T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOSOYA ÜÇGENİ VE HOSOYA ÜÇGENİNDEN ELDE EDİLEN DİZİLER

SİNAN ELVEREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Prof. Dr. Fırat ATEŞ (Tez Danışmanı)

BALIKESİR, OCAK- 2023

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOSOYA ÜÇGENİ VE HOSOYA ÜÇGENİNDEN ELDE EDİLEN DİZİLER

SİNAN ELVEREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Fırat ATEŞ (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN

BALIKESİR, OCAK – 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Hosoya Üçgeni ve Hosoya Üçgeninden Elde Edilen Diziler**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sinan ELVEREN

ÖZET

HOSOYA ÜÇGENİ VE HOSOYA ÜÇGENİNDEN ELDE EDİLEN DİZİLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SİNAN ELVEREN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. FIRAT ATEŞ)
BALIKESİR, OCAK - 2023

Tezimiz toplamda beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Hosoya sayılarının oluşumunda etkili olan Fibonacci ve Lucas sayılarına dair bilgilerden bahsedilmiştir. Özelliklede ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde Hosoya sayıları ve Hosoya üçgeni tanıtılıp bu üçgen ve sayılara ait birçok özdeşliklere, teorem, ispat ve denklemlere dair önemli sonuçlar verilmiştir. Ayrıca Hosoya sayıları ile Lucas ve Fibonacci sayıları arasındaki bağıntılar ortaya konmuştur.

Üçüncü bölümde Hosoya üçgeninden elde edilen eşkenar dörtgenler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Hosoya üçgeninden dizi elde edilmiştir. Elde edilen bu dizinin üreteç fonksiyonu üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Beşinci bölümde tezden elde edilen sonuçlar verilmiş ve kısaca özetlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Hosoya üçgeni ve sayıları, Fibonacci sayıları, Pascal üçgeni, Binet formülü

Bilim Kod / Kodları: 20401 Sayfa Sayısı: 36

ABSTRACT

HOSOYA TRIANGLE AND SEQUENCES FROM HOSOYA TRIANGLE
MSC THESIS
SİNAN ELVEREN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF.DR.FIRAT ATEŞ)
BALIKESİR, JANUARY - 2023

Oyr thesis consists of five chapters in total.

In the first chapter, information about Fibonacci and Lucas numbers, which are effective in the formation of Hosoya numbers, is mentioned.

In the second chapter, Hosoya numbers and Hosoya triangle are introduced and important results about many identities, theorems, proofs and equations of these triangles and numbers are given. In addition, the relations between Hosoya numbers, Lucas and Fibonacci numbers are revealed..

In the third chapter, definitions and theorems related to rhombuses obtained from Hosoya triangle are given.

In the fourth chapter, the sequence is obtained from the Hosoya triangle. Studies have been carried out on the generator function of this obtained sequence.

In the fifth chapter, the results obtained from the thesis are given and briefly summarized.

KEYWORDS: Hosoya triangle and numbers, Fibonacci numbers, Pascal triangle, Binet formula

Science Code / Codes: 20401 Page Number: 36

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{F_n}$	**:** n. Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{H_n}$	**:** n. Hosoya sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	**:** n. Lucas sayısı
$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{H_{n,j}}$	**:** n.Satır j.Sütun Hosoya sayısı
$\boldsymbol{\Sigma}$	**:** Toplam sembolü
$\mathbb{Z}$	**:** Tam sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma sırasında üzerimde çok büyük emeği olan kıymetli hocam ve tez danışmanım Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Fırat ATEŞ hocama en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Bu tezin hazırlanması sürecinde yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocalarım Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ ve değerli hocam Prof. Dr. Recep ŞAHİN' e teşekkürlerimi sunuyorum.

Beni yetiştiren ve desteğini esirgemeyen, hayatımın her aşamasında maddi manevi destekleriyle her zaman varlıklarını hissettiğim aileme, anneme, babama ve eşime şükranlarımı sunarım. Beni her zaman cesaretlendiren ve bu süreçte de yanımda olan tüm arkadaşlarıma çok teşekkür ediyorum. Yaptığım bu çalışmamdan ve araştırmalarım neticesinde matematik dünyasına katkı sağlamaktan sevinç duyuyorum. Çalışmamın matematik ve bilim dünyasına faydalı olmasını dilerim. Aynı zamanda yapılacak olan farklı çalışmalarda da yol göstermesini canı gönülden temenni ederim.

Balıkesir, 2023 **Sinan ELVEREN**

1. GİRİŞ

Tezin bu bölümünde literatürde bilinen bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Yine bu tanım ve teoremler daha sonraki bölümlerde de kullanılmıştır. Burada yer alan tanım ve teoremlere daha detaylı olarak [1-12] gibi kaynaklardan ulaşılabilirdir.

2. Bölümde verilen Hosoya sayılarına geçmeden önce bu bölümde Hosoya sayılarının oluşumunda etkili olan Fibonacci ve Lucas sayılarına dair bir takım bilgiler verelim.

Leonardo Fibonacci, orta çağın en yetenekli matematikçileri arasında kabul edilen İtalyan bir matematikçidir. Fibonacci 1202 yılında "Liber Abaci" (Abaküs Kitabı) adlı matematiksel hesaplama yöntemleri kitabıyla tanınmaktadır. Fibonacci bu kitabının ikinci baskısında ünlü tavşan problemine yer vermiştir. Daha sonraları "Fibonacci Sayıları" olarak adlandırılacak olan bu sayıları oluşturan problem ise aşağıdaki gibidir [1].

Tavşan Problemi: "Bir çift tavşan ile başlanmak üzere, her ay yeni bir çift tavşan dünyaya gelir, yeni doğan çift bir ayda yetişkin hale gelerek ikinci ayda yeni bir çift tavşan dünyaya getirir, bu döngü 1 yıl boyunca devam eder ve bu süreçte hiç tavşan ölmezse yıl sonunda kaç çift tavşana sahip olunur?".

Eğer problemdeki veriler dikkate alınıp çözüldüğünde oluşan sayı dizisi;

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144\ldots$$

şeklindedir. Burada tavşan çiftleri sayısının bir yıl içerisindeki değişimi incelenirse ilk iki terimden sonraki her bir terimin, kendisinden önceki ardışık iki terimin toplamı olduğu görülür. Böylelikle her sayı kendinden önce gelen iki sayının toplamıdır. Fibonacci sayısı dizilişi sadece bu kadarla sınırlı kalmayıp devam edilerek sonsuz terim oluşturulur. Aynı zamanda bu sonsuz sayı dizilişinin n.terimi ise F_n olarak gösterilir.

Birçok matematikçi Fibonacci sayıları üzerine çalışmalar yapmıştır. Bunlardan İtalyan matematikçi Giovanni D. Cassini (1625-1712) kendi adıyla anılan özdeşliği bulmuştur. Daha sonra bu özdeşliğin daha genel biçimi Eugene Catalan (1814-1894) tarafından verilmiştir [1,6].

Fibonacci sayılarıyla ilgili birçok özdeşliği bulmamızı sağlayan Binet formüllerini, Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısını kullanarak ilk olarak De Moivre (1718) ispatlamıştır. Jacques-Philippe-Marie Binet (1786-1856) ise bu özdeşliklerin daha kolay bir şekilde bulunmasına yardımcı olarak ispatlamıştır. Binet formüllerini kullanmanın en önemli bize kattığı kolaylık, Fibonacci sayılarını her terimi kendinden önceki iki terimin toplamı olarak yazarak istediğimiz n. Fibonacci sayısını bulmak yerine, indirgeme bağıntısıyla direkt olarak hesaplamamızı sağlamasıdır [1, 2].

İlerleyen süreçte Fibonacci sayılarına benzer şekilde farklı başlangıç koşulları altında kendisinden önceki iki terimin toplamı şeklinde yazılan sayılar olarak Lucas sayıları, Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları gibi pek çok sayı dizileri de tanımlanmıştır [1].

Fibonacci ve Lucas sayılarının arasındaki özdeşliklerin ispatında pek çok yöntem kullanılmıştır. Matrisler kullanılarak Demirtürk [3] tarafından Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki özellikler, Şiar ve Keskin [4] ise genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bazı özdeşlikleri bulmuşlardır. C. A. Church ve Bicknell ise üstel fonksiyonları kullanarak Fibonacci ve Lucas sayıları arasında toplamsal eşitlikleri bulmuştur [5].

1.1 Tanım: Her $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına ve $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan (F_n) dizisine Fibonacci dizisi denir. Burada F_n sayısına n. Fibonacci sayısı denir [1].

1.2 Tanım: Eğer bir dizide ilk birkaç terim verilir ve diğer terimler de kendilerinden önceki terimlerin belli bir fonksiyonu olarak ifade edilirse, bu diziye bir indirgeme dizisi denir [1].

Fibonacci dizisi de bir indirgeme dizidir. Fibonacci sayılarının çifti ne kadar büyükse, sayılar kendi aralarında oranlandığında bu sayıların giderek 1,618033988749895… sayısına yaklaştığı görülür[1]. Bu özelliğinden dolayı Fibonacci Sayıları doğada, canlılara ait bir çok oluşumda, mimaride ve benzeri gibi birçok alanda karşımıza çıkan ve böylece saylar teorisi alanında popülaritesi oldukça yüksektir.

Şimdi tezimizin ileriki bölümlerinde kullanacağımız Fibonacci sayıları ile de önemli bağlantıları olan Lucas sayılarını ve bu sayılara ait bir takım özellikleri verelim.

1.3 Tanım: Her $n \geq 3$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına ve $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ başlangıç koşullarına sahip olan (L_n) dizisine Lucas dizisi ve L_n sayılarınada n. Lucas sayıları denir. Bu sayılar François Edouard Anatole Lucas tarafından 1878 tarihinde tanımlanmıştır [1].

1.4 Tanım: $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $L_n = \alpha^n + \beta^n$ biçimindeki gösterime (F_n) ve (L_n) dizilerinin Binet formülü denir. Bu formüller De Moivre tarafından 1718'de, daha sonra da Jacques-Philippe-Marie Binet tarafından 1843 yılında ispatlanmıştır [1, 2].

Binet formülü yardımıyla $\sqrt{5}\alpha^n = \alpha L_n + L_{n-1}$, $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$, $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$, $-\sqrt{5}\beta^n = \beta L_n + L_{n-1}$ özdeşliklerinin tümevarımla sağlandığı kolaylıkla görülür [1,2]. Şimdi Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bilinen bazı özdeşlikleri ifade ve ispat edelim.

