

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**KESİRLİ TÜREV İLE MODELLENEN BİR BİLGİSAYAR VİRÜSÜ
YAYILIMININ SİSTEM ANALİZİ VE OPTİMAL KONTROLÜ**

FATMA BOZANER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Derya AVCI (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Fatma Ayaz
Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER EROĞLU**

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2022

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Kesirli Türev ile Modellenen Bir Bilgisayar Virüsü Yayılımının Sistem Analizi ve Optimal Kontrolü**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Fatma BOZANER

(imza)



Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından (BAP 2021/016) nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

**KESİRLİ TÜREV İLE MODELLENEN BİR BİLGİSAYAR VİRÜSÜ
YAYILIMININ SİSTEM ANALİZİ VE OPTİMAL KONTROLÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FATMA BOZANER
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. DERYA AVCI)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2022

Bilgisayar virüsleri insan yapımı olan ve aynı bir biyolojik virüsün insandan insana bulaşması gibi bilgisayardan bilgisayara yayılarak ilerler. Bilgisayar virüslerinin dinamiklerini anlayabilmek ve yol açabileceği zararları öngörebilmek adına çeşitli matematiksel modeller geliştirilmiş ve bu modellerin kararlılık analizi, optimal kontrolü gibi çalışmalar son yıllarda önem kazanmıştır.

Bu çalışma bir bilgisayar ağındaki virüs yayılımının zararını ortadan kaldırmayı amaçlayan minimum anti-virüs yazılımı yükleme maliyetini farklı optimal kontrol stratejileri için incelemektedir. Ele alınan model, Caputo kesirli türevli bir SEIR epidemiyolojik modelidir. Modelle ilgili mevcut çalışmalardan farklı olarak, kurtarılan bilgisayarların herhangi bir mekanik nedenden dolayı arızalanabileceği düşünülmüş ve model buna göre geliştirilmiştir. Ayrıca modelde birim uygunluğu da sağlanmıştır. Literatürde sınırlı sayıda çalışma olmasına rağmen kontrol değişkeni denge noktalarını ve dolayısıyla kontrollü sistemin kararlılığını etkilemektedir. Bu nedenle, kontrol edilen sistem için R_0 adı verilen yeniden üreme sayısı tekrar hesaplanmıştır. Optimal kontrol problemi formüle edilmeden önce optimal kontrolün varlığı ispatlanmıştır. Daha sonra Hamilton formalizmi kullanılarak optimal sistem elde edilmiştir. Çözüm için nümerik yöntem olarak Adams-tipi tahmin edici-düzeltici yöntemi ile ileri-geri süpürme yöntemi birleştirilerek elde edilen optimal sisteme uygulanmıştır. Nümerik yöntem sonucu elde edilen grafikler MATLAB yazılımı ile elde edilmiştir. Önerilen üç kontrol stratejisi karşılaştırıldığında, Strateji 1'in en etkili anti-virüs kurulum stratejisi olduğu açıktır. Ayrıca nümerik sonuçlar arasında Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevlerinin karşılaştırması da verilmiştir ve üç kesirli türev arasından en istendik sonuç Caputo kesirli türevi için olduğu gözlemlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Anti-virüs yazılımı, Bilgisayar virüs yayılımı, Optimal kontrol, Singüler ve singüler olmayan kesirli operatörler, Kararlılık analizi, Tahmin edici-düzeltici yöntem.

Bilim Kod / Kodları : 20406

Sayfa Sayısı : 87

ABSTRACT

SYSTEM ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF THE SPREAD OF A COMPUTER VIRUS MODELED BY FRACTIONAL DERIVATIVE

MSC THESIS

FATMA BOZANER

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. DERYA AVCI)

BALIKESİR, AUGUST - 2022

Computer viruses are man-made and spread from computer to computer, just as a biological virus spreads from person to person. Various mathematical models have been developed in order to understand the dynamics of computer viruses and to predict the damage they may cause, and studies such as stability analysis and optimal control of these models have gained importance in recent years.

This study examines the minimum cost of installing anti-virus software for different optimal control strategies aimed at eliminating the damage of virus propagation in a computer network. The model under consideration is a Caputo fractional derivative SEIR epidemiological model. Unlike the existing studies on the model, it has been thought that the recovered computers could fail for mechanical reasons, and the model has developed accordingly. In addition, unit consistency has been also ensured in the model. Although there are a limited number of studies in the literature, the control variable affects the equilibrium points and thus the stability of the controlled system. Therefore, the reproduction number, R_0 , is recalculated for the controlled system. Before the optimal control problem is formulated, the existence of optimal control has been proven. Then, the optimal system is obtained by using Hamiltonian formalism. As a numerical method for the solution, the Adams-type predictor-corrector method and the forward-backward sweep method are combined and applied to the optimal system obtained. The graphs obtained as a result of the numerical method are obtained with MATLAB software. Comparing the three proposed control strategies, it is clear that Strategy 1 is the most effective anti-virus installation strategy. In addition, the comparison of the Caputo, Caputo-Fabrizio, and Atangana-Baleanu fractional derivatives among the numerical results is also given, and it is observed that the most anticipated result among the three fractional derivatives is for the Caputo fractional derivative.

KEYWORDS: Anti-virus software, Computer virus propagation, Optimal control, Singular and non-singular fractional operators, Stability analysis, Predictor-corrector method

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
TABLO LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
KISALTMALAR LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	8
2.1 Kesirli Analize İlişkin Bazı Tanım ve Teoremler.....	8
2.2 Diferansiyel Denklemler ve Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri.....	17
2.3 Optimal Kontrol Teorinin Bazı Tanım ve Teoremleri.....	20
3. BİLGİSAYAR VİRÜS YAYILIMI İÇİN BİR SEIR MODEL	26
4. BİLGİSAYAR VİRÜS YAYILIMI İÇİN OPTİMAL KONTROL STRATEJİLERİ	29
4.1 Strateji 1.....	29
4.2 Kontrollü Modelin Çözümlerinin Pozitifliği ve Sınırlılığı.....	30
4.3 Kontrollü Modelin Denge Noktaları ve R_0 Temel Üreme Sayısı.....	34
4.3.1 Virüssüz Denge Noktası.....	35
4.3.2 Temel Üreme Sayısı: R_0	36
4.3.3 Endemik Denge Noktası.....	40
4.4 Kontrollü Sistemin Kararlılık Analizi.....	41
5. BİLGİSAYAR VİRÜS YAYILIMININ OPTİMAL KONTROLÜ	49
5.1 Optimal kontrolün varlığı.....	50
5.2 Optimallik Koşulları.....	55
6. NÜMERİK ÇÖZÜMLER VE ALTERNATİF KONTROL STRATEJİLERİ	60
6.1 Nümerik Yöntem.....	60
6.1.1 Algoritma.....	60
6.1.2 Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi için Algoritma.....	64
6.1.3 Atangana-Baleanu Kesirli Türevi için Algoritma.....	66
6.2 Alternatif Kontrol Stratejileri.....	68
6.2.1 Strateji 2.....	68
6.2.2 Strateji 3.....	69
6.3 Nümerik Sonuçlar ve Tartışma.....	69
6.3.1 Strateji 1 için Karşılaştırmalı Sonuçlar.....	71
6.3.2 Kontrol Stratejileri için Karşılaştırmalı Sonuçlar.....	73
6.3.3 Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu Kesirli Türevleri için Karşılaştırmalı Sonuçlar.....	75
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	77

8. KAYNAKLAR.....	78
ÖZGEÇMİŞ.....	86

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: Sağlıklı bir bilgisayarın virüslü bir bilgisayar durumuna geçişi.....	3
Şekil 2.1: Klasik ve kesirli analizin soyağacı	9
Şekil 4.1: Bilgisayar virüsü yayılımının akış diyagramı.....	30
Şekil 4.2: $0 < \alpha < 1$ için kesirli mertebeden sistemin kararlılık bölgesi	42
Şekil 6.1: $\alpha = 0.85$ için Strateji 1 de kontrollü ve kontrolsüz sistem davranışları	71
Şekil 6.2: Strateji 1 için sistem davranışlarının α 'ya bağımlılığı.....	72
Şekil 6.3: α 'ya göre Strateji 1 için $u(t)$ kontrol fonksiyonu davranışı	72
Şekil 6.4: $\alpha = 0.85$ için kontrol stratejilerin karşılaştırılması.....	73
Şekil 6.5: $\alpha = 0.85$ için stratejilerin kontrol fonksiyonlarının karşılaştırılması	74
Şekil 6.6: $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.85$ için Strateji 1 de sistemin davranışının Caputo, CF ve ABC kesirli türevleri için karşılaştırılması.....	75
Şekil 6.7: $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.85$ için Strateji 1 de kontrol fonksiyonunun Caputo, CF ve ABC kesirli türevleri için karşılaştırılması.....	76

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 3.1: (3.1) bilgisayar virüsü SEIR modelindeki parametreler ve tanımları	27
Tablo 6.1: (4.2) bilgisayar virüsü SEIR modelindeki parametreler, tanımları ve nümerik çözümler için kullanılan değerleri.....	70

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}^+	: Pozitif tam sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	: n-boyutlu reel vektör uzayı
$\text{Re}(z)$: z kompleks sayısının reel kısmı
$\text{erf}(\cdot)$: Hata fonksiyonu
$\sin(\cdot)$: Sinüs fonksiyonu
$\Gamma(\cdot)$: Gamma fonksiyonu
$E_\zeta(\cdot)$: Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\zeta,\eta}(\cdot)$: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
\mathcal{L}	: Laplace dönüşüm operatörü
${}_a^C D_t^\alpha$: Sol Caputo kesirli türev operatörü
${}_t^C D_b^\alpha$: Sağ Caputo kesirli türev operatörü
${}_a I_t^\alpha$: Sol Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_t I_a^\alpha$: Sağ Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_a^C I_t^\alpha$: Sağ Caputo kesirli integral operatörü
$AC[a,b]$: $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların uzayı
$\llbracket \cdot \rrbracket$: Tam değer fonksiyonu
$\exp(\cdot)$: Üstel fonksiyon ($e^{(\cdot)}$)
$M(\cdot)$: Normalleştirme fonksiyonu
$H^1(a,b)$: 1-boyutlu Sobolev uzayı
$L^2(a,b)$: Hilbert uzayı
${}_a^{CF} D_t^\alpha$: Sol Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}_a^{CF} I_t^\alpha$: Sol Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
${}_a^{ABC} D_t^\alpha$: Sol Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}_a^{ABC} I_t^\alpha$: Sol Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü
${}_a^{ABR} D_t^\alpha$: Sol RL anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}_a^{ABR} I_t^\alpha$: Sol RL anlamında Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü
R_0	: Yeniden üreme sayısı
t	: zaman
$C(a,b)$: (a,b) aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$\tan(\cdot)$: Tanjant fonksiyonu
\arg	: argüman

$|\cdot|$: Mutlak değer fonksiyonu
 $\|\cdot\|$: Norm fonksiyonu

KISALTMALAR LİSTESİ

COVID-19	: Koronavirüs hastalığı 2019
AIDS	: Edinilmiş bağışıklık yetmezliği sendromu
SIS	: Duyarlı-Enfekte-Duyarlı
SIR	: Duyarlı-Enfekte-İyileşen
SIRS	: Duyarlı-Enfekte-İyileşen-Duyarlı
SEIR	: Duyarlı-Maruz kalan-Enfekte-İyileşen
SEIS	: Duyarlı-Maruz kalan-Enfekte-Duyarlı
SIC	: Duyarlı-Enfekte-Bağışık
VEISV	: Savunmasız-Maruz kalan-Enfekte-Güvenli-Savunmasız
SLBS	: Duyarlı-Gizli-Bozulan
HIV	: İnsan bağışıklık yetmezliği virüsü
SIJA	: Duyarlı-Aseptomatik enfekte-Semptomatik enfekte-AIDS'li grup
ART	: Anti-Retroviral-Tedavi
SIRC	: Duyarlı-Enfekte-İyileşen-Geçmiş bulaş bilgisi
OKP	: Optimal kontrol problemi
KOKP	: Kesirli optimal kontrol problemi
AC	: Mutlak sürekli
CF	: Caputo-Fabrizio
AB	: Atangana-Baleanu
RK4	: 4.dereceden Runge-Kutta

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitim sürecimi “benden hep bir adım önde olun” sözüyle başlatan, çalışmalarımda tıkanıp gittiğim noktalarda yol gösteren, bu ve diğer çalışmalarımın ortaya çıkmasında motivasyonu ve özveriyle örnek aldığım, tanıştığım günden bu yana her kapısını çaldığımda başta akademik bilgisini olmak üzere güleryüzünü, sabrını, kahvelerini ve ilgisini benden esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Derya AVCI’ ya minnettarlığımı ve teşekkürümü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında her soruma özveriyle cevap aldığım ve kendisinden gerek lisans eğitimimde gerekse de lisansüstü eğitimimde aldığım faydalı dersler sayesinde tezime olan katkıları için ayrı bir teşekkürümü nahif hocam Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER EROĞLU’ na ediyorum. Ayrıca önümde hep örnek aldığım ve birlikte çalışmaktan keyif aldığım arkadaşım Dilara YAPIŞKAN’ a teşekkür eder, doktora eğitiminde başarılar dilerim. Adlarını buraya sığdıramadığım tüm bölüm hocalarıma ve özellikle yardımını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ’ e teşekkür ediyorum.

