47952

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

KLEIN YÜZEYLERİN OTOMORFİZM GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dilek DİLSİZOĞLU

Balıkesir, Şubat-1997

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

KLEIN YÜZEYLERİN OTOMORFİZM GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dilek DİLSİZOĞLU

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut BAŞKAN

Sınav Tarihi : 21.02.1997

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Turgut BAŞKAN
Prof. Dr. Mehmet ARISOY
Yrd. Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL

Balıkesir, Şubat-1997

ÖZ

Klein Yüzeylerin Otomorfizm Grupları

Dilek DİLSİZOĞLU

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut BAŞKAN

Balıkesir, 1997

Riemann, kompleks cebirsel eğrilerin kesirli otomorfizmlerinin oluşturduğu gruplarla, bu cebirsel eğrilerin belirlediği kompakt Riemann yüzeylerin kesirsel otomorfizmlerinin oluşturduğu grupların aynı olduğunu gösterdi. Daha sonra Macbeath ve Accola bu otomorfizm gruplarının yapılarını belirten bir kısım özellikler elde ettiler. Bu sonuçlar, otomorfizm grupları üzerindeki çalışmaların yoğunlaşmasına sebep oldu.

Riemann yüzeyleri, üzerlerinde analitik yapılar bulunan, yönlendirilebilir kenarsız yüzeylerdir. Ancak yönlendirilemez ve kenarlı yüzeyler dikkate alındığında, bunların üzerine dianalitik yapılar koymak gerekmektedir. Bu yapıda analitik ve ters-analitik dönüşümler vardır. Bu yüzeylere Klein yüzeyler adı verilmiştir. Böylece Riemann yüzeyleri bu yüzeylerin özel hali olmuşlardır.

Bu tezde Klein yüzeylerin otomorfizm grupları incelendi. Genel teori verildikten sonra bu konudaki literatürü oluşturan çalışmalardan bir kısım önemli teoremler seçildi ve bunların ispatları anlaşılır biçimde verildi.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Klein yüzeyler ve bunların örtme yüzeyleri tanımlandı. Klein yüzeyler ve otomorfizm gruplarla ilgileri nedeniyle NEC-gruplar ve bölüm uzayları ile ilgili bir kısım temel sonuçlara yer verildi.

İkinci bölümde otomorfizm gruplarının temel özellikleri belirtildi. Özellikle Hurwitz grupları ile ilgili temel teoremler ayrıntılı biçimde yazıldı.

Üçüncü bölümde PSL(2,q) grupları ve Hurwitz grupları arasındaki ilgiyi belirten bazı teoremlerin ispatları ayrıntılı biçimde yazıldı.

Anahtar Kelimeler: Klein yüzey, Riemann yüzeyi, örtme yüzeyi, NEC-grup, otomorfizm, cins, dallanma indeksi.

ABSTRACT

Automorphism Groups of Klein Surfaces

Dilek DİLSİZOĞLU

Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics Education

M.Sc. Thesis / Supervisor: Prof. Dr. Turgut BAŞKAN

Balıkesir-Turkey, 1997

Riemann showed that the groups of fractional automorphisms of complex algebraic curves are the same with the groups of fractional automorphisms of compact Riemann surfaces determined by these algebraic curves. Later on Macbeath and Accola obtained some properties determining the structure of these autumorphism groups. These results caused an increase on the search of these automorphism groups.

Riemann surfaces are orientable surfaces without boundary with an analytical structure on them. When non-orientable surfaces with boundary are considered, it is necessary to put on them dianalytic structures. In this structure there exist analytical and anti-analytical transformations. These kind of surfaces are called Klein(ian) surfaces. It should be noted that Riemann surfaces are a special case of them.

In this thesis automorphism groups of Klein surfaces are studied. After the general theory is given, some important theorems in the literature are recalled and explicit proofs are given.

The thesis consists of three chapters. In the first chapter Klein surfaces and their covering surfaces are defined. Also some fundamental results concerning NEC-groups and quotient spaces are given because of their close relation with Klein surfaces and automorphism groups.

In the second chapter fundamental properties of automorphism groups are given. Particularly, main theorems related to Hurwitz groups are recalled in detail.

In the third chapter, proofs of some theorems giving the relation between PSL(2,q) groups and Hurwitz groups are given. Finally some boundary problems for the order of automorphism groups in relation with ramification index are given and proven.

Key Words: Klein surface, Riemann surface, covering surface, NEC-group, automorphism, genus, ramification index.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZ, ANAHTAR SÖZCÜKLER	i
ABSTRACT, KEY WORDS	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
1. KLEIN YÜZEYLER, AYRIK GRUPLAR VE BÖLÜM UZAYLARI	1
1.1 Klein Yüzeyler	1
1.2 Ayrık Gruplar	15
1.3 NEC-Gruplar ve Fuchs Gruplar	19
1.4 Klein Yüzeylerin Bölüm Uzayı Olarak Temsili	25
2. KLEIN YÜZEYLERİN OTOMORFİZM GRUPLARI	30
2.1 Klein Yüzeylerin Otomorfizm Gruplarının Genel Teorisi	30
3. KLEIN YÜZEYLERİN OTOMORFİZM GRUPLARI İÇİN SINIRLAR	37
3.1 Hurwitz Grubu ve PSL(2,q) Grupları	37
3.2 Örtü ve Dallanmaya Bağlı Olarak Sınır Bulunması	43
KAYNAKÇA	

SEMBOL LİSTESİ

Kısaltmalar	Açıklamalar
$\mathbf{H}$	Üst yarı-düzlem
Γ	NEC-grup
$\mathbf{H}/\Gamma$	Klein yüzey
PSL(2,$\mathbf{R}$)	Projektif Special Linear Group
S_C	S Klein yüzeyinin kompleks iki-katlısı
$\overline{H} = H \cup \mathbf{R}$	Kapalı üst yarı-düzlem
g	Cins
cl(u)	Kapalı u eğrisinin homotopi sınıfı

ÖNSÖZ

Geleceğine inanamadığım günler sonunda geldi. 1.5 yıl öncesine kadar adını bile duymadığım "Klein Yüzeylerin Otomorfizm Grupları" isimli tezimi Sayın Hocam Prof.Dr. Turgut BAŞKAN'ın yönetiminde tamamladım.

Öncelikle benimle çalışmayı kabul ettiği için, her zaman çalışmaya güdülediği için ve sayesinde konumla ilgili her türlü kaynağa sahip olabildiğim için Sayın Hocam Prof.Dr.Turgut BAŞKAN'a; çalışmalarım sırasında desteğini, yardımlarını asla esirgemeyen Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr.İ.Naci CANGÜL'e; beni danışman hocamla tanıştıran ve hoşgörülü yaklaşımıyla her zaman rahatlamamı sağlayan Sayın Hocam Prof.Dr. Mehmet ARISOY'a sonsuz teşekkürler ediyorum.

Bu tezin oluşmasında, yüksek lisansa başlamamda ve aslında tüm öğrenim hayatım boyunca her zaman bana destek olan, tüm sorunlarıma ortak olup çözmeye çalışan anneme, babama ve daima yanımda hissettiğim canım kardeşime, ayrıca çok bunaldığım zamanlarda da beni yalnız bırakmadığı için herşeyi paylaştığım sevgili ev arkadaşım Ayşen'e ve yine her zaman yakınımda hissettiğim, tezimi yazarken bile yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Recep'e de içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Şubat, 1997 Dilek DİLSİZOĞLU

BÖLÜM 1

KLEİN YÜZEYLER, AYRIK GRUPLAR ve BÖLÜM UZAYLARI

Bu bölümde Klein yüzeyler tanımlanacak, örnekler verilecek ve Klein yüzeylerle ilgileri nedeniyle NEC-gruplarının temel özellikleri belirtilecek. Daha sonra da Klein yüzeylerin birer bölüm uzayı olarak temsil edilebileceği gösterilecektir.

1.1 Klein Yüzeyler

Bu çalışmanın amacı Klein yüzeylerin otomorfizm gruplarını incelemektir. Bunun için bu kesimde önce bu yüzeylerin temel özellikleri belirtilecektir. Daha sonra da Klein yüzeylerin otomorfizm gruplarını incelemek için gerekli olan iki-yapraklı kompleks örtü(complex double) tanımlanacaktır. Bu örtü yüzeyi yardımıyla klasik Riemann yüzeyleri kuramında otomorfizm grupları ile ilgili olarak bilinen sonuçlar, herhangi bir Klein yüzeyin otomorfizm gruplarını incelemek için kullanılacaktır.

1.1.1 Tanım: Bir $f:A\to C$, $f=u+iv$ fonksiyonu verilsin.

a) Eğer, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left[u_x+iu_y+iv_x-v_y\right]=0$

ise f fonksiyonu A üzerinde analitiktir denir.

b) Eğer, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left[u_x-iu_y+iv_x+v_y\right]=0$

ise f, A üzerinde ters(anti) analitiktir denir.

c) Eğer, f nin A nın herbir bileşenine kısıtlanmışı analitik ya da ters analitik ise, f, A da dianalitiktir denir. [1,2]

1.1.2 Sonuç:

a) f analitik $\Leftrightarrow \bar{f}$ ters analitik

b) C nin bağlantılı bir altkümesinde aynı anda analitik ve ters analitik olan bir fonksiyon sabittir.

c) $f:A\to B\subset \mathbf{C}$ ve $g:B\to \mathbf{C}$ dianalitiklerse, $gf:A\to \mathbf{C}$ dianalitiktir.

d) Bir $f=u+iv$ fonksiyonu verilsin. f nin analitik olması halinde $\varepsilon=1$ ve tersanalitik olması halinde $\varepsilon=-1$ olmak üzere;

$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \varepsilon(u_x^2+v_x^2)$ olur. Bu gösteriyor ki, analitik fonksiyon yön korur. Ters analitik fonksiyon yön değiştirir. [1,2]

Örneğin; $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $c\neq 0$, $A=\mathbf{C}-\{-d/c\}$ olmak üzere $f:A\to \mathbf{C}$, $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ analitik, $\bar{f}:A\to \mathbf{C}$, $\bar{f}(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ters analitiktir.

1.1.3 Tanım: (a) S bağlantılı bir Hausdorff uzayı olsun. Bir $\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ ailesi aşağıdaki koşulları gerçekliyorsa S uzayı $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ topolojik atlas yapısına sahip bir kenarlı yüzeydir(2-boyutlu kenarlı manifoldtur) denir.

1) Herbir $U_i\subset S$ açıktır ve $\bigcup_{i\in I} U_i = S$ dir.

2) Herbir A_i, $\mathbf{C}$ ya da $\overline{\mathbf{H}}$ de açık olmak üzere $\phi_i: U_i\to A_i$ bir homeomorfizmadır. Görülüyor ki yüzey yerel olarak **C**-düzlemi ile aynı topolojik yapıya sahiptir. S kenarlı yüzeyinin ∂S ile gösterilen kenarı

$$\partial S=\left\{p\in S \,\middle|\, \exists i\in I,\ p\in U_i,\ \phi_i(p)\in \mathbf{R} \text{ ve } \phi_i(U_i)\ \overline{\mathbf{H}} \text{ da açık, fakat } \mathbf{C} \text{ de açık değil}\right\}$$

biçiminde belirtilen kümedir.

(b) Herbir (U_i,ϕ_i) ye pafta denir. Eğer $\phi_i(U_i)\subseteq \overline{\mathbf{H}}$, ($\overline{\mathbf{H}}=\{z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z\geq 0\}$)ise bu paftaya pozitif pafta denir.

(c) $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ topolojik atlasın, geçişme fonksiyonları,

$$\phi_{ij}=\phi_i\phi_j^{-1}:\phi_j(U_i\cap U_j)\to\phi_i(U_i\cap U_j)$$

biçiminde tanımlanan ϕ_{ij} homeomorfizmalarıdır.

(d) Bir yüzey topolojik uzay olarak kompakt ise buna kompakt yüzey(kapalı yüzey) denir. Kompakt olmayan yüzeylere açık yüzey denir.

Bu tezde aksi söylenmedikçe dikkate alınan yüzeyler kompakt yüzeyler olarak varsayılacaktır.[1,3]

1.1.4 Tanım: (a) S, $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ topolojik atlaslı bir yüzey olsun. Eğer, $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ nın geçişme fonksiyonları dianalitiklerse(analitik iseler) $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ bir dianalitik(analitik) atlastır denir.

(b) $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ve $\underset{\sim}{\mathcal{U}}'$, S üzerinde iki dianalitik (analitik) atlas olsunlar. Eğer $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{U}}'$, S üzerinde dianalitik (analitik) ise $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ile $\underset{\sim}{\mathcal{U}}'$ dianalitik(analitik) denktirler denir.

(c) S üzerinde bir dianalitik (analitik) yapı diye S üzerindeki bir dianalitik (analitik) atlasın denklik sınıfına denir.

(d) S yüzeyi üzerinde bir $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ dianalitik atlasının(denklik sınıfının temsilcisi) bulunduğunu varsayalım. Bu durumda S ye bir Klein yüzey denir. [1]

Örnek: S=C, $\underset{\sim}{\mathcal{U}_1} = \{(C, \phi_1(z) = z)\}$, $\underset{\sim}{\mathcal{U}_2} = \{(C, \phi_2(z) = \bar{z})\}$, $\underset{\sim}{\mathcal{U}_3} = \{(C, \phi_1), (C, \phi_2)\}$ olsun. Burada birinci ve ikinci S=C de analitik üçüncü ise dianalitik(analitik olmayan) atlaslardır. Dikkat edilirse birinci ve ikinci dianalitik olarak denktirler.

1.1.5 Uyarı: 1) Bir klasik Riemann yüzeyi kenarı olmayan, yönlendirilebilir bir Klein yüzeyi olarak düşünülebilir. Böyle bir durumda $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ nın analitik olduğu aşikardır. Üzerindeki atlas yapısına bağlı olarak yönlendirilemez Klein yüzey, kenarlı ve kenarsız Klein yüzey adlandırmaları yapılır.

1.1.6 Uyarı: S yüzeyinin yönlendirilebilir olması gerçel 2-manifoldlarda olduğu gibi tanımlanır. (Tabii bu durumda **C** yi $\mathbf{R}^2$ ile özdeş alıyoruz.)

C, bir S manifoldunda herhangi kapalı eğri olsun. C üzerinde belli bir A noktasından başlayarak, belli bir yönde C üzerinde dolandıktan sonra A ya gelindiğinde başlangıç yönünde olunursa, C yön koruyan eğridir, denir. Aksi halde, yön değiştiren eğri denir.

$\mathbf{R}^2$ de her kapalı eğri yön koruyandır. Fakat, $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -20 \le x \le 20,\ -2 < y < 2\}$ şeridinin kenarları -2<y<2 için (20,y) noktası, (-20,-y) ile özdeşlenerek elde edilen bölüm uzayına S Möbiüs şeridi denir. Bu şeritte öyle kapalı eğriler vardır ki yön korumazlar.

Bir S bağlantılı 2-manifoldunda her kapalı eğri yön koruyorsa, S yönlendirilebilir manifoldtur, denir. Enaz bir tane yön değiştiren kapalı eğri varsa, S yönlendirilemez manifoldtur, denir.[4]

1.1.7 Örnek: 1)$\mathbf{H}=\{z\in\mathbf{C} |\ \operatorname{Im} z>0\}$ ve $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C} |\ |z|<1\}$ kenarsız, açık ve yönlendirilebilir birer Klein yüzeyidirler. Yani birer Riemann yüzeyidirler. Üzerlerindeki analitik yapı ise sırasıyla,

$\underset{\sim}{\mathcal{U}_1}=\{(U_1=\mathbf{H},\phi_1=Id_{\mathbf{H}})\}$, $\underset{\sim}{\mathcal{U}_2}=\{(U_2=\mathbf{D},\phi_2=Id_{\mathbf{D}})\}$ dır.

2) $\overline{\mathbf{H}}=\{z\in\mathbf{C} |\ \operatorname{Im} z\geq 0\}$, $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ ve $\Delta=\overline{\mathbf{H}}\cup\{\infty\}$ kümeleri sırasıyla üzerlerindeki

$$\underset{\sim}{\mathcal{U}_1}=\{(U_1=\overline{\mathbf{H}},\ \phi_1=Id_{\overline{\mathbf{H}}})\},\quad \underset{\sim}{\mathcal{U}_2}=\left\{\left(U_1=\mathbf{C},\ U_2=\overline{\mathbf{C}}-\overline{B}(0,1),\ \phi_1=Id_{\mathbf{C}},\phi_2=\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$\underset{\sim}{\mathcal{U}_3}=\left\{\left(U_1=\overline{\mathbf{H}},\ U_2=\Delta-\overline{B}(0,1),\ \phi_1=Id_{\overline{\mathbf{H}}},\phi_2=\frac{1}{\overline{z}}\right)\right\}$ yapılarıyla birer Klein yüzeydirler. Burada sırayla kenarların $\partial\overline{\mathbf{H}}=\mathbf{R}$, $\partial\overline{\mathbf{C}}=\varnothing$, $\partial\Delta=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ olduğu ve tümününde kompakt (kapalı), yönlendirilebilir Klein yüzey oldukları görülmektedir.

3) $\mathbf{C}$ üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\{(\mathbf{C},\phi_1),(\mathbf{C},\phi_2)\}$ ve $\phi_1(z)=z$, $\phi_2(z)=\overline{z}$ olarak alınırsa, $\mathbf{C}$ yönlendirilemez bir Klein yüzey olur.