1.5 Teorem : (Cassini Özdeşliği) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ dir [1].

İspat: Binet formülünde , $\alpha\beta = -1$ ve $F_1 = 1$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1}}{5}\right) - \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n}{5}\right) \\
&= \frac{-\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2\alpha^n\beta^n}{5} \\
&= -(\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= -(\alpha\beta)^{n-1}(F_1)^2 \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

bulunur.

Lucas sayıları için Cassini özdeşliğine benzer özdeşlik de aşağıdaki gibidir.

1.6 Teorem : $L_{n-1}L_{n+1}-L_n^2=5(-1)^{n-1}$dir [1].

İspat: Binet formülünde , $\alpha\beta=-1$ ve $F_1=1$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
L_{n-1}L_{n+1}-L_n^2 &= (\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-(\alpha^n+\beta^n)^2 \\
&= (\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^{n-1})-(\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2\alpha^n\beta^n) \\
&= \alpha^{n+1}\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-2\alpha^n\beta^n \\
&= (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta) \\
&= (\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\right)^2 5 = 5(\alpha\beta)^{n-1}(F_1)^2 = 5(-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

bulunur.

1.7 Teorem:

$$
\sum_{i=0}^{n} F_{mi+r} = \frac{F_{mn+m+r}-(-1)^m F_{mn+r}-(-1)^r F_{m-r}-F_r}{L_m-(-1)^m-1}
$$

dir [1].

İspat: Binet formülü ve geometrik dizi toplamı kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} F_{mi+r} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^{mi+r}-\beta^{mi+r}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n}(\alpha^m)^i-\frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n}(\beta^m)^i \\
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\left[\frac{(\alpha^m)^{n+1}-1}{\alpha^m-1}\right]-\frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\left[\frac{(\beta^m)^{n+1}-1}{\beta^m-1}\right]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^{mn+m+r}-\alpha^{r}}{\alpha^{m}-1}\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\beta^{mn+m+r}-\beta^{r}}{\beta^{m}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(\alpha^{mn+m+r}-\alpha^{r})(\beta^{m}-1)-(\alpha^{m}-1)(\beta^{mn+m+r}-\beta^{r})}{(\alpha^{m}-1)(\beta^{m}-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{mn+m+r}\beta^{m}-\alpha^{r}\beta^{m}-\alpha^{mn+m+r}+\alpha^{r}}{\alpha^{m}\beta^{m}-\beta^{m}-\alpha^{m}+1}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{m}\beta^{mn+m+r}-\beta^{mn+m+r}-\alpha^{m}\beta^{r}+\beta^{r}}{\alpha^{m}\beta^{m}-\beta^{m}-\alpha^{m}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(\alpha\beta)^{m}(\alpha^{mn+r}-\beta^{mn+r})-(\alpha^{mn+m+r}-\beta^{mn+m+r})}{(\alpha\beta)^{m}-(\alpha^{m}+\beta^{m})+1}\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(\alpha\beta)^{r}(\alpha^{m-r}-\beta^{m-r})+(\alpha^{r}-\beta^{r})}{(\alpha\beta)^{m}-(\alpha^{m}+\beta^{m})+1}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{m}F_{mn+r}-F_{mn+m+r}+(-1)^{r}F_{m-r}+F_{r}}{(-1)^{m}-L_{m}+1}$$

$$=\frac{F_{mn+m+r}-(-1)^{m}F_{mn+r}-(-1)^{r}F_{m-r}-F_{r}}{L_{m}-(-1)^{m}-1}$$

bulunur.

1.8 Teorem:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{m}^{i}F_{m-1}^{n-i}F_{i+r}=F_{mn+r}$$

dir [1].

İspat: Binom açılımı ve Binet formülü kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{m}^{i}F_{m-1}^{n-i}F_{i+r}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{m}^{i}F_{m-1}^{n-i}\left(\frac{\alpha^{i+r}-\beta^{i+r}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{\alpha^{r}}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{m}^{i}F_{m-1}^{n-i}\alpha^{i}-\frac{\beta^{r}}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{m}^{i}F_{m-1}^{n-i}\beta^{i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}(F_m\alpha + F_{m-1})^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}(F_m\beta + F_{m-1})^n \\
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}(\alpha^m)^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}(\beta^m)^n \\
&= \frac{\alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r}}{\sqrt{5}} \\
&= F_{mn+r}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

1.9 Teorem:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+r}x^n = \frac{F_r + (-1)^r F_{m-r}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2}
$$

dir [11].

İspat: Binet formülü kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+r}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r}}{\sqrt{5}}\right)x^n \\
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{mn}x^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{mn}x^n \\
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^m x)^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta^m x)^n \\
&= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha^m x}\right) - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\beta^m x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r}{1-\alpha^m x} - \frac{\beta^r}{1-\beta^m x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r(1-\beta^m x) - \beta^r(1-\alpha^m x)}{(1-\alpha^m x)(1-\beta^m x)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r + (\alpha^m\beta^r - \alpha^r\beta^m)x)}{1-(\alpha^m + \beta^m)x + (\alpha\beta)^m x^2)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r + (\alpha\beta)^r(\alpha^{m-r} - \beta^{m-r})x)}{1-(\alpha^m + \beta^m)x + (\alpha\beta)^m x^2)}\right) \\
&= \frac{F_r + (-1)^r F_{m-r}x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yukarıda da görüldüğü gibi Fibonacci ve Lucas sayılarının kullanım alanları oldukça geniştir. Şimdi bu sayıların kullanım alanlarından biri olan Hosoya üçgenini ve Hosaya sayılarını verebiliriz.

2. HOSOYA ÜÇGENİ VE HOSOYA SAYILARI

Şimdi Hosoya üçgeninin oluşturulmasında kullanılan ve literatürde çokça yer kaplayan Pascal üçgenini verelim.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \qquad 1 \\
1 \qquad 2 \qquad 1 \\
1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\
1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\
1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\
1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1 \\
1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1 \\
1 \qquad 8 \qquad 28 \qquad 56 \qquad 70 \qquad 56 \qquad 28 \qquad 8 \qquad 1 \\
1 \qquad 9 \qquad 36 \qquad 84 \qquad 126 \qquad 126 \qquad 84 \qquad 36 \qquad 9 \qquad 1 \\
\iddots \qquad \iddots \qquad \iddots \qquad \iddots \qquad \iddots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots
\end{array}$$

Şekil 2.1: Pascal üçgeni.

Dikkat edilirse Pascal üçgeninin sağ ve sol kenarları 1, 1, 1, 1, … şeklinde sayı dizisinden oluşmuştur. Şimdi bu üçgenin sağında ve solunda yer alan bu sayı dizisini 1,1,2,3,… şeklinde Fibonacci dizisi ile değiştirelim. Dolayısıyla karşımıza Hosoya tarafından 1976'da ortaya konmuş olan Hosoya üçgeni dediğimiz Şekil 2.2 de verilen üçgen çıkar [13]. Ayrıca bu üçgen Fibonacci üçgeni olarak da bilinir.

Şekil 2.2 de verilen Hosoya üçgenini düşünelim. Burada dikkat edilirse Hosoya üçgeni ortasından geçen düşey doğruya göre simetrik olup, üçgenin iç kısmında yer alan her sayı, üzerinde bulunduğu köşegende kendinden önce gelen iki sayının toplamı şeklindedir. Bu durumun bir örneğini Şekil 2.3 de 15 = 5 + 10 = 9 + 6 eşitliğini kullanarak verebiliriz.

1

1 1

2 1 2

3 2 2 3

5 3 4 3 5

8 5 6 6 5 8

13 8 10 9 10 8 13

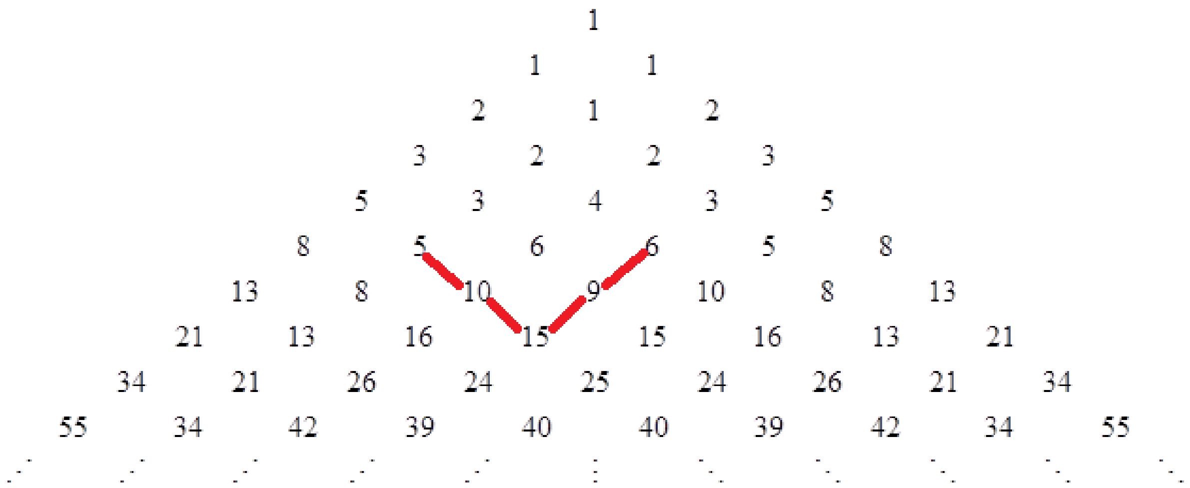
21 13 16 15 15 16 13 21

34 21 26 24 25 24 26 21 34

55 34 42 39 40 40 39 42 34 55

$\cdots \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots$

Şekil 2.2: Hosoya üçgeni.



Şekil 2.3: Hosoya üçgeninde zincir oluşturma.

[1,13-17] de yazarlar hosoya üçgenine ait birçok özdeşlik, teorem, ispat ve denklemlere dair bir takım önemli sonuçlara ulaşmıştır. Ayrıca [1,18-20] de yazarlar Hosoya üçgeninde yer alan sayılardan eşkenar dörtgenler oluşturup Hosoya Polinomlarını belirlemiş ve Volterra-Fredholm İntegral Denklemlerinin Hosoya Polinomlarıyla çözümüne dair sonuçlar ortaya koymuşlardır.

