T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

FUCHSIAN GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Recep ŞAHİN

Balıkesir, Ağustos-1997

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

FUCHSIAN GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Recep ŞAHİN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR

Sınav Tarihi : 18 / 08 / 1997

Jüri Üyeleri :
Prof. Dr. Turgut BAŞKAN (Jüri Başkanı)
Yrd. Doç. Dr. H.Basri ÖZDEMİR (Jüri Üyesi-Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Mehmet KOÇAK (Jüri Üyesi)

Balıkesir, Ağustos-1997

ÖZ

Fuchsian Gruplar

Recep ŞAHİN

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. H.Basri ÖZDEMİR

Balıkesir, 1997

Fuchsian grupların matematiğe girişi Poincaré 'nin L.Fuchs 'un diferansiyel denklemler üzerine yayınladığı bir makaleyi incelemesiyle olmuştur. Poincaré bu makaleden yararlanarak eliptik fonksiyonların genelleştirilmişi olan bir fonksiyon sınıfı tanımladı ve Fuchsian fonksiyonlar adını verdi. Otomorf fonksiyonlar için kullandığı Γ süreksiz grubunun aynı zamanda düzlem hiperbolik geometrinin yön koruyan izomorfizmlerinin grubu ile de çakıştığını farketti.

Fuchsian gruplar $PSL(2,\mathbb{R})$ 'nin ayrık altgrupları olduğundan bu çalışmanın birinci bölümünde Topolojik dönüşüm grupları, ayrık gruplar ve doğrusal dönüşümlerle ilgili bir kısım sonuçlar verildi. Ayrıca bu bölümde Riemann yüzeyleri, Fuchsian grupların bölüm uzayları olduğundan Riemann yüzeylere ve Fuchsian gruplarla ilişkilerinden dolayı latislere kısaca yer verildi.

İkinci bölümde Hiperbolik metrik, Fuchsian grupların temel bölgelerinin hiperbolik alanlarını bulmada kullanılacak olan Hiperbolik alan tanımlandı.

Tezin ana kısmını oluşturan, Üçüncü bölümde ise Fuchsian grup tanımı, Fuchsian gruplarla süreksiz gruplar arasındaki ilişki, Üçgen gruplar, Fuchsian grupların temel cebirsel özellikleri, bir Fuchsian grubun temel bölgesi, Fuchsian gruplarla Riemann yüzeylerin arasındaki ilişki ve bir Fuchsian grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı ile ilgili bazı önemli teoremlerin ispatı anlaşılır bir şekilde verildi.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik alan / Ayrık grup / Fuchsian grup / Temel bölge / Bölüm Uzayı / Riemann Yüzeyi

ABSTRACT

FUCHSIAN GROUPS

Recep ŞAHİN

Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics Education

M.Sc. Thesis / Supervisor: Assist. Prof. Dr. H.Basri ÖZDEMİR

Balıkesir-Turkey, 1997

Fuchsian groups first have been introduced by Poincaré. His starting point was a paper on differential equations which was written by L. Fuchs. Using the results of this paper, Poincaré defined a class of functions which were the generalized form of elliptic functions and he called them as Fuchsian functions. Moreover, he realized that the discontinuous group of automorphic functions, Γ, coincided with the group of conformal isomorphisms of the plane hyperbolic geometry.

Fuchsian groups are discrete subgroups of $PSL(2,\mathbb{R})$. From this point of view, in the first chapter, we have considered topological transformation groups, discrete groups and linear transformations. In the same chapter, we also mentioned about the Riemann surfaces and lattices. Because the Riemann surfaces are quotient spaces of Fuchsian groups and lattices are closely related to the Fuchsian groups.

In the second chapter, hyperbolic metric and hyperbolic area have been defined. Because, we are interested in the hyperbolic area of fundamental regions of Fuchsian groups.

In the third chapter which is main part of the thesis, definition of Fuchsian group, the relation between Fuchsian groups and discontinuous groups, the triangle groups, the some important algebraic properties of Fuchsian groups, the fundamental region of a Fuchsian group, the relation Fuchsian groups and Riemann surfaces and the hyperbolic area of the fundamental region of a Fuchsian groups have been considered and the related theorems and proofs have been given.

Key Words: hyperbolic area / discrete group / Fuchsian group / fundamental region / quotient space / Riemann surfaces

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Kısaltmalar	Açıklamalar
$\mathbf{C}_\infty$	$\mathbf{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbf{U}$	$\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$
PGL(2,**C**)	$\left\{\frac{az+b}{cz+d} \middle\| a,b,c,d \in \mathbf{C},\ ad-bc \neq 0\right\}$
PSL(2,**C**)	$\left\{\frac{az+b}{cz+d} \middle\| a,b,c,d \in \mathbf{C},\ ad-bc = 1\right\}$
PSL(2,IR)	$\left\{\frac{az+b}{cz+d} \middle\| a,b,c,d \in \mathrm{IR},\ ad-bc = 1\right\}$
$[G,X]$	Topolojik dönüşüm grubu
I_Q	Q çemberine göre inversiyon
Ω	$w_1/w_2 \notin \mathrm{IR}$ ve sabit $w_1, w_2 \in \mathbf{C}$ için $\{mw_1 + nw_2 \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$
$D(\Omega)$	$\{z \in \mathbf{C} \mid \lvert z\rvert \leq \lvert z-\omega\rvert,\ \ \forall\omega \in \Omega \text{ için}\}$
$h(\gamma)$	γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu
$\rho(z,w)$	z ile w noktaları arasındaki hiperbolik uzunluk
$[z,w]$	z ile w noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası
$\mu(E)$	E bölgesinin hiperbolik alanı
Γ	Fuchsian grup
$\mathbf{U}/\Gamma$	Γ Fuchsian grubunun **U** 'da bölüm uzayı
$L(\Gamma)$	Γ Fuchsian grubunun limit kümesi
$D_p(\Gamma)$	$\{z \in \mathbf{U} \mid \rho(z,p) \leq \rho(z,T(p)) \quad \forall T \in \Gamma \text{ için}\}$
$C_\Gamma(T)$	Γ Fuchsian grubunun T öğesinin Γ 'da merkezleştiricisi
$N(\Gamma)$	Γ Fuchsian grubunun PSL(2,IR) 'de normalleştiricisi

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Tezimi hazırlamada ve karşılaştığım güçlüklerde bana her türlü yardımı yapan, yol gösteren, Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Literatür oluştururken ve tezimi hazırlarken değerli önerilerini eksik etmeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Turgut BAŞKAN 'a ve her konuda benden manevi desteğini esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Mehmet ARISOY 'a teşekkürü bir borç bilirim.

Her zaman yanımda olduklarını hissettiğim değerli çalışma arkadaşlarım Dilek, Ayşen, Neşe ve Sevinç. Size de teşekkürler...

Temmuz, 1997 Recep ŞAHİN

1. ÖNBİLGİLER

1.1 *Topolojik Dönüşüm Grupları*

1.1.1 Tanım : G hem bir grup hem de topolojik uzay olsun. Eğer $\forall g,h \in G$ için $m: G \times G \to G,\ m(g,h) = gh$ ve $i: G \to G,\ i(g) = g^{-1}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlar sürekli iseler G 'ye ***topolojik grup*** denir [1].

1.1.2 Tanım : G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $[G,X]$ sıralı çiftini alalım. $\Lambda: G \times X \to X,\ \Lambda(g,x) = g\Lambda x$ olarak tanımlanan bir sürekli dönüşüm aşağıdaki iki koşulu gerçeklerse $[G,X]$ 'e bir ***topolojik dönüşüm grubu*** denir.

i) $g\Lambda(h\Lambda x) = gh\Lambda x$

ii) $1\Lambda x = x$ [2].

1.1.3 Tanım : X bir topolojik uzay ve G, X 'in homeomorfizmalarının bir grubu olsun. G 'nin etkisi ile X, G-yörüngelerine ayrılır. X 'in bir x elemanının G-yörüngesi $[x]_G$ şeklinde gösterilir. X 'in bir y elemanının $y \in [x]_G$ olması için gerek ve yeter koşul bir $g \in G$ için $g(x) = y$ olmasıdır. G-yörüngelerin kümesine ***yörünge uzayı*** (orbit space) veya ***bölüm uzayı*** (quotient space) denir ve X/G ile gösterilir.

Eğer $p: X \to X/G,\ p(x) = [x]_G$ izdüşüm dönüşümünü tanımlarsak; τ_X, X kümesi üzerindeki topoloji olmak üzere X/G bölüm uzayı üzerindeki topoloji

$$\tau = \left\{ V \subset X/G \,\middle|\, p^{-1}(V) \in \tau_X \right\}$$

dir. Bu topoloji ile X/G bir topolojik uzaydır [1,3].

1.2 *Ayrık Gruplar*

1.2.1 Tanım : G bir topolojik grup olsun.

(a) G 'nin öğelerinin hiçbirisi G 'nin yığılma noktası değilse G 'ye ***ayrık grup*** denir.

(b) G 'nin her g öğesi için $\{g\}$ kümesi g 'nin bir komşuluğu ise G 'ye ***ayrık grup*** denir.

(c) G 'nin her g öğesi, G 'nin bir ayrık noktası ise G 'ye ***ayrık grup*** denir.
(d) G 'nin e birim öğesi G 'nin bir ayrık noktası ise G 'ye ***ayrık grup*** denir [3,4].

1.2.2 Teorem : 1.2.1 Tanımındaki ayrık grup tanımları birbirlerine denktir [3].

1.2.3 Tanım : G herhangi bir topolojik grup olsun. G 'nin e 'yi içeren tüm açık altkümelerinin ailesi $\mathcal{N}$ olsun. Eğer $U,V \in \mathcal{N}$ ise $UV = \{uv | u \in U, v \in V\}$ ve $U^{-1} = \{u^{-1} | u \in U\}$ olmak üzere $UV \in \mathcal{N}$ ve $U^{-1} \in \mathcal{N}$ dir. Eğer $U = U^{-1}$ ise U 'ya ***simetrik açık küme*** denir [1].

1.2.4 Lemma : $U \in \mathcal{N}$ ise $VV \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{N}$ simetrik açık kümesi vardır [1].

1.2.5 Teorem : G topolojik grup olsun. Ω, G 'nin bir ayrık altgrubu ve K, G 'nin kompakt bir altkümesi ise $\Omega \cap K$ sonludur.

İspat : Ω ayrık olduğundan $U \cap \Omega = \{e\}$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}$ vardır ve 1.2.4 Lemmadan $VV \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{N}$ simetrik açık kümesi vardır. G 'nin g öğeleri için gV açık kümeleri G 'yi örter ve dolayısıyla K 'yi de örter. K 'nin kompaktlığından, K 'yi örten $K \subseteq g_1V \cup \ldots \cup g_nV$ şeklinde sonlu bir alt örtü vardır. Her i=1,...,n için $|\Omega \cap g_iV| \leq 1$ olduğunu göstermek istiyoruz. Tersine $h_1, h_2 \in \Omega \cap g_iV$ ise $h_j = g_iv_j$ $(j = 1,2)$ şekilde $v_1, v_2 \in V$ vardır ve buradan $h_1^{-1}h_2 = v_1^{-1}g_i^{-1}g_iv_2 = v_1^{-1}v_2 \in V^{-1}V = VV \subseteq U$. $h_1^{-1}h_2 \in U \cap \Omega = \{e\}$ olduğundan $h_1 = h_2$ bulunur. Böylece $|\Omega \cap K| \leq n$ olur [1].

1.2.6 Tanım : [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun. X'in her bir x öğesi için

$$S(x) = \{g \in G | g(x) = x\}$$

kümesine x 'in ***kalımlaştırıcısı*** (stabilizer) denir. Eğer X 'in bir A altkümesi verilirse, A 'nın kalımlaştırıcısı

$$S(A) = \{g \in G | g(A) = A\}$$

kümesidir [3].

1.2.7 Tanım : Eğer G bir grup ve $g \in G$ ise, G 'de, g 'nin ***merkezleştiricisi*** (centraliser)

$$C_G(g) = \{h \in G | hg = gh\}$$

şeklinde tanımlanır. $C_G(g)$, G 'nin bir altgrubudur [1].

1.2.8 Tanım : Eğer G bir grup ve H, G 'nin bir alt grubu ise H 'nin G 'deki $N_G(H)$ ***normalleştiricisi*** (normalizer)

$$N_G(H) = \left\{ g \in G \middle| gHg^{-1} = H \right\}$$

'dir. $N_G(H)$, H 'yi normal altgrup kabul eden G 'nin en büyük alt grubudur [1].

1.3 *Riemann Yüzeyleri*

1.3.1 Tanım : S bağlantılı Hausdorff topolojik uzay olsun. S 'nin her s noktası $\mathbb{C}$ 'nin bir açık altkümesine homeomorf olan, açık bir U komşuluğuna sahipse, S 'ye bir ***yüzey*** denir.[1].

1.3.2 Tanım : S bağlantılı bir Hausdorff uzay olsun. Bir $A = \{(U_i, \Phi_i)\}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa A ailesine S için bir ***atlas*** denir.

i) Her bir $U_i \subset S$ açıktır ve $\bigcup_{i \in I} U_i = S$.

ii) Her bir W_i, $\mathbb{C}$ 'nin bir açık altkümesi olmak üzere, $\Phi_i : U_i \to W_i$ bir homeomorfizmadır [1].

1.3.3 Tanım : Eğer $s \in U_i$ ise (U_i, Φ_i) 'ye, s 'de bir ***pafta*** (chart) ve $z_i = \Phi_i(s)$ 'ye de s için bir ***yerel koordinat*** (local coordinate) denir [1].

1.3.4 Tanım : S bağlantılı Hausdorff topolojik uzayında;

(i) $\{U_j : j \in J\}$, S 'nin bir açık örtüsüdür

(ii) Her bir ϕ_j, U_j 'den, $\mathbb{C}$ 'nin bir açık altkümesine homeomorfizmadır

(iii) Eğer $U = U_i \cap U_j \neq \varnothing$ ise $\phi_i(\phi_j)^{-1} : \phi_j(U) \to \phi_i(U)$, $\phi_j(U)$ ve $\phi_i(U)$ düzlem kümeleri arasında analitik bir eşlemedir; koşullarını sağlayan $\{(\phi_j, U_j) : j \in J\}$ ailesi varsa, S uzayına bir ***Riemann yüzeyi*** denir [5].

1.3.5 Tanım : Bir S yüzeyinin ***örtme yüzeyi*** (covering surface), $\tilde{S}$ bir yüzey ve p 'de, $\tilde{S}$ 'dan S üzerine aşağıdaki özellikte olan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $(\tilde{S}, p)$ çiftine denir.

i) S 'nin her s noktası, $p^{-1}(U)$ 'nun her bağlantılı V bileşeni p ile U üzerine homeomorf olarak eşlenen ve D açık diskine homeomorf olan bir açık U komşuluğuna sahiptir [1].

1.3.6 Tanım : S yüzeyinin basit bağlantılı $(\tilde{S}, p)$ örtme yüzeyine, S için ***evrensel örtme yüzeyi*** (universal covering surface) denir [1].

1.4. *Doğrusal Dönüşümler*

$\mathbb{C}_\infty$ karmaşık düzleminin otomorfizmleri a,b,c,d $\in \mathbb{C}$ ve ad-bc≠0 olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklindeki dönüşümlerdir. Bu dönüşümlere Möbius dönüşümleri veya doğrusal dönüşümler denir. Bu dönüşümlerin kümesi, fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup PGL(2,$\mathbb{C}$) simgesiyle gösterilir. a,b,c,d $\in \mathbb{C}$, ad-bc≠0 olmak üzere

$$U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

dönüşümlerine de $\mathbb{C}_\infty$ 'un anti-otomorfizmleri denir. İki anti-otomorfizmin bileşkesi bir otomorfizmdir. Bir otomorfizm ile bir anti-otomorfizmin bileşkesi bir anti-otomorfizmdir [1].

1.4.1 Tanım : a,b,c,d $\in$IR, $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşüme ***gerçel katsayılı doğrusal dönüşüm*** denir. Bu dönüşümlerin kümesi PSL(2,IR) ile gösterilir.

$\Delta = ad - bc$ ifadesine ***dönüşümün belirteci*** denir.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \in \mathrm{IR} \quad \Delta = ad - bc > 0 \qquad (1.1)$$

$\Delta > 0$ olması, $\Delta = 1$ olması durumuna denktir. Çünkü T(z) 'nin katsayıları $\sqrt{\Delta}$ 'ya bölünerek

$$T(z) = \frac{(a/\sqrt{\Delta})z + (b/\sqrt{\Delta})}{(c/\sqrt{\Delta})z + (d/\sqrt{\Delta})}$$

elde edilir ve $(a/\sqrt{\Delta})(b/\sqrt{\Delta}) - (c/\sqrt{\Delta})(d/\sqrt{\Delta}) = 1$ olduğundan $T \in$PSL(2,IR) bulunur. PSL(2,IR),

$$z \mapsto az + b = \frac{(\sqrt{a})z + b/\sqrt{a}}{0.z + 1/\sqrt{a}} \quad (a, b \in \mathrm{IR}, a > 0)$$

ve $z \mapsto az$, $(a > 0)$ biçimindeki bütün dönüşümleri içerir. $PSL(2, \mathbb{R})$ 'nin bir önemli dönüşümü de

$$z \mapsto -1/z = \frac{0.z - 1}{1.z + 0}$$

'dir. Eğer $T(z)$, (1) 'deki dönüşümse

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{(acz\bar{z}+bd)+(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2}$$

dir. Eğer z=x+iy ve T(z)=u+iv ise

$$v = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} \tag{1.2}$$

ve $ad - bc > 0$ olduğundan T, $\mathbf{U}=\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$ 'nun bir otomorfizmidir.

Diğer durumda, $ad - bc < 0$ ise T, **U** 'yu konform ve bire-bir örten olarak alt-yarı düzleme eşler [1].

1.4.2 Tanım : Bir G grubu Ω kümesi üzerinde hareket ederse, yani eğer $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $g(\alpha) = \beta$ olacak biçimde bir $g \in G$ varsa, G 'ye ***geçişlidir*** (transitively) denir [1].

1.4.3 Teorem :

(i) $PSL(2, \mathbb{R})$, **U** üzerinde geçişlidir.

(ii) $PSL(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde iki (double) geçişlidir [1].

1.4.4 Tanım : $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)}$$

değerine bu dört noktanın ***çapraz oranı*** denir [6].

1.4.5 Teorem : $(z_0, z_1; z_2, z_3)$ ve $(w_0, w_1; w_2, w_3)$, $\mathbb{C}_\infty$ 'da farklı öğeler olsunlar. $T(z_j) = w_j$ $(j = 0,1,2,3)$ özelliğinde bir $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ olması için gerek ve yeter koşul $(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3)$ olmasıdır [1].

1.4.6 Tanım : G herhangi bir grup olsun. G 'deki g ve h öğeleri için $g = aha^{-1}$ olacak biçimde bir $a \in G$ varsa, g ve h 'ye G 'de ***eşlenik*** (konjuge) denir.

1.4.7 Tanım : Bir $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ***dönüşümünün sabit noktası*** diye,

$$z=\frac{az+b}{cz+d}$$

eşitliğini sağlayan z noktasına denir [6].

1.4.8 Teorem : Bir doğrusal dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır.

İspat :

$$z=\frac{az+b}{cz+d}$$

eşitliğinden $cz^2+(d-a)z-b=0$ bulunur. Eğer $c\neq 0$ ise

$$z_{1,2}=\frac{(a-d)\pm\sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c} \tag{1.3}$$

ve buradan

$$z_{1,2}=\frac{(a-d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}.$$

$(a+d)^2-4$ değerine bağlı olarak yukarıdaki denklemin en fazla iki sabit noktası vardır. Eğer $c=0$ ise

$$T(z)=\frac{az+b}{d}$$

ve$\Delta=a.d\neq 0$ olur. Buradan $a\neq 0,\ d\neq 0$ bulunur.

i) $a=d$ ise $T(z)=z+\frac{b}{d}$ olur ki bu durumda tek sabit nokta ∞ noktasıdır.

ii) $a\neq d$ ise $z=\frac{b}{d-a}$ ikinci bir sabit noktadır.

Bu şekilde $c\neq 0$ ve $c=0$ durumlarında (1.3) denkleminin en fazla iki sabit noktası vardır. (1.3) denklemi özdeş olarak sıfıra eşit olursa sonsuz tane kökü vardır. Bu b=0, c=0, a=d olduğunda, yani $T(z)=z$ olduğunda mümkün olur [6].

1.4.9 Sonuç : Sabit noktası ikiden fazla olan tek doğrusal dönüşüm birim dönüşümdür [6].

1.4.10 Teorem : PSL(2,$\mathbb{C}$) grubu çemberi çembere resmeder [1].

1.4.11 Tanım : $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünde a+d değerine ***dönüşümün izi*** (trace) denir. İzin mutlak değerine bağlı olarak PSL(2,IR) 'nin öğeleri gruplara ayrılır;

1.Parabolik öğeler : $(|a+d|=2)$. T, $\alpha \in \mathrm{IR} \cup \{\infty\}$ sabit noktası ile bir parabolik öğe olsun. 1.4.3(i) Teoreminden $S(\alpha)=\infty$ olacak biçimde $S \in PSL(2,\mathrm{IR})$ vardır. Bu dönüşüm $S: z \to \dfrac{1}{z-\alpha}$ olur. Buradan STS^{-1}, ∞ sabit noktası ile parabolik öğedir ve

$$W = STS^{-1}: z \mapsto z+t \qquad (t \in \mathrm{IR} \backslash \{0\}).$$

$V(z)=(1/|t|)z$. $VWV^{-1}: z \mapsto z \pm 1$, buradaki işaret, t 'nin $t>0$ veya $t<0$ olup olmamasına bağlıdır. Basit bir hesaplama $z \mapsto z+1$ ile $z \mapsto z-1$ 'nin $PSL(2,\mathrm{IR})$ 'de eşlenik olmadıklarını gösterir. $PSL(2,\mathrm{IR})$ 'de biri $z \mapsto z+1$, diğeri $z \mapsto z-1$ dönüşümüne eşlenik olmak üzere, parabolik öğelerin iki eşlenik sınıfı vardır.

