problemde ise üç düğüm noktalı, kenarları doğru ve düğüm noktaları köşelerde olan üçgen] sonlu elemanlar kullanılacaktır.

### 3. İnterpolasyon Fonksiyonunun Seçimi

Problemin sonlu elemanlara bölünmesinden sonra her bir eleman içinde bağımsız değişkene [sıcaklık, nem, basınç,...] interpolasyon fonksiyonları yardımıyla yaklaşılabilir. Bu yaklaşımda integralini ve türevini almak kolay olduğundan lineer polinom gibi basit bir interpolasyon fonksiyonu kullanılabilir. Polinomun derecesi elemanın düğüm sayısına, her bir düğümdeki eleman sayısına ve düğüm ve eleman sınırındaki bazı süreklilik gereksinimlerine bağlı olarak değişir.

#### a. Bir-Boyutlu Basit Eleman

##### (1) Bir-Boyutlu Eleman İnterpolasyon Fonksiyonu

Burada incelenecek olan en basit elemanda [örnek alan değişkeni olarak T sıcaklığının kullanımıyla] lineer interpolasyon fonksiyonu

$L^{(e)}$ : eleman uzunluğu

$T^{(e)}$ : sıcaklık için eleman interpolasyon fonksiyonu

olmak üzere Şekil 5.1'de gösterilmiştir [Burada e üst indisi, L veya T'nin e-nci kuvvetiyle karıştırmamak için parantezler içinde yazılmıştır].

Şekilden görüleceği gibi, birinci düğüm koordinatı  $x=X_i$  ve ikinci düğüm koordinatı  $x=X_j$ 'dir. [Burada i daha küçük j daha büyük x düğüm koordinatlarını ve büyük harfler düğüm özelliklerini gösterir.]

Düğüm noktalarına ait alan değişkenleri ise

$T_i$ : birinci düğüm noktası sıcaklığı

$T_j$ : ikinci düğüm noktası sıcaklığı

şeklinde.  $T_i$  ve/veya  $T_j$  değerleri sonlu eleman çözümüyle elde edilebileceği gibi sınır şartı olarak da verilebilir.

Şekil 5.1'de görülen e elemanı için lineer interpolasyon fonksiyonu

$$T^{(e)} = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x & X_i \leq x \leq X_j \\ 0 & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (5.8)$$

olarak belirlenir. Burada  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  aşağıda belirlenecek olan sabitlerdir. Eleman içinde, interpolasyon fonksiyonu lineer, eleman dışında sıfırdır. [Bundan sonra bu husus belirtilmeyecektir.] Lineer polinom her iki düğüm noktasından geçmelidir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} x=X_i/de & \quad T^{(e)}=T_i \\ x=X_j/de & \quad T^{(e)}=T_j \end{aligned}$$

olur. Bunlar (5.8) denklemlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir. Bu denklemler  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  için çözülürse



$$L^{(e)} = X_j - X_i$$

olmak üzere

$$\alpha_1 = \frac{1}{L^{(e)}}(X_j T_i - X_i T_j)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{L^{(e)}}(T_i - T_j)$$

bulunur. Bu ifadelerin (5.8) denkleminde yazılıp düzenlenmesiyle aşağıdaki ifade elde edilir:

$$T^{(e)} = \frac{X_i - x}{L^{(e)}} T_i + \frac{x - X_j}{L^{(e)}} T_j, \quad X_i \leq x \leq X_j \quad (5.10)$$

Görüldüğü gibi eleman interpolasyon polinomu düğüm koordinatları, eleman uzunluğu ve düğüm sıcaklıklarının fonksiyonu olmasının yanısıra  $x$ 'in de lineer fonksiyonudur.

## (2) Bir-Boyutlu Piramit Fonksiyonları

Lineer interpolasyon fonksiyonunun (5.10) bağıntısıyla verilen formu yerine "piramit fonksiyonu" olarak adlandırılan ve kullanımı daha uygun olan

$$T^{(e)} = N_i^{(e)} T_i + N_j^{(e)} T_j \quad (5.11)$$

bağıntısı daha sık kullanılır. Burada

$N_i^{(e)}$ : birinci [i-nci] piramit fonksiyonu

$N_j^{(e)}$ : ikinci [j-nci] piramit fonksiyonu

şeklinde ve denklem (5.10) ile karşılaştırma yapılırsa N fonksiyonları

$$N_i^{(e)} = \frac{X_j - x}{L^{(e)}} \quad (5.12)$$

$$N_j^{(e)} = \frac{x - X_i}{L^{(e)}}$$

olarak verilir. Bu denklemlerdeki  $x$  değeri için birincisinde  $X_i$ , ikincisinde  $X_j$  alınır ve yerlerine yazılırsa N değerleri 1.0 olur. [Bir başka deyişle N, incelenen düğüm noktasında 1.0, diğerinde 0.0 değerini alır.] Bu durum Şekil 5.1(b) ve (c)'de gösterilmiştir.

Şekli nedeniyle N fonksiyonları "piramit fonksiyonları" olarak adlandırılır. [İki-boyutlu elemanlar için de benzer fonksiyonlar tanımlanacak ve onların bir düğümde bire diğerlerinde sıfıra eşit olduğu vurgulanacaktır.] Görüldüğü gibi bağımsız değişkeni ifade etmek için  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$ 'nin yerine formu daha kolay olan piramit fonksiyonlarının kullanılması daha uygundur.

İnterpolasyon fonksiyonunun formülasyonunda bir başka yöntem piramit fonksiyonları formu tarafından verilecektir. Buna göre Denklem (5.12)'den lineer fonksiyonlar

$$N_i = \frac{1}{L}(a_i + b_i x) , \quad \begin{cases} a_i = X_j \\ b_i = -1 \end{cases} \quad (5.13a)$$

$$N_j = \frac{1}{L}(a_j + b_j x) , \quad \begin{cases} a_j = -X_i \\ b_j = 1 \end{cases} \quad (5.13b)$$

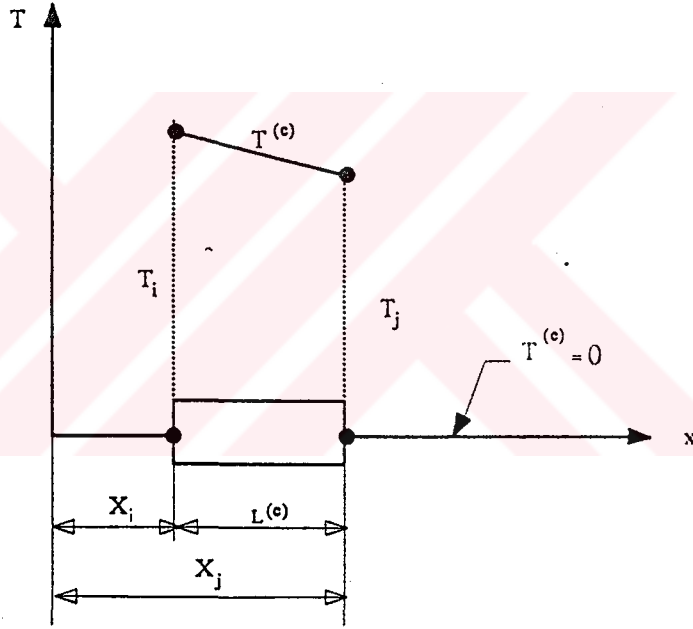
şeklinde yazılır.

### (3) Bir-Boyutlu Eleman Türevleri ve İntegralleri

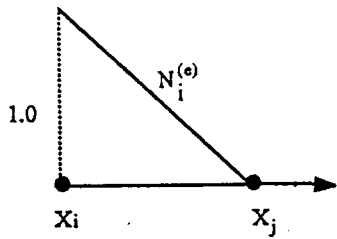
İnterpolasyon fonksiyonunun belirli türev ve integralleri [sonraki kullanımlar için] elde edilmelidir. Eğer interpolasyon fonksiyonu

$$T^{(e)} = N_i T_i + N_j T_j$$

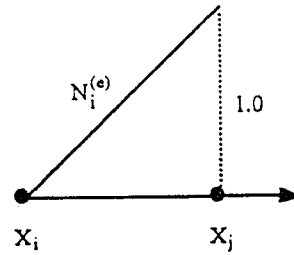
ise bu fonksiyonun türevi



(a)



(b)



(c)

Şekil 5.1 Basit bir-boyutlu eleman için lineer interpolasyon fonksiyonu

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{dN_i}{dx} T_i + \frac{dN_j}{dx} T_j$$

olur. Yukarıda verilen N tanımından x türevleri

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{1}{L} b_i \quad , \quad \frac{dN_j}{dx} = \frac{1}{L} b_j \quad (5.14)$$

olacağından

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{L} (b_i T_i + b_j T_j) \quad (5.15)$$

şeklinde yazılır. Çoğu kez bu ifadeler aşağıdaki gibi matris formunda kullanılır:

$$T^{(e)} = [N] \{T\} \quad (5.16)$$

Burada piramit fonksiyonu satır matrisi

$$[N] = [N_i \quad N_j]$$

ve düğüm vektörü

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}$$

şeklinde dir. Öte yandan eleman türev matrisi [D] ise

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} \end{bmatrix}$$

olarak yazılırsa interpolasyon fonksiyonunun türevi

$$\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} = [D] \{T\}$$

şeklini alacağından (5.14) denkleminde

$$[D] = \frac{1}{L} [b_i \quad b_j] \quad (5.17)$$

elde edilir. Bu matris bağıntıları büyük oranda daha sonra [özellikle iki-boyutlu problemlerde] kullanılacaktır. Bir-boyutlu elemanın bazı özellikleri Şekil 5.2'de verilmiştir.

Eleman üzerindeki integral piramit fonksiyonlarının integralini içereceğinden ve piramit fonksiyonunun üçgen şeklinden dolayı [tabanı L, yüksekliği 1.0]

$$\int_L N_i dx = \int_L N_j dx = \frac{1}{2} L$$

olur böylece

$$\int_L T^{(e)} dx = \int_L (N_i T_i + N_j T_j) dx$$

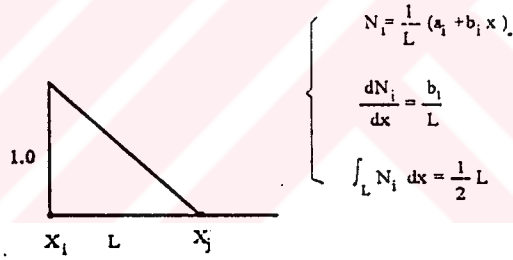
ifadesi

$$\int_L T^{(e)} dx = \frac{1}{2} L (T_i + T_j) \quad (5.18)$$

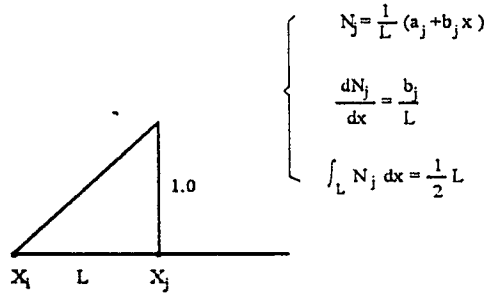
şeklini alır. Yine sonraki çıkarımlarda kullanılmak üzere piramit fonksiyonlarının integrasyon formülleri genelleştirilirse  $\alpha$  ve  $\beta$  tamsayı olmak üzere

$$\int_L N_i^\alpha N_j^\beta dx = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} L \quad (5.19)$$

yazılır. Bu bağıntı yardımıyla karşılaşılabilecek bazı  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için elde edilebilecek katsayılar Tablo 5.1'de verilmiştir.



(a) i-nci pramit fonksiyonu



(b) j-nci pramit fonksiyonu

Şekil 5.2 Bir-boyutlu basit eleman: Piramit fonksiyonları ve özellikleri

Tablo 5.1 Uzunluk koordinatlarının integralleri [6]

$$\ell_{\alpha\beta} = \frac{1}{L} \int_L N_i^\alpha N_j^\beta dx = \frac{A}{B}$$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha+\beta$	A	B
0	0	0	1	1
1	0	1	1	2
2	0	2	2	6
1	1	2	1	6

## b. İki-Boyutlu Basit Eleman

### (1) İki-Boyutlu Eleman İnterpolasyon Fonksiyonu

İki boyutlu elemanda eğer bağımsız değişken  $T$  [sıcaklık veya probleme bağlı olarak başka bir değişkeni gösterir]  $x$  ve  $y$  koordinatlarının fonksiyonu ise en basit sonlu eleman kenarları doğru ve düğüm noktaları köşede olan üçgen sonlu elemandır [Şekil 5.3]. Bu elemanda

$\Delta^{(e)}$ : eleman alanı

$T^{(e)}$ : bağımsız değişken için eleman interpolasyon fonksiyonu

olsun. Şekil 5.3'de görüldüğü gibi düğüm noktaları için numaralama sistemi  $i, j, k$  saat ekseninin dönüş yönünün tersine göre yapılmıştır. Düğüm noktalarının veya köşelerin koordinatları

$(X_i, Y_i)$ : birinci [ $i$ -nci] düğüm koordinatları

$(X_j, Y_j)$ : ikinci [ $j$ -nci] düğüm koordinatları

$(X_k, Y_k)$ : üçüncü [ $k$ -nci] düğüm koordinatları

şeklindedir. Düğüm noktalarındaki bağımsız değişkenin değerleri ise

$T_i$ : birinci [ $i$ -nci] düğüm sıcaklığı

$T_j$ : ikinci [ $j$ -nci] düğüm sıcaklığı

$T_k$ : üçüncü [ $k$ -nci] düğüm sıcaklığı

olarak yazılır. Doğal olarak  $T_i, T_j, T_k$  değerleri ya sınır şartı olarak verilir ya da SEY çözümünden elde edilir.

İki-boyutlu problemde de [bir-boyutlu problemde olduğu gibi] lineer interpolasyon polinomu

$$T^{(e)} = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y & (\Delta \text{ içinde}) \\ 0 & (\Delta \text{ dışında}) \end{cases} \quad (5.20)$$

şeklinde olmalıdır. Burada (e) üst indisi  $\Delta$  içindeki bölgeyi göstermektedir. Herbir düğüm noktasındaki düğüm sıcaklığı

$$\begin{aligned}
x = X_i, \quad y = Y_i & \text{ 'de} & T^{(e)} &= T_i \\
x = X_j, \quad y = Y_j & \text{ 'de} & T^{(e)} &= T_j \\
x = X_k, \quad y = Y_k & \text{ 'da} & T^{(e)} &= T_k
\end{aligned}$$

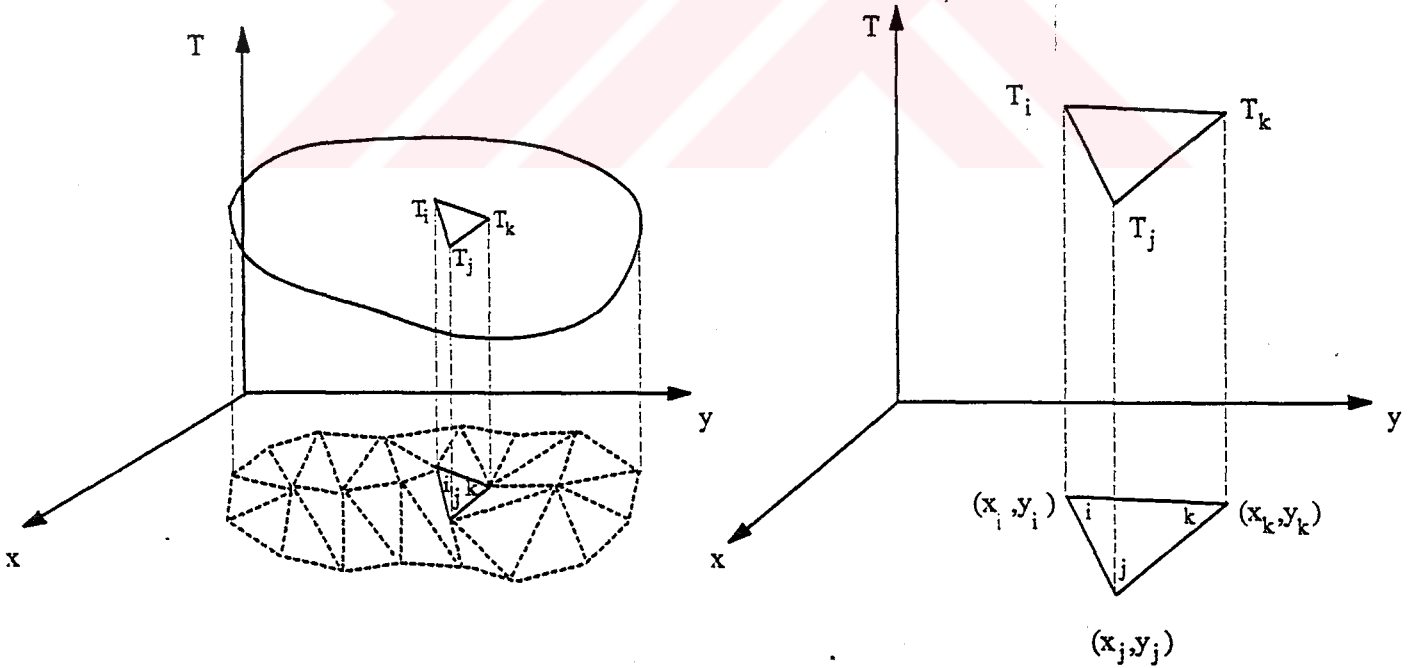
olduğundan bu ifadeler (5.20)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\
T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\
T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k
\end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. Bu denklem takımı  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ve  $\alpha_3$  için çözümlerse

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} [(X_j Y_k - X_k Y_j) T_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) T_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) T_k] \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} [(Y_j - Y_k) T_i + (Y_k - Y_i) T_j + (Y_i - Y_j) T_k] \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} [(X_k - X_j) T_i + (X_i - X_k) T_j + (X_j - X_i) T_k]
\end{aligned} \tag{5.22a}$$

bulunur. Burada  $\Delta$  üçgenin alanıdır ve



**Şekil 5.3** Problemin Üç Düğüm Noktalı Üçgen Elemanlara Bölünmesi ve Lineer İnterpolasyon Fonksiyonu Yardımıyla Bağımsız Değişkenin Gösterimi

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2} [(X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j X_i - Y_k X_i) + (X_k Y_i - X_j Y_i)] \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}\end{aligned}\quad (5.22b)$$

şeklindedir. [Eğer elemanın düğümlerinin numaralandırılması saat ibresinin dönüş yönünde yapılmışsa determinantın değeri negatif işaretli olacaktır.]

## (2) İki-Boyutlu Piramit Fonksiyonları

İnterpolasyon fonksiyonunun (5.20) bağıntısıyla verilen bu formu yerine "piramit fonksiyonu" olarak adlandırılan

$$T^{(e)} = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k \quad (5.23)$$

bağıntısı daha sık kullanılır. Bu amaçla (5.22) ile elde edilen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ve  $\alpha_3$  (5.20) denkleminde yerlerine yazılır ve düzenlenirse (5.23) denklemi

$$T^{(e)} = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} T_i + \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} T_j + \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta} T_k$$

olarak yazılır. Burada  $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_k$  üçgen eleman için aşağıda verilmiştir:

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y), \quad \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases} \quad (5.24a)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y), \quad \begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases} \quad (5.24b)$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y), \quad \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases} \quad (5.24c)$$

ve

$$2\Delta = b_i c_j - b_j c_i. \quad (5.25)$$

Bu ifadelerdeki

$N_i$ : birinci [i-nci] piramit fonksiyonu

$N_j$ : ikinci [j-nci] piramit fonksiyonu

$N_k$ : üçüncü [k-nci] piramit fonksiyonu

olarak adlandırılır ve Şekil 5.4'de gösterilmiştir. Bu şekilden görüleceği üzere [bir-boyutlu piramit fonksiyonlarında olduğu gibi]  $N$  değeri düğüm noktasında bire eşit iken diğer noktalarda

sıfırdır. Yukarıda verilen (5.23) bağıntısı iki boyutlu elemanlarda en sık kullanılan formdur. Buna göre bağımsız değişken  $T^{(e)}$  eleman içinde matris notasyonu ile

$$T^{(e)} = [N] \{T\} \quad (5.26)$$

olarak yazılır. Burada

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_k]$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

şeklinde olup üçgen sonlu eleman kullanılması durumunda piramit fonksiyon satırı  $[N]$  (1x3) elemanlı, düğüm sütunu  $\{T\}$  ise (3x1) elemanlıdır.

### (3) İki-Boyutlu Eleman Türevleri ve İntegralleri

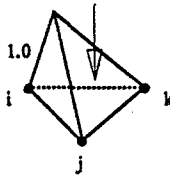
İki-boyutlu elemanda ileride faydalı olabilecek x ve y yönündeki türevler aşağıdadır:

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{dN_i}{dx} T_i + \frac{dN_j}{dx} T_j + \frac{dN_k}{dx} T_k$$

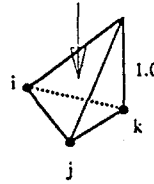
$$\frac{dT^{(e)}}{dy} = \frac{dN_i}{dy} T_i + \frac{dN_j}{dy} T_j + \frac{dN_k}{dy} T_k$$

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y)$$

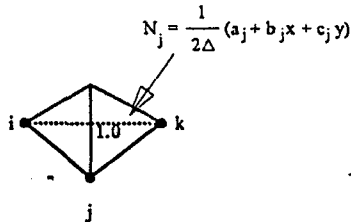
$$N_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y)$$



(a) i-nci pramit fonksiyonu



(c) k-nci pramit fonksiyonu



(b) j-nci pramit fonksiyonu

Şekil 5.4 İki Boyutlu Basit Eleman İçin Piramit Fonksiyonu



Denklem (5.24)'deki N belirlemesinden

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} b_\beta, \quad \beta=i, j, k \quad (5.27a)$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} c_\beta, \quad \beta=i, j, k \quad (5.27b)$$

yazılabileceğinden türevler

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{1}{2\Delta} (b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k) \quad (5.28a)$$

$$\frac{dT^{(e)}}{dy} = \frac{1}{2\Delta} (c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k) \quad (5.28b)$$

olur. Bunlar da [bir-boyutlu elemanda olduğu gibi] matris formunda yazılırsa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = [D] \{T\} \quad (5.29)$$

elde edilir. Burada

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix}^{(e)}$$

veya yukarıdaki sonuçlardan

$$[D] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}^{(e)} \quad (5.30)$$

elde edilir. Bu ifade "eleman türev matrisi" olarak adlandırılır ve eleman matrislerinin formülasyonunda çok kullanılır.

Piramit fonksiyonlarının integrasyonu ise [taban alanı  $\Delta$ , yüksekliği  $h=1.0$ ] olan piramitin hacmi  $\Delta h/3$  olduğundan]

$$\int_{\Delta} N_i d\Delta = \frac{1}{3} \Delta$$

olacaktır. Bu sonuç diğer iki piramit fonksiyonu için de aynıdır. Böylece  $T^{(e)}$ 'nin integrali

$$\int_{\Delta} T^{(e)} d\Delta = \int_{\Delta} (N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k) d\Delta$$

şeklinde yazılacağından sonuç olarak

$$\int_{\Delta} T^{(e)} d\Delta = \frac{1}{3} \Delta (T_i + T_j + T_k) \quad (5.31)$$

yazılır. Toplama formunda ise

$$\int_A T^{(e)} dA = \frac{1}{3} \Delta \sum_{\beta=1}^3 T_{\beta}$$

olur. Üçgen eleman üzerinde piramit fonksiyonlarının integrasyonu için bir başka faydalı formül [ $\alpha, \beta, \gamma$  tamsayı olmak üzere]

$$\int_A N_i^{\alpha} N_j^{\beta} N_k^{\gamma} dx = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2\Delta \quad (5.32)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntı yardımıyla karşılaşılabilecek bazı  $\alpha, \beta, \gamma$  değerleri için elde edilebilecek katsayılar Tablo 5.2'de verilmiştir.

Tablo 5.2 Alan koordinatlarının integralleri [6]

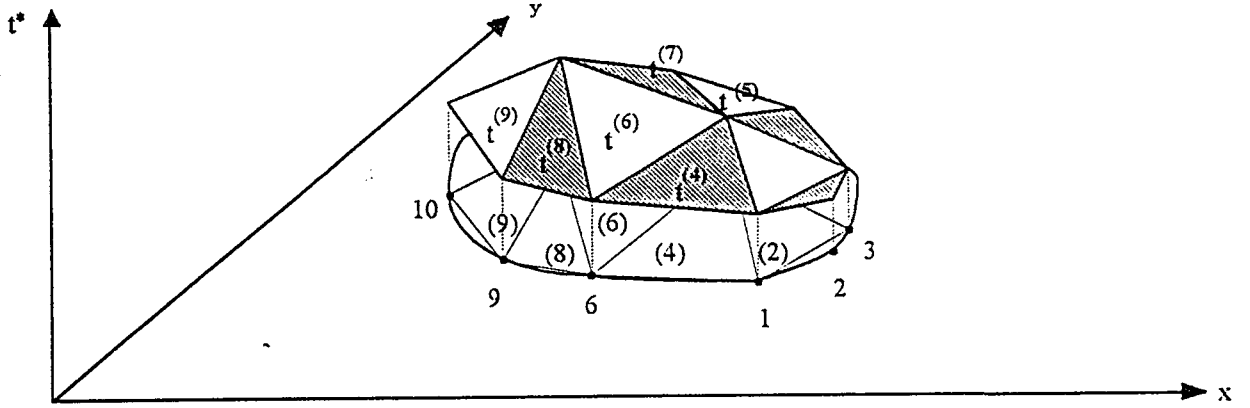
$$l_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\Delta} \int_L N_i^{\alpha} N_j^{\beta} N_k^{\gamma} dx = \frac{A}{B}$$

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha + \beta + \gamma$	A	B
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	3
2	0	0	2	2	12
1	1	0	2	1	12
3	0	0	3	6	60
2	1	0	3	2	60
1	1	1	3	1	60

Eğer incelenen bölge E sayıda elemana bölünmüşse bağımsız değişken  $T$  değeri tüm problem için

$$T = \sum_{e=1}^E T^{(e)} = \sum_{e=1}^E [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} \quad (5.33)$$

olarak ifade edilir. Bu denklemlerden görülebileceği gibi eğer  $T$ 'nin düğüm değerleri bilirse tam çözüm yüzeyi  $T$ , birbirine bağlı üçgen düzlemlerle ifade edilebilir [Şekil 5.5].



Şekil 5.5 İki Boyutlu Problemin Sonlu Elemanlarla Yaklaşık Çözümü

Tekrar hatırlatılacak olursa yukarıda elde edilen (5.26) ve (5.33) denklemleri lineer interpolasyon fonksiyonu ve üç düğümlü üçgen eleman için elde edilmiştir. İnterpolasyon fonksiyonları ve diğer eleman tipleri ne olursa olsun bu denklemlerin şekli aynıdır. Yalnızca (5.26) denklemindeki satır ve sütun matrislerinde terim sayıları farklıdır.

#### 4. Eleman Özelliklerinin Belirlenmesi

Elemanların geometrisi düğüm noktası sayısını ve interpolasyon fonksiyonunun derecesini ve diğer değişkenlerin fonksiyonu olan tüm ortam özelliklerinin belirlenmesini doğrudan etkiler. Herbir eleman için bağımsız değişkenin özellikleri "eleman matris denklemleri" denen matris formundaki (5.26) denklemleri yardımıyla belirlenir. Bu işlem ilerleyen alt bölümlerde ayrıntılarıyla tanıtılacak ve Bölüm 6'da kullanılacaktır.

#### 5. Sistem Denklemlerini Oluşturmak İçin Eleman Özelliklerinin Birleştirilmesi

Bir önceki adımda herbir eleman için elde edilen eleman özellikleri fiziksel değişkenlerin düğüm noktalarındaki değerleri için elde edilen cebirsel denklemler yardımıyla tüm bölge için "sistem matris denklemleri" denilen denklemlere transfer edilerek birleştirilmelidir. Bu işlemin karmaşıklığı ve uzun sürmesi bilgisayar kullanımını kaçınılmaz kılmaktadır. Bu işlem de Bölüm 6'da anlatılacaktır.

#### 6. Sistem Denklemlerinin Çözümü

Önceki adımda oluşturulan sistem matris denklemleri sınır şartları için tekrar düzenlenerek bağımsız değişkenlerin düğüm noktalarındaki bilinmeyen değerleri için standart yöntemlerden birisinin kullanımıyla ve bilgisayar yardımıyla çözülür. Bu adım Bölüm 6'da tekrar ele alınacaktır.

## 7. Sonucun İncelenmesi

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünün doğruluğu incelenmelidir. Analiz edilen problemin tam çözümü genellikle bilinmez. Bu nedenle SEY'den elde edilmiş çözümün doğruluğu da bilinmeyebilir. Örneğin doğru çözüme yaklaşmada gereken düğüm noktası sayısını önceden belirlemek zordur. Bu, düğüm noktası sayısının değiştirilmesiyle kontrol edilir ve bu işlem sonucun değişmediği uygun düğüm noktası sayısı bulununcaya kadar sürdürülür. İteratif yöntemlerin kullanılması durumunda da yönteme bağlı olarak bazı hatalar oluşabilir. Bu hatalar ya yöntemin iyileştirilmesi ya da kullanılan yöntemin daha uygun bir yöntemle değiştirilmesiyle düzeltililebilir.

## B. Model Denklemler ve Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması

Sonlu elemanlar yöntemiyle ilgili daha ayrıntılı bilgi vermek için [Bölüm 3'de elde edilen kurutma denklemlerine benzerliği nedeniyle] model denklemler olarak ısı transferinin

- bir-boyutlu,
- iki-boyutlu,
- eksenel simetrik [üç boyutlu] ve
- zamana bağlı

problemlerde kullanılan denklemleri ele alınacaktır.

### 1. Bir-Boyutlu Problemler

Bir-boyutlu kararlı-hal ısı kondüksiyonunu açıklayan basit diferansiyel denklem [malzeme homojen, ısı iletim katsayısı  $k$  sıcaklıktan bağımsız olmak üzere]

$$k \frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (5.34)$$

idi[79]. Sınır şartları ise

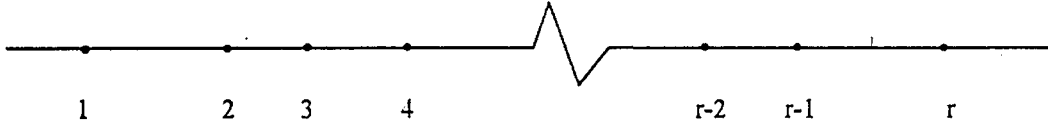
$$\begin{aligned} x = x_0 \text{ 'da} & \quad t = t_0 \\ x = x_L \text{ 'de} & \quad t = t_L \end{aligned} \quad (5.35)$$

olsun. [Diğer sınır şartları sonraki problemlerde incelenecektir.]

Düğüm sayısı  $r$  olan çizgi eleman için [Şekil 5.6] bilinmeyen tam çözüm  $t$ 'nin yaklaşık çözüm  $t^{(e)}$  ile ifade edildiği kabul edilirse

$$t \approx t^{(e)} = \sum_{i=1}^r N_i(x) t_i \quad (5.36)$$

yazılabilir. Burada  $N_i(x)$  interpolasyon fonksiyonu ve  $t_i$  bir boyutlu çizgi elemanın  $r$  düğümündeki



Şekil 5.6 r adet düğümü olan çizgi eleman

bilinmeyen düğüm sıcaklığıdır. [Elemanda birinci çeşit sınır şartı kullanıldığından elde edilecek denklem takımının çözüm işlemine başlanmadan önce tekrar düzenlenmesi gerekir ki bu konu da ileride ele alınacaktır.]