4) Möbiüs şeridi, yönlendirilemez bir Klein yüzey olur.[1,5,6]

1.1.8 Tanım: S bir Klein yüzeyi ve g, S den **R** ye ya da **C** ye sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer herbir U_i için, $\left(g|_{U_i}\right)\circ\phi_i^{-1}$, C^n-sınıfından bir fonksiyonsa g, S de, $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ yapısına göre, C^n-sınıfındandır, denir.[1]

1.1.9 Uyarı: $\underset{\sim}{\mathcal{V}}=\{(V_k,\psi_k)_{k\in K}\}$ S üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ya denk olan bir başka atlas ise $\phi_i\circ\psi_k^{-1}$ geçişme fonksiyonları C^∞-sınıfından olduklarından 1.1.8 de verilen tanım $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ nun seçiminden bağımsızdır. Dolayısıyla Klein yüzeylerde C^n- fonksiyonlar çalışılabilir.

1.1.10 Tanım: g, S üzerinde C^2-sınıfından olsun. Eğer herbir $\left(g|_{U_i}\right) \circ \phi_i^{-1}$ harmonik ise g fonksiyonu, S Klein yüzeyinde, $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ya göre, harmoniktir denir.

Yukarıdaki 1.1.9 a benzer uyarı burada da geçerlidir.

1.1.11 Tanım: $g\colon S \to \mathbf{C}$ sürekli karmaşık fonksiyon olsun. Eğer herbir $\left(g|_{U_i}\right) \circ \phi_i^{-1}$ analitikse g, S üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ya göre analitiktir denir.

1.1.9 dakine benzer uyarı burada da geçerlidir.

1.1.12 Örnek: **C** nin üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\{(U_1 = \mathbf{C},\ U_2 = \mathbf{C},\ \phi_1(z) = z, \phi_2(z) = \bar{z})\}$ dianalitik yapısının bulunduğunu varsayalım. **C** bir Klein yüzey olur.

g=z fonksiyonu dikkate alınırsa bunun **C** de analitik olmadığı görülür. Çünkü; $g \circ \phi_1^{-1}$ analitik, $g \circ \phi_2^{-1}$ tersanalitik olur. Halbuki, **C** üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}_1} = \{(U_1 = \mathbf{C},\ \phi_1(z) = z\ )\}$, $\underset{\sim}{\mathcal{U}_2} = \{(U_2 = \mathbf{C},\ \phi_2(z) = \bar{z}\ )\}$ yapıları dikkate alınırsa g, $\underset{\sim}{\mathcal{U}_1}$ e göre analitik, fakat $\underset{\sim}{\mathcal{U}_2}$ e göre analitik değildir .

1.1.13 Uyarı: 1) Bir S Klein yüzeyi üzerinde bir meromorf fonksiyon tanımlamak için **C** deki F(a+ib)=a-ib karmaşık eşlenik kavramını $F(\infty)=\infty$ alarak genişletmek gerekir. Böylece sıfır ve gerçel eksen bu eşlenik dönüşümün yani F nin sabit noktaları kümesini oluştururlar.

2) Bilinen tanımı ile yönlendirilemez Klein yüzeyler üzerinde meromorf fonksiyonlar sabit olacaklarından meromorf fonksiyon tanımını aşağıdaki şekilde, bir anlamda, genelleştireceğiz.

1.1.14 Tanım: S üzerinde bir $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ yapısı bulunsun. S üzerinde bir $f_{\underset{\sim}{\mathcal{U}}}$ meromorf fonksiyonu diye aşağıdaki koşulları gerçekleyen $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyonlar ailesine denir.

(i) f_i ler, U_i leri $\overline{\mathbf{C}}$ içine öyle resmederler ki her bir $f_i \circ \phi_i^{-1}$, $\phi_i(U_i)$ üzerinde meromorftur ve $f_i(\partial S \cap U_i) \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ gerçeklenir.

(ii) $U_i \cap U_k$ nın bir V bağlantılı altkümesi için,

$$f_i|_V = \begin{cases} f_k|_V & : \phi_i\phi_k^{-1}|\phi_k(V) \text{ analitik} \\ \overline{f_k}|_V & : \phi_i\phi_k^{-1}|\phi_k(V) \text{ tersanalitik} \end{cases}$$

olur.[6]

1.1.15 Örnek: S yönlendirilemez bir Klein yüzeyi olsun. a,b∈**R**, b≠0 olmak üzere $f_j = \alpha = a + ib$ ise $f_{\underset{\sim}{\mathcal{U}}} \equiv (f_j)_{j\in J}$ S üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ya göre bir meromorf fonksiyon değildir. Çünkü, $U_j \cap U_k$ nın öyle bir boş olmayan bağlantılı V kümesi vardır ki, $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$, $\phi_k(V)$ üzerinde tersanalitiktir. Bu nedenle de α, $\overline{\alpha}$ olmak zorundadır. Bu ise b≠0 alındığında olanaksızdır. Ancak, $f_j = a$ alınırsa, $f_{\underset{\sim}{\mathcal{U}}}$ S üzerinde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ ya göre bir meromorf fonksiyondur.[1]

1.1.16 Önerme: S yüzeyi verilsin. K(S), g(S) ve $\chi(S)$ bu S yüzeyinin sırasıyla ∂S sınırının bileşen sayısını, topolojik cinsini ve de Euler karakteristiğini ($\chi(S)$; S de yapılan üçgenlemeden köşe sayısı ile yüz sayısının toplamından kenar sayısının çıkarılması ile elde edilen sayıdır.) göstermek üzere;

$$g=g(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi(S)-K(S)) & : \text{S yönlendirilebilir} \\ 2-\chi(S)-K(S) & : \text{S yönlendirilemez} \end{cases}$$

gerçeklenir. Yüzeyin cebirsel cinsini p ile gösterelim. Bu durumda;

$$p = \begin{cases} 2g+k-1 & ; \text{S yönlendirilebilir kenarlı} \\ g+k-1 & ; \text{S yönlendirilemez kenarlı} \end{cases}$$

dır. Örneğin; küre de p=g=0, tor da p=g=1, Möbiüs şeridin de g=p=0 olur.[1,4,6]

1.1.17 Tanım: a) Bir S yüzeyinin örtme yüzeyi diye, $\tilde{S}$ bir yüzey ve $p:\tilde{S} \to S$ üzerine dönüşümü aşağıdaki özelliği sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $(\tilde{S}, p)$ çiftine denir.

i) $\forall s \in S$, $p^{-1}(U)$nun her bağlantılı V bileşeni p ile U üzerine homeomorf olarak resmedilen ve D açık diskine homeomorf olan bir açık U komşuluğuna sahiptir. Buradaki p ye örtme dönüşümü, U ve V ye de basit (elemanter) komşuluklar denir. Eğer bir $\tilde{s} \in \tilde{S}$ noktasının $p|_V$ birebir olacak biçimde bir V komşuluğu yoksa $\tilde{s}$ ya bir dal (ramification) noktası denir. Hiç dal noktası olmayan dönüşüme dallanmamış (unramified) tır denir.

b) Eğer herbir $s \in S$ noktasının, $p^{-1}(U)$ nun herbir bağlantılı V bileşeni ve belli $n \geq 1$ için $\phi \circ p = \pi_n \circ \psi$ ve $\phi: U \to D$, $\psi: V \to D$ dönüşümleri birer homeomorfizma olacak biçimde bir U komşuluğu bulunabilirse, p örtme dönüşümüne dallanmış (branched, ramified) örtme denir. (Burada, $\pi_n: D \to D$, $z \to z^n$ şeklinde bir dönüşümdür.)

c) $s \in S$ için $p^{-1}(s)$ye, S üzerine lif (fiber) denir. $|p^{-1}(s)|$ yerel olarak sabittir. Yani, $\forall s \in U$ için, $|p^{-1}(s)| = n$ (sabit) dir. Bu n sayısına, örtmenin yaprak sayısı denir. Dikkat edilirse; n, $p^{-1}(U)$ nun bağlantılı bileşen sayısıdır.($n=\infty$ olabilir.)

d) S nin bir $(\tilde{S}, p)$ örtme yüzeyi verilsin. Eğer bir $g: \tilde{S} \to \tilde{S}$ homeomorfizması $p \circ g = p$ özelliğinde ise g ye $(\tilde{S}, p)$ nin bir örtme transformasyonu denir. Dikkat edilirse; g her $p^{-1}(s)$ lifini kendi üzerine resmediyor. $G = \{g \mid g: \tilde{S} \to \tilde{S} \text{ örtme transformasyonu}\}$ bileşim altında bir grup oluşturur. G ye örtme transformasyonları grubu denir.

e) G, $(\tilde{S}, p)$ nin örtme transformasyonları grubu olmak üzere, $\forall s \in S$ için $p^{-1}(s)$ üzerinde G transitive(geçişli) hareket ederse, yani $\tilde{s}_1$, $\tilde{s}_2 \in p^{-1}(s)$ için $g(\tilde{s}_1) = \tilde{s}_2$ olacak biçimde bir $g \in G$ varsa $\tilde{S}$ ya regüler örtme yüzeyi denir.[5]

1.1.18 Teorem: Her S yüzeyinin basit bağlantılı bir $\tilde{S}$ örtme yüzeyi vardır.

İspat: $x_0 \in S$ alalım ve $x \in S$ için $\pi(x_0, x)$, x_0 noktasından x noktasına giden eğrilerin homotopi sınıfının kümesini göstersin. Şimdi, $\tilde{S} = \{(x, \alpha) : x \in S,\ \alpha \in \pi(x_0, x)\}$ kümesini ve p: $\tilde{S} \to S$, $p(x,\alpha)=x$ şeklinde tanımlı fonksiyonu dikkate alalım. $\tilde{S}$ yı istenen özellikte örtme uzayı yapacağız.

$(x,\alpha) \in \tilde{S}$ ve $U \subset S$, x in basit bağlantılı açık komşuluğu olmak üzere, $[U,\alpha] \subset \tilde{S}$ altkümesini şu şekilde oluşturacağız. u, x_0 dan x e giden ve $\alpha = cl(u)$ şeklinde olan bir eğri, v ise x den y ye giden ve tamamen U içinde bulunan bir eğri olmak üzere; $[U,\alpha] = \{(y, \beta) \mid y \in U,\ \beta = cl(u.v)\}$ şeklinde tanımlıyoruz. Dikkat edilirse; U basit bağlantılı olduğundan, β v eğrisinin seçiminden bağımsızdır. $\mathcal{B} = \{[U,\alpha]\}$ ailesini alalım. Bu aile, $\tilde{S}$ üzerinde, öyle bir topolojinin tabanıdır ki, $\tilde{S}$ istenen özellikleri gerçekler. [5]

1.1.19 Tanım: Bir S yüzeyinin basit bağlantılı $(\tilde{S}, p)$ örtme yüzeyine S nin üniversal örtme yüzeyi denir.

1.1.20 Sonuç: $\tilde{S}$ üniversal örtme yüzeyi bir tektir. Yani, S nin bir başka $(\tilde{S}_1,q)$ üniversal örtme yüzeyi varsa, $f:\tilde{S} \to \tilde{S}_1$, $p=q\circ f$ olacak şekilde bir f homeomorfizması vardır.

1.1.21 Örnek: 1) Eğer $S=\mathbf{C}/\Omega$ ise $\tilde{S}=\mathbf{C}$ alınabilir.

2) Eğer $S=\mathbf{C}\backslash\{0\}$ ise $\tilde{S}=\mathbf{C}$ ve $p:\mathbf{C}\to\mathbf{C}\backslash\{0\}$, $p(x)=e^x$ alınabilir.

3) Eğer S basit bağlantılı ise $S=\tilde{S}$ ve $p=\text{İd}:\tilde{S}\to S$ alınabilir.

1.1.22 Sonuç: S Riemann yüzeyinin, $\tilde{S}$ üniversal örtme yüzeyi bir regular örtme yüzeyidir.[7]

1.1.23 Teorem: Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi $\mathbf{C}_\infty$,$\mathbf{C}$ ya da $\mathbf{H}$ ye konform denktir.[7,8]

1.1.24 Teorem: S, $\tilde{S}$ örtme yüzeyine sahip bir Riemann yüzeyi ise $\tilde{S}$ üzerinde, $p:\tilde{S}\to S$ analitik(holomorfik) olacak biçimde bir tek kompleks yapı(Riemann yüzeyi yapısı) vardır.

İspat: $\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\{(U,\phi)\}$, S üzerindeki kompleks yapı olsun. $\tilde{S}$ üzerindeki V elemanter komşulukları öyle küçük seçelim ki, $p:V\to U$ bir homeomorfizma olsun. Bu durumda, $\underset{\sim}{\mathcal{V}}=\{(V,\phi\circ p)\}$, $\tilde{S}$ üzerinde istenen özellikte bir analitik atlastır. Çünkü, $(V_i,\phi_i\circ p)$ ve $(V_j,\phi_j\circ p)$, $V_i\cap V_j\neq\varnothing$ şeklinde iki pafta ise $(\phi_j\circ p)\circ(\phi_i\circ p)^{-1}=\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ koordinat geçişme fonksiyonu analitiktir. Diğer yandan, p tarafından indirgenen yerel koordinatların transformasyonu $\phi\circ p\circ(\phi\circ p)^{-1}=\text{Id}$ dir ve dolayısıyla analitiktir. Bu nedenle p de analitik(holomorfik)tir.[7]

1.1.25 Tanım: S_1,S_2 herhangi Klein yüzeyler olmak üzere, bir $f:S_1\to S_2$ sürekli dönüşümü alalım. $f(\partial S_1)\subset\partial S_2$ oluyorsa ve aşağıdaki diyagram uyumlu olacak biçimde her $s\in S_1$ için sırasıyla s ve f(s) de, (U,ϕ), (V,ψ) dianalitik paftaları ve $\phi(U)$ üzerinde analitik bir F fonksiyonu bulunabiliyorsa, f bir morfizmdir.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & & V \arrow[d, "\psi"] \\ \overline{H} \arrow[r, "F"] & C \arrow[r, "\varphi"] & \overline{H} \end{tikzcd}$$

$\psi \circ f = \varphi \circ F \circ \phi$. Burada, $\varphi : \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{H}}$, $\varphi(x+iy) = x + i|y|$ dir ve buna katlama(folding) fonksiyonu denir.[1,3]

1.1.26 Uyarı: 1) Dikkat edilirse, $\partial S_2 = \varnothing$ olduğunda, yukarıdaki diyagram;

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ C \arrow[r, "F"] & C \end{tikzcd}$$

haline gelir.

2) Eğer F tersanalitik ise ϕ yerine, $\overline{\phi}$ alınır., böylece de F analitik ve f yine bir morfizmdir.

3) $g: X \to Y$ sabit olmayan bir morfizm ve $x \in X$ olsun. x ve g(x) noktalarında sırasıyla, $\phi(x) = 0 = \psi(g(x))$, $g(U) \subset V$ ve

$$g|_U = \begin{cases} \psi^{-1} \circ \varphi \circ (\mp \phi^e) & : g(x) \in \partial Y \\ \psi^{-1} \circ (\mp \phi^e) & : g(x) \in \overset{\circ}{Y} \end{cases}$$

özelliğinde, (U, ϕ) ve (V, ψ) dianalitik paftaları bulunabilir.

i) Burada $e \geq 1$ özelliğinde bir tamsayıdır. Bu e ye g nin x deki dallanma indeksi(ramification index) denir ve $e = e_g(x)$ ile temsil edilir.

ii) Eğer $e_g(x) > 1$ ise g, x de dallanmıştır denir. Aksi halde dallanmamıştır denir. Zaman zaman x, g(x) üzerine dallanmıştır da denir.

iii) n_x tamsayısını $x \in \partial X$ ise $n_x = 1$ ve $x \in \overset{\circ}{X}$ ise $n_x = 2$ olarak tanımlayacağız.

iv) x in g(x) üzerine rölatif derecesi $d_g(x)$ simgesi ile belirtilir ve $d_g(x) = \dfrac{n_x}{n_{g(x)}}$ olarak tanımlanır. Dikkat edilirse, $x \in \overset{\circ}{X}$ ve $g(x) \in \partial Y$ halinde $d_g(x) = 2$ ve diğer hallerde $d_g(x) = 1$ dir.

v) $g: X \to Y$ sabit olmayan bir morfizm olsun. Eğer her $y \in Y$ için

$\sum_{x \in g^{-1}(y)} e_g(x).d_g(x) = r$ ise g, Y nin dallanmış r-yapraklı bir örtmesidir, denir.

vi) İki Klein yüzey arasında sabit olmayan her morfizm belli bir r için dallanmış r-yapraklı bir örtmedir.

vii) $g: X \to Y$, r-yapraklı, $f: Y \to T$ m-yapraklı dallanmış örtmeler ise $f \circ g: X \to T$

rm-yapraklı dallanmış örtmedir.[1,3]

1.1.27 Tanım: a) S_1, S_2 yönlendirilebilir, homeomorfik iki Klein yüzey olsunlar. $f: S_1 \rightarrow S_2$ homeomorfizması verilsin. Eğer f, S_1 ve S_2 üzerindeki dianalitik yapılara göre bir morfizm ise f ye bir konform(antikonform) homeomorfizma denir.
b) $f: S_1 \rightarrow S_2$ bir konform homeomorfizma ise +otomorfizm, antikonform (terskonform) homeomorfizma ise -otomorfizm denir.
c) Bir f otomorfizmi diye + ya da - otomorfizme denir.[1,3]

1.1.28 Sonuç: Herhangi bir S Klein yüzeyi için tüm otomorfizmlerin kümesi bir grup oluşturur ve Aut(S) ile gösterilir. +otomorfizmlerin kümesi de bir altgrup oluşturur ve bu +Aut(S) ile gösterilir.

1.1.29 Tanım: S_1, S_2 iki Klein yüzey ve $f: S_1 \rightarrow S_2$ bir konform homeomorfizma ise S_1 ve S_2 konform denktirler, denir.