2.Hiperbolik öğeler : $(|a+d|>2)$. T, $\alpha,\beta \in \mathrm{IR} \cup \{\infty\}$ sabit noktaları ile hiperbolik olsun. 1.4.3(ii) Teoreminden α 'yı 0 'a ve β 'yı ∞ 'a eşleyen $PSL(2,\mathrm{IR})$ 'nin bir $S(z)=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ öğesi vardır. Buradan

$$STS^{-1} = U_\lambda \qquad \lambda \in \mathrm{IR} \backslash \{0,1\}.$$

Eğer $B(z)=-1/z$ ise $BU_\lambda B^{-1}=U_{\lambda^{-1}}$ 'dir. Böylece $PSL(2,\mathrm{IR})$ 'de U_λ, $U_{\lambda^{-1}}$ 'e eşleniktir. Bununla birlikte U_λ, eğer $\kappa \neq \lambda$ veya λ^{-1} ise U_κ 'ya eşlenik değildir. Böylece $PSL(2,\mathrm{IR})$ 'nin her hiperbolik öğesi U_λ, $(\lambda>0)$ şeklindeki tek bir öğeye eşleniktir.

3. Eliptik öğeler : $(|a+d|<2)$. T, $\xi \in U$ sabit noktası ile bir eliptik öğe olsun. $\xi = \psi + i\zeta$ olmak üzere, 1.4.3(i) Teoreminden $S(z)=\dfrac{z-\psi}{\zeta}$ ve buradan $S(\xi)=i$ olacak biçimde $S \in PSL(2,\mathrm{IR})$ vardır. $S(\bar{\xi})=\bar{i}=-i$. Böylece $W=STS^{-1}$, sabit noktaları i ve -i olan eliptik bir öğedir. Buradan

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = \lambda\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

W, $\mathrm{IR} \cup \{\infty\}$ 'u kendi üzerine eşlediğinden $W(\alpha) \in \mathrm{IR}$ olacak biçimde $\alpha \in \mathrm{IR}$ bulabiliriz. Buradan

$$\left|\frac{W(\alpha)-i}{W(\alpha)+i}\right| = \left|\frac{\alpha-i}{\alpha+i}\right| = 1$$

ve böylece $\lambda = e^{i\theta}\,(0 \le \theta < 2\pi)$ bulunur. Buradan da T, W 'ye eşleniktir.

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i}=e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right), \qquad (0\leq\theta<2\pi) \qquad (1.4)$$

(1.4) formülünü, PSL(2,IR) 'de daha basit hale getiremeyiz. Ancak eğer

$$\frac{z-i}{z+i}=z', \frac{W(z)-i}{W(z)+i}=w'$$

ise, $z', w' \in D$, D birim disk olmak üzere, $w'=e^{i\theta}z'$ haline gelir. Böylece, PSL(2,$\mathbb{C}$) içinde T, θ açısı boyunca birim diskin bir dönmesine eşleniktir [1].

1.4.12 Lemma : Eğer $ST=TS$ ise S, T 'nin sabit noktalar kümesini kendi üzerine resmeder.

İspat : p, T 'nin bir sabit noktası olsun. O zaman

$$S(p)=ST(p)=TS(p)=T(S(p))$$

böylece T, $S(p)$ 'yi sabit bırakır [1].

1.4.13 Teorem : PSL(2,IR) 'nin birimden farklı öğelerinin uyumlu (commute) olmaları için gerekli ve yeterli koşul aynı sabit nokta kümesine sahip olmalarıdır [1].

1.4.14 Teorem : PSL(2,IR) 'nin bir hiperbolik (parabolik,eliptik) öğesinin PSL(2,IR) 'deki merkezleştiricisi, birim öğeyle beraber, sabit nokta kümeleri aynı olan bütün hiperbolik (parabolik,eliptik) öğelerden oluşur [1].

1.4.15 Tanım : p merkezli ve r yarıçaplı bir Q çemberini ele alalım. z, karmaşık düzlemde p 'den farklı bir nokta olsun. pz yarı doğrusu üzerinde $|z-p||w-p|=r^2$ koşulunu sağlayan w noktasına, z noktasının Q çemberine göre ***invers noktası*** denir. Bu şekilde düzlemdeki her noktaya, verilen bir çembere göre invers olan noktasını karşılık getiren dönüşüme ***inversiyon*** denir ve I_Q ile gösterilir.

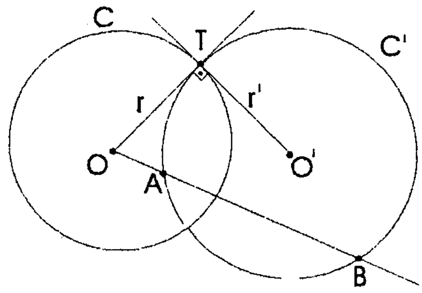
O halde merkezi p, yarıçapı r olan bir çembere göre z noktasının inversi

$$w=k+\frac{r^2}{\overline{z}-\overline{p}}$$

'dir. Verilen bir çembere göre inversiyon denklemini elde etmek için çember denkleminde z yerine w konulup, w çekilir. Bir çembere göre inversiyonun sabit noktaları bu çember üzerindeki noktalardır [1].

1.4.16 Teorem : Bir çembere göre bir inversiyon bu çembere dik bir çemberi sabit bırakır.

İspat :



Şekil 1.1

$C \perp C'$ olsun. $|OA||OB| = r^2 = |OT|^2$. O halde A ile B, C' çemberinin birbirinin inversi olan noktalardır. Yani C' çemberinin C çemberine göre inversi kendisidir [7,8].

1.4.17 Tanım : Çember denkleminde eğer A=0 olursa denklem, Öklid doğrusu denklemi olur. $Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$ ve buradan z yerine w yazılırsa

$$w = \frac{-\overline{B}\overline{z} - C}{B}$$

denklemi bulunur. Bu denkleme ***doğruya göre yansımanın denklemi*** denir ve yansımanın sabit noktaları, doğrunun üzerindeki noktalardır [1,6].

1.4.18 Teorem : Q bir çember ve $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ iken $T(Q) = Q'$ olsun.

$$I_{Q'} = TI_QT^{-1}$$

dir.

İspat : Eğer $z \in Q'$ ise $I_{Q'}(z) = z$ 'dir. $T^{-1}(z) \in Q$ olduğundan $I_QT^{-1}(z) = T^{-1}(z)$ yazabiliriz. Eğer $S = TI_QT^{-1}I_{Q'}$ tanımlarsak, $\forall z \in Q'$ için

$$S(z) = TI_QT^{-1}I_{Q'}(z) = TI_QT^{-1}(z) = TT^{-1}(z) = z$$

olduğu görülür. Böylece S, Q' 'yü sabitler. İki otomorfizmanın ve iki anti-otomorfizmanın birleşimi yine bir otomorfizma olduğundan S, $\mathbb{C}_\infty$ 'un bir otomorfizmasıdır. Böylece $S \in PGL(2, \mathbb{C})$. S, Q' 'yü sabit bıraktığından $\mathbb{C}_\infty$ 'un da en az üç noktasını sabit bırakır. Fakat üç noktayı sabit bırakan dönüşüm birim dönüşüm olduğundan, S=I ve buradan

$$TI_QT^{-1} = I_{Q'}^{-1} = I_{Q'}$$

bulunur [1].

1.4.19 Tanım : B, $\mathbb{C}$ 'de bir bölge olmak üzere $f:B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1, γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ resim eğrileri de aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında ***konformdur*** denir [9].

1.4.20 Teorem : f bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 noktasında konformdur [9].

1.4.21 Teorem : $\mathbb{C}_\infty$'un her T otomorfizmi, bir konform homeomorfizmdir [1].

1.5 *Latisler*

1.5.1 Tanım : f, kompleks düzlemde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z+w) = f(z)$$

ise w kompleks sayısına f ***'nin periyodu*** denir. Eğer $w \neq 0$ ise ***f 'ye periyodiktir*** denir. f 'nin periyodlarının kümesi Ω_f ile gösterilir [1].

1.5.2 Teorem: Ω, $\mathbb{C}$ 'nin ayrık bir alt grubu olsun. Ω aşağıdakilerden biridir.

i) $\Omega = \{0\}$.

ii) Sabit bir $w_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\Omega = \{nw_1 | n \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir.

iii) w_1 ve w_2, IR üzerinde lineer bağımsız olmak üzere sabit $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ noktaları için $\Omega = \{mw_1 + nw_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir [1].

1.5.3 Tanım : 1.5.2(iii) Teoremindeki bir Ω grubuna ***latis*** (lattice) denir ve $\{w_1, w_2\}$, Ω için bir taban olmak üzere $\Omega\{w_1, w_2\}$ ile gösterilir [1].

1.5.4 Teorem : Bir Ω latisi verilsin. z_1 ve z_2, $\mathbb{C}$ 'nin herhangi iki noktası olsun. Eğer $z_1 - z_2 \in \Omega$ ise, z_1 ve z_2 'ye mod Ω ya göre kongruenttir denir. mod Ω kongruentlik bağıntısı $\mathbb{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Denklik sınıfları da Ω 'nın $\mathbb{C}$ toplam grubundaki $z + \Omega$ kosetleridir [1].

1.5.5 Tanım : $\mathbb{C}$ 'nin kapalı ve bağlantılı bir P alt kümesi için eğer;

i) Her $z \in \mathbb{C}$ noktası P içindeki bir noktaya kongruenttir,

ii) P 'nin içinde birbirine kongruent iki nokta yoktur,

koşulları sağlanırsa P 'ye Ω için bir ***temel bölgedir*** denir [1].

1.5.6 Tanım : Bir Ω latisi için

$$D(\Omega) = \{ z \in \mathbf{C} \| z| \le |z - \omega|, \ \forall \omega \in \Omega \text{ için} \}$$

kümesine ***Dirichlet bölge*** denir. $0 \in D(\Omega)$ açıkça görülür ve Ω ayrık olduğundan $D(\Omega)$, 0 'ın bir komşuluğunu içerir. $\forall \omega \in \Omega \setminus \{0\}$ için $\{ z \in \mathbf{C} \| z| \le |z - \omega| \}$ kümesi, 0 ve ω 'yi birleştiren doğru parçasının orta dikmesi tarafından sınırlanmış bir kapalı yarı-düzlemdir. Böylece $D(\Omega)$ her biri konveks olan yarı-düzlemlerin arakesiti olduğundan, konvekstir [1].

1.5.7 Teorem: $D(\Omega)$, Ω için bir temel bölgedir [1].

1.5.8 Teorem : P_1 ve P_2 , Ω için iki temel bölge ise $\mu(P_1) = \mu(P_2)$ 'dir.

İspat : Eğer Q_j , $P_j (j = 1,2)$ 'nin içi ise $\mu(P_j) = \mu(Q_j)$ 'dir. Şimdi

$$P_1 \supseteq P_1 \cap \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega(Q_2) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (P_1 \cap \omega(Q_2)).$$

Q_2 bir temel bölgenin içi olduğundan $P_1 \cap \omega(Q_2)$ kümeleri ayrıktırlar. Buradan

$$\mu(P_1) \ge \sum_{\omega \in \Omega} \mu(P_1 \cap \omega(Q_2)) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu((-\omega)(P_1) \cap Q_2)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega(P_1) \cap Q_2)$$

ω, Ω üzerinde değiştiğinden $-\omega$ 'de Ω üzerinde değişir. Şimdi P_1 bir temel bölge olduğundan

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega(P_1) = \mathbf{C}$$

ve buradan

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega(P_1) \cap Q_2) = Q_2.$$

Böylece

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega(P_1) \cap Q_2) \ge \mu(Q_2) = \mu(P_2)$$

olur. Buradan da

$$\mu(P_1) \ge \mu(P_2)$$

bulunur. P_1 ve P_2 'nin yerleri değiştirilerek $\mu(P_2) \ge \mu(P_1)$ bulunur. Böylece $\mu(P_1) = \mu(P_2)$ elde edilir [1].

1.5.9 Teorem : Ω , $\mathbf{C}$ 'de bir latis ise $\mathbf{C}/\Omega$ bir Riemann yüzeyidir.

İspat : Önce $\mathbf{C}/\Omega$ 'nın Hausdorff olduğunu gösterelim. $p: \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Omega$, $z \mapsto [z] = z + \Omega$ 'nın izdüşüm dönüşümü olmak üzere $U \subseteq \mathbf{C}/\Omega$ 'nın açık olması için gerek ve yeter koşulun $p^{-1}(U)$'nun $\mathbb{C}$ 'de açık olması olduğunu hatırlayalım. p açıktır ve süreklidir.

$s_1=[z_1]$ ve $s_2=[z_2]$, $\mathbb{C}\ /\Omega$ 'da farklı noktalar olsunlar. Ω ayrık olduğundan

$$\eta=\inf_{\omega\in\Omega}|z_2-(z_1+\omega)|>0$$

vardır. Böylece V_1 ve V_2 sırasıyla z_1, z_2 merkezli ve $\eta/2$ yarıçaplı açık diskler olsunlar. $\forall\omega\in\Omega$ için $(V_1+\omega)\cap V_2=\varnothing$ olduğunu gösterelim. Eğer değilse $z+\omega\in V_2$ sağlayan $z\in V_1$ ve $\omega\in\Omega$ vardır. Buradan üçgen eşitsizliğinden

$$|z_2-(z_1+\omega)|\le|z_2-(z+\omega)|+|(z+\omega)-(z_1+\omega)|$$

$$=|z_2-(z+\omega)|+|z-z_1|<\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}=\eta$$

bulunur ki bu η 'nün tanımı ile çelişkidir. p açık olduğundan $p(V_1)$ ve $p(V_2)$, $\mathbb{C}\ /\Omega$ 'da s_1 ve s_2 'nin ayrık açık komşuluklarıdır. Böylece $\mathbb{C}\ /\Omega$ bir Hausdorff uzaydır.

Şimdi $\mathbb{C}\ /\Omega$ üzerinde bir atlas yapısı oluşturalım. Ω ayrık olduğundan

$$\delta=\inf_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}|\omega|>0$$

vardır. Eğer $\mathcal{V}$, $\mathbb{C}$ 'de uzunluğu en fazla $\delta/2$ olan bütün açık disklerin kümesi ise

i) $\forall V\in\mathcal{V}$ ve $\omega\in\Omega\setminus\{0\}$ için $V\cap(V+\omega)=\varnothing$;

ii) Eğer $V, V'\in\mathcal{V}$ ise V, V' 'nün $V'+\omega$ ($\omega\in\Omega$) kaydırılmalarından en fazla biri ile boş olmayan bir arakesite sahiptir.

Üçgen eşitsizliği (i) 'yi hemen verir. (ii) için ise $w_1, w_2\in\Omega$ ile $z_1\in V\cap(V'+\omega_1)$ ve $z_2\in V\cap(V'+\omega_2)$ olduğunu varsayalım. $z_1', z_2'\in V'$ ile $z_1=z_1'+\omega_1$ ve $z_2=z_2'+\omega_2$ dersek Ω 'nın $\omega_1-\omega_2$ öğesi

$$|\omega_1-\omega_2|=|(z_1-z_1')-(z_2-z_2')|=|(z_1-z_2)-(z_1'-z_2')|$$

$$\le|z_1-z_2|+|z_1'-z_2'|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$$

sağlar. Böylece δ 'nın tanımından $w_1=w_2$ bulunur.

(i) 'den p 'nin V 'ye p_V kısıtlanması bire-birdir. p sürekli olduğundan p_V 'de süreklidir. Bundan başka p_V açıktır. Çünkü eğer V 'nin bir A altkümesi V 'de rölatif açıksa, V açık olduğundan A 'da $\mathbb{C}$ de açıktır. Böylece $\mathbb{C}\ /\Omega$ 'da p açık olduğundan $p_V(A)=p(A)$ 'da açıktır. Buradan $p_V(V)=p(V)$ rölatif açıktır. Böylece p_V, V 'nin $p(V)(=U_V)$ görüntüsü üzerine bir homeomorfizmdir. Böylece $\Phi_V=p_V^{-1}:U_V\to V$

bir homeomorfizmdir. $V \in \mathcal{V}$ ile bütün (U_V, Φ_V) paftalarının kümesi $\mathbf{C}/\Omega$ için bir atlastır. Böylece $\mathbf{C}/\Omega$ bir yüzeydir.

Şimdi bu atlasın analitik olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $U_V \cap U_{V'} \neq \emptyset$ özelliğinde (U_V, Φ_V) ve $(U_{V'}, \Phi_{V'})$ paftaları olsun.

$$\Phi_{V'} \circ \Phi_V^{-1} : \Phi_V(U_V \cap U_{V'}) \to \Phi_{V'}(U_V \cap U_{V'})$$

fonksiyonunun analitik olduğunu göstermeliyiz. $z \in \Phi_V(U_V \cap U_{V'})$ ve $z' = (\Phi_{V'} \circ \Phi_V^{-1})(z)$ ise $p_{V'}(z') = \Phi_V^{-1}(z) = p_V(z)$ 'dir. Böylece $p(z') = p(z)$ ve buradan bir $\omega \in \Omega$ için $z = z' + \omega$ 'dir. $z \in V$ ve $z' \in V'$ olduğundan $V \cap (V' + \omega) \neq \emptyset$ olur. ω, (ii) 'den z 'li bağımsızdır. Böylece bir sabit $\omega \in \Omega$ için $z' = z - \omega$ 'dir. z', z 'nin bir analitik fonksiyonudur. Buradan sonuca varılır [1].

2. HİPERBOLİK METRİK

2.1 *Hiperbolik Metrik*

Diferansiyellenebilir bir γ yolunun hiperbolik uzunluğunu tanımlayalım. Öncelikle, IR^2 'de bir parçalı diferansiyellenebilir β yolunun Öklidiyen uzunluğunun tanımının nasıl olduğunu hatırlayalım. Varsayalım ki $I=[0,1]$, x ve y parçalı diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\beta: I \to IR^2$, $\beta(t)=(x(t),y(t))$ şeklinde verilsin. $e(\beta)$ öklidiyen uzunluğu

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

formülü vasıtasıyla tanımlanır. Kesin bir ifadeyle

$$e(\beta)=\int_0^1 \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}dt$$

şeklindedir. Burada pozitif karekök alınır.

($\alpha:[0,1]\to[0,1]$ bir monoton fonksiyon, $t=\alpha(s)$ koyarak parametrizasyonu değiştirmek istersek $x_1 = x\circ\alpha, y_1 = y\circ\alpha$ olmak üzere x ve y yerine x_1 ve y_1 değerleri yerleştirilirse $(x(t),y(t))=(x_1(s),y_1(s))$ uzunluk için aynı değere ulaşılır.)

U 'da hiperbolik uzunluğu

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}=\frac{|dz|^2}{y^2} \quad (z=x+iy)$$

formülü vasıtasıyla tanımlarız. Kesin bir ifadeyle eğer $\gamma: I \to \mathbf{U}$, $\gamma(t)=x(t)+iy(t)=z(t)$ ile bir parçalı diferansiyellenebilir yol ise $h(\gamma)$ hiperbolik uzunluğu

$$h(\gamma)=\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}dt}{y}=\int_0^1\frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|dt}{y}$$

ile verilir [1].

2.1.1 Teorem : Eğer $T \in PSL(2,IR)$ ise $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$. Hiperbolik uzunluk $PSL(2,IR)$ 'nin dönüşümleri altında değişmez (invariant) kalır.

İspat :

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in IR,\ ad-bc=1).$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Ayrıca eğer $z = x+iy$, $T(z) = u+iv$ ise (1.2) formülünden

$$v = \frac{y}{|cz+d|^2},$$

ve buradan

$$\left|\frac{dT}{dz}\right| = \frac{v}{y}. \tag{2.1}$$

Böylece

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dT}{dt}\right|dt}{v} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dT}{dz}\frac{dz}{dt}\right|dt}{v} = \int_0^1 \frac{v\left|\frac{dz}{dt}\right|dt}{yv} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|dt}{y} = h(\gamma)[1].$$

2.1.2 Tanım : z ve w gibi iki noktayı birleştiren h-doğrunun bu noktalar arasında kalan yay parçasına, ***hiperbolik doğru parçası*** veya ***h-doğru parçası*** denir ve $[z,w]$ ile gösterilir. 2.1.1 Teoreminden $PSL(2,IR)$ 'nin elemanlarının H-doğru parçalarını H-doğru parçalarına eşlediği görülür.

İmajiner eksen üzerindeki ia, ib gibi iki noktayı birleştiren H-doğru parçasının imajiner eksenin bir parçası olduğunu göstermek istiyoruz. $\kappa: I \to \mathbf{U}$ bu parçayı temsil etsin. Böylece $\kappa(t) = (0, y(t))$ 'dir. Burada $dy/dt > 0$, $y(0) = a$, $y(1) = b$ 'dir. Buradan

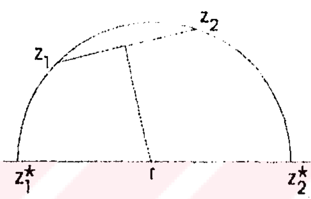
$$h(\kappa) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}dt}{y(t)} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|dt}{y(t)} = \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}dt}{y(t)} = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}.$$

Eğer $\tilde{\kappa}: I \to \mathbf{U}$, $\tilde{\kappa}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ ile ia 'yı ib 'ye birleştiren başka bir parçalı diferansiyellenebilir yol ise

$$h(\tilde{\kappa}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2\right)}dt}{\tilde{y}(t)} \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{d\tilde{y}}{dt}\right|dt}{\tilde{y}(t)} \geq \int_0^1 \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}dt}{\tilde{y}(t)} = h(\kappa).$$

Eşitlik sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $d\tilde{x}/dt = 0$ ve $d\tilde{y}/dt \geq 0$ olmasıdır. $\tilde{\kappa}$ parçalı diferansiyellenebilir olduğundan ia 'yı ib 'ye birleştiren Öklidiyen doğru parçasıdır.

Aynı hesaplama eğer z_1 ve z_2 aynı gerçel kısma sahip iseler, onları birleştiren tek bir hiperbolik doğru parçasının, onları birleştiren tek bir Öklidiyen doğru parçasıyla aynı olduğunu gösterir.