Galerkin yaklaşımıyla (5.36) denklemi (5.34) denkleminde yazıldığında bir artık [hata] kalacağından (e) elemanın i ve j düğümleri için bu artık ifadesi

$$R_i = \int_{L^{(e)}} k N_i(x) \frac{d^2 t^{(e)}}{dx^2} dx$$

$$R_j = \int_{L^{(e)}} k N_j(x) \frac{d^2 t^{(e)}}{dx^2} dx$$
(5.37)

değerini alır. Bu denklemler kısmi integrasyon kuralıyla [ $\int u dv = uv - \int v du$ ] çözülebildiğinden i düğümü için

$$u = N_i(x) \quad dv = k \frac{d^2 t^{(e)}}{dx^2} dx = k \frac{d}{dx} \left( \frac{dt^{(e)}}{dx} \right) dx$$

$$du = \frac{dN_i(x)}{dx} dx \quad v = k \frac{dt^{(e)}}{dx}$$

bulunur ve terimlerin yerine yazılmasıyla

$$\int_{L^{(e)}} k N_i(x) \frac{d^2 t^{(e)}}{dx^2} dx = k N_i(x) \frac{dt^{(e)}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{L^{(e)}} k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dt^{(e)}}{dx} dx = 0 \quad (5.38)$$

olur. Görüldüğü gibi  $t^{(e)}$  değerinin bir türevi interpolasyon fonksiyonuna transfer edilmiştir.

Öte yandan [daha önce açıklandığı gibi] piramit fonksiyonu ilgili düğümde 1.0 değerini alacağından (5.38) ifadesinden

$$\int_{L^{(e)}} k \frac{dN_i(x)}{dx} \frac{dt^{(e)}}{dx} dx = k \frac{dt^{(e)}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} \quad (5.39)$$

yazılır. Denklem (5.14) ve (5.17)'den

$$\frac{dN_i(x)}{dx} = \frac{1}{L}b_i \quad , \quad \frac{dN_j(x)}{dx} = \frac{1}{L}b_j \quad (5.40a)$$

$$\frac{dt^{(e)}}{dx} = \frac{1}{L}[b_i \quad b_j] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix} \quad (5.40b)$$

ve

$$\int_{L^{(e)}} dx = L \quad (5.40c)$$

$$k \frac{dt^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} = q_i \quad , \quad k \frac{dt^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_j} = q_j \quad (5.40d)$$

olduğundan (5.40) ifadeleri (5.39)'da yerine yazılırsa i ve j düğümü için sırasıyla

$$k \frac{1}{L} b_i \frac{1}{L} [b_i \quad b_j] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix} L = q_i$$

$$k \frac{1}{L} b_j \frac{1}{L} [b_i \quad b_j] \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix} L = q_j$$

veya matris formunda

$$[K_t]^{(e)} \{t\}^{(e)} = \{q\}^{(e)} \quad (5.41a)$$

yazılır. Burada

$$[K_t]^{(e)} = \frac{k}{L} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j \\ b_i b_j & b_j b_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (5.41b)$$

$$\{t\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (5.41c)$$

$$\{q\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (5.41d)$$

şeklindedir. Böylece bir-boyutlu ısı kondüksiyonunun SEY çözümü elde edilmiştir.

## 2. İki-Boyutlu Problemler

İncelenecek olan iki-boyutlu model denklem daha önce verilmiş olan kararlı iki-boyutlu kondüksiyon denklemdir[denklem 4.1] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q^* = 0 \quad (4.1)$$

Problemin  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  sınırlarındaki sınır şartları ise sırasıyla aşağıda verilmiştir [Şekil 5.7]:

$$t = t_0(x, y) \quad (5.42a)$$

$$k_x \frac{\partial t}{\partial x} \vec{n}_x + k_y \frac{\partial t}{\partial y} \vec{n}_y + j_q + h(t - t_\infty) = 0 \quad (5.42b)$$

burada  $t_0(x, y)$  sınırdaki belirtilmiş sıcaklık,  $n_x$  ve  $n_y$   $\Gamma$  sınırında dışa dönük normal vektör  $n$ 'in yön kosinüsleri,  $j_q$  ve  $h(t - t_\infty)$  ise sırasıyla kondüksiyondan ve konveksiyondan dolayı sınırdaki meydana gelen ısı kayıplarıdır.

Elemanlara ayrılacak olan D bölgesinde [Şekil 5.7] her bir eleman içindeki sıcaklık dağılımı

$$t^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) t_i = [N] \{t\}^{(e)} \quad (5.43)$$

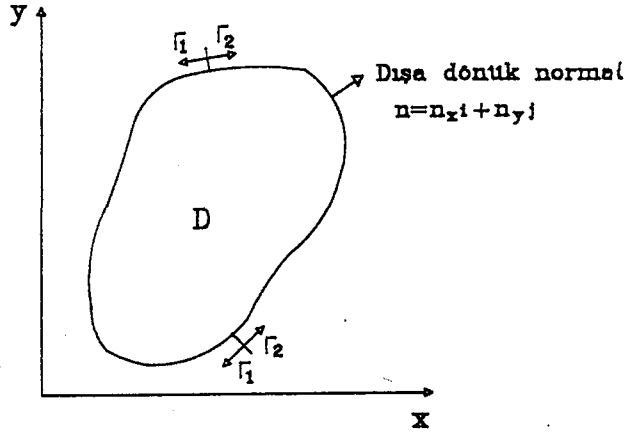
olarak kabul edilir. Burada  $n$  (e) elemanındaki düğüm sayısı,  $t_i$  sıcaklığın düğüm noktasındaki yaklaşık değeri,  $N_i$  ise interpolasyon [şekil, biçim] fonksiyonudur. Formülasyon yöntemi olarak [daha önce açıklanan nedenlerden dolayı] ağırlıklı artıklar yönteminde Galerkin yaklaşımının kullanılmasıyla (4.1) denklemini aşağıdaki şekli alır:

$$\int_{D^{(e)}} \int N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \right) + q^* \right] dx dy = 0 \quad (5.44)$$

Bu denklemden ilk iki terime kısmi integrasyon kuralı [ $u=N_i$  alınarak] uygulanırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\int_{D^{(e)}} \int \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \right) N_i dx dy = \int_{\Gamma_2^{(e)}} k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} N_i dy - \int_{D^{(e)}} \int k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dy$$

$$\int_{D^{(e)}} \int \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \right) N_i dx dy = \int_{\Gamma_2^{(e)}} k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} N_i dx - \int_{D^{(e)}} \int k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy$$



Şekil 5.7 İki Boyutlu Bölgede Isı Kondüksiyon Problemi

Bunlar [eşitliğin sağ tarafındaki birinci terimlerin diferansiyeli ve integrali arka arkaya alındığında terimlerin değerinin değişmeyeceği gözönünde tutularak] (5.44) denkleminde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 & - \int_{D^{(e)}} \int \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{D^{(e)}} \int N_i q^* dx dy + \\
 & + \int_{D^{(e)}} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} N_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} N_i \right) \right] dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{5.45a}$$

bulunur. Bu integralin çözümünde "Green Teoremi"nden yararlanılır[5-9]. Bu teoreme göre  $F(x,y)$  ve  $G(x,y)$  şeklindeki iki fonksiyon, incelenen  $x,y$  düzleminde

$$\int_{D^{(e)}} \int \left[ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right] dx dy = \oint_{\Gamma^{(e)}} [F \bar{n}_x + G \bar{n}_y] d\Gamma$$

olarak yazılır[90]. Burada  $\oint d\Gamma$  integrali elemanın sınırı boyunca alınacak çizgi integrali gösterir ve bu integrasyon işlemi yapılırken hareket yönünün saat ekseninin dönüş yönünün tersine doğru olacağını belirtir. Denkleminde yer alan  $n_x$  ve  $n_y$  yön kosinüsleri [yani sınırda dışa dönük birim vektörün  $x$  ve  $y$  yönündeki bileşenleri],  $\Gamma$  ise sınır koordinatını verir. Bu bilgilerin ışığında (5.45a) denklemini



$$\begin{aligned}
& - \int_{D^{(e)}} \int \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{D^{(e)}} \int N_i q^* dx dy + \\
& + \oint_{\Gamma_2^{(e)}} \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} N_i \bar{n}_x + k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} N_i \bar{n}_y \right) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{5.45b}$$

olarak yazılır. Öte yandan ikinci sınır şartından

$$k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \bar{n}_x + k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \bar{n}_y = -j_q^{(e)} - h(t^{(e)} - t_\infty) \tag{5.45c}$$

yazılacağından (5.45b) denklemi

$$\begin{aligned}
& \int_{D^{(e)}} \int \left( k_x \frac{\partial t^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy - \int_{D^{(e)}} \int N_i q^* dx dy + \\
& + \oint_{\Gamma_2^{(e)}} [j_q + h(t - t_\infty)] N_i d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{5.45d}$$

veya bu denklemde  $t^{(e)}$  için (5.43) yaklaşımının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{D^{(e)}} \int \left( k_x \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{t\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{t\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy - \int_{D^{(e)}} \int N_i q^* dx dy + \\
& + \oint_{\Gamma_2^{(e)}} (j_q N_i + h [N] \{t\}^{(e)} N_i - h t_\infty N_i) d\Gamma^{(e)} = 0
\end{aligned} \tag{5.45e}$$

şeklini alır. Bu ifade matris notasyonuyla da

$$[K_t]^{(e)} \{t\}^{(e)} = \{q^*\}^{(e)} - \{j_q\}^{(e)} - [K_h]^{(e)} \{t\}^{(e)} + \{K_{t_\infty}\} \tag{5.46}$$

olarak yazılır. Burada

$$K_{t_{ij}} = \int_{D^{(e)}} \int \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \tag{5.47a}$$

$$q^* = \int_{D^{(e)}} \int q^* N_i dx dy \tag{5.47b}$$

$$j_{q_i} = \oint_{\Gamma_2^{(e)}} j_q N_i d\Gamma^{(e)} \tag{5.47c}$$

$$K_{h_{ij}} = \oint_{\Gamma_2^{(e)}} h N_i N_j d\Gamma^{(e)} \quad (5.47d)$$

$$K_{t_{\infty i}} = \oint_{\Gamma_2^{(e)}} h t_{\infty} N_i d\Gamma^{(e)} \quad (5.47e)$$

şeklindedir. [Bu sonuç aynı probleme varyasyonel yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonuçla aynıdır[5].] Örnek olarak çözüm bölgesinde üç düğüm noktalı üçgen sonlu eleman kullanılması durumunda (5.46) denklemindeki terimler  $k_x = k_y = k$  için iki-boyutlu elemanın tanımlandığı alt bölümlerdeki bilgilerin de kullanımıyla aşağıdaki ifadelerle verilmiştir [8]:

$$[K_t]^{(e)} = \frac{k}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ smt & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (5.48a)$$

$$\{t\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{Bmatrix}, \quad (5.48b)$$

$$\{q^*\}^{(e)} = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ smt & & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i^* \\ q_j^* \\ q_k^* \end{Bmatrix}, \quad (5.48c)$$

$$\{j_q\}^{(e)} = \frac{L_{ij} j_q}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.48d)$$

$$[K_h]^{(e)} = \frac{L_{ij} h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ smt & & 2 \end{bmatrix} \quad (5.48e)$$

ve

$$\{K_{t_{\infty}}\}^{(e)} = \frac{L_{ij} h t_{\infty}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.48f)$$

[Öte yandan iç ısı üretiminin eleman içinde her düğümde aynı olduğunun kabul edilmesiyle

$$\{q^*\}^{(a)} = \frac{\Delta q^*}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.48g)$$

bağıntısı da yazılabilir.]

Bu denklemlerde kullanılan  $L_{ij}$  sınırdaki bulunan elemanın sınır düğüm noktaları arasındaki uzaklıktır [Şekil 5.8] ve aşağıdaki bağıntıyla hesaplanır:

$$L_{ij} = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2}. \quad (5.49)$$

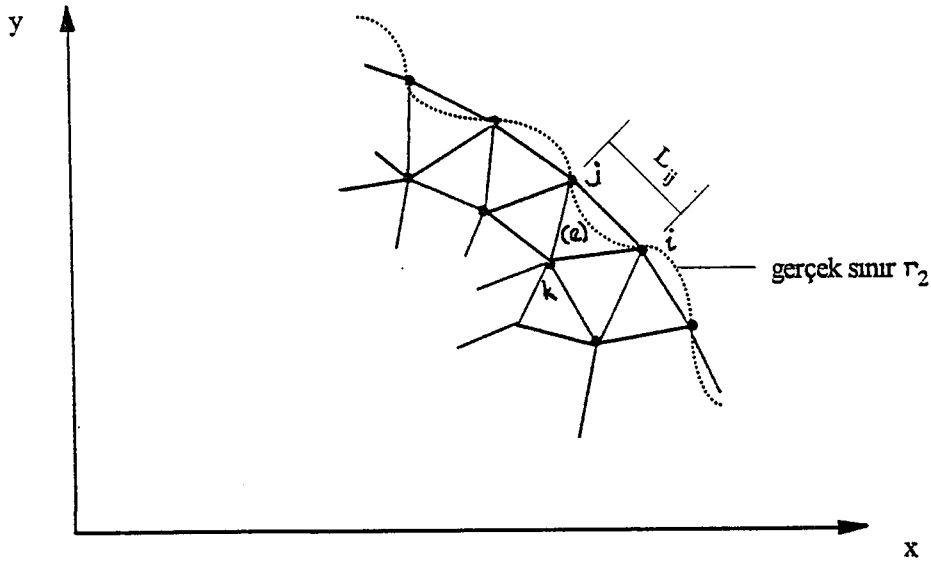
### 3. Eksenel Simetrik [Üç-Boyutlu] Problemler

Şimdiye kadar incelenen konularda kartezyen koordinatlarda  $[x,y]$  verilen problemler tartışılmıştı. Mühendislik problemlerinde silindirik koordinatlarda karşılaşılan üç boyutlu problemlerin çoğunda eksenel simetri vardır ve bu problemlerdeki parametreler genellikle açıl pozisyon  $\theta$ 'nın fonksiyonu olmadığından üç-boyutlu bu tür problemleri iki-boyutlu yaklaşımla çözmek mümkündür. Şekil 5.9 böyle bir problem için örnek bir geometriyi gösterir.

Daha önceden verilen ve çözümünü incelenen iki-boyutlu ısı transfer denklemini [denklem 4.1] vektör formunda

$$\nabla \cdot (k \nabla t) + q^* = 0$$

şeklinde yazmak mümkündür[8]. Bu ifade eksenel simetrik problemlerde silindirik koordinatlar için  $\Delta$  alanında



Şekil 5.8 Konveksiyon ve kondüksiyon ısı transferinin olduğu sınır elemanı

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( k_r r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z r \frac{\partial t}{\partial z} \right) + r q^* = 0 \quad (5.50)$$

şeklinde ve sınır şartları ise  $\Gamma_1$ 'de

$$t = t_0(r, z) \quad (5.51)$$

ve  $\Gamma_2$ 'de

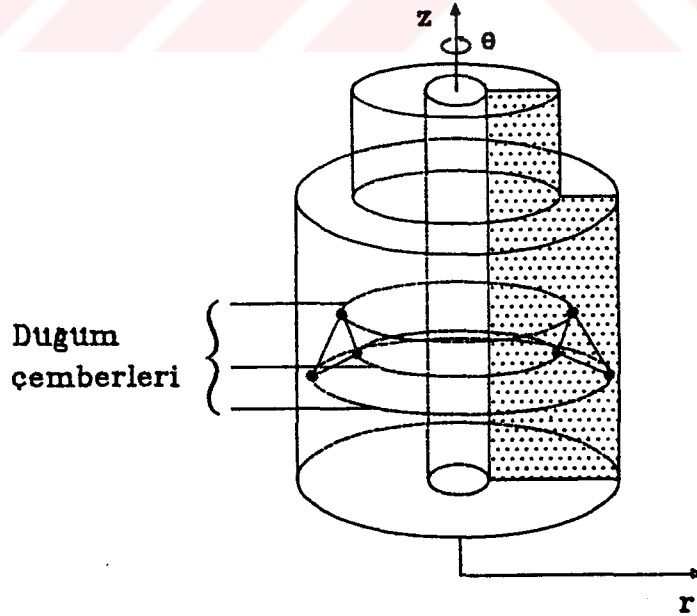
$$k_r r \frac{\partial t}{\partial r} \vec{n}_r + k_z r \frac{\partial t}{\partial z} \vec{n}_z + r j_q + r h(t - t_\infty) = 0 \quad (5.52)$$

olarak yazılabilir. Bu problemin çözümünde kullanılacak basit elemanlar [özellikleri  $\theta$  açısından bağımsız olan] aksenal simetrik halkalardır. Bu durumda sonlu eleman, [z yönünde sonsuz uzunlukta olan] (x,y) kartezyen koordinatlarındaki iki-boyutlu elemana benzer. Şekil 5.10(a) basit halka elemanın (r,z) düzlemindeki dik kesitini gösterir. Aşağıda verilen formüllerin kullanımı için eleman numaralandırması saat dönüş yönünün tersinde yapılmış olmalıdır. Halka elemanın perspektifi Şekil 5.10(b)'de gösterilmiştir.

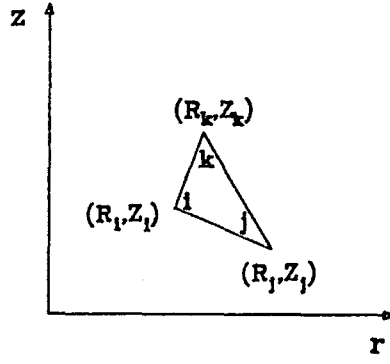
Lineer alınan eleman interpolasyon fonksiyonunun formu [iki-boyutlu problemde olduğu gibi]

$$t^{(e)} = N_i t_i + N_j t_j + N_k t_k \quad (5.53)$$

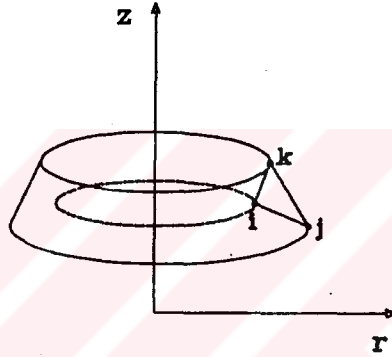
şeklinde olacaktır. Burada piramit fonksiyonları



Şekil 5.9 Aksenal simetrik problemler için geometri ve koordinat sistemi



(a)



(b)

**Şekil 5.10** Eksenel simetrik basit halka elemanın geometrisi

(a) r-z düzleminde basit eleman

(b) Basit halka elemanın perspektif görünüşü

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i r + c_i z) , & \begin{cases} a_i = R_j Z_k - R_k Z_j \\ b_i = Z_j - Z_k \\ c_i = R_k - R_j \end{cases} \\
 N_j &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j r + c_j z) , & \begin{cases} a_j = R_k Z_i - R_i Z_k \\ b_j = Z_k - Z_i \\ c_j = R_i - R_k \end{cases} \\
 N_k &= \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k r + c_k z) , & \begin{cases} a_k = R_i Z_j - R_j Z_i \\ b_k = Z_i - Z_j \\ c_k = R_j - R_i \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.54a}$$

ve

$$2\Delta = b_i c_j - b_j c_i \tag{5.54b}$$

dir. Bu ifadeler [r yerine x, z yerine y konulduğunda] kartezyen koordinatlar için bulunanla aynıdır.

Eleman interpolasyon fonksiyonu  $t^{(e)}$  matris formunda yazılacak olursa

$$t^{(e)} = [N] \{t\}$$

şeklindedir. Burada şekil fonksiyonları

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_k]$$

ve düğüm değerleri

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{Bmatrix}$$

olarak verilmiştir. Eleman türevleri ise

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial z} \end{Bmatrix} = [D] \{t\}$$

şeklinde olup eleman türev matrisi

$$[D] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

olarak yazılır ki bu da kartezyen koordinatlar için bulunan (5.30) ifadesiyle aynıdır. Buna göre (5.50) denkleminin SEY çözümü

$$[K_t] \{t\}^{(e)} = \{K_{q^*}\} - \{K_{j_q}\} - [K_h] \{t\}^{(e)} + \{k_{t_m}\} \quad (5.55)$$

şeklindedir[5]. Buradaki terimler daha önceden elde edilmiş iki-boyutlu düzlemsel problem terimleriyle aynıdır:

$$[K_t]^{(e)} = \frac{k}{4\Delta} [b_m b_n + c_m c_n] \quad m, n = i, j, k \quad (5.56)$$

$$\{t\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

$$\{K_{q^*}\} = \frac{\Delta q^*}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

$$[K_h]^{(e)} = \frac{L_{ij}h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ smt & & 2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$\{K_{j_q}\} = \frac{L_{ij}j_q}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

$$\{k_{t_\infty}\} = \frac{L_{ij}h t_\infty}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

Eksenel simetrik problem düzlemsel problemden, eleman integrasyonundaki "alan" değerinin integral dışına alınmasında farklılıklar gösterir. Bu integrasyonu olabildiğince basitleştirme için Zienkiewicz[6],  $[rk]$  ve  $[rq^*]$  terimlerinin herbir eleman içinde sabit kaldığını kabul etmiş ve bu terimlerin "radyal yaklaşım" ile  $[\bar{r}k]$  ve  $[\bar{r}q^*]$  değerleriyle değiştirilebileceğini önermiştir. Bu öneriyi kullanarak Huebner[5] düzlemsel durum için elde edilen bağıntılardan faydalanarak eksenel simetrik problemler için yukarıda verilen bağıntılarda farklı olan katsayıları [E indisi eksenel simetrik, D indisi düzlemsel durumda elde edilen büyüklükleri göstermek üzere]

$$k_E = \bar{r}k_D \quad (5.62)$$

$$k_{t_{ij}} = 2\pi\bar{r}k_{t_{Dij}} \quad (5.63)$$

$$k_{q^*_{ij}} = \bar{r}q^*\pi \left[ a_i\bar{r} + b_i\bar{r}^2 + \frac{b_i}{12}(r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2) + c_i\bar{r}\bar{z} + \frac{c_i}{12}(r_1'z_1' + r_2'z_2' + r_3'z_3') \right] \quad (5.64)$$

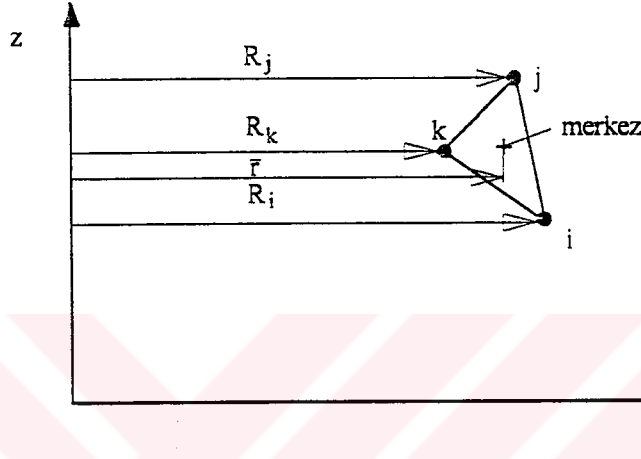
$$L_{ij_E} = 2\pi\bar{r}_{ij}L_{ij_D} \quad (5.65)$$

burada

$$\begin{aligned} r_i' &= r_i - \bar{r} \\ z_i' &= z_i - \bar{z} \\ \bar{z} &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \\ \bar{r}_{ij} &= \frac{1}{2}(r_i + r_j) \end{aligned} \quad (5.65a,b,c,d)$$

olarak vermiştir. Bu terimlerde kullanılan ve "radyal yaklaşım" olarak tanımlanan  $\bar{r}$  değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir(Şekil 5.11):

$$r \approx \bar{r} = \frac{1}{3}(R_i + R_j + R_k) \quad (5.66)$$



Şekil 5.11 Eksenel simetrik basit elemanda radyal yaklaşım.

#### 4. Zamana Bağlı Problemler

Şimdiye kadar incelenen problemlerde alan değişkenlerinin yalnızca koordinatlara bağlı olarak değiştiği gözönüne alınmıştı ama bazı mühendislik problemlerinde alan değişkenleri [sıcaklık,nem,...] zamana bağlı olarak da değişir. Bu durumlarda, belirli bir noktada alan değişkeni veya alan değişkeni değerlerinin potansiyel farkı nedeniyle oluşan akılar [ısı, nem,...] da zamana bağlı olarak değişir. Bu çeşit problemlere "zamana bağlı problemler [ZBP]" denir. Kurutulan bir üründeki nem ve sıcaklık değişimi, içten yanmalı bir motorun silindiri içerisinde gaz sıcaklığının periyodik değişimi sonucu silindir cidarındaki sıcaklık dağılımı ZBP'lere birer örnektir.

Sınır şartlarının incelendiği Bölüm 4'de de vurgulandığı gibi, zamana bağlı problemlerin çözümü için, herhangi bir zamanda [genellikle işlemin başlangıcı olan  $\tau=0$  anında] problemin başlangıç sınır şartı verilmeli ve bu şart incelenen sistemin her noktasında gerçekleşmelidir.

Yine örnek olarak zamana bağlı ısı transferi denklemini ele alacak olursak iki boyutlu problemde;



Diferansiyel denklem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q^* = k_c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (5.68)$$

Sınır şartları [ $\tau > 0$  iken sırasıyla  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$ 'de]:

$$t = t_0(x, y, \tau) \quad (5.69)$$

$$k_x \frac{\partial t}{\partial x} \vec{n}_x + k_y \frac{\partial t}{\partial y} \vec{n}_y + j_q + h(t - t_\infty) = 0 \quad (5.70)$$

Başlangıç şartları [ $\tau = 0$ ] ise:

$$t = t_0(x, y) \quad (5.71)$$

olarak yazılır. Burada  $\rho$  özgül kütle,  $c_q$  ısı kapasitesi olmak üzere  $k_c = \rho c_q$  şeklindedir. Burada verilen dört denklemle açıklanan problem için varyasyonel denklem olmadığından sonlu eleman denklemini türetmek için Galerkin yaklaşımına başvurulur ve bu yapılırken koordinat terimlerinde sonlu eleman, zaman terimlerinde sonlu farklar yaklaşımı kullanılır [5,6,8]. Buna göre tipik bir eleman içinde sıcaklık değişkeninin

$$t^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) t_i(\tau) = [N] \{t\}^{(e)} \quad (5.72)$$

olduğu kabul edilir. Burada  $n$ , elemandaki düğüm sayısıdır. Galerkin yaklaşımından zamanın herhangi bir anında

$$\int_{D^{(e)}} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + q^* - k_c \frac{\partial t}{\partial \tau} \right] dD^{(e)} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.73)$$

yazılır. Burada  $D^{(e)}$ , (e) elemanı bölgesini gösterir. Bu denklemlere daha önceden açıklanan standart işlemler uygulanır ve

$$\int_{D^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) dD^{(e)}$$

ifadesi kısmi integrasyon kuralıyla çözülür ve sınır şartları da eklenirse sonuç eleman denklemleri

$$[K_t]^{(e)} \{t\}^{(e)} - [K_c] \left\{ \frac{\partial t}{\partial \tau} \right\}^{(e)} = \{q^*\}^{(e)} - \{j_q\}^{(e)} - [K_h]^{(e)} \{t\}^{(e)} + \{K_\infty\}^{(e)} \quad (5.74)$$

olarak yazılır ki bu denklem

$$- [K_c] \left\{ \frac{\partial t}{\partial \tau} \right\}^{(e)} \quad (5.75)$$

terimi hariç (5.46) denklemiyle karşılaştırılırsa aynıdır. Buradaki  $[K_c]$  matrisinin değeri ise Tablo 5.2'deki bilgiler yardımıyla ve üçgen sonlu eleman için aşağıdadır [6,8]:

$$K_{c_{ij}} = \int_{D^{(e)}} k_c N_i N_j dx dy = \frac{k_c^{(e)} \Delta^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Benzer ifadeleri bir-boyutlu problem için de elde etmek amacıyla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) = k_c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (5.77)$$

diferansiyel denklemini

$$\tau=0'da \quad t = t_{t_0} \quad (5.78)$$

başlangıç ve

$$x=x_0 \quad \text{ve} \quad \tau > \tau_0'da \quad t = t_{x_0} \quad \text{veya} \quad k_{x_0} \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad (5.79)$$

$$x=x_L \quad \text{ve} \quad \tau > \tau_0'da \quad t = t_{x_L} \quad \text{veya} \quad k_{x_L} \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

sınır şartlarıyla çözecek olursak yine

$$- [K_c] \left\{ \frac{\partial t}{\partial \tau} \right\}^{(e)} \quad (5.80)$$

terimi dışında kararlı, bir-boyutlu problemin sonlu eleman denklemlerine ulaşılır:

$$[K_t]^{(e)} \{t\}^{(e)} - [K_c] \left\{ \frac{\partial t}{\partial \tau} \right\}^{(e)} = \{Q\}^{(e)} \quad (5.81)$$

Buradaki  $K_c$  matrisinin değeri ise lineer çizgi eleman için Tablo 5.1'deki bilgiler yardımıyla

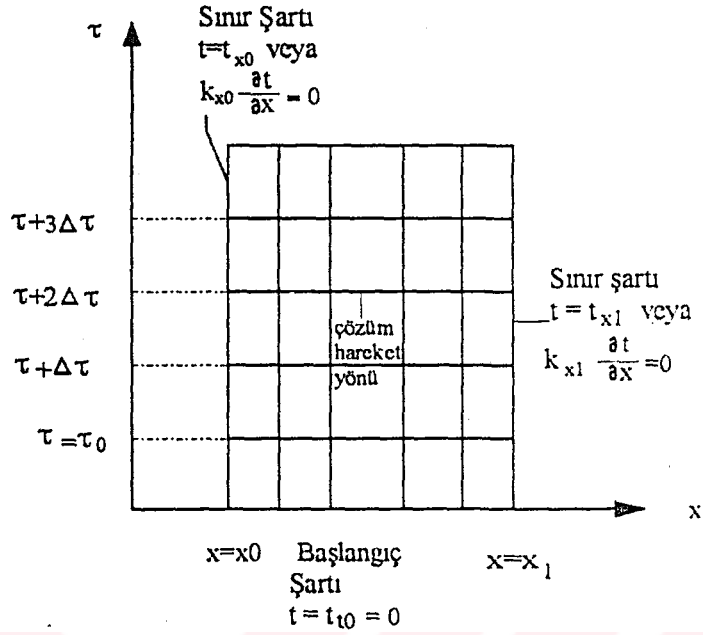
$$K_{c_{ij}} = \int_{L^{(e)}} k_c N_i N_j dx = \frac{k_c^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi zamana bağlı problemleri genel olarak

$$[K] \{t\} + [C] \{\dot{t}\} + \{J\} = 0 \quad (5.83)$$

matris denklemleri formunda yazmak mümkündür. Böylece KDD ile ifade edilen problem çözümü daha kolay olan adi DD [ADD] formuna dönüştürülmüştür. Bu denklemlerde alan değişkeni olan  $t$ 'nin zaman içinde ilerletilmesi hem koordinat hem de zaman adımlarına bağlıdır. [Bir-boyutlu problem için bu işlem Şekil 5.12'de verilmiştir.]



Şekil 5.12 Bir-boyutlu zamana bağlı problem için çözüm bölgesi

Zaman adımlarının belirlenmesinde ileri, geri, merkezi,... farklar kullanıldığından tüm bu yaklaşımları içine alan ve (5.83) denkleminin zaman içinde ilerletilmesini sağlayan denklem aşağıdadır[7]:

$$\theta \{ \dot{t} \}_{n+1} + (1-\theta) \{ \dot{t} \}_n = \frac{\{ t \}_{n+1} - \{ t \}_n}{\Delta \tau} \quad (5.84)$$

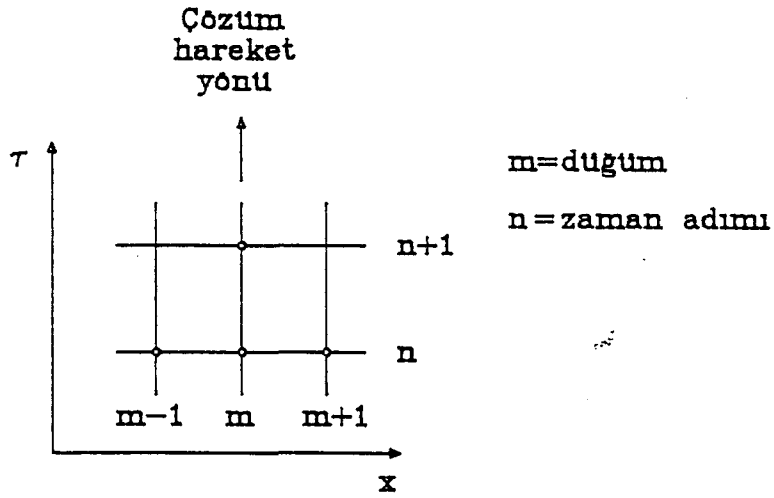
burada  $\Delta \tau$  zaman aralığı,  $\theta$  ilerlemenin türünü gösteren 0 ile 1 arasında bir katsayı,  $n$  ise zaman düzeyidir. Bu bağıntı

- $\theta = 0$  ise ileri farklar [Euler veya tam açık]
- $\theta = 1$  ise geri farklar [tam kapalı]
- $\theta = 1/2$  ise merkezi farklar [Crank-Nicolson veya yarı açık-yarı kapalı]
- $\theta = 2/3$  ise Galerkin

yöntemine dönüşür. Denklem (5.83) ve (5.84)'dan görüleceği gibi başlangıç şartının verilmesinden sonra herhangi bir noktada  $\tau + \Delta \tau$  zamanındaki sıcaklık, iki komşu noktada  $\tau$  zamanındaki sıcaklıklar yardımıyla hesaplanır. Örnek olarak geri farklar yöntemiyle bu durum tek bir düğüm için Şekil 5.13'de gösterilmiştir.