Bu dünyadaki en değerli varlığım ailem, annem Şadiye SOYTÜRK, babam Nurullah SOYTÜRK ve iki canım kardeşim Merve SERT ile Ayşenur SOYTÜRK’ e bu yolculukta bana her zaman güvendikleri ve destek oldukları için minnettarım. Ve yakın bir zamanda kendisiyle aile kurduğum, kendisiyle aynı hedefler doğrultusunda ilerleyip bana maddi ve manevi her konuda destek olan sevgili eşim Koray BOZANER’ e teşekkür ederim.

Balıkesir, 2022

Fatma BOZANER

1. GİRİŞ

Bir toplumun genelinde meydana gelen hastalıklarla ilgili durumların dağılımlarını, görülme sıklıklarını ve bunları etkileyen faktörleri, bir tıp bilimi dalı olan epidemiyoloji inceler. Bu hastalıklar epidemiyolojik hastalık olarak adlandırılır. Epidemiyolojinin amaçları, hastalıkları azaltmak ve sağlığı geliştirmek olduğundan bu doğrultuda öncelikle epidemiyologlar hastalıkla ilgili bilgileri toplayarak bu bilgileri yorumlarlar. Ardından hastalığın seyrini gözlemleyerek, hastalığın kontrol altına alınmasında etkili olabilecek seçenekleri geliştirirler. Özellikle hastalık büyük bir popülasyonu etkileyen bir salgın hastalık olduğunda epidemiyoloji ve buna yardımcı bilim dalları birlikte hareket ettiğinde hem büyük oranda insan ölümlerinin hem de ülkeyi etkileyecek olan ciddi ekonomik kayıpların yaşanmasının önüne geçilebilir. Örnek olarak hala günümüzde etkileri devam eden COVID-19 salgını, 2019 yılından bu yana ülkemiz dahil olmak üzere tüm dünyada sarsıcı bir etki ortaya koymuş ve ciddi sayıda insan hayatını kaybetmiştir. Bununla birlikte özellikle sağlık giderlerindeki artış başta olmak üzere pek çok alanda ekonomik yaşanmış ve hala yaşanmaktadır.

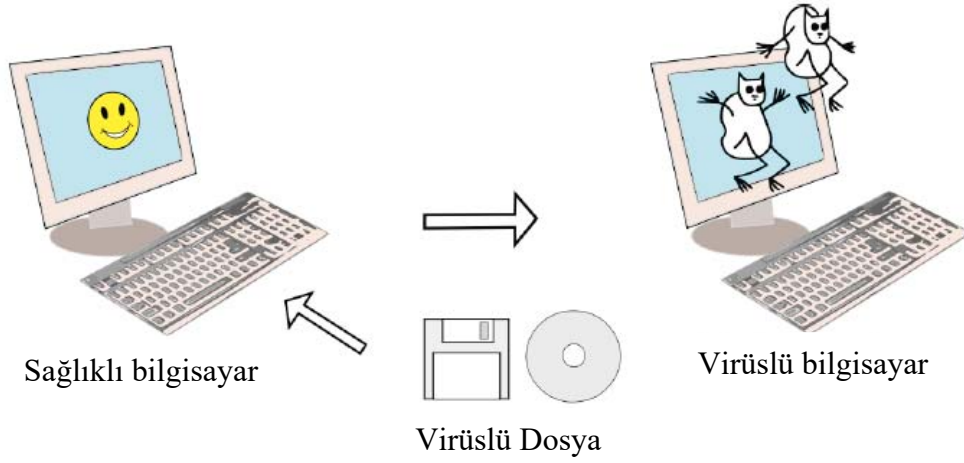
Epidemiyolojide hastalıklar yayılımlarının tipine göre endemik, epidemik ve pandemik hastalık olmak üzere üç sınıfa ayrılır. Endemik hastalık, bir popülasyonda her zaman mevcut olan (örneğin tüberküloz) bulaşıcı bir hastalık için kullanılır. Epidemik hastalık ise aniden insanları etkileyerek hızla yayılan (örneğin grip) hastalıkları tanımlarken kullanılır. Son olarak, bir hastalık çok geniş bir alana yayıldığında (örneğin bir kıta veya tüm dünya; AIDS ve COVID-19 salgınları) bu hastalık pandemik hastalık olarak ifade edilmektedir. Bu sınıflandırma sayesinde hastalıklar aciliyetlerine göre bu konudaki araştırmacılara önem sırası belirtmektedir.

Salgın hastalıkların bulaşma dinamiklerini anlamak ve salgının seyrini incelemek için matematiksel modeller bir araç olarak kullanılmıştır [1, 2]. Çünkü salgının yayılımının kontrol altına alınması için öngörülen koruyucu ve tedavi edici uygulamalardan hangisinin daha etkili olabileceğini birer birer deneyerek sonuçlarını görmek hem zaman açısından hemde ekonomik açıdan istenilen bir durum değildir. Matematiksel modeller ve deneysel veriler birleştirilerek salgın hastalıklar gerçeğine en uygun biçimde temsil edilirler. Modeller

bir salgın hastalığın mevcut davranışından yola çıkarak gelecekteki davranışı hakkında fikir yürütmede önemli rol alır. Bu anlamda ekonomik kayıpları en aza indirmiş olurlar. Böylece matematiksel modelleme disiplinler arası bir çalışma alanı olarak görülmektedir. Temel matematiksel modellerin başlıcaları SIS [3], SIR [4], SIRS [5], SEIR [6] ve SEIS [7] dir.

Salgın hastalıklara sebep olan biyolojik virüslerin dışında bir bilgisayar ağına girerek ağdaki işleyişi değiştiren insan yapımı olan bilgisayar virüsleri de vardır. Bilgisayar virüsü, genellikle kullanıcının bilgisi olmadan bir bilgisayar sistemine yüklenen ve bilgisayarda depolanan bilgilerde kişinin yetkisi dışında istenmeyen değişikliklere neden olan, insan yapımı yıkıcı bir bilgisayar programı veya kodudur [8]. Virüs terimi ilk olarak 1984'te Fred Cohen tarafından hazırlanan *Experiments with Computer Viruses* adlı tez çalışmasında kullanılmış ve bu terim Len Adleman ile birlikte ortaya konmuştur. Bilgisayar virüsü terimi, yasa dışı zarar verici işlevler gerçekleştiren yazılım, kod, kod blokları ve kod bölümlerine uygulanabilir.

Bir bilgisayar virüsünün temel özelliklerinden biri, yürütülebilir olmasıdır. Virüs ya kendi kendini yürütür ya da yürütülmek üzere kodunu başka bir dosyaya aktarır. Bilgisayar virüsü yürütme yeteneği olmadan bir bilgisayara hiçbir zarar veremez ve böylece bir önem kazanmayacaktır. Bir bilgisayar virüsünün bir diğer temel özelliği de çoğalmasıdır. Bir virüs, diğer programlara genellikle kopyalarını aktararak bulaşır. Bulaşma olmadan virüsler gelişemez ve hayatta kalamaz. Bilgisayar virüsleri ilk çıktığı dönemlerde ağırlıklı olarak disketler yoluyla yayılırken, sonraki dönemlerde ortaya çıkan virüsler ağırlıklı olarak internet üzerinden yayılmaktadır. İnternetin yaygınlaşması ile birlikte, e-posta ve İnternet boşluklarından yararlanmak için birçok yeni makro virüs türü geliştirilmiştir. Birçok virüs, daha akıllı hareket etmek ve virüsten koruma programları tarafından algılanmalarını zorlaştırmak için geliştirilmiştir. Hatta bazı virüsler, virüsten koruma programına ve virüsten koruma programlarının boşluklarından yararlanarak saldırırlar.



Şekil 1.1: Sağlıklı bir bilgisayarın virüslü bir bilgisayar durumuna geçişi [8].

Bilgisayar virüsleri, biyolojik virüslerin bazı özelliklerini yansıttığı için virüs olarak adlandırılmıştır. Yani şu söylenebilir ki nasıl bir biyolojik virüs insandan insana bulaşıyorsa benzer olarak bir bilgisayar virüsü de bilgisayardan bilgisayara bulaşır. Böylece bir biyolojik virüsün bir canlı popülasyonundaki yayılımı ile bir bilgisayar virüsünün bir bilgisayar popülasyonundaki yayılımı benzerlik göstermektedir [9].

Günümüzde hızlı büyüyen bilgisayar teknolojisi hayatlarımızın ayrılmaz parçası haline gelmiştir. Bir bilgisayar virüsü, artan teknoloji nedeniyle internet üzerinden kullanılabilir en önemli silahlardan biridir. Bu virüslerin ortaya çıkması ve yayılması bilgisayar dünyası üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Son zamanlarda bilim, teknoloji ve ticaretteki hızlı yenilikler bilgisayar, internet ve çeşitli yazılımların kullanımını artırmıştır. Ne yazık ki bu, bilgisayar ağlarındaki virüs tehdidinde bir artışa neden olmuştur [10, 11] ve geline noktada biyolojik salgınların yanında bir de teknolojik salgınla baş edilmek zorunda kalınmıştır.

Örneğin, ağ kullanıcılarından banka hesapları ve şifreler gibi özel veriler bilgisayar virüsleri yoluyla elde edilerek bireylere, ailelere ve kurumlara ciddi zararlar vermektedir. Bilgisayarlarda hasara neden olan tüm yazılımlar yalnızca virüsler değildir. Popüler yasal yazılımlar, düzeltilmemiş bazı hatalar nedeniyle de çeşitli zararlar verebilir. Virüsler, diğer

programları içerisine yerleşerek sisteme zarar vermeyi amaçlar. Ancak hasara neden olan bazı yazılımların böyle bir amacı yoktur. Bu nedenle, biyolojik virüslerde olduğu gibi bilgisayar virüslerinin de davranışlarını açıklığa kavuşturmak ve yayılmalarını kontrol etmek için matematiksel modellerin ortaya konulması ve geliştirilmesi temel bir ihtiyaçtır. Çünkü matematiksel modeller, bunların yayılması hakkında kısa sürede tahminlerde bulunmayı sağlar. Böylece bilgisayar virüslerinin küresel düzeyde yol açabileceği birçok ekonomik kayıp kolaylıkla ve kısa zamanda önlenmektedir. Epidemiyolojik hastalıkların dinamikleri ile bilgisayar virüslerinin davranışları arasındaki yakın benzerlik nedeniyle, bilgisayar virüsü yayılımı için modellerin oluşturulması, matematiksel epidemiyoloji teorisiyle açıklanmaktadır [12-14]. Bu dikkate alınarak literatürde bilgisayar virüslerinin yayılım dinamiklerini ortaya koyan SIS [15], SIR [16, 17], SIRS [18, 19], SEIR [20], SEIS [21], SIC [22], VEISV [23] ve SLBS [24] gibi çeşitli modeller oluşturulmuştur.

Epidemiyolojik salgınları modellemek için sıklıkla tamsayı mertebeli diferansiyel denklem sistemleri kullanılmıştır. Öte yandan epidemiyolojik hastalıklara neden olan virüsler doğaları gereği kalıtımsal ve hafızalı olma özelliklerini beraberinde getirirler. Virüslerin bu özellikleri sayesinde neden oldukları hastalıkların geçmişteki davranışlarından yola çıkarak şu anki ve gelecekteki durumları hakkında öngörülebilir bulunulabilir. İşte tam da bu anlamda tamsayı mertebeli diferansiyel denklem sistemleri yetersiz kalabilmektedir. Çünkü bu sistemleri oluşturan tamsayı mertebeli türevler lokal tanımlamaya sahiptir. Yani zamana bağlı bir fonksiyonun belli bir andaki değişim hızını ifade etmek için sadece o anın küçük bir komşuluğunda hesaplama yapılır. Oysaki kesirli mertebeli türevler için durum bundan farklıdır. Kesirli türevlerin lokal olmayan tanımları sayesinde bir fonksiyonun belli bir andaki değişim hızı o andan önceki anlara bağlı olarak hesaplanır. Kesirli türevlerin hafızalı yapıda olmalarının ve kalıtımsal özellikleri temsil edebilmelerinin nedeni budur. Bu nedenle özellikle son yıllarda salgın hastalıklar, kanser tedavileri ve ekosistem sorunları gibi biyomühendislik problemleri başta olmak üzere birçok uygulama alanında sıkça kullanılmışlardır [25].