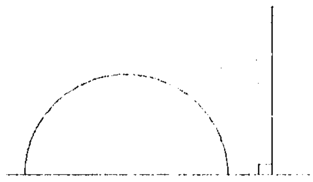
Şekil 2.1

Şimdi z_1 ve z_2 aynı gerçel kısma sahip olmasınlar. Onları birleştiren Öklidiyen doğrunun orta dikmesi reel ekseni Şekil 2.1 'deki gibi r noktasında keser. Burada r, z_1 ve z_2 'den geçen IR 'ye dik olan bir Öklidiyen çemberin merkezidir.

Varsayalım ki Q, IR 'yi z_1^*, z_2^* 'de kessin. 1.4.3(ii) Teoreminden $T(z_1^*) = 0$, $T(z_2^*) = \infty$ olacak biçimde $T \in PSL(2,\mathrm{IR})$ vardır ve 1.4.10, 1.4.21 teoremlerden $T(Q)$ 'nun imajiner eksen olduğu görülür. Böylece $T(z_1)$ ve $T(z_2)$ 'yi birleştiren H-doğru parçası onları birleştiren imajiner eksenin parçasıdır. Böylece 2.1.1 teoreminden z_1 ve z_2 'yi birleştiren tek bir H-doğru parçası vardır. Bu doğru parçasına, **U** 'da ***Q* 'nun yayı** denir [1].

2.1.3 Teorem : **U** 'da H-doğru parçaları merkezi gerçel eksen üzerinde olan yarı-çemberlerin yayları veya gerçel eksene dik Öklidiyen doğruların parçalarıdır [1].

2.1.4 Tanım : Merkezi gerçel eksen üzerinde hareket eden çemberlere veya gerçel eksene dik Öklidiyen doğrulara ***hiperbolik doğrular*** veya ***H-doğrular*** diyeceğiz. Gerçel eksene dik H-doğrular ∞ 'da bir son noktaya sahip olduklarından her H-doğru $IR \cup \{\infty\}$ 'da iki son noktaya sahiptir. H-doğrular 2.2 Şekilde gösterilmiştir [1].



Şekil 2.2

2.1.5 Teorem : $PSL(2, IR)$ tüm hiperbolik doğruların kümesi üzerinde geçişli hareket eder [1].

2.1.6 Tanım : **U** 'nun z,w noktaları arasındaki ρ ***hiperbolik uzaklığı***, $[z, w]$ doğru parçasının h-uzunluğuna denir ve $\rho(z, w)$ ile gösterilir. Bir H-doğru parçası, iki nokta arasındaki en kısa uzaklıktır sonucu **U** 'yu bir metrik uzay gibi tanımlar. ρ-metriği ile üst yarı düzlem, hiperbolik düzlemin bir modelidir [1].

2.1.7 Tanım : Ortak hiperbolik noktası olmıyan iki hiperbolik doğruya ***paralel doğrular*** denir [1].

2.1.8 Teorem : $\forall T \in PSL(2, IR)$ ve $z, w \in U$ için $\rho(T(z), T(w)) = \rho(z, w)$ [1].

2.2 *H-uzaklık ve H-alan*

Eğer ia, ib (b>0) imajiner eksen üzerinde iki nokta iseler $\rho(ia, ib) = \ln(b/a)$ olduğunu yukarıda gösterdik. Eğer z ile w, **U** 'da herhangi iki nokta iseler $\rho(z, w)$ 'yı doğrudan hesaplamak daha zor olacağından, bu bölümde hiperbolik uzaklık için basit bir formül vereceğiz.

2.2.1 Lemma : $z, w \in U (z \neq w)$ ve z ile w 'yi birleştiren Q, H-doğrusunun $IR \cup \{\infty\}$ 'daki z^*, w^* son noktalarını öyle bir seçelim ki z, z^* ile w arasında olsun. $T(z^*) = 0$, $T(w^*) = \infty$, $T(z) = i$ olacak biçimde tek bir $T \in PSL(2, IR)$ vardır. Ayrıca $T(w) = ri$ $(r > 1)$ ve $\rho(z, w) = \ln r$.

İspat : Varsayalım ki ne z^* ne de w^*, ∞ olsun. $z^* > w^*$ alabiliriz. Eğer

$$S(\zeta) = \frac{\zeta - z^*}{\zeta - w^*}$$

ise $S \in PSL(2,IR)$, $S(z^*)=0$, $S(w^*)=\infty$. Böylece S, Q 'yu imajiner eksene eşler. Eğer $S(z)=ki$ ise

$$T = U_{1/k} \circ S$$

istenen dönüşümdür ($U_\lambda(z)=\lambda z$ olduğunu hatırlayalım). Bu dönüşüm bir tektir ve z, z^* ile w arasında hareket ettiğinden $T(z)=i$, $T(z^*)=0$ ve $T(w)$ arasında hareket eder. Böylece $T(w)=ri$ $(r>1)$ 'dir. 2.1.8 teoreminden $\rho(z,w)=\rho(T(z),T(w))=\rho(i,ri)=\ln r$ bulunur [1].

2.2.2 Tanım : $\forall T \in PSL(2,IR)$ için $g(T(z_1),\ldots,T(z_n))=g(z_1,\ldots,z_n)$ oluyorsa $\mathbf{g(z_1,\ldots,z_n)}$ $(z_i \in \mathbf{U})$ ***fonksiyonuna H-değişmez*** (invariant) denir. Örneğin $\rho(z,w)$, 2.1.8 teoreminden bir H-değişmezdir [1].

2.2.3 Lemma : (i)Eğer z, w, z^*, w^* 2.2.1 lemmadaki gibi tanımlı iseler

$$\eta(z,w)=(w,z^*;z,w^*)$$

çapraz oranı bir H-değişmez (invariant) 'dir.

(ii) $\forall z,w \in \mathbf{U}$ için

$$\tau(z,w)=\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$$

bir H-değişmezdir.

İspat : (i)$PSL(2,IR)$, H-doğruları koruduğundan, $T(z)$ ve $T(w)$ 'yı birleştiren hiperbolik doğru $T(z^*)$ ve $T(w^*)$ son noktalarına sahiptir ve Möbius dönüşümler altında çapraz oranın değişmezliğinden (Teorem 1. 4. 5) sonuç görülür.

(ii) $|T(z)-T(w)|=|z-w||T'(z)T'(w)|^{1/2}$

formülünden kolayca ispatlanır [1].

2.2.4 Teorem : $z,w \in \mathbf{U}$ olmak üzere $\rho(z,w)=\ln\left\{\dfrac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$ 'dir.

İspat: z,w,r, 2.2.1 lemmada tanımlanan gibi iseler

$$\eta(z,w)=(ri,0;i,\infty)=r,$$

ve buradan

$$\rho(z,w)=\ln\eta(z,w).$$

Ayrıca

$$\tau(z,w)=\tau(i,ri)=\frac{r-1}{r+1}=\frac{e^{\rho(z,w)}-1}{e^{\rho(z,w)}+1} \qquad (2.2)$$

ve buradan

$$\rho(z,w)=\ln\left\{\frac{1+\tau(z,w)}{1-\tau(z,w)}\right\}=\ln\left\{\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$$

şeklinde hiperbolik uzaklık için açık bir formüldür [1].

2.2.5 Teorem : $z,w\in\mathbf{U}$ olmak üzere $\sinh^2\frac{1}{2}\rho(z,w)=\dfrac{|z-w|^2}{4\,\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)}$ 'dir.

İspat :

$$\tanh\frac{u}{2}=\frac{e^u-1}{e^u+1}$$

ve

$$\sinh^2\frac{u}{2}=\frac{\tanh^2(u/2)}{1-\tanh^2(u/2)}$$

özdeşliklerini kullanarak (2.2) formülünden

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(z,w)=\frac{\tau(z,w)^2}{1-\tau(z,w)^2}=\frac{|z-w|^2}{|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\begin{aligned}|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2&=(z-\overline{w})(\overline{z}-w)-(z-w)(\overline{z}-\overline{w})\\&=-(z-\overline{z})(w-\overline{w})=4\,\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w).\end{aligned}$$

Böylece

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(z,w)=\frac{|z-w|^2}{4\,\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)}\quad[1]. \tag{2.3}$$

2.2.6 Örnek : i merkezli ve δ yarıçaplı hiperbolik çemberi bulmak isteyelim. $z=x+iy$ olmak üzere

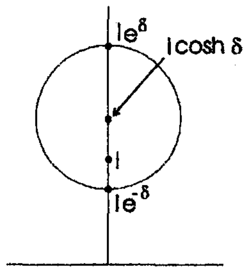
$$C=\{z|\rho(z,i)=\delta\}$$

$$\left\{z\left|\sinh^2\frac{1}{2}\rho(z,i)=\sinh^2\frac{1}{2}\delta\right.\right\}=\left\{z\left||z-i|^2=4y\sinh^2\frac{1}{2}\delta\right.\right\}$$

$$=\left\{z\left|x^2+y^2+1=2y(\sinh^2\frac{1}{2}\delta+1)=2y\cosh\delta\right.\right\}$$

$$=\left\{z\left|x^2+(y-\cosh\delta)^2=\cosh^2\delta-1=\sinh^2\delta\right.\right\}$$

bulunur. Şekil 2.3 'te görüldüğü gibi $(0, \cosh\delta)$ merkezli ve $\sinh\delta$ yarıçaplı bir Öklidiyen çemberdir.



Şekil 2.3

1.4.10 teoreminden $PSL(2,\mathbb{R})$, **U** 'daki Öklidiyen çemberleri, **U** 'da Öklidiyen çemberlere resmeder ve benzer olarak H-çemberleri de, H-çemberlere resmeder. 1.4.3(i) teoreminden her H-çemberin bir Öklidiyen çember olduğu görülür. Ayrıca her Öklidiyen çember bir H-çemberdir. Bütün açık Öklidiyen disklerin ailesi açık hiperbolik disklerin ailesiyle çakışık olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz [1].

2.2.7 Teorem : Hiperbolik metriğin kondurduğu (induced) topoloji ile Öklidiyen metriğin kondurduğu topoloji aynıdır [1].

2.2.8 Tanım : Eğer E, **U** 'nun ölçülebilir bir altkümesi ise $\mu(E)$ ile tanımladığımız **E**' ***nin hiperbolik alanı*** (H-alan)

$$\mu(E) = \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

integrali varsa, integralin değerine denir [1].

2.2.9 Teorem : $\forall T \in PSL(2,\mathbb{R})$ için $\mu(T(E)) = \mu(E)$. Böylece H-alan $PSL(2,\mathbb{R})$ 'nin dönüşümleri altında değişmez kalır.

İspat : $z = x + iy$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \; ad-bc=1,$$

ve $w = T(z) = u + iv$ olsun. Cauchy-Riemann denklemlerini kullanarak Jakobiyanı hesaplayabiliriz.

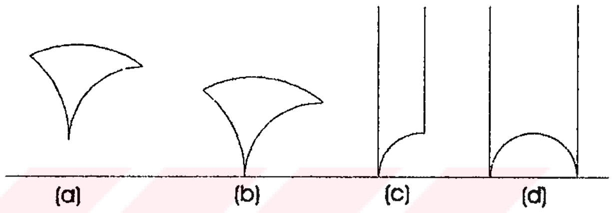
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{dT}{dx}\right|^2 = \left|\frac{dT}{dz}\right|^2 = \frac{1}{|cz+d|^4}.$$

Böylece

$$\mu(T(E))=\iint_{T(E)}\frac{dudv}{v^2}=\iint_E\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{dxdy}{v^2}=\iint_E\frac{1}{|cz+d|^4}\frac{|cz+d|^4}{y^2}dxdy=\mu(E)$$

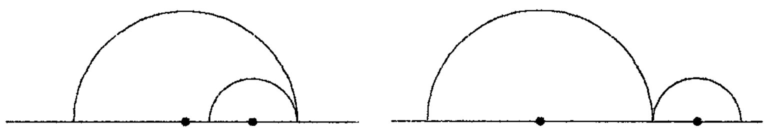
bulunur [1].

2.2.10 Tanım : n tane h-doğru parçası ile sınırlanan, **U** 'nun $\mathbf{C}_\infty$ 'daki kapanışında bulunan bir kapalı kümeye ***n kenarlı hiperbolik poligon*** denir. Eğer iki doğru parçası kesişirlerse kesişimin ortak noktasına ***poligonun köşesi*** denir. Örneğin, Şekil 2.4 'te hiperbolik üçgenin 4 türü gösterilmiştir. Üçgenin köşeleri $\mathrm{IR}\cup\{\infty\}$ 'da duruma göre 0, 1, 2, 3 tane olabilir [1].



Şekil 2.4

2.2.11 Tanım : U 'da iki ***H-doğru arasındaki açı***, doğruların kesişim noktasındaki teğetleri arasındaki açı olarak tanımlanır. İki H-doğrunun kesiştikleri nokta $\mathrm{IR}\cup\{\infty\}$ 'un üzerinde ise bu iki doğru arasındaki açı sıfır derecedir [1].



(a) (b)

Şekil 2.5

2.2.12 Teorem (Gauss-Bonnet) : Δ, açıları α,β,γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. Δ, H-Üçgeninin H-alanı

$$\mu(\Delta)=\pi-\alpha-\beta-\gamma$$

'dir [1].

2.2.13.Tanım : C, U 'nun bir alt kümesi olmak üzere eğer $\forall P \in C$ için P ve O 'yu birleştiren H-doğru parçası C 'de kalacak şekilde C 'nin içinde bir O noktası varsa, C 'ye ***hiperbolik yıldızıl*** (hiperbolically starlike) denir.

Hiperbolik yıldızıl kümelerin en önemli örnekleri hiperbolik konveks kümelerdir. P ve Q, C nin herhangi iki noktası olmak üzere, eğer P ve Q 'yu birleştiren H-doğru parçası C 'ye aitse C ***hiperbolik konvekstir*** denir [1].

2.2.14 Sonuç : Π, açıları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olan n kenarlı hiperbolik yıldızıl poligon olsun. Π 'nin H-alanı,

$$\mu(\Pi) = (n-2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n .$$

'dir [1].

3. FUCHSIAN GRUPLAR

3.1 *Fuchsian Gruplara Giriş*

3.1.1 Tanım : PSL(2,IR) 'nin bir ayrık altgrubuna bir ***Fuchsian grup*** denir [1].

3.1.2 Tanım : Möbiüs dönüşümlerinin bir Γ grubunu alalım. Γ 'nın tüm öğeleri ortak bir sabit çembere sahipseler ve bu çemberin içini ve dışını değişmez bırakıyorlarsa Γ grubuna bir ***Fuchsian grup*** denir [7].

Fuchsian gruplarla latisler arasında bir çok bakımdan ilişki vardır. Latisler Öklidiyen izometrilerin ayrık gruplarıdır ve bunların bölüm uzayları torlara homeomorf olan kompakt Riemann yüzeyleridir. Fuchsian gruplar ise hiperbolik izometrilerin ayrık gruplardır ve bölüm uzayları da birer Riemann yüzeyidir. Latisler altında değişmez kalan fonksiyonlar, özellikle eliptik fonksiyonlar, fonksiyonların önemli bir ailesidir. Otomorf fonksiyonlar, Fuchsian gruplar altında değişmez kalırlar. Fuchsian gruplarla latisler arasında bir önemli fark vardır. Şöyle ki; sonsuz sayıda latis olmasına rağmen herbirinin bölüm uzayı bir tordur ve topolojik olarak benzerdirler. Ancak küre, tor, düzlem veya delik düzleme konform denk olmayan tüm yönlendirilebilir yüzeyler $\mathbb{U}$ üzerinde sabit noktasız hareket eden Fuchsian grupların bölüm uzaylarıdır.

Latislerin en önemli özelliği $\mathbb{C}$ üzerinde süreksiz hareket etmeleridir. Bunun anlamı:

3.1.3 Tanım: G, Y topolojik uzayının homeomorfizmalarının bir grubu olsun. Eğer $\forall g \in G\backslash\{I\}$ için, $\forall y \in Y$ noktasının $g(V) \cap V = \varnothing$ olacak biçimde, bir V komşuluğu varsa, G 'ye Y üzerinde ***süreksiz*** (discontinuous) hareket eder denir [1].

Fakat, genelde Fuchsian gruplar $\mathbb{C}$ üzerinde süreksiz hareket etmezler. Çünkü, eğer Fuchsian grupta T bir eliptik öğe ise, T 'nin bir sabit noktasının her V komşuluğu için $V \cap T(V) \neq \varnothing$ olur. Yani grup süreksiz değildir. Fuchsian gruplar $\mathbb{C}$ üzerinde has süreksiz hareket ederler. Bunun da anlamı:

3.1.4 Tanım: G, Y topolojik uzayının homeomorfizmalarının bir grubu olsun. Eğer her bir $y \in Y$ noktasının $g \in G$ için $g(V) \cap V \neq \varnothing$ olacak biçimde bir V komşuluğu varsa g(y)=y olur. G 'ye Y üzerinde ***has süreksiz*** (properly discontinuously) hareket eder denir.

Her süreksiz grup has süreksiz hareket eder. Fakat her has süreksiz grup süreksiz hareket etmez. $\mathbb{C}$ 'nin $T(z) = e^{2\pi i/n}z$ (n=2,3,...) ile üretilen homeomorfizmalarının sonlu grubu has süreksiz hareket eder. Fakat süreksiz hareket etmez. Çünkü bu dönüşümün sabit noktasını bulursak $z = e^{2\pi i/n}z \Leftrightarrow z(e^{2\pi i/n} - 1) = 0 \Rightarrow$ $n \neq 1$ olduğundan $(e^{2\pi i/n} - 1) \neq 0 \Rightarrow$ z=0 bulunur. Grup $T(z) = e^{2\pi i/n}z$ (n=2,3,...) ile üretildiğinden T 'nin sabit noktası bütün grubun sabit noktasıdır. Bu yüzden $z = 0 \in \mathbb{C}$ noktası birim öğeden başka her dönüşüm için $V \cap g(V) = \varnothing$ olacak biçimde bir V komşuluğuna sahip olmadığından bu grup $\mathbb{C}$ 'de süreksiz değildir.

Uyarı : Bu örnekteki gruplar, 3.1.2 tanımına göre Fuchsian gruplardır. Çünkü, örneğin n=2 için T(z)= - z öğesinin ürettiği $G = \{T, I\}$ grubunun bir sabit çemberi birim çemberdir. Orijin merkezli bütün çemberler sabit çemberdir. Ayrıca bu grubun öğeleri sabit çemberlerin içini ve dışını sabit bırakırlar.

Fakat bu grup 3.1.1 tanımına göre Fuchsian grup değildir. Çünkü $T \notin PSL(2,\mathbb{R})$ 'dir [8].

Fuchsian grupların $\mathbf{U}$ üzerinde has süreksiz hareket ettiğini ve başka sonuçları da ispatlamak için kullanılacak olan aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız olacaktır.

3.1.5 Lemma: $w \in \mathbf{U}$ ve $K \subset \mathbf{U}$ kompakt alt kümesi verilsin.

$$E = \{T \in PSL(2,\mathbb{R}) \mid T(w) \in K\}$$

kompakttır.

İspat: PSL(2, IR), SL(2, IR) 'nin bir bölüm uzayı olarak topolojilenir. Böylece

$$q: SL(2,\mathbb{R}) \to PSL(2,\mathbb{R}), \qquad q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T, \text{ burada } T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçiminde tanımlanan bir sürekli eşleme bulabiliriz. Eğer

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, IR) \middle| \frac{aw+b}{cw+d} \in K \right\}$$

kümesinin kompakt olduğunu gösterirsek, $E = q(E_1)$ 'in kompakt olduğu görülür. E_1 'in kapalı ve sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. $\beta: SL(2, IR) \to \mathbf{U}$, $\beta(A) = q(A)(w)$ sürekli eşlemesini yazabiliriz ve $E_1 = \beta^{-1}(K)$ olduğundan, K kapalı kümesinin ters görüntüsü kapalıdır. O halde E_1 kapalıdır.

Şimdi de E_1 'in sınırlı olduğunu gösterelim. K sınırlı olduğundan

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_1 \text{ için } \left| \frac{aw+b}{cw+b} \right| < M_1$$

olacak biçimde bir $M_1 \in IR$ vardır.

Ayrıca K, $\mathbf{U}$ 'da kompakt olduğundan

$$\mathrm{Im}\left(\frac{aw+b}{cw+d} \right) \geq M_2$$

olacak biçimde $M_2 > 0$ sayısı vardır. $ad - bc = 1$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafi

$$\mathrm{Im}\left(\frac{aw+b}{cw+d} \right) = \frac{\mathrm{Im}(w)}{|cw+d|^2}$$

biçimindedir. Böylece

$$\frac{\mathrm{Im}(w)}{|cw+d|^2} \geq M_2 \quad \Rightarrow \quad |cw+d| \leq \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Im}(w)}{M_2} \right)}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{|aw+b|}{|cw+d|} < M_1 \Rightarrow \frac{|aw+b|}{M_1} < |cw+d| \Rightarrow |aw+b| \leq M_1 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Im}(w)}{M_2} \right)}$$

elde edilir. Böylece a, b, c, d sınırlı olur [1].

3.1.6 Sonuç : $w \in \mathbf{U}$ ve K, $\mathbf{U}$ 'nun kompakt alt kümesi olsun. Γ bir Fuchsian grup ise

$$\{ T \in \Gamma | \; T(w) \in K \}$$

sonludur.

İspat : Bu küme 3.1.5 Lemmadan kompakttır. Bir Fuchsian grubun alt kümesi olduğu için ayrıktır. Böylece 1.2.5 Teoreminden dolayı sonludur [1].

3.1.7 Teorem :

(i) Γ, PSL(2, IR) 'nin bir alt grubu olsun. Γ 'nın bir Fuchsian grup olması için gerekli ve yeterli koşul Γ 'nın **U** üzerinde has süreksiz hareket etmesidir.

(ii) Γ bir Fuchsian grup ve $p \in \mathbf{U}$ noktası Γ 'nın bir öğesi tarafindan sabit bırakılsın. p 'nin, bir W komşuluğu vardır ki, W 'nin, $\Gamma\backslash\{I\}$ 'nın bir öğesi tarafindan sabit bırakılan p 'den başka hiçbir noktası yoktur.