Buradan görüleceği gibi sonucun hassasiyeti koordinat ve zaman adımlarına bağlıdır. Bu adımların büyük seçilmesi çözümün kısa zamanda elde edilmesini sağlar ama bu hem sonuçların hassasiyetini azaltır hem de çözümde osilasyonların oluşmasına yol açar. Allaire[8], Şekil 5.14'de verilen ve tam çözümü

$$t = \frac{4 t_{c0}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp \left[ -\frac{k}{\rho c} \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau}{L^2} \right] \sin \frac{(2n+1) \pi x}{L}$$



Şekil 5.13 Geri farklar yöntemi için hesaplanan düğümler

olan bir-boyutlu zamana bağlı

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

şeklindeki ısı transferi probleminin çözümünde  $\Delta \tau$ 'nin etkisini incelemiş ve  $\Delta \tau$ 'nin 800,400,200 ve 100 saniye seçildiği dört ayrı zaman adımı için sonuçları tam çözüm sonuçlarıyla karşılaştırmıştır [Tablo 5.3].

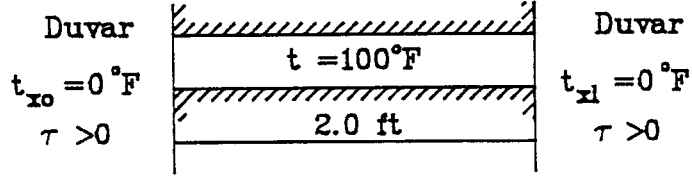
Görüldüğü gibi zaman adımının 800 saniye alındığı durum için çözümde osilasyonlar oluşmuştur ki bu arzu edilmeyen bir sonuçtur. Ancak zaman adımlarının çok küçük seçilmesi durumunda hesaplama zamanı artacağından bu değer olabildiğinden de küçük seçilmemesi gerekir. Literatürde[8,9] zaman adımı kriteri olarak bir-boyutlu problemlerde

$$\Delta \tau \leq \left( \frac{L^2 k_c}{2 k_x} \right)^{(e)} \quad (5.85)$$

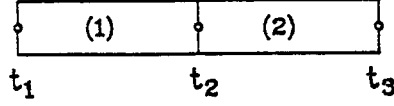
iki-boyutlu problemlerde

$$\Delta \tau \leq \left( \frac{L^2 k_c}{4 k_x} \right)^{(e)} \quad (5.86)$$

bağıntısı verilmiştir[79,91].



(a)



(b)

Şekil 5.14 İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı kondüksiyon problemi [8].

Tablo 5.3 İzole edilmiş ince alüminyum çubukta ısı kondüksiyon probleminin değişik zaman adımlarında elde edilen iki elemanlı ileri farklar çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması [8].

Zaman [s]	Durum 1 $\Delta\tau=800$	Durum 2 $\Delta\tau=400$	Durum 3 $\Delta\tau=200$	Durum 4 $\Delta\tau=100$	Tam Çözüm
100				89.61	94.35
200			79.23	70.99	75.83
300				56.24	58.96
400		58.45	46.30	44.55	45.65
500				35.30	35.36
600			27.06	27.96	27.35
700				22.15	21.16
800	16.89	9.87	15.82	17.55	16.37
900				13.90	12.67
1000			9.24	11.02	9.81
1100				8.73	7.59
1200		1.67	5.40	6.91	5.87
1300				5.48	4.54
1400			3.16	4.34	3.52
1500				3.44	2.72
1600	-11.18	0.28	1.85	2.72	2.11
1700				2.16	1.63
1800			1.08	1.71	1.26
1900				1.35	0.98
2000		0.05	0.63	1.07	0.76
2100				0.85	
2200			0.37	0.67	
2300				0.53	
2400	7.41	0.01	0.22	0.42	

Zienkiewicz[5] yukarıda verilen (5.84) bağıntısı ile ifade edilen iterasyon yönteminin  $\theta \geq 1/2$  değerleri için şartsız olarak dengeli bir yöntem olacağını gösterdiğinden bu yöntemler arasında en yaygın olarak kullanılanı Crank–Nicolson [C–N] yöntemi olmuştur ama bu yöntemde de  $\Delta\tau$  zaman aralığının büyük seçilmesi durumunda çözümde osilasyonların olabileceği unutulmamalıdır. Bu tür osilasyonların söndürülmeleri amacıyla Wood ve Lewis[89] tarafından değişik yöntemler ileri sürülmüştür. Bu yöntemler ortalama bir çözüm ile çözüme devam etme esasına dayalı olup, sözkonusu osilasyonları kısmen söndürebilme niteliğindedirler. Osilasyonların varolmasına rağmen bunların C–N yönteminde olduğu kadar etkin olmadığı bir yöntem Zienkiewicz[5] tarafından  $\theta$  sayısı 2/3 alınarak kullanılmıştır. Bu yöntem de C–N yöntemi kadar olmasa bile şartsız olarak dengeli olması nedeniyle yaygınlıkla kullanılmaktadır.

Yukarıda sayılan avantajları nedeniyle bu çalışmada zamana bağlı problemlerin iterasyonunda C–N yöntemi kullanılacaktır.

Bundan sonraki bölümde burada verilen bilgiler yardımıyla kurutma denklemlerinin SEY formülasyonu yapılacaktır.

## Gözenekli Ortamda Kurutma Probleminin Formülasyonu

Gözenekli ortamda kurutma problemi için Luikov tarafından önerilen ve cisim içindeki ısı ve kütle transfer potansiyeli dağılımlarını veren kısmi diferansiyel denklemler sistemi Bölüm 3'de tanıtılmıştı. Luikov ve Mikhailov [73,74] ve Luikov[75], bu tip denklemlerin 1-B problemler için analitik çözümlerini geometrileri ve sınır şartları basit olan durumlar için vermişlerdir. Bu bölümde karışık geometri, özellikleri yönlere göre değişen veya değişik malzemelerin sözkonusu olduğu problemlere kurutma denklemlerinin uygulanabilmesi için SEY formülasyonu Bölüm 5'de verilen işlem adımlarına uyularak yapılacaktır.

### A. Problemin Tanımı

#### *Adım 1. Diferansiyel Denklemler ve Sınır Şartlarının Formülasyonu*

Comini ve Lewis[41,97] Bölüm 3'de tanıtılan kurutma denklemlerini ve sınır şartlarını SEY formülasyonunda kullanılmak üzere genelleştirilmiş sınır şartlarıyla tekrar yazmışlardır. Bu denklemler vektörel notasyonda aşağıdaki şekildedir:

$$C_q \frac{\partial T}{\partial \theta} = K_q \nabla^2 T + K_e \nabla^2 U$$

$$C_n \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_b \nabla^2 T + K_n \nabla^2 U$$

İki-boyutlu kurutma problemlerinde ve kartezyen koordinatlar için bu denklemler

$$C_q \frac{\partial T}{\partial \Theta} = K_q \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + K_e \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (6.1a)$$

$$C_n \frac{\partial U}{\partial \Theta} = K_\delta \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + K_n \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (6.1b)$$

olarak yazılır. Bu denklemlerdeki boyutsuz değişkenler  $T=t/t_o$ ,  $U=u'/u'_o$ ,  $\Theta=\tau/\tau_o$ ,  $X=x/l$  ve  $Y=y/l$  olarak verilirken katsayılar ise aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır:

$$K_e = K_\delta = \frac{\varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \quad (6.2a)$$

$$K_q = \left( \frac{k_q + \varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right) \left( \frac{t_o \delta}{u'_o} \right), \quad (6.2b)$$

$$K_n = \frac{\varepsilon \lambda k_n u'_o}{k_q t_o}, \quad (6.2c)$$

$$C_q = \left( \frac{\rho c_q l^2}{k_q \tau_o} \right) \left( \frac{t_o \delta}{u'_o} \right), \quad (6.2d)$$

$$C_n = \left( \frac{\rho c_n l^2}{k_n \tau_o} \right) \left( \frac{\varepsilon \lambda k_n u'_o}{k_q t_o} \right). \quad (6.2e)$$

Burada  $t_o(=t_\infty)$ ,  $u'_o(=u'_\infty)$ ,  $\tau_o$  ve  $l$  referans değerleridir. Örnek olarak incelenecek problemin sınır şartları [ $n_x$  ve  $n_y$  dışa dönük birim vektör  $n$ 'in yön kosinüsleri olmak üzere] aşağıda verilmiştir:

Sabit sıcaklığı olan sınır bölgesinde [ $\Gamma_1$ 'de]

$$T = T_w \quad (6.3a)$$

Isı transferi için karışık sınır şartı olan sınır bölgesinde [ $\Gamma_2$ 'de]

$$K_q \left( \frac{\partial T}{\partial X} \vec{n}_x + \frac{\partial T}{\partial Y} \vec{n}_y \right) + J_q^* = 0 \quad (6.3b)$$

Sabit nem potansiyeli olan sınır bölgesinde [ $\Gamma_3$ 'de]

$$U = U_w \quad (6.3c)$$

Nem transferi için karışık sınır şartı olan sınır bölgesinde [ $\Gamma_4$ 'de]



$$K_n \left( \frac{\partial U}{\partial X} \vec{n}_x + \frac{\partial U}{\partial Y} \vec{n}_y \right) + J_n^* = 0 \quad (6.3d)$$

Yukarıdaki denklemlerden görüleceği gibi Y'li terimleri elimine ederek 1-B'li problemleri ifade edecek denklemlere,  $\Theta$ 'lı terimleri elimine ederek kararlı problemleri ifade edecek denklemlere ulaşmak mümkündür. Sınır şartlarında kullanılan katsayılar ise aşağıda verilmiştir:

$$J_q^* = A_q (T - T_\infty) + A_\varepsilon (U - U_\infty) + J_q, \quad (6.4a)$$

$$J_n^* = A_\delta (T - T_\infty) + A_n (U - U_\infty) + J_n, \quad (6.4b)$$

$$A_q = \left( \frac{\alpha_q l}{k_q} \right) \left( \frac{k_q + \varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right) \left( \frac{t_0 \delta}{u'_0} \right), \quad (6.4c)$$

$$A_n = \left( \frac{\alpha_n l}{k_n} \right) \left[ 1 - \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right) \right] \left( \frac{\varepsilon \lambda k_n u'_0}{k_q t_0} \right), \quad (6.4d)$$

$$A_\varepsilon = \left( \frac{\alpha_n l}{k_n} \right) \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \left( \frac{k_q + \varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right) \left( \frac{\varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right), \quad (6.4e)$$

$$A_\delta = - \left( \frac{\alpha_q l}{k_q} \right) \left( \frac{\varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right), \quad (6.4f)$$

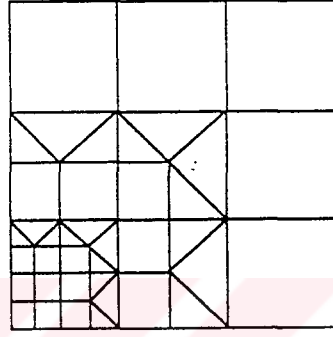
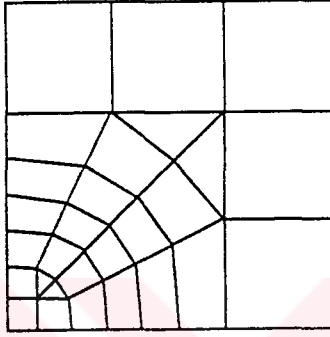
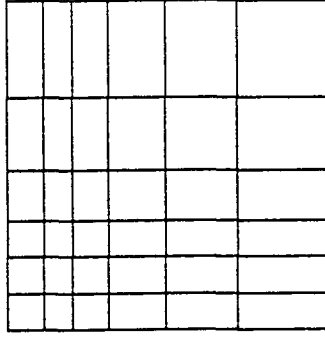
$$J_q = \left( \frac{j_q}{k_q} \right) \left( \frac{k_q + \varepsilon \lambda k_n \delta}{k_q} \right) \left( \frac{\delta l}{u'_0} \right), \quad (6.4g)$$

$$J_n = \left( \frac{\varepsilon \lambda}{k_q} \right) \left( j_n - k_n \delta \frac{j_q}{k_q} \right) \left( \frac{l}{t_0} \right). \quad (6.4h)$$

## Adım 2. Problemin Sonlu Elemanlara Bölünmesi

Bölüm 5'de açıklanan nedenlerden dolayı ilerleyen bölümlerde incelenecek 1-B problemlerde düğüm noktaları kenarlarda olan çizgisel elemanlar; 2-B problemlerde üç düğüm noktalı, kenarları doğru ve düğüm noktaları köşelerde olan üçgen sonlu elemanlar kullanılacaktır.

İncelenen problemde sıcaklık ve nem potansiyelinin daha hızlı değişmesi beklenen bölgelerde daha küçük sonlu elemanlar kullanılırken değişimin az olduğu bölgelerde daha seyrek elemanlar kullanılacaktır. Şekil 6.1 2-B'li problemde bu duruma bir örnektir ve anlatımı kolaylaştırma açısından dörtgen elemanlar üçgen elemanlara bölünmemiştir.



Şekil 6.1 2-B örnek bir problemde sonlu elemanlar ağının seyrekleştirilmesi

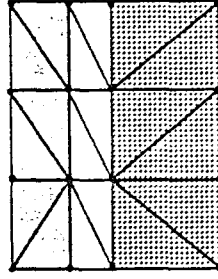
Doğrusal olmayan sınırlar ihmal edilebilir bir hata ile gösterilecektir (Şekil 6.2).

Eğer incelenen bölge birden fazla malzemeden meydana gelmişse bölme malzemenin değiştiği noktalarda sürekliliği bozmayacak şekilde yapılacaktır (Şekil 6.3).

Sınır elemanlarda eğer ikinci veya üçüncü çeşit sınır şartı [bak.Bölüm 4] varsa bilgisayar programıyla uyumluluğu sağlamak amacıyla bölme işlemi sınıra elemanın bir kenarı gelecek şekilde yapılacaktır. İki-boyutlu bir problem için bu duruma bir örnek Şekil 6.4'de verilmiştir.



Şekil 6.2 Doğrusal olmayan sınırlarda sonlu eleman kullanımı [geometrik hata].



Şekil 6.3 Malzeme farklılığının gözönüne alındığı doğal bölme.

Üçgen elemanlar genellikle dikdörtgen elemanların ikiye bölünmesinden elde edilir ancak bu yapılırken eleman bağlantılarında süreksizlik olmamalıdır. Aşağıda 2-B problemde dört düğüm noktasında kullanılabilecek uygun olmayan ve uygun olan üçgen elemanlar gösterilmiştir (Şekil 6.5).

### Adım 3. İnterpolasyon Fonksiyonunun Seçimi

İnterpolasyon fonksiyonunun seçiminde bir önceki adımda kullanılan sonlu elemanın şekli belirleyici rol oynadığından sıcaklık (T) ve nem potansiyeli (U) için eleman içinde 1-B problemlerde

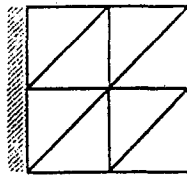
$$T^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 X$$

$$U^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 X$$

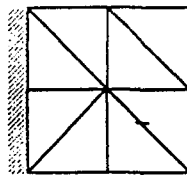
ve 2-B problemlerde

$$T^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y$$

$$U^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y$$

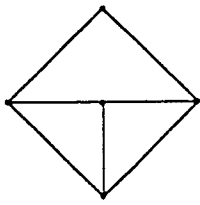


uygun değil

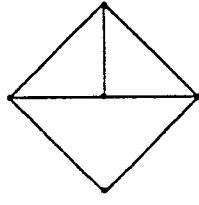


uygun

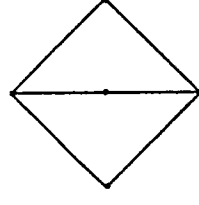
Şekil 6.4 2-B problemde sınır şartlarının gözönüne alındığı bölme.



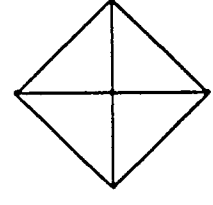
uygun değil



uygun değil



uygun değil



uygun

Şekil 6.5 Dört düğüm noktasında mümkün olan üçgen elemanlar.

şeklindeki lineer interpolasyon fonksiyonu kullanılacaktır. Bunlar piramit fonksiyonlarıyla 1-B problemlerde

$$T^{(e)} = N_i T_i + N_j T_j$$

$$U^{(e)} = N_i U_i + N_j U_j$$

ve 2-B problemlerde

$$T^{(e)} = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k$$

$$U^{(e)} = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k$$

olarak yazılabilir.

#### Adım 4. Eleman Özelliklerinin Belirlenmesi

Eleman özelliklerinin belirlenmesi 1-B ve 2-B problemler için ayrı ayrı yapılacaktır.

#### 1-B Problemler İçin Eleman Matrislerinin Belirlenmesi

Bu duruma uygun KDD'ler (6.1)'den

$$C_q \frac{\partial T}{\partial \theta} = K_q \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + K_e \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (6.5a)$$

$$C_n \frac{\partial T}{\partial \theta} = K_\delta \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + K_n \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (6.5b)$$

ve  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  ve  $\Gamma_4$  sınırlarındaki sınır şartları ise sırasıyla

$$T = T_w \quad (6.6a)$$

$$K_q \frac{\partial T}{\partial X} + J_q^* = 0 \quad (6.6b)$$

$$U = U_w \quad (6.6c)$$

$$K_n \frac{\partial U}{\partial X} + J_n^* = 0 \quad (6.6d)$$

olarak yazılır. Bu denklemlerde T ve U potansiyelleri çözüm alanı  $L^{(e)}$  içinde çizgi eleman için aşağıdaki yaklaşım fonksiyonlarıyla değiştirilebilir:

$$T = T^{(e)}(X, \Theta) = \sum_{i=1}^2 N_i(X) T_i(\Theta) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = [N]^{(e)} T^{(e)} \quad (6.7a)$$

$$U = U^{(e)}(X, \Theta) = \sum_{i=1}^2 N_i(X) U_i(\Theta) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [N]^{(e)} U^{(e)} \quad (6.7b)$$

Galerkin yaklaşımıyla yukarıda verilen DD'ler

$$\int_{L^{(e)}} N_i \left[ K_q \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} + K_s \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} - C_q \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \Theta} \right] dX = 0 \quad (6.8a)$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i \left[ K_\delta \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} + K_n \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} - C_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \Theta} \right] dX = 0 \quad (6.8b)$$

şeklini alır. Bu denklemlerdeki ikinci dereceden terimler Bölüm 5'de verilen bilgilerden kısmi integrasyon kuralıyla

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_q \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} dX = N_i K_q \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_q \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} dX \quad (6.9a)$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_s \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} dX = N_i K_s \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_s \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} dX \quad (6.9b)$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_\delta \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} dX = N_i K_\delta \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_\delta \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} dX \quad (6.9c)$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_n \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} dX = N_i K_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} dX \quad (6.9d)$$

olarak yazılır. İlgili elemanda  $N_i=1$  olacağından (6.6b) ve (6.6d) SŞ'lerinden

$$\frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} = - \frac{J_q^*}{K_q}, \quad \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} = - \frac{J_m^*}{K_m}$$

ve Bölüm 5'deki bilgilerden hatırlanacağı gibi eleman içinde

$$\frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} = \frac{1}{L^{(e)}} [b_1 \quad b_2] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} = \frac{1}{L^{(e)}} [b_1 \quad b_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$\int_{L^{(e)}} dX = L, \quad \frac{\partial N_i}{\partial X} = \frac{b_i}{L}$$

olduğu gözönüne alınacak olursa 1 ve 2 çizgi elemanın düğüm numaralarını göstermek üzere] aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür:

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_q \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} dX = -J_q^* - \frac{b_i}{L} K_q \frac{1}{L} [b_1 \quad b_2] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} L$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_s \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} dX = -J_m^* \frac{K_s}{K_m} - \frac{b_i}{L} K_s \frac{1}{L} [b_1 \quad b_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} L$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_\delta \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} dX = -J_q^* \frac{K_\delta}{K_q} - \frac{b_i}{L} K_\delta \frac{1}{L} [b_1 \quad b_2] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} L$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_n \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} dX = -J_m^* - \frac{b_i}{L} K_n \frac{1}{L} [b_1 \quad b_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} L$$

Zaman teriminin bulunduğu ifadeler ise

$$\int_{L^{(e)}} N_i C_q \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \Theta} dX = C_q \int_{L^{(e)}} N_i [N_1 \quad N_2] \frac{\partial}{\partial \Theta} \{T\}^{(e)} dX$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i C_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \Theta} dX = C_n \int_{L^{(e)}} N_i [N_1 \quad N_2] \frac{\partial}{\partial \Theta} \{U\}^{(e)} dX$$

şeklinde olacağından yine Bölüm 5'deki bilgilerden 1 ve 2 düğümleri için matris formunda aşağıdaki denklemleri yazmak mümkündür:

$$\int_{L^{(e)}} N_i C_q \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \Theta} dX = \frac{C_q L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i C_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \Theta} dX = \frac{C_n L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_q \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} dX = \frac{K_q}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_e \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} dX = \frac{K_e}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_\delta \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} dX = \frac{K_\delta}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial X} K_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} dX = \frac{K_n}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

Burada ilk iki denklemde kullanılan (.) sembolü zamana göre türevi gösterir. Öte yandan (6.6b) ve (6.6d) SŞ'lerinde T ve U yerine yaklaşım fonksiyonlarının yazılıp düzenlenmesiyle

$$J_q^* = J_q + A_q \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_e \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_q T_\infty + A_e U_\infty)$$

$$J_n^* = J_n + A_\delta \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_n \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)$$

olacağından (6.9) denkleminde

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_q \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} dX = - \left( J_q + A_q \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_\varepsilon \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_q T_\infty + A_\varepsilon U_\infty) \right) - \frac{K_q}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_\varepsilon \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} dX = - \frac{K_\varepsilon}{K_n} \left( J_n + A_\delta \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_n \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \right) - \frac{K_\varepsilon}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_\delta \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} dX = - \frac{K_\delta}{K_q} \left( J_q + A_q \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_\varepsilon \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_q T_\infty + A_\varepsilon U_\infty) \right) - \frac{K_\delta}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\int_{L^{(e)}} N_i K_n \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} dX = - \left( J_n + A_\delta \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_n \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \right) - \frac{K_n}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

ifadeleri elde edilir. Bunlar (6.8)'de yerlerine yazılır ve denklemlerin her iki tarafı  $-1$  ile çarpılırsa

$$\frac{K_q}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \frac{K_\varepsilon}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \frac{C_q L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$+ J_q + A_q \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_\varepsilon \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_q T_\infty + A_\varepsilon U_\infty)$$

$$+ J_n \frac{K_\varepsilon}{K_n} + A_\delta \frac{K_\varepsilon}{K_n} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_n \frac{K_\varepsilon}{K_n} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - \frac{K_\varepsilon}{K_n} (A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) = 0$$

$$\frac{K_\delta}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \frac{K_n}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \frac{C_n L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$+ J_q \frac{K_\delta}{K_q} + A_q \frac{K_\delta}{K_q} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_\varepsilon \frac{K_\delta}{K_q} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - \frac{K_\delta}{K_q} (A_q T_\infty + A_\varepsilon U_\infty)$$



$$+ J_n + A_\delta \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + A_n \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} - (A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) = 0$$

veya son olarak matris formunda

$$\begin{bmatrix} \frac{K_q}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \frac{K_\varepsilon}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{K_\delta}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \frac{K_n}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} \frac{C_q L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \frac{C_n L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}^{(e)} \\ + \begin{bmatrix} A_q & A_\varepsilon \\ A_q \frac{K_\delta}{K_q} & A_\varepsilon \frac{K_\delta}{K_q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \begin{bmatrix} A_\delta \frac{K_\varepsilon}{K_n} & A_n \frac{K_\varepsilon}{K_n} \\ A_\delta & A_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^{(e)} \\ + \begin{bmatrix} -(A_q T_\infty + A_\varepsilon U_\infty) \\ -\frac{K_\delta}{K_q} (A_q T_\infty + A_\varepsilon U_\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{K_\varepsilon}{K_n} (A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \\ -(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_q \\ J_q \frac{K_\delta}{K_q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_n \frac{K_\varepsilon}{K_n} \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

bağıntıları yazılır.

## 2-B Problemler İçin Eleman Matrislerinin Belirlenmesi

Bu tür problemlerin KDD'leri (6.1) SŞ'leri ise (6.2) denklemleriyle daha önceden verilmişti. Bu denklemlerde de her bir eleman için T ve U potansiyelleri üç düğüm noktalı üçgen eleman için D çözüm bölgesinde yaklaşık olarak aşağıdaki gibi alınır:

$$T \cong T^{(e)}(X, Y, \Theta) = \sum_{i=1}^3 N_i(X, Y) T_i(\Theta) = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} \quad (6.11a)$$

$$U \cong T^{(e)}(X, Y, \Theta) = \sum_{i=1}^3 N_i(X, Y) U_i(\Theta) = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = [N]^{(e)} \{U\}^{(e)} \quad (6.11b)$$

Bu denklemler KDD'lerde yerlerine yazılırsa Galerkin yaklaşımıyla aşağıdaki bağıntıları yazmak mümkündür:

$$\int_{D^{(e)}} N_i \left[ K_\alpha \left( \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial Y^2} \right) + K_\varepsilon \left( \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial Y^2} \right) - C_\alpha \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \Theta} \right] dXdY = 0 \quad (6.12a)$$

$$\int_{D^{(e)}} N_i \left[ K_\beta \left( \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial Y^2} \right) + K_n \left( \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial Y^2} \right) - C_n \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \Theta} \right] dXdY = 0 \quad (6.12b)$$

Green Teoremi [Bak.Bölüm 5] yardımıyla bu denklemlerdeki ikinci dereceden terimleri

$$\begin{aligned} \int_{D^{(e)}} N_i \left[ K_\alpha \left( \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial Y^2} \right) \right] dXdY &= K_\alpha \int_{\Gamma_2^{(e)}} \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial T^{(e)}}{\partial Y} \bar{n}_y \right) N_i d\Gamma_2^{(e)} \\ &\quad - K_\alpha \int_{D^{(e)}} \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{\partial T^{(e)}}{\partial Y} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{D^{(e)}} N_i \left[ K_\varepsilon \left( \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial Y^2} \right) \right] dXdY &= K_\varepsilon \int_{\Gamma_4^{(e)}} \left( \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial Y} \bar{n}_y \right) N_i d\Gamma_4^{(e)} \\ &\quad - K_\varepsilon \int_{D^{(e)}} \left( \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial Y} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{D^{(e)}} N_i \left[ K_\beta \left( \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^{(e)}}{\partial Y^2} \right) \right] dXdY &= K_\beta \int_{\Gamma_2^{(e)}} \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial T^{(e)}}{\partial Y} \bar{n}_y \right) N_i d\Gamma_2^{(e)} \\ &\quad - K_\beta \int_{D^{(e)}} \left( \frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{\partial T^{(e)}}{\partial Y} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{D^{(e)}} N_i \left[ K_n \left( \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial Y^2} \right) \right] dXdY &= K_n \int_{\Gamma_4^{(e)}} \left( \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial Y} \bar{n}_y \right) N_i d\Gamma_4^{(e)} \\ &\quad - K_n \int_{D^{(e)}} \left( \frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial Y} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY \end{aligned}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Öte yandan (6.2b) ve (6.2d) bağıntılarından

$$\frac{\partial T^{(e)}}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial T^{(e)}}{\partial Y} \bar{n}_y = -\frac{J_\alpha^*}{K_\alpha}$$

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial X} \bar{n}_x + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial Y} \bar{n}_y = -\frac{J_n^*}{K_n}$$

yazılabileceği gözönüne alınırsa (6.11) denklemlerinin de kullanımıyla

$$\begin{aligned}
& K_q \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dx dy \\
& + K_z \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dx dy \quad (6.13a) \\
& + C_q \int_{D^{(e)}} N_i [M]^{(e)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \{T\}^{(e)} dx dy + \int_{\Gamma_2^{(e)}} J_q^* N_i d\Gamma_2^{(e)} + \frac{K_z}{K_n} \int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n^* N_i d\Gamma_4^{(e)} = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& K_\delta \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dx dy \\
& + K_n \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dx dy \quad (6.13b) \\
& + C_n \int_{D^{(e)}} N_i [M]^{(e)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \{U\}^{(e)} dx dy + \frac{K_\delta}{K_q} \int_{\Gamma_2^{(e)}} J_q^* N_i d\Gamma_2^{(e)} + \int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n^* N_i d\Gamma_4^{(e)} = 0
\end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2^{(e)}} J_q^* N_i d\Gamma_2^{(e)} &= \int_{\Gamma_2^{(e)}} [A_q (T^{(e)} - T_\infty) + A_z (U^{(e)} - U_\infty) + J_q] N_i d\Gamma_2^{(e)} \\
&= \int_{\Gamma_2^{(e)}} A_q [M]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} + \int_{\Gamma_2^{(e)}} A_z [M]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} \\
&\quad + \int_{\Gamma_2^{(e)}} J_q N_i d\Gamma_2^{(e)} + \int_{\Gamma_2^{(e)}} [-(A_q T_\infty + A_z U_\infty)] N_i d\Gamma_2^{(e)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n^* N_i d\Gamma_4^{(e)} &= \int_{\Gamma_4^{(e)}} [A_\delta (T^{(e)} - T_\infty) + A_n (U^{(e)} - U_\infty) + J_n] N_i d\Gamma_4^{(e)} \\
&= \int_{\Gamma_4^{(e)}} A_\delta [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} + \int_{\Gamma_4^{(e)}} A_n [N]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} \\
&\quad + \int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n N_i d\Gamma_4^{(e)} + \int_{\Gamma_4^{(e)}} [-(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)] N_i d\Gamma_4^{(e)}
\end{aligned}$$

olduğundan bu denklemlerin (6.13)'de yerlerine yazılmasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
&K_\alpha \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dx dy \\
&+ K_\varepsilon \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dx dy \\
&+ C_\alpha \int_{D^{(e)}} N_i [M]^{(e)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \{T\}^{(e)} dx dy + \int_{\Gamma_2^{(e)}} A_\alpha [M]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} \\
&+ \int_{\Gamma_2^{(e)}} A_n [M]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} + \int_{\Gamma_2^{(e)}} J_n N_i d\Gamma_2^{(e)} + \int_{\Gamma_2^{(e)}} [-(A_\alpha T_\infty + A_n U_\infty)] N_i d\Gamma_2^{(e)} \\
&+ \frac{K_\varepsilon}{K_n} \int_{\Gamma_4^{(e)}} A_\delta [M]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} + \frac{K_\varepsilon}{K_n} \int_{\Gamma_4^{(e)}} A_n [M]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} \\
&+ \frac{K_\varepsilon}{K_n} \int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n N_i d\Gamma_4^{(e)} + \frac{K_\varepsilon}{K_n} \int_{\Gamma_4^{(e)}} [-(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)] N_i d\Gamma_4^{(e)} = 0 \quad (6.14a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{\delta} \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY \\
& + K_n \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY \\
& + C_n \int_{D^{(e)}} N_i [N]^{(e)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \{U\}^{(e)} dXdY + \frac{K_{\delta}}{K_{\alpha} \Gamma_2^{(e)}} \int A_{\alpha} [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} \\
& + \frac{K_{\delta}}{K_{\alpha} \Gamma_2^{(e)}} \int A_{\alpha} [N]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} + \frac{K_{\delta}}{K_{\alpha} \Gamma_2^{(e)}} \int J_{\alpha} N_i d\Gamma_2^{(e)} + \frac{K_{\delta}}{K_{\alpha} \Gamma_2^{(e)}} \int [-(A_{\alpha} T_{\infty} + A_{\alpha} U_{\infty})] N_i d\Gamma_2^{(e)} \\
& + \int_{\Gamma_4^{(e)}} A_{\delta} [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} + \int_{\Gamma_4^{(e)}} A_n [N]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} \\
& + \int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n N_i d\Gamma_4^{(e)} + \int_{\Gamma_4^{(e)}} [-(A_{\delta} T_{\infty} + A_n U_{\infty})] N_i d\Gamma_4^{(e)} = 0. \tag{6.14b}
\end{aligned}$$