Literatürde çok sayıda kesirli türev tanımı yer almaktadır. Bu çeşitliliğin sebebi integral tanımlamalarında yer alan çekirdek fonksiyonlarının değişkenliğidir. Bunlar kuvvet fonksiyonu, üstel fonksiyon, Mittag-Leffler fonksiyonu gibi farklı biçimlerde karşımıza çıkabilir. Bunların içinde modellemede en sık kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo

kesirli türevlerinin [26] tekil yapıya sahip ve azalan kuvvet fonksiyonu biçiminde çekirdek fonksiyonları vardır. Diğer yandan yine sıkça kullanılan Caputo-Fabrizio [27] ve Atangana-Baleanu [28] kesirli türevleri tekil olmayan ve azalan üstel tipten çekirdek fonksiyonuna sahiptir. Kesirli türevlerin etkili bir şekilde kullanıldığı birçok uygulama alanı vardır fakat hastalık yayılımlarının modellenmesi, kesirli türevlerin en dikkate değer uygulamalarından yalnızca biridir, öyle ki bu modellerin kararlılık analizi ve kontrolü artan bir ilgi görmektedir. Literatürde kesirli türevlerle modellenen bazı epidemiyolojik hastalıklar şöyledir: COVID-19 [29, 30], Ebola [31], Zika [32], Gemini virüsü [33], kanser [34, 35] vb. Sonuç olarak bilgisayarların ve bilgisayar virüslerinin de yapılarında hafızalı olma özellikleri kendiliğinden var olduğundan bunların kesirli türevlerle modellenmesi gerçekçi bir analiz ortaya koyar [36].

Bir salgın hastalık ortaya çıktığında önce bu hastalığa sebep olan etkenin ne olduğu araştırılır ve ardından bu sebep olan etkenin yapısına uygun olarak hastalığı tedavi etmeye yönelik çalışmalar başta epidemiyoloji olmak üzere birçok alanda yürütülür. Burada önemli olan salgının seyrini yavaşlatacak ve popülasyonun daha az hasar almasına yardımcı olacak önlem veya tedaviden en uygun olanının belirlenmesidir. Bu anlamda optimal kontrol aracı, salgınları önlemeye ve tedavi etmeye yönelik modellerin geliştirilmesinde oldukça etkilidir [37, 38]. Çünkü salgın hastalıklar dinamik bir sistem ile ifade edilir ve bu dinamik sistemi kontrol etmenin en uygun yolunu veya yollarını (en uygun zaman ve en az maliyet) bulma işi matematiksel bir araç olan optimal kontrol teorisinin amacıdır. Epidemiyolojik modellerde koruyucu/tedavi edici yöntemler kontrol fonksiyonu olarak ele alınır ve sisteme uyarlanır. Örneğin Rachah'ın [39] çalışmasında SEIR tipindeki bir Ebola virüs modeline duyarlı kişileri aşılama olarak önleyici bir kontrol fonksiyonu uyarlanmış ve modelin optimal kontrol problemi incelemiştir. Elde edilen sonuçlarda enfekte birey sayısı aşı olmadan giderek artarken aşı kontrolü ile 4.günden itibaren hızlı bir azalma göstermiştir. Yine Kheiri ve Jafari'in [40] çalışmasında bir HIV/AIDS hastalığının SIJA kesirli türevli modeline üç farklı kontrol stratejisi uygulanmıştır. Bu kontrol stratejileri şöyledir: bilinçli kondom kullanımı, ART (anti-retroviral tedavi) tedavisi ve eğitim. Bu kontroller sisteme uygun bir şekilde adapte edilmiş ve optimal kontrolü çalışılmıştır. Sonuçlara bakıldığında kontrol varlığında hem HIV ile enfekte olmuş kişi sayısı hem de AIDS' li kişi sayısı belli bir yıldan sonra istendik biçimde azalmaya gitmiştir. Son olarak Ren ve diğ. [41] tarafından yapılan

çalışmada ise bir bilgisayar virüsü yayılımını ifade eden SIRC modeline, yayılımı önleyecek iki farklı kontrol stratejisi adapte edilmiştir. İlki virüse duyarlı ve virüs bulaşmış bilgisayarlara anti-virüs programı kurmak diğeri ise yine duyarlı ve virüslü bilgisayarları karantinaya almaktır. Elde edilen nümerik sonuçlarda kontrollerin etkisi ile birlikte duyarlı ve virüslü bilgisayarların sayısında ciddi bir azalma gözlemlenirken kurtarılan bilgisayarların sayısı da giderek artmıştır. Böylece şu söylenebilir ki amaca uygun tedaviler, önleyici tedbirler ve eğitim programları gibi kontrol stratejilerinin belirlenmesi en az salgınların modellenmesi kadar önemlidir [42].

Bu tez çalışmasında bir bilgisayar virüsü yayılımının dinamiklerini ifade eden bir SEIR modeli için optimal kontrol stratejilerinin analizi amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda tez çalışması sekiz bölümden oluşmaktadır. Tezin her bir bölümünde incelenen konular sırasıyla şöyle açıklanabilir.

Birinci bölümde epidemiyolojik bir hastalığa sebep olan virüsün yayılımı ile bir bilgisayar virüsünün yayılımının benzerlik gösterdiğinden, bir bilgisayar virüsü yayılımını modellemek için kesirli türevlerin kullanılmasının neden önemli olduğundan ve “bir bilgisayar virüsünün yayılımının önüne geçilebilmesi için ne gibi önlem ve müdahalelerin alınması etkili bir sonuç ortaya koyar?” sorusunun cevabını araştırmaya araç olan optimal kontrol teorisinin öneminden bahsedilmiştir.

İkinci bölüm üç alt bölüme ayrılmıştır. İlk alt bölümde kesirli analize, ikinci alt bölümde kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerine, üçüncü alt bölümde optimal kontrol teorisine ilişkin temel bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde optimal kontrolü incelenmesi hedeflenen ve bir bilgisayar ağındaki virüs yayılımını ifade eden Caputo kesirli türevli model (sistem) tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde bir önceki bölümde tanıtılan sistemi optimal kontrol problemine dönüştürmek için ilk önce sistemin temsil ettiği virüs yayılımını azaltacak bir anti-virüs yazılımı kontrol fonksiyonu olarak sisteme adapte edilmiştir ve kontrol adaptasyonu Strateji 1 olarak adlandırılmıştır. Yine aynı bölümde kontrollü modelin denge noktaları hesaplanarak modelin bu noktalardaki yerel kararlılığı analiz edilmiştir. Bu analiz için virüsün salgın olup olmadığına karar veren bir eşik parametresi olan R_0 yeniden üreme sayısı da hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde ilk olarak virüslü ve virüs tehdidi altındaki bilgisayarların sayısını minimize etmek için amaç fonksiyoneli tanımlanmıştır. Ardından optimal kontrolün varlığı gösterilmiştir. Son olarak optimal çözümleri elde etmek için optimallik koşulları Hamilton formalizmi ve Pontrayin'in maksimum prensibi kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin altıncı bölümü üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde optimal sistemin çözümlerini elde etmek için kullanılan nümerik yöntemin algoritması verilmiştir. Nümerik yöntem olarak Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici ile ileri-geri süpürme yöntemi birleştirilerek optimal sisteme uygulanmıştır. Tezin diğer amaçlarından biri de Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu yeni nesil kesirli türevleri için sistemin davranışını elde etmek ve Caputo türevi ile karşılaştırmaktır. Bunun için yine bu alt bölümde nümerik yöntemin algoritması Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevleri içinde verilmiştir. Optimal kontrol problemlerinde çeşitli kontrol stratejileri ve amaç fonksiyonları olabilir. Bu amaçla ikinci alt bölümde anti-virüs yazılımının kontrol fonksiyonu olarak sisteme farklı amaçlarla adapte edilmesinin iki alternatif stratejisi verilmiştir. Üçüncü alt bölümde ise elde edilen karşılaştırmalı nümerik sonuçlar verilmiştir. Öncelikle ana kontrol stratejisi Strateji 1 için sistemin kontrollü-kontrolsüz davranışının karşılaştırması, α kesirli mertebenin değişen değerleri için sistemin davranışı ve kontrol fonksiyonun davranışı sonuçlar arsındadır. Daha sonra kontrol stratejileri için sistemin cevabı ve kontrol fonksiyonunun cevabı verilmiştir. Son olarak Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevleri için sistemin davranışı ile kontrol fonksiyonun davranışı karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Tüm nümerik sonuçlar [43] temel çalışmasındaki sistem parametreleri kullanılarak ve MATLAB programı kullanılarak elde edilmiştir.

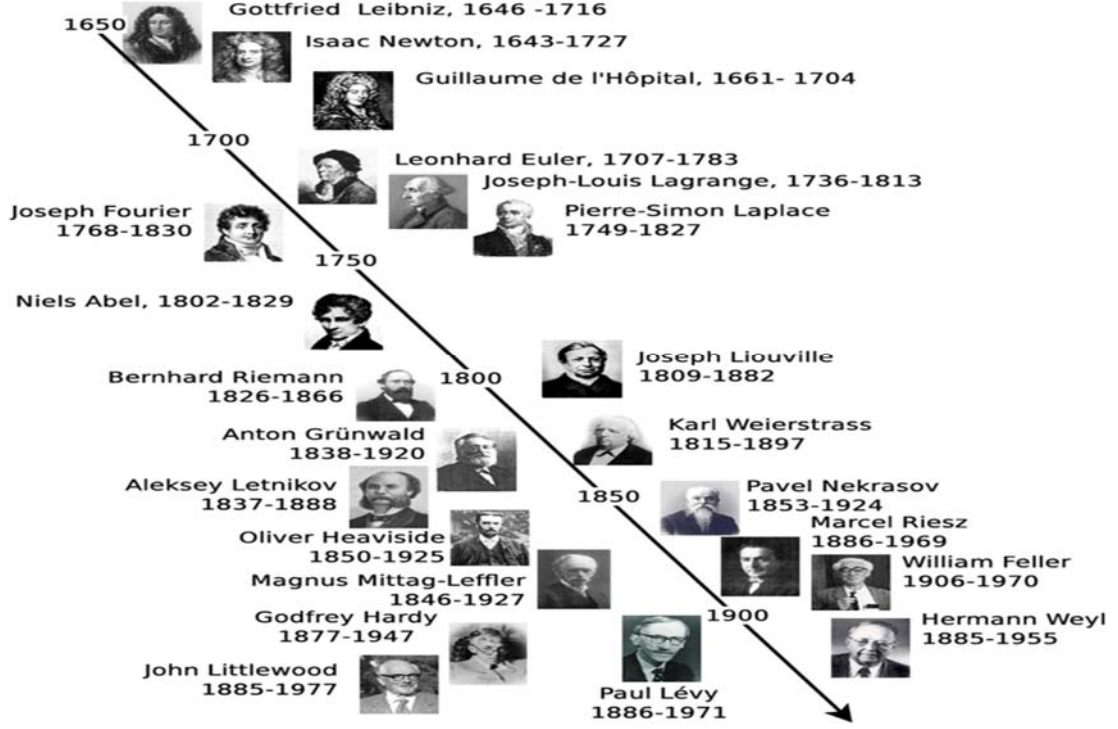
Yedinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve tezin son bölümü olan sekizinci bölümde ise kaynaklar yer almıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Kesirli Analize İlişkin Bazı Tanım ve Teoremler

Kesirli analiz, reel veya kompleks olabilen integrallerin ve türevlerinin hesabı ile ilgili bir teoridir ve bilim ve mühendisliğin birçok alanında gösterilmiş uygulamaları nedeniyle son yıllarda çok popüler hale gelmiştir. Birçok sistemin doğası, bunların kesirli diferansiyel denklemler kullanılarak daha hassas bir şekilde modellenebilmesini sağlar. Örneğin, bataryalarda kurulmuş olan difüzyon işleminden, bazı ısı transfer işleminden, indüksiyon makineleri ve diğerleri arasındaki frekansın etkisinden bahsedilebilir. Doğadaki birçok fiziksel ve biyolojik sürecin gerçeğine en uygun durumda matematiksel olarak modellenmesinde klasik analizin kavramları yeterli olmamaktadır. Bu durumun fark edilmesi, 1695'te Marquis de L'Hospital'in (1661-1704) Gottfried Wilhelm Leibniz'e (1646-1716) bir mektup ile yönelttiği "Bir fonksiyonun herhangi n . tamsayı mertebeden türevinin tanımlandığını biliyoruz. Peki, aynı şekilde $1/2$ 'nci mertebeden türevini tanımlayabilir miyiz?" sorusunun sorulduğu tarihe dayansa da matematiksel modelleme için ancak son zamanlarda önemli bir araç haline gelmiştir.



Şekil 2.1: Klasik ve kesirli analizin soyağacı.