1.1.30 Tanım: S ve T birer Klein yüzey olsunlar. Bir $f: T \rightarrow S$ morfizmi alalım. Eğer aşağıdaki koşullar gerçekleniyorsa f bir iki-yapraklı(double) örtme denir.
i) Herbir $s \in S$ noktasının öyle bir V komşuluğu vardır ki $f^{-1}(V)$nin herbiri f yardımıyla V üzerine homeomorf olarak resmedilebilen iki tane bileşeni vardır. Ya da $f^{-1}(s) = \{t\}$ dir.
ii) t ve s de $\phi_t(t) = 0 = \phi_s(s)$, $f(U_t) \subset U_s$ özelliğinde (U_t, ϕ_t) ve (U_s, ϕ_s) paftaları vardır.

$$\text{iii) } \phi_s f|U_t = \begin{cases} \varphi\phi_t : s \in \partial S \text{ ve } t \notin \partial T & \text{(i)} \\ \varphi\phi_t^2 : s \in \partial S \text{ ve } t \in \partial T & \text{(ii)} \\ \phi_t^2 \ : s \notin \partial S & \text{(iii)} \end{cases}$$

Eğer (ii) ve (iii) hiç gerçeklenmezse f dallanmamıştır(unramified) denir. Burada φ katlama fonksiyonudur.[1,3]

1.1.31 Teorem: S herhangi bir Klein yüzey olsun. Öyle bir S_C Riemann yüzeyi(yönlendirilebilirve kenarsız) vardır ki, $f: S_C \rightarrow S$ bir iki-katlı (double) örtme yüzeyidir ve S_C nin $f\sigma = f$ olacak biçimde bir σ terskonform tersinmesi(involution) vardır.

İspat: $\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\{(U_j,\phi_j)\}_{j\in J}$, S üzerindeki dianalitik yapı olsun. Herbir $j\in J$ için, $U_j' \equiv U_j \equiv U_j''$ ve $\phi_j' = \phi_j$, $\phi_j'' = \overline{\phi_j}$ alalım. Ω ise U_j' lerin ve U_j'' lerin ayrık bileşimi olsun ve aşağıdaki iki tip özdeşlemeyi yapalım:

i) Eğer W, $U_j \cap U_k$ nın bir bileşeni ve $\phi_j\phi_k^{-1}$, $\phi_k(W)$ üzerinde konform(terskonform) ise W nin U_j' deki resmini U_k' deki resmi ile özdeşleyelim(U_j' deki resmini U_k'' deki resmi ile özdeşleyelim) ve U_j'' deki resmini U_k'' deki resmi ile özdeşleyelim(U_j'' deki resmini U_k' deki resmi ile özdeşleyelim)

ii) $B_j = \partial S \cap U_j$ olsun ve bunun U_j' deki resmini U_j'' deki resmi ile özdeşleyelim.

Eğer S_C , Ω nın yukarıda belirtilen özdeşlemelerle, elde edilen bölüm uzayı olsun.

$\hat{U}_j$, $U_j' \cap U_j''$ nün S_C deki resmi ve $\hat{\phi}_j: \hat{U}_j \to \mathbf{C}$ içine dönüşümü $\hat{\phi}_j|U_j' = \phi_j'$ ve $\hat{\phi}_j|U_j'' = \phi_j''$ şeklinde olsun. Kolayca görülebilir ki, $\hat{\phi}_j$ bir homemorfizmadır. Yansıma kuralı kullanılırsa, $\hat{\phi}_k\hat{\phi}_j^{-1}$nin, $\hat{\phi}_j(U_j)$ de analitik olduğu görülebilir: Böylece de $(\hat{U}_j,\hat{\phi}_j)_{j\in J}$, S_C de bir analitik atlas olur.

f: $S_C \to S$, $U_j' \to U_j$ ve $U_j'' \to U_j$ özdeşlik dönüşümlerinin indirgediği dönüşüm olsun. Aynı bir $s\in S$ noktası üzerine resmedilen $p, \hat{p} \in S_C$ noktalarına eşlenik(konjuge) noktalar denir. Eğer p, S nin bir sınır noktasına karşılık gelirse $p = \hat{p}$ olur. S_C nin eşlenik noktaları arasındaki eşleme bir bire-bir $\sigma: S_C \to S_C$ ters konform dönüşüm belirler. Burada $\sigma^2 = 1$, $f\sigma = f$ ve f dallanmamıştır. Üstelik S_C nin bağlantısız olması için gerekli ve yeterli koşul S nin yönlendirilebilir ve $\partial S = \varnothing$ olmasıdır.[1,3]

1.1.32 Tanım: Yukarıdaki teoremde belirtilen (S_C, f, σ) üçlüsüne S nin kompleks iki-katlısı (complex double) denir ve kısaca S_C simgesi ile gösterilir.

1.1.33 Teorem: M kompakt bir Riemann yüzeyi, X kompakt Klein yüzey ve $g: M \to X$ sabit olmayan bir morfizm olsun. Bu durumda $f \circ \rho = g$ olacak biçimde bir tek $\rho: M \to X_C$ analitik dönüşümü vardır.

İspat: (V,ψ), M üzerinde bir analitik pafta, (U,ϕ), X de $g(V) \subset U$ özelliğinde bir dianalitik pafta olmak üzere öyle seçilsinler ki $\psi(V)$ üzerinde $g|_V = \phi^{-1}\varphi G\psi$

bağıntısını gerçekleyen bir G analitik fonksiyonu bulunsun. $(\tilde{U},\tilde{\phi})$, X_C nin oluşturulmasında belirtilen biçimde ve $\tilde{U} = f^{-1}(U)$, $\tilde{\phi}: \tilde{U} \to C$ özelliğinde olsun.

O halde yandaki diyagram uyumludur. $\rho: V \to \tilde{U}$ yı $\rho = \tilde{\phi}^{-1} G \psi$ şeklinde tanımlayalım. Dolayısıyla $f\rho = g$ olur. Eğer ρ, M de iyi tanımlanmış ise ρ bir analitik dönüşümdür. ρ nun iyi tanımlandığı da kolayca görülebilir.[3]

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, dashed, "\rho"] \arrow[dd, "\psi"'] & & U \arrow[dd, "\phi"] \\
& \tilde{U} \arrow[ur, "f"'] \arrow[d, "\tilde{\phi}"] & \\
\bar{H} \arrow[r, "G"'] & C \arrow[r, "\varphi"'] & \bar{H}
\end{tikzcd}$$

1.1.34 Uyarı: i) S yönlendirilebilir, g cinsli ve r sınır bileşenli ise S_C nin cinsi 2g+r-1 dir. S yönlendirilemez, g cinsli ve r sınır bileşenli ise S_C nin cinsi g+r-1 dir.

ii) Eğer yukarıdaki Ω aynı yöntemlerle oluşturulur fakat özdeşleme sadece birinci tipten yapılırsa S nin S_0 ile temsil edeceğimiz dallanmış bir iki-katlı örtüsü elde edilir. S_0 kenarlı yönlendirilebilir bir Klein yüzeydir. S_0 ın bağlantısız olması için gerekli ve yeterli koşul S nin yönlendirilebilir olmasıdır. Eğer S nin r tane sınır bileşeni varsa S_0 ın 2r tane sınır bileşeni vardır. Eğer $\partial S = \varnothing$ ise $S_0 = S_C$ olur.

Örnek: 1) Eğer S bir Möbiüs şeridi ise S_0 bir halka ve S_C bir tordur.

2) Eğer S bir 1-delikli Klein şişesi ise S_0 2-delikli bir tor ve S_C iki kulplu bir küredir.

iii) S nin zıt yönlendirilmiş iki kopyası alınıp bunlar sınırları boyunca özdeşlenirse elde edilen S_S yüzeyine S nin iki-katlı Schottky örtüsü denir. Eğer S yönlendirilebilirse $S_S = S_C$ olur. Eğer S yönlendirilemezse S_S de yönlendirilemezdir.

Örnek: S, 1-delikli bir Klein şişesi ise S_S, 4-çapraz şapkalı bir küredir. Eğer 2-delikli bir projektif düzlemse S_S yine 4-çapraz şapkalı bir küredir.[3]

1.1.35 Önerme: X ve Y kompakt Klein yüzeyler olsunlar(Riemann yüzeyi yani yönlendirilebilir, kenarsız olmasınlar). X in cinsi g, Y nin cinsi γ ve $f: X \to Y$, Y nin dallanmış r-yapraklı bir örtmesi ise

$$2g-2 = r(2\gamma-2) + \sum_{x \in X} n_x (e_f(x) - 1)$$

dir.

İspat: (X_C, π, σ) ve (Y_C, ν, τ) sırasıyla X ve Y nin kompleks ikikatlı örtmeleri olsunlar.

Yandaki diyagram uyumlu(commute) olacak biçimde bir tek $\tilde{f}: X_C \to Y_C$ analitik dönüşümü vardır. $f \circ \pi = \nu \circ \tilde{f}$, Y nin 2r-yapraklı dallanmasıdır. Ancak $\tilde{f}$, Riemann yüzeyleri arasında sabit olmayan bir analitik dönüşümdür.

$$\begin{tikzcd} X_C \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & Y_C \arrow[d, "\nu"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Bu nedenle $\tilde{f}$, belli bir m için Y_C nin dallanmış bir m-yapraklı örtmesidir. Burada ν ikiyapraklı bir örtü olduğundan m=r dir. Bir Klein yüzey ve bunun kompleks iki katlısı aynı cinse sahip olduğundan, klasik Hurwitz dallanma formülü

$$2g-2 = r(2\gamma-2) + \sum_{p \in X_C} (e_{\tilde{f}}(p) - 1) \qquad (1)$$

eşitliğini verir. $p \in X_C$ olsun. $e_{\tilde{f}}(p) = e_{\nu\circ\tilde{f}}(p) = e_{f\circ\pi}(p) = e_f(\pi(p))$ olduğundan $e_{\tilde{f}}(p) = e_f(\pi(p))$ olur. Bu nedenle de, (1) ifadesi

$$2g-2 = r(2\gamma-2) + \sum_{p \in X_C} (e_f(\pi(p)) - 1) = r(2\gamma-2) + \sum_{x \in X} n_x(e_f(x) - 1)$$

halini alır.[9]

1.1.36 Önerme: $\pi: X \to Y$ dallanmış r-yapraklı bir örtü, X in cinsi g ve Y nin cinsi γ ise Hurwitz dallanma formülü

$$\frac{2g-2}{r} = 2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{t} (1 - \frac{1}{k_i})$$

olur.

İspat: $\pi: X \to Y$, Y nin $a_1, a_2, \ldots, a_t$ gibi sonlu noktası üzerine dallanmış olsun ve $\pi(x) = a_i$ özelliğinde herhangi $x \in X$ için $k_i = e_\pi(x)$ diyelim. O halde $d_\pi(x) = 1$, yani $n_x = n_{a_i} = n_i$ olur. Böylece $\pi^{-1}(a_i)$ lifinde r/k_i tane nokta vardır ve dolayısıyla 1.1.26(3) gereği

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(a_i)} n_x(e_\pi(x) - 1) = \frac{r}{k_i} n_i (k_i - 1) = rn_i(1 - \frac{1}{k_i})$$

elde edilir. Eğer $\pi(x) = a_i$ ise $d_\pi(x) = 2$, böylece de $n_x = 2$, $n_i = 1$ olur. Bu durumda $\pi^{-1}(a_i)$ lifinin içinde $r/2k_i$ tane nokta vardır ve

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(a_i)} n_x(e_\pi(x) - 1) = \frac{r}{2k_i} 2(k_i - 1) = rn_i(1 - \frac{1}{k_i})$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik gösteriyor ki, 1.1.35 de verilen Hurwitz dallanma formülü,

$$\frac{2g-2}{r} = 2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{t}(1 - \frac{1}{k_i})$$

halini alır.[9]

1.1.37 Tanım: X bir topolojik uzay ve $G = \{g | g: X \to X \text{ homeomorfizm}\}$ olsun. Eğer tüm $1 \neq g \in G$ ler için, $\forall x \in X$ in $V \cap g(V) = \emptyset$ şeklinde bir V komşuluğu varsa G, X de süreksiz hareket eder, denir.[7]

1.1.38 Teorem: $\tilde{S}$, S in örtme yüzeyi ise $g: \tilde{S} \to \tilde{S}$ örtme transformasyonlarının G ile gösterilen grubu $\tilde{S}$ da süreksiz hareket eder. Özellikle $1 \neq g \in G$ ise g nin $\tilde{S}$ da sabit noktası yoktur.

İspat: Belli $\tilde{s} \in \tilde{S}$ nın elemanter bir komşuluğu V olsun ve varsayalım ki belli $g \in G$ için $V \cap g(V) \neq \emptyset$ olsun. O halde $g(v) \in V$ olacak biçimde $v \in V$ vardır. Böylece $p = p \circ g$ ve p, V üzerinde birebirdir. Dolayısıyla g nin sabit noktası yoktur. $\tilde{S}$ bağlantılı olduğundan g nin F_g ile gösterilen sabit noktaları kümesi(ki hem açık, hem kapalıdır.) $F_g = \tilde{S}$ şeklindedir ve dolayısıyla g özdeşliktir.[7]

1.2 Ayrık Gruplar

Her Klein yüzey bir ayrık grup yardımı ile bölüm uzayı şeklinde temsil edilebileceği için ve ayrık grupların bölüm uzayları da Klein yüzey olduğundan bu kesimde ayrık grupları genel özellikleriyle belirteceğiz. Üstelik Klein yüzeylerin otomorfizm grupları ile ayrık gruplar arasında da sıkı bir bağlantı vardır. Ayrık gruplar, topolojik grup olduklarından öncelikle topolojik grupları ve topolojik dönüşüm gruplarını inceleyeceğiz.

1.2.1 Tanım: G hem bir grup, hem bir Hausdorff uzay olmak üzere,

$F: GxG \to G$ ve $F(g,h) = g^{-1}h$

biçiminde tanımlanan üzerine dönüşümü sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.[10]

1.2.1 Örnek: $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ ve $S = \{z : |z| = 1\}$ birer topolojik grupturlar.

1.2.3 Tanım: G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun. [G,X] sıralı çiftini alalım.

$\Lambda: GxX \to X$ ve $\Lambda(g,x) = g\Lambda x$

şeklinde tanımlanan üzerine, sürekli dönüşüm aşağıdaki koşulları gerçeklerse, [G,X] 'e bir topolojik dönüşüm grubu denir.

i) $g,h \in G$ ve $x \in X$ için $g\Lambda(h\Lambda x) = gh\Lambda x$

ii) $e \in G$, G nin birimi olmak üzere, $\forall x \in X$ için $e\Lambda x = x$ tir.[10]

1.2.4 Uyarı: 1) $g\Lambda x$ yerine gx kullanılır.

2) Eğer X uzayı biliniyorsa [G,X] yerine, sadece G yazılır ve "G topolojik dönüşüm grubu" diye okunur.

1.2.5 Teorem: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun.

$G_0 = \{g \in G | \ \forall x \in X \text{ için } gx = x\} \subset G$ altkümesi G topolojik grubunun normal bir alt grubudur.

İspat: G_0 ın altgrup olduğu açıktır. Normal altgrup olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de, $\forall g \in G$ için $g^{-1}G_0g \subset G_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $x \in X$ ve $\forall g_0 \in G_0$ için;

$$g^{-1}g_0gx = g^{-1}(g_0gx) = g^{-1}(gx) = g^{-1}gx = ex = x$$

olur. O halde $g^{-1}g_0g \in G_0$ dır. Dolayısıyla, $g^{-1}G_0g \subset G_0$ olur.[10]

1.2.6 Tanım: a) [G,X] topolojik dönüşüm grubu için, 1.2.5 Teoremde belirtilen G_0 altgrubuna G nin çekirdeği (kernel) denir.
b) Eğer $G_0=\{e\}$ ise [G,X] topolojik dönüşüm grubuna, etkili (effective) topolojik dönüşüm grubu denir.[10]

1.2.7 Teorem: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olmak üzere, X üzerinde bir "~"bağıntısını, $\exists g \in G$ için $y \sim x \Leftrightarrow y = gx$ şeklinde tanımlayalım. Bu bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $e \in G$ ve $ey=y$ olduğundan $y \sim y$dir. $y \sim x$ olsun. O halde $\exists g \in G$ öyle ki $y=gx$ tir. Buradan; $x = g^{-1}y$ ve $g^{-1} \in G$ olacağından, $x \sim y$ dir. $x \sim y$ ve $y \sim z$ olsun. O zaman; $\exists g, h \in G$ öyle ki $x=gy$, $y=hz$ ve buradan $x=ghz$ olur. $gh \in G$ olduğundan $x \sim z$ olur. [10]

1.2.8 Tanım: a) ~ denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına G-yörüngesi(G-orbiti) denir. Bir $x \in X$ ögesini bulunduran yörünge Gx simgesi ile belirtilir. $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ şeklinde olduğu açıktır.
b) Gx=X oluyorsa, yani tek bir yörünge varsa G topolojik dönüşüm grubu geçişli (transitive) dir denir.
c) Her bir $x \in X$ için $gx=x$ eşitliğini sağlayan $g \in G$ ögelerinin oluşturduğu S(x) kümesine x'in kalımlaştırıcısı (stabilizer) denir. $S(x) = \{g \mid gx = x\}$ olduğu ve bir altgrup olduğu açıktır.[10]

1.2.9 Tanım: Bir G-yörüngesinin kümesi, X/G ile gösterilir ve G ye göre X' in yörünge uzayı (veya bölüm uzayı) denir.[10]

1.2.10 Teorem: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun ve bütün yörüngelerin oluşturduğu kümeyi $X/G = \{Gx \mid x \in X\}$ ile gösterelim. Bir $p: X \to X/G$ dönüşümünü p(x)=Gx şeklinde tanımlayalım. τ, X üzerindeki topoloji olmak üzere, X/G üzerinde $\tau_G = \{T_g \subset X/G \mid p^{-1}(T_g) \in \tau\}$ ailesini alalım. Böylece, $(X/G, \tau_G)$ bir topolojik uzaydır.[10,11]

1.2.11 Tanım: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun.
a) Eğer $y \in Gx$ ise $S_y(x) = \{k \in G \mid kx = y\}$ kümesine S(x)-eşkümesi (coset) denir.

b) $P \subset X$ olmak üzere, eğer farklı $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 P \cap g_2 P = \varnothing$ ise P ye bir G-paketlemesi (packing) denir.