Öte yandan Bölüm 5'deki bilgilerden

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \frac{\partial N_3}{\partial X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{2\Delta} & \frac{b_2}{2\Delta} & \frac{b_3}{2\Delta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\Delta} [b_1 \quad b_2 \quad b_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \frac{\partial N_3}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2\Delta} & \frac{c_2}{2\Delta} & \frac{c_3}{2\Delta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\Delta} [c_1 \quad c_2 \quad c_3]
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{D^{(e)}} dXdY = \Delta$$

olduğundan aşağıdaki integral denklemler yazılabilir:

$$\int_{D^{(e)}} \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \frac{b_i}{2\Delta} \Delta$$

$$\int_{D^{(e)}} \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \frac{c_i}{2\Delta} \Delta$$

$$\int_{D^{(e)}} \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \frac{b_i}{2\Delta} \Delta$$

$$\int_{D^{(e)}} \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \frac{c_i}{2\Delta} \Delta$$

Bu denklemler  $i=1,2,3$  için yazılır ve birleştirilirse

$$\begin{aligned} & \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{T\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY = \\ & = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{simetrik} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{D^{(e)}} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial X} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial X} + \left[ \frac{\partial N}{\partial Y} \right]^{(e)} \{U\}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \right) dXdY = \\ & = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{simetrik} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15b)$$

ifadeleri elde edilir. Bölüm 5'deki bilgilerden (6.14) denklemlerinde yer alan zaman türev terimleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\int_{D^{(e)}} N_i [N]^{(e)} \{\dot{T}\}^{(e)} dXdY = \int_{D^{(e)}} N_i [N]^{(e)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \{T\}^{(e)} dXdY = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\int_{D^{(e)}} N_i [N]^{(e)} \{\dot{U}\}^{(e)} dXdY = \int_{D^{(e)}} N_i [N]^{(e)} \frac{\partial}{\partial \Theta} \{U\}^{(e)} dXdY = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{Bmatrix}$$

Sınır eleman için de ilgili bağıntılar

$$\int_{\Gamma_2^{(e)}} A_q [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} = \frac{A_q L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{\Gamma_2^{(e)}} \quad (6.15e)$$

$$\int_{\Gamma_2^{(e)}} A_s [N]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_2^{(e)} = \frac{A_s L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}_{\Gamma_2^{(e)}} \quad (6.15f)$$

$$\int_{\Gamma_4^{(e)}} A_s [N]^{(e)} \{T\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} = \frac{A_s L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}_{\Gamma_4^{(e)}} \quad (6.15g)$$

$$\int_{\Gamma_2^{(e)}} A_n [N]^{(e)} \{U\}^{(e)} N_i d\Gamma_4^{(e)} = \frac{A_n L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}_{\Gamma_4^{(e)}} \quad (6.15h)$$

$$\int_{\Gamma_2^{(e)}} [-(A_q T_\infty + A_s U_\infty)] N_i d\Gamma_2^{(e)} = [-(A_q T_\infty + A_s U_\infty)] \frac{L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Gamma_2^{(e)}} \quad (6.15i)$$

$$\int_{\Gamma_4^{(e)}} [-(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)] N_i d\Gamma_4^{(e)} = [-(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)] \frac{L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Gamma_4^{(e)}} \quad (6.15j)$$

$$\int_{\Gamma_2^{(e)}} J_q N_i d\Gamma_2^{(e)} = \frac{J_q L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Gamma_2^{(e)}} \quad (6.15k)$$

$$\int_{\Gamma_4^{(e)}} J_n N_i d\Gamma_4^{(e)} = \frac{J_n L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Gamma_4^{(e)}} \quad (6.15l)$$

şeklinde. Buna göre (6.15) denklemleri (6.14) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{K_q}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{simetrik} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \\ & + \frac{K_e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{simetrik} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \frac{C_q \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} \\ & + \frac{A_q L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \frac{A_e L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \\ & + \frac{K_e}{K_n} \frac{A_\delta L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \frac{K_e}{K_n} \frac{A_n L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \\ & + [-(A_q T_\infty + A_e U_\infty)] \frac{L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + [-(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)] \frac{K_e}{K_n} \frac{L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



$$+ \frac{J_q L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{K_e}{K_n} \frac{J_n L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\frac{K_\delta}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{simetrik} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{K_n}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{simetrik} & & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \frac{C_n \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{K_\delta}{K_q} \frac{A_q L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \frac{K_\delta}{K_q} \frac{A_e L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{A_\delta L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \frac{A_n L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{K_\delta}{K_q} [-(A_q T_\infty + A_e U_\infty)] \frac{L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + [-(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty)] \frac{L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{K_\delta}{K_q} \frac{J_q L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{J_n L_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

elde edilir. Bu denklemler bir eleman için matris formunda aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{K_q}{4\Delta} \\ b_1 b_1 + c_1 c_1 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ b_2 b_2 + c_2 c_2 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ b_2 b_2 + c_2 c_2 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

*simetrik*

$$\begin{bmatrix} \frac{K_n}{4\Delta} \\ b_1 b_1 + c_1 c_1 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ b_2 b_2 + c_2 c_2 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ b_2 b_2 + c_2 c_2 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

*simetrik*

$$\begin{bmatrix} \frac{C_q \Delta}{12} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_q L_{12}}{6} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_n \Delta}{12} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_\delta A_q L_{12}}{K_q} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} \frac{K_z A_\delta L_{12}}{K_n} \\ \frac{K_z A_n L_{12}}{K_n} \\ \frac{K_z A_n L_{12}}{6} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{c} \frac{A_\delta L_{12}}{6} \\ \frac{A_n L_{12}}{6} \\ \frac{A_n L_{12}}{6} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right] \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} -(A_q^T T_\infty + A_\epsilon U_\infty) \\ \frac{L_{12}}{2} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} -(A_q^T T_\infty + A_\epsilon U_\infty) \\ \frac{K_\delta L_{12}}{K_q} \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} -(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \\ \frac{K_z L_{12}}{K_n} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} -(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \\ \frac{L_{12}}{2} \end{array} \right] \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \frac{J_q L_{12}}{2} \\ \frac{K_\delta J_q L_{12}}{K_q} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{J_q L_{12}}{2} \\ \frac{K_\delta J_q L_{12}}{K_q} \end{array} \right] \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \frac{K_\epsilon J_n L_{12}}{K_n} \\ \frac{J_n L_{12}}{2} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{K_\epsilon J_n L_{12}}{K_n} \\ \frac{J_n L_{12}}{2} \end{array} \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(6.16)

### Eksenel simetrik [3-B] Problemler için Eleman Matrislerinin Belirlenmesi

Bölüm 5'de verilen (5.62), (5.63) ve (5.65) denklemlerinin kullanımıyla (5.16) denklemlerine benzer yol izlenerek aşağıdaki matris denklemleri yazılabilir:

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{2\pi\bar{I}K_q}{4\Delta} \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} b_1b_1+c_1c_1 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_3b_3+c_3c_3 & b_3b_3+c_3c_3 & b_3b_3+c_3c_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{2\pi\bar{I}K_e}{4\Delta} \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} b_1b_1+c_1c_1 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_3b_3+c_3c_3 & b_3b_3+c_3c_3 & b_3b_3+c_3c_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{2\pi\bar{I}K_g}{4\Delta} \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} b_1b_1+c_1c_1 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_3b_3+c_3c_3 & b_3b_3+c_3c_3 & b_3b_3+c_3c_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{2\pi\bar{I}C_q\Delta}{12} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right]$$

$$+ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{2\pi\bar{I}C_n\Delta}{12} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} \frac{2\pi A_q}{6} (\bar{I}L_{12}) & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right]$$

$$+ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{2\pi A_e}{6} (\bar{I}L_{12}) & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} \frac{K_g}{K_q} \frac{2\pi A_q}{6} (\bar{I}L_{12}) & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{ccc} \frac{K_\epsilon}{K_n} \frac{2\pi A_\delta}{6} (\overline{IL}_{12}) & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{K_\epsilon}{K_n} \frac{2\pi A_n}{6} (\overline{IL}_{12}) & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \\
& + \left[ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\pi(A_q T_\infty + A_\epsilon U_\infty) (\overline{IL}_{12}) \\ -\pi(A_q T_\infty + A_\epsilon U_\infty) \frac{K_\delta}{K_q} (\overline{IL}_{12}) \end{bmatrix} \end{array} \right] \\
& + \left[ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \\
& + \left[ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{c} -\pi(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) \frac{K_\epsilon}{K_n} (\overline{IL}_{12}) \\ -\pi(A_\delta T_\infty + A_n U_\infty) (\overline{IL}_{12}) \end{array} \right\} \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \pi J_q (\overline{IL}_{12}) \\ \frac{K_\delta}{K_q} \pi J_q (\overline{IL}_{12}) \end{array} \right\} \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \frac{K_\epsilon}{K_n} \pi J_n (\overline{IL}_{12}) \\ \pi J_n (\overline{IL}_{12}) \end{array} \right\} \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
& = \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Böylece ister 1-B problemler için verilen (6.10) matris denklemleri ister 2-B problemler için verilen (6.16) matris denklemleri isterse ekseneel simetrik [3-B] problemler için verilen (6.17) matris denklemleri

$$[K]\{\phi\} + [C]\{\dot{\phi}\} + \{J\} = 0 \quad (6.18)$$

diferansiyel denklemini oluştururlar. Burada [K] ve [C] elemanları sabit değerlerde olan  $2E \times 2E$  (E : eleman sayısı) boyutlarındaki simetrik matrisler, {J} ise 2E boyutundaki sabitler vektörüdür:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{\alpha} & [K]_{\epsilon} \\ [K]_{\delta} & [K]_{m} \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} [C]_{\alpha} & 0 \\ 0 & [C]_{m} \end{bmatrix}, \quad \{J\} = \begin{Bmatrix} \{J\}_{\alpha} \\ \{J\}_{m} \end{Bmatrix}.$$

Denklem (6.18)'deki  $\{\phi\}$  ve  $\{\dot{\phi}\}$  ise alan değişkenlerini ve zamana göre türevlerinin düğüm noktalarındaki değerlerini belirtir:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ U_1 \\ T_2 \\ U_2 \\ \vdots \\ T_E \\ U_E \end{Bmatrix}; \quad \{\dot{\phi}\} = \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{U}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{T}_E \\ \dot{U}_E \end{Bmatrix}.$$

Böylece kısmi diferansiyel denklemler formundaki kurutma denklemleri adi diferansiyel denklem formuna dönüştürülmüştür.

#### *Adım 5. Sistem Denklemlerini Oluşturmak İçin Eleman Özelliklerinin Birleştirilmesi*

Yukarıda verilen (6.18) denkleminde bilinmeyen düğüm potansiyeli T ve U'nun her düğüm için birbirini izleyen sırada sistem matrisinde yer alması planlandığından eleman matris değerlerinin sistem matrisine transferinde bu durumun gözönüne alınması gerekir. Burada Huebner[6] ve Taylan[96] tarafından verilen yöntem kullanılarak herbir düğüm noktasında eleman matrisinin ilgili satır ve sütun elemanı [DN elemanın düğüm numarasını göstermek üzere] sistem matrisine T için  $DN \times 2 - 1$ , U için  $DN \times 2$  formülü kullanılarak transfer edilecektir.

Eleman matrislerinin tümünün sistem matrisine transfer edilmesinden sonra sınır şartları için matris ve vektörlerin tekrar düzenlenmesi gerekir. Birinci çeşit sınır şartları [Bak.Bölüm 4] için yapılacak düzenleme işlemi Bölüm 7'de açıklanacaktır.

## B. İncelenen Kurutma Problemleri Çeşitleri ve Çözüm Yöntemleri

Uygulamada karşılaşılan kurutma problemleri genellikle kararsız ve üç boyutlu problemlerdir ama kararlı problemlerle de karşılaşmak mümkündür. Kurutma denklemlerinin üç boyutlu analizinin karmaşıklığı, bu cisimlerde bazı yaklaşık analizler yapılmasını zorunlu kılmıştır. Bu yaklaşık analizlerden en çok kullanılanı, üç boyutlu problemin geometri ve çevre koşulları açısından en kritik bölgesinin 1-B veya 2-B analizidir. Bu çalışmada, 1-B problemlerin analitik çözümleri literatürde [73-75] verildiği için zamana bağlı olarak değişen [kararsız] ve değişmeyen [kararlı] 2-B ve eksenel simetrik [3-B] kurutma problemleri incelenmiştir.

### Adım 6. Sistem Denklemlerinin Çözümü

#### 1. Kararsız Problemler

Yukarıda verilen (6.18) bağıntısı zamana bağlıdır ve bu tip problemlerin zaman içinde ilerletilmesinde (5.84) denkleminde yararlanılarak yazılan aşağıdaki denklem kullanılır:

$$\theta \{\phi\}_{n+1} + (1-\theta) \{\phi\}_n = \frac{\{\phi\}_{n+1} - \{\phi\}_n}{\Delta\theta}$$

burada  $\Delta\theta$  zaman aralığı,  $\theta$   $[0,1]$  aralığında bir katsayı,  $n$  ise zaman düzeyidir. Bu denklemin her iki tarafı  $[C]$  matrisi ile çarpılırsa

$$\theta [C] \{\phi\}_{n+1} + (1-\theta) \{\phi\}_n [C] = \frac{\{\phi\}_{n+1} - \{\phi\}_n}{\Delta\theta} [C]$$

bulunur. Denklem (6.18)'den

$$\begin{aligned} [C] \{\phi\}_n &= -[K] \{\phi\}_n - \{J\} \\ [C] \{\phi\}_{n+1} &= -[K] \{\phi\}_{n+1} - \{J\} \end{aligned}$$

şeklinde çıkarılan ifadeler yukarıda yerlerine yazılırsa

$$\theta [-[K] \{\phi\}_{n+1} - \{J\}] + (1-\theta) [-[K] \{\phi\}_n - \{J\}] = [C] \frac{\{\phi\}_{n+1} - \{\phi\}_n}{\Delta\theta}$$

$$-\theta [K] \{\phi\}_{n+1} - \{J\} - (1-\theta) [K] \{\phi\}_n - \{J\} = \frac{[C]}{\Delta\theta} \{\phi\}_{n+1} - \frac{[C]}{\Delta\theta} \{\phi\}_n$$

$$\frac{[C]}{\Delta\theta} \{\phi\}_{n+1} - \frac{[C]}{\Delta\theta} \{\phi\}_n + \theta [K] \{\phi\}_{n+1} + \{J\} + (1-\theta) [K] \{\phi\}_n + \{J\} = 0$$

$$\left[ \theta [K] + \frac{1}{\Delta\theta} [C] \right] \{\phi\}_{n+1} + \left[ (1-\theta) [K] - \frac{1}{\Delta\theta} [C] \right] \{\phi\}_n + \{J\} = 0$$

iterasyon bağıntısı elde edilir. Bölüm 5'de anlatılan nedenlerden dolayı bu çalışmada C-N yöntemi

kullanılacağından  $\theta=1/2$  alınırsa

$$\left[ \frac{1}{2} [K] + \frac{1}{\Delta\theta} [C] \right] \{\phi\}_{n+1} + \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) [K] - \frac{1}{\Delta\theta} [C] \right] \{\phi\}_n + \{J\} = 0$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafı  $\Delta\theta$  ile çarpılırsa

$$\left[ [C] + \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right] \{\phi\}_{n+1} + \left[ \frac{\Delta\theta}{2} [K] - [C] \right] \{\phi\}_n + \Delta\theta \{J\} = 0$$

$$\left[ [C] + \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right] \{\phi\}_{n+1} = \left[ [C] - \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right] \{\phi\}_n - \Delta\theta \{J\}$$

bulunur. Son olarak  $\{\phi\}_{n+1}$  yalnız bırakılırsa

$$\{\phi\}_{n+1} = \left[ [C] + \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right]^{-1} \left[ [C] - \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right] \{\phi\}_n + \left[ [C] - \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right]^{-1} \Delta\theta \{J\} \quad (6.19)$$

iterasyon bağıntısı elde edilir.

Kararsız problemlerde çözülecek denklem takımı (6.19) iterasyon bağıntısıdır. Bu denklemi çözmek için iterasyona fiziksel sabit ve geometrik büyüklüklerin yanısıra uygun  $\Delta\theta$  alınarak ve başlangıç değerleri olarak verilen  $\{\phi\}_0 [=t_0, \mu_0]$  değerleri ile başlanır. Alan değişkeni  $\{\phi\}$ 'nin yeni değerleri (6.19) eşitliğinden  $\{\phi\}_1$  olarak,  $\{\phi\}_2$  değerleri ise yine aynı şekilde  $\{\phi\}_1$  değerleri kullanılarak bulunur. İterasyona alan değişkeni  $\{\phi\}$ 'nin istenilen zaman düzeyindeki değerleri elde edilinceye kadar devam edilir.

## 2. Kararlı Problemler

Kararlı problemlerde ise (6.1) denklemlerinde  $\partial\phi/\partial\theta = 0$  olacağından (6.18) denkleminde ikinci terim sıfır olacağından bu denklem

$$[K] \{\phi\} + \{J\} = 0 \quad (6.20)$$

şeklini alacaktır. Bu bir cebirsel denklem takımıdır. Bu tip denklem takımlarının çözümünde kullanılan çeşitli yöntemler Bölüm 7'de verilerek uygun olan seçilecektir.

Her iki durum için sistem denklemlerinin çözüm algoritması Bölüm 7'de verilecek olan akış diyagramında ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

### Adım 7. Sonucun İrdelenmesi

Bu adım Bölüm 7'de örnek problemlerin çözümünden sonra uygulanacaktır.

Sonraki bölümde burada verilen problemlerin çözümünü yapmak üzere geliştirilen bilgisayar programı tanıtılarak örnek uygulamalar yapılacaktır.



## Bilgisayar Programı ve Örnek Uygulamalar

Bu bölümde, mevcut SEY programlarından [5-8,87,88,96] faydalanılarak hazırlanan ve önceki bölümlerde incelenen problemleri çözmeye yönelik PC uyumlu bir bilgisayar programı tanıtılacak ve ele alınacak bazı örnek uygulamalar bu programla incelenerek sonuçları verilecektir.

Hinton VÇA[93]'ya göre tipik bir sonlu eleman programı[SEP] aşağıdaki adımlardan oluşur:

1. Veri girişi,
2. Eleman özelliklerinin belirlenmesi,
3. Eleman matrislerinin birleştirilerek sistem matrislerinin oluşturulması,
4. Sistem matrislerinin çözülmesi,
5. Çözüm sonuçlarının kullanımıyla [gerekirse] diğer hesaplamaların yapılması,
6. Sonuçların basımı.

Herhangi bir SEP'de gerekli giriş verileri ve sonuçların basımı teknik yönden pek fazla önem taşımamakla birlikte SEP'in çalıştırılmasında en fazla zamanı verilerin hazırlanması ve sonuçların yorumlanması almaktadır. Hinton VÇA[93]'ya göre bir problemin analizi için SEP kullanımında toplam zamanın %15-20'si hesaplama aşamasında kullanılırken %80-85'i veri girişleri ve sonuçların basımında harcanmaktadır. Bu nedenle veri girişinde ve sonuçların basımında yapılacak bir kısaltma toplam zaman harcamasının düşürülmesi açısından çok faydalı olacaktır. Örneğin veriler mümkün olan en kısa ve kolay şekilde girilmeli, tekrarlayan verilerin her seferinde yeniden girilmesi geliştirilecek yöntemler yardımıyla yok edilmelidir. Bunun dışında bir yazılımın girdi ve çıktı düzenlemeleri o yazılımın tasarımcılar tarafından kolay kullanılabilmesinde ve kabul edilmesinde önemli bir yer tutar.

Hazırlanacak program ya tek bir program şeklinde tasarlanmalı ya da alt programlara bölünüp bunların gerektiği yerde kullanımının sağlandığı modüler bir program yapısında olmalıdır. Modüler yapıdaki programı geliştirme, kontrol etme ve saklamanın daha kolay olduğu; programların farklı problemler için değişen bölümlerinin tekrar derlenmesinin genel bir programın derlenmesinde daha az zaman aldığı ve

son olarak farklı programlarda tekrarlanan işlemlerin kullanımının modüler programlarda daha kolay olduğu gözönünde tutularak hazırlanacak program modüler yapıda olmalıdır.

Her SEP'de birinci gereksinim "etkileşim"dir. Etkileşimli bir program aşağıdaki özelliklere sahip olacaktır[93]:

1. Kullanıcı herhangi bir kullanım kitabı okumaya gereksinim duymadan programı çalıştırabilmeli, doğru veri girişlerini yapabilmelidir. Bu amaçla kullanıcının istediği herhangi bir aşamada ekranda başvuracağı bir HELP bilgi sistemiyle desteklenmelidir.
2. Veri, girildiği anda kontrol edilmeli ve hata varsa bir uyarı mesajıyla kullanıcıya bu durum bildirilerek girişin tekrarlanması sağlanmalıdır.
3. Girilen verilerin mantıklı olup olmadığı kontrol edilmelidir. [Örneğin bir düğüm numarası aynı eleman içinde tekrarlanamaz, eleman numarası toplam eleman sayısından büyük olamaz...]
4. Bir hata oluştuğunda programın çalışması kesilmeden kullanıcı hata mesajıyla uyarılmalıdır.
5. Veri girişi esnasında kullanıcı girmekte olduğu ve ri grubunu bırakıp diğer veri gruplarında bilgi girişi yapabilmeli ve [isterse] tekrar kaldığı yere geri dönebilmelidir.

Hazırlanacak programın menü sürücülü olması gereklidir. Programın çalıştırılmasından itibaren kontrol her kademede ekranda seçilebilen bir opsiyonu olan menü yardımıyla kullanıcı tarafından yapılmalıdır.

Kişisel bilgisayarlar için geliştirilmiş olan etkileşimli bir programın başarısı büyük oranda kullanılan PC'nin sunduğu donanım ve yazılım özelliklerine de bağlıdır. Bu amaçla yazılan programın hedeflediği minimum donanım ve yazılım gereksinimi baştan belirlenerek kullanılacak yardımcı programlar ve programlama dillerinin seçimi yapılmalıdır.

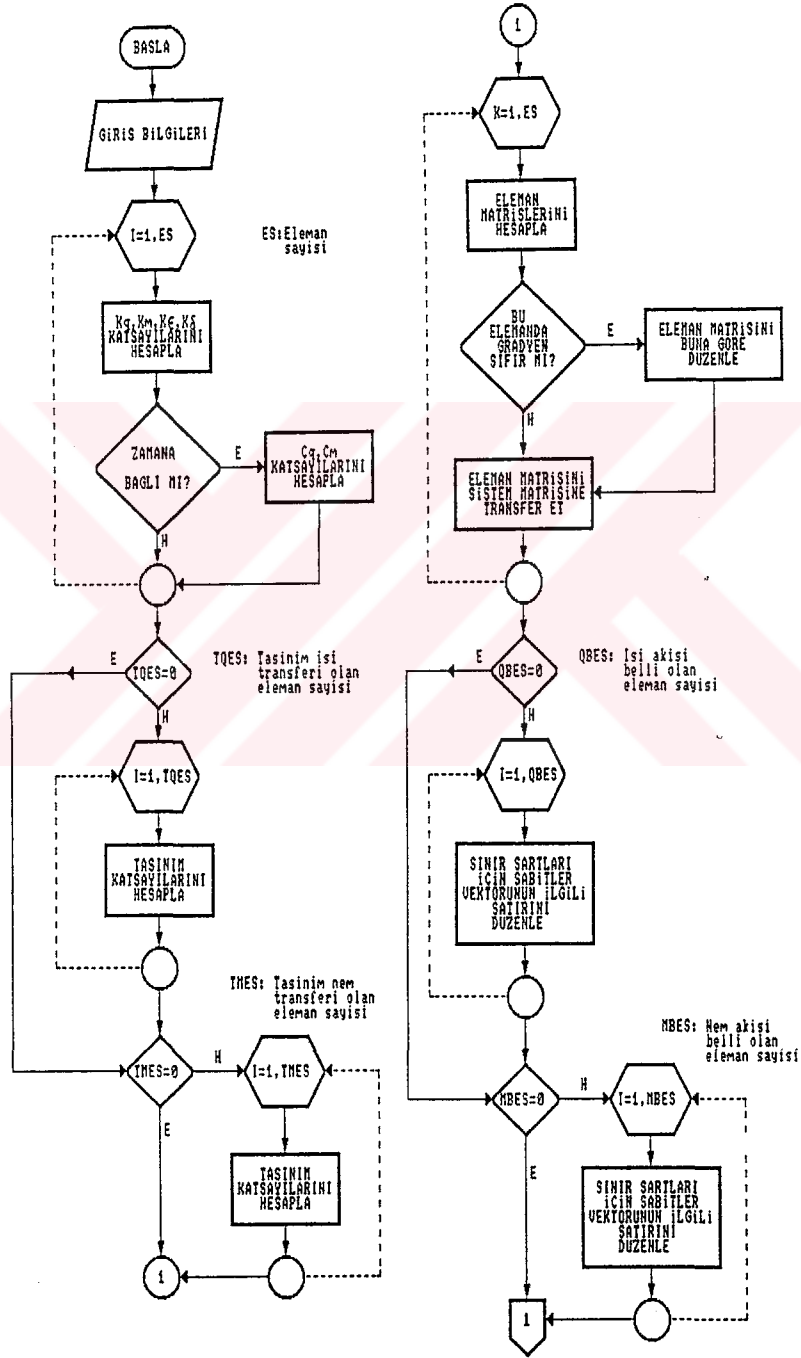
Hazırlanacak programda veri girişinde ve sonuçların raporlanmasında sağlayacağı avantajlar gözönüne alınarak bu modüllerde bir veri tabanı [database] yazılımının kullanılması düşünülmüş ve bu amaçla dBASE III+ seçilmiştir. Literatürde [5-8,87,88,95] mevcut SEP'lerin hemen hemen tamamına yakınında FORTRAN programlama dilinin IV, V, 77 gibi değişik versiyonlarının kullanıldığı gözönünde bulundurularak bu yayınlarda mevcut altprogramlardan faydalanmanın sağlayacağı avantajlar nedeniylehesaplama modülünde standart FORTRAN 77 programlama dili kullanılacaktır. Grafik tasarımlar için de hem konuyla ilgili referans kitapların çokluğu hem de satılan tüm PC'lerde işletim sistemiyle birlikte verilmesi nedeniyle QBASIC programlama dili kullanılabilir. Bu çalışmada öngörülen minimum donanım ve yazılım gereksinimi Tablo 7.1'de verilmiştir. Yukarıda verilen özelliklere mümkün olduğunca uyan "Kurutma Problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Analizi Programı [KPSEYAP]" aşağıda tanıtılacaktır.

**Tablo 7.1** Kullanılacak PC'nin minimum donanım ve yazılım gereksinimi.

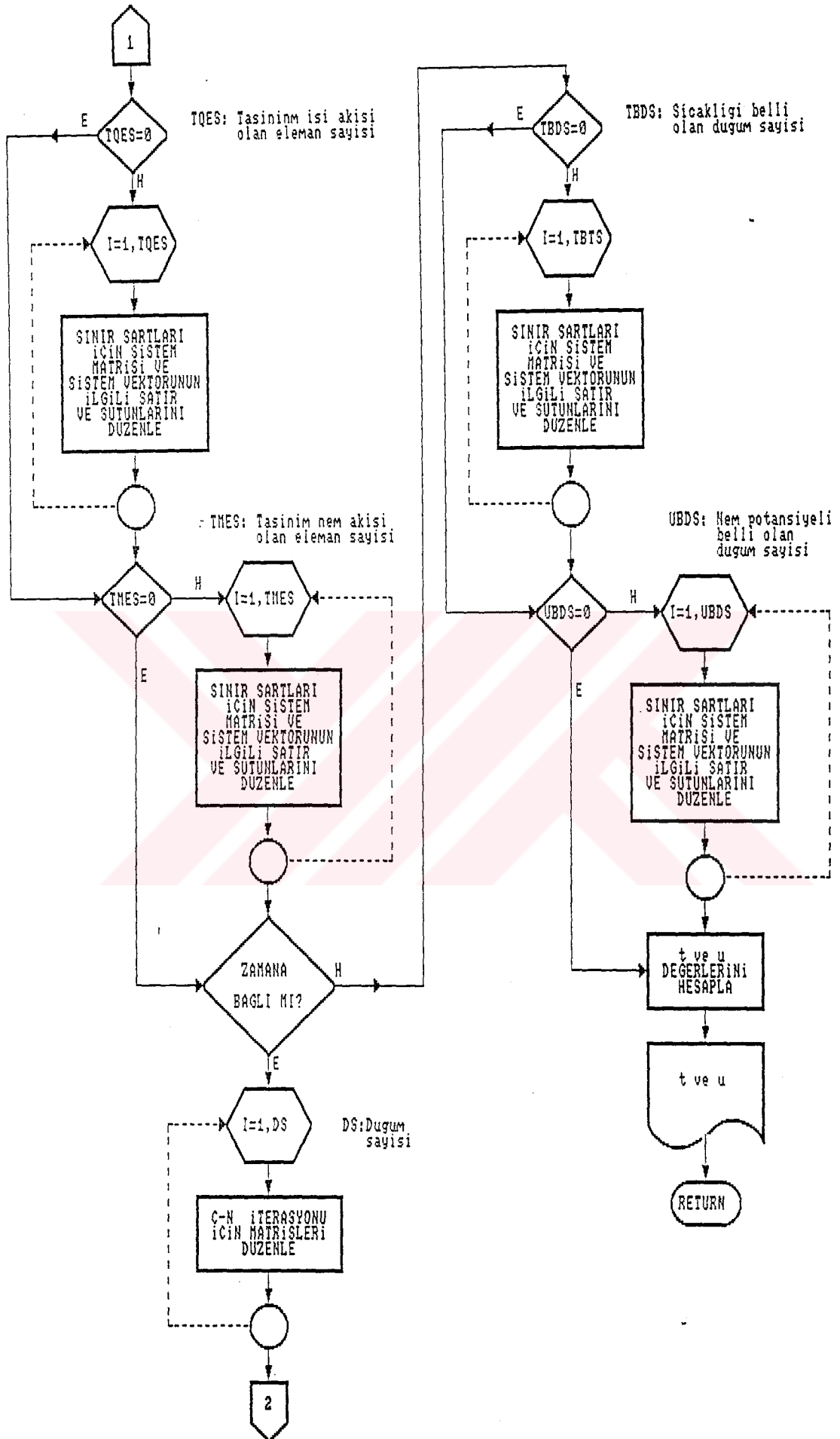
RAM	640 kB
Sabit disk	20 MB
Disket	1 adet 3.5"/5.25"
Ekran	Renkli/mono
Mikroişlemci	80286 intel
Yazılım İşletim sistemi	FORTRAN derleyici, DBASE III+, QBASIC MS-DOS 3.30 ve yukarısı

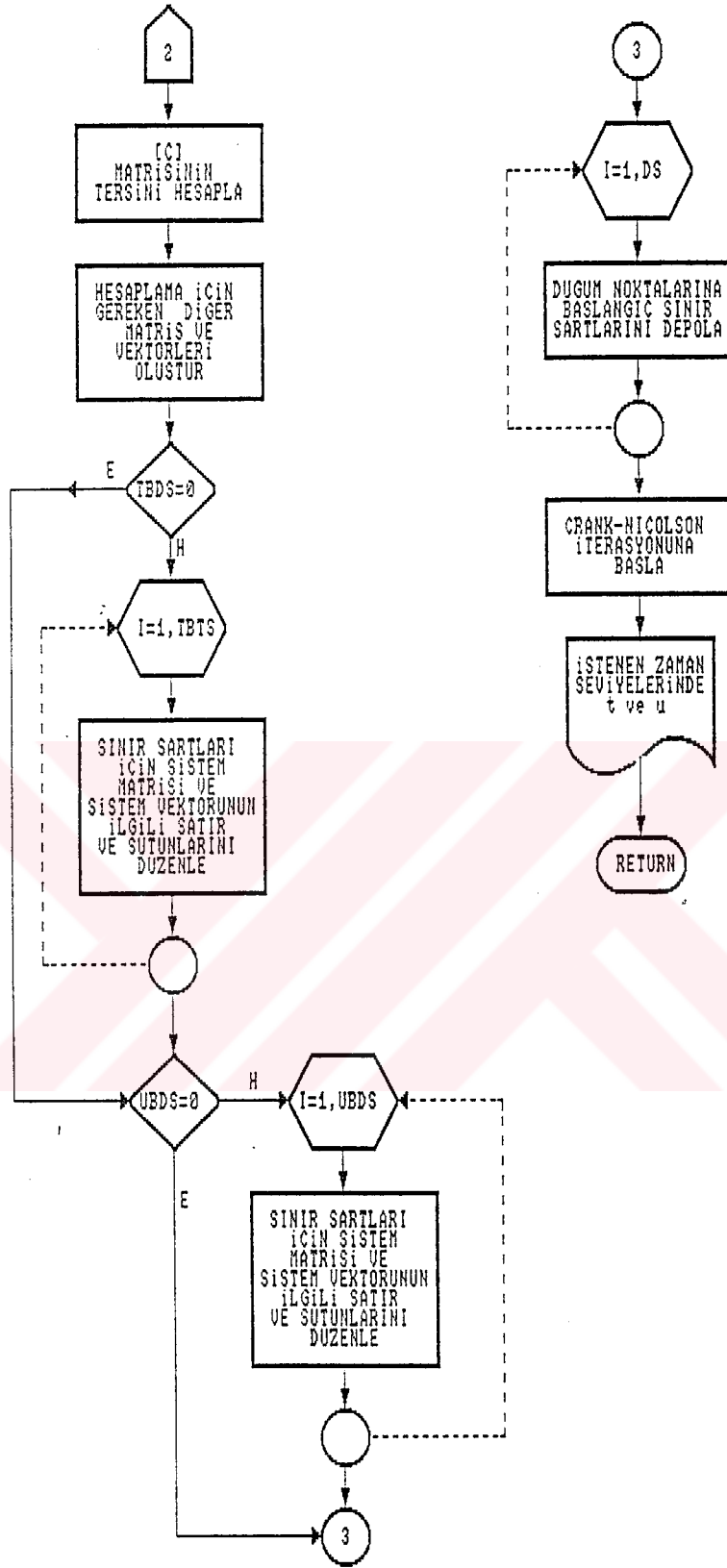
## A. Programın Akış Diyagramı

Önceki bölümde verilen kurutma problemlerinin çözümünde kullanılacak bilgisayar programının akış diyagramı Şekil 7.1'de gösterilmiştir. Giriş ve Rapor altprogramlarıyla ilgili ayrıntılı bilgi ileride verilecektir.



