T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşen KARAMETE

Balıkesir, Ağustos-1996

ÖZ

Lineer Diferansiyel DenklemlerinYaklaşık Çözümü İçin Taylor Sıralama Yöntemi

Ayşen KARAMETE

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Balıkesir, 1996

Bu çalışmada, yüksek mertebeden değişken katsayılı bir lineer adi diferansiyel denklemin verilen karışık koşullara göre yaklaşık çözümlerini Taylor polinomları cinsinden bulmak için bir Taylor-Sıralama Yöntemi sunulmuştur. Burada, problemin $a \leq x \leq b$ tanım aralığındaki Taylor-Sıralama noktalarının yardımıyla Taylor Matris Yöntemi geliştirilmiş ve diferansiyel denkleme uygulanarak, denklem sıralama noktalarına bağlı bir matris denklemine veya bir cebirsel sisteme dönüştürülmüştür.

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur: Birinci bölümde, problemin tanımlanması, sıralama noktalarının nasıl tespit edildiği; ikinci bölümde bilinmeyen fonksiyonun, türevlerinin ve koşulların matris formları ve diferansiyel denklemin matris denklemine dönüştürülmesi; üçüncü bölümde de çözüm yöntemi sunulmuştur. Dördüncü bölümde, yöntemin önemli özelliklerini açıklayan örnekler sunulmuş; beşinci bölümde ise sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sıralama Noktaları, Taylor Polinomları, Taylor-Matris Yöntemi, Diferansiyel Denklemler.

ABSTRACT

Taylor Collocation Method for Approximately Solving Linear Differantial Equations

Ayşen KARAMETE

Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics Education

M.Sc. Thesis / Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Balıkesir-Turkey, 1996

In this study, a Taylor Collocation method for approximately solving higher order linear differantial equations in term of Taylor polynomials is presented. Here, Taylor Matrix method is devoloped by means of Taylor Collocation points and applying to differantial equation, it is transformed to a matrix equation or an algebraic system, which is based on Collocation points.

This study consists of five chapters. In the first chapter, the problem and collacation points are defined. In the second chapter, matrix forms of the unknown function and it is derivatives and transformation of differantial equation to matrix equation are given. In the third chapter, the method of solution is presented. In the fourth, examples are given which illustrate the partinent features of the method and in the last chapter, results are discussed.

Key Words: Collacation points, Taylor Polynomials, Taylor-Matrix Method, Differantial Equations.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Kısaltmalar	Açıklamalar
$y^{(n)}(c)$	Taylor Polinomunun Katsayıları
x_i	Sıralama Noktaları
N	Kesme Sınırı
$P_k(x)$	Diferansiyel Denklemin Katsayıları
$\tilde{W}$	Artırılmış Matris
$\tilde{W}^*$	Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
F^*	Sağ Taraftaki Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
R_n	Ortalama Hata

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans tez danışmanım olmayı kabul ederek, kısa bir süre içerisinde bu çalışmayı ortaya çıkarmamı sağlayan ve kısıtlı imkanlarımız çerçevesinde, her konuda bana yardımcı olan Dokuz Eylül Üniversitesi Öğretim Üyesi, Sayın Hocam Prof.Dr. Mehmet SEZER'e; yaptığı girişimler sonucunda, danışman hocamla tanışmamı ve de çalışmamı sağlayan ve bu konuda her türlü yardımı gösteren Sayın Hocam Doç.Dr. Mehmet ARISOY'a yürekten teşekkür ediyorum.

Bu çalışmayı hazırlama süresince, kendilerine ait olan zamandan fedakarlık ederek ve her zaman yanı başımda olduklarını hissettirerek bana daima çalışma gücü veren, tükenmez sevgi kaynağı, sevgili ailem Fatma-Ahmet KARAMETE' ye teşekkür etmek, şu ana kadar yaptıkları için sanırım çok az gelecektir. Yine daima, her konuda bana destek olan kardeşim Handan'a ve hem evde hem okulda en yakınımda olduğunu bildiğim sevgili arkadaşım Dilek'e sevgilerimi sunuyorum.

Ağustos, 1996 Ayşen KARAMETE

T.C.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 GİRİŞ

Yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler fen, mühendislik ve matematiğin bir çok dalında bir matematik model olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunların analitik (tam) çözümlerini bulmak genellikle zordur; hatta imkansızdır. Literatürde de sadece bazı özel diferansiyel denklemlerin çözümü için yöntemler verilmiştir. Diğer durumlarda yaklaşık çözüm yöntemlerine gerek duyulur.

Bugüne kadar, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için oldukça çok çalışmalar yapılmış ve yöntemler verilmiştir. Genellikle seri yaklaşım yöntemleri sıkça kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden Leibnitz-Muclauren-Taylor seri yöntemleri [1,2], birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin herhengi bir x_0 noktası civarında ve verilen başlangıç koşuluna göre Taylor Seri formunda çözümünü bulmak için kullanılmıştır; ancak karışık koşullar verildiği zaman uygulamak mümkün değildir.

Ayrıca 1989'da Kanwal ve Liu, Fredholm integrallerinin çözümü için bir Taylor açılım yöntemi verdi [3]. 1992'de bu yöntemin genellemesi yapıldı [4]. Bu yöntem 1994'de Sezer tarafından Volterra İntegral denklemlerine [5], Sezer ve Köroğlu tarafından Lineer olmayan Fredholm denklemlere [6] uygulandı. Diğer yandan bunların yardımıyla Taylor Matris adı verilen bir yöntem geliştirildi ve Fredholm İntegral denklemlere [7] ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlere [8] genişletildi. Yukarıda adı geçen Taylor Yöntemlerindeki teknik, denklemdeki her bir terimin n defa türevinin alınması ve sonra sonuç denklemde bilinmeyen fonksiyonun Taylor seri açılımında yerine konulması, daha sonra (dolayısıyla) cebirsel bir sisteme dönüştürülmesine dayandırılır.

Seri yaklaşım yöntemlerinden Chebyshev Yöntemleri de diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılmaktadırlar.

Chebyshev Matris Yöntemi [9-11], Chebyshev İntegral Yöntemi, orjinal yöntem, karışık yötem, gibi yöntemler [12,13] de verilmiştir.

Son zamanlarda da Karamete ve Sezer tarafından Taylor Sıralama Yöntemi [14] adı verilen bir matris yöntemi sunulmuş ve ikinci mertebeden integrodiferansiyel denklemlerin, dolayısıyla diferansiyel denklemlerin, karışık koşullar altında Taylor polinomları cinsinden yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Yöntem yukarıda sunulan Taylor ve Chebyshev seri yöntemlerinin, problemin tanım aralığındaki sıralama noktaları yardımıyla geliştirilip diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlere uygulanmış halidir.

Bu çalışmada, ikinci mertebeden integrodiferansiyel denklemler için de verilen Taylor Sıralama (Collocation) yöntemi [14], ikiden daha yüksek mertebeli lineer diferansiyel denklemler için geliştirilmiştir.

Yöntem, önce diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Taylor seri açılımlarının ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi, sonra bunların yerine konulup sadeleştirilerek denklemin Taylor katsayılı bir matris denklemine dönüştürülmesinden ibarettir. Böylece sonuç matris denklemi (ki bu bilinmeyen Taylor katsayılı bir lineer cebirsel sisteme karşılık gelmektedir) çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir.

1.2 PROBLEMİN TANIMLANMASI

Bu çalışmada, problemimiz değişken katsayılı m. mertebeden lineer

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x), \quad a \le x \le b \tag{1.1}$$

diferansiyel denkleminin

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[a_{ij}\, y^{(j)}(a) + b_{ij}\, y^{(j)}(b) + c_{ij}\, y^{(j)}(c) \right] = \lambda_i \tag{1.2}$$

$i=0,1,\ldots,m-1; \quad a \le c \le b$

koşularına göre, x=c noktası civarında

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n};\quad a\leq x,c\leq b,\quad N\geq m \tag{1.3}$$

kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda yaklaşık çözümü bulmaktır.