İspat:

i) Γ Fuchsian grup olsun. Γ 'nın **U** üzerinde has süreksiz hareket ettiğini gösterelim. $z_0 \in \mathbf{U}$ ve $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$, z_0 merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı kapalı bir hiperbolik disk olsun. Öklid metriğinin kondurduğu topoloji ile hiperbolik metriğin kondurduğu topoloji aynı olduğundan, $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ kompakttır. 3.1.6 Sonucundan

$$\left\{T \in \Gamma \,\middle|\, T(w) \in \overline{B_\varepsilon(z_0)}\right\}$$

kümesi sonludur. Böylece $\overline{B_\delta(z_0)}$, z_0 'ın Γ-yörüngesinde başka nokta bulundurmayacak biçimde $0 < \delta < \varepsilon$ vardır. $V = \overline{B_{\delta/2}(z_0)}$ alalım. Eğer bir $S \in \Gamma$ için $V \cap S(V) \neq \varnothing$ ise $S(z) \in V$ olacak biçimde $z \in V$ vardır. Hiperbolik metriğe göre $\rho(z, z_0) < \delta/2$, $\rho(S(z), z_0) < \delta/2$ olacaktır. Böylece üçgen eşitsizliğinden

$$\rho(z_0, S(z_0)) \leq \rho(z_0, S(z)) + \rho(S(z), S(z_0))$$

bulunur. PSL(2,IR) 'de Hiperbolik uzunluğun değişmezliğinden

$$\rho(z_0, S(z_0)) \leq \rho(z_0, S(z)) + \rho(z, z_0) < \delta$$

olur. δ 'nın seçiminden $S(z_0) = z_0$ bulunur. Γ, **U** üzerinde has süreksiz hareket eder.

(i) 'nin diğer tarafını ispatlamadan (ii) 'yi ispatlayalım. p, $S \in \Gamma\backslash\{I\}$ ile sabit bırakılsın. $W \cap S(W) \neq \varnothing \Rightarrow S(p) = p$ olacak biçimde, p 'nin bir W komşuluğu vardır. Eğer W 'nin başka bir q noktası da $T \in \Gamma\backslash\{I\}$ ile sabit bırakılırsa $W \cap T(W) \neq \varnothing$ ve buradan $T(q) = q$ 'dir. $PSL(2, IR)$ 'nin birim öğeden başka, bir öğesinin **U** 'da en fazla bir sabit noktası olduğundan $q = p$ 'dir.

Şimdi (i) 'nin diğer tarafını ispatlayabiliriz. Tersine olarak **U** 'da has süreksiz hareket eden PSL(2, IR) 'nin bir alt grubunun ayrık olduğunu göstereceğiz. Γ 'nın ayrık olmadığını varsayalım. $\Gamma \backslash \{I\}$ 'nın herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmayan bir $s \in \mathbf{U}$ noktası seçelim . Böyle noktalar (ii) 'den dolayı vardır. Γ ayrık olmadığından, $k \to \infty$ iken $T_k \to I$ olacak biçimde Γ 'nın farklı öğelerinin bir (T_k) dizisi vardır. $k \to \infty$ iken $T_k(s) \to s$ ve s, $\Gamma \backslash \{I\}$ 'nın herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmadığından, $(T_k(s))$ farklı noktaların bir dizisidir. Buradan s 'nin her komşuluğu, s 'nin Γ-yörüngesinde başka noktalar içerir ve Γ, has süreksiz değildir [1].

3.1.8 Sonuç : Γ, PSL(2, IR) 'nin bir alt grubu olsun. Γ 'nın bir Fuchsian grup olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall z \in \mathbf{U}$ için Γz (z nin Γ-yörüngesi) 'nin, **U** 'nun bir ayrık alt kümesi olmasıdır.

İspat : Varsayalım ki Γz, **U** 'nun bir ayrık alt kümesi olsun. Yeterince büyük bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, z merkezli, ε yarıçaplı, $B_\varepsilon(z)$ açık hiperbolik diski, Γz 'nin başka öğelerini içermez. Buradan eğer $V \subseteq B_{\varepsilon/2}(z)$ ise bir önceki teoremin (i) kısmını ispatlamada kullandığımız yoldan $V \cap S(V) \neq \varnothing \Rightarrow S(z) = z$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece Γ, **U** üzerinde has süreksiz hareket eder. O halde Γ bir Fuchsian gruptur. Tersine olarak Γ, Fuchsian grupsa, **U** üzerinde has süreksiz hareket eder ve her Γz yörüngesi **U** 'da ayrıktır [1].

3.1.9 Tanım : a, b, c, d $\in \mathbf{Z}$ ve ad-bc=1 olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

doğrusal dönüşümlerinin oluşturmuş olduğu gruba ***Modüler grup*** denir. Açıkça görülür ki Modüler grup PSL(2, IR) 'nin bir alt grubudur [1].

3.1.10 Teorem : Γ Modüler grup olsun. Γ, **U** üzerinde has süreksiz hareket eder.

İspat : Eğer $T \in \Gamma$ ve $y > 0$ olmak üzere z=x+iy ise

$$\operatorname{Im}(T(z)) = \frac{y}{|cz+d|^2} > 0$$

olduğundan Γ 'nın **U** 'yu kendi üzerine resmettiği görülmektedir. Şimdi Γ 'nın **U** 'da has süreksiz olduğunu gösterelim. Tersine varsayalım ki Γ , **U** 'da has süreksiz olmasın. O halde Γ 'nın farklı öğelerinden oluşan öyle bir $\{T_n\}$ dizisi vardır ki

$T_n(z) \to z_0$ olur. Burada z, $z_0 \in U$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ve $T_n(z) = x_n + iy_n$ 'dir. dizisinden

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(T_n(z)) - \operatorname{Re}(z_0) < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini gerçeklemeyen dönüşümleri çıkaralım. $T_n(z) \to z_0$ olduğundan

$$y_n = \frac{y}{(c_n x + d_n)^2 + y^2 c_n^2} \to y_0$$

olur. Bu $\left\{(c_n x + d_n)^2 + y^2 c_n^2\right\}$ 'nin sınırlı ve dolayısıyla $\{c_n\}$ ve $\{d_n\}$ dizilerinin sınırlı olduğunu gösterir. c_n 'ler birer tamsayıdır ve sadece sonlu sayıda farklı değeri vardır. d_n 'lerde aynı özelliktedir. O halde $\{T_n\}$ dizisini oluşturan öğelerin paydalarını oluşturan (c_n, d_n) çiftleri sadece sonlu tanedir. (c, d) bu özellikteki bir çift olmak üzere $T \in \{T_n\}$ olsun. Eğer

$$T'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

öğesi de $\{T_n\}$ dizisinin bir öğesi ise $m = ab' - a'b$ olmak üzere

$$T'T^{-1}(z) = z + m \;\Rightarrow\; T(z) = \frac{(a + mc)z + (b + md)}{cz + d}$$

olur. Dolayısıyla $T'(z) = T(z) + m$ 'dir. T ve T', $\{T_n\}$ dizisinin öğeleri olduğundan öyle bir m tamsayısı vardır ki T', $\{T_n\}$ dizisinin öğeleri üzerine koyduğumuz koşulu gerçekler. Böylece $\{T_n\}$ dizisine ait olan bir T öğesi paydasındaki değerler ile bir tek şekilde belirlenir. (c_n, d_n) çiftlerinin sayısı sonlu olduğundan $\{T_n\}$ dizisi de sonlu olur. Bu ise $\{T_n\}$ dizisinin yakınsak bir dizi olmasıyla çelişir. O halde Γ, U üzerinde has süreksizdir [3].

3.1.11 Sonuç : Γ Modüler grubu bir Fuchsian gruptur.

İspat : Γ, PSL(2, IR) 'nin bir alt grubudur. Γ , U 'da has süreksiz hareket ettiğinden 3.1.7(i) Teoremine göre Fuchsian gruptur [3].

3.1.12 Tanım

a) Eğer $z \in \mathbf{U}$ ve (T_n), Γ 'da farklı öğelerin bir dizisi olmak üzere $(T_n(z))$, $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ limit noktasına sahipse $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Limit noktalarının oluşturduğu kümeye Γ ***nın limit noktaları kümesi*** denir ve $L(\Gamma)$ ile temsil edilir. Böylece tüm Γ Fuchsian grupları için $L(\Gamma) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ olur. Örneğin Γ, modüler grupsa $L(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ veya Γ, $z \mapsto 2z$ ile üretilen devirli grupsa $L(\Gamma) = \{0, \infty\}$ 'dur.

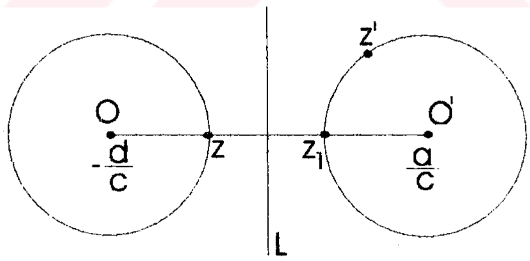
b) Γ grubunun dönüşümlerinin izometri çemberlerinin merkezlerinin bir yığılma noktasına (cluster point) ***grubun bir limit noktası*** denir. Eğer limit noktalarının kümesi ikiden çok nokta içerirse, limit noktalarının kümesi mükemmel kümedir.

Eğer bir nokta limit noktası değilse o noktaya adi nokta (ordinary point) denir [7].

Şimdi bir Fuchsian grubun temel bölgesini bulmada önemli olan grubun sabit çemberi ile ilgili teoremler vereceğiz.

3.1.13 Teorem : Fuchsian grubun bir öğesi, kendisinin izometri çemberine göre bir inversiyon ile L doğrusuna göre bir yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir. L doğrusu, bu öğenin ve tersinin izometri çemberlerinin merkezlerini birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir.

İspat :



Şekil 3.1

$z+\frac{d}{c}$ ve $\frac{a}{c}+\frac{d}{c}$ kompleks sayılarının argümentleri aynı modülleri ise sıra ile $\frac{1}{|c|}$ ve $\frac{|a+d|}{|c|}$ olur. Böylece

$$z+\frac{d}{c}=\frac{a+d}{|a+d|c}$$

$$z_1-\frac{a}{c}=-\frac{a+d}{|a+d|c} \qquad (3.1)$$

bulunur. Diğer yandan $z' = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ için

$$z'-\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c(cz+d)}=-\frac{1}{c^2(z+d/c)}$$

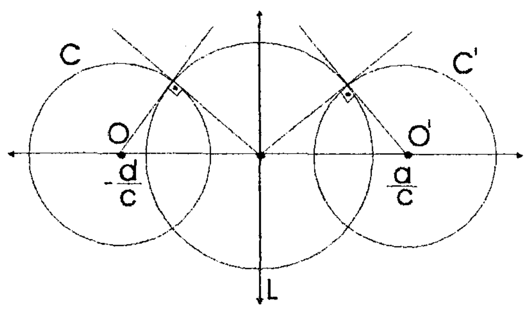
şeklinde yazılabilir. Burada

$$z'-\frac{a}{c}=-\frac{|a+d|}{(a+d)c}=-\frac{\bar{a}+\bar{d}}{|a+d|c} \qquad (3.2)$$

bulunur. (3.1) ve (3.2) 'den z 'nin görüntüsü olan z' 'nün z_1 olması yani, T 'nin izometri çemberine göre bir inversiyon ile L 'ye göre bir yansımanın bileşkesi olması için gerek ve yeter koşul $\bar{a}+\bar{d}=a+d \Leftrightarrow a+d \in \mathbb{R}$ bulunur [7,8].

3.1.14 Sonuç : Fuchsian grubun bir öğesinin bir sabit çemberi, merkezi L üzerinde ve izometri çemberine dik bir çemberdir.

İspat :

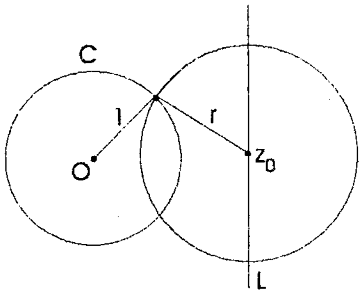


Şekil 3.2

1.4.16 Teoremine göre bir çembere göre inversiyon, bu çembere dik bir çemberi sabit bıraktığından ve L 'ye göre yansıma da merkezi L üzerinde olan bir çemberi sabit bırakacağı için, ayrıca Fuchsian grubun bir öğesi izometri çemberine göre bir inversiyon ile L 'ye göre bir yansımanın bileşkesi olduğundan böyle bir öğenin bir sabit çemberi, merkezi L üzerinde ve izometri çemberine dik bir çemberdir [7,8].

3.1.15 Sonuç : Fuchsian grubun bir öğesinin sabit çemberi kaç tanedir? diye düşünecek olursak; merkezi L üzerinde bir z_0 noktası olan bir çemberin izometri çemberine diklik şartını kullanarak tek parametreli bir çember ailesi buluruz.

İspat :

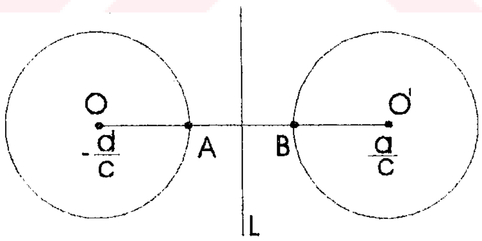


Şekil 3.3

$|z-z_0| = r$, $1+r^2 = \left|z_0+\frac{d}{c}\right|^2$ eşitliklerinden z_0 değerini r cinsinden yazabiliriz. Böylece sabit çemberler ailesi ($|z-z_0| = r$) sadece r 'ye bağlı bir parametreli bir çember ailesi olur [8].

3.1.16 Sonuç : Fuchsian grubun bir T öğesinin bir sabit çemberi de izometri çemberi ile bu öğenin tersinin izometri çemberinin merkezlerini birleştiren doğrudur (Bu sabit çember bir doğrudur).

İspat :



Şekil 3.4

T(A)=B olur (A ve B sabit noktalar). O halde OO′ doğrusu T ile değişmez, sabit doğrudur [8].

3.1.17 Sonuç : Bir Fuchsian grubun her öğesi $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 'u sabit bırakır.

İspat : $T\in PSL(2, \mathbb{R})$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

için $IR = \{z | z - \bar{z} = 0\}$, $T^{-1}(z) = \dfrac{-dz+b}{cz-a}$ değeri $z - \bar{z} = 0$ denkleminde yerine konursa,

$$\frac{-dz+b}{cz-a} - \frac{-d\bar{z}+b}{c\bar{z}-a} = 0 \Rightarrow -cdz\bar{z} + bc\bar{z} + adz - ab + cdz\bar{z} - bcz - ad\bar{z} + ab = 0$$

$$(ad-bc)z - (ad-bc)\bar{z} = 0 \Rightarrow z - \bar{z} = 0$$

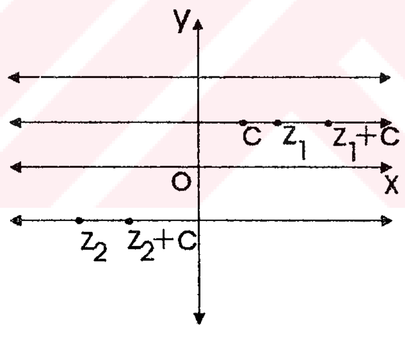
bulunur [7,8].

3.1.18 Sonuç : Fuchsian grubun bir T öğesinin ve bu T öğenin ürettiği grubun sabit çemberi, T 'nin sabit noktalarından geçen ve merkezi L üzerinde bulunan çemberdir [8].

Uyarı : Dönüşüm parabolik ise tek bir sabit nokta olacağından sabit bir çemberin bulunması için bu yoldan yararlanamayız.

3.1.19 Örnek : T(z)=z+c parabolik öğesinin sabit çemberini bulalım.

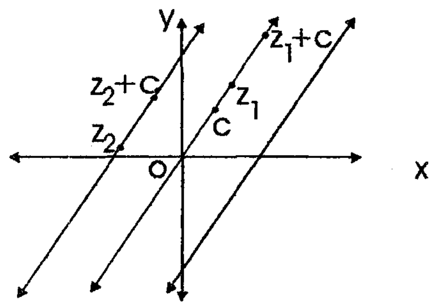
Eğer $c \in IR$ ise



Şekil 3.5

T(z)=z+c parabolik öğesinin sabit çemberi y=c doğrusu ve bu doğruya paralel olan bütün doğrulardır. Çünkü y=c doğrusu üzerinde aldığımız bir noktayı T öğesi yine y=c doğrusu üzerindeki bir noktaya taşır. Yani T öğesi y=c doğrusunu sabit bırakır. Aynı şekilde y=c doğrusuna parelel bütün doğrularda sabit kalır.

Eğer $c \in \mathbb{C} - IR$ ise



Şekil 3.6

T(z)=z+c parabolik öğesinin sabit çemberi c kompleks sayısı ile orijinden geçen doğru ve bu doğruya paralel olan bütün doğrulardır. Çünkü orijinle c kompleks sayısını birleştiren doğru üzerinde alacağımız her noktayı T öğesi yine o doğru üzerine resmedecektir. Aynı şekilde o doğruya paralel bütün doğrularda yine sabit kalacaklardır [8].

3.1.20 Teorem : Bir Fuchsian grubun limit noktalarının kümesi grubun sabit çemberi üzerinde bulunur [7].

3.1.21 Teorem : Eğer limit noktaları ikiden fazla ise aşağıdaki durumlardan birisi meydana gelir.

1) limit noktalarının kümesi sabit çemberin bütün noktalarından oluşur.

2) limit noktalarının kümesi sabit çember üzerinde yoğun olmayan mükemmel bir kümedir [7].

3.1.22 Tanım

a) Γ Fuchsian grubunun sabit çemberinin her noktası bir limit noktası ise Γ 'ya ***1. tür Fuchsian grup*** denir.

b) Γ Fuchsian grubunun limit noktaları sabit çember üzerinde yoğun değillerse Γ 'ya ***2. tür Fuchsian grup*** denir [7].

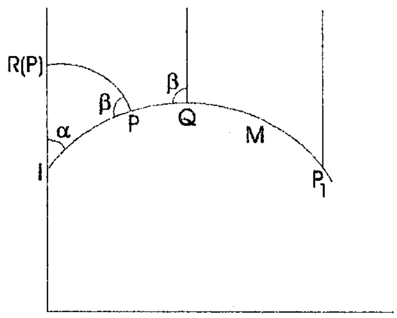
(b) 'ye ait Fuchsian grupların limit noktaları yoğun olmıyan bir mükemmel kümedir. Limit noktaları sonludur. Adi noktaları ise basit bağlantılı bir bölge meydana getirirler. (a) 'daki limit noktaları düzlemi her biri kendi üzerine taşınan iki bölgeye ayırır. Örneğin Modüler grup, 1.tür Fuchsian gruptur [4,7].

3.2 *Üçgen Gruplar*

Fuchsian grupları elde etmenin bir yolu, geometrik teknikler kullanarak üst yarı düzlemde has süreksiz hareket eden gruplar oluşturmaktır. 2.3.5 Gauss-Bonnet teoreminden bir hiperbolik üçgenin açılarının toplamının π 'den küçük olduğunu biliyoruz.

3.2.1 Lemma : $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ olsun. $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ olacak biçimde açıları, α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen vardır.

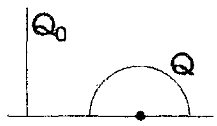
İspat: Şekil 2.4 'teki gibi bazı açıları sıfır olan hiperbolik üçgenler yapmak çok kolaydır. Açıların sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Açıların toplamı π 'den küçük olduğundan, $0<\alpha<\pi/2$ olarak alabiliriz. Üçgenin bir köşesini i 'de seçelim. Üçgenin bir kenarı, i 'nin üst kısmındaki imajiner eksenin bir parçasıdır. İmajiner eksenin sağına düşen ve eksenle α açısı yapan H-doğrunun bir parçası M olsun. $\forall P_1 \in M$ için P_1, i ve ∞ köşeleri ile hiperbolik üçgenini göz önüne alalım. Bu üçgende, P_1, M boyunca i 'den gerçel eksene hareket ettiğinden P_1 'deki açı, $\pi-\alpha$ 'dan 0 'a değişen süreklilikdedir. Buradaki bir Q noktası için bu açı $\beta<\pi-\alpha$ 'dır. i ve Q arasındaki her bir P noktası için M 'yi, β açısıyla P 'de ve imajiner ekseni de i 'nin üst tarafında kesen bir H-doğruyu göz önüne alalım. Aksi halde toplam açısı π 'den küçük olmayan bir hiperbolik üçgenimiz vardır. Bu H-doğrunun imajiner ekseni $\gamma(P)$ açısı ile R(P) 'de kestiğini varsayalım. $P \rightarrow Q$ iken $\gamma(P) \rightarrow 0$ ve $P \rightarrow i$ iken i, P, R(P) köşeli hiperbolik üçgenin H-alanı sıfıra yaklaşır ve böylece Gauss-Bonnet teoremi gereği açı $\gamma(P) \rightarrow \pi-\alpha-\beta$ bulunur. Buradan en az bir P noktası için $\gamma(P)=\gamma$ bulunur. Böylece α, β, γ açılı bir hiperbolik üçgen elde ettik (Şekil 3.7 'de gösterildiği gibi) [1].



Şekil 3.7

3.2.2 Tanım : Q, bir H-doğru olsun. Q 'nun her noktasını sabitleyen, birimden farklı U 'nun bir H-izometrisine ***Q* '*ya göre bir H-yansıma*** denir.

Q_0 imajiner eksen ise, Q_0 'da bir Öklidiyen yansıma olan $R_0: z \mapsto -\bar{z}$ dönüşümü ve (2.3) formülü gereği $R_0: z \to -\bar{z}$ bir H- yansımadır. Eğer Q başka bir H-doğru ise, 2.1.5 Teoreminden $T(Q) = Q_0$ olacak biçimde bir $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ vardır.



Şekil 3.8

T bir H-izometri olduğundan, $T^{-1}R_0T$, Q 'yu sabit bırakan bir H-yansımadır. R_0, 2 mertebeli olduğundan, her H-yansıma 2 mertebelidir [1].