Şekil 7.1 KPSEYAP'ın akış diyagramı





## B. KPSEYAP'ın Genel Özellikleri

Programlar, veri dosyaları ve çıktılar problem parametrelerine göre sabit diskte ilgili alt dizinde yapılandırılmıştır. KPSEYAP'ın sabit diskteki dizin yapısı Şekil 7.2'de verilmiştir.

```
Directory PATH listing for Volume FAKULTE
Volume Serial Number is 1E52-0E8A
C:KPSEYAP
├── KARARLI
│   ├── 2-B
│   └── R
└── KARARSIZ
    ├── 2-B
    └── R
```

Şekil 7.2 KPSEYAP'ın dizin yapısı.

Programı başlatmak için KPSEYAP yazıp ENTER tuşuna basmak yeterlidir. Bu aşamada ekrana KPSEYAP Ana Menü'sü gelir (Şekil 7.3).

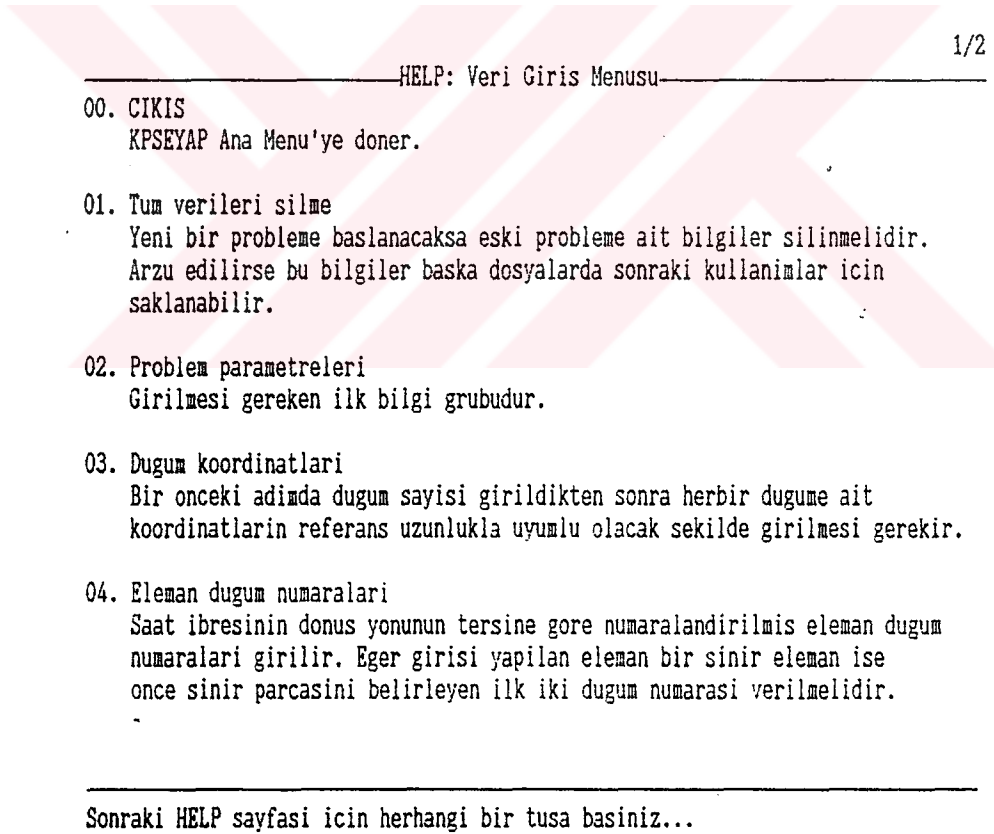
KPSEYAP v1.00	Mavi Ayak Yazılım 24/08/94
------------------	-------------------------------

Ana Menu
00. Programdan ÇIKIS
01. Zamana bağlı problem
02. Zamana bağlı olmayan problem
Seciminiz...

Şekil 7.3 KPSEYAP ana menüsü.

Menü sürücülü programda menü maddelerini seçmek için menü maddesinin yanında yer alan rakam yazılıp ENTER tuşuna basılır. Menüler hakkında açıklayıcı bilgi almak istendiğinde HELP yazıp ENTER tuşuna basmak yeterlidir. Şekil 7.4 bu şekilde ulaşılabilecek bir yardım ekranını göstermektedir. Burada görüldüğü gibi arzu edildiği takdirde konu hakkında daha ayrıntılı açıklamaları almak için ilgili menü maddesinin seçimi yeterlidir.

Herhangi bir bilgi giriş ekranında iken pembeye boyanmış bölümler bilgi giriş alanlarını gösterir (Şekil 7.5). Böyle bir ekranda kullanılabilir tuşlar ve anlamları Tablo 7.2'de verilmiştir. Bu tablodaki bilgilerin incelenmesinden görüleceği gibi veri alanları arasında dolaşmak, hata düzeltmek, girilenleri kaydedip [veya kaydetmeyip] menüye dönmek, kayıtlar arasında gezinmek çok kolaydır.



Şekil 7.4 Örnek bir HELP ekranı.

KPSEYAP  
v1.00

VERİ GİRİŞ MODULU  
Dugum Koordinatları

Dugum no...17

X..... 90.000 X ve Y referan uzunlukla  
ayni birimde girilmeli.  
Y..... 15.000

ESC iptal+menu Ctrl+ENTER Kayit+menu PgUp/PgDn [Varsa] Onc./Sonr. Sayfa

Şekil 7.5 Örnek bir bilgi giriş ekranı.

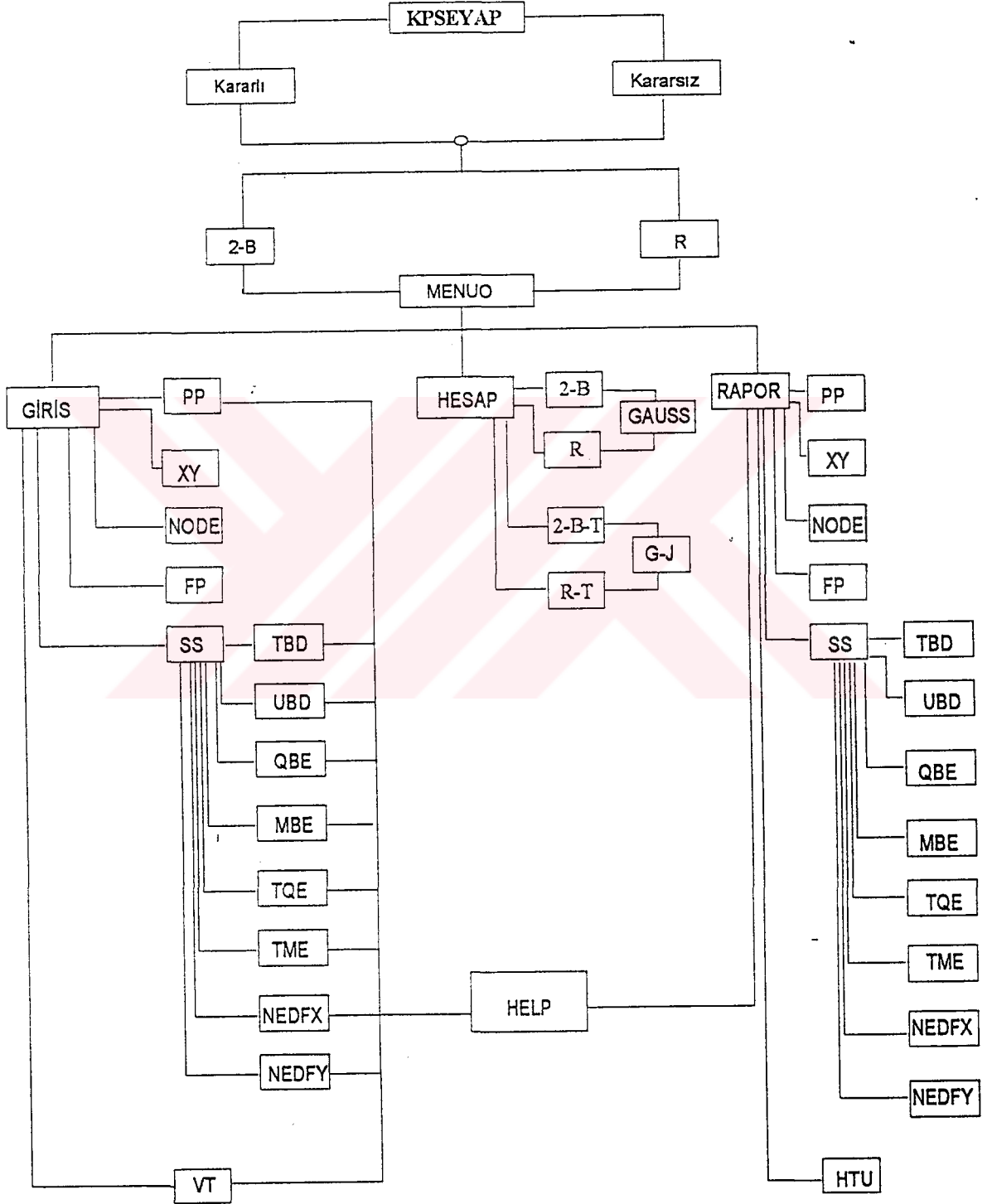
Tablo 7.2 Bilgi giriş ekranında düzeltme için kontrol tuş vuruşları.

Enter	Göstergeci [cursor] bir sonraki veri alanı veya satırına hareket ettirir. Kayıt ekleme modunda iken boş bir veri kaydının ilk karakterinde uygulandığı zaman o kayıt dışındaki kayıtları dosyaya kaydeder ve çıkar. Kayıt değiştirme modunda iken son veri kaydının son alanında uygulandığı zaman dosyanın içeriğini saklar ve çıkar.
Yukarı ok	Göstergeci bir satır veya bir veri alanı yukarı hareket ettirir.
Aşağı ok	Göstergeci bir satır veya bir veri alanı aşağı hareket ettirir.
Sola ok	Göstergeci bir karakter sola hareket ettirir.
Sağa ok	Göstergeci bir karakter sağa hareket ettirir.
Backspace [ - ]	Göstergecin solundaki karakteri siler.
Delete	Göstergecin üzerinde bulunduğu karakteri siler.
End	Göstergeci bir sözcük sağa hareket ettirir.
Home	Göstergeci bir sözcük sola hareket ettirir.
Insert	Araya sokma/üzerine yazma modunu açar/kapatır.
PageUp	[Varsa] bir önceki veri kaydına döner.
PageDown	[Varsa] bir sonraki veri kaydına döner.
Ctrl+End	Değiştirilmiş/yeni girilmiş veri öğelerini saklar ve çıkar.
Esc	Değiştirilmiş/yeni girilmiş veri öğelerini saklamadan çıkar.
Ctrl+T	Göstergecin sağındaki bir sözcüğü siler.
Ctrl+Y	Göstergecin bulunduğu satırın tümünü siler.
Ctrl+S	Ekran kaymasını başlatır veya durdurur.



## C. Programın Yapısı ve Yardımcı Modüller

Hazırlanan ana program üç yardımcı modülden meydana gelir: GIRIS, HESAP, RAPOR. Yardımcı alt programlarıyla birlikte Şekil 7.6'de verilen bu modüller aşağıda detaylı olarak incelenecektir.



Şekil 7.6 Programın yapısı.

## 1. Veri Giriş Modülü

Bu modülde daha önce açıklanan avantajları nedeniyle dBASE III+ programlama dili kullanılmıştır. Tüm giriş verileri için aralarında uyum bulunan birim sisteminin seçilmesi çok önemlidir. Veri giriş modülünün çalıştırılmasından önce Bölüm 5 ve 6'da açıklanan prensiplere uygun olarak problem sonlu elemanlara bölünüp düğümleri ve elemanları numaralandırılmalıdır. Bilgi girişinde kolaylık sağlamak amacıyla bazı veri giriş ekranları açıklamalarıyla donatılmıştır. Giriş modülünün menüsü Şekil 7.7'de verilmiştir.

Eğer yeni bir probleme başlanacaksa eski probleme ait verilerin dosyalardan silinmesi gerekir. Bu aşamadan önce arzu edilirse eski probleme ait veriler [DOS'un COPY komutunun kullanılmasıyla] daha sonra tekrar kullanılmak üzere başka isimlerle saklanabilirler. Bunun için yapılması gereken dosya isimlerinin uzantısı için programın istediği üç rakamlı bir sayıyı belirleyip programa bunu bildirmektir.

Veri giriş modülünde girilmesi gereken ilk bilgi grubu problem parametreleridir (Şekil 7.8). Problem adının da yer aldığı bu grupta diğer veri gruplarının kullanacağı düğüm sayısı ve eleman sayısının yanısıra sıcaklık, nem potansiyeli, uzunluk ve zaman için referans değerler de girilmelidir.

Problem parametrelerinde düğüm sayısının girilmesinden sonra herbir düğüme ait koordinatlar referans uzunlukla uyumlu olacak şekilde girilmesi gerekir.

KPSEYAP v1.00	Mavi Ayak Yazılım 24/08/94
------------------	-------------------------------

Veri Giriş Modulu
00. ÇIKIŞ
01. Tüm Verileri Silme
02. Problem parametreleri
03. Düğüm koordinatları
04. Eleman bağlantı numaraları
05. Fiziksel parametreler
06. Sınır şartları
07. Verileri HESAP dosyasına dönüştür
Seçiminiz...

Şekil 7.7 GIRIS modülünün menüsü.

Dugum sayisi.....56  
Eleman sayisi.... 60  
TG..... 333 ['K]  
UO..... 11 ['M]  
LO.....120.000 [Dugum koordinatlariyla ayni]  
Zaman seviyesi... 0.100  
Baski kodu.....2 1: Her adimda  
2: Belirli adimlarda  
(Bkz. sonraki sayfa)

Esc iptal+menu      Ctrl+End Kayit+Menu      PgDown Sonraki sayfa

Şekil 7.8 Problem parametreleri veri giriş ekranı.

Saat ibresinin dönüş yönünün tersine göre numaralandırılmış eleman düğüm numaraları girilirken eğer giriş yapılan eleman bir sınır elemanı ise önce sınır parçasını belirleyen ilk iki düğüm numarası verilmelidir.

Problemde karşılaşılabilecek fiziksel parametrelerin bazıları çok büyük olduğundan bunlara ait değerlerin E'li notasyonla girilmesi planlanmıştır (Şekil 7.9). İncelenen problem tek bir malzmeden meydana gelmişse bu değer bir kez girilip eleman sayısı kadar kopyalanarak çoğaltılabilir.

Problemin geometrisinin belirlenip fiziksel parametrelerinin girilmesinden sonra ilgili eleman veya düğüm için problemde önceden belirlenmiş sınır şartları giriş modülündeki alt program aracılığıyla girilir (Şekil 7.10). Bundan önce girişi yapılan bilgiler ya eleman sayısı ya da düğüm sayısı kadar girilirken sınır şartları için böyle bir durum söz konusu değildir.

Veri giriş ve kontrolünün tamamlanmasından sonra dBASE III+ formatındaki DBF dosyalarının hesaplamada kullanılacak FORTRAN programının dosya formatına dönüştürülmesi gerekir. Bu ise veri giriş ekranındaki son seçeneğe girilerek yapılır. Problemin hesaplama aşamasında ortaya çıkan hatalı bir veri söz konusuysa bu verinin, GIRIS modülüne tekrar dönülerek düzeltilmesinden sonra menünün bu maddesinin tekrar çalıştırılması gerektiği unutulmamalıdır.

KPSEYAP  
v1.00

VERİ GİRİŞ MODULU  
Fiziksel Parametreler

Eleman no	60
Ro	1200
Cq	0.879 E+03
Cm	1.800 E-03
Kq	0.440 E+00
Km	6.040 E-08
Epsilon	0.300 E+00
Lamda	2.500 E+06
Delta	0.560 E+00

Şekil 7.9 Fiziksel parametreler veri giriş ekranı.

KPSEYAP  
v1.00

Mavi Ayak Yazılım  
24/08/94

Sınır Şartları Girişi

00. ÇIKIS

01. Isı akısı olan elemanlar
02. Nem akısı olan elemanlar
03.  $dfi/dx=0$  olan elemanlar
04.  $dfi/dy=0$  olan elemanlar
05. Sıcaklığı belli düğümler
06. Nem potansiyeli belli düğümler
07. Tasınım ısı transferi olan el.
08. Tasınım nem transferi olan el.

Seciminiz...

Şekil 7.10 Sınır şartları alt programı menüsü.

## 2. Hesap Modülü

Veri girişlerinin yapıp kontrollerinin tamamlanmasından sonra Şekil 7.1'de akış diyagramı verilen FORTRAN dilinde yazılmış hesaplama modülü çalıştırılabilir. Akış diyagramından görüldüğü gibi hesaplama işlemlerine başlamadan önce veri giriş modülünden transfer edilen bilgiler okunmakta ve Bölüm 6'da incelenen çeşitli katsayıların hesaplanmasından sonra herbir elemana ait eleman matrisi hesaplanıp bu matris hemen sistem matrisine transfer edilmektedir. Bu transfer işleminde literatürde[96] verilen yol izlenerek i, üzerinde işlem yapılan eleman numarasını göstermek üzere transfer indisi olarak sıcaklık için düğümno\*2-1, nem potansiyeli için düğümno\*2 değerleri kullanılmıştır.

Problemdeki tüm elemanlar için bu transfer işleminin tamamlanarak sistem matrisinin elde edilmesinden sonra bu denkleminin çözüm işlemine başlamadan önce incelenen problemde birinci çeşit sınır şartları varsa denklemlerin bunlara göre tekrar düzenlenmesi gerekir. Bu amaçla literatürde [5-9] verilen çeşitli yöntemlerden burada kullanılanı aşağıdaki örneklerle tanıtılmıştır.

Zamanla değişmeyen problemlerde (6.20) denkleminde elde edilen

$$[K] \{\phi\} = \{F\}$$

denkleminin

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. Eğer 2 düğümündeki  $\phi$  [ $t$  veya  $u$ ] değerinin  $S_2$ 'ye eşit olduğu biliniyorsa bu denklemde

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ S_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - k_{12}S_2 \\ S_2 \\ F_3 - k_{32}S_2 \\ F_4 - k_{42}S_2 \end{Bmatrix}$$

düzenlemesi yapılmalıdır. Zamana bağlı olarak değişen problemlerde ise (6.19) denkleminde

$$[A] = \left[ [C] + \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right]^{-1} \left[ [C] - \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right]$$

ve

$$\{R\} = \left[ [C] + \frac{\Delta\theta}{2} [K] \right]^{-1} [-\Delta\theta \{J\}]$$

tanımlamaları yardımıyla örnek olarak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

denklem takımında eğer 1 ve 3 düğümlerindeki  $\phi$  değerlerinin sırasıyla  $S_1$  ve  $S_3$  olduğu biliniyorsa bu denklem takımında ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_1 \\ R_2 + a_{21}S_1 + a_{23}S_3 \\ S_3 \\ R_4 + a_{41}S_1 + a_{43}S_3 \end{Bmatrix}$$

düzenlemesi yapılmalıdır.

Sistem matris denklemlerinin çözümü için kararsız problemlerde matris inversinin bulunmasında, kararlı problemlerde ise matrisin çözümünde Gauss-Jordan iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Böylece tüm düğüm noktalarında hesaplanan sıcaklık ve nem potansiyelleri, ilgili dosyalara transfer edilerek RAPOR modülünün kullanacağı yapıya dönüştürülür.

### 3. Rapor Modülü

Bu aşamada alınabilecek çıktılar üç farklı cihaza gönderilebilir: ekran, yazıcı, dosya. Şekil 7.11'de verilen menüden görüleceği gibi burada hem veri giriş modülünde girişi yapılan bilgileri hem de HESAP modülünde belirlenen sıcaklık ve nem potansiyeli değerleri yazdırılabilmektedir.

## C. Örnek Uygulamalar

Bu bölümde, önceki bölümlerde incelenen kurutmanın genel teorisinden hareketle problemi ifade eden KDD'leri çözmek için geliştirilen KPSEYAP bilgisayar programı değişik malzemelerin kurutulması işleminde sıcaklık ve nem potansiyeli değerlerinin  $[t,u]$  hesaplanmasında kullanılacaktır.

Hazırlanan bilgisayar programının sonuçlarının, Comini ve Lewis [41]'in [daha yüksek mertebeden [8 düğüm noktalı ve [gerekirse) eğri kenarlı dörtgen] elemanları kullanarak] incelediği örneklerle karşılaştırmasını yapmak amacıyla üç düğüm noktalı üçgen elemanlar kullanılarak iki boyutlu kararsız, aksenal simetrik kararsız ve iki boyutlu kararlı kurutma problemleri incelenmiştir. Bu sonuçlar Comini ve Lewis [41]'in sonuçlarıyla karşılaştırıldığında uyum içinde olduğu görülür.

### Örnek 1. Tuğla Kurutması

İncelenen ilk problem 2-B zamana bağlı bir problemdir. Bu örnek problemde göreceli olarak yüksek şiddette kurutma işlemine tabi tutulmuş bir tuğlada sıcaklık ve kütle transfer potansiyeli dağılımları hesaplanmıştır. İncelenen problemin geometrisi ve kullanılan sonlu elemanlar ağı Şekil 7.12(a)'da gösterilmiştir. Bölme işlemi yapılırken potansiyel değerinin fazla değişmesi beklenen bölgelerde elemanlara bölme daha sık, diğer yerlerde daha seyrek yapılmıştır. Geometrideki simetriden dolayı tuğlanın tamamı yerine yalnızca bir çeyreği incelenmiştir.

KPSEYAP  
v1.00

Mavi Ayak Yazılım  
24/08/94

Rapor Modulu
00. ÇIKIŞ
01. Problem parametreleri
02. Düğüm koordinatları
03. Eleman bağlantı numaraları
04. Fiziksel parametreler
05. Sınır şartları
06. Hesaplanan değerler
Seciminiz...

Şekil 7.11 Rapor modülü menüsü.

Hesaplamalarda fiziksel özellikler için aşağıdaki değerler kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} \rho &= 1200 \text{ kg/m}^3 & k_q &= 0.44 \text{ W/m} \cdot \text{°K} & \delta &= 0.56 \text{ °M/°K} \\ c_q &= 879 \text{ J/kg} \cdot \text{°K} & k_m &= 6.04\text{E-}8 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{°M} & \lambda &= 2.5\text{E}6 \text{ J/kg} \\ c_n &= 1.8\text{E-}3 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{kg}_{\text{kurucisim}} \cdot \text{°M} & & & \epsilon &= 0.3 \end{aligned}$$

Taşıyım sınır şartları dış yüzeylerde

$$\begin{aligned} \alpha_q &= 35 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°K} \\ \alpha_n &= 8.64\text{E-}6 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{°M} \end{aligned}$$

değerlerindeki yüksek transfer katsayılarıyla; iç yüzeylerde ise

$$\begin{aligned} \alpha_q &= 17.5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°K} \\ \alpha_n &= 4.32\text{E-}6 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{°M} \end{aligned}$$

şeklindeki daha düşük transfer katsayılarıyla verilmiştir. Çevre potansiyel değerleri

$$t_\infty = 60 \text{ °C}$$

$$u_\infty = 11 \text{ °M}$$

olarak alınırken problem içinde başlangıç sınır şartlarının

$$t_i = 10 \text{ °C}$$

$$u_i = 111 \text{ °M}$$

değerlerinde olduğu varsayılmıştır. Programda kullanılan diğer bilgiler ise aşağıda listelenmiştir:

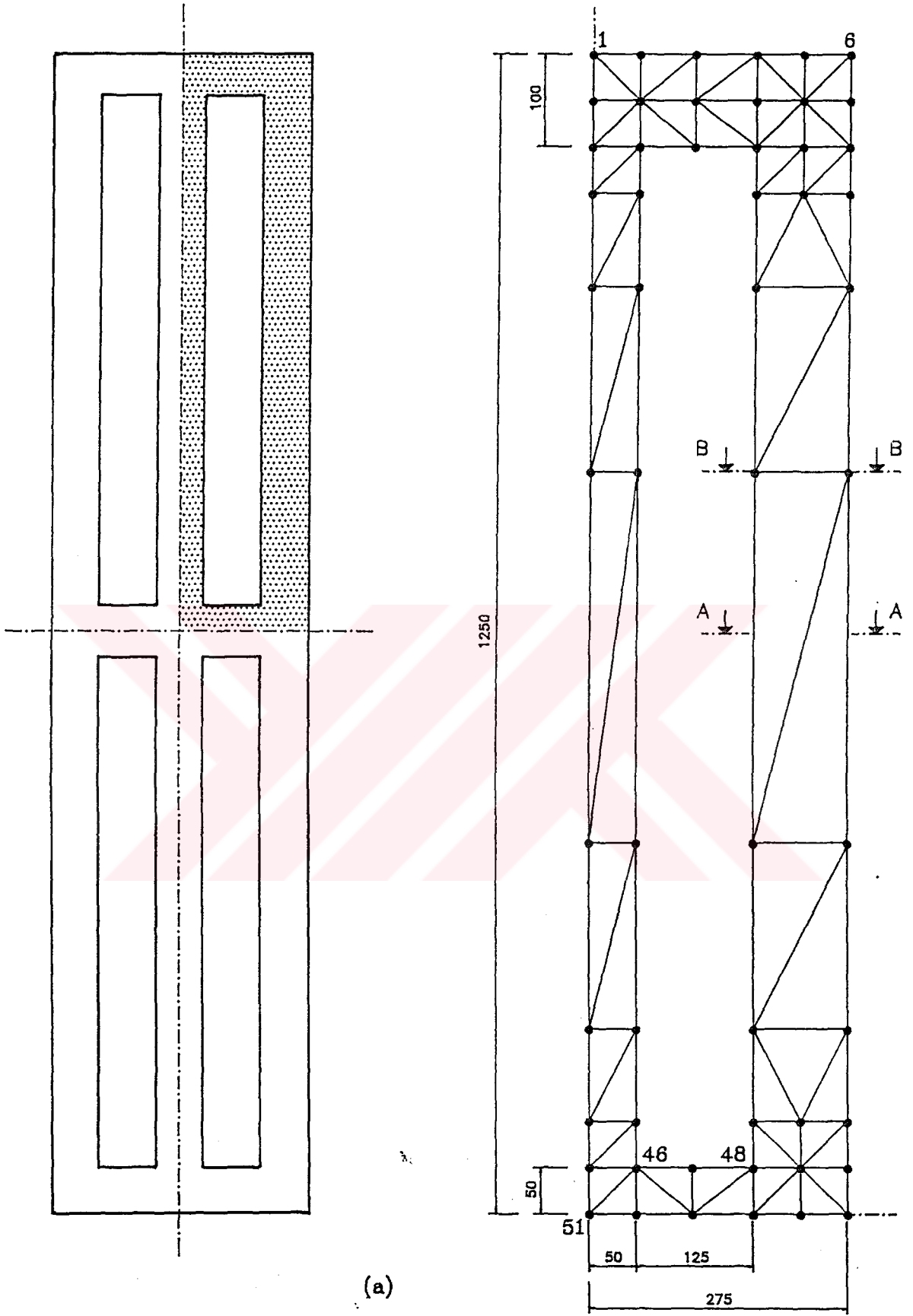
Sistemdeki düğüm sayısı	56
Sistemdeki eleman sayısı	64
Herbir elemandaki düğüm sayısı	3
Düğüm başına parametre sayısı	2
Gradyenlerin sıfır olduğu eleman sayısı	15
Taşıyım ısı ve kütle transferinin meydana geldiği eleman sayısı	33
Potansiyel değeri bilinen düğüm sayısı	0

Programdan elde edilen sonuçlar iki farklı zaman için eşpotansiyel eğrileri olarak Şekil 7.12(b) ve (c)'de gösterilmiştir. Comini ve Lewis [41], köşelerdeki yüksek kütle transfer potansiyeli gradyenlerinin büzülmeden dolayı meydana gelebilecek muhtemel bir kopmayı gösterdiğine işaret etmiş ve bu örnek problem için daha düşük şiddette bir kurutma işlemi önermiştir. Adı geçen yazarlar 1-B problemlerle karşılaştırma yapabilmek amacıyla Şekil 7.12(a)'da gösterilen A-A kesitindeki sonuçları, Luikov ve Mikhailov [74] tarafından verilen analitik sonuçlarla karşılaştırarak kontrol etmiş ve sonuçların uyum içinde olduğunu göstermişlerdir.

Problem içindeki çeşitli noktalarda t ve u değişimlerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesi için 51 düğümündeki sonuçlar Şekil 7.13(a)'da, BB kesitinin orta noktasındaki sonuçlar Şekil 7.13(b)'de, 6 ve 46 düğümlerindeki sonuçlar Şekil 7.14(a)'da, 1 ve 48 düğümlerindeki sonuçlar ise Şekil 7.14(b)'de gösterilmiştir.