Burada $P_k(x)(k=0,1,...,m)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında Taylor serisine açılabilir fonksiyonlardır. a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, λ_i katsayıları uygun sabitler; $y^{(n)}(c)$ bulunması gereken Taylor katsayılarıdır. Bu Taylor katsayılarını bulmak için aşağıda tanımlayacağımız sıralama noktalarını kullanacağız.

1.3 SIRALAMA (COLLOCATION) NOKTALARI

Problemin tanım aralığı olan $a \leq x \leq b$ aralığını,

$$a = x_0 < x_1 <...< x_N = b$$

olmak üzere, $x_0, x_1, ..., x_N$ noktaları ile N eşit parçaya bölelim. Bu şekilde elde edilen

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{N},\quad i=0,1,...,N \tag{1.4}$$

noktalarına "sıralama (collocation) noktaları" denir. Aynı zamanda x_i sıralama noktalarını

$$x_N = a < x_{N-1} <...< x_1 < x_0 = b$$

olacak şekilde

$$x_i = b - i\,\frac{b-a}{N},\quad i=0,1,...,N \tag{1.5}$$

olarak da alabiliriz.

2. DİFERANSİYEL DENKLEMİN MATRİS DENKLEMİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

2.1 BİLİNMEYEN FONKSİYONUN MATRİS GÖSTERİMİ

Önce Kesim 1.2 de tanımlanan değişken katsayılı m. mertebeden lineer

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x) \tag{2.1}$$

diferansiyel denkleminin $a \le x \le b$ aralığında

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \tag{2.2}$$

kesilmiş Taylor serisi formunda bir yaklaşık çözümünün var olduğunu kabul edelim.

Bunu

$$[y(x)] = X M_0 A \tag{2.3}$$

matris formuna dönüştürebiliriz; burada X, M_0, A matrisleri

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \ldots & (x-c)^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) & y^{(1)}(c) & y^{(2)}(c) & \ldots & y^{(n)}(c) \end{bmatrix}^t$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (2.3) matris formu,

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{N}, \quad i = 0,1,\dots,N$$

sıralama noktalarında

$$[y(x_i)] = X_i M_0 A\,; \quad i = 0,1,\dots,N \tag{2.4}$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & (x_i - c) & (x_i - c)^2 & \dots & (x_i - c)^n \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Açıkça (2.4) sistemi

$$\begin{aligned} [y(x_0)] &= X_0 M_0 A \\ [y(x_1)] &= X_1 M_0 A \\ &\;\;\vdots \\ [y(x_N)] &= X_N M_0 A \end{aligned}$$

veya

$$Y^{(0)} = C M_0 A \tag{2.5}$$

matris denklemi olarak yazılabilir. Burada $Y^{(0)}$ ve C matrisleri,

$$Y^{(0)} = \left[y(x_0) \quad y(x_1) \quad y(x_2) \quad \dots \quad y(x_N) \right]^t$$

$$C = \left[X_0 \quad X_1 \quad \dots \quad X_N \right]^t = \begin{bmatrix} 1 & (x_0 - c) & (x_0 - c)^2 & \dots & (x_0 - c)^N \\ 1 & (x_1 - c) & (x_1 - c)^2 & \dots & (x_1 - c)^N \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & (x_N - c) & (x_N - c)^2 & \dots & (x_N - c)^N \end{bmatrix}$$

olarak; M_0 ve A ise (2.3)'te tanımlanmıştır.

2.2 BİLİNMEYEN FONKSİYONUN TÜREVLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ

(2.2) de tanımlanan bilinmeyen çözüm fonksiyonunun birinci türevi,

$$y^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$$

olduğuna göre, bunun matris formu,

$$\left[y^{(1)}(x) \right] = XM_1A \tag{2.6}$$

olur; buradaki M_1 matrisi

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. (2.6) ifadesinin x_i sıralama noktalarındaki değerleri

$$\left[y^{(1)}(x_i)\right] = X_i M_1 A\,; \quad i = 0,1,\dots,N$$

olur; daha açık olarak

$$\left[y^{(1)}(x_0)\right] = X_0 M_1 A$$
$$\left[y^{(1)}(x_1)\right] = X_1 M_1 A$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\left[y^{(1)}(x_N)\right] = X_N M_1 A$$

ya da düzenlenirse

$$Y^{(1)} = CM_1 A \qquad (2.7)$$

.matris denklemi elde edilir; $Y^{(1)}$ matrisi,

$$Y^{(1)} = \left[y^{(1)}(x_0) \quad y^{(1)}(x_1) \quad y^{(1)}(x_2) \quad \dots \quad y^{(1)}(x_N)\right]^t$$

ile verilmektedir.

Genellersek, $y^{(k)}(x)$ türev fonksiyonlarının matris formlarının

$$\left[y^{(k)}(x)\right]=XM_kA, \quad k=0,1,\ldots,m\leq N \tag{2.8}$$

olduğunu ve x_i sıralama noktaları kullanıldığında bu sistemin

$$Y^{(k)}=CM_kA, \quad k=0,1,\ldots,m\leq N \tag{2.9}$$

matris formuna dönüştüğünü görürüz. (2.9) sistemindeki matrisler,

$$Y^{(k)}=\left[y^{(k)}(x_0) \quad y^{(k)}(x_1) \quad y^{(k)}(x_2) \quad \ldots \quad y^{(k)}(x_N)\right]^t$$

$$M_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} ,M_1=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{(N-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

$$M_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{0!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{(N-2)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} \quad \ldots\ldots, \quad M_k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{0!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{1!} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{(N-k)!} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & (x_0 - c) & (x_0 - c)^2 & \cdots & (x_0 - c)^N \\ 1 & (x_1 - c) & (x_1 - c)^2 & \cdots & (x_1 - c)^N \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & (x_N - c) & (x_N - c)^2 & \cdots & (x_N - c)^N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) & y^{(1)}(c) & y^{(2)}(c) & \cdots & y^{(n)}(c) \end{bmatrix}^t$$

şeklindedir.

2.3 DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN TEMEL MATRİS BAĞINTISI

Şimdi $x = x_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ değerlerini (2.1) diferansiyel denkleminde yerine koyarsak

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x_i)\, y^{(k)}(x_i) = f(x_i) \qquad (2.10)$$

veya

$$P_0(x_0)y^{(0)}(x_0) + P_1(x_0)y^{(1)}(x_0) + \ldots + P_m(x_0)y^{(m)}(x_0) = f(x_0)$$

$$P_0(x_1)y^{(0)}(x_1) + P_1(x_1)y^{(1)}(x_1) + \ldots + P_m(x_1)y^{(m)}(x_1) = f(x_1)$$

.

.

.

$$P_0(x_N)y^{(0)}(x_N) + P_1(x_N)y^{(1)}(x_N) + \ldots + P_m(x_N)y^{(m)}(x_N) = f(x_N)$$

sistemini elde ederiz. Bunu matris formunda şöyle yazabiliriz:

$$P_0Y^{(0)} + P_1Y^{(1)} + \ldots + P_mY^{(m)} = F$$

veya

$$\sum_{k=0}^{m} P_k Y^{(k)} = F \qquad (2.11)$$

Burada $Y^{(k)}$ matrisleri (2.9) bağıntısı ile tanımlanmıştı; P_k ve F matrisleri, $k = 0,1,\ldots,m \le N$ için

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} , \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x1}$$

ile tanımlanmıştır.

(2.9) ile tanımlanan $Y^{(k)}$ matrisini (2.11) matris denkleminde yerine koyarsak,

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m} P_k C M_k \right\} A = F \qquad (2.12)$$

matris denklemini elde ederiz. Bu (2.1) diferansiyel denklemi için bir temel bağıntıdır. Burada P_k, C, M_k ve F matrisleri x_i sıralama noktalarına ve N kesme sınırına bağlı daha önce tanımlanan matrislerdir; A, bulunması gereken Taylor katsayılarının oluşturduğu sütun matrisidir.