3.2.3 Teorem : Q 'ya göre bir H-yansıma, Q 'ya göre bir Öklidiyen inversiyonun üst yarı düzleme kısıtlanmasıdır [1].

3.2.4 Teorem : Her H-yansıma

$$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc=-1$$

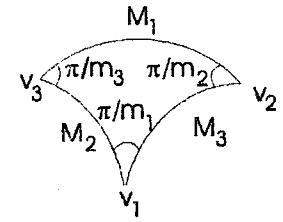
biçimindedir.

İspat : Her H-yansıma **U** 'nun anti-konform bir homeomorfizmasıdır. Bu da açıları koruyan, yönleri ters çeviren demektir. Eğer B, **U** 'nun anti-konform bir homeomorfizması ise $R_0B=T$, **U** 'nun bir konform homeomorfizmasıdır ve böylece $PSL(2, \mathbb{R})$ 'nin bir elemanıdır. Buradan $B=R_0T$ ve **U** 'nun her anti-konform homeomorfizması, özellikle de her H-yansıma

$$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc=-1$$

biçimindedir [1].

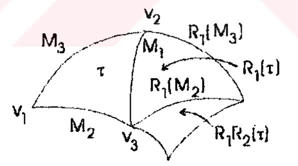
3.2.5 Tanım (Üçgen Gruplar) : τ köşeleri v_1, v_2, v_3 ve bu köşelerdeki açıları $\pi/m_1, \pi/m_2, \pi/m_3$ olan bir H-üçgen olsun. Bu köşelere karşılık gelen kenarlar da Şekil 3.9 'da gösterildiği gibi M_1, M_2, M_3 olsun. Burada m_1, m_2, m_3 pozitif tamsayılardır.



Şekil 3.9

R_i, M_i, (i=1, 2, 3) 'yi kapsayan H-doğrudaki H-yansıma ve Γ^*, R_1, R_2, R_3 yansımaları tarafından üretilen grup olsun. $R_i \notin PSL(2,\mathbb{R})$ olduğundan Γ^* bir Fuchsian grup değildir. Bununla birlikte $\Gamma = \Gamma^* \cap PSL(2,\mathbb{R})$ 'yi göz önüne alalım. Γ^*, iki Γ-kosetin birleşimidir. Örneğin $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma R_1$ alırsak, eğer $S \in \Gamma^* \setminus \Gamma$ ise; SR_1 iki anti-konform homeomorfizmanın birleşimidir. SR_1 konformdur. Böylece $SR_1 \in PSL(2,\mathbb{R})$ 'dir. Ayrıca $SR_1 \in \Gamma^*$ 'dir. Böylece $SR_1 \in \Gamma$ ve $S = (SR_1)R_1 \in \Gamma R_1$ 'dir.

R_1, H-yansıması altında τ 'nun görüntüsü $R_1(M_1) = M_1$, $R_1(M_2)$, $R_1(M_3)$ kenarları ile $R_1(\tau)$ hiperbolik üçgenidir. $R_1R_2R_1^{-1}$, $R_1(M_2)$ 'yi sabit bıraktığından $R_1(M_2)$ 'de bir H-yansımadır. Bu yansıma $R_1(\tau)$ 'yi Şekil 3.10 'da görüldüğü gibi $R_1R_2R_1^{-1}(R_1(\tau)) = R_1R_2(\tau)$ 'ye dönüştürür.



Şekil 3.10

Böyle devam ederek $\tau, R_1(\tau), R_1R_2(\tau), R_1R_2R_1(\tau), \ldots, (R_1R_2)^{m_3-1}R_1(\tau)$ hiperbolik üçgenlerinin v_3 köşesinin etrafını sardığı görülür (R_1R_2, v_3 'ü sabit bırakan iki H-yansımanın çarpımıdır ve v_3 'de, $2\pi/m_3$ açısıyla bir hiperbolik dönme göz önüne alınırsa $(R_1R_2)^{m_3} = I$ bulunur).

$\{T(\tau) | T \in \Gamma^*\}$, $\mathbb{U}$ 'nun bir döşemesini (tessellation) oluşturur. ***Döşeme***, τ 'nun, iki Γ^*-görüntüsü üst üste gelmez ve $\mathbb{U}$ 'nun her noktası τ 'nun bir Γ^*-görüntüsüne aittir demektir.

Şimdi τ 'nun herhangi bir noktası p olsun. p 'nin Γ^*-görüntüleri döşemenin diğer üçgenlerinin noktalarına eşlenir ve ayrık bir küme oluştururlar. Böylece U 'nun her bir noktasının Γ-yörüngesi bir ayrık kümedir ve böylece 3.1.8 Sonucundan Γ bir Fuchsian gruptur. Bu yolla elde edilen bir Fuchsian gruba bir ***üçgen grubu*** denir [1].

3.2.6 Tanım : 3.2.5 Tanımda üçgen gruptaki döşemenin her üçgeni R_1, R_2, R_3 'de $T(\tau)$ biçimindedir (T, R_i, $i = 1,2,3$ ün bir sonlu çarpımı gibi yazılır).

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^{m_3} = (R_2R_3)^{m_1} = (R_1R_3)^{m_2} = I$$

bağıntılarının olduğu ve gruptaki diğer bağıntıların bu bağıntılardan çıkarılabileceği açıkça görülür. Γ, $X = R_1R_2$ ve $Y = R_2R_3$ ile üretilir. O halde

$$X^{m_3} = Y^{m_1} = (XY)^{m_2} = I$$

biçimindedir. Γ 'daki tüm bağıntılar bunlardan elde edilir.

$$\Gamma = \langle X, Y \,|\, X^{m_3} = Y^{m_1} = (XY)^{m_2} = I \rangle$$

gösterimine Γ ***'nın gösterimi*** denir [1].

3.3 *Fuchsian Grupların Bazı Önemli Cebirsel Özellikleri*

3.3.1 Lemma :

(i) IR 'nin aşikar olmıyan bir ayrık altgrubu sonsuz devirlidir.

(ii) S^1 'in bir ayrık alt grubu sonlu devirlidir.

İspat :

i) Varsayalım ki H, IR 'nin aşikar olmıyan bir ayrık altgrubu olsun. Yani 0, IR 'nin toplam grubunun birim öğesi olmak üzere $H \neq \{0\}$ 'dir. a∈H ve C, $|x| \leq a$ kompakt kümesi olsun. H, IR topolojik grubunun ayrık altgrubu ve C 'de IR 'nin kompakt bir alt kümesi olduğundan $H \cap C$ sonludur. Buradan b, H 'deki en küçük pozitif tamsayı olsun. Şimdi $H = \langle b \rangle$ olduğunu gösterelim. $\langle b \rangle \subset H$ olduğunu biliyoruz. Her $x \in H$, b 'nin bir katıdır. Çünkü x, b çiftine ait bölüm algoritması, m tamsayı olmak üzere x=mb+r ($0 \leq r < b$) şeklinde ise, r = x-mb olup, grup koşullarına göre $x \in H$, $mb \in H$ ve buradan $r \in H$ elde edilir. Burada r≠0 olamaz, çünkü aksi halde $0 < r < b$ olur ki bu b 'nin seçimine aykırıdır. O halde x = mb bulunur. Yani $H \subset \langle b \rangle$ olur. Buradan $H = \langle b \rangle$ elde edilir.

Şimdi de $< b >$ 'nin sonsuz devirli olduğunu gösterelim. Varsayalım ki sonsuz devirli olmasın. Yani mb = nb olacak biçimde birbirinden farklı iki m, n tam sayısı vardır. Örneğin m > n ise mb = nb eşitliğinin iki tarafi - nb ile toplanarak mb-nb =0 yani (m-n)b =0 elde edilir. b 'nin seçimi ve m > n olduğundan m-n ≠ 0 ve b ≠ 0 olur. IR 'de sıfır bölen olmadığından bu bir çelişkidir. O halde $< b >$ sonsuz devirlidir.

ii) $H \subset S^1$ ayrık altgrubu olsun. $0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere $\phi = \min\{\theta > 0 | e^{i\theta} \in H\}$ olsun. H ayrık olduğundan böyle bir ϕ vardır. $b = e^{i\phi}$ alırsak (i) 'deki yöntemden $H = < b >$ olduğu görülür. H 'nin sonlu devirli olduğunu gösterelim. Yani $b^n = 1$ olacak biçimde en küçük pozitif bir n tam sayısının olduğunu gösterelim. $b^n = (e^{\phi i})^n = (e^{n\phi i}) = e^{2k\pi i}$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow n\phi i = 2k\pi i \Rightarrow n = \dfrac{2k\pi}{\phi}$ ve öyle bir $k \in \mathbf{Z}^+$ için $n \in \mathbf{Z}^+$ bulunur. Buradan $< b >$ 'nin mertebesi sonludur. Yani H kümesi sonludur [10].

3.3.2 Teorem : Λ birim öğeden farklı tüm öğelerin aynı sabit nokta kümesine sahip olduğu bir Fuchsian grup olsun. Λ devirlidir.

İspat : $S \in \Lambda$ 'nın hiperbolik olduğunu varsayalım. Eşlenik sınıfi seçiminden S 'nin 0 ve ∞ 'u sabitlediğini varsayabiliriz. Hipotezden Λ 'nın bütün dönüşümleri hiperboliktir ve 0 ve ∞ 'u sabitler. S hiperbolik öğesinin normalleştiricisi $H = \{z \mapsto \lambda z | \lambda > 0\}$ 'dir. Böylece Λ, $H = \{z \mapsto \lambda z | \lambda > 0\}$ 'nin bir ayrık alt grubudur. Şimdi H, topolojik grup olduğundan IR^* 'a izomorftur. IR^*, pozitif gerçel sayıların çarpım grubudur. IR^* topolojik grup olduğundan, IR 'ye $x \mapsto \ln x$ fonksiyonu ile izomorftur. 3.3.1(i) lemmadan IR 'nin aşikar olmıyan her ayrık altgrubu sonsuz devirli olduğundan, IR 'nin izomorfu olan H 'nin de aşikar olmıyan her ayrık altgrubu sonsuz devirlidir. O halde Λ sonsuz devirli bir gruptur.

Benzer olarak eğer Λ bir parabolik öğe içerirse Λ, sadece parabolik öğelerden oluşan bir sonsuz devirli grup olur. Eğer Λ bir eliptik öğe içerirse (2.1) denklemdeki tüm dönüşümler S^1 'e izomorf bir grup oluşturduğundan ve 3.3.1(ii) lemmadan Λ, sonlu devirlidir [1].

3.3.3 Teorem : Bir Fuchsian grubun bir eliptik öğesi sonlu mertebeye sahiptir

İspat : Γ Fuchsian grubuna ait bir eliptik öğe T olsun. T, W 'ya eşlenik olmak üzere

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \tag{3.3}$$

biçimindedir. Dolayısıyla T 'nin normalleştiricisi (3.3) biçimindeki bütün dönüşümlerin grubudur. T 'nin normalleştiricisi S^1 'e izomorftur. S^1 'in her ayrık altgrubu sonlu devirli olduğundan S^1 'de sonlu devirlidir. Dolayısıyla T 'nin normalleştiricisi ve buradan da T sonlu devirlidir.

Bir eliptik öğe sonsuz mertebeye sahip olabilir. Fakat o zaman devirli grup ayrık olamaz [10].

3.3.4 Sonuç : Γ bir $T \in \Gamma \backslash \{I\}$ eliptik öğesi ile üretilen devirli bir grup olsun. Γ 'nın Fuchsian grup olması için gerek ve yeter koşul Γ 'nın sonlu olmasıdır.

3.3.5 Teorem : Her değişmeli Fuchsian grup devirlidir.

İspat : Γ bir değişmeli Fuchsian grup olsun. Γ 'da bir T öğesinin merkezleştiricisi

$$C_\Gamma(T) = \{S \in \Gamma | ST = TS\}$$

kümesidir. Γ Fuchsian grubu değişmeli olduğundan $\forall S \in \Gamma$ için ST=TS olacağından T nin merkezleştiricisi $C_\Gamma(T) = \Gamma$ olacaktır. 1.4.14 Teoremine göre Γ Fuchsian grubu aynı sabit nokta kümeli elemanlardan oluşur. Böylece 3.3.2 Teoremine göre Γ Fuchsian grubu devirlidir.

3.3.6 Teorem : Γ, devirli olmayan bir Fuchsian grup olsun. $PSL(2,IR)$ 'de Γ 'nın normalleştiricisi bir Fuchsian gruptur.

İspat: Varsayalım ki $N(\Gamma)$ bir Fuchsian grup olmasın. O zaman $N(\Gamma)$, $i \to \infty$ iken $T_i \to I$ olacak biçimde farklı öğelerin sonsuz bir (T_i) dizisini içerir. Eğer $S \in \Gamma (S \neq I)$ ise $i \to \infty$ iken $T_i S T_i^{-1} \to S$ olur. Γ, ayrık olduğundan $\forall i > m$ için $T_i S T_i^{-1} = S$ olacak biçimde bir m tamsayısı vardır ve böylece i 'nin bu değerleri için Teorem 1.4.13 'ten T_i, S ile aynı sabit nokta kümesine sahiptir. Şimdi Γ, devirli olmadığından 3.3.5 teoreminden değişmeli değildir. Teorem 1.4.13 'ten S 'nin sabit nokta kümesinden farklı bir sabit nokta kümesi ile $S' \in \Gamma$ vardır. Bununla beraber yeterince büyük bir i için T_i, S' ile aynı sabit nokta kümesine sahiptir ve buradan S', S ile aynı sabit nokta kümesine sahiptir. Bu da bir çelişkidir. Yani $N(\Gamma)$ Fuchsian gruptur [1].

3.4 *Temel Bölgeler*

3.4.1 Tanım : Bir Γ, Fuchsian grubu için bir temel bölgeyi, Tanım 1.5.9 'te bir Ω latisi için bir temel bölgeyi tanımladığımız şekilde tanımlarız. F kapalı bir küme olmak üzere

(i) $\bigcup_{T\in\Gamma} T(F) = \mathbf{U}$,

(ii) $\forall T \in \Gamma \setminus \{I\}$ için $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \varnothing$

koşulları sağlanırsa F 'ye Γ için bir temel bölgedir denir [1].

3.4.2 Örnek : Γ, 3.2.5 'te tanımlandığı gibi bir τ hiperbolik üçgeninden elde edilen bir üçgen grup olsun. $\tau \cup R_1(\tau)$ 'nun Γ için bir temel bölge olduğu kolayca görülür [1].

3.4.3 Tanım (Dirichlet Bölge) : Γ, keyfi bir Fuchsian grup ve $p \in \mathbf{U}$, $\Gamma \setminus \{I\}$ 'nın herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmasın. Böyle noktalar 3.1.7(ii) teoreminden vardır. Γ için ***p merkezli Diriclet bölge***

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbf{U} \mid \rho(z,p) \le \rho(z,T(p)) \quad \forall T \in \Gamma \text{ için}\} \tag{3.4}$$

kümesidir. Hiperbolik metriğin $PSL(2,\mathbb{R})$ altında değişmezliğinden bu bölge

$$\{z \in \mathbf{U} \mid \rho(z,p) \le \rho(T(z),p) \quad \forall T \in \Gamma \text{ için}\} \tag{3.5}$$

biçiminde de yazılabilir. Her bir sabit $T_1 \in \Gamma$ için, $\rho(z,p) < \rho(z,T_1(p))$ ifadesi, hiperbolik metrikte p 'ye $T_1(p)$ 'den daha yakın z noktalarını tanımlar. Açıkça görülmektedir ki $p \in D_p(\Gamma)$ ve p 'nin Γ-yörüngesi ayrık olduğundan $D_p(\Gamma)$, p 'nin bir komşuluğunu içerir.

p 'yi $T_1(p)$ 'ye birleştiren H-doğru parçasının hiperbolik orta dikmesi p 'yi içeren bir hiperbolik yarı-düzlem belirler. Böylece $D_p(\Gamma)$, hiperbolik yarı-düzlemlerin bir arakesitidir ve hiperbolik konveks bölgedir. Eğer $D_p(\Gamma)$, sonlu tane hiperbolik yarı düzlemin arakesiti ise $D_p(\Gamma)$, bir konveks hiperbolik poligondur [1].

3.4.4 Teorem : p, $\Gamma \setminus \{I\}$ 'nın herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmazsa $D_p(\Gamma)$, Γ Fuchsian grubu için bir bağlantılı temel bölgedir.

İspat : p, $\Gamma \setminus \{I\}$ 'nın herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmadığından

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbf{U} \mid \rho(z,p) \le \rho(z,T(p)) \quad \forall T \in \Gamma \text{ için}\}$$

Γ Fuchsian grubu için Dirichlet bölgedir. $D_p(\Gamma)$ 'nın Γ Fuchsian grubu için bir bağlantılı temel bölge olduğunu gösterelim. $z_1 \in \mathbf{U}$ alalım. Her sabit $T_1 \in \Gamma$ için z_0, z_1 'in Γ- yörüngesindeki, p 'ye $T_1(p)$ 'den daha yakın olan noktaların en yakını olsun. p, p 'nin Γ- yörüngesinin başka noktalarını içermeyen bir komşuluğunda bulunduğundan, yani Γp ayrık olduğundan böyle noktalar vardır. O halde $\forall T \in \Gamma$ için $\rho(z_0, p) \le \rho(z_0, T(p))$ olur. Böylece $z_0 \in D_p(\Gamma)$ elde edilir. Yani $D_p(\Gamma)$ her Γz yörüngesinden en az bir nokta içerir.

$z_1, z_2 \in D_p(\Gamma)$ 'nın içindelerse aynı Γz yörüngesinde bulunmazlar. Eğer bir $T \in \Gamma \setminus \{I\}$ için $\rho(z,p) = \rho(z, T(p))$ ise ya $z \notin D_p(\Gamma)$ ya da z, $D_p(\Gamma)$ 'nın sınırında bulunur. Eğer z, $D_p(\Gamma)$ 'nın içinde ise $\forall T \in \Gamma \setminus \{I\}$ için $\rho(z,p) < \rho(z, T(p))$ olur. Eğer z_1, z_2 aynı Γz yörüngesinde birbirlerinden farklı iki iç nokta iseler $\rho(z_1, p) < \rho(z_2, p)$ ve $\rho(z_2, p) < \rho(z_1, p)$. Bu da bir çelişkidir. O halde $D_p(\Gamma)$ içinde her Γz yörüngesinden en fazla bir tane nokta vardır.

$D_p(\Gamma)$ kapalı yarı-düzlemlerin bir arakesiti olduğundan kapalıdır. $D_p(\Gamma)$ konveks olduğundan yol-bağlantılı ve buradan da bağlantılıdır. Böylece $D_p(\Gamma)$ bağlantılı bir temel bölgedir [1].

3.4.5 Tanım : $\sinh^2 \alpha$, $\alpha > 0$ için α 'nın bir monoton artan fonksiyonu olduğundan (2.3) ve (3.5) denklemlerinden

$$D_p(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbf{U} \;\middle|\; \frac{|z-p|^2}{\operatorname{Im}(z)} \le \frac{|T(z)-p|^2}{\operatorname{Im} T(z)} \quad \forall T \in \Gamma \text{ için} \right\}.$$

Eğer $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $a,b,c,d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$ ise $\operatorname{Im} T(z) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$

olur.

$$D_p(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbf{U} \;\middle|\; \left|\frac{T(z)-p}{z-p}\right| \ge \frac{1}{|cz+d|} \quad \forall T \in \Gamma \text{ için} \right\} \tag{3.6}$$

(3.6) ifadesine ***Γ Fuchsian grubunun Öklid metriğine göre Dirichlet bölgesi*** denir [1].

3.4.6 Örnek : Γ, Moduler grup olsun. ki $(k > 1)$ modüler grubunun birim öğesinden başka bir öğesi tarafından sabitlenmez. Gerçekten $T \in \Gamma$ alalım. T dönüşümü

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{Z}\ ,\ ad-bc=1$$

biçimindedir. Şimdi $z = ki$ için bu dönüşümün sabit noktalarını bulalım.

$T(ki)=\dfrac{aki+b}{cki+d}=ki \Rightarrow aki+b=-ck^2+dki \Rightarrow a=d \wedge b=-ck^2$ bulunur. Bulunan bu ifadeleri dönüşümde yerine koyarsak $T(z)=\dfrac{az-ck^2}{cz+a} \quad \wedge \quad aa-(-ck^2)c=1 \Rightarrow$ $a^2+c^2k^2=1$ bulunur. Üç durum söz konusudur.

i) Eğer $c = 0$ ise $b = 0$ ve buradan $T = I$ bulunur.

ii) $c \neq 0$ ve $k = 0$ ise $b = 0$ olur. $a^2=1 \Rightarrow a=\mp 1$ elde edilir. $k = 0$ olduğundan $z=ki$ ve buradan $z=0$ olur. $T(z)=\dfrac{\mp z}{cz\mp 1}$ dönüşümünde $z=0$ noktası sabit noktadır.

iii) $c \neq 0$ ve $k \neq 0$ ise $c^2k^2>0$ olur. O halde $a^2+c^2k^2=1$ eşitliğinde $a\in\mathbf{Z}$ olması için $a = 0$ olmalı. Bu durumda $c^2k^2=1$ ve $k^2=\dfrac{1}{c^2}$ bulunur. Buradan $k=\mp\dfrac{1}{c}$ olur. $c\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$ olduğundan $-1\leq k\leq 1$ bulunur. Dönüşüm $T(z)=-\dfrac{1}{c^2z}$ biçimindedir.

Yani $k > 1$ için ki noktası modüler grubun birimden farklı herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmaz.

Şimdi $k>1$ olmak üzere $p=ki$ seçelim. (3.6) 'da $T(z)=z+1$ veya $T(z)=z-1$ koyalım. $c=0,\ d=1$ ve böylece $|z\pm 1-ki|\geq|z-ki|$ dir. Yani z, ki 'ye $ki\pm 1$ 'den daha yakındır. Böylece $D_{ki}(\Gamma)$, $\left\{z\in\mathbf{U}\ \middle|\ -\dfrac{1}{2}\leq \mathrm{Re}(z)\leq\dfrac{1}{2}\right\}$ şeridinde hareket eder.