Şimdi Şekil 2.2 de verilen Hosoya üçgenini düşünelim. Bu üçgende yer alan bütün sayıları her bir *m*. Satır *n*. Sütun elemanının gösterimi $H_{m,n}$ şeklinde ifade edelim. $H_{m,n}$ şeklinde ifade edilen bu sayılara Hosoya sayıları denir. Bu sayılar için $m \geq n \geq 0$ dır. Burada $H_{0,0} = H_{1,0} = H_{1,1} = H_{2,1} = 1$ olup, ayrıca $m \geq 2$ için,

$$\begin{aligned} H_{m,n} &= H_{m-1,n} + H_{m-2,n} \\ &= H_{m-1,n-1} + H_{m-2,n-2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

eşitlikleri vardır [1]. Böylece Şekil 2.2 aşağıda verilen Hosoya sayılarının indislenerek numaralandığı Şekil 2.4 de verilen üçgene ulaşılır.

$$\begin{array}{c}
H_{0,0} \\
H_{1,0} \quad H_{1,1} \\
H_{2,0} \quad H_{2,1} \quad H_{2,2} \\
H_{3,0} \quad H_{3,1} \quad H_{3,2} \quad H_{3,3} \\
H_{4,0} \quad H_{4,1} \quad H_{4,2} \quad H_{4,3} \quad H_{4,4} \\
H_{5,0} \quad H_{5,1} \quad H_{5,2} \quad H_{5,3} \quad H_{5,4} \quad H_{5,5} \\
H_{6,0} \quad H_{6,1} \quad H_{6,2} \quad H_{6,3} \quad H_{6,4} \quad H_{6,5} \quad H_{6,6} \\
H_{7,0} \quad H_{7,1} \quad H_{7,2} \quad H_{7,3} \quad H_{7,4} \quad H_{7,5} \quad H_{7,6} \quad H_{7,7} \\
H_{8,0} \quad H_{8,1} \quad H_{8,2} \quad H_{8,3} \quad H_{8,4} \quad H_{8,5} \quad H_{8,6} \quad H_{8,7} \quad H_{8,8} \\
H_{9,0} \quad H_{9,1} \quad H_{9,2} \quad H_{9,3} \quad H_{9,4} \quad H_{9,5} \quad H_{9,6} \quad H_{9,7} \quad H_{9,8} \quad H_{9,9} \\
\iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots
\end{array}$$

Şekil 2.4: İndisli hosoya sayıları.

2.1 Hosoya, Fibonocci ve Lucas Sayıları Arasındaki Bağıntılar

Bu bölümde Hosoya,Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Bunun için önce Şekil 2.4 ü düşünelim. Bu şeklin Hosoya üçgenini oluşturan fibonacci sayılarının dizilişte iç iç geçmesi sonucunda oluşan üçgensel bir şekil olduğunu biliyoruz. Şimdi bu şekilden elde edilen çıkarımları ve ilişkileri verelim. Bunun için öncelikle (2.1) de verilen özellikleri sağlayan $H_{m,n}$ Hosoya sayılarını, her $n \geq 3$ için, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ başlangıç koşullu $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına sahip olan F_n Fibonacci dizisini ve her $n \geq 3$ için

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına sahip $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ başlangıç koşulllu L_n Lucas dizisini düşünelim. Aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

2.1.1 Teorem: $H_{m,n} = F_{n+1}F_{m-n+1}$ dir [1].

İspat: Şekil 2.4 de verilen Hosoya üçgenini düşünelim. Buradan görülür ki

$$H_{n,0} = H_{n,n} = F_{n+1}, \text{ ve } H_{n,1} = H_{n,n-1} = F_n$$

şeklindedir. (2.1) de verilen $H_{m,n} = H_{m-1,n} + H_{m-2,n}$ denklemine ardışık uygulamalar yaptığımızda

$$\begin{aligned} H_{m,n} &= H_{m-1,n} + H_{m-2,n} \\ &= (H_{m-2,n} + H_{m-3,n}) + H_{m-2,n} = 2H_{m-2,n} + H_{m-3,n} \\ &= 2(H_{m-3,n} + H_{m-4,n}) + H_{m-3,n} = 3H_{m-3,n} + 2H_{m-4,n} \\ &\vdots \\ &= F_{k+1}H_{m-k,n} + F_k H_{m-k-1,n} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k = n - j - 1$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} H_{m,n} &= F_{m-n}H_{n+1,n} + F_{m-n-1} H_{n,n} \\ &= F_{m-n}F_{n+1} + F_{m-n-1}F_{n+1} \\ &= F_{n+1}(F_{m-n} + F_{m-n-1}) \\ &= F_{n+1}F_{m-n+1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

eşitliğine ulaşırız.

2.1.2 Sonuç: $H_{2m,m} = F_{m+1}^2$ dir [1].

Teorem 2.1.1 yardımıyla Hosoya üçgeninin Fibonacci dizisinden kendi kendine çoğaltılmasıyla oluşturulduğu ve böylece Hosoya üçgeninin 2 boyutlu Fibonacci dizisi olduğu kolaylıkla görülür.

2.1.3 Sonuç: Hosoya Üçgeni Şekil 2.2 de de görüldüğü gibi her satırın ortasına göre simetrik olduğundan

$$H_{m,n} = H_{m,m-n}$$

dir [1,13].

2.1.4 Sonuç: $H_{m,m/2} = \left(F_{m/2}\right)^2$ dir [1,13].

Şimdi Hosoya üçgeni için Binet formülünü verebiliriz.

2.1.5 Teorem: $H_{m,n}$ hosoya , F_n fibonacci sayıları ve L_n lucas sayıları olmak üzere

$$H_{m,n} = (L_{m+2} + (-1)^{n+2} L_{m-2n}) / 5 \qquad (2.3)$$

şeklindedir [1].

İspat: $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülünün sırasıyla

$$F_n = (\alpha^n - \beta^n) / \sqrt{5} \text{ ve } L_n = \alpha^n + \beta^n$$

olduğunu biliyoruz**.** Başlangıç koşulları sağlanacak şekilde ilk iki Hosoya üçgeni satırı alınmadan (2.2) denkleminden yararlanarak,

$$H_{m,n} = F_{m-n+1}F_{n+1}$$

$$=\left[(\alpha^{m-n+1}-\beta^{m-n+1})/\sqrt{5}\right].\left[(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})/\sqrt{5}\right]$$

$$=\left[(\alpha^{m+2}-\beta^{m-n+1}\alpha^{n+1}-\alpha^{m-n+1}\beta^{n+1}+\beta^{m+2})/5\right]$$

$$=\left[(\alpha^{m+2}+\beta^{m+2}-(\alpha\beta)^{n+1}.(\beta^{m-2n}+\alpha^{m-2n})\right]/5$$

$$=\left[L_{m+2}-(-1)^{n+1}L_{m-2n}\right]/5=\left[L_{m+2}+(-1)^{n+2}L_{m-2n}\right]/5$$

elde edilir

2.1.6 Örnek: (2.3) de $m=7$ ve $n=3$ aldığımızda

$$H_{7,3}=\frac{L_9+(-1)^5L_1}{5}=\frac{76-1}{5}=15$$

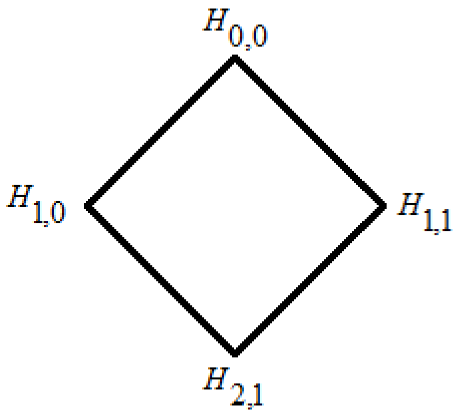
elde edilir.

3. HOSOYA ÜÇGENİNDEN ELDE EDİLEN EŞKENAR DÖRTGENLER

Bu bölümde amacımız Hosoya üçgeninde yer alan sayılar ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi verip Hosoya üçgeninden elde edilen eşkenar dörtgenleri ortaya koymaktır. Bu konuyla ilgili çalışmalara Thomas KOSHY tarafından yazılan "Fibonacci and Lucas Numbers With Applications" adlı kitaptan ulaşılabilir [1].

3.1 Eşkenar Dörtgenler

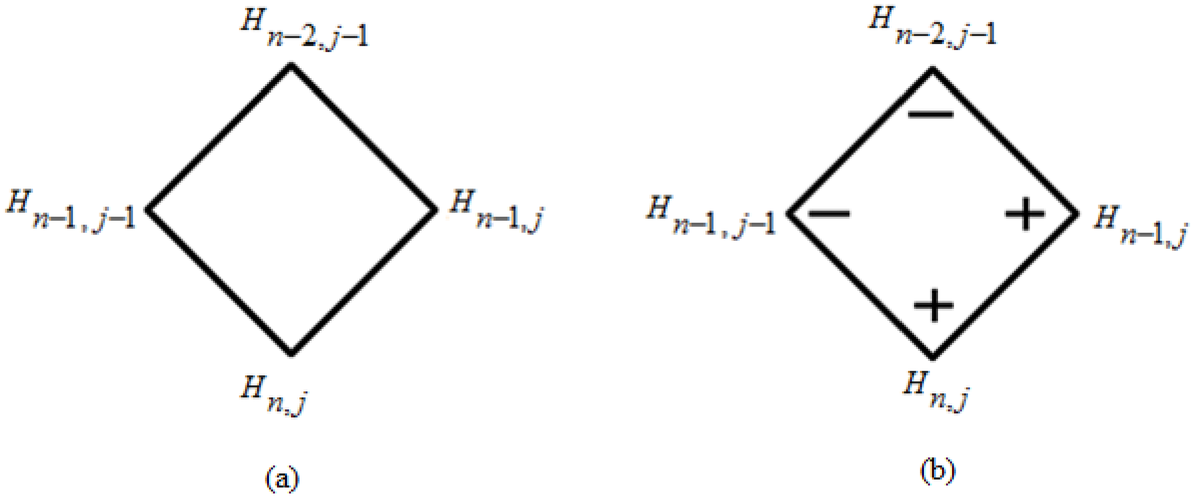
Hosoya üçgeninde $H_{0,0} = H_{1,0} = H_{1,1} = H_{2,1} = 1$ olduğunu biliyoruz. Burada $H_{0,0}$, $H_{1,0}$, $H_{1,1}$ ve $H_{2,1}$ dörtlüsü için