2.4 KOŞULLARIN MATRİS DENKLEMİ

Kesim 1.2 de tanımlanan, değişken katsayılı m. mertebeden (1.1) lineer diferansiyel denklemine ait,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[a_{ij}\, y^{(j)}(a) + b_{ij}\, y^{(j)}(b) + c_{ij}\, y^{(j)}(c) \right] = \lambda_i \qquad (2.13)$$

koşullarını göz önüne alalım. Yine Kesim 2.1'de y(x) bilinmeyen fonksiyonunu ve türevlerinin matris formları, (2.9) da

$$\left[y^{(k)}(x)\right] = XM_kA, \quad k = 0,1,\ldots,m \le N$$

şeklinde tanımlanmıştı. y(x) fonksiyonunun $x = a,\ x = b,\ x = c$ $(a \le c \le b)$ noktalarındaki değerleri

$$\left[y^{(0)}(x)\right] = XM_0A$$

$$\left[y^{(0)}(a)\right] = \left[1 \quad (a-c) \quad (a-c)^2 \quad \ldots \quad (a-c)^N\right]M_0A = \left[1 \quad h \quad h^2 \quad \ldots \quad h^N\right]M_0A = HM_0A$$

$$\left[y^{(0)}(b)\right] = \left[1 \quad (b-c) \quad (b-c)^2 \quad \ldots \quad (b-c)^N\right]M_0A = \left[1 \quad k \quad k^2 \quad \ldots \quad k^N\right]M_0A = KM_0A$$

$$\left[y^{(0)}(c)\right] = \left[1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right]M_0A = IM_0A$$

şeklinde olur. $h = a - c$ ve $k = b - c$ olmak üzere H, K ve I matrisleri,

$$H = \left[1 \quad h \quad h^2 \quad \ldots \quad h^N\right]$$

$$K = \left[1 \quad k \quad k^2 \quad \ldots \quad k^N\right]$$

$$I = \left[1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right]$$

olarak alınmıştır.

$y'(x)$ türev fonksiyonunun matris ifadesinde, $x = a,\ x = b,\ x = c$ değerlerini yazarsak,

$$\left[y^{(1)}(a)\right] = HM_1A$$

$$\left[y^{(1)}(b)\right] = KM_1A$$

$$\left[y^{(1)}(c)\right] = IM_1A$$

matris formları elde edilir.

T.C. BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Aynı işlemleri, $j = 0,1,\ldots,m-1$ olmak üzere, (m-1). türeve kadar sürdürürsek, genel olarak

$$\begin{aligned} \left[y^{(j)}(a)\right] &= HM_jA \\ \left[y^{(j)}(b)\right] &= KM_jA \qquad (2.14) \\ \left[y^{(j)}(c)\right] &= IM_jA \end{aligned}$$

matris denklemleri bulunur. Bu (2.14) ifadelerini, $j = 0,1,\ldots,m-1$ olmak üzere, (2.13) denkleminde yerine koyalım.

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left\{a_{ij}H + b_{ij}K + c_{ij}I\right\}M_jA = \left[\lambda_i\right] \qquad (2.15)$$

$$U_i = \sum_{j=0}^{m-1}\left\{a_{ij}H + b_{ij}K + c_{ij}I\right\} \equiv \left[u_{i0} \quad u_{i1} \quad u_{i2} \quad \ldots \quad u_{i,m-1}\right]$$

olmak üzere, (2.15) matris sistemini, $i = 0,1,\ldots,m-1$ için

$$\begin{aligned} U_0A &= [\lambda_0] \\ U_1A &= [\lambda_1] \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad (2.16) \\ U_iA &= [\lambda_i] \end{aligned}$$

veya artırılmış matris formlarında

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= [U_i;\lambda_i] \\ &= \left[u_{i0} \quad u_{i1} \quad u_{i2} \quad \ldots \quad u_{i,m-1}; \quad \lambda_i\right] \qquad (2.17) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

T.C. BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

3. TAYLOR SIRALAMA YÖNTEMİ

3.1 ÇÖZÜM YÖNTEMİ

(1.1) diferansiyel denkleminin verilen koşullara göre çözümünü bulabilmek için önce (2.12) de tanımlanan

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} P_k C M_k\right\} A = F \qquad (3.1)$$

matris denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} P_k C M_k\right\} = W \qquad (3.2)$$

dersek, denklemi kısaca;

$$WA=F \qquad (3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1) ya da kısaca (3.3) denklemi m. mertebeden, değişken katsayılı, lineer (1.1) diferansiyel denklemi için temel matris denklemidir. Burada W ve F,

$$W=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{0N} \\ w_{10} & w_{11} & w_{1N} \\ & & \\ w_{N0} & w_{N1} & w_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} \quad , \quad F=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x1}$$

olarak tanımlanır.

(3.3) temel matris denkleminin artırılmış matrisi,

$$\tilde{W} = [W;F] \tag{3.4}$$

olmak üzere ,

$$\tilde{W} = [W;F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

m. mertebeden lineer diferansiyel denklem (3.3) matris denklem formuna ve sonra (3.4) artırılmış matris formuna dönüştürülür. Bu artırılmış matrisin son m satırı silinerek ve bu silinen satırların yerine koşullarla ilgili (2.17)'de tanımlanan satır matrisleri yazılarak, yeni artırılmış matris

$$\tilde{W}^* = \left[W^*; F^*\right] \tag{3.5}$$

veya açık olarak,

$$\tilde{W}^* = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu artırılmış matrisi

$$W^* A = F^* \tag{3.6}$$

formunda matris denklemine dönüştürülür. Burada F^*, W^* ve A matrisleri

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} \end{bmatrix}, \quad F^* \begin{bmatrix} f(x_0) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_{N-m}) \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ . \\ . \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ . \\ . \\ . \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\operatorname{rank} W^* = \operatorname{rank}[W^*, F^*] = N+1$ ise ise yani $\det W^* \neq 0$ ise (3.6) matris denkleminin çözümü

$$A = W^{*^{-1}} F^* \qquad (3.7)$$

şeklinde olur. Böylece (3.7)'den

$$A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) & y^{(1)}(c) & y^{(2)}(c) & \ldots & y^{(n)}(c) \end{bmatrix}^t$$

bilinmeyen Taylor katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi tek olarak bulunur. O halde (1.2) koşullarına göre (1.1) diferansiyel denklemi tek çözüme sahip olur ve bu çözüm,

$$[y(x)] = XM_0A$$

ya da

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n; \qquad (3.8)$$

şeklinde Taylor polinom çözümüdür.

3.2 ÇÖZÜMÜN KONTROLÜ VE HATA HESABI

(3.8) formunda elde edilen çözümün doğruluğunu kolayca kontrol edebiliriz [11].

(3.8) kesilmiş Taylor seri açılımı, (1.1) diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan, y(x) çözümü ve $y^{(k)}(x)$ türevleri, (1.1) denkleminde yazıldığında denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır; yani $x = x_r \in [a,b]$, $r = 0,1,\dots,N$ için

$$\left[y^{(k)}(x_r)\right] = X_r M_r A$$

$$|D(x_r)| = \left|\sum_{k=0}^{m} P_k(x_r)\, y^{(k)}(x_r) - f(x_r)\right| \cong 0 \qquad (3.9)$$

olacaktır.

Eğer $\max\left|10^{-k_r}\right| = 10^{-k}$ (k pozitif tamsayı) olması istenirse $|D(x_r)|$, 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar kesme sınırı olan N yükseltilir.

Çözümdeki hatayı da Taylor açılımındaki hata formülüyle tespit edebiliriz. y=y(x) yaklaşık çözümü için

$$x_r = a + r\frac{b-a}{m}, \quad (r = 0,1,\dots,m) \qquad (3.10)$$

olmak üzere $y(x_r)$' ler belirlenir.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{r=0}^{N} y(x_r)}{m+1} \qquad (3.11)$$

olmak üzere

$$\Delta_r = \overline{y} - y(x_r); \quad (i = 0, 1, \ldots, m) \tag{3.12}$$

değerleri tespit edilir. Bu değerler yardımıyla ortalama hata

$$R_n = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{m} (\Delta_r)^2}}{m} \tag{3.13}$$

olarak bulunur.