Şimdi $T(z)=-1/z=(0z-1)/(1z+0)$, ve böylece $c=1,\ d=0$. $\forall z\in D_{ki}(\Gamma)$ için

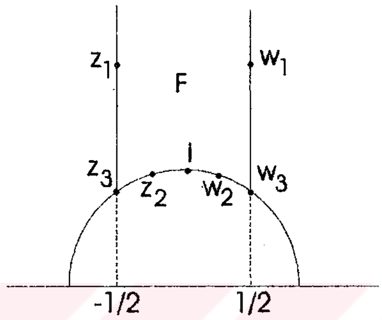
$$\frac{\left|-\dfrac{1}{z}-ki\right|}{|z-ki|}\geq\frac{1}{|z|}\Rightarrow|1+kiz|^2\geq|z-ki|^2.$$

bulunur. $|1+kiz|^2=(1+kiz)(1-ki\bar{z}) \Rightarrow (1+kiz)(1-ki\bar{z})=1-ki\bar{z}+kiz+k^2z\bar{z}$ ve $|z-ki|^2=(z-ki)(\bar{z}+ki)=z\bar{z}+zki-\bar{z}ki+k^2$ ifadeleri eşitsizlikte yerlerine konulursa

$1 - ki\bar{z} + kiz + k^2 z\bar{z} \geq z\bar{z} + zki - \bar{z}ki + k^2 \Rightarrow 1 - k^2 \geq z\bar{z} - k^2 z\bar{z} \wedge k > 1$ olduğundan $1 - k^2 < 0$ olur. Sonuçta $|z| \geq 1$ elde edilir. Böylece $D_{ki}(\Gamma)$, birim diskin dışı içinde hareket eder.

$$F = \left\{ z \in \mathbf{U} \;\middle|\; |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

olmak üzere $D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$ olduğunu gösterdik (Şekil 3.11 'de gösterildiği gibi). $D_{ki}(\Gamma) = F$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bu ispatı yapmak için iki lemmaya gerek duyarız.



Şekil 3.11

3.4.7 Lemma : $D_{ki}(\Gamma)$, imajiner eksene göre simetrik, yani eğer, $A(z) = -\bar{z}$ imajiner eksene göre yansıma ise, $z \in D_{ki}(\Gamma)$ ve buradan $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$.

İspat : A, imajiner eksenin bütün noktalarını sabit bırakan bir H-yansımadır. A, bir H-izometri ve $\forall T \in \Gamma$ için $A^{-1}TA \in \Gamma$ olduğundan

$$\rho(A(z), ki) = \rho(z, ki) \leq \rho(z, A^{-1}TA(ki)) = \rho(A(z), TA(ki)) = \rho(A(z), T(ki))$$

($D_{ki}(\Gamma)$ Dirichlet bölge olduğundan). Böylece $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$.

3.4.8 Lemma : $z \in F$, $S \in \Gamma \setminus \{I\}$ ve $w = S(z) \in F$ olsun. O zaman $z, w \in \partial F$ olur ve böylece ya z=w ya da z ve w imajiner eksene göre simetriktir.

İspat :

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

$|z| \geq 1$ ve $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq 2\,\mathrm{Re}(z) \leq 1$ olduğundan

$$|cz+d|^2 = (cz+d)(c\bar{z}+d) = c^2|z|^2 + 2cd\,\mathrm{Re}(z) + d^2 \geq c^2 - cd + d^2 \geq 1$$

bulunur (Son eşitsizlik eğer $cd \leq 0$ ise aşikardır. Eğer $cd > 0$ ise, $c^2 - cd + d^2 = (c-d)^2 + cd \geq 1$). Buradan

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \leq \mathrm{Im}(z)$$

elde edilir. z ve w 'nin yerlerini değiştirirsek (S yerine S^{-1} kullanarak) $\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(w)$ elde ederiz. Buradan $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$ ve $|cz+d|^2 = 1$ ve böylece yukarıdaki eşitsizliğin her biri bir eşitlik olur. Buradan

$$(c-d)^2 + cd = 1 \tag{3.7}$$

ve

$$c^2(|z|^2 - 1) + cd(2\,\mathrm{Re}(z) + 1) = 0 \tag{3.8}$$

bulunur. Üç durum olabilir.

(a) $c = 0, d = \pm 1$ olma durumunda $S(z) = z \pm 1$ ve böylece z ile w, F 'nin dik kenarı üzerinde hareket eder (Şekilde z_1 ile w_1 benzer).

(b) $c = \pm 1, d = 0$ olduğunda (3.8) denklemi $|z| = 1$ olur. Bu durumda $S(z) = (az \mp 1)/\pm z = \pm a - (1/z) = \pm a - \bar{z}$. $S(z) \in F$ olduğundan $a = 0,\ -1$ veya $+1$ 'dir. Eğer $a = 0$ ise, $S(z) = -(1/z)$ ve z ile $S(z)$ şekildeki gibi z_2 ile w_2 'ye benzerdir ($z_2 = w_2 = i$ olması hali). Eğer $a = \pm 1$ ise $z = (\pm 1 + i\sqrt{3})/2$ (Şekilde $z = z_3$ veya w_3) ve $S(z) = z$ dir.

(c) $c = d = \pm 1$ ve (3.8) denkleminde $|z| = 1$, $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$ ise $z = z_3$ 'tür. $S(z_3) \in F$ ve $S(z_3)$, z_3 ile aynı imajiner kısma sahip olduğundan ya $S(z_3) = z_3$ ya da $S(z_3) = w_3$ tür.

Bütün durumlarda $S(z) = z$ veya $S(z)$ ve z imajiner eksene göre simetriktir.

Şimdi $z_0 \in F$ olduğunu varsayalım. $D_{ki}(\Gamma)$, bir temel bölge olduğundan $T(z_0) \in D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$ olacak biçimde bir $T \in \Gamma$ vardır. Lemma 3.4.8 'den $z_0 = T(z_0)$ veya z_0 ve $T(z_0)$ imajiner eksene göre simetriktirler ve böylece 3.4.7 Lemmadan $z_0 \in D_{ki}(\Gamma)$ olur. Böylece $F \subseteq D_{ki}(\Gamma)$ bulunur. O halde $F = D_{ki}(\Gamma)$ elde edilir [1].

3.4.9 Teorem : $F = \left\{ z \in \mathbf{U} \;\middle|\; |z| \geq 1 \text{ ve } |\mathrm{Re}(z)| \leq \dfrac{1}{2} \right\}$ kümesi modüler grup için bir temel bölgedir.

İspat : $F = \left\{ z \in \mathbf{U} \;\middle|\; |z| \geq 1 \text{ ve } |\mathrm{Re}(z)| \leq \dfrac{1}{2} \right\}$ kümesinin modüler grup için Dirichlet bölgesi olduğunu biliyoruz. Her Dirichlet bölge bağlantılı bir temel bölge idi.

O halde $F=\left\{ z\in \mathbf{U} \;\middle|\; |z|\geq 1 \text{ ve } |\mathrm{Re}(z)|\leq \frac{1}{2}\right\}$ kümesi modüler grup için bağlantılı bir temel bölgedir.

3.4.10 Tanım : Fuchsian gruplar için temel bölgeler iyice karmaşık bir yapıya sahiptir. Onlar gerçel eksenin parçaları ve H-doğrularla sınırlanır. **U** 'da iki hiperbolik doğru kesişirse kesim noktalarına ***Dirichlet bölgenin bir köşesi*** denir. Köşelerin ayrık olduğu gösterilir. Böylece bir Dirichlet bölgenin sınırı H-doğruların (sonsuz çoklukta olabilir) ve gerçel eksenin mümkün olan parçalarının birleşiminden meydana gelir [1].

Bir temel bölge ile onun bütün görüntülerinin oluşturduğu **U** 'nun döşemesi ile ilgileneceğiz. Eğer bu temel bölge bir Dirichlet bölge ise bir Dirichlet döşeme gibi anlayacağız. Gelecek teoremde Dirichlet döşemenin yerel özelliklerini göreceğiz. Ama önce yeni bir kavramın verilmesi gerekmekte.

3.4.11 Tanım: Γ, Fuchsian grubunun bir F temel bölgesinin, her $a\in F$ noktası, sadece sonlu tane $T\in\Gamma$ için $V(a)\cap T(F)\neq\varnothing$ olacak biçimde bir $V(a)$ komşuluğuna sahipse, F temel bölgesine ***yerel sonlu*** (locally finite) denir [1].

3.4.12 Teorem : Her Dirichlet bölge yerel sonludur.

İspat : p, $\Gamma\setminus\{I\}$ 'nın herhangi bir öğesi tarafından sabit bırakılmayan bir nokta olmak üzere F temel bölgesini $D_p(\Gamma)$ Dirichlet bölgesi olarak alalım. $a\in F$ ve K, a 'nın bir kompakt komşuluğu olsun. Varsayalım ki Γ 'nın farklı öğelerinin bir $T_1, T_2, \ldots$ sonsuz dizisi için $K\cap T_i(F)\neq\varnothing$ olsun. $\sigma=\sup_{z\in K}\rho(p,z)$ alalım. $\forall z\in K$ için $\sigma\leq\rho(p,a)+\rho(a,z)$ bulunur. K, kompakt olduğundan, sınırlıdır ve σ sonludur. $w_j\in K\cap T_j(F)$ olsun. $z_j\in F$ için $w_j=T_j(z_j)$ olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$\rho(p,T_j(p))\leq\rho(p,w_j)+\rho(w_j,T_j(p))=\rho(p,w_j)+\rho(z_j,p)\leq\rho(p,w_j)+\rho(w_j,p)\leq 2\sigma$$

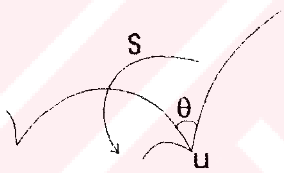
(PSL(2,IR) hiperbolik uzaklıkları korur ve $z_j\in D_p(\Gamma)$) bulunur. Böylece $T_1(p), T_2(p), \ldots$ noktalarının sonsuz kümesi p merkezli ve 2σ yarıçaplı kompakt H-topa aittir. Bu Sonuç 3.1.6 ile çelişkidir. Varsayım yanlıştır ve sadece sonlu tane $T\in\Gamma$ için $K\cap T_i(F)\neq\varnothing$ olacak biçimde bir K komşuluğu vardır. Yani $D_p(\Gamma)$ Dirichlet bölgesi yerel sonludur [1].

3.4.13 Tanımlar : a) F, Γ Fuchsian grubunun bir Dirichlet bölgesi ve u ile v, F 'nin köşeleri olsun. $T(u)=v$ olacak şekilde bir $T\in\Gamma$ varsa u ve v 'ye ***kongruent köşeler*** denir.

b) Kongruentlik F 'nin köşeleri üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve denklik sınıflarına ***devir*** (cycles) denir.

c) Eğer u bir S eliptik öğesi tarafından sabitlenirse v 'de TST^{-1} eliptik öğesi tarafından sabitlenir. Böylece bir devirin bir köşesi bir eliptik öğe tarafından sabitlenirse devirin diğer köşeleri de eliptik öğeler tarafından sabitlenir. Bu gibi bir devire ***eliptik devir*** denir ve devirin köşelerine de ***eliptik köşeler*** denir.

d) F Dirichlet bölgesi bir temel bölge olduğundan Γ 'nın bir S' eliptik öğesi tarafından sabitlenen **U**'nun her w noktası, bir $T \in \Gamma$ için $T(F)$ 'nin sınırında bulunur. Böylece $u = T^{-1}(w)$, F 'nin sınırı üzerinde bulunur ve $S = T^{-1}S'T$ eliptik öğesi tarafından sabitlenir. S eliptik olduğundan k sonlu mertebesine sahiptir. Varsayalım ki önce $k \geq 3$ olsun. S, H-doğruları H-doğrulara dönüştüren, fakat u 'yu sabit bırakan bir H-izometri olduğundan u, F 'nin bir köşesi olmalıdır ve bu köşedeki θ açısı en fazla $2\pi / k$ 'dır. Şekil 3.12 'de gösterildiği gibi. F hiperbolik konveks bölgesi H-doğruların bir birleşimi tarafından sınırlanır. F 'nin bu H-doğruların biri ile arakesiti ya bir tek noktadır ya da bir H-doğrunun parçasıdır. Bu parçalara F '***nin kenarları*** (sides) denir.



Şekil 3.12

Eğer S iki mertebeli ise, sabit noktası F 'nin bir kenarının üzerinde bulunur. Bu durumda S, sabit nokta tarafından ayrılmış bu kenarın iki parçasının yerlerini değiştirir. Böyle eliptik sabit noktaları, açıları π olan F 'nin köşeleri gibi göreceğiz. Böylece F 'nin bir köşesi, F 'nin iki sınır H-doğrusunun **U** 'da arakesitinin bir noktasıdır veya iki mertebeli bir eliptik öğenin bir sabit noktasıdır [1].

$PSL(2, \mathbb{R})$ 'nin sadece aşikar olmayan sonlu devirli alt grupları eliptik öğeler tarafından üretilirler ve $PSL(2, \mathbb{R})$ 'nin her bir eliptik öğesi **U** 'da tek bir sabit noktaya sahiptir. Aynı uyarı Γ Fuchsian grubunun eliptik öğelerine de uygulanabilir. Ayrıca **U** 'da bir nokta, Γ 'da bir aşikar olmayan kalımlaştırıcıya sahipse, Teorem 3.3.3 'ten bu kalımlaştırıcı Γ 'nın bir sonlu devirli alt grubudur. Lemma 1.4.12 'den bu sonlu devirli alt grup bir maksimal sonlu devirli alt gruptur .

3.4.14 Teorem : F 'nin eliptik devirleri ve Γ 'nın aşikar olmayan maksimal sonlu devirli alt gruplarının eşlenik sınıfları arasında bire-bir eşleme vardır [1].

3.4.15 Örnek : Γ, modüler grup olsun. Şekil 3.11 'deki F Dirichlet bölgesi, U 'da $z_3 = (-1+i\sqrt{3})/2$, $w_3 = (1+i\sqrt{3})/2$ ve i köşelerine sahiptir. Bunlar $z \mapsto (-z-1)/z$, $z \mapsto (z-1)/z$ ve $z \mapsto -(1/z)$ tarafindan üretilen devirli alt gruplar tarafindan kalımlaştırılırlar. $z \mapsto z+1$, z_3 'ü, w_3 'e eşlediğinden bu iki köşe aynı eliptik devire aittir. $2\pi/3$ 'e eşit veya küçük açılı F nin başka köşesi olmadığından bu iki köşe bir eliptik devir meydana getirirler. i noktası 2 mertebeli $z \mapsto -(1/z)$ eliptik öğesi tarafindan sabit bırakılır.

2 mertebeli bir eliptik öğe tarafindan sabitlenen F 'nin sınırının başka noktası olmadığından $\{i\}$, sadece bir köşeden oluşan bir eliptik devirdir. 3.4.14 Teoreminden modüler grup maksimal sonlu devirli alt gruplarının iki eşlenik sınıfina sahiptir. Bu iki eşlenik sınıfindan birini, 2 mertebeli gruplar, diğerini 3 mertebeli gruplar oluşturur [1].

3.4.16 Tanım : Γ 'nın maksimal sonlu alt gruplarının mertebelerine Γ 'nın ***periyodları*** denir. Her bir periyod Γ 'nın maksimal sonlu alt gruplarının eşlenik sınıflarının mertebeleri kadar tekrarlanır.

Böylece moduler grup 2,3 periyodlarına sahip olur. 3.2.5 'te tanımlandığı gibi π/l, π/m, π/n açıları ile bir hiperbolik üçgenden elde edilen bir üçgen grup l, m, n periyodlarına sahiptir [1].

Not : Bir parabolik öğe, sonsuz mertebeli bir eliptik öğe gibi ele alınabilir. Sonsuz periyodların biri göz önüne alınırsa, ∞ periyod, maksimal parabolik alt grupların eşlenik sınıflarıyla aynı sayıda meydana gelir. Örneğin modüler grupta her parabolik öğe, bir $n \in \mathbf{Z}$ için $z \mapsto z+n$ 'ye eşleniktir ve moduler grup 2, 3, ∞ periyodlarına sahiptir. Keyfi bir Γ Fuchsian grubunun her parabolik devirli altgrubu $\mathrm{IR} \cup \{\infty\}$ 'nın bir noktasını sabitler. Γ Fuchsian grubu için bu sabit noktayı bir köşe kabul eden bir Dirichlet bölgesi vardır. Bu köşe Dirichlet bölgenin sınırındaki iki H-doğrunun kesiştiği noktadır ve aradaki açı 0 'dır. Örneğin, 3.4.9 Teoreminde tanımlanan modüler grup için Dirichlet bölgesi ∞ 'da $\pi/\infty = 0$ açısına sahip bir köşeye sahiptir. Böylece Modüler grup $\pi/2$, $\pi/3$, π/∞ açıları ile elde edilen bir üçgen grup gibi incelenebilir [1].

3.4.17 Tanım : s, Γ Fuchsian grubu için bir F Dirichlet bölgesinin bir kenarı olsun. Eğer $T \in \Gamma \setminus \{I\}$ ve T(s), F 'nin bir kenarı ise s ve T(s) 'ye ***kongruent kenarlar*** denir. Şimdi T(s) ayrıca T(F) 'nin bir kenarıdır. Böylece $T(s) \subseteq F \cap T(F)$ 'dır. T(F), Dirichlet döşemede F 'nin bir komşu yüzü olduğundan $T(s) = F \cap T(F)$ olmalıdır. Bir kongruent kümede iki kenardan fazla kenar olamaz. Eğer olursa,

$T_1 \in \Gamma$ olmak üzere $T_1(s)$'yi F 'nin bir kenarı varsayabiliriz. $T_1(s) = F \cap T_1(F) \Rightarrow s = T^{-1}(F) \cap F = T_1^{-1}(F) \cap F \Rightarrow T = T_1$ bulunur. Sonuç olarak bir Dirichlet bölgenin kenarları kongruent eşler içine düşer. Eğer bir kenar 2 mertebeli bir S eliptik öğesinin bir sabit noktasına sahipse, S bu sabit nokta tarafından ayrılan kenarın iki parçasının yerlerini değiştirir ve böylece bu kenar kendisine kongruenttir. Bu iki kenar sabit nokta tarafından ayrılan farklı kenarlar gibi düşünülebilir [1].

3.4.18 Örnek : 3.4.9 Teoreminde bulunan modüler grup için temel bölgenin iki dik kenarı $z \mapsto z+1$ dönüşümü ile kongruenttir. z_3 ve w_3 arasında birim çember üzerindeki kenar 2 mertebeli $z \mapsto -1/z$ eliptik öğesi tarafından kendine eşlenir. Alternatif olarak bu kenarı z_3 'ten i 'ye ve i 'den w_3 'e iki kongruent kenarın birleşimi gibi kabul edebiliriz [1].

3.4.19 Teorem : $\{T_i\}$, Γ grubunun F Dirichlet bölgesinin kenarlarını eşleyen dönüşümlerin alt kümesi ise $\{T_i\}$, Γ grubunun üreteçlerinin kümesidir.

İspat : Λ, $\{T_i\}$ kümesi tarafından üretilen Γ 'nın bir altgrubu olsun. $\Lambda = \Gamma$ olduğunu göstermek istiyoruz. Varsayalım ki $S_1 \in \Lambda$ ve $S_2(F)$, $S_1(F)$ 'nin bir komşu yüzü olsun. $S_1^{-1}S_2(F)$ 'de F 'nin bir komşu yüzüdür. Bir $T_k \in \{T_i\}$ için $S_1^{-1}S_2 = T_k$ ve $S_2 = S_1 T_k$ olduğundan $S_2 \in \Lambda$ olur. Eğer $S_3(F)$, $S_1(F)$ ile bir v köşesinde kesişirse, v köşeli sadece sonlu tane yüz olabileceğinden, yukarıdaki yöntem tekrar kullanılırsa $S_3 \in \Lambda$ bulunur. Eğer $X = \bigcup_{S \in \Lambda} S(F)$, $Y = \bigcup_{S \in \Gamma \setminus \Lambda} S(F)$ alırsak $X \cap Y = \varnothing$. Açık olarak görülüyor ki $X \cup Y = \mathbf{U}$. Eğer X ve Y nin $\mathbf{U}$ 'nun kapalı altkümeleri olduğunu gösterebilirsek, $\mathbf{U}$ bağlantılı ve $X \neq \varnothing$ olduğundan $X = \mathbf{U}$ ve $Y = \varnothing$ buluruz. Bu da $\Lambda = \Gamma$ olduğunu gösterir ve ispatı tamamlarız.

Şimdi döşemenin yüzlerinin herhangi bir birleşimi olan $\bigcup V_j(F)$ 'nin kapalı olduğunu göstermek istiyoruz. Bir $l \in \mathbf{U}$ limitine yaklaşan $\bigcup V_j(F)$ 'nin noktalarının bir sonsuz (z_i) dizisinin olduğunu varsayabiliriz. Bir $A \in \Gamma$ için $l \in A(F)$ ve Teorem 3.4.12'den, l 'nin $V_j(F)$ 'lerden sadece sonlu tanesi ile kesişen bir N komşuluğu vardır.

Bu sonlu ailenin bir yüzü ki ona $V_m(F)$ dersek, $V_m(F)$, (z_i) 'nin l 'ye yaklaşan bir altdizisini içerir ve $V_m(F)$ kapalı olduğundan $l \in V_m(F) \subseteq \bigcup V_i(F)$. Buradan $\bigcup V_i(F)$, kapalıdır. Dolayısıyla da X ve Y kapalıdır [1].

3.4.20 Örnek : Modüler grup $z \mapsto z+1$ ve $z \mapsto -1/z$ tarafından üretilir [1].

3.5 U/Γ *Bölüm Uzayı*

U/Γ bölüm uzayını bir Dirichlet bölgenin kongruent kenarlarını özdeşleyerek elde edebiliriz. U/Γ bölüm uzayını oluşturalım. $[z]_\Gamma$ veya sadece $[z]$ ile z 'nin Γ-yörüngesini ve $\Pi: U \to U/\Gamma$, $\Pi(z)=[z]$ ile de verilen doğal izdüşümü (natural projection) tanımlayalım. $\Pi^{-1}(V)=\{z \in U \mid \Pi(z) \in V\}$, U 'da açıksa $V \subseteq U/\Gamma$ kümesine ***açık*** denir. Bu tanımla, Π bir sürekli ve açık eşlemedir.