[Daha önce de belirtildiği gibi] problemin sonlu elemanlara bölünüşü için bir yöntem olmadığından Şekil 7.15(a)'de gösterilen farklı bir sonlu eleman ağı için problem çözülmüş ve sonuçlar Şekil 7.15(b) ve (c)'de verilmiştir.

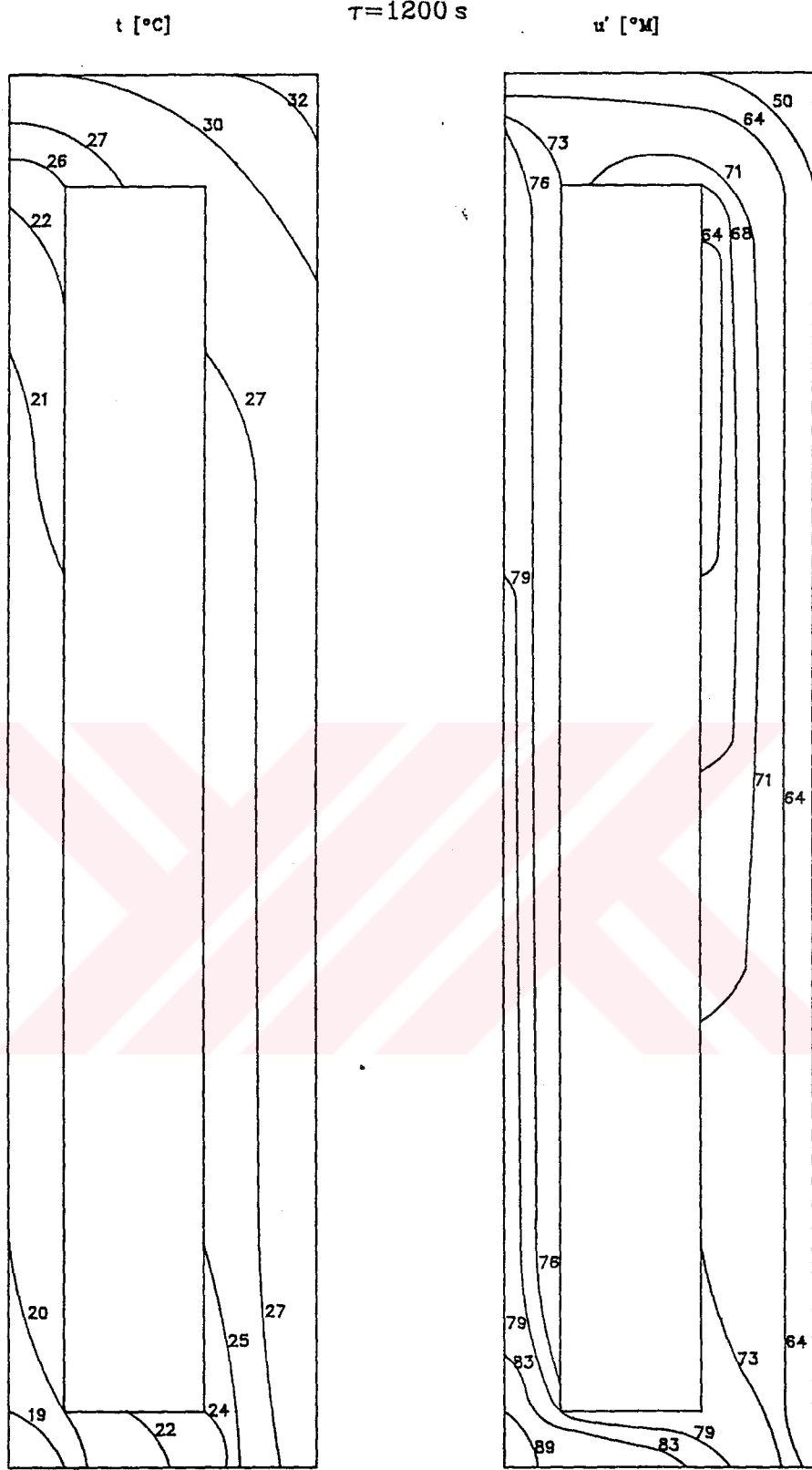




(a)

Şekil 7.12 Tuğla kurutması.

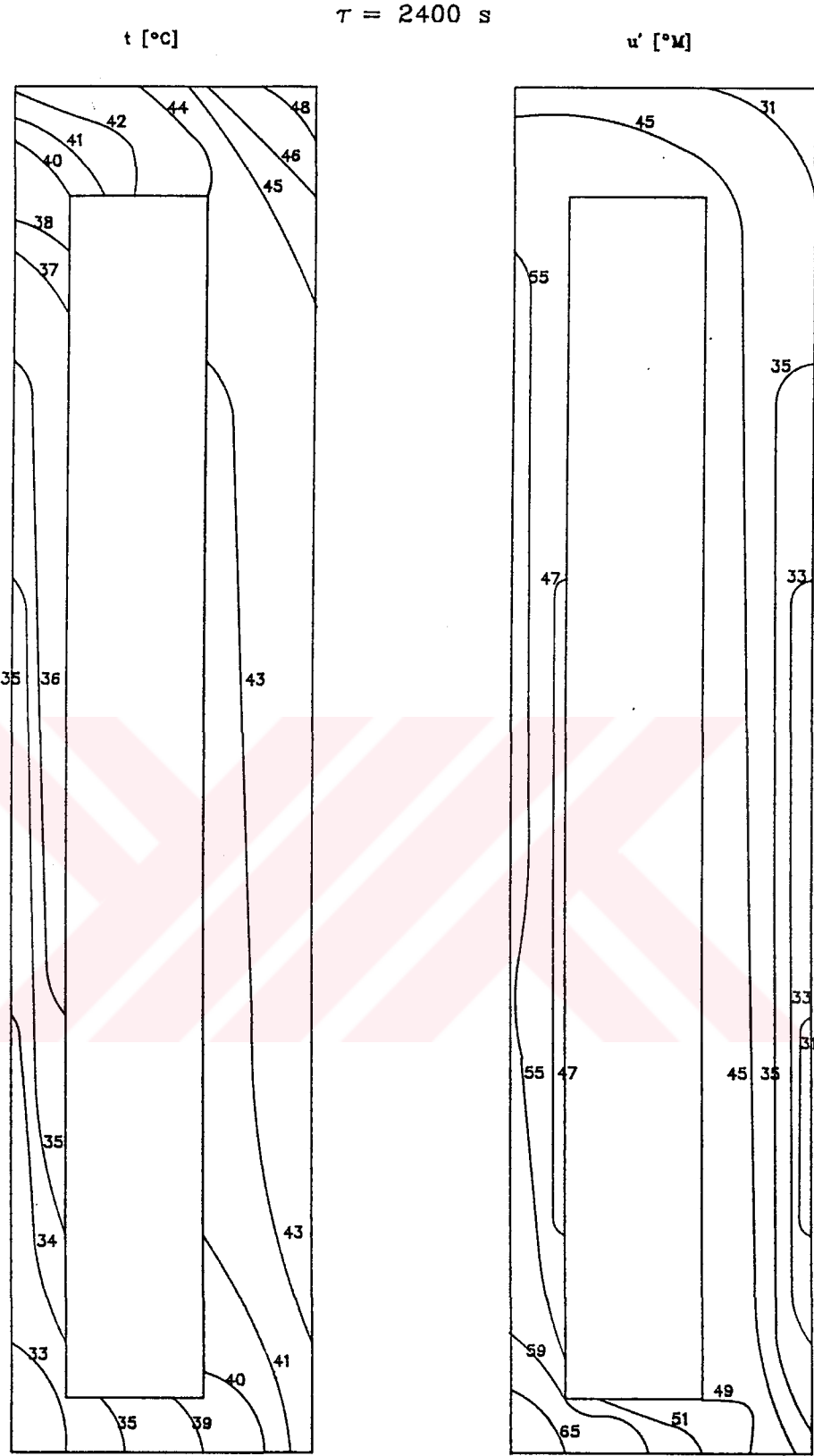
(a) Geometri ve sonlu eleman ağı



(b)

Şekil 7.12 [devam] Tuğla kurutması.

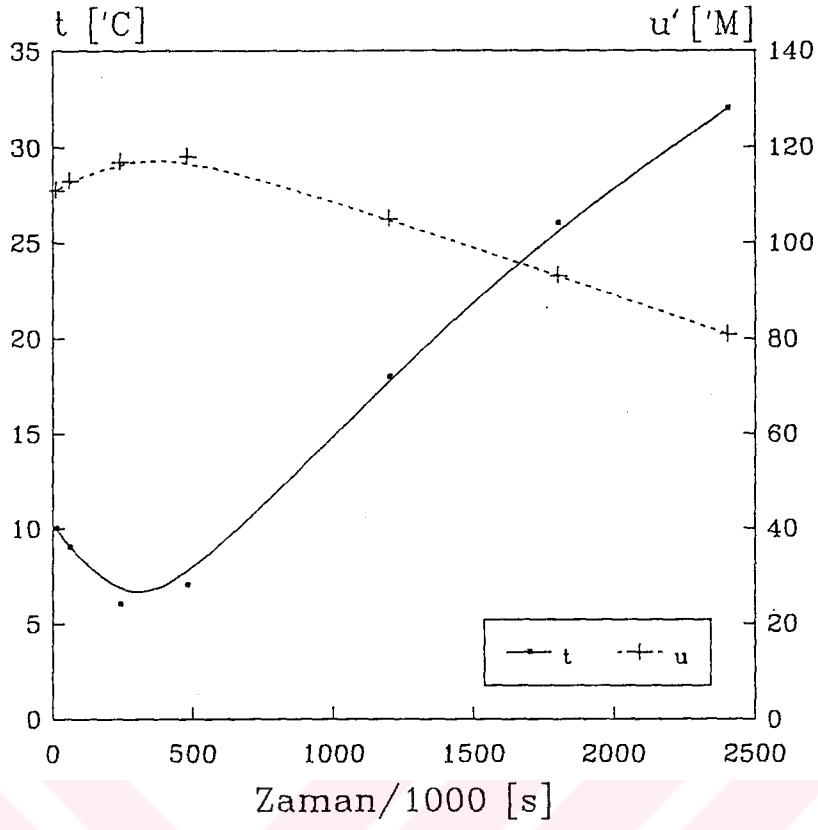
(b)  $\tau=1200$  s'de potansiyel dağılımları



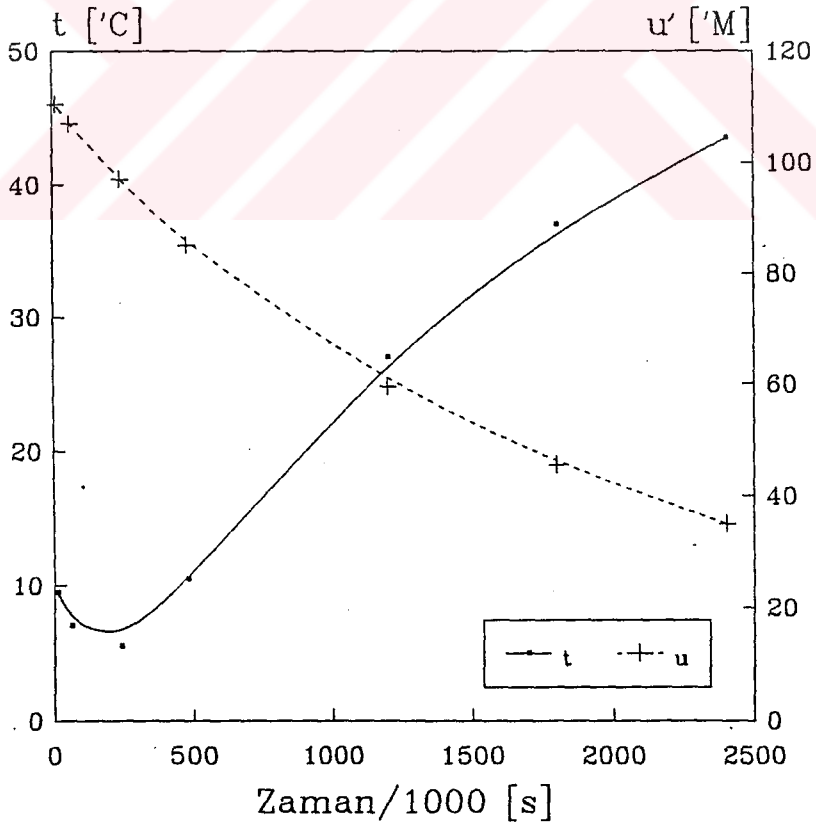
(c)

Şekil 7.12 [devam] Tuğla kurutması.

(c)  $\tau=2400 \text{ s}$ 'de potansiyel dağılımları

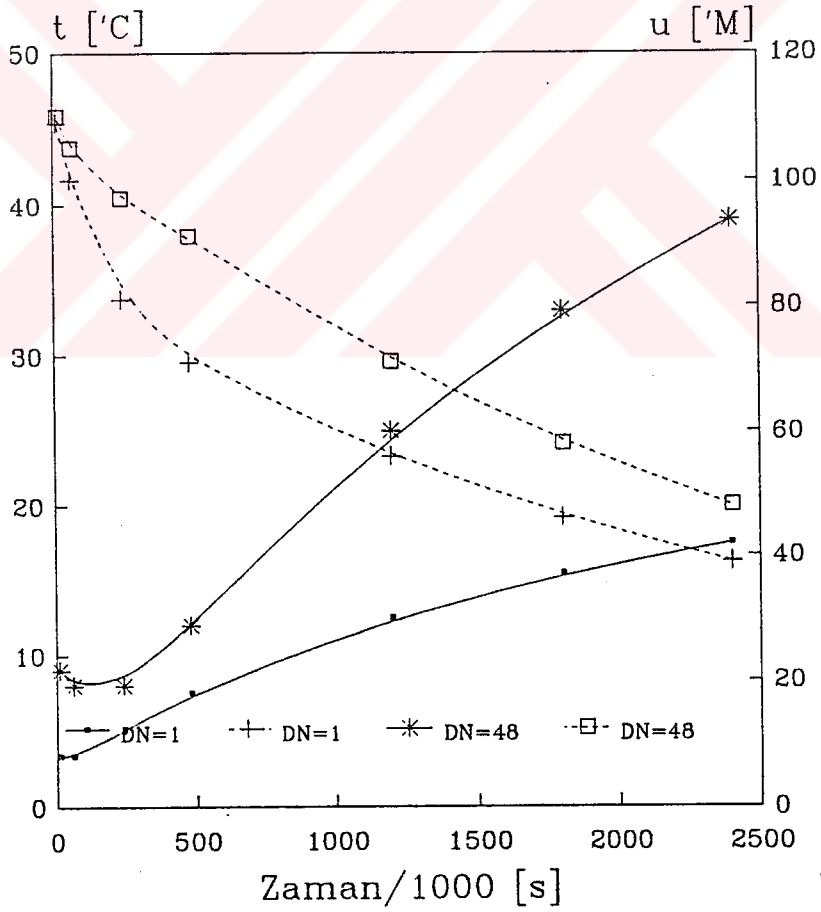
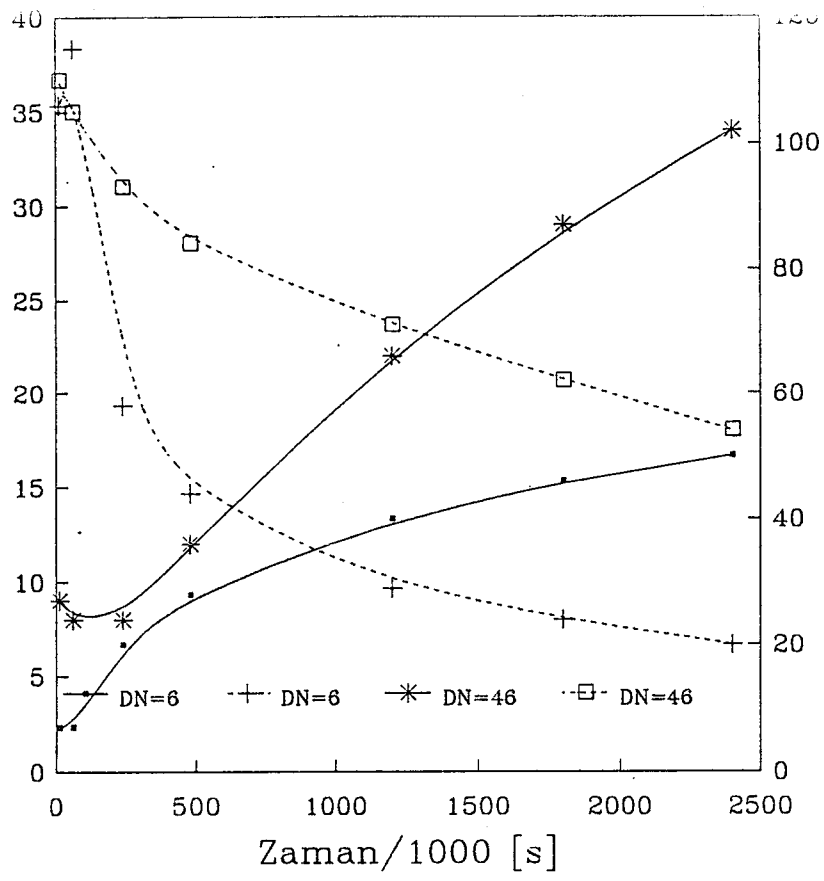


(a)



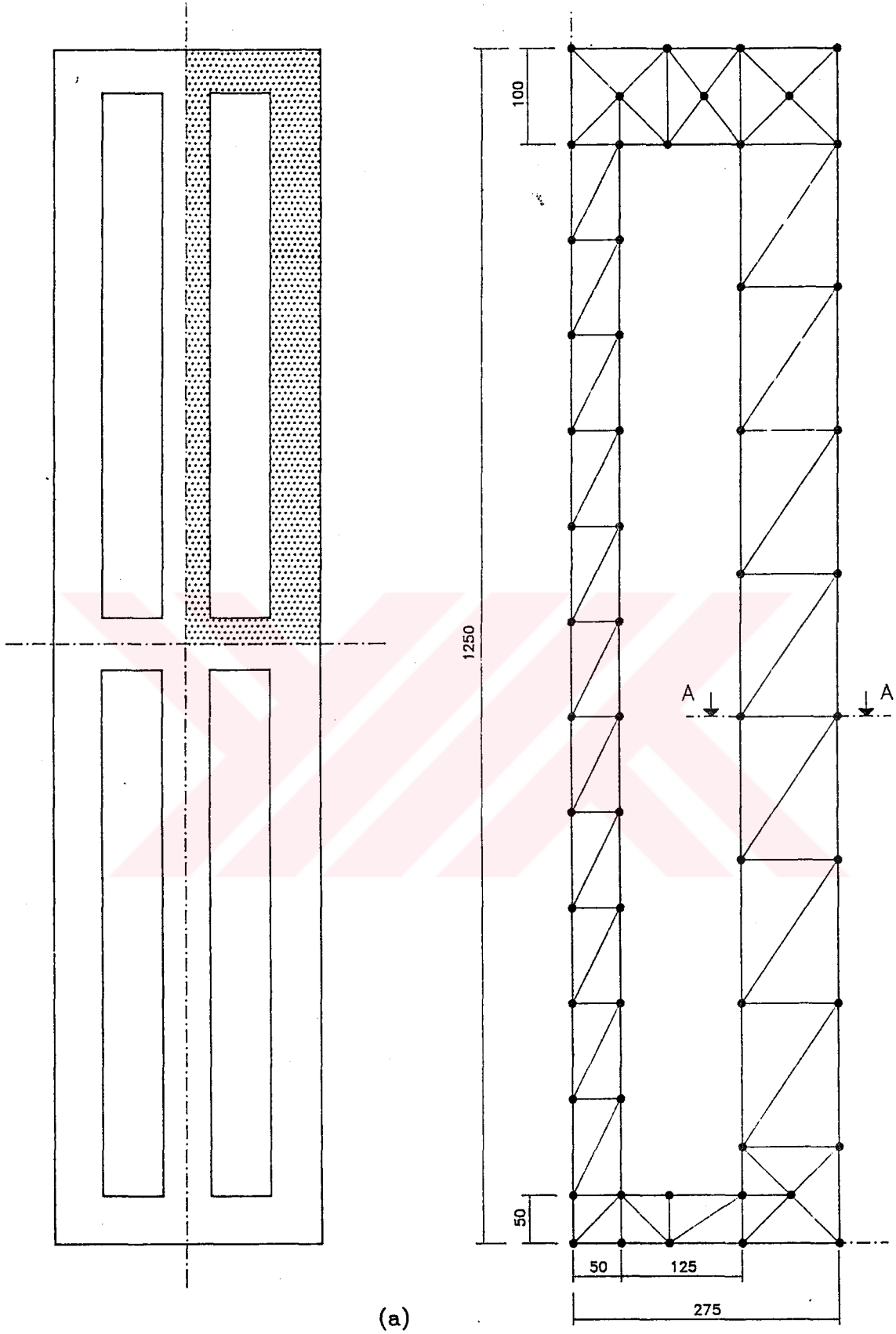
(b)

Şekil 7.13  $t$  ve  $u'$  değerlerinin zamanla değişimi  
(a) 51 düğümü, (b) BB'nin orta noktası

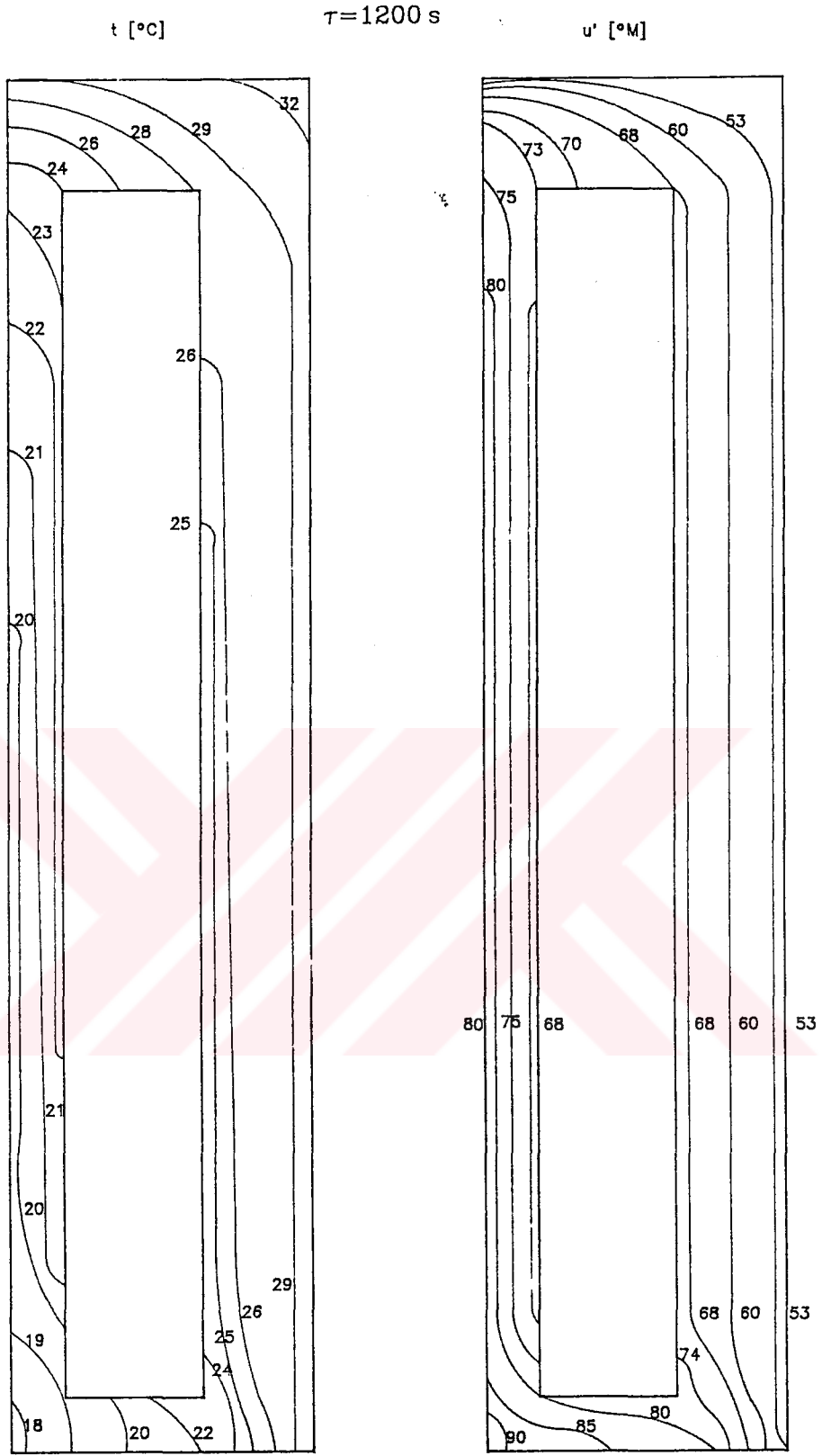


(b)

Şekil 7.14 t ve u' değerlerinin zamanla değişimi  
(a) 6 ve 46 düğümleri, (b) 1 ve 48 düğümleri

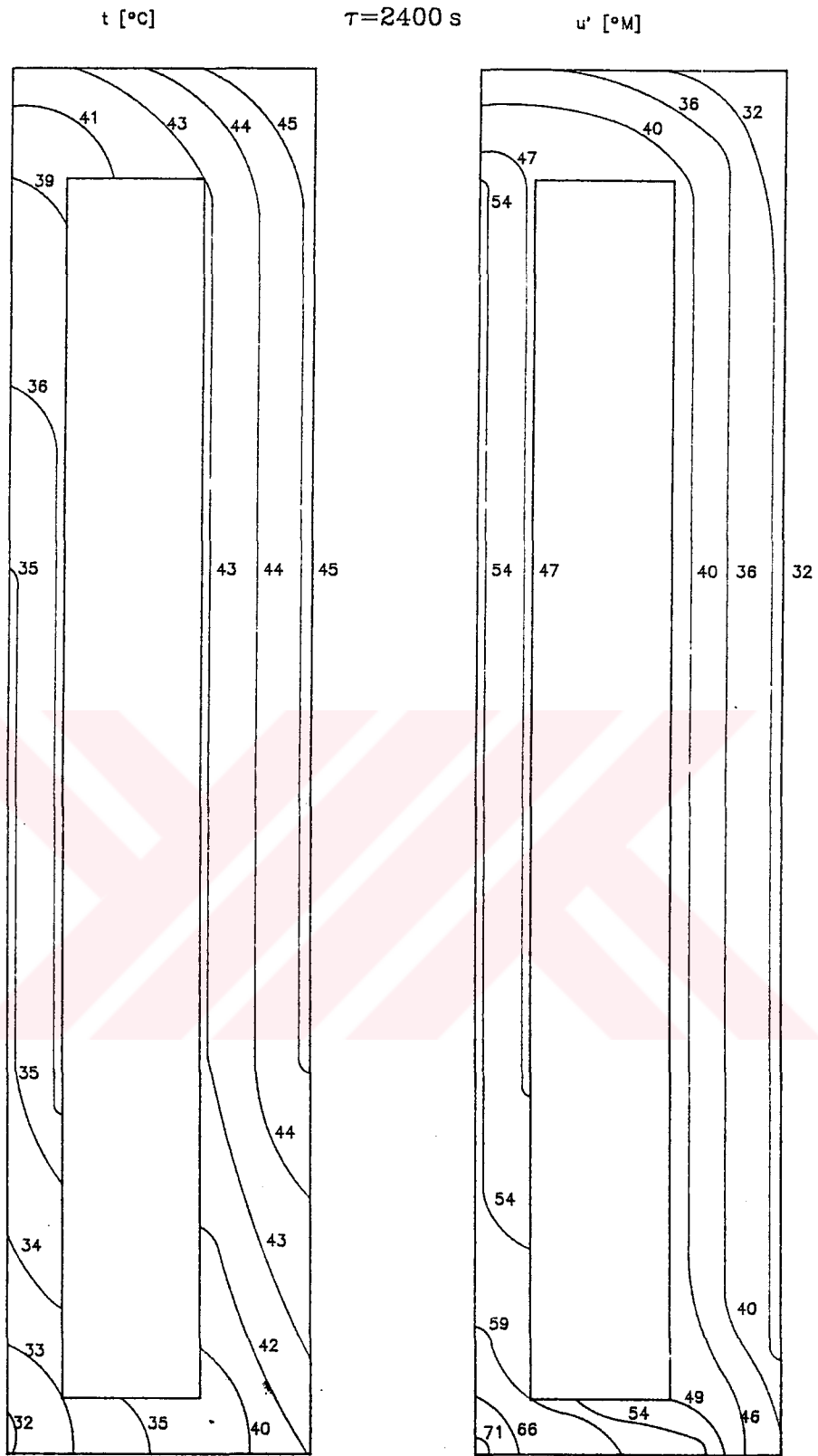


Şekil 7.15 (a) Tuğla kurutması probleminde kullanılan farklı sonlu eleman ağı



(b)

Şekil 7.15 [devam] Tuğla kurutması  
(b)  $\tau=1200$  s'de potansiyel dağılımları



(c)

Şekil 7.15 [devam] Tuğla kurutması.  
(c)  $\tau=2400$  s'de potansiyel dağılımları



## Örnek 2. Seramik Elektrik İzolatörü Kurutması

Ele alınacak ikinci örnek yine zamana bağlı bir problemdir: eksenel simetrik seramik elektrik izolatörünün kurutulmasında sıcaklık ve nem dağılımlarının belirlenmesi. Bu örnekte gözönüne alınan problem Şekil 7.16(a)'da gösterilmiştir.

Problemin fiziksel parametreleri, sınır ve başlangıç şartları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \rho &= 2000 \text{ kg/m}^3 & k_q &= 0.34 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{K} & \delta &= 0.56 \text{ }^\circ\text{M}/^\circ\text{K} \\ c_q &= 607 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{K} & k_n &= 2.40\text{E}-7 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m}\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{M} & \lambda &= 2.5\text{E}6 \text{ J/kg} \\ c_n &= 1.8\text{E}-3 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{kg}_{\text{kurucisim}}\cdot^\circ\text{M} & & & \epsilon &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_q &= 20 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{K} \\ \alpha_n &= 5\text{E}-6 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m}^2\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{M} \end{aligned}$$

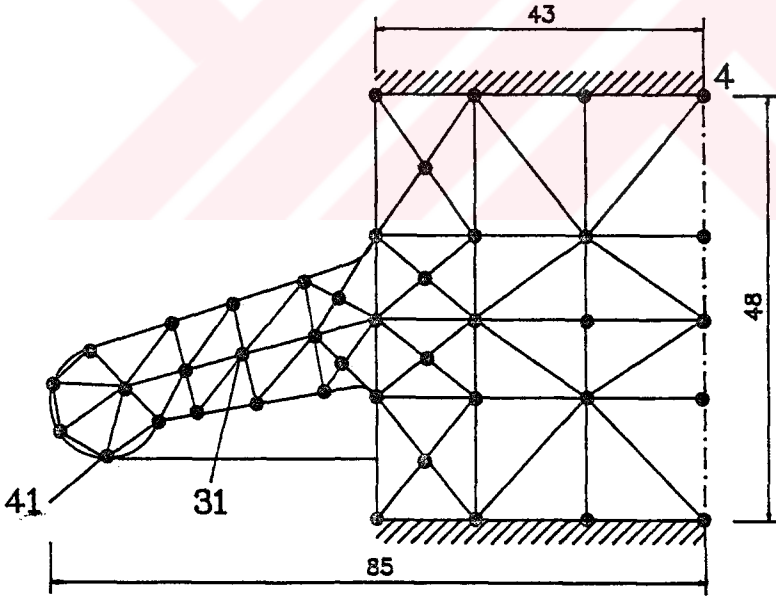
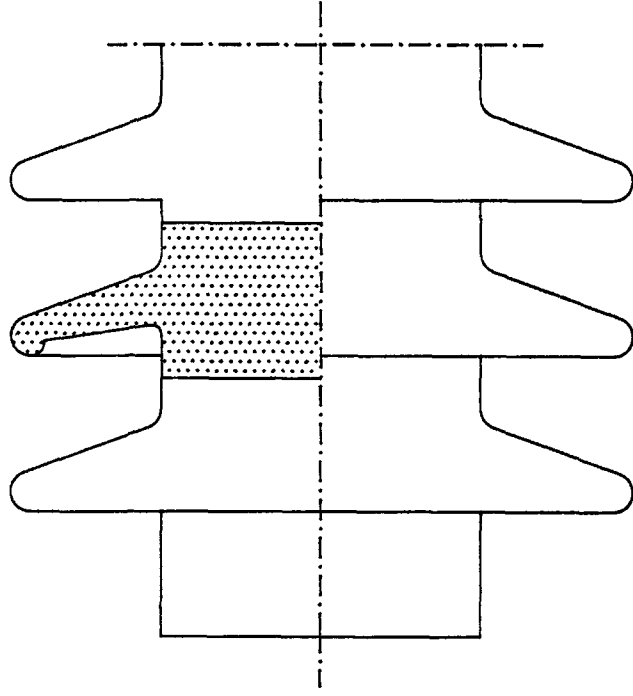
$$\begin{aligned} t_\infty &= 60^\circ\text{C} & t_i &= 25^\circ\text{C} \\ u_\infty &= 40^\circ\text{M} & u_i &= 80^\circ\text{M} \end{aligned}$$

değerlerinde olduğu varsayılmıştır. Programda kullanılan diğer bilgiler ise aşağıda listelenmiştir:

Sistemdeki düğüm sayısı	41
Sistemdeki eleman sayısı	56
Herbir elemandaki düğüm sayısı	3
Düğüm başına parametre sayısı	2
Gradyenlerin sıfır olduğu eleman sayısı	10
Taşınım ısı ve kütle transferinin meydana geldiği eleman sayısı	14
Potansiyel değeri bilinen düğüm sayısı	0

Seramik elektrik izolatörü için kurutma analizinin sonuçları eşpotansiyel eğrileri olarak Şekil 7.16(b) ve (c)'de gösterilmiştir.