4. UYGULAMALAR VE SONUÇLAR

Bu çalışmada verilen Taylor Sıralama Yöntemini, m. mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin, verilen koşullara göre yaklaşık çözümünü bulmak için kullanabiliriz. Bunu aşağıdaki örneklerle açıklayalım.

4.1 UYGULAMALAR

ÖRNEK 1: 1. mertebeden, lineer

$$(1+x)y'+(1+x+x^2)y=1-x; \qquad 0\le x\le 1 \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0)-\frac{3}{4}y(1)=1 \tag{4.2}$$

koşulunu göz önüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad 0\le x,c\le 1$$

sonlu Taylor serisiyle (N=4 dördüncü dereceli Taylor Polinomları cinsinden) yaklaşalım. Taylor sıralama noktalarını, N=4 için, Kesim 1.3 'ten,

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{3}{4},\ x_4=1$$

olarak alalım.

$P_1(x)=1+x,\ P_0(x)=1+x+x^2,\ f(x)=1-x$ olduğuna göre, bu fonksiyonların matris formlarında gösterimini (2.10) bağıntısından

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&\frac{5}{4}&0&0&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&0\\0&0&0&\frac{7}{4}&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix},\quad P_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&\frac{21}{16}&0&0&0\\0&0&\frac{7}{4}&0&0\\0&0&0&\frac{37}{16}&0\\0&0&0&0&3\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\\0\end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

şeklinde elde ederiz. N=4 için (2.11) matris denklemi

$$\{P_1CM_1+P_0CM_0\}A=F \qquad (4.4)$$

olur.

Burada P_0, P_1 ve F matrisleri yukarıda tanımlanan matrislerdir. M_0, M_1 ve C matrisleri ise (2.3), (2.6) ve (2.9)'tan yararlanarak aşağıda verilmiştir.

$$M_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{0!}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{1!}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2!}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3!}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{4!}\end{bmatrix},\quad M_1=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{0!}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{1!}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2!}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{3!}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&\frac{1}{4}&\left(\frac{1}{4}\right)^2&\left(\frac{1}{4}\right)^3&\left(\frac{1}{4}\right)^4\\1&\frac{1}{2}&\left(\frac{1}{2}\right)^2&\left(\frac{1}{2}\right)^3&\left(\frac{1}{2}\right)^4\\1&\frac{3}{4}&\left(\frac{3}{4}\right)^2&\left(\frac{3}{4}\right)^3&\left(\frac{3}{4}\right)^4\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

(4.4) denkleminde bu matrisler yerlerine konulup düzenlenerek (3.4) bağıntısından artırılmış matrisi

$$\tilde{W}=\left[W;F\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & ;\ 1 \\ \frac{21}{16} & \frac{101}{64} & \frac{181}{512} & \frac{87}{2048} & \frac{341}{98304} & ;\ \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{19}{8} & \frac{31}{32} & \frac{43}{192} & \frac{155}{1536} & ;\ \frac{1}{2} \\ \frac{37}{16} & \frac{223}{64} & \frac{1005}{512} & \frac{1341}{2048} & \frac{5031}{32768} & ;\ \frac{1}{4} \\ 3 & 5 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{24} & ;\ 0 \end{array}\right] \tag{4.5}$$

olarak bulunur. Koşulla ilgili artırılmış matris, (2.17)'den,

$$\tilde{U}_0=\left[U_0;\lambda_0\right]=\left[\frac{1}{4}\quad -\frac{3}{4}\quad -\frac{3}{8}\quad -\frac{1}{8}\quad -\frac{1}{32}\quad ;\ 1\right] \tag{4.6}$$

olur. (4.5) matrisinin son satırının yerine (4.6) satır matrislerini koyarak, (3.5)'ten, artırılmış matrisi

$$\tilde{W}^{*}=\left[W^{*};F^{*}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & ;\ 1 \\ \frac{21}{16} & \frac{101}{64} & \frac{181}{512} & \frac{87}{2048} & \frac{341}{98304} & ;\ \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{19}{8} & \frac{31}{32} & \frac{43}{192} & \frac{155}{1536} & ;\ \frac{1}{2} \\ \frac{37}{16} & \frac{223}{64} & \frac{1005}{512} & \frac{1341}{2048} & \frac{5031}{32768} & ;\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{32} & ;\ 1 \end{array}\right]$$

olarak buluruz. Bunun çözümü ise,

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{21}{16} & \frac{101}{64} & \frac{181}{512} & \frac{87}{2048} & \frac{341}{98304} \\ \frac{7}{4} & \frac{19}{8} & \frac{31}{32} & \frac{43}{192} & \frac{155}{1536} \\ \frac{37}{16} & \frac{223}{64} & \frac{1005}{512} & \frac{1341}{2048} & \frac{5031}{32768} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{32} \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

T.C. 1923

$$=\begin{bmatrix} 1.45603 \\ -0.456038 \\ -1.54003 \\ 2.50254 \\ -0.936572 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece bu katsayıları (3.8)'de yerine koyarak, (1.1) probleminin çözümünü

$$y(x) = -0.090238x^4 + 0.417090x^3 - 0.770015x^2 - 0.456038x + 1.45603$$

olarak buluruz.

r=10 alınarak x_r noktalarındaki $y(x_r)$ çözüm değerleri, $D(x_r)$ sapmaları, R_n ortalama hataları bulunur. c=0 ve N=4, N=5, N=6 ve N=7 alınarak sonuçları Tablo 1a' da verilmiştir.

Aynı işlemler N=4 ve $c=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{4}$ ve $c=1$ için yapılmıştır ve sonuçlar Tablo 1b'de gösterilmiştir. Bilinmeyen Taylor katsayılarının oluşturduğu A matrisleri, yukarda verilen noktalar için farklı bulunsa da; bu katsayıların (3.8)'de yerine konulmasıyla elde ettiğimiz Taylor polinomları hemen hemen aynı çıkmaktadır. Şöyle ki; c=0 ve N=4 için A matrisi ve y(x) çözümü,

$$A=\begin{bmatrix} 1.45603 \\ -0.456038 \\ -1.54003 \\ 2.50254 \\ -0.936572 \end{bmatrix}, \; y(x) = -0.0390238x^4 + 0.417090x^3 - 0.770015x^2 - 0.456038x + 1.45603$$

şeklinde bulunmuştu.

N=4 ve $c=\frac{1}{4}$ için işlemler yapıldığında elde edilen A matrisi ve y(x) çözümü,

$$A=\begin{bmatrix}1.30026\\-0.765280\\-0.943663\\2.26840\\-0.936572\end{bmatrix},\ y(x)=-0.0390238x^4+0.417090x^3-0.770015x^2-0.456037x+1.45603$$

N=4 ve $c=\frac{1}{2}$ için,

$$A=\begin{bmatrix}1.08521\\-0.932748\\-0.405830\\2.03425\\-0.936572\end{bmatrix},\ y(x)=-0.0390238x^4+0.417089x^3-0.770013x^2-0.456039x+1.45603$$

N=4 ve $c=\frac{3}{4}$ için,

$$A=\begin{bmatrix}3.4228608\\3.979186\\-6.87472\\2.87717\\0.936572\end{bmatrix},\ y(x)=-0.0390239x^4+0.417090x^3-0.770014x^2-0.456039x+1.45603$$

N=4 ve $c=1$ için,

$$A=\begin{bmatrix}0.608051\\-0.900892\\0.494227\\1.56597\\-0.936572\end{bmatrix},\ y(x)=-0.0390238x^4+0.417090x^3-0.770014x^2-0.456038x+1.45603$$

olarak bulunmuştur.

Bu sonuçlar da gösteriyor ki Taylor Sıralama Metodu'yla, çözümünü aradığımız (1.1) denklemininin yaklaşık çözümünü, sadece aralığın orta noktasında değil, her x=c noktasında ($a \leq c \leq b$ olmak şartıyla) bulabiliriz.