3.5.1 Teorem : U/Γ bir bağlantılı Riemann yüzeyidir ve $\Pi: U \to U/\Gamma$ bir holomorfik dönüşümdür [1].

Fuchsian grupların bölüm uzayları Riemann yüzeyleridir. Küreye, düzleme veya tora homeomorf olmayan bir X Riemann yüzeyinin evrensel örtme uzayı U 'dur ve Λ, U 'da sabit noktasız hareket eden, U 'nun otomorfizmlerinin bir has süreksiz grubu olmak üzere, $X = U/\Lambda$ 'dır. Böylece 3.1.7 Teoreminden Λ bir Fuchsian gruptur ve U 'da sabit noktasız hareket ettiğinden eliptik öğeler içermez. Eğer Fuchsian gruplara eliptik öğeleri de katarsak her Riemann yüzeyi bir Fuchsian grup tarafindan U 'nun bölüm uzayı gibi gösterilebilir. Örneğin bir üçgen grubun bölüm uzayı küredir ve küreye homeomorf her Riemann yüzeyi $\sum$ Riemann küresine konform denk olduğundan, Γ bir üçgen grup olmak üzere $\sum$, U/Γ 'a konform denktir.

Riemann yüzeyleri göstermede eliptik öğesiz Fuchsian grupları kullanmanın avantajı, Riemann yüzeyleri ve eliptik öğesiz Fuchsian grupların eşlenik sınıfları arasında bire-bir eşleme olduğunu gösteren aşağıdaki teoremden açıktır.

3.5.2 Teorem : Λ_1, Λ_2 eliptik öğesiz Fuchsian gruplar olsunlar. U/Λ_1 ve U/Λ_2 'nin konform denk olmaları için gerekli ve yeterli koşul $T\Lambda_1 T^{-1} = \Lambda_2$ olacak biçimde bir $T \in PSL(2, IR)$ olmasıdır.

İspat : Λ_1 ve Λ_2, U da sabit noktasız hareket ettiklerinden U, U/Λ_1 ve U/Λ_2'nin bir örtme uzayıdır. Buradan U basit bağlantılı olduğundan U, U/Λ_1 ve U/Λ_2 'nin evrensel örtme uzayıdır. Böylece eğer $g: U/\Lambda_1 \to U/\Lambda_2$ bir konform homeomorfizma ise, Şekil 3.13 ile uyumlu olacak biçimde bir $\tilde{g}: U \to U$ otomorfizmi vardır. Burada $\Pi_i: U \to U/\Lambda_i$ (i = 1, 2) doğal izdüşüm dönüşümleridir.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\Pi_1"'] & U \arrow[d, "\Pi_2"] \\
U/\Lambda_1 \arrow[r, "g"'] & U/\Lambda_2
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.13

Aut $\mathbf{U} = PSL(2,IR)$ olduğundan $\tilde{g} = T \in PSL(2,IR)$ ve böylece

$$g[z]_{\Lambda_1} = [T(z)]_{\Lambda_2}$$

olur.

Şimdi eğer $S \in \Lambda_1$ ise $[z]_{\Lambda_1} = [S(z)]_{\Lambda_1}$ ve böylece $[TS(z)]_{\Lambda_2} = [T(z)]_{\Lambda_2}$ olur. $\forall z \in \mathbf{U}$ için $TS(z) = VT(z)$ olacak şekilde $V \in \Lambda_2$ vardır ve böylece $TST^{-1} = V \in \Lambda_2$ bulunur. Buradan $T\Lambda_1 T^{-1} \subseteq \Lambda_2$ ve $g^{-1}[z]_{\Lambda_2} = [T^{-1}(z)]_{\Lambda_1}$ kullanılarak benzer bir tartışma ile $T^{-1}\Lambda_2 T \subseteq \Lambda_1$ bulunur. Böylece $T\Lambda_1 T^{-1} = \Lambda_2$ elde edilir.

Tersine olarak eğer $T\Lambda_1 T^{-1} = \Lambda_2$ ise

$$[z]_{\Lambda_1} \to [T(z)]_{\Lambda_2}$$

dönüşümü $\mathbf{U}/\Lambda_1$ 'in $\mathbf{U}/\Lambda_2$ üzerine bir konform homeomorfizma dönüşümüdür [1].

Teorem keyfi Fuchsian gruplar için yanlıştır. Eğer farklı periyodlu iki üçgen grup gözönüne alınırsa izomorf değillerdir ve $PSL(2,IR)$ 'de eşlenik değillerdir. Bununla birlikte her grubun bölüm uzayı Riemann küredir. Ters durum yani, eşlenik Fuchsian grupların bölüm uzayları konform denk Riemann yüzeyleridir ve keyfi Fuchsian gruplar içinde doğrudur.

3.5.3 Teorem : Eğer Λ eliptik öğesiz bir Fuchsian grupsa, $N(\Lambda)$, $PSL(2,IR)$ 'de Λ 'nın normalleştiricisi olmak üzere $\mathrm{Aut}(\mathbf{U}/\Lambda) \cong N(\Lambda)/\Lambda$ 'dır.

İspat: $t: \mathbf{U}/\Lambda \to \mathbf{U}/\Lambda$, $\mathbf{U}/\Lambda$ 'nın bir otomorfizması olsun. Bir $T \in PSL(2,IR)$ için $t[z]_\Lambda = [T(z)]_\Lambda$ olur. Yukarıdaki teoremde $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ koyarsak $T\Lambda T^{-1} = \Lambda$ bulunur ve buradan da $T \in N(\Lambda)$ elde edilir. Tersine olarak eğer $T \in N(\Lambda)$ ise $t:[z]_\Lambda \to [T(z)]_\Lambda$ dönüşümü $\mathbf{U}/\Lambda$ 'nın bir otomorfizmasıdır. $T \to t$, $N(\Lambda)$ 'nın $\mathrm{Aut}(\mathbf{U}/\Lambda)$ üzerine bir homomorfizmasıdır. Burada Λ, $\mathrm{Aut}(\mathbf{U}/\Lambda)$ 'nın çekirdeğidir. Birinci izomorfizma teoreminden $\mathrm{Aut}(\mathbf{U}/\Lambda) \cong N(\Lambda)/\Lambda$ 'dır [1].

3.5.4 Sonuç: Λ eliptik öğesiz, devirsiz bir Fuchsian grupsa $\mathbf{U}/\Lambda$ 'nın otomorfizmlerinin her grubu Γ/Λ 'ya izomorftur. Burada Γ, $\Lambda \lhd \Gamma$ olacak biçimde bir Fuchsian gruptur.

İspat : Λ devirsiz bir Fuchsian grup olduğundan $PSL(2,\mathrm{IR})$ 'de Λ 'nın normalleştiricisi $N(\Lambda)$ bir Fuchsian gruptur. $N(\Lambda)=\Gamma$ alınırsa, $\Lambda \lhd \Gamma$ olur. Λ eliptik öğesiz olduğundan Γ 'da eliptik öğesizdir. 3.5.3 Teoreminden $\mathbf{U}/\Lambda$ 'nın otomorfizmlerinin her grubu Γ/Λ 'ya izomorftur.

3.5.5 Tanım : F, Γ Fuchsian grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. F 'nin kenarları Γ 'nın öğeleri tarafından eşlendiğinden, bir paralelkenarın karşılıklı kenarlarını özdeşleyerek bir tor elde ettiğimiz gibi, aynı yolla her eş kenarı özdeşleyerek $\mathbf{U}/\Gamma$ bölüm uzayını elde edebiliriz. Eşlenen kenarların eşlenen noktaları Γ ile belirlenen F 'nin noktaları olduğundan, eşlenen kenarların özdeşlenmesiyle elde edilen uzaya F ***Dirichlet bölgesinin bölüm uzayı*** denir ve F/Γ ile gösterilir [1].

3.5.6 Teorem : F, Γ Fuchsian grubu için bir Dirichlet bölgesi ise F/Γ, $\mathbf{U}/\Gamma$ 'ya homeomorftur.

İspat : $i:F \to \mathbf{U}$ kapsama ve $\psi: F \to F/\Gamma$, $\prod: \mathbf{U} \to \mathbf{U}/\Gamma$ 'da doğal izdüşüm dönüşümü olsun. $\theta: F/\Gamma \to \mathbf{U}/\Gamma$, Şekil 3.14 'deki diyagramla uyumlu olacak biçimde bir dönüşüm olsun. Bu, eğer $z \in F$ ise $\theta(\psi(z)) = \prod(z)$ demektir. Eğer $\psi(z_1)=\psi(z_2)$ ise S, F nin kenarlarını eşleyen dönüşüm olmak üzere $z_2 = S(z_1)$ ve böylece $S \in \Gamma$ olduğundan $\prod(z_1)=\prod(z_2)$ bulunur. Buradan da θ iyi tanımlıdır. Benzer olarak θ bire-bir örtendir. Şimdi eğer $V \subseteq \mathbf{U}/\Gamma$ ise

$$\psi^{-1}(\theta^{-1}(V)) = F \cap \prod{}^{-1}(V)$$

olur. Eğer V açıksa $\prod$ sürekli olduğundan $\prod^{-1}(V)$, $\mathbf{U}$ 'da açıktır ve böylece $F \cap \prod^{-1}(V)$, F 'de açıktır. Buradan $\psi^{-1}(\theta^{-1}(V))$, F 'de açıktır. Bölüm topolojisinin tanımından $\theta^{-1}(V)$, F/Γ 'da açıktır. Böylece θ süreklidir. Şimdi de θ 'nın açık bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi"'] & U \arrow[d, "\Pi"] \\ F/\Gamma \arrow[r, "\theta"'] & U/\Gamma \end{tikzcd}$$

Şekil 3.14

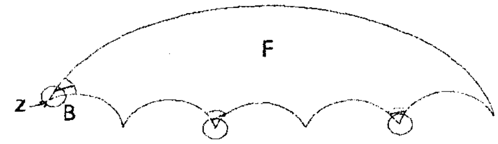
$A \subseteq F/\Gamma$ açık olsun ve $\langle z\rangle = \psi(z) \in A$. Her Dirichlet bölge yerel sonlu olduğundan, F de yerel sonludur. Böylece

$$\psi^{-1}(\langle z\rangle) = \{z = T_0(z), T_1(z), T_2(z), \ldots, T_s(z)\},$$

kümesi sonlu bir kümedir. $\psi^{-1}(A) = \tilde{A}$, F 'de rölatif açık ve $\psi^{-1}(\langle z\rangle)$ sonlu olduğundan,

$$T_j(B) \cap F \subseteq \tilde{A} \text{ ve } T(B) \cap F \neq \varnothing \text{ ise } T = T_j \ (1 \le j \le s) \qquad (3.9)$$

olacak biçimde z merkezli bir B hiperbolik diski vardır (Şekil 3.15 'te taralı yer).



Şekil 3.15

Şimdi $\theta(\langle z\rangle) = \prod(z) \in \prod(B)$ açıktır. Böylece $\prod(B) \subseteq \theta(A)$ olduğunu göstermek istersek $\theta(A)$, $\theta(\langle z\rangle)$ 'nın bir açık komşuluğudur.

$w \in B$ olmak üzere $[w] \in \prod(B)$ olsun. $T(w) \in \Gamma$ olacak biçimde $T \in \Gamma$ vardır. $T(B) \cap F \neq \varnothing$ bulunur. Böylece (3.9) formülü gereği $T = T_j$ $(1 \le j \le s)$ elde edilir. Buradan $T_j(w) \in T_j(B)$, $T_j(w) \in F$ ve (3.9) formülü gereği $T_j(w) \in \tilde{A}$. Buradan

$$[w] = \prod(w) = \prod(T_j(w)) \in \prod(\tilde{A}) = \prod i(\tilde{A}) = \theta(A)$$

olur [1].

3.5.7 Teorem : F, Γ Fuchsian grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. $\mathbf{U}/\Gamma$ 'nın kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul F 'nin, $\mathbf{U}$ 'nun bir kompakt alt kümesi olmasıdır.

İspat : Eğer F kompakt ise, F 'nin sürekli görüntüsü olan F/Γ 'da kompakttır. 3.5.6 Teoreminden F/Γ 'nın homeomorfu olan $\mathbf{U}/\Gamma$ 'da kompakttır. Tersine $\mathbf{U}/\Gamma$ 'nın kompakt olduğunu varsayalım. Yerel sonluluktan, eğer $[z] \in \mathbf{U}/\Gamma$ ise $\prod(z') = [z]$ olacak biçimde en fazla sonlu tane $z' \in F$ vardır. Şimdi F 'nin farklı öğelerinin sonsuz bir dizisi $z_1, z_2, \ldots$ olsun. Bu dizinin F 'de bir limit noktasına sahip olduğunu ve böylece F 'nin kompakt olduğunu göstereceğiz. Yerel sonluluktan $[z_1], [z_2], \ldots$ sonsuz tane nokta içeren bir dizidir. Böylece $[l] \in U/\Gamma$ limit noktasına sahiptir. $[l]$, F 'de sonlu tane $l_1, \ldots, l_r$ görüntü temsilcilerine sahiptir. Bunların en az birinin (z_j) dizisinin bir limiti olduğunu gösterelim. Aksi halde her l_i, U 'da dizinin noktalarının sadece sonlu sayısını içeren bir V_i komşuluğuna sahiptir. $l_1, \ldots, l_r$ aynı Γ-yörüngesinde bulunduklarından herbir V_i, $S(z_j)$ biçiminde sonlu tane nokta içerir. Buradan $\bigcap_{i=1}^{r} \Pi(V_i)$, $([z_j])$ dizisinin sadece sonlu tane noktasını içeren $[l]$ 'nin bir açık komşuluğudur. Bu da bir çelişkidir [1].

3.5.8 Teorem : Eğer U/Γ kompakt ise Γ, parabolik öğeler içermez.

İspat : U/Γ kompakt alalım. F, Γ için bir Dirichlet bölgesi olsun. 3.5.7 Teoreminden F kompakttır. Sonuç 3.1.6 'dan

$$\eta(z) = \inf\{\rho(z, T(z)) | T \in \Gamma \setminus \{I\},\ \text{T eliptik değil}\} > 0$$

dır. Her $T \in \Gamma$ için $\rho(z, T(z))$, z 'nin bir sürekli fonksiyonu olduğundan $\eta(z)$, z 'nin bir sürekli fonksiyonudur. Buradan F kompakt olduğundan $\eta = \inf\{\eta(z) | z \in F\}$ bulunur ve $\eta > 0$ 'dır. Eğer $z \in U$ ise $w = S(z) \in F$ olacak biçimde $S \in \Gamma$ vardır. Buradan eğer $T_0 \in \Gamma \setminus \{I\}$ eliptik değilse

$$\rho(z, T_0(z)) = \rho(S(z), S(T_0(z))) = \rho(w, ST_0S^{-1}(w)) > \eta$$

'dir ve böylece

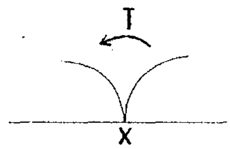
$$\inf\{\rho(z, T_0(z) | z \in U\} = \eta > 0$$

olur. Şimdi Γ 'nın parabolik öğeler içerdiğini varsayalım. PSL(2,IR) 'de Γ, Γ_1 'e eşlenik olduğunda U/Γ, U/Γ_1 'e homeomorf olduğundan Kesim 3.3 'ten $T_0(z)$ veya $T_0^{-1}(z)$ 'yi $z \mapsto z+1$ dönüşümü olarak varsayabiliriz. Bununla birlikte (2.3) 'ten $\text{Im}(z) \to \infty$ iken $\rho(z, z+1) \to 0$ olur. Bu da bir çelişkidir [1].

Sonsuz sayıda kenarlı bir Dirichlet bölge kompakt olmaz. Bununla beraber sonlu sayıda kenarlı Dirichlet bölgeler U 'da aşağıdaki yönlerden kompakt olmayabilir. İlk olarak bir köşe $\mathbb{IR} \cup \{\infty\}$ 'da olabilir. Örneğin grup bir T parabolik öğesine sahipse, T 'nin sabit noktası olan x, grubun bir Dirichlet bölgesinin bir köşesidir ve son noktaları x olan iki kenar T tarafından eşlenir (Şekil 3.16). Böyle bir köşeye ***parabolik köşe*** denir ve bölüm uzayı parabolik köşelere eşlenen noktalarda bir deliğe sahiptir. Örneğin modüler grubun, $z \mapsto z+1$ parabolik öğesi ∞ sabit noktasına sahiptir ve Şekil 3.11 'deki Dirichlet bölgenin iki dik kenarı bu öğe tarafından eşlenir.

Bölüm uzayı bir delikli küredir ve düzleme homeomorftur. İkinci olarak Dirichlet bölge gerçel eksenin bir parçası tarafından sınırlanır. Örneğin $z \mapsto z+1$ tarafından üretilen parabolik devirli grup için i merkezli Dirichlet bölgesi

$\left\{ z \in \mathbf{U} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(z) \le \frac{1}{2} \right\}$ 'dir. Bu Dirichlet bölge gerçel eksenin $\left\{ x \in \mathrm{IR} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \right\}$ parçası tarafından sınırlanır. Ayrıca bu Dirichlet bölge ∞ 'da bir köşeye sahiptir. Bölüm uzayı bir kapalı diskle taşınan (gerçel eksenin parçasına eşlenen) bir küre ve bir deliktir (∞ 'a eşlenen). Bu bir silindire homeomorftur (Taşınan bir disk topolojik olarak bir deliğe denk, fakat konform olarak denk değildir) [1].



Şekil 3.16

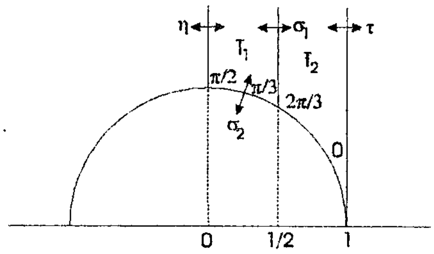
3.6 *Bir Temel Bölgenin Hiperbolik Alanı*

3.6.1 Teorem : F_1 ile F_2, Γ Fuchsian grubunun iki temel bölgesi olsun. F_1 ile F_2 'nin sınırlarının hiperbolik alanlarının sıfır olduğunu varsayalım. $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ 'dir [1].

Bu teoremin önemi, bir temel bölgenin hiperbolik alanının grubun bir nümerik değişmezi olduğudur. Sınır hiperbolik alanı hemen hemen sıfır olduğunda bile, koşul sağlanacaktır. Örneğin bir Dirichlet bölgenin sınırı, H-doğruların sayılabilir bir birleşimidir ve böylece hiperbolik alan sıfırdır.

Bu sonsuz hiperbolik alana sahip bir temel bölge için bile mümkündür. Örneğin önceki bölümün sonunda sözedilen $z \to z+1$ tarafından üretilen parabolik devirli grup için Dirichlet bölge sonsuz hiperbolik alana sahiptir. Teorem yorumlandığında; eğer grup için bir temel bölge sonsuz hiperbolik alana sahipse, grup için bütün temel bölgeler sonsuz hiperbolik alana sahiptir (sınırlar sıfır hiperbolik alana sahip varsayılmaktadır). Bir kompakt temel bölge (Aslında $\mathbf{U}$ 'nun her kompakt altkümesi) sonlu hiperbolik alana sahiptir. Bununla birlikte kompakt olmayan temel bölgelerde sonlu hiperbolik alana sahip olabilirler. Örneğin Şekil 3.11 'deki modüler grup için Dirichlet bölge $\pi/3$, $\pi/3$, 0 açıları ile bir hiperbolik üçgendir ve böylece Gauss-Bonnet teoreminden $\pi/3$ hiperbolik alanına sahiptir.

3.6.2 Örnek : T_1 ve T_2 şekil 3.17 'deki gibi iki hiperbolik üçgen olsun.



Şekil 3.17

$\Gamma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \eta\}$ grubu $(0, \pi/2, \pi/3)$ açılı ve $\Gamma_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau\}$ grubu $(0, 0, 2\pi/3)$ açılıdır. Burada η, σ_1 ve τ sırasıyla $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ ve $x = 1$ doğrularına göre h-yansımalardır. σ_2 ise $|z| = 1$ h-doğrusuna göre h-yansımadır. Açık olarak görülür ki

$$\eta\sigma_1 = \sigma_1\tau$$

böylece $\eta \in \Gamma_2$ ve $\tau \in \Gamma_1$ bulunur. Buradan $\Gamma_1 = \Gamma_2$ elde edilir. Hatta bu grubun konform izometrilerinin alt grubu modüler gruptur ve böylece Γ_1 ayrıktır. Gauss-Bonnet Teoremine göre

$$\mu(T_1) = \pi - (\pi/2) - (\pi/3) = \pi/6 \text{ ve } \mu(T_2) = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$$

bulunur. Buradan

$$\mu(T_2) = 2\mu(T_1)$$

olduğundan T_2, Γ_2 için bir temel bölge değildir [5].

Gauss-Bonnet Teoremi temel bölgelerin geniş bir sınıfının hiperbolik alanını hesaplamada kullanılacaktır. Bunu uygulamak için köşelerdeki açıların toplamını bilmeye ihtiyacımız var.

3.6.3 Teorem : F, Γ Fuchsian grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. F 'nin köşelerinin bir kongruent kümesindeki iç açılar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t$ olsunlar. Bu köşelerin birinin Γ 'da kalımlaştırıcısının mertebesi m olsun. O zaman $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_t = 2\pi/m$ 'dir.

(Uyarılar :

1. F yerel sonlu olduğundan bir kongruent kümede sadece sonlu tane köşe vardır.

2. Bir kongruent kümede iki noktanın kalımlaştırıcıları Γ 'nın eşlenik altgrupları olduklarından, kalımlaştırıcılar aynı mertebelidir.)