Bu paketleme tanımını $g \neq e$ için $P \cap gP = \varnothing$ koşulu ile de belirtebiliriz.[10]

1.2.12 Tanım: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olmak üzere, bir $A \subset X$ altkümesi, $X = \bigcup_{g \in G} gA$ bağıntısını gerçekliyorsa, A ya bir G-örtmesi (G-covering) denir.[10]

1.2.13 Önerme: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun. $A \subset X$ kümesinin bir G-örtmesi olması için gerekli ve yeterli koşul her yörüngeden enaz bir öge bulundurmasıdır.

İspat: Tersini varsayalım. Yani bir Gx yörüngesi için $Gx \cap A = \varnothing$ olsun. Öyleyse, $\forall gx \in Gx$ için $gx \notin A$ olur. Yani $\forall g \in G$ için $x \notin g^{-1}(A)$ dır. Dolayısıyla, $x \notin \bigcup_{g \in G} gA$ olur ki, bu $x \notin X$ demektir. Bu ise çelişkidir.

Tersine, $\bigcup_{g \in G} gA \neq X$ olsun. O halde öyle bir $x \in X$ ögesi vardır ki $x \notin \bigcup_{g \in G} gA$ dır. Bu nedenle $\forall g \in G$ için $x \notin gA$, yani $g^{-1}x \notin A$ dır. Bu ise, $g^{-1}x \in Gx$ olduğundan, A, Gx yörüngesinden hiçbir öge bulundurmuyor demektir ki varsayımla çelişkidir.[10]

1.2.14 Tanım: G bir topolojik grup olmak üzere, $\forall g \in G$ ögesi için $\{g\}$ kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye ayrık grup denir. Yani, G üzerinde ayrık topolojik yapı varsa, G bir ayrık gruptur. Örneğin; $(\mathbf{Z}, +)$, **R** den indirgenen topoloji ile bir ayrık gruptur.

1.2.15 Teorem: G bir topolojik grup ve $H \subset G$ bir altgrup olsun. "H bir ayrık gruptur⇔açık bir U H-paketlemesi vardır." [10]

1.2.16 Teorem: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Eğer bir açık G-paketleme varsa, G ayrıktır.

İspat: P açık bir G-paketleme ve $x \in P$ olsun. Süreklilik gereği, $\{g \in G \mid gx \in P\}$ kümesi açıktır. Ancak P bir paketleme olduğundan, bu $\{e\}$ nin açık bir küme olduğunu ve böylece de G nin ayrık olduğunu gösterir.[10]

1.2.17 Tanım: a) G bir grup ve G_0 da G nin bir altkümesi olmak üzere $\{t \in G | tG_0t^{-1} = G_0\}$ kümesine G_0 ın normalleştiricisi(normalizer) denir.

b) $\{t \in G | tg = gt, \ \forall g \in G_0\}$ kümesine G_0 altkümesinin merkezileştiricisi(centralizer) denir.

1.2.18 Tanım: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu ve $g \in G$ olsun. $\{x \in X | gx = x\}$ kümesine g nin sabit noktaları kümesi denir.[10]

1.2.19 Teorem: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu ve gh=hg iseg, h ın sabit noktaları kümesini kendi üzerine resmeder.

İspat: A=$\{x \in X | hx = x\}$ olsun. $x \in A$ alalım. hx=x dir. Öyleyse, h(gx)=ghx=gx, $gx \in A$ dır. Böylece, g(A)=A olur.[10]

1.3 NEC-Gruplar ve Fuchs Grupları

NEC-gruplar ve Fuchs gruplar gerçel katsayılı doğrusal dönüşümlerin özel birer altgrubu olarak elde edildiklerinden, bu kesimde öncelikle gerçel katsayılı dönüşümleri ele alacağız.

1.3.1 Tanım: a, b, c ,d $\in \mathbf{C}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere; Tz=(az+b)/(cz+d) şeklindeki dönüşümlere doğrusal dönüşüm(Möbiüs dönüşümü) denir. Ancak, çoğunlukla gerçel katsayılı doğrusal dönüşümlerle çalışacağımız için, bu dönüşümlerin,

$$PSL(2,\mathbf{R})=\{T|Tz=(az+b)/(cz+d),\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R},\ ad-bc=1\}$$

şeklinde tanımlanan altkümesi ile

$$G'=\{U|Uz=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d),\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R},\ ad-bc=-1\}$$

şeklinde tanımlanan kümeyi alalım. $G=PSL(2,\mathbf{R})\cup G'$ olsun.

1.3.2 Önerme: G ve PSL(2,**R**) fonksiyon birleşimi işlemine göre birer grupturlar.[10]

1.3.3 Uyarı: G' bir altgrup değildir, çünkü birleşme işlemine göre kapalı değildir.

1.3.4 Teorem: G kümesinin ögeleri genişletilmiş karmaşık düzlemi kendi üzerine 1-1 resmeden dönüşümlerdir.

İspat: $T(z_1)=T(z_2)$ olsun. O halde, $\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}=\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}$ dir. Buradan da, $z_1=z_2$ bulunur. Benzer şekilde, $U(z_1)=U(z_2)$ olsun. Benzer işlemlerle; $z_1=z_2$ olduğu görülür. Üzerine olduğu da kolayca görülebilir.

1.3.5 Teorem: Herhangi bir T$\in$PSL(2,**C**) nin **H**$=\{z\in\mathbf{C}|\ \operatorname{Im}z>0\}$ üstyarı düzlemini kendi üzerine resmetmesi için gerekli ve yeterli koşul T$\in$G olmasıdır.

İspat: $Tz=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,\ b,\ c,\ d\in C,\ ad-bc=1$ şeklindeki dönüşümü düşünelim.

İlk olarak; c≠0 durumunu gözönüne alalım.

$T(\infty)=\dfrac{a}{c},\ T(0)=\dfrac{b}{d},\ T^{-1}(\infty)=-\dfrac{d}{c}$ değerleri gerçel olduğundan,

$T(z)=\dfrac{(a/c)z+(b/c)}{z+d/c}$ dönüşümü gerçel katsayılıdır ve $\Delta=\dfrac{ad}{c^2}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{ad-bc}{c^2}=\dfrac{1}{c^2}$

dir. $\operatorname{Im} Tz = \dfrac{\Delta \operatorname{Im} z}{|z+(d/c)|^2}$ ve varsayımdan Imz>0 ve ImTz>0 olduğundan Δ>0 olmak zorundadır. Öyleyse $c \in \mathbf{R}$ dir. Bu da a, b, d sayılarının gerçel olduğunu gösterir. Dolayısıyla $T \in G$ dir.

c=0 durumunda ise; $T^{-1}(0) = -\dfrac{b}{a}$ olacağından benzer yöntemle a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ olduğu görülür.

Aynı sonucu, a, b, c, $d \in \mathbf{C}$, ad-bc=-1 olmak üzere $Uz = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ dönüşümü için de görebiliriz.

Tersine, herhangi bir $T \in G$ alalım. $z \in H$ olsun.

$$\operatorname{Im} Tz = \frac{\Delta.\operatorname{Im} z}{|z+d/c|^2} = \frac{c^{-2}.\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2/|c|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0$$ olduğundan istenen sonuç görülür.

1.3.6 Sonuç: 1) $G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G'$ kümesinin ögeleri $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ u kendi üzerine resmederler.

2) G grubu $PSL(2,\mathbf{R}) \cup \{Uz = -\bar{z}\}$ tarafından doğurulur.

3) $PSL(2,\mathbf{R})$ altgrubunun eşküme sayısı 2 dir.

1.3.7 Tanım: Herhangi bir $T \in PSL(2,\mathbf{R})$ ögesi için, Tz=z eşitliğini gerçekleyen, z noktalarına T nin sabit noktaları denir.

1.3.8 Teorem: Herhangi bir $T \in PSL(2,\mathbf{R})$ dönüşümünün en fazla iki sabit noktası vardır. $T \in G'$ ise ya iki sabit noktası vardır, ya da sabit noktalarının kümesi bir çemberdir.

İspat: $T \in PSL(2,\mathbf{R})$ olsun. $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, $d \in \mathbf{R}$, $ab - bc = 1$ dir.

Tz=z alalım. Böylece $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$ yazabiliriz. Buradan da, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri, T nin sabit noktalarıdır.

Şimdi $T \in G'$ olsun. $Tz = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ab - bc = -1$ dir. Sabit nokta tanımı gereği; $\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = z$ yazabiliriz. Böylece, $cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0$ elde edilir. Bu denklemde, z ve $\bar{z}$ yerine x ve y cinsinden ifadelerini yazarsak;

$c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0$ ve $(a+d)y=0$ bulunur. Burada, eğer $a+d \neq 0$ ise y=0 dır. Ve $x_{1,2} = \dfrac{a-d \mp \sqrt{\Delta}}{2c}$ şeklinde iki kök vardır. Yani iki farklı sabit nokta bulunur.

Bu durumda T ye kayan-yansıma denir. Eğer a+d=0 ise o zaman, $\left(x - \dfrac{a}{c}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{c^2}$ yani; merkezi $\left(\dfrac{a}{c}, 0\right)$ ve yarıçapı $\dfrac{1}{|c|}$ olan bir çember elde edilir. Buradan da sabit noktalar kümesi bu çemberin tüm noktaları olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bu durumda ise T ye yansıma denir.

1.3.9 Tanım: $T \in PSL(2,C)$ dönüşümü ve herhangi bir S dönüşümü verildiğinde, $T' = STS^{-1}$ dönüşümüne T nin eşleniği(conjugate) denir.

1.3.10 Tanım: $T \in PSL(2,C)$ olmak üzere;

a) a+d ye T dönüşümünün izi(trace) denir ve $\chi(T)=\chi$ ile gösterilir.

b) $\chi \in \mathbf{R}$ ve $|\chi| > 2$ ise T ye hiperbolik dönüşüm denir. İki sabit noktası $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ üzerindedir. Eşlenik ögesi, $1 \neq k > 0$ olmaküzere Tz=kz şeklindedir.

$\chi \in \mathbf{R}$ ve $|\chi| < 2$ ise T ye eliptik dönüşüm denir. Birbirinin eşleniği olan iki sabit noktası vardır. Eşlenik ögesi, $0 < \theta < 2\pi$ olmak üzere, $\dfrac{w-i}{w+i} = e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$ dir.

$|\chi| = \mp 2$ ise T ye parabolik dönüşüm denir. $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bir sabit noktası vardır. Eşlenik ögesi, Tz=z+1 dir.

$\chi \notin \mathbf{R}$ ise dönüşüme, loksodromik dönüşüm denir. Bu öge $PSL(2,\mathbf{R})$ de değildir.

1.3.11 Teorem: T_1 ve T_2 iki eşlenik dönüşüm olsun. T_1 ve T_2 aynı tiptendir.

İspat: $\chi(T_1) = a_1 + d_1$ ve $\chi(T_2) = a_2 + d_2$ olmak üzere $\chi(T_1) = \chi(T_2)$ olduğunu göstermeliyiz. 2x2 lik bir matris için, $\chi(AB) = \chi(BA)$ dır.

$\chi(T_1) = \chi(A^{-1}AT_1) = \chi(AT_1A^{-1}) = \chi(T_2)$.[10]

1.3.12 Tanım: a) G topolojik dönüşüm grubunun ayrık bir Γ altgrubuna Euclidean Olmayan Kristallografik Grup(Non-Euclidean Crystallografic Group) denir ve kısaca " Γ bu NEC-gruptur." diye adlandırılır.
b) $PSL(2,\mathbf{R})$ nin altgrubu olan NEC-gruplara Fuchs grupları denir.
c) Eğer bir NEC-grup U tipinden (yani yön korumayan) enaz bir öge bulunduruyorsa, buna has(proper) NEC-grup denir.
d) Γ özel bir NEC grup olmak üzere, Γ daki yön koruyan tüm ögelerin oluşturduğu Γ^+ altgrubuna Γ nın doğal(canonical) Fuchs altgrubu denir.[10]

1.3.13 Uyarı: $\left[\Gamma:\Gamma^+\right]=2$ dir.

1.3.14 Grupların NEC Gösterimleri: m_i ler Γ nın doğurayları kümesinde bulunan eliptik ögelerinin kerteleri(bunlara has periyotlar denir), n_{ij} ler de Γ nın doğurayları kümesinde bulunan c_{ij} yansımaları için $(c_{i,j-1}c_{ij})^{n_{ij}}=1$ özelliğinde ki tamsayılar ve g de $\mathbf{H}/\Gamma$ bölüm uzayının cinsini göstermek üzere;
1) Yönlendirilebilir bir bölüm uzayı belirleyen Γ nın gösterimi;
$\left(g,+,[m_1,\ldots,m_r],\left\{(n_{11},\ldots,n_{1s_1}),\ldots,(n_{k1},\ldots,n_{ks_k})\right\}\right)$
2) Yönlendirilemez bir bölüm uzayı belirleyen bir Γ grubunun gösterimi ise;
$\left(g,-,[m_1,\ldots,m_r],\left\{(n_{11},\ldots,n_{1s_1}),\ldots,(n_{k1},\ldots,n_{ks_k})\right\}\right)$ şeklindedir.

Burada ki $(n_{11},\ldots,n_{1s_1})$ parantezlerine periyot devirleri denir.

Bir Γ NEC grubunun gösterimi verildiğinde bölüm uzayının topolojik yapısı da verilmiş olur.

3) $\left(g,\mp,[m_1,\ldots,m_r],\{(\ ),(\ ),\ldots,(\ )\}\right)$ boş periyot devirli bir grubun NEC gösterimidir, eğer bu boş periyot devirlerinin sayısı k ise gösterim $\left(g,\mp,[m_1,\ldots,m_r],\left\{(\ )^k\right\}\right)$ şeklinde olur.

4) Bir Fuchs grubunun NEC gösterimi;
$\left(g,+,[m_1,\ldots,m_r],\{\ \}\right)$ şeklindedir ve kısaca $(g;m_1,\ldots,m_r)$ olarak ta yazılır.

Çünkü; bir Fuchs grubu deliksiz yönlendirilebilir bir bölüm uzayına sahiptir ve bütün periyotları, has periyotlardır.

1.3.15 Tanım: a) Periyotları ve yansıma(reflections) dönüşümleri bulunmayan gruplara yüzey grupları denir.
b) Yörünge uzayı yönlendirilebilirse; yönlendirilebilir yüzey grubu(orientable surface group) denir. Bazen de Fuchsian yüzey grubu denir. Bu grubun gösterimi, $(g,+,[\ ],\{\ \})$ ya da kısaca (g;———) şeklindedir. Bu gruplarda kayan yansıma yoktur. Böyle bir yüzey grubunda yansıma ögesi varsa, kenarlı yüzey grubu denir.
c) Eğer yörünge uzayı yönlendirilemez ise gruba, yönlendirilemez yüzey grubu denir. Bu gruplarda kayan yansıma ögesi vardır. Gösterimi $(g,-,[\ ],\{\ \})$ olur. Böyle bir yüzey grubunda, yansıma ögesi varsa kenarlı yüzey grubu denir.

d) $\left(g,+,[\ ],\left\{(\ )^k\right\}\right)$ gösterimine sahip gruba k-kenar bileşenli, kenarlı, yönlendirilebilir yüzey grubu(orientable bordered surface group with k boundary components) denir.
e) k-kenar bileşenli, yönlendirilemez yüzey grubu(non-orientable bordered surface group with k boundary components) ise $\left(g,-,[\ ],\left\{(\ )^k\right\}\right)$ gösterimine sahiptir.

f) Gösterimi 1.3.14(1) deki gibi olan bir Γ grubunun belirlediği **H**/Γ yörünge uzayının iç kısmında r tane seçkin(distinguished) nokta vardır. Bunlar has periyotlara karşılık gelirler. Yani eliptik doğurayların sabit noktalarıdırlar. i inci sınır bileşeni üzerinde ise n_{ij} periyotlarına karşılık gelen s_i tane seçkin nokta vardır.[10,12]

1.3.16 Tanım: Γ bir NEC-grup olsun ve **H** da kapalı bir F kümesi alalım. Eğer aşağıdaki koşullar gerçekleniyorsa F Γ için bir temel bölgedir denir.
i) $z\in\mathbf{H}$ ise $g(z)\in F$ olacak biçimde bir $g\in\Gamma$ vardır.
ii) $z\in\mathbf{H}$, $f,g\in\Gamma$, $f(z),g(z)\in\overset{\circ}{F}$ şeklinde ise f=g dir.

iii) $F-\overset{\circ}{F}$ in non-Euclidean alanı sıfırdır. Yani $\mu(F-\overset{\circ}{F}) = \iint\limits_{F-\overset{\circ}{F}} \dfrac{dxdy}{y^2} = 0$.

Her NEC-grubu için böyle bir temel bölgenin varlığı gösterilmiştir. Eğer Γ nın gösterimi 1.3.14 (1) ve (2) de gibi ise yönkoruyan halinde α=2, yön değiştiren halinde ise α=1 olmak üzere $\mu(F) = 2\pi\left[\alpha g + k - 2 + \sum\limits_{i=1}^{r}(1-1/m_i) + 1/2\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{s_i}(1-1/n_{ij})\right]$ dır.
[6-14]

1.3.17 Tanım: Bir Γ NEC-gruptan bir sonlu G grubuna bir ϕ homomorfizmi için $\ker\phi$ bir yüzey grubu oluyorsa ϕ ye bir yüzey-çekirdek(surface kernel) homomorfizm denir.

1.3.18 Tanım: Bir sonlu G grubuna bir Γ NEC-grubunun yönlendirilebilir (yönlendirilemez) yüzey çekirdek bölüm grubu denebilmesi için $G \cong \Gamma / \Lambda$ olacak biçimde yönlendirilebilir(yönlendirilemez) bir Λ yüzey grubu bulunabilmelidir.