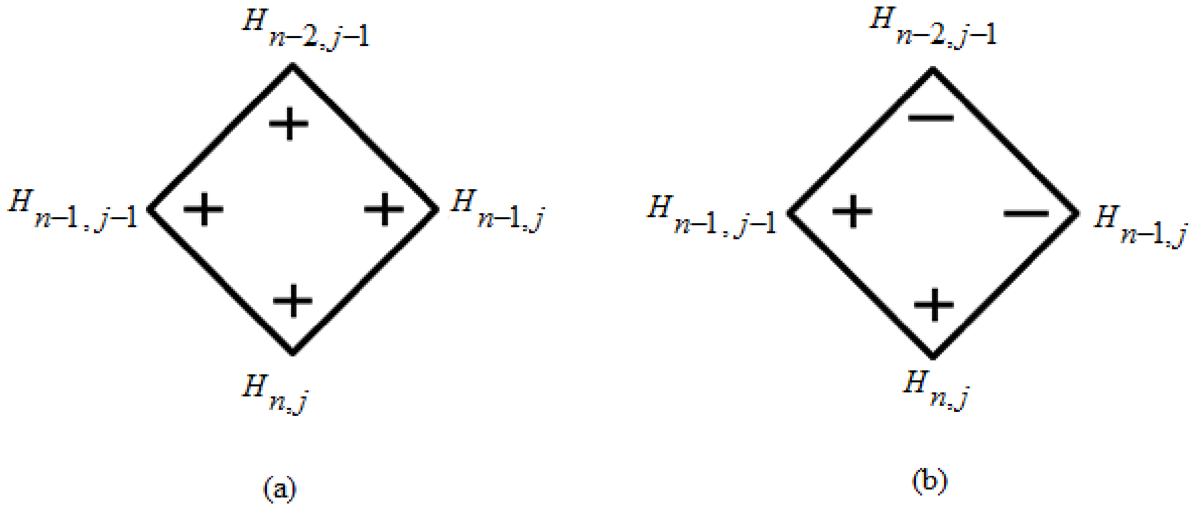
Şekil 3.1: Hosoya üçgenindeki eşkenar dörtgen örneği.

şeklinde bir eşkenar dörtgen oluşturabiliriz. Şimdi Şekil 3.1 de verilen örneği genelleyebiliriz.

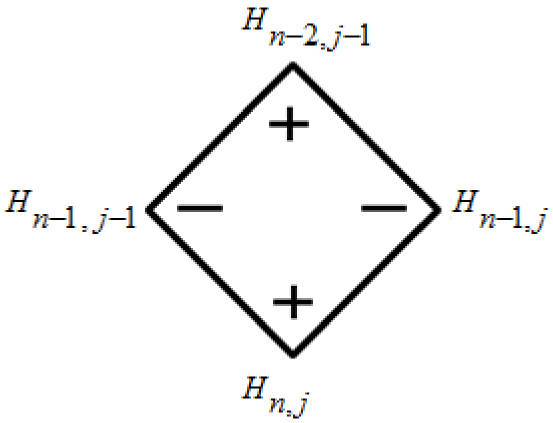
Hosoya üçgeninde (Şekil 2.4) yer alan $H_{n,j}$, $H_{n-1,j-1}$, $H_{n-2,j-1}$ ve $H_{n-1,j}$ sayıları için



Şekil 3.2: Hosoya üçgenindeki eşkenar dörtgen formu 1.



Şekil 3.3: Hosoya üçgenindeki eşkenar dörtgen formu 2.



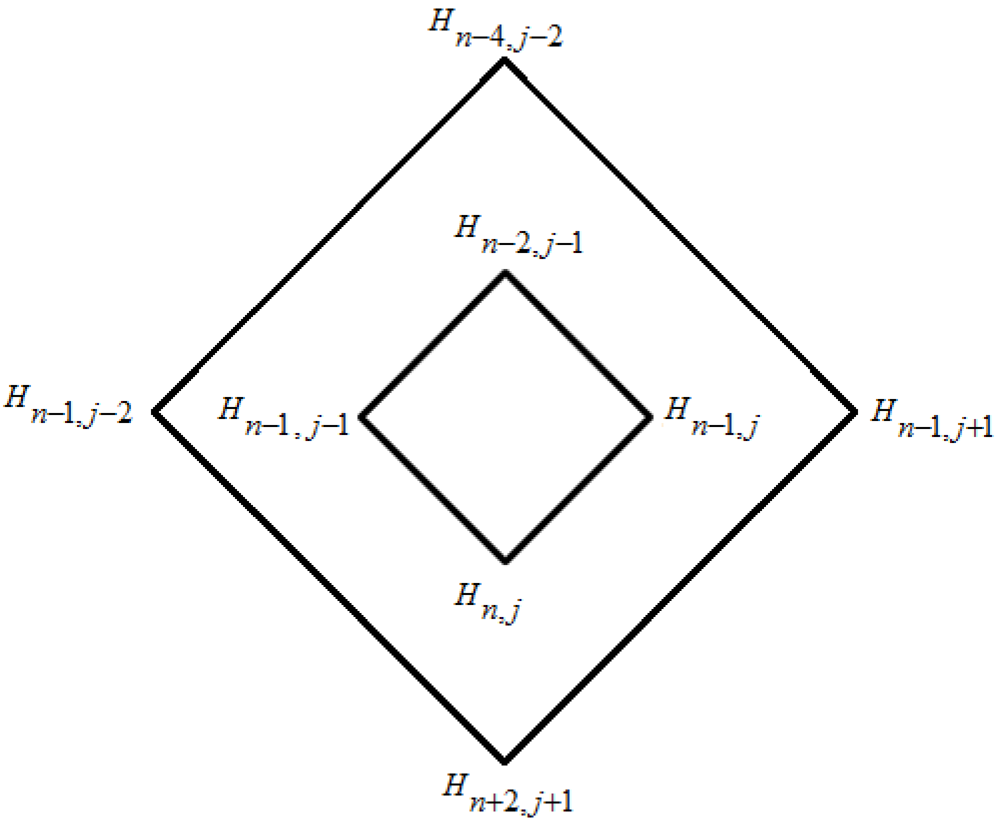
Şekil 3.4: Hosoya üçgenindeki eşkenar dörtgen formu 3.

eşkenar dörtgenlerini oluşturabiliriz. Bu şekiller çizilirken dikkat edilmesi gereken nokta oluşturulması istenen eşkenar dörtgenin köşeleri için seçilen Hosoya sayıları birbirine en yakın olan komşu dörtlülerden oluşmasıdır. Amacımız burada bu eşkenar dörtgenler yardımıyla bu eşkenar dörtgenleri içine alan ve Hosoya sayılarını köşe elemanı olarak kabul eden daha büyük eşkenar dörtgenler oluşturmaktır. Örneğin, köşe elemanları $H_{4,2}$, $H_{5,2}$, $H_{5,3}$ve $H_{6,3}$ olan eşkenar üçgenini ve bu üçgeni içine alan $H_{2,1}$, $H_{5,1}$, $H_{8,4}$ ve $H_{5,4}$ eşkenar dörtgenini düşünelim. Burada dikkat edilirse

$$H_{8,4}=H_{4,2}+H_{5,2}+H_{5,3}+H_{6,3},\ H_{2,1}=H_{4,2}+H_{6,3}-H_{5,2}-H_{5,3},$$
$$H_{5,1}=H_{5,3}+H_{6,3}-H_{4,2}-H_{5,2}\ ,\ H_{5,4}=H_{5,2}+H_{6,3}-H_{4,2}-H_{5,3}$$

şeklindedir.

Böylece Şekil 3.2-Şekil 3.4 de verilen eşkenar dörtgenleri içine alan daha büyük eşkenar dörtgenimiz Şekil 3.5 de verildiği gibi elde edilir.



Şekil 3.5: Hosoya üçgenindeki iç içe geçen eşkenar dörtgen formu genel gösterimi.

Böylece bu dörtgenden hareketle aşağıdaki formüllere sahip oluruz.

3.1.1 Teorem: Şekil 3.5 de verilen eşkenar dörtgenleri düşünelim. Bu durumda

$$H_{n-1,j-2} = H_{n,j} + H_{n-1,j} - H_{n-1,j-1} - H_{n-2,j-1}$$

$$H_{n+2,j+1} = H_{n,j} + H_{n-1,j} + H_{n-1,j-1} + H_{n-2,j-1}$$

$$H_{n-1,j+1} = H_{n-1,j-1} + H_{n,j} - H_{n-2,j-1} - H_{n-1,j}$$

$$H_{n-4,j-2} = H_{n-2,j-1} + H_{n,j} - H_{n-1,j-1} - H_{n-1,j}$$

denklemlerine sahip oluruz [1].

İspat: Biliyoruz ki Hosoya sayıları arasında

$$H_{n,j} = H_{n-1,j} + H_{n-2,j} = H_{n-1,j-1} + H_{n-2,j-2}$$

bağıntıları vardır. Böylece

$$\begin{aligned} H_{n-1,j-2} + H_{n,j-1} &= H_{n+1,j} \\ H_{n-1,j-2} &= H_{n+1,j} - H_{n,j-1} \\ &= H_{n,j} + H_{n-1,j} - H_{n-1,j-1} - H_{n-2,j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{n+2,j+1} &= H_{n+1,j+1} + H_{n,j+1} \\ &= H_{n,j} + H_{n-1,j-1} + H_{n-1,j} + H_{n-2,j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{n-1,j+1} + H_{n,j+1} &= H_{n+1,j+1} \\ H_{n-1,j+1} &= H_{n+1,j+1} - H_{n,j+1} \\ &= H_{n-1,j-1} + H_{n,j} - H_{n-2,j-1} - H_{n-1,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{n-4,j-2} &= H_{n-2,j-2} - H_{n-3,j-2} \\ &= H_{n-2,j-1} + H_{n-1,j-1} + H_{n-2,j-2} - H_{n-1,j-1} - H_{n-2,j-1} - H_{n-3,j-2} \\ &= H_{n-2,j-1} + H_{n,j} - H_{n-1,j-1} - H_{n-1,j} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Şimdi Şekil 3.2 (a) ve 3.1.1 Teoremde yer alan

$$H_{n-1,j-2} = H_{n,j} + H_{n-1,j} - H_{n-1,j-1} - H_{n-2,j-1}$$

eşitliğini düşünelim.