TABLO 1a

$(1+x)y'+(1+x+x^2)y=1-x; \quad 0\leq x\leq 1, \quad y(0)-\frac{3}{4}y(1)=1,\ c=0$

	N=4			N=5			N=6			N=7			N= Cheby
x_r	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	N=7 $y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	
0	1.45603	0	-0.51107	1.45440	0	-0.390738	1.45314	-0.0002744	0.153381	1.45525	0	-0.3916	
0.1	1.40314	0.00004	-0.45818	1.40258	0.000212	-0.33891	1.40028	-0.002789	0.114771	1.40243	0.000007	-0.33878	
0.2	1.33730	$-3.4\ 10^{-5}$	-0.39234	1.33680	-0.000014	-0.273138	1.33447	-0.002957	0.074512	1.33665	-0.000004	-0.273	
0.3	1.26087	0.000068	-0.31591	1.26041	-0.000110	-0.196748	1.25809	-0.0030930	0.03864	1.260028	0	-0.19663	
0.4	1.17611	0.000167	-0.23115	1.17569	-0.000010	-0.112028	1.17339	-0.0032870	0.012519	1.17558	0	-0.11193	
0.5	1.08521	0	-0.14025	1.08483	0.000081	-0.021168	1.08255	-0.0036130	0.000413	1.08473	0	-0.02108	
0.6	0.990243	$-4.28\ 10^{-4}$	-0.045283	0.989921	-0.000008	0.073740	0.980714	-0.0040160	0.005452	0.989829	0	0.073821	
0.7	0.893196	$-5.13\ 10^{-4}$	0.051764	0.892938	-0.000148	0.170723	0.890714	-0.004355	0.029168	0.892862	0.000001	0.170708	
0.8	0.7959630	0.001245	0.148997	0.795725	0.000049	0.267936	0.793542	-0.004636	0.07180	0.795663	-0.000018	0.267907	
0.9	0.700346	0.007513	0.244614	0.69976	0.001591	0.363901	0.697792	-0.0054835	0.132283	0.699889	0.00008	-0.363761	
1	0.608051	0.022367	0.336909	0.607226	0.0060134	0.456435	0.604844	-0.0088832	0.208534	0.607002	$9.8\ 10^{-4}$	-0.454648	
	$\bar{y}=0.9449$		$R_n=0.0995$	$\bar{y}=1.0636$		$R_n=0.0981$	$\bar{y}=1.0615$		$R_n=0.091$	$\bar{y}=1.0636$		$R_n=0.0917$	

TABLO 1b

$$(1+x)y'+(1+x+x^2)y=1-x; \qquad 0 \le x \le 1, \quad y(0)-\frac{3}{4}y(1)=1, \; N=4$$

x_r	c=0 $y(x_r)$	c=1/4 $y(x_r)$	c=1/2 $y(x_r)$	c=3/4 $y(x_r)$	c=1 $y(x_r)$
0	1.45603	1.45603	1.45603	1.45603	1.45603
0.1	1.40314	1.40314	1.40314	1.40314	1.40314
0.2	1.33730	1.33729	1.33730	1.33729	1.33729
0.3	1.26087	1.26086	1.26086	1.26087	1.26086
0.4	1.17611	1.17610	1.17611	1.17612	1.17610
0.5	1.08521	1.08520	1.08520	1.08521	1.08520
0.6	0.990243	0.990236	0.990241	0.990242	0.990236
0.7	0.893196	0.893189	0.893193	0.893196	0.893189
0.8	0.7959630	0.7959629	0.795961	0.7959631	0.7959629
0.9	0.700346	0.700339	0.700344	0.700346	0.700339
1	0.608051	0.608049	0.608048	0.608052	0.608049

ÖRNEK 2:

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)=1+x+x^2; \quad -1\le x\le 1 \tag{4.7}$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1$$

problemini göz önüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad -1\le x,c\le 1$$

sonlu Taylor serisiyle yaklaşalım. N=4 için Taylor Sıralama noktaları [-1,1] aralığında,

$$x_0=-1,\ x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=0,\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=1$$

bulunur.

$P_2(x)=1,\ P_1(x)=P_0(x)=x,\ f(x)=1+x+x^2$ olmak üzere (4.7) diferansiyel denklemini (2.11) matris denklemi ile,

$$\{P_2CM_2+P_1CM_1+P_0CM_0\}A=F \tag{4.8}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada P_2, P_1, P_0, C, F ve M_2 aşağıda tanımlanmıştır. M_1, M_0 matrisleri Örnek 1'de tanımlanmıştı.

$$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad P_1=P_0=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{4}\\1\\\frac{7}{4}\\3\end{bmatrix}$$

$$M_2=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{0!}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{1!}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2!}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\1&-\frac{1}{2}&\left(-\frac{1}{2}\right)^2&\left(-\frac{1}{2}\right)^3&\left(-\frac{1}{2}\right)^4\\1&0&0&0&0\\1&\frac{1}{2}&\left(\frac{1}{2}\right)^2&\left(\frac{1}{2}\right)^3&\left(\frac{1}{2}\right)^4\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

(4.8) denkleminde bu matrisler yerlerine konulup düzenlenerek (3.4) bağıntısından artırılmış matrisi

$$\tilde{W}=\left[W;F\right]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{8} & ; & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{16} & -\frac{53}{96} & \frac{103}{768} & ; & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{21}{16} & \frac{55}{96} & \frac{35}{256} & ; & \frac{7}{4} \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{17}{24} & ; & 3 \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

olarak bulunur. Koşullarla ilgili artırılmış matrisler (2.17) denkleminden

$$\tilde{U}_0=\left[U_0;\lambda_0\right]=\left[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 1\right]$$

$$\tilde{U}_1=\left[U_1;\lambda_1\right]=\left[1 \quad 4 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{24} \quad ; \quad -1\right] \qquad (4.10)$$

(4.9) matrisinin son iki satırının yerine (4.10) koşullarını koyarak, (3.5)'ten, artırılmış matrisi

$$\tilde{W}^{*}=\left[W^{*};F^{*}\right]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{8} & ; & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{16} & -\frac{53}{96} & \frac{103}{768} & ; & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{24} & ; & -1 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Bunun çözümü ise,

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{16} & -\frac{53}{96} & \frac{103}{768} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

denkleminden

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.763825 \\ 1 \\ 0.886363 \\ 2.69090 \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

bulunur.

Böylece bu katsayıları (3.8)'de yerine koyarak, (4.7) probleminin çözümünü

$$y(x) = 0.112121x^4 + 0.177727x^3 + 0.5x^2 - 0.763825x + 1 \qquad (4.12)$$

olarak elde ederiz.

Yukarıdaki problemin yaklaşık çözümü [8], [9] ve [12]'de verilmiştir. N ve c 'nin değişik durumları için elde edilen sonuçlar Tablo 2a ve Tablo 2b'de sunulmuştur.