1.4 Klein Yüzeylerin Bölüm Uzayı Olarak Temsili

Bu kesimde her kompakt Klein yüzeyin bir bölüm uzayı olarak temsil edilebileceğini ve Γ bir NEC-yüzey grubu olmak üzere her H/Γ uzayının üzerinde de bir Klein yüzey yapısı konabileceğini göreceğiz.

1.4.1Tanım: S bir Klein yüzey olsun. Bir $f:S\to S$ homeomorfizması eğer bir dianalitik fonksiyonsa f ye S nin bir otomorfizmi denir.

1.4.2 Sonuç: $\mathrm{Aut}(S)=\{f|f:S\to S \text{ bir otomorfizm}\}$ kümesi fonksiyon bileşimi işlemine göre bir gruptur.

1.4.3 Teorem: S bir Klein yüzey ve G, Aut(S) nin sonlu kerteli bir altgrubu ise bu durumda $S^{'}=S/G$ bölüm(yörünge) uzayı üzerinde $\pi:S\to S^{'}=S/G$ bir morfizm olacak şekilde bir tek Klein yüzey yapısı vardır. Üstelik $|G|=n$ ise π dallanmış n-yapraklı bir örtüdür.

İspat: G sonlu kerteli olduğundan biliyoruz ki S üzerinde süreksiz hareket eder.$x\in S$ için $S(x)=\{\theta\in G|\theta(x)=x\}$ olsun. S üzerinde $x\in U$, $\Phi(x)=0$, U bağlantılı, bütün $\theta\in S(x)$ ler için $\theta(U)=U$, bütün $\theta\in G\text{-}S(x)$ ler için $\theta(U)\cap U=\varnothing$ olacak biçimde bir (U,Φ)paftası vardır. Burada S/G üzerinde (V,ψ) paftalar ailesi belirleyeceğiz. $S^{'}(x)=\{\theta\in S(x)|\Phi\theta\Phi^{-1} \text{ analitik}\}$ kümesini alalım. Önce $S(x)=S^{'}(x)$ halini dikkate alalım. $V\equiv\pi(U)\cong U/S(x)\cong U/S^{'}(x)$ olur.(Burada S(x), U kümesine kısıtlanmış fonksiyonların kümesi olarak düşünülüyor.) $\prod_{\theta\in S(x)}\Phi\circ\theta$ fonksiyonu $S^{'}(x)$ altında invariant(değişmez) olduğundan V üzerinde $\psi\circ\pi=\prod_{\theta\in S^{'}(x)}\Phi\circ\theta$ bağıntısını gerçekleyen bir ψ fonksiyonunu indirger. Eğer $g=\prod_{\theta\in S'(x)}\Phi\theta\Phi^{-1}$ denirse, g orijinde n. kerteden bir sıfır yerine sahip(bu n sayısı S'(x) in kertesidir) ve $\Phi(U)$ da analitik fonksiyon olur. $\pi|U$, x hariç, 1 noktaya n tane nokta karşılık getirdiğinden yandaki uyumlu diyagramdan;

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \Phi(U) \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

ψ nin bir-bir olduğu görülür. Eğer $x\in\partial S$ ise $|S'(x)|=1$ olacağından $\pi|U$ bire-bir olur ve böylece de g özdeşlik dönüşümü ve ψ, $\overline{H}=\{z|\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ içindeki açık $\psi(V)=\Phi(U)$ kümesi üzerine bir homeomorfizmadır.

$x \notin \partial S$ halinde $\Phi(U)$, C de açıktır. D, V nin açık bir altkümesi ise $\psi(D) = g \circ \Phi \circ \left(\pi^{-1}(D)\right)$, C de açık bir kümedir.(çünkü g ve Φ açık dönüşümlerdir.)
Şimdi, $S(x) \neq S'(x)$ halini dikkate alalım. $x \notin \partial S$ ise $V' = U / S'(x)$ olmak üzere ve $\psi' : V' \to C$ yukarıdaki gibi tanımlansın. $I_x = S(x)/S'(x)$, V' üzerinde hareket eder ve kertesi 2 dir. $I_x = \langle\sigma\rangle$ denirse, $\psi'\sigma(\psi')^{-1}$ in C deki $\psi'(V')$ komşuluğunun bir tersanalitik tersinme(involution)dir. Bu durumda, $h\psi'\sigma(\psi')^{-1}h^{-1}$ kompleks eşleniğe eşit ve $\psi'(V')$ üzerinde analitik olacak şekilde bir h fonksiyonu bulabiliriz.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & V \\ & \pi'(U) \arrow[ur, "\pi''"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi h\psi'$ fonksiyonu (φ: sarma(folding) fonksiyonudur.) σ altında invarianttır: Bu aşağıdaki diyagramdan görülür.(χ: kompleks eşleniklik fonksiyonudur.)

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\sigma"'] & \psi'(V') \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\psi'\sigma(\psi')^{-1}=\chi"'] & C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi"'] & H^{+} \arrow[d, "I"] \\ V' \arrow[r, "\psi'"'] & \psi'(V') \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "\varphi"'] & H^{+} \end{tikzcd}$$

Böylece, $\varphi h\psi'$, $V \equiv \pi(U) \cong V'/I_x$ üzerinde $\psi\pi' = \varphi h\psi'$ gerçeklenecek biçimde bir ψ fonksiyonu indirger. ψ $\overline{\mathbf{H}}$ daki bir açık küme üzerine homeomorfizmadır. Böylece de, S/G nin $\{(V, \psi)\}$ atlas yapısı ile bir Klein yüzey olduğu görülür.[1]

1.4.4 Teorem: Γ bir NEC-grup ise H/Γ bölüm uzayı üzerinde $\pi{:}H \to H/\Gamma$ bir morfizm olacak biçimde bir tek Klein yüzey yapısı vardır.

İspat: Γ, H üzerinde has süreksiz hareket ettiğinden, bu sonuç 1.4.3 den görülür. Burada π, H/Γ nın sınırı üzerine bir sarma(folder)dır ve yüzeyin seçkin noktaları üzerine dallanmış(ramified) tır. Eğer Γ, kenarlı ya da kenarsız bir yüzey grubu ise π dallanmaz(unramified)dır. Keza "$z \in U$, $\pi(z) \in \partial(H/\Gamma) \Leftrightarrow c(z) = z$ biçiminde bir $c \in \Gamma$ yansıması vardır." olduğu da görülür. Eğer Γ bir Fuchsian grup ise H/Γ bir Riemann yüzeyidir. $f{:}H/\Gamma^{+} \to H/\Gamma$, $f(\Gamma^{+}z) = \Gamma z$ doğal izdüşümü ise

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "\pi_{\Gamma^{+}}"'] \arrow[d, "\pi_{\Gamma}"] \\ H/\Gamma' \arrow[r, "f"] & H/\Gamma \end{tikzcd}$$

yandaki diyagram uyumludur ve f, H/Γ nın dallanmamış 2-yapraklı bir örtüsüdür. Eğer H/Γ, kenarlı yüzey değilse, H/Γ^{+}, H/Γ nın yönlendirilebilir 2-yapraklı bir örtüsü olur. Eğer H/Γ, kenarlı ise H/Γ^{+}, H/Γ nın yönlendirilebilir 2-yapraklı kenarsız bir örtüsü olur.[3]

1.4.5 Teorem: S, H üst yarı düzlemini üniversal örtme yüzeyi olarak kabul eden kompakt, yönlendirilebilir, kenarsız Klein yüzey ve $p:H \to S$ örtme izdüşümünün bir morfizm olduğunu varsayalım ve

$$\Gamma = \{f \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G' | pf = p\}$$

alalım. Bu durumda,

1) $h: H/\Gamma \to S$, $\Gamma z \to pz$ bir homeomorfizmadır.

2) Herbir $z \in H$ için $S(z) = \{\gamma \in \Gamma | \gamma z = z\}$ aşikar gruptur.

3) Γ bir NEC-yüzey grubudur.

İspat: 1) Burada h iyi-tanımlıdır. Eğer $z_1, z_2 \in H$ ve $\Gamma z_1 = \Gamma z_2$ ise $z_2 = f(z_1)$ olacak biçimde bir $f \in \Gamma$ vardır. Böylece, $p(z_2)=pf(z_1)=p(z_1)$ olur. $\pi: H \to H/\Gamma$ doğal izdüşüm olmak üzere, tanımı gereği $h\pi=p$ dir. p sürekli olduğundan, h da süreklidir. Üstelik h bir açık dönüşümdür. Gerçekten de, eğer $A \subset H/\Gamma$ açık ise $h(A) = p(\pi^{-1}(A))$ da açıktır, çünkü p bir açık dönüşüm ve $\pi^{-1}(A)$ bir açık kümedir. h ın bire-bir ve örten olduğu da kolayca görülür.

2) $f \in S(z)$ ve $M = \{z \in H | z, f \text{ nin sabit noktası}\}$ olsun. M=H olduğu görülür.

3) Γ nın ayrık olduğunu görmek yeterlidir. Çünkü bu halde, $H/\Gamma \cong S$ kompakt olduğundan Γ bir NEC-grup olur. (2) gereği, Γ da eliptik ögeler yoktur. O halde Γ bir yüzey grubudur. Γ nın ayrık olduğu ise tersi varsayılarak ulaşılacak çelişkiden görülür.[6]

1.4.6 Teorem: S kenarı olmayan ve $g(s) \geq 2$özelliğinde yönlendirilebilir kompakt bir Klein yüzey ise belli bir Γ Fuchsian grubu için $S \cong H/\Gamma$ dir.

İspat: Varsayımlara göre S bir Riemann yüzeyidir. Örtme yüzeyleri kuramından biliyoruz ki H yarı düzlemi S nin üniversal örtme yüzeyidir. $p: H \to S$ örtme yüzeylerinin tanımında belirtilen izdüşüm olsun. p nin bir morfizm olduğunu biliyoruz. $\Gamma = \{f \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G' | pf = p\}$bir yüzey grubudur (1.4.5) ve $\pi: H \to H/\Gamma$ doğal (kanonik) izdüşüm olmak üzere $h\pi = p$ olacak biçimde bir $h: H/\Gamma \to S$ homeomorfizmi vardır. Böylece yapılması gereken tek husus h ın bir morfizm olduğunu görmektir.Ancak p bir morfizm ve π bir örten morfizm olduğundan h bir morfizmdir.

Sonuç olarak Γ nun bir Fuchsian grup olduğu açıktır. Çünkü eğer $f \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G'$ yön değiştirirse, p H daki ve ve S deki yönlendirmelerle uyumlu (compatible) olduğundan pf=p eşitliği gerçeklenmez. Böylece $f \notin \Gamma$ dır.[3,6,14]

1.4.7 Teorem: S bir kompakt Klein yüzey olsun ve yönlendirilebilir olduğunda $2g + h \geq 3$, yönlendirilemez olması halinde $g + h \geq 3$ koşulu gerçeklensin. $S \cong H/\Gamma$ olacak biçimde bir Γ NEC yüzey grubu vardır. Üstelik $\pi': H \to H/\Gamma$ doğal izdüşüm ise $\Gamma = \{f \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G' | \pi' f = \pi'\}$ dır.

İspat: S nin Riemann yüzeyi olması hali, 1.4.6 da ispatlandı. Burada, S nin Riemann yüzeyi olmaması hali için ispat vereceğiz. Varsayımlar altında S nin g cebirsel cinsinin 2 ya da daha büyük olduğu görülüyor. $f:S_c \to S$ ikili örtü olsun. $g(S_c) \geq 2$ olduğunu biliyoruz. O halde 1.4.2 gereği, $S_C \cong H/\Gamma_C$ olacak biçimde bir Γ_C NEC-yüzey grubu vardır. Üstelik $\pi: H \to S_C$ doğal izdüşüm ise 1.4.7 gereği

$$\Gamma_C = \{h \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G' \mid \pi h = \pi\}$$

olur.

$\sigma: S_C \to S_C$ tersinme(involution) olsun. $\langle\sigma\rangle$, kertesi 2 olan bir sonlu gruptur. Dolayısıyla $S_C/\langle\sigma\rangle$ bir Klein yüzeydir. Sonuç olarak; $S_C \cong H/\Gamma_C/\langle\sigma\rangle$ olur. Şimdi, $\langle\sigma\rangle = \Gamma/\Gamma_C$ olacak biçimde bir Γ, NEC-grubu arayacağız. Bu durumda, $S \cong H/\Gamma_C/\Gamma/\Gamma_C$ ve dolayısıyla $S \cong H/\Gamma$ olacaktır. Bunun için önce $\pi: H \to S_C$ ve $\sigma\pi: H \to S_C$ nın üniversal örtmeler olduğuna ve böylece de yandaki diyagram gerçeklenecek biçimde bir $g \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G'$ vardır. Şimdi $\Gamma = \langle\Gamma_C, g\rangle$nin $G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G'$nün bir ayrık altgrubu ve $[\Gamma:\Gamma_C] = 2$ olduğunu

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[d, "\pi"] \\ S_C \arrow[r, "\sigma"] & S_C \end{tikzcd}$$

göstereceğiz. Γ nın ayrıklığı, Γ_C nin ayrık oluşundan hemen görüleceği için, bizim $[\Gamma:\Gamma_C] = 2$ olduğunu göstermemiz yetecektir. Bunun içinde $g \notin \Gamma_C$, $g^2 \in \Gamma_C$, $g\Gamma_C g^{-1} \subset \Gamma_C$ olduğunu görmek yetecektir. $\Gamma_C \subset PSL(2,\mathbf{R})$ olduğundan birinci özellik aşikardır. $\pi g = \sigma\pi$ olduğu içinde g, H nin yönünü değiştirir. Üstelik $\pi g^2 = \sigma\pi g = \sigma^2\pi = \pi$ yani $g^2 \in \Gamma_C$ dir. Eğer, $h \in \Gamma_C$ ise $\pi g h g^{-1} = \sigma\pi h g^{-1} = \sigma\pi g^{-1} = \pi g g^{-1} = \pi$ ve dolayısıyla $g\Gamma_C g^{-1} \subset \Gamma_C$ dir.
$S \cong S_C/\langle\sigma\rangle \cong H/\Gamma$ olduğu $\pi_2 = H \to H/\Gamma$ doğal izdüşüm olmak üzere $h: \pi_1\pi(U) \to \pi_2(U)$ dönüşümünden görülür.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi"'] & H/\Gamma \arrow[d, "h"] \\ S_C \arrow[r, "\pi_1"] & S_C/\langle\sigma\rangle \end{tikzcd}$$

Üstelik S kompakt ve Γ ayrıktır. Bu nedenle de Γ bir NEC-gruptur. $\Gamma = \{\ell \in G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G' \mid \pi_2\ell = \pi_2\}$ ve Γ bir NEC-yüzey grubudur.[6]

1.4.8 Uyarı: 1) Teoremdeki koşulları gerçeklemeyen kompakt topolojik yüzeyler sadece aşağıdakilerdir:

a) Yönlendirilebilir, kenarsız yüzeyler: g=0 küre;g=1 tor.

b) Yönlendirilebilir, kenarlı yüzeyler: g=0, k=1 kapalı disk; g=0, k=2 kapalı halka.

c) Yönlendirilemez yüzeyler: g=1,k=0 projektiv düzlem, g=2, k=0 Klein şişesi, g=0, k=1 Möbiüs şeridi

2) Bir S yüzeyi verildiğinde bunun 2-katlısı(double) S_C ile temsil edilir. Tanımı gereği, $\Gamma_C \subset \Gamma^+$ dir. Dolayısıyla $\Gamma_C = \Gamma^+$ ve böylece de $S_C = H/\Gamma^+$ olur.[6]

1.4.9 Örnek: 1) S cinsi 1 ve kenar bileşen sayısı 1 olan yönlendirilebilir Klein yüzeyse(bir delikli tor) $S = H/\Gamma$ dır ve Γ işareti $(1,+,[\ ],\{(\ )\})$ olan yönlendirilebilir, kenarlı yüzey grubudur. $\Gamma_1 = \langle a,b,c,e \mid c^2 = eaba^{-1}b^{-1} = 1,\ ece^{-1} = c \rangle$

2) S cinsi 2 ve kenar bileşen sayısı 1 olan yönlendirilemez bir Klein yüzeyse(bir delikli Klein şişesi) $S = H/\Gamma$ dır ve Γ nın işareti $(2,-,[\ ],\{(\ )\})$ dır. Dolayısıyla, Γ yönlendirilemez kenarlı bir yüzey grubu, $\Gamma = \langle a_1,a_2,c,e \mid c^2 = ea_1^2a_2^2 = 1,\ ece^{-1} = c \rangle$

3) S cinsi g=1 ve kenar bileşen sayısı 2 olan yönlendirilebilir bir Klein yüzeyse(2-delikli tor) Γ nın işareti $(1,+,[\ ],\{(\ )^2\})$ dir.

1.4.10 Uyarı: 2. ve 3. bölümlerde cinsi $p \geq 3$ yani $p \geq 3$ çapraz şapkalı yönlendirilemez Klein yüzeylerin otomorfizm grupları ile ilgili bir kısım sonuçlar ifade ve ispat edilecek. Bu nedenle aşağıdaki önermeden sıkça yararlanılacaktır.

1.4.11 Önerme: $p \geq 3$ çapraz-şapkalı bir Klein yüzey, cinsi g=p-1 olan bir tek biçimde belirtilen yönlendirilebilir 2-yapraklı bir tek $\tilde{S}$ örtme yüzeyine sahiptir.