Bu eşitliği Şekil 3.2 (a) da köşelere eşitlikte yer alan +,+,-,- işaretlemelerinden hareketle Şekil 3.2 (b) yi elde ederiz. Benzer şekilde $H_{n+2,j+1} = H_{n,j} + H_{n-1,j} + H_{n-1,j-1} + H_{n-2,j-1}$ eşitliği Şekil 3.2 (a) da köşelere eşitlikte yer alan +,+,+,+ işaretlemeleri yapılırsa Şekil 3.3 (a) yı elde ederiz. $H_{n-1,j+1} = H_{n-1,j-1} + H_{n,j} - H_{n-2,j-1} - H_{n-1,j}$ eşitliği için Şekil 3.2 (a) da köşelere eşitlikte yer alan +,+,-,- işaretlemeleri yapılırsa Şekil 3.3 (b) yi elde ederiz. Son olarak $H_{n-4,j-2} = H_{n-2,j-1} + H_{n,j} - H_{n-1,j-1} - H_{n-1,j}$ eşitliği için Şekil 3.2 (a) da köşelere eşitlikte yer alan +,+,-,- işaretlemeleri yapılırsa Şekil 3.4 elde edilir.

3.1.2 Sonuç: $H_{n,j}.H_{n-2,j-1} = H_{n-1,j-1}.H_{n-1,j}$ dir [1].

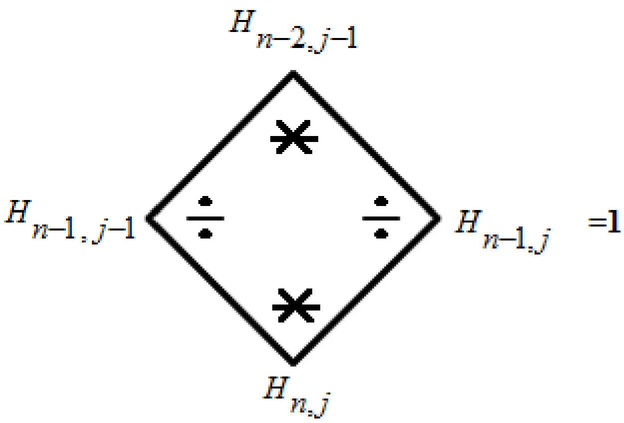
İspat: $H_{n,j} = H_{n-1,j} + H_{n-2,j}$ denkleminin ardışık olarak tekrarlaması sonucunda $H_{n,j} = F_{j+1}F_{n-j+1}$ olduğu Teorem 2.1.1 de verilmiştir. Böylece

$$\begin{aligned} H_{n,j}.H_{n-2,j-1} &= F_{j+1}.F_{n-j+1}.F_{j}.F_{n-j-1} \\ &= F_{j}.F_{n-j+1}.F_{j+1}.F_{n-j-1} \\ &= H_{n-1,j-1}.H_{n-1,j} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

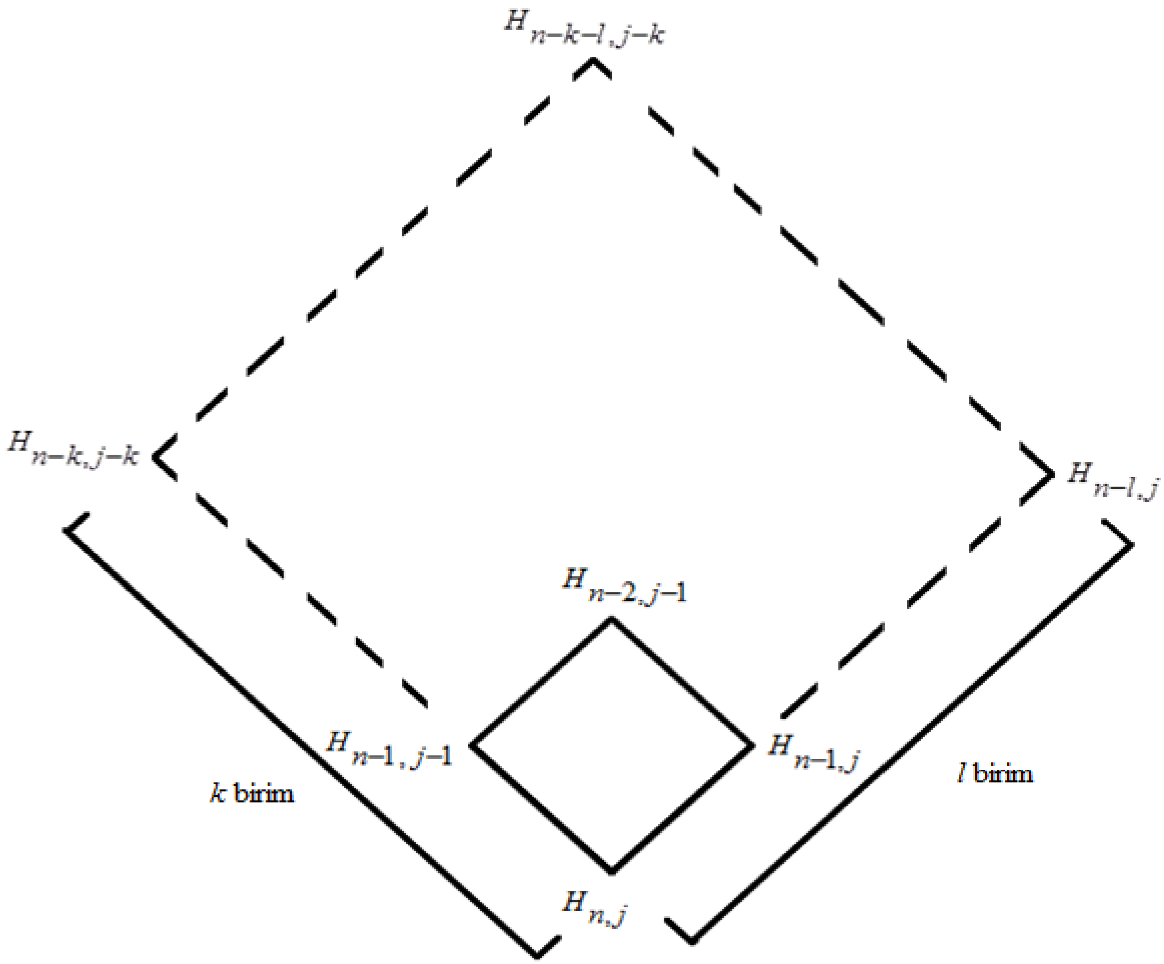
3.2 Ek Formüller

Sonuç 3.1.2 de verilen $H_{n,j}.H_{n-2,j-1} = H_{n-1,j-1}.H_{n-1,j}$ eşitliğinden $\dfrac{H_{n,j}.H_{n-2,j-1}}{H_{n-1,j-1}.H_{n-1,j}} = 1$ elde edilir. Buradan da Şekil 3.6 da verildiği gibi eşkenar dörtgen formu oluşur.



Şekil 3.6: Hosoya üçgenindeki eşkenar dörtgen formu 4.

Şekil 3.6 de verilen eşkenar dörtgeni alt ve üst köşelerinden sırasıyla *k* ve *l* birim kadar paralel kenar oluşturacak şekilde eklemeler yapalım. Böylece Şekil 3.7 elde edilir [1].



Şekil 3.7: Hosoya üçgenindeki eşkenar dörtgen formları üzerinde $H_{n,j}$ genel gösterimi.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.1 Teorem: $H_{n,j} \cdot H_{n-k-l,j-k} = H_{n-k,j-k} \cdot H_{n-l,j}$ dır [1].

İspat: 2.1.1 Teorem gereği $H_{n,j} = F_{j+1}F_{n-j+1}$ olduğundan aşağıdaki gibi

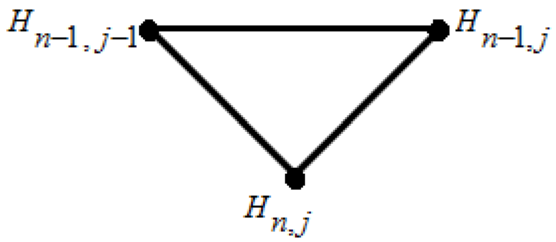
$$\begin{aligned} & H_{n,j} = F_{j+1}F_{n-j+1} \\ \Rightarrow & H_{n-k-l,j-k} = F_{j-k+1}F_{n-j-l+1} \\ \Rightarrow & H_{n-k,j-k} = F_{j-k+1}F_{n-j+1} \\ \Rightarrow & H_{n-l,j} = F_{j+1}F_{n-l-j+1} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşırız.

Hosoya sayılarının Fibonacci sayıları ile elde edilişini biliyoruz. Bu şekilde çarpımsal eşitlikler kurulduğunu aşağıdaki denklemden kolaylıkla görülür.

$F_{j+1}F_{n-j+1}.F_{j-k+1}F_{n-j-l+1} = F_{j-k+1}F_{n-j+1}.F_{j+1}F_{n-l-j+1}$ buradaki her bir hosoya sayısının açılımında $H_{n,j}.\, H_{n-k-l,j-k} = H_{n-k,j-k}.\, H_{n-l,j}$ eşitliğini verdiği görülür.

Şimdi Hosoya üçgeninde yer alan Şekil 3.8 da verilen üçgenleri düşünelim.



Şekil 3.8: Hosoya üçgenindeki üçgensel yapıların $H_{n,j}$ genel gösterimi.

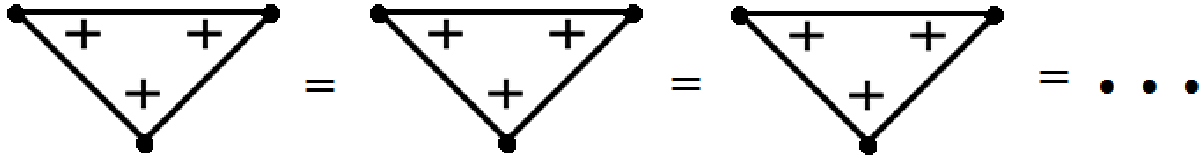
Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.2 Teorem: Her n için $H_{n,j} + H_{n-1,j} + H_{n-1,j-1} = F_{n+2}$ dır [1].