16. yüzyılın ikinci yarısı ve 19. yüzyıllar arasında daha çok teorik matematiksel bir disiplin olarak gelişim gösteren kesirli analiz bilhassa 20. yüzyılın ikinci yarısından bu yana doğadaki fiziksel ve biyolojik süreçlerin modellenmesinde kesirli türevler ve integraller hızla artmıştır.

Literatürde yer alan kesirli operatörlerin başlıcaları: *Riemann-Liouville*(1855), *Grünwald-Letnikov*(1976), *Hadamard*, *Marchaud*, *Riesz*(1959), *Weyl*(1946), *Caputo* (1967), *Caputo-Fabrizio* (2015), *Atangana-Baleanu* (2016) vb. dir. Ele alınan uygulama probleminin tipine göre modelleme sürecindeki kesirli türev tanımı değişiklik gösterebilir.

2.1.1 Tanım (Gamma Fonksiyonu): $\Gamma : \mathbb{C} / \{\dots, -2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ için kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsak olan ve $\Gamma(\cdot)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonunun bir genelleştirmesidir ve önemli özelliklerinden bazıları aşağıdaki gibidir [44]:

$$i. \quad \Gamma(1)=1, \Gamma(2)=1, \Gamma(3)=2, \dots, \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!, n \in \mathbb{Z},$$

$$ii. \quad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0,$$

$$iii. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$iv. \quad \Gamma(0)=\infty, \Gamma(\infty)=0.$$

2.1.2 Tanım (Mittag-Leffler Fonksiyonu): $\zeta > 0$ olmak üzere bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu [45]

$$E_{\zeta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\zeta k + 1)}, z \in \mathbb{C}$$

biçiminde tanımlanır. $\zeta, \eta > 0$ olmak üzere iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu [46] ise

$$E_{\zeta, \eta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\zeta k + \eta)}, z \in \mathbb{C}$$

biçimindedir. Bu fonksiyonlar, üstel fonksiyonun genelleştirmesidir ve temel özelliklerinden bazıları aşağıdakilerdir:

$$i. \quad E_0(-z) = \frac{1}{1+z},$$

$$\text{ii. } E_{1/2}(-z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(z),$$

$$\text{iii. } E_{\zeta,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\zeta k + 1)} = E_{\zeta}(z),$$

$$\text{iv. } E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$\text{v. } E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$\text{vi. } E_{2,2}(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Ayrıca iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki özelliği sağlar [47]:

$$E_{\zeta,\eta}(z) = zE_{\zeta,\zeta+\eta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\eta)}. \quad (2.1)$$

Tezde ele alınan modelin çözümlerinin sınırlılığı gösterilirken kesirli mertebeden diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü yardımıyla çözümü araştırılırken aşağıdaki Laplace dönüşümü özelliğine ihtiyaç duyulur:

$$\mathcal{L}\{z^{\eta-1}E_{\zeta,\eta}(\pm \lambda z^{\zeta})\} = \frac{s^{\zeta-\eta}}{s^{\zeta} \mp \lambda}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Tanım (Caputo Kesirli Türevleri): n pozitif tamsayı olmak üzere $n-1 < \alpha < n$ ve $f, [a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde n . mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere f 'nin α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevleri sırasıyla

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

$${}^C D_b^\alpha f(t) = {}_t I_b^{n-\alpha} (-D)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır [48].

2.1.4 Tanım (Caputo Kesirli İntegrali): n pozitif tamsayı, $0 < \alpha < 1$ ve $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ n . mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere f 'nin α . mertebeden Caputo kesirli integrali

$${}^C I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.5 Tanım (Caputo Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü): $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ olsun. O halde, Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm özelliği

$$\mathcal{L}\{ {}^C D^\alpha f(t), s \} = s^\alpha \bar{f}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} f^{(i)}(0), \quad \alpha \in (n-1, n] \quad (2.6)$$

ile verilir [48]. Dikkat edilirse Caputo türevinin Laplace dönüşümü, tamsayı mertebeden fiziksel olarak yorumlanabilir başlangıç koşullarını gerektirir. Bu nedenle bu özelliği sayesinde uygulama problemlerinde sıkça kullanılır. Örneğin, $f(0)$ sürecin başlangıç durumunu, $f'(0)$ başlangıç hızını ve $f''(0)$ başlangıç ivmesini temsil eder.

2.1.1 Lemma: $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O halde aşağıdaki denklemler Caputo kesirli türevi için birbirine eşittir [49]:

$${}_i^C D_b^\alpha \lambda(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \quad (2.7)$$

$${}_0^C D_t^\alpha \lambda(b-t) = \frac{\partial H}{\partial x}(b-t, x(b-t), u(b-t), \lambda(b-t)). \quad (2.8)$$

İspat: Burada $\lambda \in AC[0, b]$, $\alpha \in (0, 1]$ ve $n = \lceil \alpha \rceil + 1$ için 2.1.3 Tanımını kullanarak

$${}_{b-t}^C D_b^\alpha \lambda(b-t) = {}_0^C D_t^\alpha \lambda(b-t)$$

olduğu gösterilecektir.

(2.4) eşitliğinde $n = 2$ ve $[a, b] = [0, b]$ alalım. Böylece

$${}_i^C D_b^\alpha \lambda(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} \lambda'(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $t \rightarrow b-t$ değişken dönüşümü yapılırsa

$${}_{b-t}^C D_b^\alpha \lambda(b-t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{b-t}^b (\tau-(b-t))^{-\alpha} \lambda'(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

eşitliğine ulaşılır. $z = b - \tau$ alınırsa

- $\tau - (b-t) = t - z,$
- $\tau = b - z \Rightarrow d\tau = -dz$

eşitlikleri elde edilir ve bunlar (2.9) denkleminde yerine yazılırsa

$${}_{b-t}^C D_b^\alpha \lambda(b-t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^0 (t-z)^{-\alpha} \lambda'(b-z)(-dz),$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^0 (t-z)^{-\alpha} (\lambda(b-z))' dz, \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} (\lambda(b-z))' dz, \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} \lambda'(\tau) d\tau, \\
&= {}_0^c D_t^\alpha \lambda(b-t),
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Caputo kesirli türevi uygulama problemlerin modellenmesinde bir çok avantaja sahip olmakla birlikte bazı hesapsal dezavantajları mevcuttur. Bunlardan ilki Caputo operatörünün singüler yapıda çekirdek fonksiyonuna sahip olmasıdır. Çünkü $\alpha \in (n-1, n)$, ($n \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere Caputo kesirli türevinin çekirdek fonksiyonu $t = \tau$ için $(t-\tau)^{n-\alpha-1} \rightarrow \infty$ olur. Bu da çekirdek fonksiyonunun singüler olmasına dolayısıyla Caputo operatörünün singüler bir operatör olarak adlandırılmasına sebep olur. Akla "*Bu singüler yapısı Caputo kesirli türevi açısından bir dezavantaj olabilir mi?*" sorusu gelmektedir. Bu sorunun cevabı şu şekilde açıklanabilir. Caputo kesirli türeviyle modellenen problemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça zordur ve hatta çoğu kez imkansızdır. Bu da pek çok nümerik yöntemin geliştirilmesine ortam hazırlamıştır. Her ne kadar bu bir dezavantaj olarak görülse de nümerik yöntemlerin geliştirilmesine olanak sağladığı için nümerik analiz açısından oldukça değerlidir. Diğer dezavantaj ise Caputo türevinin çekirdek fonksiyonu kuvvet fonksiyonu biçiminde olduğundan bu operatör üstel davranış gösteren fenomenleri modellemede yetersiz kalmaktadır. Örneğin bir virüs enfeksiyonunun artışı (örneğin COVID-19 veya çiçek hastalığı) ve bir kültürdeki mikroorganizma sayısının artışı, bileşik faiz nedeniyle borç artışı ve ekonomik büyüme, bilgisayarların işlem gücü ve video içeriklerinin izlenme sayısı gibi günlük yaşamdaki olaylar üstel yasaya uygun davranırlar.

Bunlar dikkate alınarak Caputo kesirli türevinin zayıf yönlerini gidermek için, singüler olmayan çekirdek fonksiyonuna sahip olan iki yeni kesirli türev literatüre kazandırılmıştır. İlki Caputo ve Fabrizio tarafından 2015 yılında tanımlanan Caputo-Fabrizio (CF) kesirli türevidir. Bu türev tanımı Caputo kesirli türev tanımında bazı değişiklikler yapılarak elde edilmiştir. Singüleriteye sebep olan $(t-\tau)^{-\alpha}$ çekirdek fonksiyonu yerine $\exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]$ fonksiyonu seçilmiş ve yine integral katsayısı $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}$ yerine $M(\alpha)$ fonksiyonu bir normleştirme fonksiyonu olmak üzere $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ kullanılmıştır. Bu değişikliklerle birlikte aşağıdaki tanım ortaya konulmuştur.

2.1.6 Tanım: (a, b) aralığında

$$H^1(a, b) = \{f \in L^2(a, b) \mid f' \in L^2(a, b)\} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan uzaya 1-boyutlu Sobolev uzayı denir [50].

2.1.7 Tanım (Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi): $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. O halde, Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] f'(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $M(\alpha)$ fonksiyonu normleştirme fonksiyonu $M(0) = M(1) = 1$ şartını sağlar [27].

(2.3) ve (2.4) ile (2.12) tanımlarına bakıldığında hem Caputo hem de Caputo-Fabrizio kesirli türevlerinde sabit fonksiyonun türevinin 0 olduğu açıkça görülmektedir. Ancak $t = \tau$ integral sınırı için Caputo türevinde singülerlik ortaya çıkarken Caputo-Fabrizio türevinde singülerlik durumu yoktur.

2.1.8 Tanım (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali): $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli integrali

$${}^{CF}I_t^\alpha f(t) = (1-\alpha)f(t) + \alpha \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır [27].

İkinci singüler olmayan kesirli türev ise Atangana ve Baleanu tarafından 2016 yılında tanımlanan Atangana-Baleanu (AB) kesirli türevidir. Bu türev tanımı Caputo-Fabrizio kesirli türevindeki çekirdek fonksiyonun Mittag-Leffler fonksiyonu ile yer değiştirilmesiyle orataya çıkmıştır. Atangana-Baleanu kesirli türevinin elde edilmiş şeması şu şekildedir:

$$E_\alpha(-t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.14)$$

Mittag-Leffler fonksiyonunu dikkate alalım. Aynı zamanda $\exp(-c(t-x))$ fonksiyonunun t noktasının bir komşuluğunda Taylor seri açılımı

$$\exp(-c(t-x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c(t-x))^k}{k!} \quad (2.15)$$

biçimindedir. (2.15) eşitliğinde özel olarak $c = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ alınır ve bu ifade (2.12) Caputo türevinin tanımında yerine yazılırsa

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k}{k!} \int_a^t (t-\tau)^k f'(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

elde edilir. Burada $k!$ yerine $\Gamma(\alpha k + 1)$ ve $(t-\tau)^k$ yerine $(t-\tau)^{\alpha k}$ yazılırsa

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha k} f'(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki tanım ortaya çıkar.

2.1.9 Tanım (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi): $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. O halde, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}_{a}^{ABC}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] f'(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

biçiminde tanımlanır [28].

2.1.10 Tanım (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali): $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere α . mertebeden Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli integrali

$${}_{a}^{ABC}I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır [28].

2.1.11 Tanım (Riemann-Liouville Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi): $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. O halde Riemann-Liouville anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}_{a}^{ABR}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t E_\alpha \left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] f(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

dir [28].

2.2 Diferansiyel Denklemler ve Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler Sistemleri

Doğadaki birçok fiziksel veya biyolojik olayları açıklamak için en etkili sistematik yol “diferansiyel denklem” dilini kullanmaktır. Çünkü bu süreçlerin oluşma hızı türevler

vasıtasıyla temsil edilir. Bir ya da daha fazla fonksiyonun ve o fonksiyonların türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem adı verilir. Diğer bir deyişle, fonksiyonlarla bu fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkiyi gösteren bir ifadedir. Newton'un ikinci hareket ve soğuma yasası, anlık bileşik faiz, Lambert'in soğrulma yasası, kimyasal tepkimeler, serbest düşme hareketi, boşalan bir tanktaki sıvı yüksekliği, salgın hastalıkların bir popülasyondaki artışı veya azalışı gibi fiziksel ve biyolojik durumları ifade eden problemleri anlamak, çözmek ve yorumlamak için diferansiyel denklemler bir ihtiyaçtır. Bu süreçler zaman bağımsız değişken ve birden fazla bağımlı değişkeni olan adi diferansiyel denklemler ile oluşturulan sistemler kullanılarak modellenir.