İspat: S herhangi yönlendirilemez $p \geq 3$ çapraz-şapkalı bir Klein yüzey olsun. Λ, yörünge cinsi $p \geq 3$ olan yönlendirilmez bir yüzey grubu olmak üzere $S \cong H/\Lambda$ dır. O halde Λ^+, Λ da indeksi iki olan yönlendirilebilir bir yüzey grubudur ve cins g dir. Böylece de,

$$2 = \left[\Lambda : \Lambda^+\right] = \frac{\mu(\Lambda^+)}{\mu(\Lambda)} = \frac{4\pi(g-1)}{2\pi(g-2)}$$

olacağından g=p-1 ve g≥2 elde edilir.[14]

BÖLÜM 2

KLEIN YÜZEYLERİN OTOMORFİZM GRUPLARI

2.1 Klein Yüzeylerin Otomorfizm Gruplarının Genel Teorisi

Bu bölümde Klein yüzeylerin otomorfizm gruplarının genel özellikleri belirtilecek ve klasik bir kısım sonuçlar verilecektir. Aksi söylenmedikçe tüm Klein yüzeylerin kompakt olduğu varsayılacak.

2.1.1 Tanım : Γ_1 ve Γ_2 iki yüzey grubu olsunlar ve bir $f:H/\Gamma_1 \to H/\Gamma_2$ homeomorfizmasını alalım. Eğer yandaki diagram uyumlu (commute) olacak biçimde bir $w:H \to H$ homeomorfizmi varsa, w, f yi indirgiyor (belirliyor) denir.[3]

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\pi_1"'] & H \arrow[d, "\pi_2"] \\ H/\Gamma_1 \arrow[r, "f"] & H/\Gamma_2 \end{tikzcd}$$

2.1.2 Sonuç :(1) $w:H \to H$, $w\Gamma_1 w^{-1} = \Gamma_2$ özelliğinde, bir homeomorfizm ise $f(\Gamma_1 z) = \Gamma_2 wz$ iyi-tanımlı ve f bir homeomorfizmadır.

(2) f yi belirleyen $w:H \to H$ homeomorfizmi birtek değildir. Gerçekten de $\forall\gamma \in \Gamma_1$ için $f\pi_1 = f\pi_1\gamma$ olduğundan $w\gamma$ da aynı f yi belirler.

(3) Bu $w:H \to H$ dönüşümü $i(\gamma) = w\gamma w^{-1}$ şeklinde tanımlı bir $i:\Gamma_1 \to \Gamma_2$ izomorfizmi de belirtir. Böylece de $w\Gamma_1 w^{-1} = \Gamma_2$ olur.

(4) f, konform ya da terskonform $\Leftrightarrow$ $w \in G$

(5) H/Γ_1 ve H/Γ_2 yönlendirilebilir yüzeylerse f nin yön koruyan olması için gerekli ve yeterli koşul, w nin yön koruyan olmasıdır. Dolayısıyla f nin konform olması için gerekli ve yeterli koşul $w \in G_0$ olmasıdır.

(6) Γ_1, Γ_2 yönlendirilebilir (yönlendirilemez) yüzey grupları olsunlar. O halde H/Γ_1 ve H/Γ_2 nin konform denk olmaları için gerekli ve yeterli koşul $w\Gamma_1 w^{-1} = \Gamma_2$ olacak biçimde bir $w \in G_0 (w \in G)$ nin varlığıdır.[3]

2.1.3 Teorem : (a) $f:H/\Gamma \to H/\Gamma$ homeomorfizmasının bir otomorfizm olması için gerekli ve yeterli koşul 2.1.1 de belirtilen w nin $w \in N_G(\Gamma)$ şeklinde olmasıdır.

(b) $\mathrm{Aut}(H/\Gamma) \cong N_G(\Gamma)/\Gamma$

(c) Γ, yönlendirilebilir yüzey grubu ise

$+\mathrm{Aut}(H/\Gamma) \cong N_G(\Gamma)/\Gamma$.

İspat : Yukarıdaki tanım ve sonuçta $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ almak yeterlidir.[3]

2.1.4 Sonuç : (1) Eğer, $S = H/\Gamma$ cinsi $g \geq 2$ biçiminde kompakt bir Riemann yüzeyi ise

$$+\mathrm{Aut}(S) \cong N_{G_0}(\Gamma)/\Gamma$$

dır.

(2) $+\mathrm{Aut}(S) \cong \mathrm{Aut}(H/\Gamma)$ nin herhangi bir G_1 altgrubu için Λ bir Fuchsian grup olmak üzere $G_1 \cong \Lambda/\Gamma$ dir.

(3) $S = H/\Gamma$ yönlendirilemez, kenarsız ve $g \geq 3$ özelliğinde bir kompakt Klein yüzey ise, $\mathrm{Aut}(S) \cong N_G(\Gamma)/\Gamma$ dir. G_1, Aut(S) nin herhangi bir altgrubu ise, Γ' bir NEC-grup olmak üzere, $G_1 \cong \Gamma'/\Gamma$ dir.[3]

2.1.5 Teorem : $S = H/\Gamma$ bir Klein yüzey olsun. Γ yönlendirilebilir bir yüzey grubu ve $g \geq 2$ ise $\mathrm{Aut}(S) \cong N_{G_0}(\Gamma)/\Gamma$. Eğer Γ yön korumayan bir yüzey grubu ise $\mathrm{Aut}(S) \cong N_G(\Gamma)/\Gamma$.

İspat : 2.1.2 den sonra verilen sonuçlar ve uyarılardan görülür.[3]

2.1.6 Sonuç : Yukarıdaki teorem gereği G_1, $S = H/\Gamma$ nın otomorfizm grubu dendiğinde $G_1 \cong \Gamma_1/\Gamma$ şeklinde olacaktır. Burada Γ_1, Γ yı normal altgrup kabul eden bir NEC-grubudur.

2.1.7 Teorem : S yönlendirilebilir, kenarsız ve cinsi $g \geq 2$ olan bir Klein yüzey olsun. Bu durumda $|\mathrm{Aut}(S)| < \infty$.

İspat : $S = \mathbf{H}/\Gamma$ olsun. O halde $\mathrm{Aut}(S) \cong N_{G_0}(\Gamma)/\Gamma$ dır. Γ devirli olmadığından $N_{G_0}(\Gamma)$ bir Fuchsian gruptur. Böylece $|\mathrm{Aut}(S)| = \dfrac{\mu(\Gamma)}{\mu(N_{G_0}(\Gamma))}$, yani $|\mathrm{Aut}(S)|$ iki pozitif büyüklüğün bölümüdür. Dolayısıyla sonludur.

2.1.8 Teorem (Hurwitz) : S yönlendirilebilir, kenarsız ve cinsi $g \geq 2$ olan bir Klein yüzeyi olsun. O halde $|\mathrm{Aut}(S)| \leq 84(g-1)$.

İspat : F^*, $N_{G_0}(\Gamma)$ için bir temel bölge F de Γ için bir temel bölge olsun. O halde

$$|\mathrm{Aut}(S)| = \left[\Gamma : N_{G_0}(\Gamma)\right] = \frac{\mu(N_{G_0}(\Gamma))}{\mu(\Gamma)} = \frac{4\pi(g-1)}{\mu(\Gamma)} \qquad (1)$$

olur. Siegel Teoremi gereği $\mu(\Gamma) \geq \frac{\pi}{21}$ olduğundan (1) eşitliğinden

$|\mathrm{Aut}(S)| \leq 84(g-1)$.

2.1.9 Tanım : Cinsi $g \geq 2$ olan yönlendirilebilir, kenarsız bir Klein yüzeyin (Riemann yüzeyi) 84(g-1) tane +otomorfizminden oluşan bir gruba Hurwitz grubu denir. H-grubu diye de adlandırılır.

2.1.10 Uyarı : Biliyoruz ki $N_{G_0}(\Gamma)$, 2,3,7 periyotlarına sahip ve H/Γ nın cinsi sıfır olmadıkça $\mu(\Gamma) > \frac{\pi}{21}$ olur.[13]

2.1.11 Teorem (Hurwitz) : G aşikar olmayan sonlu bir grup olsun. G bir $S = H/\Gamma$ yönlendirilebilir, kenarsız, $g \geq 2$ cinsli bir Klein yüzeyin bir Hurwitz grubudur $\Leftrightarrow$ G, (0;2,3,7) üçgen grubunun bir homomorfik resmidir $\Leftrightarrow G = \langle t, u \mid t^2 = u^3 = (tu)^7 = 1\rangle$.

İspat : Biliyoruz ki $S = H/\Gamma$ yukarıdaki koşulları gerçekleyen bir Klein yüzey ise $\mathrm{Aut}(S) \cong N_{G_0}(\Gamma)/\Gamma$ ve $N_{G_0}(\Gamma)$ grubu (0;2,3,7) üçgen grubu değilse $|\mathrm{Aut}(S)| < 84(g-1)$ olur. Tersine,

$$G = \langle t, u \mid t^2 = u^3 = (tu)^7 = 1\rangle$$

sonlu grup olsun.

$T = \langle x_1, x_2 \mid x_1{}^2 = x_2{}^3 = (x_1x_2)^7 = 1\rangle$ üçgen grubu dikkate alınırsa $\phi : T \to G$ $\phi(x_1) = t$, $\phi(x_2) = u$ şeklinde bir homomorfizmadır. $\Gamma = \ker\phi$ olsun. Bu durumda Γ, sonlu kerteli öğe bulundurmaz. Çünkü örneğin Γ kertesi 2 olan öğe bulundurursa $t = \phi(x_1) = 1$ olacağından, $u^3 = u^7 = 1$ bu nedenle de t ve u nun her ikisi de birim öğedir, ki bu G nin aşikar grup olduğu sonucu verir. Bu da varsayımla çelişir. Benzer yöntem 3 ve 7 kerteli öğeler için de uygulanabilir. O halde Γ sabit noktasız bir gruptur. Yani Γ, T nin bir normal altgrubudur. Dolayısıyla da, $T = N_{G_0}(\Gamma)$ olur. Çünkü T tüm Fuchsian gruplar içinde en küçük temel bölgeli olduğundan $N_{G_0}(\Gamma)$, T den büyük olamaz. O halde $T = G/\Gamma$ grubu, $S = H/\Gamma$ kompakt Klein yüzey üzerinde kesirli dönüşümlerin grubu olarak hareket eder.[...]

2.1.12 Uyarı : Şimdi yönlendirilemez durumu dikkate alacağız. Eğer Γ bir NEC-grup ise bu durumda $\mu(\Gamma) \geq \frac{\pi}{42}$ olur. $\mu(\Gamma) = \frac{\pi}{42}$ olması için gerek ve yeter koşul Γ nın üçgen grubu olmasıdır.

2.1.13 Önerme: G cinsi p olan yönlendirilemez bir S Klein yüzeyinin otomorfizmlerinin bir grubu ise $|G| \leq 84(p-2)$. Eğer $|G| = 84(p-2)$ ise G bir Hurwitz grubudur.

İspat: S nin iki yapraklı S_C örtme yüzeyinin cinsinin g=p-1 olduğunu biliyoruz. Bu durumda eğer $|G| > 84(p-2)$ olsa G, S_C nin 84(g-1) den daha fazla sayıda otomorfizmlerinin bir grubu olur. Eğer G, S nin 84(p-2) tane +otomorfizminin bir grubu ise G, S_C nin 84(g-1) tane otomorfizminin bir grubu, yani bir Hurwitz grubu olur.

Tersine herhangi $w \in N_{G_0}(\Lambda)$ ögesi H/Λ nın bir +otomorfizmi indirger ve böylece de Γ/Λ, H/Λ nın +otomorfizmlerinin bir grubu olarak hareket eder.

2.1.14 Tanım : Cinsi g olan yönlendirilemez bir Klein yüzeyin $84(g-2)$ otomorfizminin oluşturduğu gruba H^*-grubu denir.

2.1.15 Sonuç : Eğer G, yönlendirilemez S yüzeyi üzerinde H^*-grubu olarak hareket ediyorsa G, $\tilde{S}$ üzerinde bir H-grubu olarak hareket eder. Özel olarak her H^*-grubu bir Hurwitz grubudur.

İspat : Bu sonuç 2.1.13 den görülür.

2.1.16 Sonuç : Cinsi g≥3 olan yönlendirilemez bir S Klein yüzeyi $84(g-2)$ öğeli bir otomorfizm grubuna sahip ise ve Λ, $S \cong H/\Lambda$ yönlendirilemez bir yüzey grubu ise

$$|N_G(\Lambda)/\Lambda| = 84(g-2) \text{ dir.}$$

Ancak, $|N_G(\Lambda)/\Lambda| = \dfrac{\mu(\Lambda)}{\mu(N_G(\Lambda))} = \dfrac{2\pi(g-2)}{\mu(N_G(\Lambda))}$ ve böylece de $\mu(N_G(\Lambda)) = \dfrac{\pi}{42}$ olur. $N_G(\Lambda)$, $(0,+,[\ ],\{2,3,7\})$ simgeli bir gruptur.[3]

2.1.17 Teorem: Sonlu bir G grubunun; kompakt, kenarsız, yönlendirilemez ve cinsi $g \geq 3$ özelliğinde bir $S = H/\Gamma$ Klein yüzeyinin bir otomorfizm grubu olması için gerekli ve yeterli koşul $\theta(\Gamma_1^+) = G$, $\ker(\theta)$ bir yüzey grubu olacak biçimde bir $\theta: \Gamma_1 \to G$ homomorfizmi ve bir Γ_1 has NEC-grubunun varlığıdır.

İspat : G, $S = H/\Gamma$ nın otomorfizmlerinin bir grubu olduğuna göre, 2.1.4 (3) gereği $G \cong \Gamma_1/\Gamma$ olacak biçimde, yönlendirilemez bir Γ yüzey grubu vardır.
O halde Γ_1 bir has NEC-grup ve $\ker\theta$ yönlendirilemez bir yüzey grubu olacak biçimde bir $\theta: \Gamma_1 \to G$ homomorfizmi vardır. Bu nedenle de bir $t \in \ker\theta \cap (\Gamma_1 \backslash \Gamma_1^+)$ vardır. $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ + t\,\Gamma_1^+$ olur. $\theta(\Gamma^+) = G^+$ olsun. O halde $G = \theta(\Gamma_1) = \theta(\Gamma_1^+ + t\,\Gamma_1^+) = \theta(\Gamma_1^+) + \theta(t)\theta(\Gamma_1^+) = G^+ + G^+ = G^+$ ve bu nedenle de $\theta(\Gamma_1^+) = G$ olur.

Tersine, belirtilen özellikte bir Γ_1 ve $\theta: \Gamma_1 \to G$ homomorfizmi var olsun. Eğer Γ yönlendirilebilir bir yüzey grubu olsa $\Gamma \lhd \Gamma_1^+$ olur. Buradan da Γ, θ nın Γ_1^+ ya kısıtlanmışının çekirdeği olur. Dolayısıyla;

$$G = \Gamma_1^+/\Gamma \cong \Gamma_1/\Gamma$$

elde edilir. Bu ise $\mu(\Gamma^+) = 2\mu(\Gamma)$ olduğundan olanaksızdır. Bu bize Γ nın yönlendirilemez bir yüzey grubu olduğu ve G nin istenilen özellikte bir grup olduğu sonucunu verir.[14]

2.1.18 Teorem : Bir sonlu G grubunun bir H^*-grubu olması için gerekli ve yeterli koşul $G = \{c_1, c_2, c_3 \mid c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_1c_2)^2 = (c_2c_3)^3 = (c_1c_3)^7 = 1\}$ ve G nin c_1c_2, c_2c_3 tarafından üretilmesidir.

İspat : G bir H^*-grubu olsun. O halde $\theta(\Delta^+) = G$ olacak şekilde bir $\theta: \Delta \to G$ homeomorfizması vardır ve dolayısıyla G belirtilen temsile sahiptir.

Tersine eğer G bu doğuraylara (üreteçlere) sahip ise $\theta(\Delta^+) = G$ şeklinde bir $\theta: \Delta \to G$ homomorfizması vardır ve $\ker\theta$ bir yüzey grubudur. Çünkü Δ nın indeki 2 den büyük tüm normal altgrupları yüzey grubudur. 2.1.17 den istenen sonuç elde edilir.[3]

2.1.19 Uyarı: S bir Klein yüzey ve S_c bunun komplex 2-katlı örtüsü olsun. Eğer S yönlendirilebilirse Aut^+S, S nin yön koruyan otomorfizmlerinin oluşturduğu altgrubu temsil eder. Eğer S bir Riemann yüzeyi ise bunun otomorfizmlerinin grubunu Aut^+S ile göstereceğiz. Bununla analitik otomorfizmlerinin kümesini anlayacağız.

2.1.20 Teorem: $S_1 = H/\Gamma^+$ yüzeyi, $S = H/\Gamma$ Klein yüzeyinin 2-yapraklı yönlendirilebilir örtme yüzeyi olsun. Eğer G, $S = H/\Gamma$ nin otomorfizmalarının bir grubu ise G, $S_1 = H/\Gamma^+$ nın +otomorfizmlerinin bir grubudur.