İspat: 2.1.1 Teoremden $H_{n,j} = F_{j+1}.F_{n-j+1}$ eşitliğinden

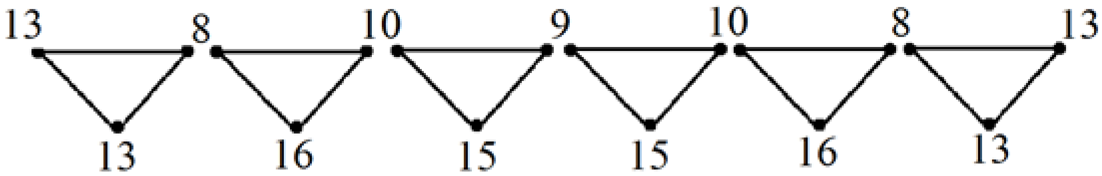
$$\begin{aligned}
H_{n,j} + H_{n-1,j} + H_{n-1,j-1} &= F_{j+1}.F_{n-j+1} + F_{j+1}.F_{n-j} + F_j.F_{n-j+1} \\
&= F_{j+1}.(F_{n-j+1} + F_{n-j}) + F_j.F_{n-j+1} \\
&= F_{j+1}.F_{n-j+2} + F_j.F_{n-j+1} \\
&= F_{n-j+2+j} \\
&= F_{n+2}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.



Şekil 3.9: Hosoya üçgenindeki üçgensel yapıların işaretli genel gösterimi ve eşitliği.

3.2.3 Örnek: n=6 için aşağıda verilen ve toplamları 34 sayısına eşit olan



Şekil 3.10: Hosoya üçgenindeki üçgensel yapıların 6.satır gösterimi.

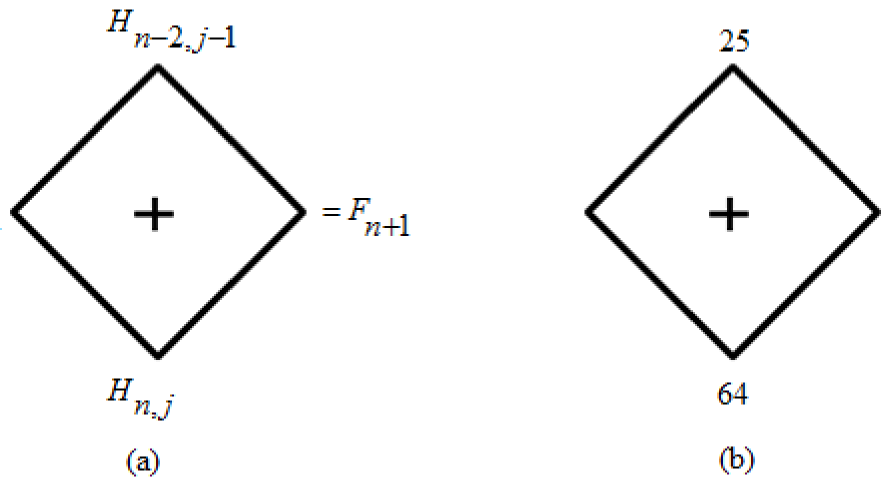
üçgenleri elde edilir. Burada üçgenler için sabit sayı gözlemlendiği gibi $F_9 = 34$ dır.

3.2.4 Sonuç: $H_{n,j} + H_{n-2,j-1} = F_{n+1}$ dır [1].

İspat: Tekrarlama bağıntısı olan $H_{n,j} = H_{n-1,j} + H_{n-2,j}$ denklemini kullanarak,

$$H_{n,j} + H_{n-2,j-1} = H_{n-1,j} + H_{n-2,j} + H_{n-2,j-1} = F_{n+1}$$

denklemini elde ederiz. Böylece herhangi iki dikey komşunun toplamı yatay bir kayma için sabittir. O sayı ise sihirli bir eşkenar dörtgendeki kuzey ve güney köşelerinin toplamı olan bir Fibonacci sayısıdır. Bu durum Şekil 3.11 de gösterdiği gibidir.



Şekil 3.11: Hosoya üçgeninde oluşan eşkenar dörtgen toplamı genel gösterimi ile temsili.

3.2.5 Örnek: Şekil 3.11(b)'deki eşkenar dörtgendeki kuzey ve güney köşelerinin toplamı $25+64=89=F_{11}$ ' dir.

3.2.6 Sonuç: $H_{n,j} + H_{n-6,j-3} = 2F_{n-1}$ dir [1].

İspat: Burada

$$\begin{aligned} H_{n,j} + H_{n-6,j-3} &= H_{n-1,j} + H_{n-2,j} + H_{n-6,j-3} \\ &= (H_{n-1,j} + H_{n-3,j-1}) + (H_{n-4,j-2} + H_{n-6,j-3}) \\ &= F_n + F_{n-3} \end{aligned}$$

ve $F_n + F_{n-3} = 2F_{n-1}$ den istenilen sonuca ulaşılır.

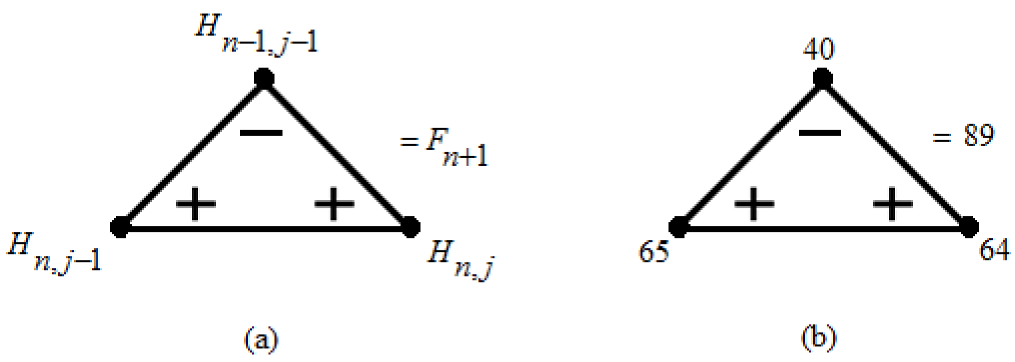
3.2.7 Örnek: $H_{10,4} + H_{4,1} = 65+3 = 68 = 2F_9$.

3.2.8 Sonuç: $H_{n,j} - H_{n-4,j-2} = F_n$ dir [1].

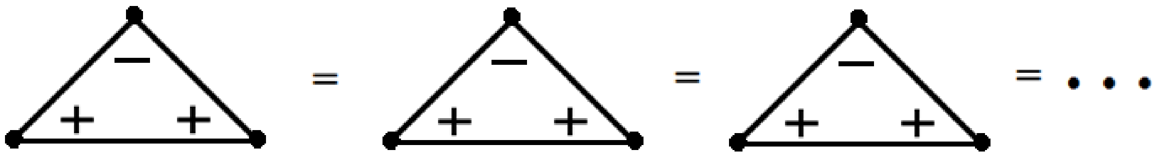
İspat: 3.2.4 Sonuç kısmında $H_{n,j} + H_{n-2,j-1} = F_{n+1}$ olduğunu biliyoruz. Tekrarlama bağıntısı olan $H_{n,j} = H_{n-1,j} + H_{n-2,j}$ denklemini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
H_{n,j} - H_{n-4,j-2} &= H_{n-1,j-1} + H_{n-2,j-2} - H_{n-4,j-2} \\
&= H_{n-1,j-1} + H_{n-3,j-2} + H_{n-4,j-2} - H_{n-4,j-2} \\
&= F_n
\end{aligned}
$$

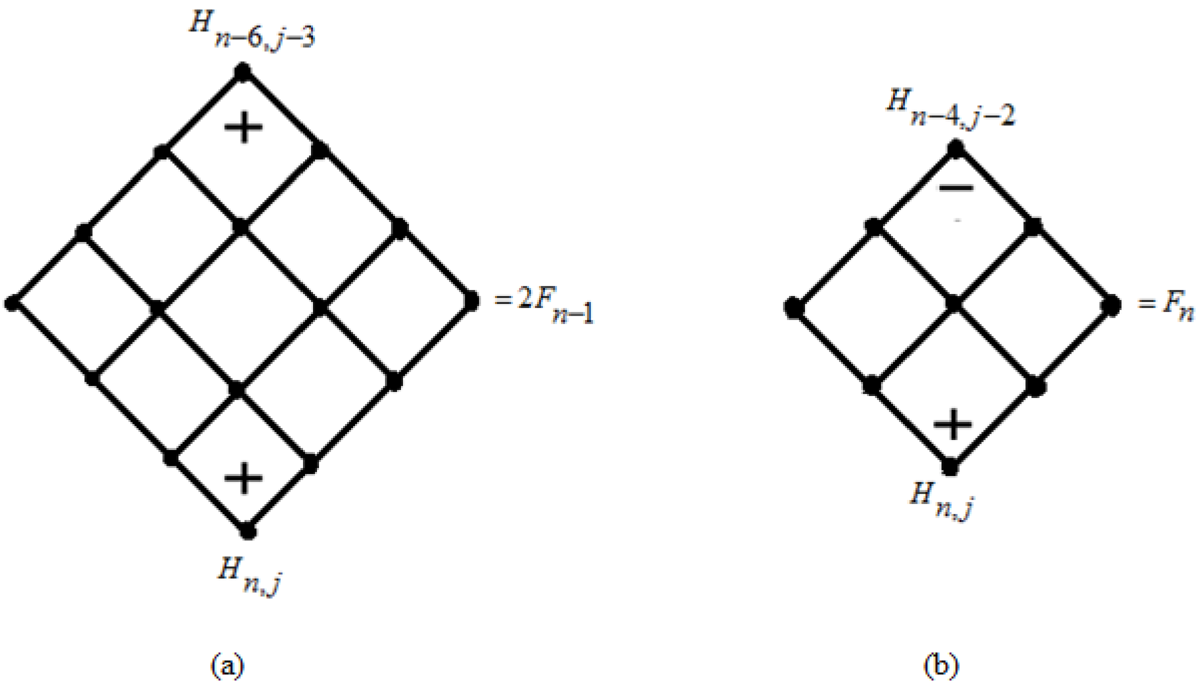
eşitliğine ulaşılır.



Şekil 3.12: Hosoya üçgeninde üçgensel yapıların genel gösterimi ve oluşturulan temsili.



Şekil 3.13: Hosoya üçgeninden elde edilen üçgensel yapıların işlemsel genel gösterimi.