İspat : v_i 'deki iç açı θ_i olmak üzere $v_1, v_2, \ldots, v_t$ kongruent kümeye ait köşeler ve Γ 'da v_1 'in kalımlaştırıcısı $H = \{I, S, S^2, \ldots, S^{m-1}\}$ olsun. $0 \leq r \leq m-1$ olmak üzere $S^r(F)$ bölgelerinin hepsi v_1 'de θ_1 açılı bir köşeye sahiptirler. Şimdi $T_k(v_k) = v_1$ $(T_k \in \Gamma)$ olduğunu varsayalım. v_k 'yı v_1 'e eşleyen bütün öğelerin kümesi m elemanlı HT_k kosetidir. $S^rT_k(F)$ bölgelerinin hepsi θ_k açılı v_1 köşesine sahiptirler. Başka bir biçimde $A(F)$ $(A \in \Gamma)$ bölgesi, bir v_1 köşesine sahipse $A^{-1}(v_1) \in F$ ve böylece bir i $(1 \leq i \leq t)$ için $A^{-1}(v_1) = v_i$ elde edilir. Buradan $A \in HT_i$ olur ki $A(F)$ bölgesi yukarıdaki tanımlamada içerilmiştir. Böylece v_1 köşesi etrafında mt bölge vardır ve v_1 köşesindeki her bir θ_i açısı m kez tekrarlanır. Bu bölgeler farklıdır. Eğer $S^rT_k(F) = S^qT_l(F)$ ise $S^rT_k = S^qT_l$ olur ki buradan $T_k = T_l$ ve $S^r = S^q$ bulunur. Böylece

$$m(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_t) = 2\pi$$

sonucu elde edilir [1].

3.6.4 Tanım : U/Γ kompaktlığı ile bir Γ Fuchsian grubu verilsin. 3.5.7 Teoreminden Γ için bir F Dirichlet bölgesi kompakttır ve sonlu sayıda kenara sahiptir. Böylece F 'nin sonlu sayıda köşesi ve buradan da sadece sonlu tane eliptik deviri vardır. 3.4.14 Teoreminden Γ, sonlu sayıda $m_1, \ldots, m_r$ periyoduna sahiptir. Eğer U/Γ, g cinsine sahipse **Γ, (g; m_1, ..., m_r)** ***simgesine sahiptir*** denir [1].

3.6.5 Teorem : Γ, (g; $m_1, \ldots, m_r$) simgesine sahip olsun. Eğer F, sınır hiperbolik alanı sıfır olan, Γ için bir temel bölge ise

$$\mu(F) = 2\pi\left\{(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right\}$$

'dir.

İspat : 3.6.1 Teoreminden F 'yi Γ için bir Dirichlet bölge olarak varsayabiliriz. 3.4.14 Teoreminden F, köşelerin r tane eliptik devirine sahiptir. 3.6.3 Teoreminden bütün eliptik köşelerdeki açıların toplamları $2\pi\sum_{i=1}^{r}(1/m_i)$ 'dir. Diğer köşelerin eşlenik sınıflarını s tane varsayabiliriz. Bunların hiçbiri bir eliptik öğe tarafından sabitlenmez. 3.6.3 Teoreminden bu köşelerdeki açıların toplamları $2\pi s$ 'dir. F 'nin açılarının toplamı

$$2\pi\left\{\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{m_i}\right) + s\right\}$$

'dir. F 'nin kenarları Γ 'nın öğeleri tarafından eşlenir. Bu eşlenen kenarları belirlemek istersek 3.5.6 Teoreminden g cinsli bir kompakt yönlendirilebilir yüzey elde ederiz. Eğer böyle eşler n tane ise, F nin köşelerinin, ayrıtlarının ve içinin $\mathbb{U} \to \mathbb{U}/\Gamma$ izdüşümü altında görüntüleri, $\mathbb{U}/\Gamma$'nın $(r+s)$ köşeye, n ayrıta ve bir basit bağlantılı yüze ayrışımını verir. Euler-Poincare formülünden

$$2-2g=(r+s)-n+1 \tag{3.10}$$

bulunur. Gauss-Bonnet teoremi ve (3.10) 'dan

$$\mu(F)=(2n-2)\pi-2\pi\left\{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{m_i}\right)+s\right\}$$

$$=(4g-4+2r+2s)\pi-2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{m_i}-2\pi s$$

$$=2\pi\left\{(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\right\}$$

elde ederiz [1].

(3.10) denklemi $\mathbb{U}/\Gamma$ 'nın cinsini hesaplamak için kullanılır.

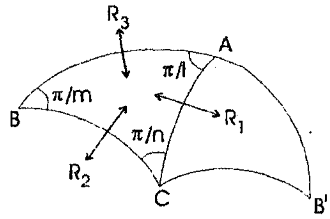
3.6.6 Örnekler : 1) Γ, 3.2.5 'te tanımlandığı gibi π/l, π/m, π/n açılarıyla bir hiperbolik üçgenden elde edilen bir üçgen grup olsun. Üçgenin kenarlarındaki yansımalar Şekil 3.18 'de gösterildiği gibi R_1, R_2, R_3 ise AB, AB′ kenarları R_1R_3 ile eşlenir ve BC, B′C kenarları R_1R_2 ile eşlenir. Böylece iki eşlenik eş vardır ve $n=2$ 'dir (ABCB′, Γ için bir temel bölgedir). $\{B, B'\}$ bir eliptik devirdir ve her iki köşe m mertebeli devirli gruplar tarafından kalımlaştırılır. $\{A\}$ bir eliptik devirdir ve l mertebeli bir devirli grup tarafından kalımlaştırılır. $\{C\}$ bir eliptik devirdir ve n mertebeli bir devirli grup tarafından kalımlaştırılır. Böylece $r=3$, $s=0$ ve buradan

$$2-2g=3-2+1=2$$

olup $g=0$ bulunur (Alternatif olarak, AB 'yi AB′ 'ye ve CB 'yi de CB′ 'ye yapıştırarak küreye homeomorf olan bir yüzey elde ederiz). Böylece $\mathbb{U}/\Gamma$, 0 cinsine sahiptir ve Γ, l, m,n periyodlarına sahiptir. Buradan Γ 'nın simgesi (0; l, m, n) 'dir. Γ için bir temel bölgenin hiperbolik alanı

$$2\pi\left\{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right\}$$

’dir.



Şekil 3.18

2) $g > 1$ cinsli kompakt bir S Riemann yüzeyinin örtme dönüşümlerinin grubu olan Λ Fuchsian grubunu göz önüne alalım (**U** ’yu, S ’nin örtme uzayı gibi düşünüyoruz). Λ, sabit noktasız hareket ettiğinden eliptik öğesi yoktur ve (g; —) simgesine sahiptir. Burada — periyod olmadığını gösterir. 3.5.8 Teoreminden Λ ’nın parabolik öğeleri de yoktur. O halde Λ birim öğeyi ve hiperbolik öğeleri içerir [1].

3.6.7 Teorem : $g \geq 0$, $m_i \geq 2$ tamsayılar ve

$$2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0$$

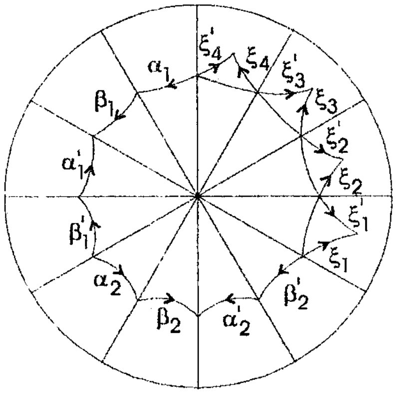
ise $(g; m_1, \ldots, m_r)$ simgesine sahip bir Fuchsian grup vardır.

İspat : Hiperbolik geometrinin birim disk modelini kullanmak daha uygundur. Burada H-doğrular çemberler ve D birim diskinin sınırına dik Öklid doğrularıdır. D ’nin merkezinden eşit açılarda (4g+r) uzunluklu çap çizelim. $0<t<1$ olsun ve her yarıçap boyunca merkezden t Öklid uzaklığında noktalar seçelim. Eğer H-doğrularla birbiri ardına gelen noktaları birleştirirsek, bir düzgün $M(t)$ hiperbolik poligonu elde ederiz. $M(t)$ ’nin ilk r tane kenarı üzerinde, üçgenlerin eşit kenarları arasındaki açılar $2\pi/m_1$, ..., $2\pi/m_r$ olacak şekilde r tane dış ikizkenar üçgen oluşturalım. Bu üçgenlerle $M(t)$ ’nin birleşimi $4g + 2r$ kenarlı bir $N(t)$ hiperbolik yıldızgıl poligondur. Bu kenarlara α_1, β_1, α_1', β_1', ..., α_g, β_g, α_g', β_g', ξ_1, ξ_1', ..., ξ_r, ξ_r' adlarını verip, şekil 3.12 ’deki gibi yönlendirelim. (Burada $g = 2$, $r = 4$ dır).

$N(t)$ ’nin hiperbolik alanı t, 0 ’a yaklaştığında 0 ’a yaklaşır ve Sonuç 2.3.7 ’den t, 1 ’e yaklaştığında, $(4g + 2r - 2)\pi - \sum_{i=1}^{r} 2\pi/m_i$ değerine yaklaşır. Buradan 0 ile 1 arasındaki bir t_0 değeri için $N(t_0)$ ’ın hiperbolik alanı

$$2\pi\left\{(2g - 2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right\}$$

’dır.



Şekil 3.19

α_i, α_i' aynı hiperbolik uzunlukta oluşturulduğundan β_j, β_j' ve ξ_k, ξ_k' 'da aynı hiperbolik uzunluktadır. Buradan

$$A_i(\alpha_i') = \alpha_i,\ B_j(\beta_j') = \beta_j,\ X_k(\xi_k') = \xi_k$$

olacak şekilde $A_i, B_j, X_k (i,\ j = 1,\ \ldots,\ g;\ k = 1,\ \ldots,\ r)$ hiperbolik izometrileri vardır.

Köşelerin kongruent sınıflarını hesaplayalım. α_1' 'nün sonuna v_1 diyelim. Bu tepe α_1 'in sonuna kongruenttir. α_1 'in sonunda olan köşeye v_2 diyelim ki bu köşe döndürüldüğünde β_1' 'nün başlangıcına kongruenttir. β_1' 'nün başlangıcına v_3 diyelim. Bu yönde devam ederek $M(t_0)$ orijinal poligonunun $(4g+r)$ tane köşesi bir kongruent küme meydana getirir. Diğer r tane $w_1, \ldots, w_r$ köşenin her biri tek öğeli r tane kongruent küme oluşturur.

$N(t_0)$ 'ın hiperbolik alanı

$$2\pi\left\{(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right\}$$

olduğundan 2.3.5 Gauss-Bonnet Teoremi, $v_1, v_2, \ldots, v_{4g+r}$ köşelerinin kongruent kümesinde açıların toplamının 2π olduğunu gösterir. Şimdi Γ,

$$\{A_i,\ B_j,\ X_k :\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ g;\ k = 1,\ \ldots,\ r\}$$

ile üretilen bir grup olsun. $N(t_0)$ 'ın Γ için bir temel bölge olduğunu göstermek istiyoruz. 3.6.3 Teoremiyle karşılaştırırsak $v_1,\ \ldots,\ v_{4g+r}$ köşelerindeki açıların toplamının 2π ve w_k 'deki açının $2\pi / m_k$ olması gerektiğini görürüz. Aslında bu koşullar sağlandığından $N(t_0)$ 'ın Γ-resimleri D 'yi üst üste gelmeyecek şekilde örter.

Böylece $N(t_0)$, Γ için bir temel bölgedir. Böylece Γ, hiperbolik izometrilerin bir has süreksiz grubudur. Eğer Γ 'yı $\mathbb{U}$ 'ya taşırsak bir Fuchsian grup elde ederiz.

D/Γ bölüm uzayı $(r+1)$ tane köşeye, $(2g+r)$ ayrıta ve basit bağlantılı bir yüze ayrışır. D/Γ 'nın h cinsi

$$2-2h=(r+1)-(2g+r)+1=2-2g$$

Euler-Poincaré formülünü sağlar ve buradan $h=g$ bulunur. r tane $\{w_1\}$, ..., $\{w_r\}$ eliptik devir vardır ve kalımlaştırıcıları m_1, ..., m_r mertebelerine sahiptir. Buradan Γ, $(g;\ m_1,\ \ldots,\ m_r)$ simgesine sahiptir [1].

3.6.8 Tanım : $(g;\ m_1,\ \ldots,\ m_r)$ simgeli bir Fuchsian grup verilsin.

$$\langle A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\ \ldots,\ A_g,\ B_g,\ X_1,\ \ldots,\ X_r \mid X_1^{m_1}=\ \ldots\ =X_r^{m_r}$$

$$=X_1X_2\ldots X_rA_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\ldots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1}=1\rangle \qquad (3.11)$$

ifadesine ***Fuchsian grubun cebirsel gösterimi*** denir. Burada X_i 'ler eliptiktirler ve A_k, B_k hiperboliktir. Eğer

$$(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\leq 0$$

ise, $(g;\ m_1,\ \ldots,\ m_r)$ simgesi ile bir Fuchsian grubun olmadığı açıkça görülür. Örneğin, (1;—) simgeli bir Fuchsian grup yoktur. Bu, 1 cinsli kompakt bir Riemann yüzeyini gösteren eliptik öğeli bir Fuchsian grubun olmadığını bulmaya alternatif bir ispat verir. Bununla beraber eğer

$$(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)=0$$

ise, bu simgeye eşlenen, $\mathbb{C}$ üzerinde hareket eden Öklidiyen izometrilerin bir grubu vardır. Örneğin bir latis (1;—) simgesine eşlenir ve $1/l+1/m+1/n=1$ olmak üzere π/l, π/m, π/n açılı üçgenlerden $(0;2,4,4),(0;2,3,6),(0;3,3,3)$ Öklidiyen üçgen gruplarını elde ederiz. Eğer

$$(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)<0$$

ise küresel üçgen grupları kapsayan kürenin izometrilerinin gruplarını elde ederiz [1].

3.6.9 Teorem : Eğer F, $\mathbf{U}/\Gamma$ kompaktlığı ile Γ Fuchsian grubu için bir Dirichlet bölge ise $\mu(F) \geq \pi/21$. Eğer $\mu(F) = \pi/21$ ise Γ, $(0;2,3,7)$ simgeli bir üçgen gruptur.

İspat : Bu 3.6.5 Teoremi kullanılarak hesaplanabilir. Eğer $g \geq 2$ ise $\mu(F) \geq 4\pi$. Eğer $g = 1$ ise $\mu(F) \geq 0$ olduğundan periyodları olmalı ve $\mu(F) \geq \pi$. $(1;2)$ simgeli bir grup için minimum bulunur. Eğer $g = 0$ ise

$$\mu(F) = 2\pi\left(-2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right).$$

$1-(1/m_i) \geq \frac{1}{2}$ olduğundan $\mu(F) \geq 2\pi(-2+(r/2)) = \pi(r-4)$ olur. Böylece eğer $r \geq 5$ ise $\mu(F) \geq \pi$ ve $(0;2,2,2,2,2)$ simgesi ile bir grup için minimum bulunur. Eğer $r = 4$ ve $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$ ise $\mu(F) = 0$ bulunur ki bu imkansızdır. $\mu(F)$ 'nin minimum değeri $r = 4$ için, $\mu(F) \geq \pi/3$ 'ü veren $(0;2,2,2,3)$ simgeli bir gruba eşlenir. Geriye sadece $g = 0$, $r \leq 3$ durumları kaldı. Eğer $g = 0$, $r \leq 2$ ise $\mu(F) < 0$ olur. O halde biz sadece $g = 0$, $r = 3$ durumunu göz önüne alalım. Böylece Γ, $(0;m_1,m_2,m_3)$ simgesine sahiptir ve

$$\mu(F) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}\right)$$

'dır. $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ olarak varsayabiliriz. Eğer $m_1 \geq 4$ ise $\mu(F) \geq \pi/2$. Eğer $m_1 = 3$ ise $(0;3,3,3)$ simgesi ile $\mu(F) = 0$ olur. O halde minimum değer $(0;3,3,4)$ için $\mu(F) \geq \pi/6$ olur. Eğer $m_1 = 2$ ise $m_2 > 2$ ve eğer $m_2 \geq 4$ ise $\mu(F) \geq \pi/10$ olur ki minimum eşleme $(0;2,4,5)$ 'tir. Eğer $m_2 = 3$ ise $(0;2,3,6)$ simgesi ile $\mu(F) = 0$ olur ve buradan minimuma $(0;2,3,7)$ için ulaşılır. Burada $\mu(F) \geq \pi/21$ 'dir [1].

3.6.10 Tanım : Eğer Γ, sonlu hiperbolik alanlı bir F Dirichlet bölgesine sahipse F, sonlu sayıda kenara sahiptir ve 3.4.19 Teoreminden Γ, sonlu üreteçlidir. Γ 'da r tane $m_1,\ldots,m_r$ mertebeli eliptik devirli grubun eşlenik sınıfı, s tane parabolik devirli grubun eşlenik sınıfı ve $\mathbf{U}/\Gamma$ 'nın cinsinin g olduğunu varsayalım. O zaman Γ ,

$$(g;m_1,\ldots,m_r;s) \tag{3.12}$$

simgelidir denir.

3.6.5 Teoreminin ispatına benzer bir yöntemle

$$\mu(F) = 2\pi\left\{(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right) + s\right\}$$

olduğunu gösterebiliriz ve 3.6.9 Teoremindeki gibi eğer $s>0$ ise $\mu(F) \geq \pi/3$ olur ki bu modüler grup için minimumdur. Buradaki simge $(0;2,3;1)$ 'dir (Böylece 3.6.9 Teoreminin hipotezindeki gibi $\mathbf{U}/\Gamma$ 'nın kompakt olması gerekli değildir.)

Eğer $\mu(F) \geq 0$ ise 3.6.7 Teoreminin ispatına benzer bir yöntemle $(g;m_1,\ldots,m_r;s)$ simgeli bir Γ grubunun varolduğunu gösterebiliriz (Diskin sınırı üzerinde dik, yani açıları 0 olan s tane ikizkenar üçgene gereksinim duyarız). Γ grubunun cebirsel yapısı onun simgesi ile belirlenir. $(g;m_1,\ldots,m_r;s)$ simgeli bir grubun gösterimi

$$\langle A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g,X_1,\ldots,X_r,P_1,\ldots,P_s \,\big|\, X_1^{m_1} = \ldots = X_r^{m_r}$$
$$= P_1\ldots P_s X_1\ldots X_r A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\ldots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1} = I\rangle$$

biçimindedir.

3.6.11 Teorem : Γ bir Fuchsian grup ve Λ, Γ 'nın n indeksli bir altgrubu olsun. Eğer Γ 'nın Λ-yörüngeleri içine bir ayrışımı

$$\Gamma = \Lambda T_1 \cup \Lambda T_2 \cup \ldots \cup \Lambda T_n$$

ve F, Γ için bir temel bölge ise

(i) $F_1 = T_1(F) \cup T_2(F) \cup \ldots \cup T_n(F)$, Λ için bir temel bölgedir

(ii) $\mu(F)$ sonlu ve F 'nin sınırının H-alanı sıfır ise $\mu(F_1)/\mu(F) = n$ 'dir.

İspat : (i) $z \in \mathbf{U}$ alalım. F, Γ için bir temel bölge olduğundan, bir $T \in \Gamma$ için $z = T(w)$ olacak biçimde $w \in F$ vardır. Şimdi $S \in \Lambda$ ve $1 \leq i \leq n$ için $T = ST_i$ 'dir. Buradan

$$z = ST_i(w) = S(T_i(w)).$$

$T_i(w) \in F_1$ olduğundan z, F_1 'in bir noktasının Λ-yörüngesindedir. Böylece F_1 'in Λ-görüntülerinin birleşimi $\mathbf{U}$ 'dur.

Şimdi $z \in \mathring{F}_1$ ve bir $S \in \Lambda$ için $S(z) \in \mathring{F}_1$ olduğunu varsayalım. S=I olduğunu ispatlamalıyız. $\varepsilon > 0$ yeterince küçük olsun. $B_\varepsilon(z)$, z merkezli, ε yarıçaplı bir H-disk olmak üzere, $\mathring{F}_1$ kümesinde kapsanır. $B_\varepsilon(z)$, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere T_1, …, T_n altında $\mathring{F}$ 'nin görüntülerinin k tanesi ile aşikar olmayan bir arakesite sahiptir. Bu görüntülerin $T_{i_1}(\mathring{F})$, …, $T_{i_k}(\mathring{F})$ olduklarını varsayalım. $B_\varepsilon(S(z)) = S(B_\varepsilon(z))$ ile $T_j(\mathring{F})$ 'nin $(1 \leq j \leq n)$ boş olmayan bir arakesite sahip olduklarını söyleyebiliriz. $B_\varepsilon(z)$ ile

$S^{-1}T_j(\overset{\circ}{F})$ 'nin boş olmayan bir arakesiti vardır ve $1 \le l \le k$ olmak üzere $S^{-1}T_j = T_{i_l}$ 'dır.
Buradan

$$\Lambda T_j = \Lambda S^{-1} T_j = \Lambda T_{i_l}$$

böylece $T_j = T_{i_l}$ ve $S = I$ 'dır. Buradan $\overset{\circ}{F}_1$, her Λ-yörüngesinin bir noktasını bulundurur.

(ii) Her $T \in PSL(2, IR)$ için $\mu(T(F)) = \mu(F)$ olduğundan, $i \ne j$ için $\mu(T_i(F) \cap T_j(F)) = 0$ olduğu görülür.

KAYNAKÇA

[1] Jones, G.A., Singerman, D., Complex Functions, Cambridge University, (1987).

[2] Başkan, T., Ayrık Gruplar, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, (1980).

[3] Bizim, O., Genişletilmiş Modüler Gruplar, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995.

[4] Talu, Y., Ayrık Gruplar ve Temel Bölgeler, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1984.

[5] Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, Newyork, (1983).

[6] Mutlu, M., Öklidiyen Olmayan Geometri, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995.

[7] Ford, L.R., Automorphic Functions, New York, 1951.

[8] Özdemir, H.B., Şahin R., Fuchsian Gruplar Üzerine Bir Çalışma, Sarımsaklı'da Matematik Günleri Matematik Sempozyumu, 1997.

[9] Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Uludağ Üniversitesi, Bursa, (1996) (II.Baskı).

[10] MacBeath, A.M., Discontinuous Groups and Birational Transformations, Proc. Dundee Summer School, 1961.