İspat : $S = H/\Gamma$ ise 2.1.17 gereği Γ_1 bir has NEC-grup olmak üzere $G = \Gamma_1/\Gamma$ dir. Bu Γ_1/Γ, S üzerinde doğal bir harekete sahiptir. $\gamma \in \Gamma_1$ ise $\gamma\Gamma(\Gamma z) = \Gamma(\gamma z)$ olur. Γ yönlendirilemez olduğundan γ yı yön koruyan varsayacağız. Bu genelliği kaybettirmez. Çünkü, aksi halde $\bar{\lambda} \in \Gamma \setminus \Gamma^+$ olmak üzere γ yerine $\gamma\bar{\lambda}$ alacağız. $\Gamma^+ \subset \Gamma$ olduğundan $\gamma\Gamma(\Gamma^+ z) = \Gamma^+(\gamma z)$ olur. O halde G, H/Γ^+ üzerinde hareket eder. Dolayısıyla G, $S_1 = H/\Gamma^+$ nun +otomorfizmalarının bir grubudur.[3]

2.1.21 Teorem : (S_c, f, σ) S nin kompleks 2-katlı örtme yüzeyi ise

$$\mathrm{Aut}(S) \cong (\mathrm{Aut}^+S_c) \equiv \left\{ g \in \mathrm{Aut}^+S_c \,\middle|\, \sigma g \sigma = g \right\} \text{dir.}$$

İspat: $h \in \mathrm{Aut}(S)$ olsun. O halde $f\tilde{h} = hf$ olacak biçimde bir tek $\tilde{h} \in \mathrm{Aut}(S_c)$ vardır. $h \to \tilde{h}$ dönüşümü Aut S den Aut^+S_c ye bir monomorfizmdir. Ancak

$f\sigma\tilde{h}\sigma = f\tilde{h}\sigma = hf\sigma = hf$ olduğundan $\sigma\tilde{h}\sigma = \tilde{h}$ dır. $k \in \mathrm{Aut}^+S_c$, $\sigma k \sigma = k$ şeklinde olsun. O halde k, $S \equiv S_c/\sigma$ den kendi üzerine bir k/σ sürekli dönüşümü indirger. Bu dönüşüm ise bir morfizmdir. Üstelik $(\tilde{k}/\sigma) = k$ dır. [1]

2.1.22 Teorem : S yönlendirilebilir bir Klein yüzey ise $\mathrm{Aut}^+S = \mathrm{Aut}\, S$ ya da $[\mathrm{Aut}\, S : \mathrm{Aut}^+S] = 2$ dir.

İspat : İki tersanalitik dönüşümün çarpımı analitik olduğundan sonuç görülür.

2.1.23 Sonuç : 1) S cinsi g=0 olan kompakt bir yüzey olsun. Yani $S \cong \mathbf{C}_\infty$ alalım.

$f \in \mathrm{Aut}^+\mathbf{C}_\infty$ ise $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc \neq 0$ şeklinde bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $\mathrm{Aut}^+\mathbf{C}_\infty \cong PSL(2,\mathbf{C})$ dir.

2) χ ile $\mathbf{C}_\infty$ ye genişletilmiş kompleks eşleniği gösterelim . Bu durumda $\mathrm{Aut}\,\mathbf{C}_\infty \cong \mathrm{Aut}^+\mathbf{C}_\infty \times \{1,\chi\}$. Yani Aut $\mathbf{C}_\infty$ bir yarı doğrudan çarpımdır. Başka deyimle $f,g \in \mathrm{Aut}^+\mathbf{C}_\infty$ ve $\alpha,\beta \in \{1,\chi\}$ ise çarpım $(f,\alpha)(g,\beta)=\{f\,\alpha\,g\,\alpha,\alpha\,\beta\}$ ile belirtilir.

3) S üzerinde doğal dianalitik yapı bulunan diski temsil etsin. S nin kompleks iki katlısı $\mathbf{C}_\infty$ ve $\mathbf{C}_\infty$ un doğal tersanalitik tersinmesi(involution) χ olduğundan,

$$\mathrm{Aut}\,S=(\mathrm{Aut}^+\mathbf{C}_\infty)^\chi = PGL(2,\mathbf{R}).$$

BÖLÜM 3

3. KLEIN YÜZEYLERİN OTOMORFİZM GRUPLARI İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde, kompakt Klein yüzeylerin otomorfizm gruplarının kerteleri için bir kısım sınırlar elde edeceğiz. İkinci bölümde otomorfizm gruplarının genel teorisi verildi ve $|\mathrm{Aut}(S)| \leq 84(g-1)$ olduğu belirtildi. Özellikle Hurwitz grupları ile ilgili bir kısım sonuçlar verildi. Bu grupların PSL(2,q) grupları ile sıkı ilişkisi vardır. Klein, otomorfizm grubu PSL(2,7) ve cinsi 3 olan bir Riemann yüzeyi bulmuştur. Hurwitz 84(g-1) sınırını bu örnekten esinlenerek elde etmiştir. Burada PSL(2,7) nin kertesi 168 dir ve bu da dikkat edilirse 84(3-1) dir. Bu nedenle önce PSL(2,q) gruplarını dikkate alacağız.

3.1 Hurwitz Grubu ve PSL(2,q) Grupları

Hurwitz gruplarını doğal olarak basit gruplar arasında aramak gerekir. Çünkü aşikar olmayan hiçbir Hurwitz grubu devirli değildir ve bir Hurwitz grubunun herhangi bölüm grubu bir Hurwitz grubudur. Bu nedenle bir maksimal normal altgrup yardımıyla bir bölüm Hurwitz grubu elde edersek, bu bir basit Hurwitz grubu olur. PSL(2,q) projektif ünimodular gruplar q≥3 için basit olduklarından bu gruplar içinde Hurwitz grubu aramak doğaldır. Bunun için önce PSL(2,q) grubunun bazı temel özelliklerini belirtmek gerekir.

3.1.1 Tanım: p asal sayı ve n pozitif tam olmak üzere $q = p^n$ şeklindeki q ye asal kuvvet diyeceğiz.

Gösterilmiştir ki, bu q değeri için kertesi q olan bir cisim vardır. Bu cismi GF(q) simgesi ile göstereceğiz. Eğer q bir asal kuvvet değilse q kerteli bir cisim yoktur. Özel olarak n=1, q=p asal sayı ise GF(p)≡residü mod p olur.

$$GL(2,q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b,\ c,\ d \in GF(q), ad - bc \neq 0 \right\}$$ kümesine genel lineer grup denir. $$Z(GL(2,q)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \ a \neq 0 \right\}$$ kümesine GL(2,q) nun merkezi denir. $PGL(2,q) = GL(2,q)/Z(GL(2,q))$ ye projektif genel lineer grup denir.

$SL(2,q)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,q)\,\middle|\, ad-bc=1\right\}$ ye özel lineer grup(special linear group) denir. $PSL(2,q)=SL(2,q)/Z(SL(2,q))$ ye projektif özel lineer grup denir.[3]

3.1.2 Uyarı: 1) Burada $p\neq 2$ ise $Z(SL(2,q))=\left\{\begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \mp 1\end{pmatrix}\right\}$, p=2 ise $Z(SL(2,q))=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ ve $|PSL(2,q)|=\begin{cases} q(q-1)(q+1)/2 & : p\neq 2 \\ q(q-1)(q+1) & : p=2\end{cases}$

2) F:SL(2,q)→PSL(2,q) üzerine doğal homomorfizm ise

$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \mp 1\end{pmatrix}$. Burada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ögesi PSL(2,q) içinde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \mp 1\end{pmatrix}$ ögesini(kosetini) indirgiyor denir. Bu nedenle PSL(2,q) deki bir ögeyi bunu indirgeyen ve SL(2,q) de bulunan iki ögenin herhangi biri ile temsil edilir.

3)Bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,q)$ için iz$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$=a+d olarak tanımlanır. Buna göre,

i) PSL(2,q) da kertesi 2 olan bir öge indirgeyen SL(2,q) daki matrislerin izi sıfırdır.
ii) PSL(2,q) da kertesi 3 olan bir öge indirgeyen SL(2,q) daki matrislerin izi ± 1 dir.
iii) PSL(2,q) da kertesi 7 olan bir öge indirgeyen SL(2,q) daki matrislerin izi ξ ise $\xi^3+\xi^2-2\xi-1=0$ dır.[3]

3.1.3 Teorem: PSL(2,q) nun Hurwitz grubu olması için gerekli ve yeterli koşul,

i) q=p, p asal ve $p\equiv \mp 1 \pmod 7$

ii) $q=p^3$, p asal ve $p\equiv 0,\mp 1 \pmod 7$

iii) q=7 olmasıdır.

İspat: [13]

3.1.4 Teorem: PSL(2,8) grubunu otomorfizm grubu olarak kabul eden ve cinsi 8 olan yönlendirilemez bir Klein yüzey vardır.

İspat: 3.1.3 den biliyoruz ki, PSL(2,8) i otomorfizmlerinin grubu olarak kabul eden ve cinsi 7 olan yönlendirilebilir bir Klein yüzeyi vardır. Bu grubun doğurayları X, Y ile gösterilirse $X^2 = Y^3 = (XY)^7 = 1$ olduğu biliniyor. X in kertesi 2 olduğundan izi sıfırdır ve bu nedenle, $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alınabilir. Eğer $XY = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ denirse,

$$\begin{aligned} x + w + z &= 1 \\ x + w &= \xi \\ xw - yz &= 1 \end{aligned}$$

olur. Burada ξ=izXY dir. Bu eşitliklerin, w=0 için bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda, $x = \xi$, $z = 1 + \xi$, $y = \xi^2$ olur. Kolayca gösterilebilir ki PSL(2,8), $\Delta = \langle c_1, c_2, c_3; c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = (c_1c_2)^2 = (c_2c_3)^3 = (c_1c_3)^7 = 1 \rangle$ grubunun bir homomorfik resmidir. Bu nedenle PSL(2,8) de,
$Z^2 = (ZX)^2 = (ZY)^2 = X^2 = Y^3 = (XY)^7 = 1$ özelliğinde bir Z matrisinin varlığını görmek gerekir. Bu matrisin ise $Z = \begin{bmatrix} 1 & \xi^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğu hesaplama ile görülebilir. Böylece de, $c_1 \to ZX$, $c_2 \to Z$, $c_3 \to ZY$ ile tanımlanmış dönüşüm istenilen özellikte bir homomorfizmadır. Bu bize PSL(2,8) in istenilen özellikte bir grup olduğunu gösterir.[14]

3.1.5 Teorem: PSL(2,27) yönlendirilebilir ve cinsi 118 olan bir Klein yüzeyin +otomorfizmlerinin bir Hurwitz grubudur. Fakat cinsi 119 olan yönlendirilemez bir yüzeyin otomorfizmlerinin bir grubu değildir. Bu nedenle her Hurwitz grubu cinsi p olan yönlendirilemez bir yüzeyin 84(p-2) tane otomorfizminin bir grubu değildir.

İspat: Önceki teoremdeki yönteme benzer şekilde hareket edilebilir.[14]

3.1.6 Teorem: Eğer cinsi p olan ve 84(p-2) ögeli bir grubu otomorfizmi grubu kabul eden yönlendirilemez bir yüzey varsa, her m>0 tek sayısı için $p' = m^{p-1}(p-2)+2$ olmak üzere, cinsi p' olan ve 84(p'-2) otomorfizmi grup kabul eden yönlendirilemez bir yüzey vardır.

İspat: Λ, yörünge cinsi p olan yönlendirilemez bir yüzey grubu olsun, öyle ki H/Λ, 84(p-2) otomorfizmi grup kabul etsin. $[\Lambda, \Lambda]$ komütatör altgrubu, Λ nın bir karakteristik altgrubudur ve böylece Λ nın elemanlarının m. kuvveti ile üretilen altgrup Burnside m-çekirdeği $\{\Lambda^m\}$ dir. Bu yüzden M(m)=$\{\Lambda^m\}[\Lambda,\Lambda]$ çarpımı bir karakteristik altgruptur. Her komütatör yön koruyan olduğundan $[\Lambda,\Lambda]$ bir Fuchsian gruptur ve eğer m tek ise $\{\Lambda^m\}$yön değiştiren elemanlar içerir. Çünkü yöndeğiştiren bir ögenin tek kuvveti de yön değiştiren ögedir. Böylece M(m), m teksayısı için, yönlendirilemez bir yüzey grubudur. Benzer olarak, M(m), m çift sayı olduğunda yönlendirilebilir bir yüzey grubudur. Λ/M(m) sonlu üreteçli değişmeli gruptur. Ögeleri sonlu kertelidirler. Bu yüzden Λ/M(m) sonludur ve böylece M(m), Λ da sonlu indekse sahiptir ve dolayısıyla M(m) kompakt yörünge uzaylı bir yüzey grubudur.

Tüm $\lambda \in \Lambda$, $t \in \Delta$ için $\lambda \to t\lambda t^{-1}$, Λ nın bir grup otomorfizmidir. M(m), Λ nın bir karakteristik altgrubu olduğundan $tM(m)t^{-1}$=M(m) dir. Şimdi m in tek sayı olduğunu düşünelim. p' yüzeyin cinsi olmak üzere 84(p'-2) otomorfizme sahip bir H/M(m) yönlendirilemez yüzeyini alacağız. Şimdi p' yü hesaplayalım. Λ, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_p; a_1^2 a_2^2 \ldots a_p^2 = 1\rangle$ gösterimine sahiptir. a_i nin doğal homomorfizm altındaki resmi $\bar{a}_i$ ile gösterilir. Değişmeli gruplarımız toplamsal olarak yazılarak Λ/M(m) için $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p; m\bar{a}_1 = \ldots = m\bar{a}_p = 2(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_p) = 0\rangle$ gösterimi elde edilir.

$m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_p) = 0$ ve n tek sayı olduğundan, $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_p = 0$ dır. Böylece de Λ/M(m), $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{p-1}; m\bar{a}_1 = \ldots = m\bar{a}_{p-1} = 0\rangle$ gösterimine sahip olur. Dolayısıyla $\Lambda / M(m) \cong Z_m^{p-1}$ ve $|\Lambda / M(m)| = m^{p-1}$ dir. Buradan $\dfrac{\mu(M(m))}{\mu(\Lambda)} = \dfrac{2\pi(p'-2)}{2\pi(p-2)} = m^{p-1}$ ve böylece $p' = m^{p-1}(p-2) + 2$ olur.[14]

3.1.7 Sonuç: Her m>0 tek sayısı için cinsi $p' = 6m^7 + 2$ olan ve 84(p'-2) ögeli bir grubu otomorfizmi grup kabul eden yönlendirilemez bir yüzey vardır.

İspat: Biliyoruz ki 504=84(7-1) otomorfizmden oluşan grubu otomorfizm grubu olarak kabul eden ve cinsi p=8 olan yönlendirilemez bir Riemann yüzeyi vardır. Buradan istenen sonuç çıkar.[14]

3.1.8 Tanım: Bir kompakt Riemann yüzeyin +otomorfizmlerinin bir geniş grubu(large group) diye bir Fuchsian üçgen grubun yüzey çekirdek bölüm grubuna denir.

3.1.9 Lemma: Dihedral grup, +otomorfizmlerin bir geniş grubu olamaz.

İspat: D_m, $\langle B,C; B^2=(BC)^2=C^m=1\rangle$ gösterimine sahip bir dihedral grup olsun. O zaman eğer D_m +otomorfizmlerin bir geniş grubu ise bir Λ Fuchsian üçgen grubu ve $\chi:\Lambda\rightarrow D_m$ bir yüzey çekirdek homomorfizmi vardır. Λ nın gösterimi;

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ olmak üzere $\langle x,y; x^p=y^q=(xy)^r=1\rangle$ olsun. Şimdi kolaylıkla görebiliriz ki, D_m nin C ile üretilen devirli grupta bulunmayan tüm ögelerinin kerteleri 2 dir. Bu nedenle p, q, r tamsayılarının en fazla bir tanesi 2 ye eşittir. Biliyoruz ki, χ, sonlu kerteli ögelerin kertelerini korur ve dolayısıyla $\chi(x)$, $\chi(y)$ D_m yi üretir.Bu nedenle p, q, r tamsayılarından biri 2 ye eşitt olacaktır. Varsayalım ki p=2 olsun, o halde $q\neq2$ ve $0<\ell<m$ olmak üzere $\chi(y)=C^{\ell}$ dir. Eğer $\chi(x)=BC^k$ ise $(xy)=BC^{k+\ell}$ dir ki, kertesi 2 dir. Bu yüzden r=2 olur. Bu ise bir çelişkidir. Diğer durumlarda da kolaylıkla elde edilebilir.[14]

3.1.10 Teorem: G, bir $\tilde{S}$ yönlendirilebilir Riemann yüzeyinin +otomorfizmlerinin devirli olmayan bir geniş grubu olsun. Eğer $\tilde{S}$ nın $\mp$otomorfizmlerinin grubu Z_2xG ye izomorfizm ise $\tilde{S}$, G yi otomorfizmlerin bir grubu gibi kabul eden bir S yönlendirilemez yüzeyinin 2-yapraklı örtme yüzeyidir.

İspat: Λ bir Fuchsian üçgen grup ve Γ, $\Gamma^0=\Lambda$ olacak şekilde bir NEC-grup olsun. Γ nın,

i) $(0,+,[\ ],\{\ell,m,n\})$
ya da
ii) $(0,+,[\ell],\{m\})$

simgesine(signature) sahip olduğunu biliyoruz.

Önce (i) simgesine sahip olduğunu varsayalım. O zaman $\{c_1,c_2,c_3; c_1^2=c_2^2=c_3^2=(c_1c_2)^{\ell}=(c_2c_3)^m=(c_1c_3)^n=1\}$ gösterimine sahiptir. Bir $\phi:\Gamma\rightarrow Z_2xG$ yüzey-çekirdek homomorfizmine sahip olduğumuzu biliyoruz. Üstelik, bir $\theta: Z_2xG\rightarrow G$ doğal homomorfizmi vardır. $\psi=\theta\phi$ olsun. Öyleyse $\psi:\Gamma\rightarrow G$ bir homomorfizmdir. Ayrıca $\psi(\Lambda)=\theta\phi(\Lambda)=\theta(G)=G$ dir. Böylece eğer 2.1.17 teoreminden elde edilecek sonuçla kerψ nin bir yüzey grubu olduğunu ispatlarsak, kerψ nin kerϕ yi iki indeksli bir altgrubu olarak içerdiğini görmemiz kolaylaşır.

Eğer $\gamma\in\ker\psi$ ise $\theta\phi(\gamma)=1$ dir. Böylece γ nın sonsuz kerteli olması halinde ya $\phi(\gamma)=1$ ya da $\phi(\gamma)=h\neq1$ dir. Bu son durumda; $\theta(h)=1$ böylece de $h^2=1$ ve her $g\in G$ için hg=gh olur. γ nın yansıma olduğu sonucunu çıkarırız. Böylece γ c_1,c_2 ya da c_3 e eşlenik(conjugate)tir. Diyelim ki γ, c_1 e eşlenik olsun. O zaman

$c_1 \in \ker\psi$ olur. Dolayısıyla G, $\{X,Y;X^2=Y^2=X^\ell=(XY)^m=Y^n=1\}$ şeklindeki bir gösterime sahiptir. Eğer ℓ ve n çift sayı ise bu grup dihedraldir, bu ise 3.1.9 lemması ile çelişir. Aksi halde grup devirli olur ki, bu hipoteze ters düşer.