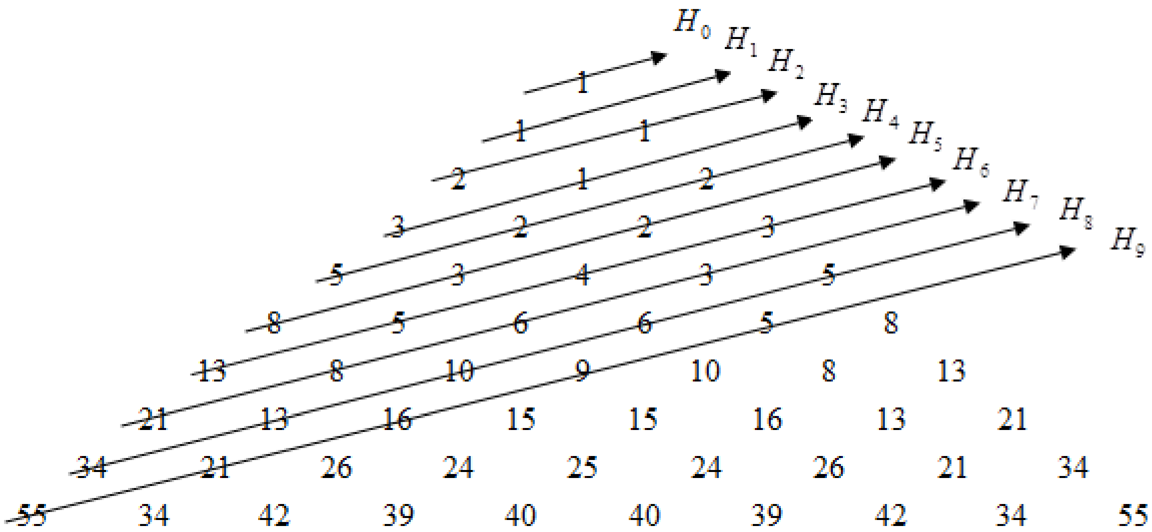
Şekil 3.14: Hosoya üçgeninden elde edilen eşkenar dörtgen genel gösterimi.

4. HOSOYA ÜÇGENİNDEN DİZİ ELDE ETME

Bu bölümde yer alan sonuçların benzerlerine [21] numaralı kaynaktan da ulaşılabilirdir. Bu bölümde yer alan sonuçların ispatı [21] de kullanılan yöntemlerden daha farklı yolar kullanılarak tarafımızdan yapılmıştır.

4.1 Hosoya Üçgeni Dizisi

Şekil 2.2 de verilen Hosoya üçgenini düşünelim. Bu üçgende Şekil 4.1 de verildiği gibi çapraz çizgiler çizelim. Burada amacımız bu çizgiler üzerinde olan sayıların toplamından bir dizi elde etmektir.



Şekil 4.1: Hosoya üçgeni toplamsal H_m genel oluşumları.

Şekil 4.1 i düşünelim. Bu şekilde yer alan çizgilerin üzerindeki sayıları topladığımızda toplamı sırasıyla 1, 1, 3, 4, 9, 13, 25, 38, 68, 106, 182, 288, 483… dizisini elde ederiz. Bu dizinin terimlerini H_m ile gösterelim. O halde

$$H_0 = 1,\ H_1 = 1,\ H_2 = 3,\ H_3 = 4,\ H_4 = 9,\ H_5 = 13,\ H_6 = 25,\ H_7 = 38,\ H_8 = 68,\ H_9 = 106, \cdots$$

şeklindedir.

Şimdi (2.1) de verilen özellikleri sağlayan $H_{m,n}$ Hosoya sayılarını ve her $n \geq 3$ için, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ başlangıç koşullu $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına sahip olan F_n Fibonacci dizisini düşünelim. Ayrıca Şekil 4.1 de verilen bu durumda $H_0 = 1, H_1 = 1, H_2 = 3, \cdots$ dizisini elde etmiş oluruz. Şimdi ifadesi [21] de yer alan fakat ispatı tarafımızdan farklı yöntemler kullanılarak yapılan aşağıdaki teorem ve sonuçları verebiliriz.

4.1.1 Teorem: Her $n \geq 1$ için $H_{2n} = H_{2n-1} + H_{2n-2} + F_{n+1}$ ve $H_{2n+1} = H_{2n} + H_{2n-1}$ dır.

İspat: Şekil 2.4 ve Şekil 4.1 i düşünelim. Dizimizin oluşum şeklinden dolayı Şekil 4.1 de verilen çizgileri Şekil 2.4 de çizdiğimizde

$$H_0 = H_{0,0},\ H_1 = H_{1,0},\ H_2 = H_{2,0} + H_{1,1},\ H_3 = H_{3,0} + H_{2,1}, H_4 = H_{4,0} + H_{3,1} + H_{2,2}, \cdots$$
$$H_{2n} = H_{2n,0} + H_{2n-1,1} + H_{2n-2,2} + \cdots + H_{n,n},\ H_{2n+1} = H_{2n+1,0} + H_{2n,1} + H_{2n-1,2} + \cdots + H_{n+1,n}, \cdots$$

eşitliklerine ulaşırız. Burada

$$H_{n,j} = H_{n-1,j} + H_{n-2,j} \text{ ve } H_{n,n} = F_{n+1} = H_{n+1,n}$$

yi kullandığımızda

$$\begin{aligned} H_{2n-1} + H_{2n-2} + F_{n+1} &= H_{2n-1} + H_{2n-2} + H_{n,n} \\ &= H_{2n-1,0} + H_{2n-2,1} + H_{2n-3,2} + \cdots + H_{n,n-1} + H_{2n-2,0} + H_{2n-3,1} + H_{2n-4,2} + \cdots + H_{n-1,n-1} + H_{n,n} \\ &= H_{2n,0} + H_{2n-1,1} + H_{2n-2,2} + \cdots + H_{n,n} \\ &= H_{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{2n} + H_{2n-1} &= H_{2n,0} + H_{2n-1,1} + H_{2n-2,2} + \cdots + H_{n+1,n-1} + H_{n,n} + H_{2n-1,0} + H_{2n-2,1} + H_{2n-3,2} + \cdots + H_{n,n-1} \\ &= H_{2n+1,0} + H_{2n,1} + H_{2n-1,2} + \cdots + H_{n+2,n-1} + H_{n,n} \\ &= H_{2n+1,0} + H_{2n,1} + H_{2n-1,2} + \cdots + H_{n+2,n-1} + H_{n+1,n} \\ &= H_{2n+1} \end{aligned}$$

eşitliklerine her $n \geq 1$ için ulaşmış oluruz.

4.1.2 Sonuç: Her $n \geq 1$ için $H_{2n} = F_{2n+1}F_1 + F_{2n-1}F_2 + F_{2n-3}F_3 + \cdots + F_1F_{n+1}$ dır.

İspat: Teorem 4.1.1 ve $H_{m,n} = F_{m-n+1}F_{n+1}$ yi düşündüğümüzde

$$\begin{aligned} H_{2n} &= H_{2n,0} + H_{2n-1,1} + H_{2n-2,2} + \cdots + H_{n,n} \\ &= F_{2n+1}F_1 + F_{2n-1}F_2 + F_{2n-3}F_3 + \cdots + F_1F_{n+1} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşırız.

4.1.3 Sonuç: Her $n \geq 1$ için $H_{2n+1} = F_{2n+2}F_1 + F_{2n}F_2 + F_{2n-2}F_3 + \cdots + F_2F_{n+1}$ dır.

İspat: Teorem 4.1.1 ve $H_{m,n} = F_{m-n+1}F_{n+1}$ yi düşündüğümüzde

$$\begin{aligned} H_{2n+1} &= H_{2n+1,0} + H_{2n,1} + H_{2n-1,2} + \cdots + H_{n+1,n} \\ &= F_{2n+2}F_1 + F_{2n}F_2 + F_{2n-2}F_3 + \cdots + F_2F_{n+1} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşırız.

4.2 Üreteç Fonksiyonu

Bu bölümde amacımız 4.1 Bölümde oluşumunu verdiğimiz ve indirgeme formülleri $n \geq 1$ için $H_{2n} = H_{2n-1} + H_{2n-2} + F_n$ ve $H_{2n+1} = H_{2n} + H_{2n-1}$ şeklinde olan dizimiz için üreteç fonksiyonu oluşturmaktır. Bunun için öncelikle üreteç fonksiyonunun tanımını verelim.

4.2.1 Tanım: Bir $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ dizisi verilsin. Bu diziden hareketle elde edilen

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

toplama $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Şimdi Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonunu veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.2.2 Teorem [1]: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \cdots, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \cdots$ indirgeme bağıntısı ile verilen Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu $F(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$ şeklindedir.

Böylece ifadesi [21] de yer alan fakat ispatı tarafımızdan farklı yöntemler kullanılarak yapılan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.2.3 Teorem: $H_0 = 1, H_1 = 1, H_2 = 3, \cdots, H_{2n} = H_{2n-1} + H_{2n-2} + F_{n+1},\ H_{2n+1} = H_{2n} + H_{2n-1} \cdots$ indirgeme bağıntısı ile verilen dizinin üreteç fonksiyonu $H(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)}$ şeklindedir.

İspat: $H_0=1,\ H_1=1,\ H_2=3,\cdots,\ H_{2n}=H_{2n-1}+H_{2n-2}+F_{n+1},\ H_{2n+1}=H_{2n}+H_{2n-1}\cdots$ indirgeme bağıntısı ile verilen dizimiz için üreteç fonksiyonu $H(x)$ olsun. Buna göre

$$H(x)=H_0+H_1x+H_2x^2+\cdots+H_{2n}x^{2n}+H_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

şeklindedir. Buradan 4.2.2 Teorem yardımıyla

$$\begin{aligned}
H(x)&=H_0+H_1x+H_2x^2+\cdots+H_{2n}x^{2n}+H_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\\
xH(x)&=H_0x+H_1x^2+H_2x^3+\cdots+H_{2n}x^{2n+1}+H_{2n+1}x^{2n+2}+\cdots\\
x^2H(x)&=H_0x^2+H_1x^3+H_2x^4+\cdots+H_{2n}x^{2n+2}+H_{2n+1}x^{2n+3}+\cdots
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
x^2H(x)+xH(x)-H(x)&=-F_1-F_2x^2-F_3x^4-\cdots-F_{n+1}x^{2n}-\cdots\\
&=-(F_1+F_2x^2+F_3x^4+\cdots+F_{n+1}x^{2n}+\cdots)\\
&=-F(x^2)=\frac{1}{x^4+x^2-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$x^2H(x)+xH(x)-H(x)=\frac{1}{x^4+x^2-1}$$

ve $H(x)=\dfrac{1}{(x^2+x-1)(x^4+x^2-1)}$ ye ulaşılır.

Şekil 2.2 ve Şekil 2.4 ü düşünelim. Tezimizin bu kısmında bu şekillerden hareketle yeni bir sayı dizisi elde edeceğiz. Bunun için öncelikle Şekil 2.2 de verilen Hosoya üçgeninin satır sonlarını çıkaralım. Bu durumda Şekil 4.2 yi elde ederiz.