TABLO 2a

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)=1+x+x^2; \quad -1\le x\le 1 y(0)=1 \quad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1$$

x_r	N=4				
	c= -1 $y(x_r)$	c= 0 $y(x_r)$	c=1 $y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$
-1	2.22281	2.22281	2.22281	0	-0.99141
-0.8	1.90134	1.90134	1.90134	0.0012290	-0.66994
-0.6	1.62091	1.62091	1.62091	0.000686	-0.3895
-0.4	1.37894	1.37894	1.37894	-0.0022	-0.14754
-0.2	1.17176	1.17176	1.17176	-0.0078	0.05964
0	1	1	1	0	0.2314
0.2	1.868596	1.868596	1.868596	0.005630	0.362804
0.4	0.786794	0.786794	0.786794	0.21885	0.4446
0.6	0.768144	0.768144	0.768144	0.57257	0.4632
0.8	0.930500	0.930500	0.930500	1.23414	0.3009
1	0.996022	0.996022	0.996022	2.35568	0.235378
	$\overline{y}=1.2314$				$R_n=0.1533$

TABLO 2b

$y''(x)+xy'(x)+xy(x)=1+x+x^2; \quad -1 \le x \le 1 y(0)=1 \quad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1$

	c= -1 c=0 c=1							
	N=4		N=5		N=6		N=7	
x_r	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$
-1	2.22281	0	2.19079	0	2.16358	0.00001	2.16546	0
-0.8	1.90134	0.0012290	1.87098	-0.007994	1.84868	0.000974	1.85042	$4.521x10^{-4}$
-0.6	1.62091	0.000686	1.59752	-0.000002	1.58053	$-2.64x10^{-4}$	1.58213	$-1.4x10^{-4}$
-0.4	1.37894	-0.0022	1.36272	0.005097	1.35133	$-1.53x10^{-4}$	1.35284	$9.5x10^{-5}$
-0.2	1.17176	-0.0078	1.16643	0	1.15761	$1.94x10^{-4}$	1.15903	$-1.13x10^{-5}$
0	1	0	1	-0.008919	1	0	1.00135	$-7.43x10^{-4}$
0.2	1.868596	0.005630	0.876459	0	0.882573	$2.32x10^{-5}$	0.883817	-0.001
0.4	0.786794	0.21885	0.799780	0.06478	0.811532	$-6.68x10^{-4}$	0.812622	-0.002327
0.6	0.768144	0.57257	0.799495	0.24038	0.793355	-0.0123232	0.794216	-0.0183123
0.8	0.930500	1.23414	0.827260	0.5987	0.832385	-0.073633	0.832805	-0.09077
1	0.996022	2.35568	0.956428	1.22818	0.927842	-2.264125	0.927176	-0.3135

ÖRNEK 3:

$$y''(x)+xy'(x)+y(x)=e^{x}; \quad 0\leq x\leq 1 \tag{4.13}$$

$$y(0)=0 \qquad y(1)=0$$

problemini göz önüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x)=\sum_{n=0}^{5}\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n}, \quad 0\leq x,c\leq 1$$

sonlu Taylor serisiyle yaklaşalım. N=5 için Taylor Sıralama noktaları [0,1] aralığında,

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{5},\ x_2=\frac{2}{5},\ x_3=\frac{3}{5},\ x_4=\frac{4}{5},\ x_5=1$$

bulunur.

$P_2(x)=P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $f(x)=e^{x}$ ve c=0 olmak üzere (4.13) diferansiyel denklemini (2.11) matris denklemi ile,

$$\{P_2CM_2+P_1CM_1+P_0CM_0\}A=F \tag{4.14}$$

şeklinde gösterebiliriz (c=0). Burada P_2, P_1, P_0, C, F, M_0, M_1 ve M_2 aşağıda tanımlanmıştır.

$$P_2=P_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad P_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{5}&0&0&0&0\\0&0&\frac{2}{5}&0&0&0\\0&0&0&\frac{3}{5}&0&0\\0&0&0&0&\frac{4}{5}&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}e^{0}\\e^{\frac{1}{5}}\\e^{\frac{2}{5}}\\e^{\frac{3}{5}}\\e^{\frac{4}{5}}\\e^{1}\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{5} & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^3 & \left(\frac{1}{5}\right)^4 & \left(\frac{1}{5}\right)^5\\ 1 & \frac{2}{5} & \left(\frac{2}{5}\right)^2 & \left(\frac{2}{5}\right)^3 & \left(\frac{2}{5}\right)^4 & \left(\frac{2}{5}\right)^5\\ 1 & \frac{3}{5} & \left(\frac{3}{5}\right)^2 & \left(\frac{3}{5}\right)^3 & \left(\frac{3}{5}\right)^4 & \left(\frac{3}{5}\right)^5\\ 1 & \frac{4}{5} & \left(\frac{4}{5}\right)^2 & \left(\frac{4}{5}\right)^3 & \left(\frac{4}{5}\right)^4 & \left(\frac{4}{5}\right)^5\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad M_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5!}\end{bmatrix}$$

$$M_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2.17) denkleminden hesaplanan koşullarla iligili artırılmış matrisler de

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0&=\left[U_0;\lambda_0\right]=\left[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad ;\quad 0\right]\\ \tilde{U}_1&=\left[U_1;\lambda_1\right]=\left[1\quad 1\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{24}\quad \frac{1}{120}\quad ;\quad 0\right]\end{aligned}\qquad (4.15)$$

şeklindedir.

(4.14) denkleminde yukarıda hesaplanan matrisler yerine konulup düzenlenirse ve elde edilen (3.4) artırılmış matrisi $\tilde{W}$ 'nın son iki satırını yerine, (4.15) koşulları yazılırsa;

$$\tilde{W}^{*}=\left[\begin{array}{cccccccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{0}\\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{53}{50} & \frac{73}{375} & \frac{61}{3000} & \frac{253}{187500} & ; & e^{\frac{1}{5}}\\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{31}{25} & \frac{166}{375} & \frac{32}{375} & \frac{524}{46875} & ; & e^{\frac{2}{5}}\\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{77}{50} & \frac{93}{125} & \frac{707}{1000} & \frac{2493}{625000} & ; & e^{\frac{3}{5}}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & ; & 0\end{array}\right]$$

olarak bulunur. Bunun çözümü ise,

$$\begin{bmatrix}y^{0}(0)\\ y^{1}(0)\\ y^{2}(0)\\ y^{3}(0)\\ y^{4}(0)\\ y^{5}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{53}{50} & \frac{73}{375} & \frac{61}{3000} & \frac{253}{187500}\\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{31}{25} & \frac{166}{375} & \frac{32}{375} & \frac{524}{46875}\\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{77}{50} & \frac{93}{125} & \frac{707}{1000} & \frac{2493}{625000}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120}\end{bmatrix}^{1}\begin{bmatrix}e^{0}\\ e^{\frac{1}{5}}\\ e^{\frac{2}{5}}\\ e^{\frac{3}{5}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

denkleminden

$$\begin{bmatrix}y^{0}(0)\\ y^{1}(0)\\ y^{2}(0)\\ y^{3}(0)\\ y^{4}(0)\\ y^{5}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.223992\\ -0.030166\\ 1.88923\\ 0.772404\\ -4.66994\\ -3.87411\end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece bu katsayıları (3.8)'de yerine koyarak, (4.13) probleminin çözümünü

$$y(x)=-0.032286x^{5}-0.113870x^{4}+0.437185x^{3}+0.5x^{2}-0.791030x+2.9846\ 10^{-7}$$

olarak elde ederiz. N ve c 'nin değişik durumları için elde edilen sonuçlar Tablo 3'te tartışılmıştır.

TABLO 3a

$y''(x)+xy'(x)+y(x)=e^{x}; \quad 0\leq x\leq 1 \qquad y(0)=0 \quad \text{ve} \quad y(1)=0, \; N=5$

x_r	c=0			c=1/2			c=1		
	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$
0	0	0	-0.1183	$2.984\text{x}10^{-7}$	0	-0.1183	$4.687\text{x}10^{-4}$	0.00014	-0.1181
0.2	-0.134901	0	0.0166	-0.134900	0	0.0166	-0.134429	0.0001	0.001642
0.4	-0.211677	-0.00001	0.329977	-0.211677	0	0.093377	-0.211217	0.00003	0.093217
0.6	-0.217454	-0.00001	0.099154	-0.217453	0	0.335753	-0.217021	-0.00008	0.099021
0.8	-0.146207	-0.03918	0.146207	-0.146205	-0.003914	0.027907	-0.145816	-0.039	0.027816
1	$-3.37\text{x}10^{-6}$	-0.20375	-0.1182	$5.53\text{x}10^{-7}$	-0.20368	-0.1183	$-3.286\text{x}10^{-4}$	-0.20412	-0.1179
	$\bar{y}= -0.1183$		$R_n=0.03252$	$\bar{y}= -0.1183$		$R_n=0.0301$	$\bar{y}= -0.1180$		$R_n=0.0434$