2.2.1 Tanım: $n \in \mathbb{N}$ ve $g: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. O halde

$$D^n x(t) = g(t, x(t)) \quad (2.21)$$

ifadesine *n.mertebeden adi diferansiyel denklem* adı verilir [51]. (2.21) eşitliği ile birlikte

$$D^k x(t_0) = x_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.22)$$

başlangıç koşulları verilirse bu durumda (2.21) ve (2.22) bir başlangıç değer problemi olarak tanımlanır. Eğer (2.21) eşitliğinde $n \in \mathbb{R}$ ya da $n \in \mathbb{C}$ olursa yani x bağımlı değişkenin t bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içerirse bu durumda (2.21) denkleminde kesirli mertebeden diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklem sistemleri, bir tek denklem yerine birlikte çözümleri gereken iki veya daha fazla denklem içeren uygulamadaki çoğu problemin analizinde kendiliğinden ortaya çıkar. Bu tür sistemlerde bağımlı değişkenler hem birbirlerine hem de bağımsız değişkene bağımlıdır.

t bağımsız değişken, x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$)'ler bağımlı değişkenler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = g_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\
\frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 = g_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \dot{x}_n = g_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))
\end{aligned} \tag{2.23}$$

normal form biçimindeki bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklem sistemine *adi (birinci mertebeden, tamsayı mertebeli) diferansiyel denklem sistemi* denir ve burada g_1, g_2, \dots, g_n bir I aralığındaki reel değerli sürekli fonksiyonlardır. $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, \mathbb{R}^n de vektörler olsun. O halde (2.23) sistemi

$$\dot{X} = G(t, X(t)) \tag{2.24}$$

biçiminde matris formunda ifade edilebilir [52].

2.2.2 Tanım: (2.24) sistemi, eğer t zamanına bağlı değilse zamanla değişmeyen veya otonom sistem olarak adlandırılır ve

$$\dot{X} = G(X(t)) \tag{2.25}$$

olarak yazılabilir. Eğer F fonksiyonu açık bir şekilde t 'ye bağlıysa, yani

$$\dot{X} = G(t, X(t))$$

ise (2.24) sistemi otonom olmayan sistem olarak adlandırılır [53].

Kesirli mertebeden türev ya da daha genel olarak keyfi reel ya da kompleks sayı mertebeden türev içeren sistemlere ise *kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemi* denir. Diğer bir ifadeyle tamsayı mertebeli sistemlerin genelleştirilmiş haline kesirli mertebeden sistemler adı verilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır [54]:

$$\begin{aligned}
{}^C D^\alpha x_1(t) &= g_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\
{}^C D^\alpha x_2(t) &= g_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\
&\vdots \\
{}^C D^\alpha x_n(t) &= g_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Burada ${}^C D^\alpha$ her bir x_i , ($i=1,2,\dots,n$) fonksiyonunun $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeden Caputo kesirli türevini göstermektedir.

2.3 Optimal Kontrol Teorinin Bazı Tanım ve Teoremleri

Optimal kontrol teorisi üç temel kavram üzerine kuruludur. Bunlar adi veya kısmi diferansiyel denklemlerle temsil edilen dinamik sistem, optimum değerinin bulunması amaçlanan amaç fonksiyoneli (performans indeksi), başlangıç/sınır koşulları ve amaç fonksiyonelinin optimum değerini vermeye yarayan kontrol fonksiyonudur. Dinamik sistemin her bir denklemini sistemin davranışını ifade eden durum ve kontrol fonksiyonlarından oluşur ve ayrıca sistemin her bir denklemini dinamik kısıt olarak adlandırılır. Bir optimal kontrol problemi (OKP) ise belli koşullar altında bir dinamik sisteme tabi olan amaç fonksiyoneli optimize (minimum veya maksimum) eden optimal kontrol fonksiyonunu belirleme problemidir [55]. Optimal kontrol problemi literatürde klasik optimal kontrol problemi olarakta yer almaktadır. Optimal kontrol problemlerinin uygulamaları 20.yy'ın ikinci yarısından itibaren birçok alanda yapılmıştır. Özellikle son yıllarda salgın hastalıklar ve kanser tedavileri gibi biyotıp alanlarında optimal kontrol çalışmaları giderek artmaktadır [39],[56].

Birçok uygulamada, kesirli türevler, dinamik sistemlerin davranışının diğer tekniklere göre daha iyi tanımlarını sağlar [57]. Bu nedenle kontrol teorisinde kesirli optimal kontrol adı verilen yeni bir alan ortaya çıkmıştır. Bir optimal kontrol problemi, eğer sistemin amaç fonksiyoneli veya dinamik kısıtlarından en az biri kesirli türev terimi veya terimleri içeriyorsa, bu probleme kesirli optimal kontrol problemi (KOKP) denir. KOKP'i ilk olarak 2004 yılında Agrawal tarafından ele alındı. Bu çalışmada, KOKP'ler için Riemann-Liouville kesirli türevleri açısından genel bir formülasyon verilmiştir ve KOKP'leri çözmek için nümerik bir yöntem ortaya konulmuştur [58]. Daha sonra yine Agrawal tarafından önce 2007

yılında yapılan [59] çalışmasında Riemann-Liouville kesirli türevi için Hamilton fonksiyonu yardımıyla KOKP' leri için optimallik koşulları verilmiş ve ardından 2008 yılında ise Caputo kesirli türevli bir optimal kontrol problemini çözmek için optimallik koşulları verilmiştir [60]. Bu optimallik koşullarını ifade etmek için aşağıdaki ön hazırlık yapılmıştır.

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$ kontrol vektörü ve $t \in [0, t_f] \subset \mathbb{R}$ zaman değişkeni olsun. Böylece kesirli optimal kontrol problemi şeması aşağıdaki şekildedir:

Kesirli diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemin dinamikleri

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.27)$$

başlangıç koşulu

$$x(0) = x_0 \quad (2.28)$$

olmak üzere (2.27) ve (2.28) birlikte kesirli kontrol sistemini ifade eder. Bu sisteme bağlı olan

$$J(t, x(t), u(t)) = \int_0^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.29)$$

amaç fonksiyoneli optimize eden optimal $u(t)$ kontrol fonksiyonunu bulma problemine de “Kesirli Optimal Kontrol Problemi (KOKP)” denir. Burada 0, sürecin başlangıç zamanını, t_f sürecin bitiş zamanını ve $x(0)$ ise sistemin $t = 0$ anındaki başlangıç durumunu göstermektedir. Son t_f zamanı sabit veya serbest olabilir. Sistemin $t = 0$ anındaki başlangıç konumu x_0 ve $t = t_f$ son anındaki konumu ise x_{t_f} ile gösterilmektedir. f ve g skaler ya da vektörel fonksiyonlardır. Ayrıca $g(t, x(t), u(t))$ fonksiyonu sürekli, tüm değişkenlerine göre sürekli türevlenebilir ve $u(t)$ kontrol fonksiyonu da parçalı sürekli bir fonksiyon

olmalıdır. (2.27) sistemini x_0 başlangıç konumundan x_{t_f} son konumuna ulaştırılan tüm kontrol değerlerinden (2.29) amaç fonksiyoneli optimize (minimum veya maksimum) eden kontrol değerine “*optimal kontrol*” denir. Agrawal 2004 yılındaki çalışmasında ${}_0D_t^\alpha x(t)$ türevi Riemann-Liouville kesirli türevi ve 2008 yılında ise Caputo kesirli türevi olarak ele alınmıştır. Şu da söylenebilir ki özel halde $\alpha = 1$ alınması ile kesirli optimal kontrol problemi klasik optimal kontrol problemine indirgenir.

Bir optimal kontrol problemi ortaya konulduktan sonra çözüm kısmına geçilir. Söz konusu optimal kontrol problemi olduğunda öncelikle optimal çözümü verecek olan gerekli optimallik koşulları (Euler-Lagrange denklemleri) elde edilmelidir. Bu koşullar Pontryagin ve arkadaşları tarafından geliştirilen “Pontryagin maksimum prensibi” ile elde edilir. Pontryagin maksimum prensibi, optimal kontrol problemlerinin çözümleri hakkında bilgi sağlayan bir dizi koşuldur. Bu koşullar için aşağıda tanımı verilen fonksiyona ihtiyaç vardır.

Bir optimal kontrol problemi için

$$\mathcal{H}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hamilton fonksiyonu denir. Bu fonksiyon aynı zamanda Pontryagin \mathcal{H} fonksiyonu olarak da bilinir [55]. Hamilton fonksiyonu yardımıyla sistemin performansı en uygun kontrol fonksiyonu ile optimum duruma gelmesi amaçlanır. (2.30) deki f fonksiyonu Lagrange fonksiyonu ve $\lambda(t)$ fonksiyonu ise Lagrange çarpamıdır ve ayrıca yardımcı durum fonksiyonu veya adjoint değişkeni olarak da bilinir. Bu fonksiyon amaç fonksiyoneline diferansiyel denklemi adapte etmek için Pontryagin tarafından ortaya konulmuştur. Yardımcı durum fonksiyonu dinamik kısıtları optimize edecek olan Hamilton fonksiyonuna Lagrange çarpamına benzer mantıkla adapte edilmiştir.

2.3.1 Teorem (Pontryagin’in Maksimum Prensibi): $u^*(t)$ ve $x^*(t)$, (2.27), (2.28) ve (2.29) ile verilen kontrol probleminin optimal çözümü olsun. O halde, her t anında tüm u kontrol fonksiyonları için

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq \mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

olacak şekilde parçalı sürekli bir $\lambda(t)$ yardımcı durum fonksiyonu vardır [42]. Burada \mathcal{H} Hamilton fonksiyonu

$$\mathcal{H}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$$

dir. Ayrıca

$${}_0D_t^\alpha \lambda(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)), \quad \forall t \in [0, t_f]$$

yardımcı durum denklemi ve

$$x(t_f) = 0$$

sınır koşuludur. Amaç fonksiyoneli maksimize eden ve minimize eden kontroller arasında ayırım yapmak için konkavlık koşulları kontrol edilmelidir [61]. Eğer u^* da

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} > 0$$

ise problem minimizasyon problemi, aksine u^* da

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} < 0$$

ise maksimizasyon problemi olarak adlandırılır.

Çeşitli kesirli türev tanımları 2.1.bölümde verilmiştir. Ancak bu tez çalışmasının ana gövdesini Caputo kesirli türevli bir sistem oluşturmaktadır. Bu sebeple (2.27) ve (2.29) KOKP için gerekli optimalite koşulları sol ve sağ Caputo kesirli türevleri cinsinden aşağıdaki gibidir [60]:

Lagrange çarpanı tekniği kullanılarak (2.27) ve (2.29) denklemleri birleştirilir. Elde edilen denklemin varyasyonları alınır ve gerekli işlemler yapılırsa buradan

$${}_0^c D_t^\alpha x(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = g(t, x(t), u(t)) \quad (\text{Durum denklemi}), \quad (2.31)$$

$${}_t^c D_{t_f}^\alpha \lambda(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \quad (\text{Yardımcı durum denklemi}), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0 \quad (\text{Kontrol denklemi}) \quad (2.33)$$

optimal kontrol için gerekli koşullar elde edilir. (2.31)-(2.33) denklem takımı yukarıda verilen KOKP için Hamilton fonksiyonu cinsinden optimallik koşullarıdır.

Şimdi ise farklı bir soru ortaya çıkmaktadır: “Acaba $J(u)$ amaç fonksiyoneli optimize (nimum veya maksimum) eden bir u optimal kontrol var mı?”. Bu soru bir varlık sorusudur ve dolayısıyla optimal kontrolün varlığı gösterilmelidir [61]. Optimal kontrolün varlığı gösterilirken kullanılan bazı tanımlar ve optimal kontrol varlık teoremi aşağıdaki gibidir.

2.3.1 Tanım (Konveks Küme): Bir $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ele alınsın. $\forall x_1, x_2 \in C$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$ ise, C kümesine \mathbb{R}^n de bir konveks küme denir [62].

2.3.2 Tanım (Konveks Fonksiyon): $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere, $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. $\forall x_1, x_2 \in C$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna C kümesinde bir konveks fonksiyon denir [62].

2.3.2 Teorem (Optimal kontrolün Varlığı): (2.27) sistemi, (2.28) başlangıç koşulu ve

(2.29) amaç fonksiyoneli ile verilen kesirli optimal kontrol problemi göz önüne alınsın. Bu durumda $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ durum vektörleri, U_{ad} boş kümeden farklı ve kompakt kontrol fonksiyonlarının kabul edilebilir kümesi olmak üzere $u \in U_{ad}$ kontrolü ve $0 \leq t \leq t_f$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında optimal kontrol probleminin bir çözümü vardır yani $\exists u^* \in U_{ad}$ öyle ki $J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$ dir.