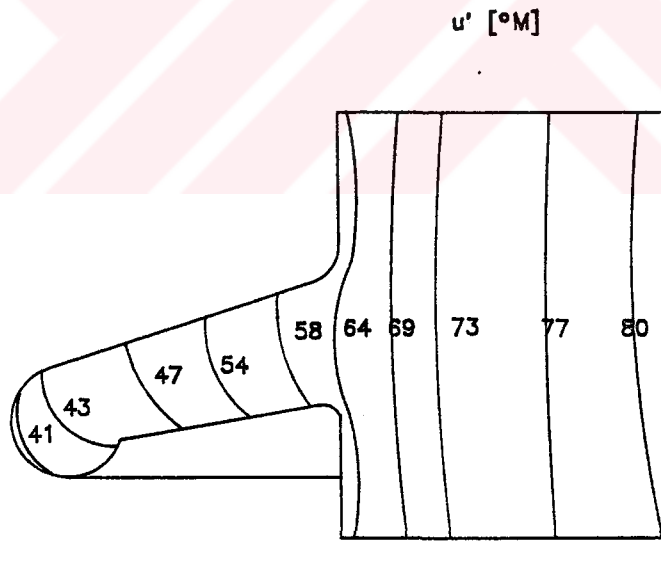
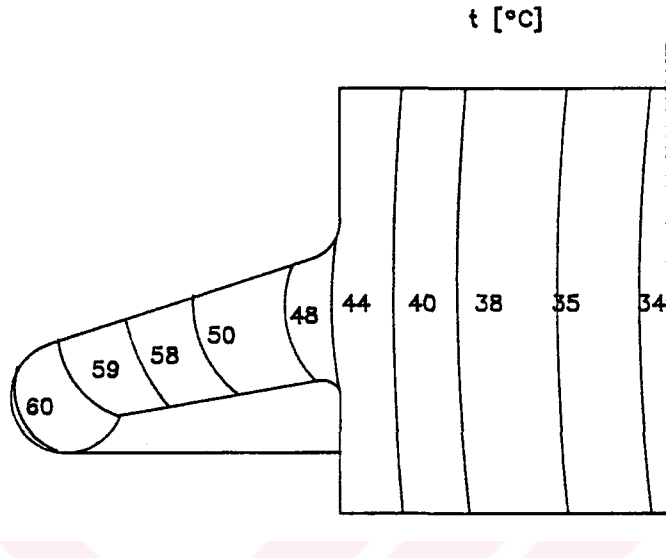
Zamana bağlı olarak değişen problemlerde zaman adımının etkisini incelemek amacıyla bu problem aynı sonlu eleman ağı kullanılarak farklı zaman adımları için tekrar çözülmüş ve zaman adımının büyük seçilmesi durumunda osilasyonların olduğu gözlenmiştir. Şekil 7.17'de 4 düğümü için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Görüldüğü gibi meydana gelen osilasyonların şiddeti fazla değildir. Taşınım ısı ve nem transferi etkisi altındaki bölgeye yakın olan 31 düğümünde aynı zaman adımlarında meydana gelen osilasyonlar daha şiddetlidir (Şekil 7.18). Şekil 7.19'da görüldüğü gibi en şiddetli osilasyon oluşumu ise izolatörün en ucundaki 41 düğümünde meydana gelmiştir.



(a)

Şekil 7.16 Seramik malzemeden yapılmış aksenal simetrik elektrik izolatörünün kurutulması.  
(a) Geometri ve sonlu eleman ağı

$$\tau = 3600 \text{ s}$$

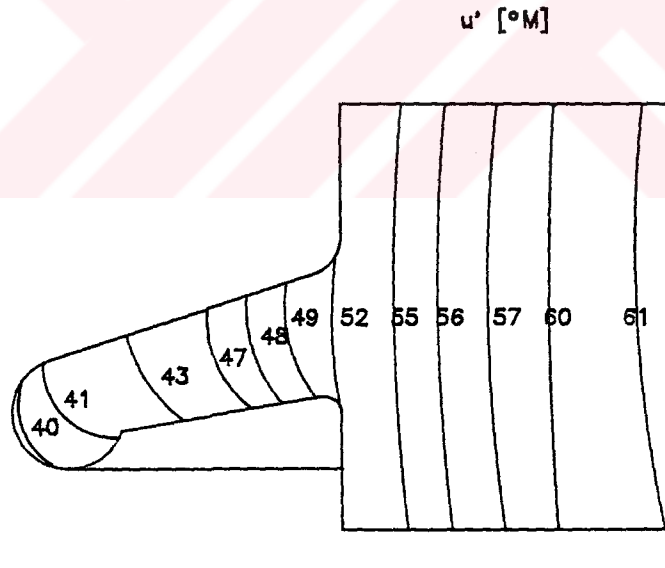
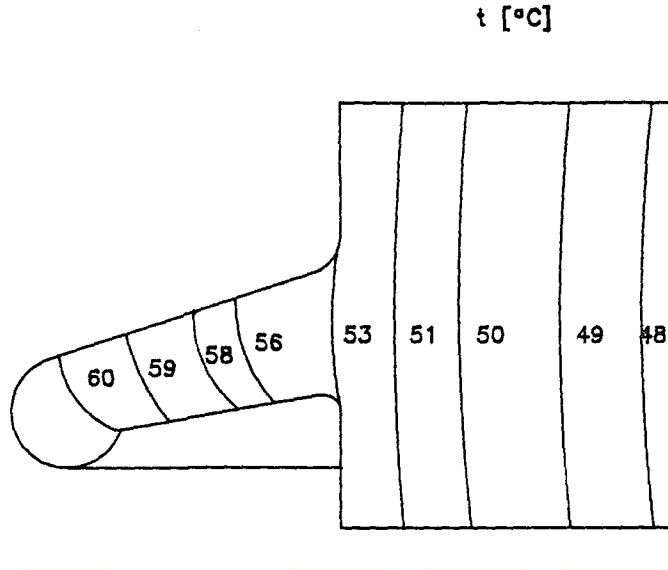


(b)

Şekil 7.16 [devam] Seramik kurutması

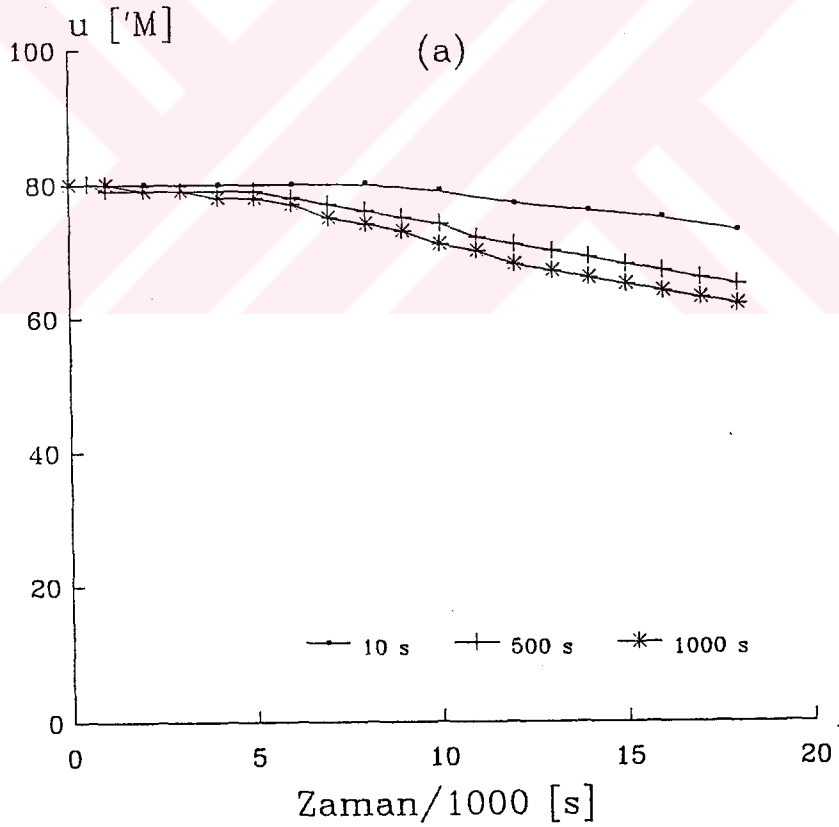
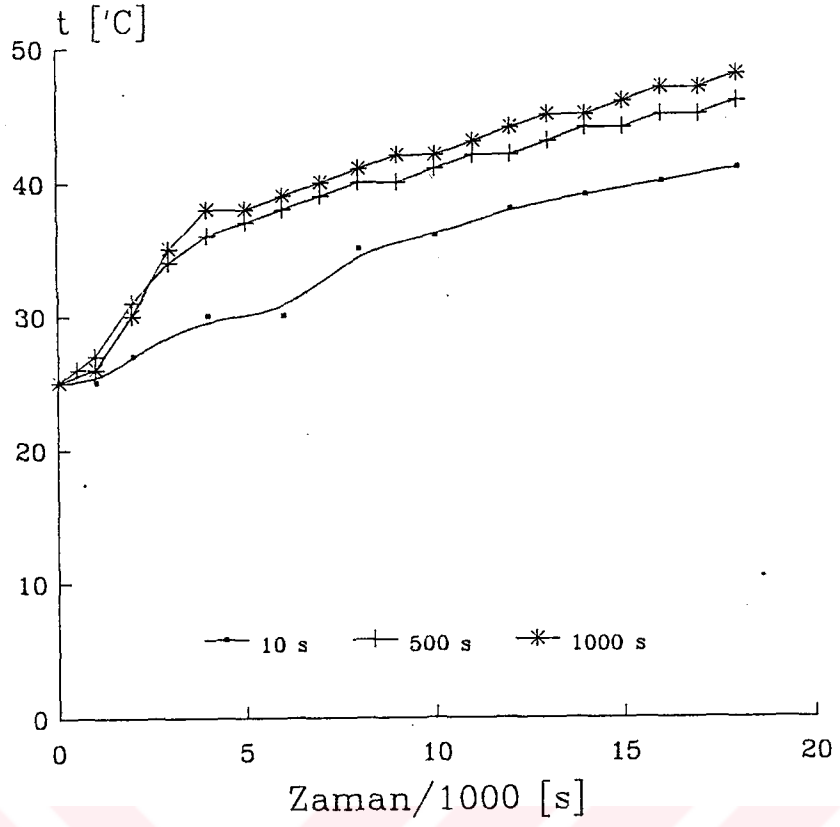
(b)  $\tau=3600$  s'de potansiyel dağılımları

$\tau=18000$  s



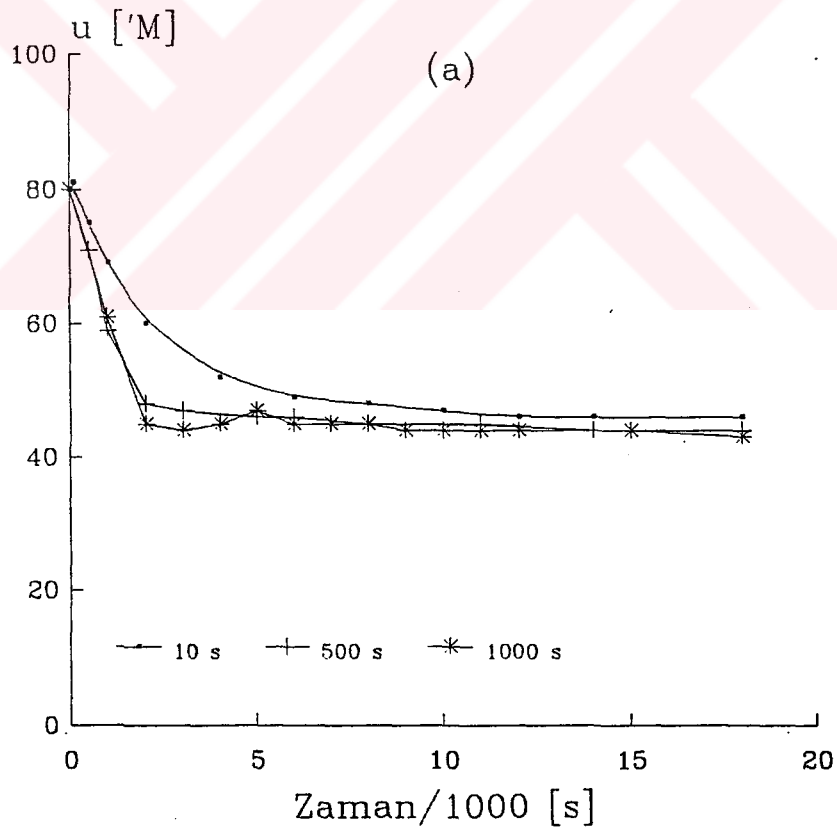
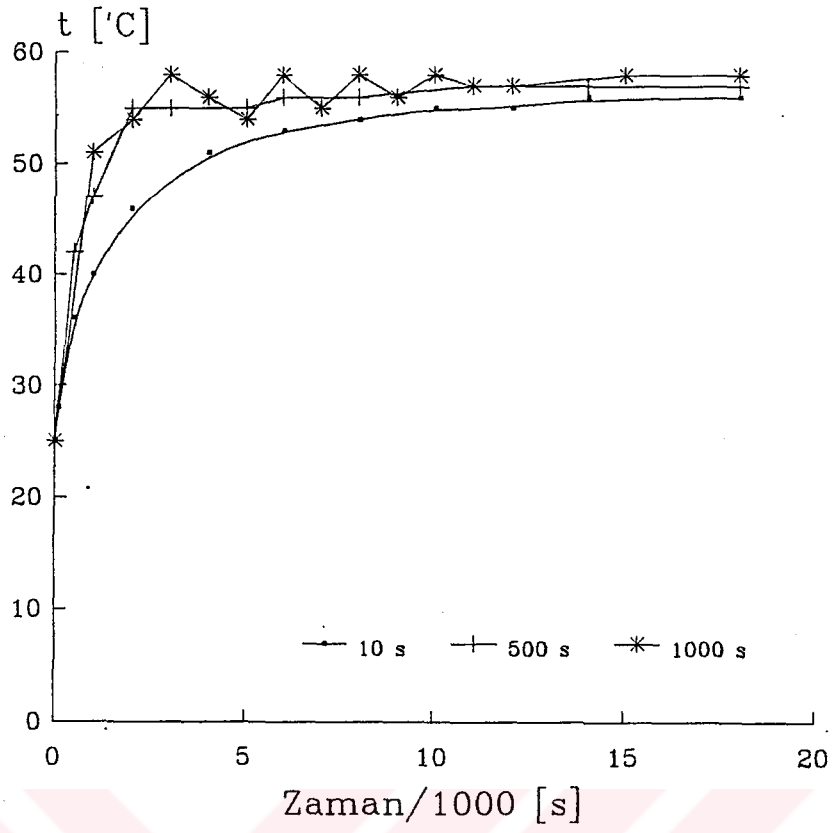
(c)

Şekil 7.16 [devam] Seramik kurutması.  
(c)  $\tau=18000$  s'de potansiyel dağılımları



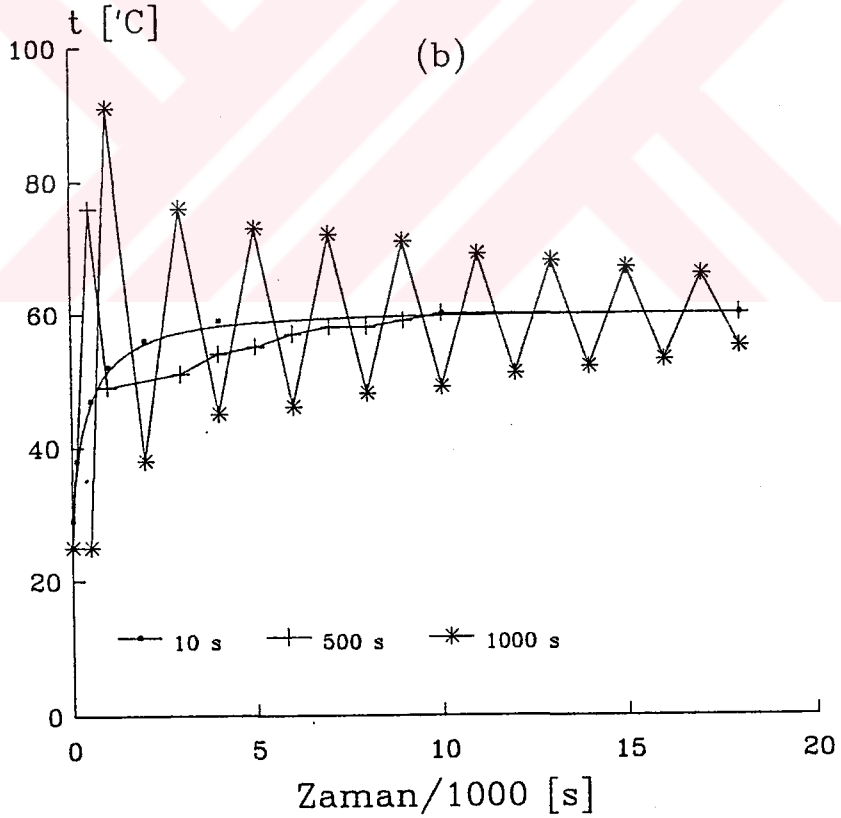
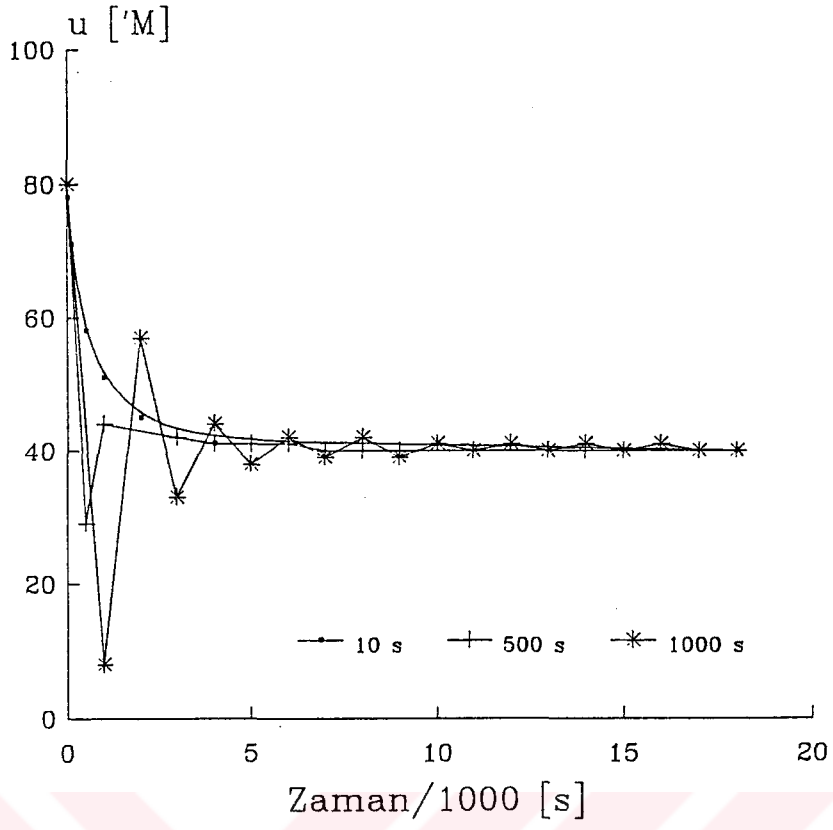
(b)

Şekil 7.17 4 düğümünde zaman adımının çözüme etkisi.  
(a)sıcaklık değişimi, (b)nem potansiyeli değişimi



(b)

Şekil 7.18 31 düğümünde zaman adımının çözüme etkisi.  
(a)sıcaklık değişimi, (b)nem potansiyeli değişimi



(a)

Şekil 7.19 41 düğümünde zaman adımının çözüme etkisi.  
(a) sıcaklık değişimi, (b) nem potansiyeli değişimi

### Örnek 3. Soğuk Deponun Zemin ve Duvarında Isı ve Kütle Transferi

Bilindiği gibi soğuk depo duvarlarında iç ve dış ortam arasında sıcaklık ve nem potansiyelleri arasındaki yüksek farklar nedeniyle meydana gelen aşırı kütle transferi buradaki ısı izolasyonunda ciddi bozulmalara yolaçabilir. Bu şekilde oluşan nem miktarını azaltmak için genellikle buhar bariyerleri kullanılır ama bu tür uygulamalarda buhar bariyerinin konulacağı yerin doğru seçilmesi çok önemlidir. Aksi halde yapılacak yanlış bir yerleştirme ısı izolasyonlarda nem miktarının tehlikeli oranlarda artmasına dolayısıyla da izolasyon malzemesinin bozulmasına yol açar.

Böyle bir problemin kararlı hal sonlu eleman analizi, sonlu eleman ağıyla birlikte Şekil 7.20(a)'da verilmiştir. Görüldüğü gibi bu problemin elemanlara bölünmesi malzemenin değiştiği yerlerde yapılması gereken doğal bölmeye bir örnektir. Birinci çeşit sınır şartları ve adyabatik dış yüzeyler Şekil 7.20'de gösterilmiştir.

Fiziksel parametreler aşağıda verildiği gibi alınmıştır:

Beton	$k_q = 0.32 \text{ W/m.}^\circ\text{K}$ $k_n = 1.4\text{E}-8 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m.s.}^\circ\text{M}$
Toprak(kil)	$k_q = 1.143 \text{ W/m.}^\circ\text{K}$ $k_n = 1.10\text{E}-7 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m.s.}^\circ\text{M}$
Polysitren	$k_q = 0.03 \text{ W/m.}^\circ\text{K}$ $k_n = 1.05\text{E}-9 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m.s.}^\circ\text{M}$
Buhar bariyeri	$k_q = 1.000 \text{ W/m.}^\circ\text{K}$ $k_n = 2.8\text{E}-12 \text{ kg}_{\text{nem}}/\text{m.s.}^\circ\text{M}$

Nem transferinin yalnızca buhar formunda olduğu kabul edilmiş ( $\epsilon=1$ ) ve ısı gradyan katsayısı tüm malzemelerde aynıdır:  $\delta=0.5 \text{ }^\circ\text{M}/^\circ\text{K}$ . Problem parametreleri ise aşağıdaki gibi alınmıştır:

Durum-1

Sistemdeki düğüm sayısı	74
Sistemdeki eleman sayısı	112
Herbir elemandaki düğüm sayısı	3
Düğüm başına parametre sayısı	2
Gradyenlerin sıfır olduğu eleman sayısı	13
Taşınım ısı ve kütle transferinin meydana geldiği eleman sayısı	0
Potansiyel değeri bilinen düğüm sayısı	24

Durum-2

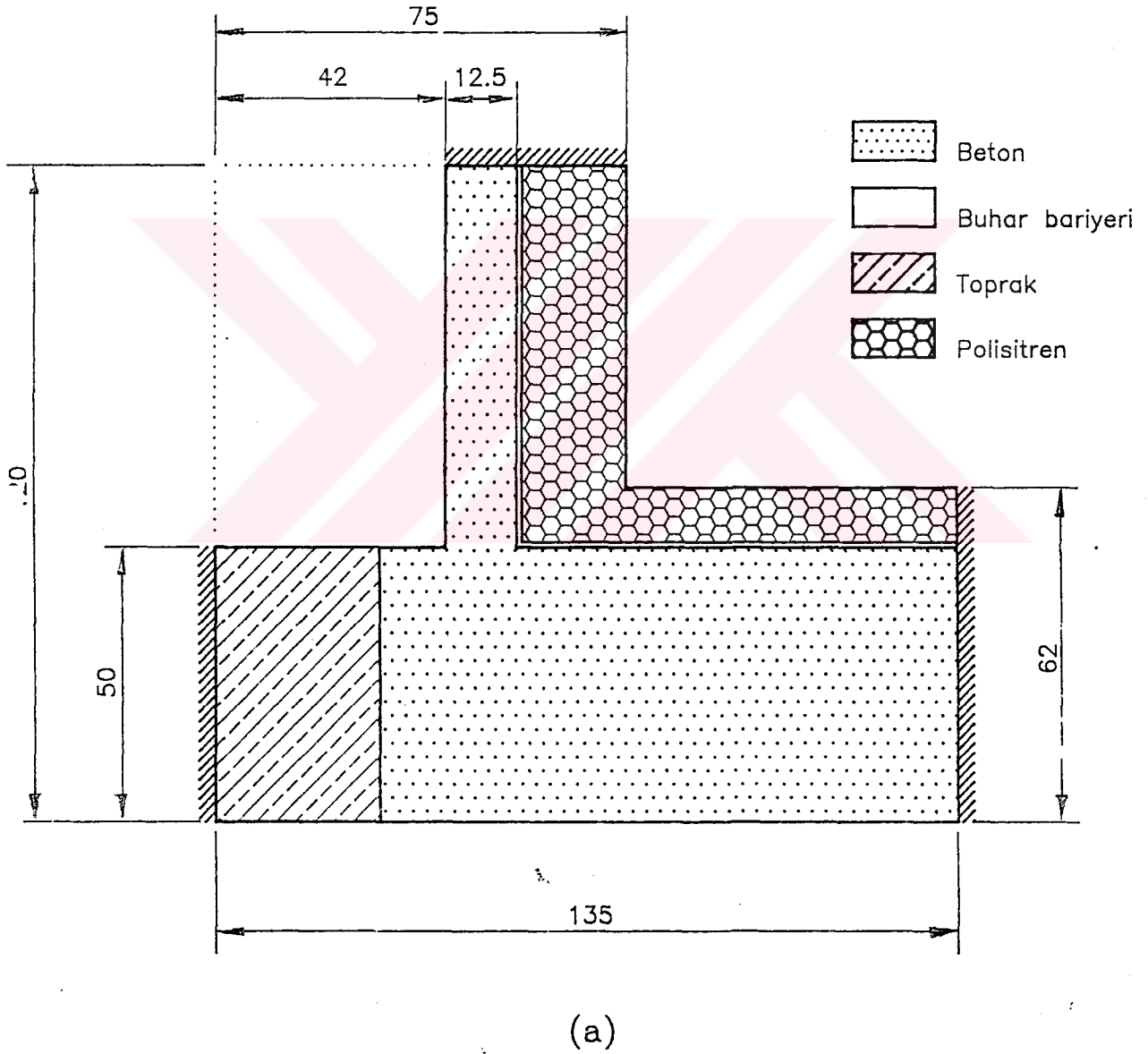
Sistemdeki düğüm sayısı	65
Sistemdeki eleman sayısı	96
Herbir elemandaki düğüm sayısı	3
Düğüm başına parametre sayısı	2
Gradyenlerin sıfır olduğu eleman sayısı	12
Taşınım ısı ve kütle transferinin meydana geldiği eleman sayısı	0
Potansiyel değeri bilinen düğüm sayısı	23



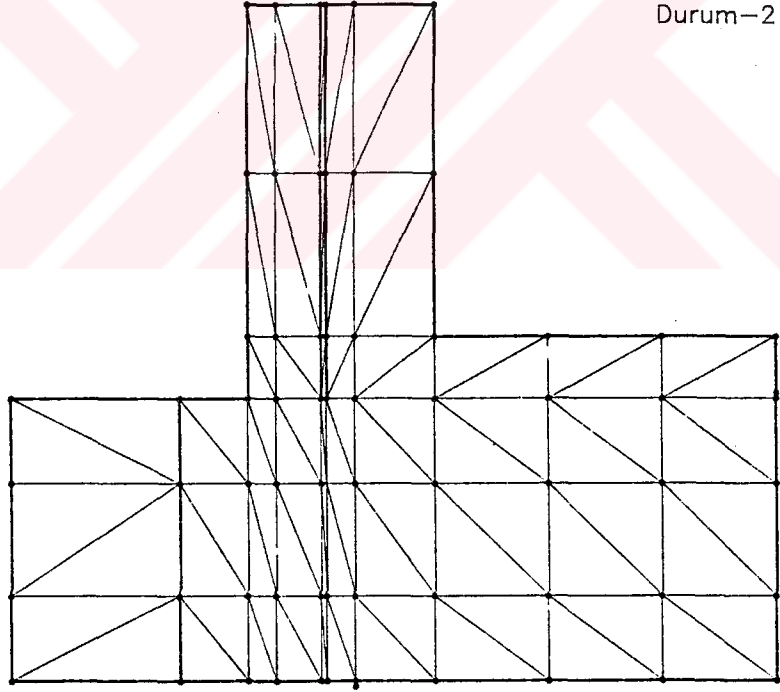
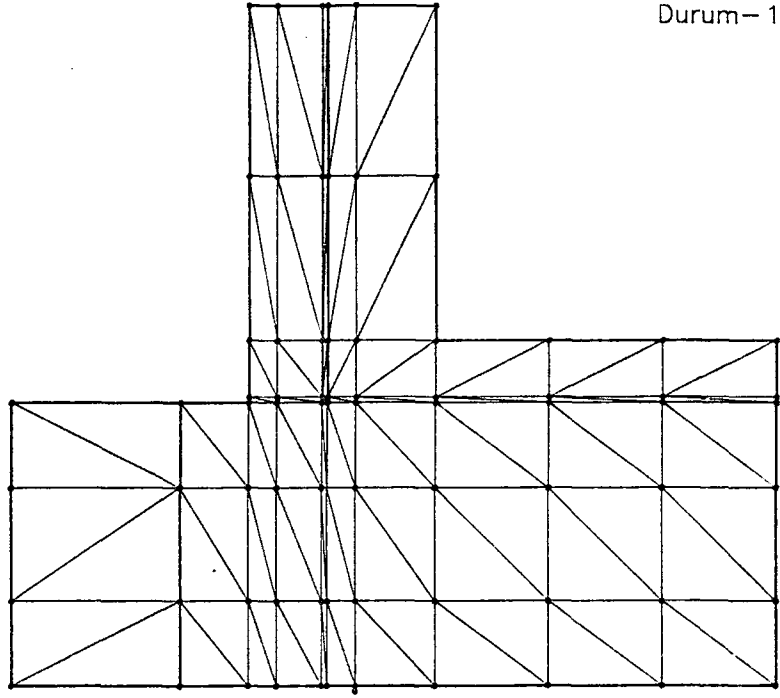
Buhar bariyerinin iki farklı yerleşim durumuna göre sıcaklık ve nem potansiyellerinin dağılımları eşpotansiyel eğrileri olarak Şekil 7.20(b) ve (c)'de gösterilmiştir.

Sonuçlardan görüleceği gibi buhar bariyerinin soğuk depo zeminine döşenmemesi durumunda izolasyon malzemesinde nem yükselmesi nedeniyle meydana gelebilecek bozulmalar soğuk deponun çalışmasında olumsuz etkiler yaratabilir.