1

2 1

3 2 2

5 3 4 3

8 5 6 6 5

13 8 10 9 10 8

21 13 16 15 15 16 13

34 21 26 24 25 24 26 21

55 34 42 39 40 40 39 42 34

Şekil 4.2: Hosoya üçgeni satır sonu çıkarılmış gösterimi.

Şimdi $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2, \cdots,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \cdots$ sayılarını düşünelim. Katsayıları şekil 4.2 de verilen üçgendeki her bir satırdan sırasıyla seçerek,

$$C_1 = 1,$$
$$2C_1 + C_2 = 0 \ \Rightarrow\ C_2 = -2,$$
$$3C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0 \ \Rightarrow\ C_3 = \frac{1}{2} = \frac{1}{F_3},$$
$$5C_1 + 3C_2 + 4C_3 + 3C_4 = 0 \ \Rightarrow\ C_4 = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{F_4}$$

elde edilir. Şekil 2.4 düşünüp bu şekilde devam edersek

$$H_{n-2,0}C_1 + H_{n-2,1}C_2 + H_{n-2,2}C_3 + \cdots + H_{n-2,n-4}C_{n-3} + H_{n-2,n-3}C_{n-2} = 0$$

$$H_{n-1,0}C_1 + H_{n-1,1}C_2 + H_{n-1,2}C_3 + \cdots + H_{n-1,n-3}C_{n-2} + H_{n-1,n-2}C_{n-1} = 0$$

$$H_{n,0}C_1 + H_{n,1}C_2 + H_{n,2}C_3 + \cdots + H_{n,n-2}C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \tag{4.1}$$

eşitliklerine ulaşırız. Amacımız her $n > 3$ dizinin genel terimi olan C_n terimini belirlemektir. Bunun için (2.1) de verilenleri düşünelim. Böylece

$$H_{n,0}C_1 + H_{n,1}C_2 + H_{n,2}C_3 + \cdots + H_{n,n-3}C_{n-2} + H_{n,n-2}C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \Rightarrow$$

$$(H_{n-1,0} + H_{n-2,0})C_1 + (H_{n-1,1} + H_{n-2,1})C_2 + \cdots + (H_{n-1,n-3} + H_{n-2,n-3})C_{n-2} + H_{n,n-2}C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \Rightarrow$$

$$(H_{n-1,0}C_1 + H_{n-1,1}C_2 + \cdots + H_{n-1,n-3}C_{n-2}) + (H_{n-2,0}C_1 + H_{n-2,1}C_2 + \cdots + H_{n-2,n-3}C_{n-2}) + H_{n,n-2}C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0$$

$$-H_{n-1,n-2}C_{n-1} + 0 + H_{n,n-2}C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(-H_{n-1,n-2} + H_{n,n-2})C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(-H_{n-1,n-2} + H_{n-1,n-2} + H_{n-2,n-2})C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(H_{n-2,n-2})C_{n-1} + H_{n,n-1}C_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{-(H_{n-2,n-2})C_{n-1}}{H_{n,n-1}} = \frac{-F_{n-1}C_{n-1}}{F_n}$$

elde edilir. Buradan da

$$C_n = \frac{-F_{n-1}C_{n-1}}{F_n} = \frac{-F_{n-1}}{F_n} \cdot \frac{-F_{n-2}}{F_{n-1}} \cdot \frac{-F_{n-3}}{F_{n-2}} \cdots \frac{-F_3}{F_4} \cdot C_3 = \frac{(-1)^{n-3}}{F_n}$$

genel terimine ulaşılır. Böylece tezimizde her $n > 3$ için Hosoya üçgeninden hareketle

$$C_1 = 1, C_2 = -2, C_3 = \frac{1}{2}, \cdots, C_n = \frac{(-1)^{n-3}}{F_n} \tag{4.2}$$

dizisini elde etmiş oluruz. Elde edilen bu diziye literatürde tarafımızdan rastlanmamıştır.

Şimdi elde ettiğimiz diziden faydalanılarak ispatı yapılan ve $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2, \cdots,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \cdots$ sayları ile ilgili olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.2.4 Teorem: Her $n > 3$ için $F_{n+1} = 2F_n - F_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-3}F_3 + (-1)^{n-2}F_2$ dir.

İspat: Şekil 4.2 yi ve bu şekilden elde edilen (4.2) de verilen diziyi düşünelim. Böylece, her $n>3$ için, (4.1) den $H_{n,0}C_1+H_{n,1}C_2+H_{n,2}C_3+\cdots+H_{n,n-2}C_{n-1}+H_{n,n-1}C_n=0$ eşitliğine ulaşırız. Buradan da $H_{m,n}=F_{m-n+1}F_{n+1}$ eşitliğinden faydalanarak

$$H_{n,0}C_1+H_{n,1}C_2+H_{n,2}C_3+\cdots+H_{n,n-2}C_{n-1}+H_{n,n-1}C_n=0$$

$$\Rightarrow F_{n+1}C_1+F_nC_2+F_{n-1}F_3C_3+\cdots+F_3F_{n-1}C_{n-1}+F_2F_nC_n=0$$

$$\Rightarrow F_{n+1}-2F_n+F_{n-1}F_3\frac{1}{2}+\cdots+F_3F_{n-1}\frac{(-1)^{n-4}}{F_{n-1}}+F_2F_n\frac{(-1)^{n-3}}{F_n}=0$$

$$\Rightarrow F_{n+1}-2F_n+F_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-4}F_3+(-1)^{n-3}F_2=0$$

$$\Rightarrow F_{n+1}=2F_n-F_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-3}F_3+(-1)^{n-2}F_2$$

sonucuna ulaşırız. Bu da istediğimiz sonuçtur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yaptığım bu tezde Pascal üçgeni, Fibonacci sayıları ve Lucas sayılarının tanım ve sahip oldukları özelliklerden yola çıkılarak Hosoya sayıları ve Hosoya üçgeni incelenmiştir. Bu sayıların matematikteki önemine değinilmiş ve özellikle Hosoya üçgeninin oluşmasında büyük öneme sahip Pascal üçgeni ile arasındaki ilişki üzerine durulmuştur. Hosoya üçgeni üzerinden oluşabilen üçgensel yapıların ve eşkenar dörtgenlerin nasıl oluştuğu gösterilmiş ve sonucunda bu dörtgenlerden oluşan özdeşliklerin Hosoya ve Fibonacci sayılarıyla nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca Pascal üçgeninden ilham alınarak nasıl Fibonacci sayıları elde edildiyse benzer biçimde bu tezde de Hosoya üçgeninden faydalanılarak literatüre katkı sağlayacak yeni diziler elde etmek amaçlanmıştır.

İlerleyen aşamalar için, tezde elde edilen dizilerin elemanlarından yeni matrisler tanımlanabilir. Ayrıca çaprazlama olarak Hosoya Üçgeninden elde ettiğimiz bu dizilere ait daha farklı özellikler yapılabilirdir.

6. KAYNAKLAR

[1] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers With Applications.* New York: A Wiley Interscience.

[2] Emery, J., Fibonacci Numbers and The Golden Ratio Continued Fractions, Emery University Press., 2011.

[3] Demirturk B., Fibonacci and Lucas Sums by matrix Methods, International Mathematical Forum, 5(3), 99-107, 2010.

[4] Şiar, Z., Keskin, R., Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers, Hacet. J. Math. Stat.42, 211-222, 2013.

[5] Church, C. A., Bicknel, M., Exponential generating functions for Fibonacci identities, The Fibonacci Quaterly, 11(3), 275-281, 1973.

[6] Polatlı, E., Kesim, S., A note on Catalan's Identity for the k-Fibonacci Quaternions, Journal of Integer Sequences, 18, 1-4, 2015.

[7] Lockwood, E. H. (1967). 154. A Side-Light on Pascal's Triangle. *The Mathematical Gazette*, *51*(377), 243-244.

[8] Vajda, S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section, Ellis Horwood Limited Publ., Chichester, 1989.

[9] Ribenboim, P., My numbers, My friends, Springer-Verlag Inc., New York, 2000.

[10] Topal, N. (2018). *Genelleştirilmiş fibonacci ve lucas kuaterniyonları ve bazı uygulamaları* (Master's thesis, Sakarya Üniversitesi).

[11] Hoggatt, V. E., Lind, D. A., A primer for the Fibonacci Numbers: Part VI, Fibonacci Quarterly, 5(5), 445-460, 1967.

[12] Flórez, R., Higuita, R. A., & Mukherjee, A. (2018). The Star of David and Other Patterns in Hosoya Polynomial Triangles. *J. Integer Seq.*, *21*(4), 18-4.

[13] Hosoya, H. (1976). Fibonacci triangle. *Fibonacci Quart.*, *14*, 173-178.

[14] Czabarka, É., Flórez, R., & Junes, L. (2015). A Discrete Convolution on the Generalized Hosoya Triangle. *J. Integer Seq.*, *18*(1), 15-1.

[15] Blair, M., Flórez, R., & Mukherjee, A. (2018). Matrices in the Hosoya triangle. *arXiv preprint arXiv:1808.05278*.

[16] Koshy, T. H. O. M. A. S. (2011). Fibonacci, Lucas, and Pell numbers, and Pascal's triangle. *Mathematical Spectrum*, *43*(3), 125-132.

[17] Koca, S. (2019). *Fibonacci Sayıları ve Pascal Üçgeni Arasındaki Bağıntılar* (Doktora Tezi, Bursa Uludag Üniversitesi).

[18] Geçmen, M. Z., Çelik, E., & Dokuyucu, M. A. Numerical Solution of Volterra Integral Equations Using Hosoya Polynomial. *Turkish Journal of Science*, *6*(3), 110-117.

[19] Stevanovic, D., & Gutman, I. (1999). Hosoya polynomials of trees with up to 11 vertices. *Zb. Rad.(Kragujevac)*, *21*, 111-119.

[20] Oz, M. S., & Cangul, I. N. (2021). Computing the Hosoya and the Merrifield-Simmons Indices of Two Special Benzenoid Systems. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, *12*(3), 161-174.

[21] Griffiths, M. (2011). Fibonacci diagonals. *Fibonacci Quart.*, 49(l):51-56.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Sinan ELVEREN

Doğum tarihi ve yeri : 11.08.1992-PENDİK

e-posta :Sinan80.1417@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2019-2023
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Öğretmenliği	2010-2015
Lise	80.Yıl Nuh Çimento Anadolu Lisesi	2006-2010