- (i) Kontrol ve kontrole karşılık gelen durum değişkenlerinin kümesi boş değildir;
- (ii) U_{ad} kümesi konveks ve kompakttır;
- (iii) (2.27) sisteminin sağ tarafı süreklidir, aynı zamanda durum ve kontrol değişkenleri doğrusal bir fonksiyon ile üstten sınırlıdır;
- (iv) $J(u)$ ' nun integrandı U_{ad} üzerinde konveks ve üstten sınırlıdır;
- (v) $J(u)$ ' nun integrandı için $d_1, d_2 > 0$ ve $\gamma > 1$ sabitleri vardır öyle ki

$$f(t, x(t), u(t)) \geq d_1 \left(|u(t)|^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} - d_2$$

sağlanır.

3. BİLGİSAYAR VİRÜS YAYILIMI İÇİN BİR SEIR MODELİ

Tezde amaçlanan küçük ölçekli bir internet ağındaki bir bilgisayar virüsünün yayılmasını kontrol altına alan optimal anti-virüs programı yükleme stratejilerinin incelenmesidir. Bu yayılımı temsil eden bir SEIR modeli göz önüne alınmıştır. Model ilk olarak Mei Peng ve diğ. tarafından 2013 yılında önerilmiştir [63]. Bu çalışmada model, tamsayı mertebeden türevli olarak tanımlanmıştır. Yine aynı çalışmada modelin eşik parametresi olan yeniden üreme sayısı R_0 ve denge noktaları hesaplanarak modelin kararlılık analizi yapılmıştır. Daha sonra Ebenezer Bonyah ve diğ. tarafından 2015 yılında yapılan [43] çalışmasında aynı model Caputo kesirli türevi ile yeniden göz önüne alınarak sistemin yeniden üreme sayısı R_0 ve denge noktalarını bulunarak kesirli mertebeden sistemin kararlılık analizi ortaya konulmuştur.

Bir anti-virüs kontrol stratejisi olmadan ele alınan model aşağıdaki gibidir [43]:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha S(t) &= (1-p)N - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)E(t) - pS(t) - \mu S(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha E(t) &= \beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)E(t) - kE(t) - \sigma E(t) - \mu E(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha I(t) &= \sigma E(t) - dI(t) - \mu I(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha R(t) &= pS(t) + kE(t) + dI(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

(3.1) modeli internet ağına bağlı bir bilgisayar popülasyonunun ağıdaki virüs saldırısı sonucu gösterdiği davranışı ifade etmektedir. Modeldeki ${}_0^C D_t^\alpha$ Caputo kesirli türevini gösterir ve $0 < \alpha < 1$ dir.

Öncelikle (3.1) modelinin kompartımanlarını ve parametrelerini açıklayalım. Bir bilgisayar ağında iki olasılık vardır: Bilgisayar internete bağlıysa bu bağlantı dahili, değilse harici olarak adlandırılır. Dahili bir bilgisayar ağındaki virüs yayılımını modellemek için bilgisayar popülasyonu dört kompartımana ayrılır. Bir t anındaki toplam popülasyon $N(t)$ olmak üzere

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır. $S(t)$, t anında ağdaki virüs bulaşmamış ve ağa yeni bağlanan virüse duyarlı bilgisayarları, $E(t)$, virüs tehdidi altında olan yani virüse maruz kalan bilgisayarları, $I(t)$, virüs bulaşmış ve enfekte olmuş bilgisayarları, yani virüs taşıyan bilgisayarları, son kompartıman olan $R(t)$ ise, virüssüz olan veya virüsten kurtarılmış bilgisayarları ifade eder.

(3.1) modelinin parametreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3.1: (3.1) bilgisayar virüsü SEIR modelindeki parametreler ve tanımları.

Parametre	Tanım
p	Ağın doğal anti-virüs yeteneği ile duyarlı bilgisayarların kurtarılma oranı
β_1	Virüslü ve duyarlı bilgisayarların etkileşim oranı
β_2	Virüslü ve virüse maruz kalan bilgisayarların etkileşim oranı
μ	Mekanik vb. nedenlerle bilgisayarların arızalanma oranı
k	Ağın doğal anti-virüs yeteneği ile virüs tehdidi altındaki bilgisayarların kurtarılma oranı
σ	Virüs tehdidi altındaki ve bir anti virüs programı tarafından kurtarılamayan ve bozulabilen bilgisayarların oranı
d	Virüslü bilgisayarların doğal kurtarılma oranı

Tablodaki parametre değerleri epidemiyolojik ve matematiksel açıdan anlamlı olan pozitif değerlerdir.

Ebenezer Bonyah ve diğ. [43], kesirli türevlerin hafızalı yapıya sahip olmasının bir bilgisayar virüsü yayılımının gerçekçi modellenmesine imkân vereceğinden yola çıkarak modeli kesirli mertebeye genelleştirmişlerdir.

Sonraki bölümlerde, hesaplama kolaylığı için aşağıdaki kısaltmayı kullanıyoruz:

$$(1 - p)N = \Lambda .$$

4. BİLGİSAYAR VİRÜS YAYILIMI İÇİN OPTİMAL KONTROL STRATEJİLERİ

Bu bölümde amaçlanan (3.1) sistemi için öngörülen optimal kontrol stratejilerinin sisteme uyarlanmasıdır.

4.1 Strateji 1

Bu bölümde bu çalışmanın birincil amacı, (3.1) sistemini optimal kontrol problemi olarak ele almaktır. Bunun için (3.1) sisteminin temsil ettiği virüs yayılımını azaltacak bir anti-virüs yazılımı kontrol fonksiyonu olarak sisteme adapte edilmiştir. Çünkü ağın doğasında bulunan virüsten koruma özelliği çoğu zaman yeterli olmadığından, ağa bir virüsten koruma programı yüklemek kaçınılmazdır. Virüsten koruma programı ağdaki bilgisayarlara farklı amaçlarla da kurulabilir. Bunu nümerik sonuçların verildiği 6.2 bölümünde farklı kontrol stratejilerinin karşılaştırılması olarak vereceğiz. Bu stratejide (3.1) modeline, virüse duyarlı, virüslü bilgisayarlara ve bunlarla etkileşime giren diğer bilgisayarlara anti-virüs programı yüklediğimizi varsayıyoruz. Çünkü bir anti-virüs programı bilgisayar virüslerinden korunmak, kötü amaçlı yazılımları engellemek, tespit etmek ve devre dışı bırakmak amacıyla kullanılan bilgisayar programıdır. $u(t)$ kontrol fonksiyonu bir anti-virüs programı yüklenen bilgisayarların oranını temsil eder. Lebesgue ölçülebilir olan kabul edilebilir kontrol fonksiyonu kümesi

$$U_{ad} = \left\{ u(t) \in L^2[0, t_f] : u(t) \in [0, 1], \forall t \in [0, t_f] \right\} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

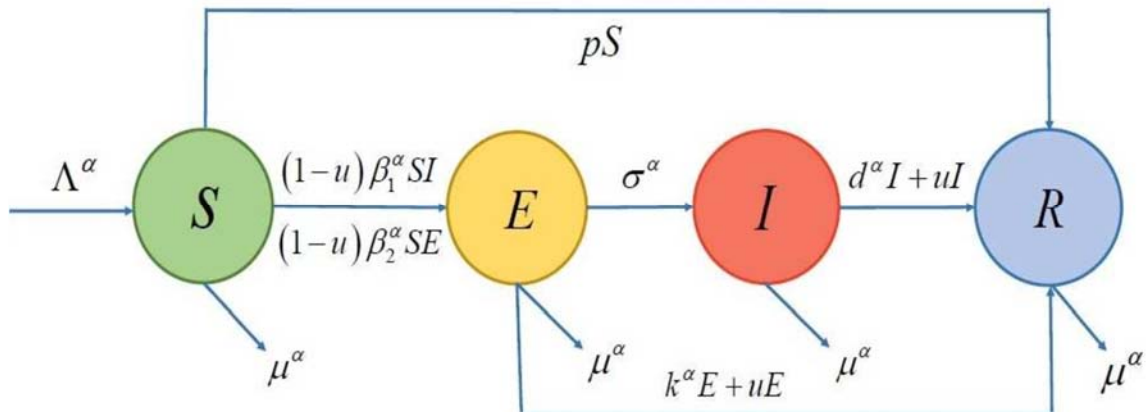
Dikkate aldığımız noktalardan biri, bilgisayarlar virüsler nedeniyle kullanılamaz hale gelebildiği gibi mekanik nedenlerle de kullanım dışı kalabilirler. Bu nedenle, [63] ve [43] çalışmalarından farklı olarak, virüsten arındığı halde mekanik nedenlerle bozulan bilgisayarların oranını temsil eden μ dikkate alınmıştır. $\mu R(t)$ terimini (3.1) sistemine uyarlıyoruz. Diğer yandan kesirli türevli sistemler için önem arz eden boyut uygunluğunun

Ebenezer Bonyah ve diğ. tarafından göz önüne alınmadığı fark edilerek sistemin boyut uygunluğu da garanti altına alınmıştır [64].

Böylece, bu varsayımlar ile geliştirilen kontrollü model [65] çalışmasındaki kontrol ekleme stratejisi dikkate alınarak aşağıdaki biçimde ortaya konmuştur:

$$\begin{aligned}
 {}_0^C D_t^\alpha S(t) &= \Lambda^\alpha - (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) - (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) - pS(t) - \mu^\alpha S(t), \\
 {}_0^C D_t^\alpha E(t) &= (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u(t))E(t), \\
 {}_0^C D_t^\alpha I(t) &= \sigma^\alpha E(t) - d^\alpha I(t) - \mu^\alpha I(t) - u(t)I(t), \\
 {}_0^C D_t^\alpha R(t) &= pS(t) + k^\alpha E(t) + d^\alpha I(t) + u(t)E(t) + u(t)I(t) - \mu^\alpha R(t).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Modeldeki kompartımlar arasındaki geçişi temsil eden akış diyagramı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.1: Bilgisayar virüsü yayılımının akış diyagramı.

4.2 Kontrollü Modelin Çözümlerinin Pozitifliği ve Sınırlılığı

[43] çalışmasında (3.1) sisteminin çözümlerinin pozitifliği ve sınırlılığı gösterilmiştir.

Benzeri burada ise (4.2) kontrollü sistemi için yapılmıştır. Bu amaçla, aşağıdaki Lemma ile verilecek olan genelleştirilmiş ortalama değer teoremini dikkate almaktayız.

4.2.1 Lemma(Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi): $f(t) \in C[t_0, t_f]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için ${}_0^C D_t^\alpha f(t) \in C[t_0, t_f]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall t \in (t_0, t_f)$ için

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} {}_0^C D_t^\alpha f(\xi) (t - t_0)^\alpha, \quad t_0 \leq \xi \leq t$$

eşitliği vardır [66].

4.2.1 Sonuç: $f(t) \in C[t_0, t_f]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için ${}_0^C D_t^\alpha f(t) \in C[t_0, t_f]$ olduğunu varsayalım.

5.2.1 Lemma'dan eğer

(i) $\forall t \in (t_0, t_f)$ için ${}_0^C D_t^\alpha f(t) \geq 0$ ise $\forall t \in [t_0, t_f]$ için $f(t)$ azalmayan fonksiyondur,

(ii) $\forall t \in (t_0, t_f)$ için ${}_0^C D_t^\alpha f(t) \leq 0$ ise $\forall t \in [t_0, t_f]$ için $f(t)$ artmayan fonksiyondur [66].

Bir internet ağında virüs yayılımının başlayacağını sinyalini veren en az bir duyarlı bilgisayar olmalıdır. Bu durum virüse maruz kalan, virüsle enfekte olmuş ve kurtarılan sınıfın da sayısını belirler. Ya virüs yayılımı devam eder ve bu kompartımanlarda en az bir bilgisayar olur ya da virüs yayılımı devam etmez ve bu kompartımanlarda hiç bilgisayar olmaz. Sonuç olarak (4.2) sistemi

$$S(0) = S_0 > 0,$$

$$E(0) = E_0 \geq 0,$$

$$I(0) = I_0 \geq 0,$$

$$R(0) = R_0 \geq 0,$$

(4.3)

negatif olmayan başlangıç koşulları ile birlikte ele alınacaktır. (4.3) başlangıç koşullarıyla birlikte (4.2) sistemi bir başlangıç problemi olur. Bu problemin çözümleri her bir kompartımandaki bilgisayar sayısına karşılık geldiği için çözümlerin negatif bölgede kalmaması gerekir. Bu nedenle çözüm kümesinin pozitif invaryantlığı araştırılır.

4.2.1 Teorem: $\Omega_+ = \{ (S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4; S > 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0 \}$ bölgesi, (4.2) kontrollü sistemi için pozitif invaryant bir kümedir.