Şimdi Γ nın (ii)simgesine sahip olduğunu varsayalım. O zaman $\{c_1,x;c_1^2=x^\ell=(xcx^{-1}c)^m=1\}$ gösterimine sahiptir. Sonlu kerteli bir eleman kerψ de dolaşırsa $\psi(c)=1$ olur. Böylece $G\cong Z_\ell$ olur ki, bu da hipoteze ters düşer.[14]

3.1.11 Teorem: $G_g=\langle T,U|T^4=U^{2(g+1)}=(TU)^2=(T^{-1}U)^2=1\rangle$ grubunun kertesi 8(g+1) dir. Ayrıca $\forall g\geq 2$ için G_g cinsi g olan bir yüzeyin otomorfizm grubudur.

İspat: G_g grubu V, U ile üretilmiş olan $Z_2\oplus Z_{2(g+1)}$ grubunu $T^2=V$, $T^{-1}UT=U^{-1}V$ koşullarını gerçekleyen T ögesiyle genişleterek elde edilmiştir. Γ_g ile $(2,4,2(g+1))$ üçgen grubunu gösterelim. 3.2.4 Teoremi gereği böyle bir grup vardır.($\exists$ yüzey çekirdek homomorfizmi $\Gamma_g\to G_g$ üzerine) Eğer γ, kerτ nun cinsi ise, Riemann-Hurwitz formülünden

$2(\gamma-1)=8(g+1)\left(-2+1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2g+2}\right)$ dir. Buradan da $\gamma=g$ bulunur.

3.2.3 Teoremi gereği, kerτ nun cinsi g olduğundan, kerτ, F_g dedir. Dolayısıyla otomorfizm grubudur.[15]

Birbirlerinden bağımsız olarak, $|G|\geq 8(g+1)$ olduğunu ispatlayan Maclachlan ve Accola, $3|g$ durumunda da yine birbirlerinden bağımsız olarak $|G|\geq 8(g+3)$ olduğunu ve bu sınırın da sonsuz çoklukta g değeri için elde edilebileceğini ispatlamışlardır.

3.1.12 Teorem: $g\equiv 0 \pmod 3$ olmak üzere,
$G'_g=\langle T,U|T^2=U^{g+3}=(TU)^4=(TU^3)^2=1\rangle$ grubunun kertesi 8(g+3) tür ve G'_g cinsi g olan bir yüzeyin otomorfizmlerinin bir grubudur.

İspat: 3.1.11 e benzer şekilde ispatlanabilir.[15]

3.2 Örtü ve Dallanmaya Bağlı Olarak Sınır Bulunması

3.2.1 Teorem: S cinsi $g \geq 2$ olan kompakt Klein yüzey, G=Aut(S) olmak üzere $\tilde{S} = S/G$ cinsi $\gamma \geq 1$ olan bir kompakt Klein yüzey ve $|G| = r$ olsun. O halde

$$|G| \leq 4(g-1)$$

dir.

İspat: $\gamma \geq 2$ olsun. Böylece Hurwitz dallanma formülünden $\frac{2g-2}{|G|} \geq 2$ ve dolayısıyla $|G| \leq g-1$ olur. γ=1 ise t=0 olur. O halde Hurwitz dallanma formülü gereği

$\frac{2g-2}{|G|} \geq m(1-\frac{1}{k_1}) \geq 1-\frac{1}{k_1} \geq \frac{1}{2}$ yani $|G| \leq 4(g-1)$ elde edilir.[9]

3.2.2 Teorem: S cinsi $g \geq 2$ olan kompakt Klein yüzey, G=Aut(S) olmak üzere $\tilde{S} = S/G$ cinsi $\gamma = 0$ olan kompakt Klein yüzey ve $|G| = r$ olsun. Eğer $\pi: S \to \tilde{S}$ dallanması $\tilde{S}$ nın iç noktaları üzerine ise

$$|G| \leq 6(g-1)$$

dir.

İspat: Bu durumda her $n_i = 2$ olacağından Hurwitz dallanma formülünden

$\frac{2g-2}{|G|} = -2 + 2\sum_{i=1}^{t}(1-\frac{1}{k_i})$ olur. Buradan da,

$$\frac{g-1}{|G|} = t-1-\frac{1}{k_1}-\ldots-\frac{1}{k_t} \qquad (1)$$

bulunur. $g \geq 2$, her $k_i \geq 2$ olduğundan (1) den $t \geq 2$ olduğu sonucuna varılır.

Varsayalım ki $t \geq 3$ olsun. $\forall k_i \geq 2$ olduğundan (1) den $\frac{g-1}{|G|} = t-1-\frac{t}{2} \geq \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $|G| \leq 2(g-1)$ elde edilir. t=2 olsun. Bu durumda $k_1 = k_2 = 2$ olamayacağından(aksi halde g=1 olur ki bu varsayımla çelişkidir),

$\frac{g-1}{|G|} \geq 2-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ yani $|G| \leq 6(g-1)$ olur.[9]

3.2.3 Teorem: S cinsi $g \geq 2$ olan kompakt kenarsız bir Klein yüzey ve $G \subset Aut(S)$, $B = S/G$ gerçel projektif düzlem olacak biçimde bir otomorfizm grubu ise

$$|G| \leq 6(g-1)$$

dir.

İspat: $\partial B = \varnothing$ ve $\gamma=0$ olduğundan önceki teoremin koşulları gerçeklenmiştir. Bu nedenle de $|G| \leq 6(g-1)$ olur.[9]

3.2.4 Teorem: S sınırı bulunan, kompakt yönlendirilebilir, cinsi $g \geq 2$ özelliğinde bir Klein yüzey ise

i) $|Aut^{+}(S)| \leq 6(g-1)$

ii) $|Aut(S)| \leq 12(g-1)$

dir.

İspat: S yönlendirilebilir ve $\partial S \neq \varnothing$ olduğundan $G \subset Aut^{+}(S)$ için $\tilde{S} = S/G$ nin sınırı boş değildir ve dolayısıyla $\tilde{S}$ nın cinsi $\gamma=0$ olduğundan dolayı da $\tilde{S} \cong D = \{z: |z| < 1\}$ diskidir. Diğer yandan, $\pi: S \to S/G$ doğal izdüşüm dönüşüm morfizmi sadece $D = \{z: |z| < 1\}$ diskinin iç noktaları üzerine dallanır. Gerçekten de $x \in S$ olmak üzere, $S(x) = \{g \in G | gx = x\}$ kalımlaştırıcısı ve bunun $S'(x) = \{g \in S(x) | \phi g \phi^{-1} \text{ analitik}\}$ altgrubu dikkate alınırsa $G \subset Aut^{+}(S)$ olduğundan S'(x) in tanımından S(x)=S'(x) olduğu görülür. Dolayısıyla, $x \in \overset{\circ}{S}$ ise $\pi(x) \in \overset{\circ}{D}$ (π, x de dallanabilir ya da dallanamaz) ve eğer $x \in \partial S$ ise $e_{\pi}(x) = 1$ olur. O halde π sadece D nin iç noktaları üzerine dallanır. Dolayısıyla (i) deki sonuç 3.2.2 teoreminden elde edilir. Diğer yandan $Aut(S) = Aut^{+}(S)$ ya da $Aut^{+}(S)$, Aut(S) nin indeksi iki olan bir altgrubu olduğundan (ii) deki sonuçta (i) den elde edilir.[9]

3.2.5 Teorem: S, $g \geq 2$ özelliğinde, sınırı bulunan kompakt Klein yüzey ise

$$|Aut(S)| \leq 12(g-1)$$

dir.

İspat: $\gamma \geq 1$ halinde,3.2.1 teoremi gereği, $|Aut(S)| \leq 4(g-1)$ olacaktır. $\gamma=0$ ve dallanma sadece $\tilde{S} = S/Aut(S)$ nin içnoktaları üzerine olması halinde de

$|Aut(S)| \leq 6(g-1)$ olduğunu 3.2.2 teoreminde gördük. γ=0, $\partial S \neq \varnothing$ ve dallanma $\partial\tilde{S}$ üzerine olduğunda yine Hurwitz dallanma formülünden $|Aut(S)| \leq 12(g-1)$ olduğu görülür.[9]

Örnek: 1) S, 3-delikli bir küre olsun. Delikler ekvator etrafinda olsunlar ve ekvatora yerleştirilmiş eşkenar üçgenin köşelerini içlerinde bulundursunlar. S cinsi 2 olan yönlendirilebilir Klein yüzeydir ve $|Aut(S)| = 12 = 12(2-1)$ dir. Üstelik $Aut(S) \cong C_2 x D_3$ dür.

2) S, 6-delikli küre olsun. Delikler düzgün altıgenin köşelerinde olsun. S cinsi 5 olan yönlendirilebilir Klein yüzeydir. $|Aut(S)| = 48 = 12(5-1)$ dir.[9]

3.2.6 Tanım: S, g cinsli, k sınır bileşenli yönlendirilebilir kompakt Klein yüzey olsun. S nin p ile gösterilen ve analitik cinsi diye adlandırılan sayı g=2p+k-1 eşitliği ile tanımlanır. Dikkat edilirse bu p sayısı, S nin herbir sınır bileşenine bir disk yapıştırılarak elde edilen S^* kompakt yüzeyin topolojik cinsidir.

3.2.7 Teorem: S g cinsli, k sınır bileşenli, yönlendirilebilir kompakt Klein yüzey olsun. Eğer $\frac{6(g-1)}{7} < k \leq g-3$ ise $|Aut(S)| \leq 84(g-k-1) < 12(g-1)$ dir.

İspat: Maskit $|Aut^+(S)| \leq |Aut(S^*)|$ olduğunu gösterdi. 2p=g-k+1≥4 olduğundan p≥2 olur. Böylece de $|Aut(S^*)|$ ye Hurwitz sınırı uygulanabilir. O halde

$|Aut(S)| \leq 2.84(p-1) = 84(g-k-1)$ elde edilir. Dikkat edilirse "$84(g-k-1) < 12(g-1) \Leftrightarrow 6(g-1) < 7k$" . Eğer g<16 ise 6(g-1)/7<k≤g-3 şeklinde tamsayı olan k yoktur. Teoremde verilen geliştirilmiş sınır cinsi 16 ve sınır bileşeni 13 olan yönlendirilebilir Klein yüzeye uygulanır.[9]

3.2.8 Teorem: S g cinsli, k sınır bileşenli, yönlendirilemez kompakt Klein yüzey olsun. Eğer $\frac{6(g-1)}{7} < k \leq g-2$ ise $|Aut(S)| \leq 84(g-k-1) < 12(g-1)$ dir.

İspat: S_0, 2k sınır bileşenli, yönlendirilebilir kompakt Klein yüzey $v: S_0 \to S$, S nin dallanmamış 2-yapraklı örtmesi, τ S_0 ın $v \circ \tau = v$ özelliğindeki tersanalitik tersinmesi olsun. S_0 ın g' cinsi g'=2g-1 dir. f:S→S bir otomorfizm olsun. Öyleyse

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & S_0 \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ S & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

diyagramı uyumlu olacak şekilde yönkoruyan bir $\tilde{f}: S_0 \to S_0$ otomorfizmi birtek biçimde vardır. Böylece de $|Aut(S)| \le |Aut^+(S)|$ olur. S_0 ın analitik cinsine p' denirse,

$p' = \dfrac{(2g-1)-2k+1}{2} = g-k \ge 2$ olur. Böylece 3.2.7 teoreminde bahsedilen Maskit'e ait sonuç gereği, $|Aut(S)| \le |Aut^+(S_0)| \le 84(p'-1) = 84(g-k-1)$ elde edilir. Dikkat edilirse "$84(g-k-1) < 12(g-1) \Leftrightarrow 6(g-1) < 7k$" dır.[9]

KAYNAKÇA

[1] Alling, N.L.,and Greenleaf,N., Foundations of Theory of Klein Surfaces, Springer Verlag, (1971).

[2] Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Uludağ Üniversitesi, Bursa, (1996) (II.Baskı)

[3] Hall, W., Automorphism And Coverings of Klein Surfaces, Ph.D.Tezi, Faculty of Mathematical Studies, University of Southampton, (1977).

[4] Massey, W.S., Algebraic Topology:An Introduction, Springer Verlag, (1977).

[5] Forster, O., Lectures on Riemann Surfaces, Springer Verlag, (1937).

[6] Bujalance, E., Etayo, J.J., Gamboa, J.M., Gromadzki, G.,Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces, Springer Verlag, (1990).

[7] Jones, G.A., Singerman, D., Complex Functions, Cambridge University, (1987).

[8] Springer, G., Introduction to Riemann Surfaces, Add.-Wesley, (1987).

[9] May,C.L.,"Automorphism of Compact Klein Surfaces With Boundary",*Pasific Journal Math*, (1975).

[10] Başkan, T., Ayrık Gruplar, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, (1980).

[11] Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, Newyork, (1983)

[12] Cangül, İ.N., Kompakt Klein Yüzeylerin Otomorfizmleri, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (1989).

[13] Macbeath, M.A., Discontinuous Groups and Birational Transformations, University of S.T.Andrews, Queen's College Dundee, (1961)

[14] Singerman, D., Non-Euclidean Crystallographic Groups and Riemann Surfaces, Ph.D.Tezi, Birmingham, (1969).

[15] Maclachlan, C., "A Bound for the Number of Automorphisms of a Compact Riemann Surface", *London Math.*, Soc., (1969)

[16] Harvey, W.J., Cyclic Groups of Automorphism of A Compact Riemann Surface, Birmingham, (1966).

[17] Accola, R.D.M., "On the Number of Automorphisms of a Closed Riemann Surfaces", *Brown University*, (1967).

[18] Singerman, D., "Automorphisms of Compact Non-Orientable Riemann Surfaces", *Glasgow Math.J.*, (1971)

[19] Ford, L.R., Automorhic Functions, Chelsea, (1951)

[20] Fraleigh, J.B., A first course in Abstract Algebra, University of Rhode Island, (1961)

[21] Maskit, B., Klenian Groups, Springer Verlag, (1988)

[22] Lehner, J., and Newman, M., On Riemann Surfaces with Maximal Automorphism Groups, (1966)

[23] Farkas, H.M., and Kra, I., Riemann Surfaces, Springer Verlag, (1980)

TÜRKÇE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük):

(TÜBİTAK/TÜRDOK'un Abstrakt hazırlama kılavuzunu kullanınız.)

Riemann, kompleks cebirsel eğrilerin kesirli otomorfizmlerinin oluşturduğu gruplarla, bu cebirsel eğrilerin belirlediği kompakt Riemann yüzeylerin kesirsel otomorfizmlerinin oluşturduğu grupların aynı olduğunu gösterdi. Daha sonra Macbeath ve Accola bu otomorfizm gruplarının yapılarını belirten bir kısım özellikler elde ettiler. Bu sonuçlar, otomorfizm grupları üzerindeki çalışmaların yoğunlaşmasına sebep oldu.

Riemann yüzeyleri, üzerlerinde analitik yapılar bulunan, yönlendirilebilir kenarsız yüzeylerdir. Ancak yönlendirilemez ve kenarlı yüzeyler dikkate alındığında, bunların üzerine dianalitik yapılar koymak gerekmektedir. Bu yapıda analitik ve ters-analitik dönüşümler vardır. Bu yüzeylere Klein yüzeyler adı verilmiştir. Böylece Riemann yüzeyleri bu yüzeylerin özel hali olmuşlardır.

Bu tezde Klein yüzeylerin otomorfizm grupları incelendi. Genel teori verildikten sonra bu konudaki literatürü oluşturan çalışmalardan bir kısım önemli teoremler seçildi ve bunların ispatları anlaşılır biçimde verildi.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Klein yüzeyler ve bunların örtme yüzeyleri tanımlandı. Klein yüzeyler ve otomorfizm gruplarla ilgileri nedeniyle NEC-gruplar ve bölüm uzayları ile ilgili bir kısım temel sonuçlara yer verildi.

İkinci bölümde otomorfizm gruplarının temel özellikleri belirtildi. Özellikle Hurwitz grupları ile ilgili temel teoremler ayrıntılı biçimde yazıldı.

Üçüncü bölümde PSL(2,q) grupları ve Hurwitz grupları arasındaki ilgiyi belirten bazı teoremlerin ispatları ayrıntılı biçimde yazıldı.

İNGİLİZCE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük):

Riemann showed that the groups of fractional automorphisms of complex algebraic curves are the same with the groups of fractional automorphisms of compact Riemann surfaces determined by these algebraic curves. Later on Macbeath and Accola obtained some properties determining the structure of these autumorphism groups. These results caused an increase on the search of these automorphism groups.

Riemann surfaces are orientable surfaces without boundary with an analytical structure on them. When non-orientable surfaces with boundary are considered, it is necessary to put on them dianalytic structures. In this structure there exist analytical and anti-analytical transformations. These kind of surfaces are called Klein(ian) surfaces. It should be noted that Riemann surfaces are a special case of them.

In this thesis automorphism groups of Klein surfaces are studied. After the general theory is given, some important theorems in the literature are recalled and explicit proofs are given.

The thesis consists of three chapters. In the first chapter Klein surfaces and their covering surfaces are defined. Also some fundamental results concerning NEC-groups and quotient spaces are given because of their close relation with Klein surfaces and automorphism groups.

In the second chapter fundamental properties of automorphism groups are given. Particularly, main theorems related to Hurwitz groups are recalled in detail.

In the third chapter, proofs of some theorems giving the relation between PSL(2,q) groups and Hurwitz groups are given. Finally some boundary problems for the order of automorphism groups in relation with ramification index are given and proven.