TABLO 3b

$y''(x)+xy'(x)+y(x)=e^{x}; \quad 0\leq x\leq 1 \quad y(0)=0 \quad \text{ve} \quad y(1)=0, \quad c=0$

x_r	N=4	N=5	N=6	N=7	Runge Kutta	Taylor-Matris N=9	Taylor-Matris N=11
	$y(x_r)$	$y(x_r)$	$y(x_r)$	$y(x_r)$	$y(x_r)$	$y(x_r)$	$y(x_r)$
0	0	0	0	$2.0132\text{x}10^{-5}$	0	0	0
0.2	-0.136171	-0.134901	-0.135437	-0.135267	-0.1400	-0.135379	-0.135462
0.4	-0.21051	-0.211677	-0.212713	-0.212417	-0.2165	-0.212602	-0.212761
0.6	-0.220844	-0.217454	-0.218915	-0.218594	-0.2200	-0.218764	-0.218985
0.8	-0.149758	-0.146207	-0.147867	-0.147783	-0.1475	-0.147714	-0.147958
1	$1.8768\text{x}10^{-6}$	$-3.37\text{x}10^{-6}$	$8.7868\text{x}10^{-6}$	$-5.333\text{x}10^{-6}$	0	-0.0000006	$-6.6\text{x}10^{-8}$

ÖRNEK 4:

$$(1+2x)y'''(x)+4xy''(x)+(2x-1)y'(x)=e^{-x}; \quad 0\leq x\leq 1 \qquad (4.16)$$

$$y(0)=1 \quad y'(0)=\frac{1}{2} \quad y''(0)=-1$$

problemini göz önüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad 0\leq x,c\leq 1$$

sonlu Taylor serisiyle yaklaşalım. N=4 için Taylor Sıralama noktaları [0,1] aralığında,

$$x_0=0, \quad x_1=\frac{1}{4}, \quad x_2=\frac{1}{2}, \quad x_3=\frac{3}{4}, \quad x_4=1$$

olarak alınır. $P_3(x)=1+2x$, $P_2(x)=4x$, $P_1(x)=2x-1$, $P_0(x)=0$ ve $f(x)=e^{-x}$ (c=0) olmak üzere (4.16) diferansiyel denklemini (2.11) matris denklemi ile,

$$\{P_3CM_3+P_2CM_2+P_1CM_1\}A=F \qquad (4.17)$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada P_3, P_2, P_1, F ve M_3 aşağıda tanımlanmıştır. M_0, M_1 , C Örnek 1'de, M_2 ise Örnek 2'de tanımlanmıştı.

$$P_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&\frac{3}{2}&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&\frac{5}{2}&0\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}, \; P_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}, \; P_3=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}, \; M_3=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{0!}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{1!}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} F=\begin{bmatrix}e^{0}\\e^{-\frac{1}{4}}\\e^{-\frac{1}{2}}\\e^{-\frac{3}{4}}\\e^{-1}\end{bmatrix}$$

(2.17) denkleminden hesaplanan koşullarla iligili artırılmış matrisler de

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_0 &= [U_0;\lambda_0] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 1] \\
\tilde{U}_1 &= [U_1;\lambda_1] = \left[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}\right] \\
\tilde{U}_2 &= [U_2;\lambda_2] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad -1]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklindedir.

Tanımlanan matrisler ve (4.18) koşullarından faydalanarak (4.16) problemini

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{111}{64} & \frac{311}{768} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} c^0 \\ c^{-\frac{1}{4}} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun çözümünü ise

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -1 \\ 1.5 \\ -1.72308 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Bu katsayıların (3.8)'de yerine konulmasıyla (4.16) probleminin çözümünü

$$y(x) = -0.0717954x^4 + 0.25x^3 - 0.5x^2 + 0.5x + 1$$

şeklinde buluruz.

(4.16) probleminin verilen koşulları sağlayan tam çözümü $y(x) = \frac{x}{2}e^{-x} + 1$ şeklindedir [15]. Tablo 4'de r=5 alınarak $y(x_r)$, $D(x_r)$, $\Delta(x_r)$'ler hesaplanarak, tam çözümle karşılaştırılması yapılmıştır.

ÖRNEK 5:

$$y^{(4)}(x)+y(x)=2-x \tag{4.19}$$

$$y(1)=0,\ \ y'(1)=0,\ \ y''(0)=0 \ \text{ ve } \ y'''(0)=0$$

problemini göz önüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x)=\sum_{n=0}^{6}\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,\quad 0\le x,c\le 1$$

sonlu Taylor serisiyle yaklaşalım. N=6 için Taylor Sıralama noktaları [0,1] aralığında,

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{6},\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=\frac{2}{3},\ x_5=\frac{5}{6},\ x_5=1$$

bulunur.

$P_4(x)=P_0(x)=1$ ve $f(x)=2-x$ olmak üzere (4.19) diferansiyel denklemini (2.11) matris denklemi ile,

$$\{P_4CM_4+P_0CM_0\}A=F \tag{4.20}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada P_4, P_0, F, C, M_3 ve M_0 aşağıda tanımlanmıştır.

$$P_4=P_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\1&\frac{1}{6}&\left(\frac{1}{6}\right)^2&\left(\frac{1}{6}\right)^3&\left(\frac{1}{6}\right)^4&\left(\frac{1}{6}\right)^5&\left(\frac{1}{6}\right)^6\\1&\frac{1}{3}&\left(\frac{1}{3}\right)^2&\left(\frac{1}{3}\right)^3&\left(\frac{1}{3}\right)^4&\left(\frac{1}{3}\right)^5&\left(\frac{1}{3}\right)^6\\1&\frac{1}{2}&\left(\frac{1}{2}\right)^2&\left(\frac{1}{2}\right)^3&\left(\frac{1}{2}\right)^4&\left(\frac{1}{2}\right)^5&\left(\frac{1}{2}\right)^6\\1&\frac{2}{3}&\left(\frac{2}{3}\right)^2&\left(\frac{2}{3}\right)^3&\left(\frac{2}{3}\right)^4&\left(\frac{2}{3}\right)^5&\left(\frac{2}{3}\right)^6\\1&\frac{5}{6}&\left(\frac{5}{6}\right)^2&\left(\frac{5}{6}\right)^3&\left(\frac{5}{6}\right)^4&\left(\frac{5}{6}\right)^5&\left(\frac{5}{6}\right)^6\\1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}2\\\frac{11}{6}\\\frac{5}{3}\\\frac{3}{2}\\\frac{4}{3}\\\frac{7}{6}\\1\end{bmatrix},$$

$$M_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6!} \end{bmatrix},$$

Diferansiyel Denklemin verilen dört koşulunun da matris formunda gösterimleri,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &= [U_0;\lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} & ; & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{U}_1 &= [U_1;\lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & ; & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{U}_2 &= [U_2;\lambda_2] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0] \\ \tilde{U}_3 &= [U_3;\lambda_3] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad 0] \end{aligned} \qquad (4.21)$$

şeklindedir.

(4.20) matris denkleminde, bulunan matrisleri yerlerine koyup düzenlersek ve elde ettiğimiz W matrisinin artırılmış matrisine (4.21) koşullarını ilave edersek, $\tilde{W}^*$ matrisini,

$$\tilde{W}^{*}=\left[W^{*};F^{*}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{72} & \frac{1}{1296} & \frac{31105}{31104} & \frac{155521}{933120} & \frac{4666561}{33592320} & ; & \frac{11}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{18} & \frac{1}{162} & \frac{1945}{1944} & \frac{9721}{29160} & \frac{29161}{524880} & ; & \frac{5}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} & ; & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan bilinmeyen Taylor katsayılarının oluşturduğu matris,

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \\ y^{(5)}(0) \\ y^{(6)}(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.200457 \\ -0.269327 \\ 0 \\ 0 \\ 1.79954 \\ -0.728655 \\ -0.0283140 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Bu katsayıların (3.8)'de yerine konulmasıyla (4.17) probleminin çözümünü

$$y(x)=-3.9325\ 10^{-5}x^{6}-0.00607213x^{5}+0.0749809x^{4}-0.269327x+0.200457$$

şeklinde buluruz. Tablo 5'de bu problemin r=5 alınarak $y(x_r)$, $D(x_r)$ ve $\Delta(x_r)$'leri hesaplanarak gösterilmiş ve genel çözümüyle karşılaştırılmıştır [16].