İspat: (4.2) modelinin parametrelerinin tanımlarından aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$${}_0^C D_t^\alpha S \Big|_{S=0} = (1-p)N^\alpha = \Lambda^\alpha > 0,$$

$${}_0^C D_t^\alpha E \Big|_{E=0} = (1-u)\beta_1^\alpha SI \geq 0,$$

$${}_0^C D_t^\alpha I \Big|_{I=0} = \sigma^\alpha E \geq 0,$$

$${}_0^C D_t^\alpha R \Big|_{R=0} = pS + k^\alpha E + d^\alpha I + uE + uI \geq 0,$$

(4.4)

Eğer (4.4)'ten $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in \Omega_+$ ise 4.2.1 Sonuçtan $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ çözümü $S = 0, E = 0, I = 0$ ve $R = 0$ hiperdüzlemlerine aittir. Ayrıca, bu hiperdüzlemlerin her birinin vektör alanı Ω_+ 'ya dahildir. Bu, çözümlerin Ω_+ bölgesinde kalacağı anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, pozitif değişmez Ω_+ kümesinin sınırlılığını ispatlayalım.

4.2.2 Teorem:

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4; S > 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + E + I + R \leq \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} \right\}$$

olarak tanımlanan bölge, (4.2) sistemi için sınırlı bir kümedir.

İspat: (4.2) sistemi taraf tarafa topladığında

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha (S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) &= \Lambda^\alpha - \mu^\alpha (S(t) + E(t) + I(t) + R(t)), \\ &\leq \Lambda^\alpha - \mu^\alpha (S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinden

$${}_0^C D_t^\alpha N(t) \leq \Lambda^\alpha - \mu^\alpha N(t) \quad (4.5)$$

yazılabilir. (4.5) eşitsizliğine (2.3) deki Laplace dönüşümünü uygularsak

$$s^\alpha \bar{N}(s) - s^{\alpha-1} N(0) \leq \frac{\Lambda^\alpha}{s} - \mu^\alpha \bar{N}(s)$$

veya buna denk olarak

$$\bar{N}(s) \leq \frac{s^{-1}}{s^\alpha + \mu^\alpha} \Lambda^\alpha + \frac{s^{-1}}{s^\alpha + \mu^\alpha} N(0)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin ters Laplace dönüşümü alınırsa (2.1) ve (2.2) özelliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} N(t) &\leq \Lambda^\alpha t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\mu^\alpha t^\alpha) + E_{\alpha, 1}(-\mu^\alpha t^\alpha) N(0), \\ &\leq \Lambda^\alpha t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\mu^\alpha t^\alpha) + E_{\alpha, 1}(-\mu^\alpha t^\alpha) \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}, \\ &= \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha} \end{aligned} \quad (4.6)$$

sonucuna ulaşılır. O halde (4.6) eşitsizliğinden ve 4.2.1 Teoreminden $0 < N(t) \leq \frac{\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha}$ dir.

Böylece, (4.2) sisteminin çözüm kümesi sınırlıdır. Bu ise başlangıç değer probleminin iyi tanımlı olduğunu gösterir.

4.3 Kontrollü Modelin Denge Noktaları ve R_0 Temel Üreme Sayısı

4.3.1 Tanım: (2.24) sistemi göz önüne alınsın. $\forall t \geq 0$ için $G(X_e, t) = 0$ özelliğindeki eşitliği sağlayan sabit X_e çözümüne (2.24) sisteminin denge (kritik) noktası adı verilir [53].

(4.2) sistemini aşağıdaki biçimde gösterelim:

$${}_0^C D_t^\alpha S(t) = g_1(t, S, E, I, R, u),$$

$${}_0^C D_t^\alpha E(t) = g_2(t, S, E, I, R, u),$$

$${}_0^C D_t^\alpha I(t) = g_3(t, S, E, I, R, u),$$

$${}_0^C D_t^\alpha R(t) = g_4(t, S, E, I, R, u).$$

Burada

$$g_1(t, S, E, I, R, u) = \Lambda^\alpha - (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) - (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) - pS(t) - \mu^\alpha S(t),$$

$$g_2(t, S, E, I, R, u) = (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u(t))E(t),$$

$$g_3(t, S, E, I, R, u) = \sigma^\alpha E(t) - d^\alpha I(t) - \mu^\alpha I(t) - u(t)I(t),$$

$$g_4(t, S, E, I, R, u) = pS(t) + k^\alpha E(t) + d^\alpha I(t) + u(t)E(t) + u(t)I(t) - \mu^\alpha R(t)$$

dir. (4.2) sisteminin denge noktaları

$$g_1(t, S, E, I, R, u) = 0, \tag{4.7}$$

$$g_2(t, S, E, I, R, u) = 0, \tag{4.8}$$

$$g_3(t, S, E, I, R, u) = 0, \tag{4.9}$$

$$g_4(t, S, E, I, R, u) = 0 \tag{4.10}$$

eşitliklerinin çözülmesiyle elde edilecektir. (4.9) eşitliğinden

$$I = \frac{\sigma^\alpha E}{d^\alpha + \mu^\alpha + u} \quad (4.11)$$

kolayca olduğu görülebilir. (4.8) eşitliğinde (4.11) yerine yazılırsa

$$E \left[\frac{(1-u)\beta_1^\alpha \sigma^\alpha S}{d^\alpha + \mu^\alpha + u} + \beta_2^\alpha (1-u)S - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) \right] = 0$$

elde edilir. Buradan

$$E = 0 \quad (4.12)$$

veya

$$\frac{(1-u)\beta_1^\alpha \sigma^\alpha S}{d^\alpha + \mu^\alpha + u} + \beta_2^\alpha (1-u)S - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) = 0 \quad (4.13)$$

dır. Sonuç olarak, (4.2) kontrollü sistemi iki tane denge noktasına sahiptir.

4.3.1 Virüssüz Denge Noktası

Virüssüz denge noktası, virüslü bilgisayarın olmadığı durumu ifade eder, yani $I = 0$ dır. İlk olarak, (4.2) sisteminin virüssüz denge noktasını elde etmek için (4.12)'deki $E = 0$ durumunu ele alıyoruz. Böylece (4.11) eşitliğinden $I = 0$ dır. (4.7)-(4.10) denklemlerinde $E = 0$ ve $I = 0$ yerine yazılırsa

$$S = \frac{\Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha}$$

ve

$$R = \frac{p\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha(p + \mu^\alpha)}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.2) sisteminin virüssüz denge noktası aşağıdaki biçimdedir:

$$E^0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{\Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha}, 0, 0, \frac{p\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha(p + \mu^\alpha)} \right). \quad (4.14)$$

4.3.2 Temel Üreme Sayısı: R_0

Koronavirüs salgını sebebiyle son yıllarda adı sıkça duyulan ve kitlesel olarak öğrenilen bilimsel kavramlardan birisi temel üreme sayısıdır. Tamamen duyarlı bir popülasyonda, birincil bulaşıcı vakanın bulaşıcılık dönemi boyunca ürettiği ikincil vakaların sayısı, temel üreme sayısı olarak bilinir. Bu sayı temel bulaşıcılık katsayısı olarak da adlandırılır ve R_0 notasyonu ile gösterilir. Epidemik salgınlar için bu sayı, virüsün bulaştığı her bir kişinin kendisinden başka ortalama kaç kişiye bulaştırabileceğini gösterir. Temel üreme sayısı önemlidir, çünkü bu sayı yardımıyla salgının epidemiye veya pandemiye dönüşüp dönüşmeyeceği, eğer dönüşecekse bile bunun önüne geçmek için virüsün bulaşıcılığının ne oranda önlenmesi gerektiği tespit edilebilir. Bu durumda önümüzde üç senaryo vardır:

- $R_0 < 1$ ise, her bir enfeksiyon ortalama 1'den az sayıda yeni enfeksiyona yol açabiliyor demektir. Böylece viral enfeksiyonlar giderek azalacak ve salgın duracaktır.
- $R_0 = 1$ ise, her bir enfeksiyon, ortalama olarak bir diğer enfeksiyona yol açıyor demektir. Bu durumda hastalık varlığını sürdürecektir; ama ne salgına dönüşecek ne de sönümlenecektir. Yani bir endemi durumu oluşur.
- $R_0 > 1$ ise, her bir enfeksiyon, ortalamada 1'den daha fazla sayıda yeni enfeksiyona yol açmaktadır. Bu durumda virüs popülasyona yayılır ve hastalık bir epidemiye veya pandemiye dönüşebilir.

Yani bir virüsün küresel salgına dönüşebilmesi için $R_0 > 1$ olmalıdır. Bu, tek başına yeterli değildir; fakat salgının seyri hakkında bilgi veren önemli faktörlerden birisidir. Sonuç olarak

salgını kontrol altına almak için gereken önlemlerin doğru zamanda yapılmasına olanak sağlar.

Bir bilgisayar virüsü yayılım modeli için ise R_0 sayısı, virüslü bir bilgisayarın neden olduğu yeni virüslü bilgisayarların sayısını temsil eder. Epidemiyolojik açıdan değerlendirildiğinde, R_0 , virüsün bilgisayar popülasyonunda kaybolup kaybolmayacağını tespit etmede kritik bir rol oynar. Yukarıdaki senaryoları düşündüğümüzde bilgisayar sistemindeki R_0 şu bilgileri verir. $R_0 < 1$ ise virüsün bilgisayardaki etkisi azalır ve bilgisayar popülasyonundaki virüs yok olur. $R_0 > 1$ ise bulaşıcı bilgisayarlar artar ve virüs popülasyondaki yıkıcı etkisini sürdürür, $R_0 = 1$ ise virüs bulaştığı bilgisayarda kalır ve diğer bilgisayara geçiş söz konusu değildir.

[63]'te tamsayı mertebeden ve [43]'te de kesirli mertebeden kontrolsüz sistem için R_0 sayısı hesaplanmıştır. Tez kapsamında ele alınan kontrollü sistemde kontrol parametresi yani anti-virüs programı virüsün bulaşmasını azaltıcı yönde etki ettiğinden R_0 sayısı da yeniden hesaplanmalıdır [67]. Bu hesaplama, yeni nesil matris tekniği ile yapılır [68], [69]. Yeni nesil matrisi $\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$ ile gösterilir ve

$$R_0 = \rho(\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1})$$

ile temel üreme sayısı hesaplanır. Burada, \mathcal{F} , kompartımanlarda yeni enfeksiyonların ortaya çıkma oranlarını ifade eden negatif olmayan matristir ve \mathcal{V} , kompartımanlar arasındaki geçiş durumlarının oranlarını ifade eden tekil olmayan matrisi, ρ , $\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$ matrisinin spektral yarıçapı yani en büyük pozitif özdeğerini ifade eder. Ayrıca $\mathcal{V} = \mathcal{V}^- - \mathcal{V}^+$ biçimindedir. Burada \mathcal{V}^- , kompartımanlardaki çıkış oranlarının matrisini ve \mathcal{V}^+ ise kompartımanlardaki geçiş oranlarının matrisini temsil eder.

Şimdi (4.2) kontrollü sisteminin R_0 temel üreme sayısı aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

4.3.2.1 Lemma (4.2) sisteminin temel üreme sayısı

$$R_0 = \frac{\Lambda^\alpha (1-u) (\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u))}{(p + \mu^\alpha) (d^\alpha + \mu^\alpha + u) (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)} \quad (4.15)$$

dır.

İspat: (4.2) sistemine ait $\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{V}^+(t)$ ve $\mathcal{V}^-(t)$ matrisleri sırasıyla

$$\mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}^+(t) = \begin{bmatrix} \Lambda^\alpha \\ 0 \\ \sigma^\alpha E(t) \\ pS(t) + k^\alpha E(t) + d^\alpha I(t) + u(t)E(t) + u(t)I(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}^-(t) = \begin{bmatrix} (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) + pS(t) + \mu^\alpha S(t) \\ k^\alpha E(t) + \sigma^\alpha E(t) + \mu^\alpha E(t) + u(t)E(t) \\ d^\alpha I(t) + \mu^\alpha I(t) + u(t)I(t) \\ \mu^\alpha R(t) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (4.2) sistemi

$$\begin{bmatrix} g_1(t, S, E, I, R, u) \\ g_2(t, S, E, I, R, u) \\ g_3(t, S, E, I, R, u) \\ g_4(t, S, E, I, R, u) \end{bmatrix} = \mathcal{F}(t) - \mathcal{V}^-(t) + \mathcal{V}^+(t) = \mathcal{F}(t) - \mathcal{V}(t)$$

formunda yazılabilir. Ardından $\mathcal{F}(t)$ ve $\mathcal{V}(t)$ matrislerinin Jakobiyen matrisleri

$$J_{\mathcal{F}}(S, E, I, R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-u)(\beta_1^\alpha I + \beta_2^\alpha E) & (1-u)\beta_2^\alpha S & (1-u)\beta_1^\alpha S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$J_{\mathcal{V}}(S, E, I, R) = \begin{bmatrix} (1-u)(\beta_1^\alpha I + \beta_2^\alpha E) + p + \mu^\alpha & (1-u)\beta_2^\alpha S & (1-u)\beta_1^\alpha S & 0 \\ 0 & k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^\alpha & d^\alpha + \mu^\alpha + u & 0 \\ -p & -k^\alpha - u & -d^\alpha - u & \mu^\alpha \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $E^0 = \left(\frac{\Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha}, 0, 0, \frac{p\Lambda^\alpha}{\mu^\alpha(p + \mu^\alpha)} \right)$ virüssüz denge noktası $J_{\mathcal{F}}(S, E, I, R)$

ve $J_{\mathcal{V}}(S, E, I, R)$ Jakobiyen matrislerinde yerine yazılırsa

$$J_{\mathcal{F}}(S, E, I, R)|_{E^0 = F_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & \frac{(1-u)\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$J_{\mathcal{V}}(S, E, I, R)|_{E^0 = V_0} = \begin{bmatrix} p + \mu^\alpha & \frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & \frac{(1-u)\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & 0 \\ 0 & k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^\alpha & d^\alpha + \mu^\alpha + u & 0 \\ -p & -k^\alpha - u & -d^\alpha - u & \mu^\alpha \end{bmatrix}$$

bulunur. Son olarak $F_0 V_0^{-1}$ matrisi hesaplandığında özdeğerlerin kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left\{ 0, 0, 0, \frac{\Lambda^\alpha (1-u) (\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u))}{(p + \mu^\alpha) (d^\alpha + \mu^\alpha + u) (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)} \right\}. \quad (4.16)$$

(4.16) kümesinde tek bir pozitif özdeğer vardır ve bu da (4.2) sisteminin temel üreme sayısıdır yani

$$R_0 = \rho(F_0 V_0^{-1}) = \frac{\Lambda^\alpha (1-u) (\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u))}{(p + \mu^\alpha) (d^\alpha + \mu^\alpha + u) (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)}$$

dır.