Özellikleri incelenen KPSEYAP burada verilen örnek problemlerle sınırlı değildir. Luikov denklemler sisteminin ve sınır şartlarının geçerli olduğu problemler malzeme özelliklerinin doğru belirlenmesiyle bu program aracılığıyla analiz edilebilir.

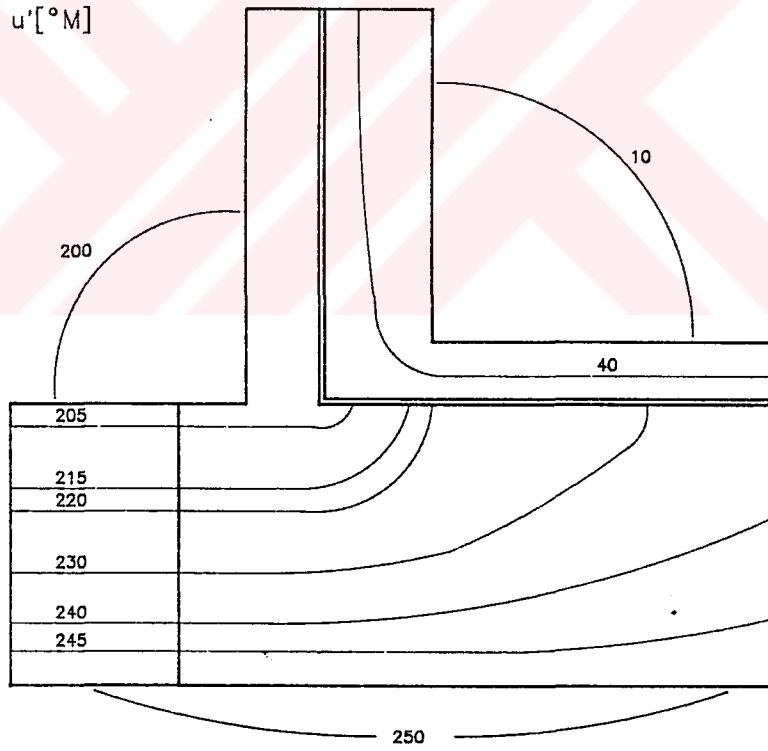
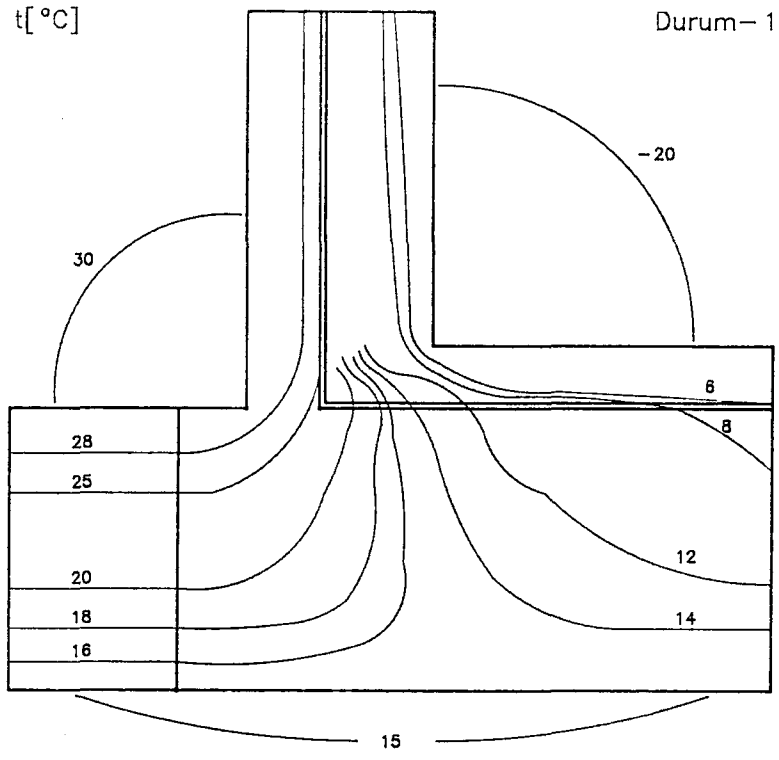


Şekil 7.20 Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi.  
(a) Geometri ve kullanılan ağ.



(a)

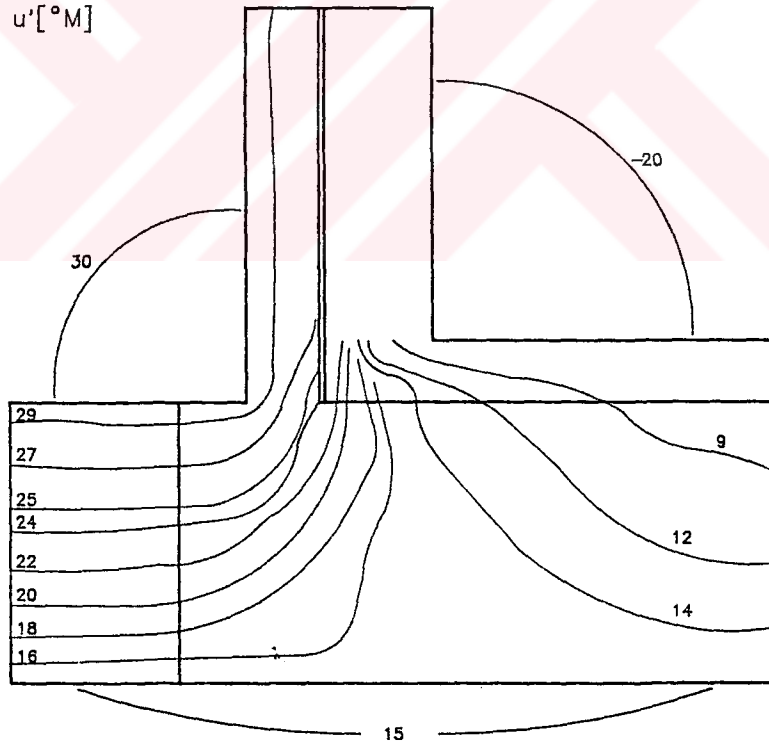
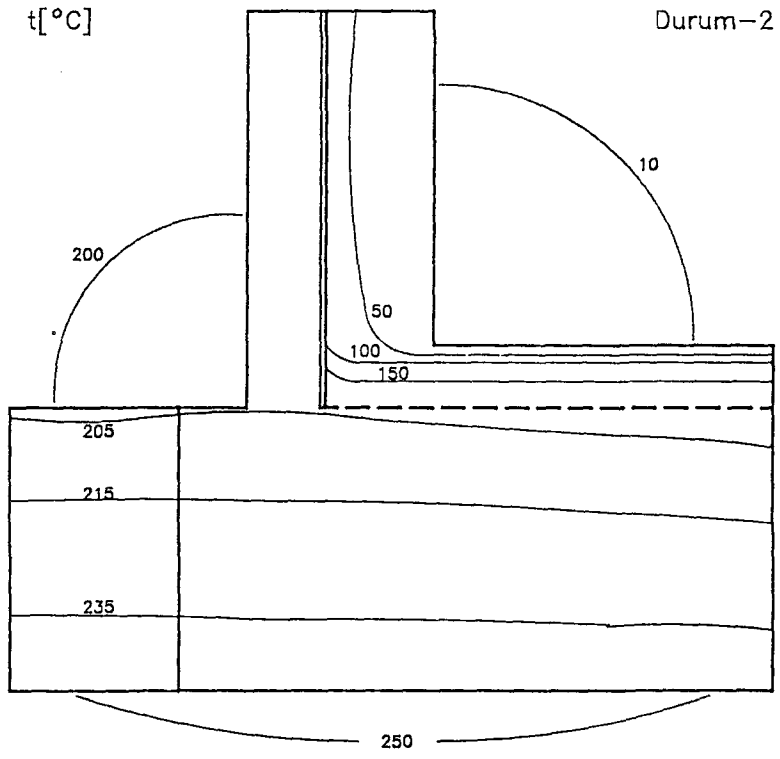
Şekil 7.20 [devam] Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi.  
(a) Geometri ve kullanılan ağ [devam].



(b)

Şekil 7.20 [devam] Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi.

(b) Döşemede buhar bariyerinin olması durumunda potansiyel dağılımları(Durum-1)



(c)

Şekil 7.20 [devam] Soğuk depo temelinde ısı ve kütle transferi.  
 (c) Döşemeden buhar bariyerinin çıkarılması durumunda potansiyel dağılımları (Durum-2).

## Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada gözenekli ortamda kurutma probleminin analizi için Luikov tarafından önerilen ve cisim içindeki ısı ve kütle transfer potansiyeli dağılımlarını veren kısmi diferansiyel denklemler sisteminin sayısal çözümünde kullanılmak üzere sonlu elemanlar yöntemi seçilmiş ve yöntemin esasları üzerinde durularak problemin Galerkin yaklaşımında sonlu elemanlar formülasyonu yapılarak elde edilen denklemleri çözmek için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde verilerin hazırlanması ve sonuçların basımında harcanan zamanın genel analiz zamanı içinde çok fazla yer tutması nedeniyle, hazırlanan bilgisayar programında veri giriş ve sonuç basımı bölümlerinde sağladığı avantajlar gözönüne alınarak dBASE III+ programlama dili; hesap bölümünde ise [mevcut programlardaki hazır alt programlardan faydalanmak amacıyla] FORTRAN 77 programlama dili kullanılmıştır.

Hazırlanan bilgisayar programı zamana bağlı olarak değişen [kararsız] veya değişmeyen [kararlı] 2-B ve eksenel simetrik [3-B] problemlerin çözümünde kullanılmak üzere tasarlanmış, 1-B problemlerin analitik çözümleri literatürde [73-75] verildiği için burada ele alınmamıştır. Programda 3-B problemler olarak yalnızca eksenel simetrik problemler incelendiğinden gerçek 3-B problemler için sonlu elemanlar yöntemi araştırmaya açıktır. Kurutma denkleminin 3-B analizinde karşılaşılabilecek ana güçlüklerden ilki sonlu eleman denklemlerinin oluşturulması, ikincisi ise hazırlanacak bilgisayar programında ortaya çıkacak bellek sorunudur. Bu nedenle *değişkenlerin ayrışması yöntemi* [77-80] 3-B problemlerin çözümünde kullanılabilecek yöntemlerden birisidir ve bu çalışmanın devamı niteliğinde bir çalışma olarak önerilebilir.

Önceki bölümde tanıtılan bilgisayar programının geniş bir uygulama alanı vardır ancak kullanılacak PC konfigürasyonuna bağlı olarak maksimum 88 düğüm noktalı bir problemle sınırlandırıldığı da vurgulanmalıdır. Bu sınırlama programın yapısından ziyade PC konfigürasyonuna bağlı olduğundan çözümde kullanılabilecek maksimum düğüm noktası sayısını uygun bir FORTRAN derleyicisi [ve bu derleyicinin gereksinim duyduğu uygun bir PC] kullanımıyla arttırmak mümkündür.

Örnek olarak incelen problemler iki ayrı PC'de [80286/8MHz, 80486/66MHz] çalıştırıldığında 486'nın 286'ya göre işlem zamanı açısından çok avantajlı olduğu gözlenmiştir. Fiyat bazında yapılacak bir

karşılaştırmada ise 286'nın avantajlı olduğu hatırlanacak olursa işlem zamanının kısa ve maksimum düğüm noktası sayısının yüksek olmasının istendiği durumlarda 486'nın seçilmesi gerektiği söylenebilir.

Bilgisayar programı örnek uygulamalar için çalıştırılmış ve literatürde verilenlerle karşılaştırma yapmak amacıyla sonuçlar sabit potansiyel eğrileriyle verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Comini ve Lewis [41] tarafından verilen sonuçlarla uyum içindedir ama yine de deneysel sonuçlarla karşılaştırılmalıdır. [Daha önce de belirtildiği gibi] problemin sonlu elemanlara bölünüşü için bir yöntem olmadığından tuğla kurutması probleminde farklı bölmenin etkisi incelenmiştir. Bunun yanısıra aynı problemde potansiyel değerinin fazla değişmesi beklenen bölgelerde elemanlara bölme seyrekleştirilerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Her iki durumda da sonuçların çok fazla değişmediği söylenebilir.

Zamana bağlı olarak değişen problemlerde zaman adımının etkisini incelemek amacıyla seramik elektrik izolatörünün kurutulması probleminde farklı zaman adımları için problem çözülmüş ve zaman adımının büyük seçilmesi durumunda osilasyonların oluştuğu gözlenmiştir.

Soğuk depo duvar ve zeminindeki sıcaklık ve nem potansiyeli dağılımlarının incelendiği problemde ise malzeme özelliklerinin değiştiği yerlerde kullanılması gereken "doğal bölme" örnek olarak gösterilmiştir.

Gözenekli ortamda kurutma problemleri için Luikov denklemlerinin uygulanmasında başlangıçta ortaya çıkabilecek ana zorluklardan birisi probleme ait fiziksel parametrelerin doğru seçilmesidir. Literatürde [10,73-75] çeşitli fiziksel parametrelere ait sayısal değerler verilmiştir ama burada verilmeyen malzemelere ait bu katsayılar deneysel olarak belirlenebilir. Aynı bir çalışma konusu olarak düşünülebilecek bu araştırmanın başlangıç noktasını yine literatürde[10,75] verilen yöntemler oluşturabilir.

Sonlu elemanlar yönteminde kullanılabilir eleman türlerinin tamamen araştırılmış olup interpolasyon fonksiyonlarıyla birlikte literatürde [5-8] verilmiş olması nedeniyle bu konuda yapılabilecek herhangi bir aşama son derece sınırlıdır. Ancak sonlu elemanlar yönteminin kurutma probleminin çözümündeki başarısı, kullanılan iterasyon yöntemine ve bu yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen cebirsel denklem takımı için seçilen yöntemle bağlıdır. Cebirsel denklem takımlarının çözümü ile ilgili çalışmalar doruk noktasına erişmiş olup literatür [76,78,82-84] bu tür denklemlerin çözüm yöntemleri açısından zengindir.

Bu denklemlerin çözümünde kullanılacak çözüm yöntemi, SEY'in uygulamadaki başarısını sağlayacak unsurlardan birisidir. Problemin küçük çapta olması halinde direkt veya iteratif yöntemlerden birisinin kullanımı halinde bilgisayar belleği ve hesaplama zamanı açısından önemli farklılıklar ortaya çıkmaz. Ancak [3-B problemlerde olduğu gibi] problemin büyümesi halinde bu yöntemler ortaya çıkan bellek ve hesaplama zamanı gereksinimlerini karşılamakta güçlük çekebilirler. Bu nedenle kurutma denklemlerinin simetrik olma özelliğinden ortaya çıkan bant matrislerin, bu tür matrislerde kullanılabilir çözüm yöntemleriyle bellek gereksinimi ve hesaplama zamanının uzunluğundan kaynaklanan darboğaz kısmen de olsa genişletilebilir. bant genişliği düğümlerin numaralanmasına bağlı olarak dar veya geniş olabilir. Bantın geniş olması durumunda bant matris çözüm yöntemleri önemli bir yarar sağlamayacağından şeridi mümkün olduğu kadar küçültmek, dolayısı ile en dar şeridi sağlayacak en uygun numaralama sistemini bulmak gerekir. Böyle bir algoritma Collins tarafından verilmiştir[98]. Bant matris çözüm yöntemleri optimum numaralama algoritmaları eşliğinde kullanılsalar bile, bellek

yetmezliğinden doğacak sorunları tamamen ortadan kaldıracak nitelikte olmayıp problemin büyümesi halinde yetersiz kalırlar. Bu gibi durumlarda, ilk kez Irons tarafından ortaya atılmış olan cephesel çözüm yöntemleri tek alternatif olarak ortaya çıkmıştır[98]. Cephesel çözüm yöntemleri, denklem takımının tümü oluşmadan belirlenmiş bir cephe içinde oluşumunu tamamlanmış denklemlere ait değişkenin elenmesi ve elenen denklemin daha sonra kullanılabilmesi için diskte saklanması esasına dayalı olup, bellek gereksinimi açısından kısıtlı değildir. Ana işlemci ile disk arasında devamlı alış-veriş nedeni ile çözümlene zamanındaki uzamanın günümüz bilgisayarlarının hızı gözönünde bulundurulduğunda önemli bir sıkıntı oluşturmayacağı açıktır. Dolayısıyla cebirsel denklemlerin çözümü aşamasında sorun kalmadığı savunulabilir [98].

Zamanda ilerletme yöntemlerinde durum bu düzeyde değildir. Özellikle büyük zaman aralığı seçiminde osilasyonlardan kaynaklanana sorunlar halledilememiş olup bu sorunlardan artılmış dengeli ilerletme yöntemleri araştırmaya açıktır.

Çalışmada hazırlanan bilgisayar programında veri girişinde ve sonuçların basımında kolaylıkların arttırılacağı [örneğin incelenen sistemin sonlu sayıda elemana bölme işinin bilgisayar aracılığıyla yapılması, elde edilen sonuçların eş potansiyel eğrileri şeklinde bilgisayarda çizilmesi...] türden bir çalışma başka bir araştırmanın konusu olabilir.

# Referans Listesi

---

1. R.B.Keey, Theoretical foundations of drying technology, *Advances in Drying*, ed.A.S.Mujumdar, vol.1, 1-22(1980).
2. P.D.Lebedev ve A.S.Ginzburg, General problems of drying theory and techniques, *Prog.Heat Mass Transfer*, vol.4, 55-76(1971).
3. E.Özil VÇA., *Bozüyük OAS Tesisleri Enerji Ekonomisi Çalışmaları Sonuç Raporu*, TÜBİTAK Gebze Araştırma Merkezi Makina ve Enerji Sistemleri Araştırma Bölümü, Proje No:0630088301, Gebze(1985)
4. E.Özil VÇA., *Toprak Bozüyük Tesisleri Enerji Optimizasyonu Projesi*, TÜBİTAK Gebze Araştırma Merkezi Makina ve Enerji Sistemleri Araştırma Bölümü, Proje No:06038501, Gebze(1986)
5. O.C.Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraww-Hill, London(1971).
6. K.H.Huebner, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley and Sons, USA(1975).
7. J.N.Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraww- Hill, New York(1984).
8. P.E.Allaire, *Basics of the Finite Element Method*, Wm.C.Brown Publishers, USA(1985).
9. D.S.Burnett, *Finite Element Analysis from Concepts to Applications*, Addison-Wesley, USA(1988).
10. A.V.Luikov, *Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies*, Pergamon, Oxford(1966).
11. B.Postacioğlu, *Yapı Malzemesi Problemleri*, Çağlayan Kitabevi, İstanbul(1975).
12. S.Whitaker, Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media: a theory of drying, in *Advances in Heat Transfer*, vol.13, 119-203(1977).
13. F.A.L.Dullien, *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*, Academic Press, New York(1979).
14. R.E.Treybal, *Mass Transfer Operations*, McGraww-Hill, New York(1980).
15. R.B.Keey, *Drying Principles and Practice*, Pergamon, Oxford(1972).
16. B.Kısakürek, Kurutma modelleri, *Isı Bilimi ve Tekniği*, C.2, S.3, 37-40(1979).
17. İ.Çataltaş, *Kimya Mühendisliğine Giriş*(çeviri), İnkilap Kitabevi, İstanbul(1986).
18. M.Fortes ve M.R.Okos, Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, *Advances in Drying*, ed.A.S.Mujumdar, vol.1, 119-154(1980).
19. T.K.Sherwood, Application of the theoretical diffusion equations to the drying of solids, *Trans.Am.Inst.Chem.Eng.*, vol.27, 190-202(1931)



20. A.B.Newman, The drying of porous solids: diffusion calculations, *Trans.Am.Inst.Chem.Eng.*, vol.27, 310–333(1931).
21. A.B.Newman, The drying of porous solids: diffusion and surface emission equation, *Trans.Am.Inst.Chem.Eng.*, vol.27, 203–220(1931).
22. O.A.Hougen, H.J.McCauley ve M.R.Marshall, Limitations of diffusion equations in drying, *Trans.Am.Inst.Chem.Eng.*, vol.36, 183–210(1940).
23. J.R.Phillip ve D.A.DeVries, Moisture movement in porous materials under temperature gradients, *Trans.Am.Geophys.Union*, vol.38, 222–232(1957).
24. D.A.DeVries, Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media, *Trans.Am.Geophys.Union*, vol.39, 909–916(1958).
25. C.L.Huang, H.H.Siang ve C.H.Best, Heat and moisture transfer in concrete slabs, *IJHMT*<sup>1</sup>, vol.22, 257–266(1979).
26. D.Berger ve D.C.T.Pei, Drying of hygroscopic capillary porous solids: a theoretical approach, *IJHMT*, vol.16, 293–302(1973).
27. O.Krischer, *Die Wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik*, Springer, Berlin(1963).
28. D.Beyer ve D.C.T.Pei, The effect of different modes of operatino on the drying processes, *IJHMT*, vol.18, 707–709 (1975).
29. N.Schadler ve W.Kast, A complete model of the drying curve for porous bodies–experimental and theoretical studies, *IJHMT*, vol.30, no.10, 2031–2044(1987).
30. S.Somasundaram, N.K.Anand ve Y.B.Suh, Analysis of moisture migration in two–dimensional unsaturated porous media with impermeable boundaries, *IJHMT*, vol.32, no.9, 1733–1739(1989).
31. W.Masmoudi ve M.Pratt, Heat and mass transfer between a porous medium and a parallel external flow. Application to drying of capillary porous materials, *IJHMT*, vol.34, no.8, 1975–1989(1991).
32. I.J.Kumar, An extended variational formulation of the non–linear heat and mass transfer in a porous medium, *IJHMT*, vol.14, 1759–1770(1971).
33. L.N.Gupta, An approximate solution of the generalized Stefan's problem in porous medium, *IJHMT*, vol.17, 313–321(1974).
34. S.W.Cho, An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium, *IJHMT*, vol.18, 1139–1142(1975).
35. M.D.Mikhailov, Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half–space with moving evaporation front, *IJHMT*, vol.18, 797–894(1975).
36. B.Palancz, Solution of the penetrating evaporation front model for finite porous medium using orthogonal collocation method, *IJHMT*, vol.30, no.9, 1871–1878(1987).
37. A.V.Luikov, Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary–porous bodies(Rewiev), *IJHMT*, vol.18, 1–14(1975).
38. M.D.Mikhailov ve B.K.Shishedjiev, Temperature and moisture distributions during contact drying of a moist porous sheet, *IJHMT*, vol.18, 15–24(1975).
39. G.Tripathi, K.N.Shukla ve R.N.Pandey, Intensive drying of an infinite plate, *IJHMT*, vol.20, 451–458(1977).
40. J.Wyrwal, Some theorems in Luikov's theory of heat and mass transfer in capillary–porous bodies, vol.31, no.12, 2543–2546(1988).

---

1: Int.J.Heat and Mass Transfer yerine kullanılmıştır.

41. G.Comini ve R.W.Lewis, A numerical solution of two-dimensional problems involving heat and mass transfer, *IJHMT*, vol.19, 1387-1392(1976).
42. H.R.Thomas, K.Morgan ve R.W.Lewis, A fully nonlinear analysis of heat and mass transfer problems in porous bodies, *Int.J.Num.Meth. Engng.*, vol.15, 1381-1393(1980).
43. J.Y.Liu ve S.Cheng, Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies, *IJHMT*, vol.34, no.7, 1747-1754(1991).
44. M.Kaviany ve M.Mittal, Funicular state in drying of a porous slab, *IJHMT*, vol.30, no.7, 1407-1418(1987).
45. S.B.Nasrallah ve P.Perre, Detailed study of a model of heat and mass transfer during convective drying of porous media, *IJHMT*, vol.31, no.5, 957-967(1988).
46. D.R.Shonnard ve S.Whitaker, The effective thermal conductivity for a point-contact porous medium: an experimental study, *IJHMT*, vol.32, no.3, 503-512(1989).
47. M.Ilic ve I.W.Turner, Convective drying of a consolidated slab of wet porous material, *IJHMT*, vol.32, no.12, 2351-2362(1989).
48. Y.X.Tao, R.W.Besant ve K.S.Rezkallah, Unsteady heat and mass transfer with phase changes in an insulation slab: frosting effect, *IJHMT*, vol.34, no.7, 1593-1603(1991).
49. P.M.Kolesnikov, Generalized boundary conditions of the heat and mass transfer, *IJHMT*, vol.30, no.1, 85-92(1987).
50. P.Chen ve D.C.T.Pei, A mathematical model of drying processes, *IJHMT*, vol.32, no.2, 297-310(1989).
51. M.S.Smironov ve V.I.Lysenko, Equations of drying curves, *IJHMT*, vol.32, no.5, 837-841(1989).
52. A.D.Polyanin ve V.V.Dil'man, An algebraic method for heat and mass transfer problems, *IJHMT*, vol.33, no.1, 183-201(1990).
53. M.A.Stanisich, G.S.Schajer ve F.Kayihan, A mathematical model of drying for hygroscopic porous media, *AIChE Journal*, v32, n8, 1301-1311(1986).
54. D.J.Shah, J.W.Ramsey ve M.Wang, An experimental determination of the heat and mass transfer coefficients in moist unsaturated solids, *IJHMT*, vol.27, no.7, 1075-1085(1984).
55. D.A.Zumbrunnen, R.Viskanta ve F.P.Incropera, Heat transfer through porous solids with complex internal geometries, *IJHMT*, vol.29, no.2, 275-284(1986).
56. S.K.Dutta, V.K.Nema ve R.K.Bhardwaj, Drying behaviour of spherical grains, *IJHMT*, vol.31, no.4, 855-861(1988).
57. B.X.Wang ve W.P.Yu, A method for evaluation of heat and mass transport properties of moist porous media, *IJHMT*, vol.31, no.5, 1005-1009(1988).
58. S.Haber, A.Shavit ve J.dayan, The effect of heat convection on drying of porous semi-infinite space, *IJHMT*, vol.27, no.12, 2347-2353(1984).
59. S.Mori, H.Nakagawa, A.Tanimoto ve M.Sakakibara, Heat and mass transfer with a boundary layer flow past a flat plate of finite thickness, *IJHMT*, vol.34, no.11, 2899-2909(1991).
60. O.A.Plumb, G.A.Spolek ve B.A.Olmstead, Heat and mass transfer in wood during drying, *IJHMT*, vol.28, no.9, 1669-1678(1985).
61. S.Motakef ve M.A.El-Masri, Simultaneous heat and mass transfer with phase change in a porous slab, *IJHMT*, vol.29, no.10, 1503-1512(1986).
62. A.P.Shapiro ve S.Motakef, Unsteady heat and mass transfer with phase change in porous slabs: analytical solutions and experimental results, *IJHMT*, vol.33, no.1, 163-173(1990).
63. A.Rubin ve S.Schweitzer, Heat transfer in porous media with phase change, *IJHMT*, vol.15, 43-60(1972).

64. P.P.K.Raj ve H.W.Emmons, Transpiration drying of porous hygroscopic materials, *IJHMT*, vol.18, 623–634(1975).
65. M.Cross, R.D.Gibson ve R.W.Young, Pressure generation during the drying of a porous half space, *IJHMT*, vol.22, 47–50(1979).
66. M.Ilic ve I.W.Turner, Drying of a wet porous material, *Appl.Math. Modelling*, vol.10, 16–24(1986).
67. H.A.Dinulescu ve E.R.G.Eckert, Analysis of the one-dimensional moisture migration caused by temperature gradients in a porous medium, *IJHMT*, vol.23, 1069–1078(1980).
68. J.A.Rogers ve M.Kaviani, Funicular and evaporative-front regimes in convective drying of granular beds, *IJHMT*, n2, 469–480(1992).
69. D.W.Lyons, J.D.Hatcher ve J.E.Sunderland, Drying of a porous medium with internal heat generation, *IJHMT*, vol.15, 897–905(1972).
70. R.D.Gibson, M.Cross ve R.W.Young, Pressure gradients generated during the drying of porous shape, *IJHMT*, vol.22, 827–830(1979).
71. M.S.Sahota ve P.J.Pagni, Heat and mass transfer in porous media subject to fires, *IJHMT*, vol.22, 827–830(1979).
72. E.R.G.Eckert ve M.Faghri, A general analysis of moisture migration caused by temperature differences in an unsaturated porous medium, *IJHMT*, vol.23, 1613–1623(1980).
73. A.V.Luikov ve Y.A.Mikhailov, *Theory of Energy and Mass Transfer*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs(1961).
74. A.V.Luikov ve Y.A.Mikhailov, *Theory of Heat and Mass Transfer*, Jerusalem(1965).
75. A.Luikov, *Heat and Mass Transfer*, Mir Publishers, Moskova(1980).
76. R.C.Wylie ve L.C.Barett, *Advanced Engineering Mathematics (5th ed.)*, McGraw–Hill (1985).
77. B.Carnahan, H.Luther ve J.Wilkes, *Applied Numerical methods*, John Wiley and Sons, USA (1969).
78. A.Constantinides, *Applied Numerical Methods with Personal Computers*, McGraw–Hill, USA(1987).
79. F.P.Incropera ve D.P.DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley&Sons, USA, (1990).
80. G.M.Myers, *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*, McGraww–Hill, USA (1971).
81. T.M.Shih, *Numerical Heat Transfer*, Hemisphere, Washington(1984).
82. I.Fried, *Numerical Solution of Differential Equations*, Academic Press, New York (1979).
83. Y.Jaluria ve K.E.Torrance, *Computational Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corp., Washington(1986).
84. L.Lapidus, *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, John Wiley&Sons, USA(1982).
85. D.Günay, *Mühendisler İçin Sonlu Elemanlar Metodunun Temelleri(Çeviri)*, Sakarya(1990).
86. T.Kurtay, *Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş*, İTÜ Mak.Fak. (Ders Notu), İstanbul(1980).
87. C.S.Desai ve J.F.Abel, *Introduction to the Finite Element Method: A Numerical Method for Engineering Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, New York(1972).
88. J.E.Akin, *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, London(1982).
89. W.L.Wood ve R.W.Lewis, A Comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation, *Int.J.Num.Meth.Eng.*,9,679–689 (1975).
90. J.S.Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1968.

91. W.M.Rohsenow, J.P.Harnett, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, USA(1973).
92. J.F.Stelzer, Developing effective finite element software for microcomputers, *Microcomputers in Engineering Applications*, ed. B.A.Schrefler ve R.W.Lewis, John-Wiley Sons, England,23-74(1980).
93. E.Hinton, M.Ezzat ve H.J.Anderson, User-friendly finite element stress analysis on a 16-bit *Microcomputers in Engineering Applications*, ed. B.A.Schrefler ve R.W.Lewis, John-Wiley Sons, England, 99-140(1980).
94. A.Verruijt, A Finite element model for interface problems in groundwater flow, *Microcomputers in Engineering Applications*, ed. B.A.Schrefler ve R.W.Lewis, John-Wiley Sons, England, 251-272(1980).
95. N.R.Tadayon, R.W.Lewis ve K.Morgan, An implicit-explicit finite element microcomputer program for transient heat conduction analysis, *Microcomputers in Engineering Applications*, ed. B.A.Schrefler ve R.W.Lewis, John-Wiley Sons, England, 299-320(1980).
96. K.Taylan, *The Application of Finite Element Method to Two Dimensional Transient Linear Heat and Mass Transfer Problems in Porous Media*, Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul(1975).
97. R.W.Lewis, G.Comini and C.Humpheson, Finite element application to heat and mass transfer problems in porous bodies (Rusça), *Inzh.Fiz.Zh.*, v29, 483-488(1975)
98. V.Kalenderoğlu, Isı iletimi problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü, Isı Bilimi ve Tekniği 5.Ulusal Kongresi Bildiri Kitabı, C.1, ed.N.Saryal, H.Yavuz, A.İleri, 1-15(1985).

# Özgeçmiş

---

**Mustafa GÜNEŞ**

1960 Gaziantep doğumlu.

1982 Balıkesir Mühendislik Fakültesi mezunu.

1986'da yüksek mühendis ünvanını aldığı Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde aynı yıl doktora başladı; 1986-1988 yılları arasında askerlik görevi nedeniyle ara verdi.

1983 yılından bu yana Balıkesir Mühendislik Fakültesi'nde çalışmakta.