Tablo 4

$$(1+2x)y'''(x)+4xy''(x)+(2x-1)y'(x)=e^{-x}; \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0)=1 \quad y'(0)=\frac{1}{2} \quad y''(0)=-1$$

x_r	N=4 c=0			
	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	Tam Çözüm
0	1	0	0.12292	1
0.2	1.08188	0.014613	0.0410348	1.081873
0.4	1.13416	-0.11182	-0.0112420	1.134064
0.6	1.16469	0.007878	-0.0417753	1.164643
0.8	1.17859	-1.2380	-0.00556726	1.179731
1	1.17820	-1.652355	-0.0552845	1.183939
	$\bar{y}=1.12292$		$R_n=0.031509$	

Tablo 5

$$y^{(4)}(x)+y(x)=2-x$$

$$y(1)=0, \quad y'(1)=0, \quad y''(0)=0 \text{ ve } y'''(0)=0$$

x_r	N=4 c=0			
	$y(x_r)$	$D(x_r)$	$\Delta(x_r)$	Tam Çözüm
0	0.200457	0	-0.116530	0.198256
0.2	0.146710	$-4.4843x10^{-5}$	-0.0627829	0.142586
0.4	0.0945839	$3.98858x10^{-4}$	-0.0106566	0.091234
0.6	0.0481048	0.00128324	0.0358224	0.047523
0.8	0.0137081	0.00493073	0.0702191	0.0.014578
1	$1.5032x10^{-9}$	0.00704379	0.0839272	0
	$\bar{y}=0.003973$		$R_n=0.0351524$	

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

1. Bu çalışmada tam çözümü bulunamayan ya da bulunması çok zor hesaplamaları gerektiren, yüksek mertebeden, değişken katsayılı, lineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için sunulan Taylor Sıralama Yöntemi'nin yararlılığı tartışıldı.

2. (1.1) diferansiyel denklemindeki $P_k(x)(k=0,1,\dots,m)$ ve f(x) fonksiyonları verilen aralıkta Taylor serisine açılabiliyorsa, dolayısıyla sıralama noktalarında tanımlı ise o zaman y(x) seri çözümü vardır; aksi halde yöntem kullanılmaz. Diğer yandan bilinen bu fonksiyonların x=c civarında hızlı yakınsayan bir Taylor Serisine açılabildiğinde ve sıralama noktalarının sayısı fazla olduğunda Taylor Sıralama Yöntemi'nin en iyi sonuç verdiği gözlenmiştir.

3. Eğer $P_k(x)(k=0,1,\dots,m)$ ve f(x) fonksiyonları x_i sıralama noktalarında basit (trigonometrik ya da üstel olmayan) fonksiyon iseler, (ki aksi halde belli bir yuvarlama işlemi sonucunda işleme devam edilir) x=c noktasını [a,b] aralığının herhangi bir yerinde seçebiliriz, bu seçimin sonucu etkilemediği örneklerde gözlenmiştir. Bu da denklemi, özel bir noktada değil de, herhangi bir noktada açmak açısından önemlidir.

4. Denklemin en iyi yaklaşık çözümünü elde etmek için Taylor açılımındaki N kesme sınırı, dolayısıyla sıralama noktalarının sayısı yeterince büyük seçilmelidir. Çünkü N 'nin seçimi y(x) çözümünün hassaslığını belirler. Eğer N küçük alınırsa, çözümü istenilen doğrulukta temsil etmeyebilir. Aynı şekilde N gereğinden çok büyük seçilince gereksiz çok fazla işlem yapılmış olunacaktır.

5. (1.1) diferansiyel denklemi özel olarak,

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x)$$

Cauchy-Euler biçiminde alınırsa, (burada; $P_k(x) = c_k x^k$ olmak üzere)

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} P_k C M_k\right\} A = F$$

matris denklemine dönüştürülüp, çözüm benzer şekilde araştırılır. Burada P_k,

$$P_k = c_k \begin{bmatrix} x_0^{\ k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^{\ k} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & x_N^{\ k} \end{bmatrix}$$

olarak alınmıştır.

6. Yine (1.1) diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^{m} c_k y^{(k)}(x) = f(x)$$

şeklinde sabit katsayılı diferansiyel denklem olarak alınırsa,

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} c_k C M_k\right\} A = F$$

matris formuna dönüştürülüp çözüme ulaşılabilir.

7. Eğer diferansiyel denklemin tam çözümü varsa ve bu N. veya daha küçük dereceden bir polinom ise, Taylor Sıralama Yöntemi ile çözüm aynen elde edilir. Tam çözüm yoksa çözüm N. derecedenbir polinom şeklinde yaklaşık olarak bulunur.

8. Yöntem geliştirilerek, yüksek mertebeden Fredholm türü integrodiferansiyel denklemlere, Volterra türü integrodiferansiyel denklemlere ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

KAYNAKÇA

[1] Stephenson, G., Mathematical Methods For Science Students, Longman Group Limited, London, (1975).

[2] Ross, S.L., Differantial Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York, s.318, (1974)

[3] Kanwal, R.P. and Liu, K.C., "A Taylor Expansion Approach For Solving Integral Equations", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technology.*, no.3, (1989).

[4] Sezer, M., "The Solutions of Certain Classes of Fredholm Integral Equations by means of Taylor Series", *Uludağ Üniv., Eğitim Fakültesi Dergisi,* Vol VIII, 2, 17-24

[5] Sezer, M., "Taylor Polynomial Solutions of Volterra Integral Equations", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technology.*, vol.25, no:5, 625-633, (1994).

[6] Köroğlu, H.,"Chebyshev Series Solution of Integrodifferential Equations" D.E.Univ. Fen Bilimleri Ens.(Doktora Tez çalışması), (1995).

[7] Sezer, M.ve Doğan, S., "A Taylor Polynomial approxmation for Solving Linear Fredholm Integral Equations", *D.E.Ü.Eğitim Fak. Eğitim Bilimleri Dergisi.*, Yıl 2, sayı 2, 39-49 (1993)

[8] Sezer, M.,"A Method for the Approximate Solition Of The Second Order Linear Differential Eguations in Terms of Taylor Polynomials", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technology.*,(basımda),(1996)

[9] Sezer, M. and Kaynak,M.," Chebshev Polynomial Solutions of Linear Differantial Equations", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technology*, (1996)

[10] Sezer, M.and Doğan, S.,"Chebshev Seres Solutions of Fredholm Integral Equations", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technology,* (basımda), (1996).

[11] Köroğlu, H.ve Sezer.M.,"Bazı İntegrodiferansiyel Denklemlerin Chebyshev Polinom Çözümleri", 8. Ulusal Matematik Sempozyumu, 19-23 Eylül, Adana, (1995).

[12] Fox, L. and Parker, I.B., Chebyshev Polynomials in Nümerical Analysis, Oxford University, Press, (1969).

[13] Clenshaw, C.W.,"The Nümerical Solution of Linear Differantial Equantions in Chebyshev Series", Proc. Camb. Phil. Soc. 53, pp.134-149, (1956).

[14] Karamete,A. ve Sezer,M.,"Bazı İntegrodiferansiyal Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri İçin Taylor-Sıralama Yöntemi", Balıkesir Üniversitesi Matematik Sempozyumu "Altınolukta Matematik Günleri", (1996).

[15] Sezer, M.,"Diferansiyel Denklemler-II Ve Çözümlü Problemler" Dokuz Eylül Üniv. Buca Eğitim Fak (1995).

[16] Yıldız, B ve Bayram, M., " Numerical Solution of Elasticity Problem of Beam with and End points Free", Balıkesir Üniversitesi Matematik Sempozyumu " Altınolukta Matematik Günleri", (1996).