4.3.3 Endemik Denge Noktası

Bu bölümde (4.2) sisteminin diğer denge noktası olan endemik denge noktasını hesaplayalım.

İlk olarak (5.13) eşitliğinden

$$S^1 = \frac{(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)(d^\alpha + \mu^\alpha + u)}{(1-u)\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + (1-u)\beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)} \quad (4.17)$$

elde edilir. Ardından (4.7) ve (4.8) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\Lambda^\alpha - pS - \mu S - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)E = 0$$

eşitliğine ulaşılır ve buradan S^1 'e karşılık gelen

$$E^1 = \frac{\Lambda^\alpha - (p + \mu)S^1}{k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u} \quad (4.18)$$

$$= \frac{\Lambda^\alpha \left[(1-u)\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + (1-u)\beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u) \right] - (p + \mu)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)(d^\alpha + \mu^\alpha + u)}{\left[(1-u)\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + (1-u)\beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u) \right] (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)}$$

dir. (4.9) dan $g_3(t, S, E, I, R, u) = 0$ olduğundan

$$I^1 = \frac{\sigma^\alpha E^1}{d^\alpha + \mu^\alpha + u} \quad (4.19)$$

bulunur ve son olarak (4.10) daki $g_4(t, S, E, I, R, u) = 0$ eşitliğinden

$$R^1 = \frac{pS^1 + (k^\alpha + u)E^1 + (d^\alpha + u)I^1}{\mu^\alpha} \quad (4.20)$$

elde edilir. Böylece endemik denge noktası

$$E^1 = (S^1, E^1, I^1, R^1) \quad (4.21)$$

elde edilmiş olur.

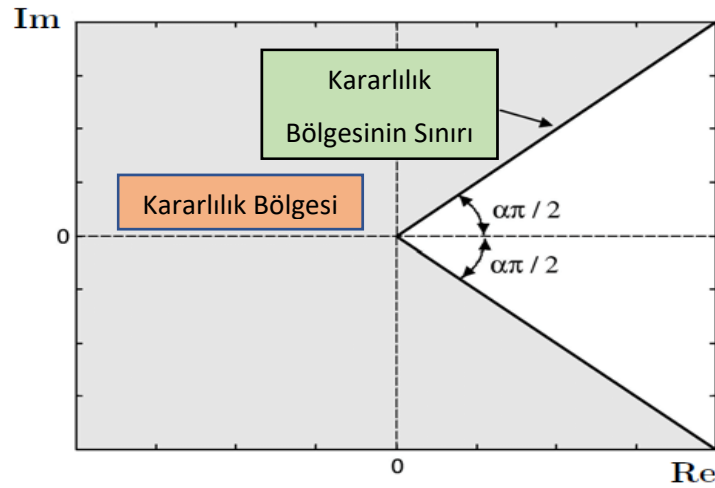
4.4 Kontrollü Sistemin Kararlılık Analizi

Diferansiyel denklem sistemleri için iki önemli konu ön plandadır. Bunlardan ilki, sistemin çözümünün varlığı ve tekliği, ikincisi ise sistemin kararlı olup olmadığıdır. Kontrol teoride amaç sistemin istenilen bir değere ulaşmasını sağlayacak kontrol parametresinin seçimidir. Ancak sistemin bu değere ulaşması kadar bu değerde kalması (veya izlemesi) da önemli bir problemdir. Bu durum sistemin kararlılığına bağlıdır.

Kararlılık matematik ve mühendislikte üzerinde durulan en önemli konulardan biridir. Hem sistem teorisinde hem de mühendislik sistemlerinde önemli bir role sahiptir. Dinamik sistemler ve kontrol en aktif alanlardan biridir ve birçok yazar kesirli mertebeden sistemlerinin kararlılığına odaklanmıştır. Bununla birlikte, kısa bir süre içinde çok sayıda çaba nedeniyle,

katkılar literatür boyunca dağılmıştır ve araştırmacıların günümüzdeki bilgisinin tam ve sistematik bir resmine sahip olması zorlaşmaktadır. Dinamik sistemlerin incelenmesi ile ortaya çıkan birçok denge problemi vardır, örneğin denge noktalarının kararlılığı, Lyapunov kararlılığı, sonlu zaman kararlılığı, pratik kararlılık, teknik kararlılık, periyodik yörüngelerin kararlılığı ve giriş-çıkış kararlılığı gibi.

Bir dinamik sistem ister tamsayı ister kesirli mertebeden olsun, her ikisi için de denge noktaları aynıdır. Farkı ortaya çıkaran durum ise kararlılık bölgeleridir yani kesirli mertebeden sistemin denge noktasındaki kararlılık bölgesi, klasik sistemin aynı noktadaki kararlılık bölgesinden daha büyüktür [70]. Bu, (4.2) sisteminin denge noktalarındaki kararlılığının incelenmesinin önemini vurgulamaktadır.



Şekil 4.2: $0 < \alpha < 1$ için kesirli mertebeden bir sistemin kararlılık bölgesi.

[63] çalışmasında (3.1) sisteminin tamsayı mertebeden durumu için elde edilen virüssüz ve endemik denge noktalarındaki yerel ve global kararlılığı incelenmiştir. Ardından [43] çalışmasında (3.1) sistemi yani kesirli mertebeden sistemin virüssüz ve endemik denge noktalarındaki kararlılığı sadece yerel olarak ele alınmıştır.

Literatürde kesirli sistemler için kontrol değişkenini dikkate alarak kararlılık analizi veren sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Ama aslında bunu yapmak, kontrol parametresinin kararlılık üzerindeki etkisini görmek için önemlidir. Bu amaçla bu bölümde (4.2) kontrollü sisteminin virüssüz ve endemik denge noktalarındaki yerel kararlılık analizi verilecektir.

4.4.1 Teorem: (4.2) sisteminin (4.14) ile verilen virüssüz denge noktası E^0 dir.

(i) $\frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} < d^\alpha + k^\alpha + \sigma^\alpha + 2\mu^\alpha + 2u$ ve $R_0 < 1$ ise sistem E^0 noktasında yerel

asimptotik kararlıdır;

(ii) $\frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} > d^\alpha + k^\alpha + \sigma^\alpha + 2\mu^\alpha + 2u$ ve $R_0 > 1$ ise sistem E^0 noktasında

kararsızdır;

(iii) $\frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} = d^\alpha + k^\alpha + \sigma^\alpha + 2\mu^\alpha + 2u$ ve $R_0 = 1$ ise sistem E^0 noktasında ne

kararlıdır ne de kararsızdır yani kararlılığı saptanamaz.

İspat: Temel üreme sayısını hesapladığımız bölümde (4.2) sisteminin

$$\begin{bmatrix} g_1(t, S, E, I, R, u) \\ g_2(t, S, E, I, R, u) \\ g_3(t, S, E, I, R, u) \\ g_4(t, S, E, I, R, u) \end{bmatrix} = \mathcal{F}(t) - \mathcal{V}^-(t) + \mathcal{V}^+(t) = \mathcal{F}(t) - \mathcal{V}(t) \quad (4.22)$$

formunda ifade edilebilir olduğuna dikkat çekmiştik. Yine (4.2) sisteminin virüssüz denge noktası E^0 daki Jakobiyen matrisi de daha önce hesapladığımız F_0 ve V_0 matrisleri ile birlikte aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$J_{E^0}(S, E, I, R) = F_0 - V_0$$

$$= \begin{bmatrix} -p - \mu^\alpha & -\frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & -\frac{(1-u)\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) & \frac{(1-u)\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & 0 \\ 0 & \sigma^\alpha & -d^\alpha - \mu^\alpha - u & 0 \\ p & k^\alpha + u & d^\alpha + u & -\mu^\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

(4.2) sisteminin E^0 noktasındaki kararlılığını inceleyebilmemiz için (4.23) matrisinin özdeğerlerini bulalım. Bu özdeğerler $|J_{E^0} - \lambda I| = 0$ karakteristik denkleminin köklerine karşılık gelir. O halde $|J_{E^0} - \lambda I| = 0$ yani

$$\det \begin{bmatrix} -p - \mu^\alpha - \lambda & -\frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & -\frac{(1-u)\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) - \lambda & \frac{(1-u)\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} & 0 \\ 0 & \sigma^\alpha & -d^\alpha - \mu^\alpha - u - \lambda & 0 \\ p & k^\alpha + u & d^\alpha + u & -\mu^\alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} & (-\mu^\alpha - \lambda)(-p - \mu^\alpha - \lambda) \times \\ & \frac{(p + \mu^\alpha)(d^\alpha + \mu^\alpha + u + \lambda)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) - \Lambda^\alpha(1-u)(\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha(d^\alpha + \mu^\alpha + u + \lambda))}{p + \mu^\alpha} = 0 \end{aligned}$$

karakteristik denklemin elde edilir. Bu karakteristik denklemin iki negatif kökü

$$\lambda_1 = -\mu^\alpha,$$

$$\lambda_2 = -p - \mu^\alpha$$

dir. Diğer iki kök polinom bölmesi ile elde edilen

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0 \tag{4.24}$$

denkleminde hesaplanır. (4.24)'deki c_1 ve c_2 katsayıları sırasıyla

$$c_1 = -\frac{(1-u)\beta_2^\alpha \Lambda^\alpha}{p + \mu^\alpha} + d^\alpha + k^\alpha + \sigma^\alpha + 2\mu^\alpha + 2u,$$

$$c_2 = (d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) - \frac{\Lambda^\alpha (1-u)(\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u))}{p + \mu^\alpha}$$

dir. Ayrıca c_2 katsayısı (4.15) 'deki R_0 değeri cinsinden yazılabilir:

$$c_2 = (d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)(1 - R_0).$$

Dikkat edilirse (4.24) denkleminin sabit terimi yani kökler çarpımı R_0 cinsinden yazılmış oldu. Bu önemlidir çünkü (4.2) sisteminin E^0 denge noktasındaki kararlılığı, R_0 değerine bağlı olarak yorumlanır. Diğer iki $\lambda_i (i = 3, 4)$ özdeğeri şöyledir:

$$\lambda_{3,4} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}$$

E^0 virüssüz denge noktasında (4.2) sisteminin asimptotik kararlı olması için, sistemin özdeğerleri negatif reel sayı olmalı veya Routh-Hurwitz kriterine göre c_1 ve c_2 katsayılarının pozitif olması halinde negatif reel kısma sahip olması gerekir [71]. Bu kriterler göz önüne alındığında karşımıza şu durumlar çıkar:

- $c_2 = (d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)(1 - R_0)$ olduğundan $R_0 > 1$ ise $c_2 < 0$,
- $c_2 = (d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u)(1 - R_0)$ olduğundan $R_0 < 1$ ise $c_2 > 0$,
- $c_1^2 - 4c_2 \geq 0$ ise (4.24) denkleminin iki reel kökü vardır ve ayrıca bu kökler negatif değerlidir ancak ve ancak $c_1, c_2 > 0$ ise,
- $c_1^2 - 4c_2 < 0$ ise $c_1 < 0$ ve $|\arg(\lambda_1)| = \left| \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{c_1} \right) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$ olması durumunda

(4.24) denkleminin iki kompleks kökü negatif reel kısımlıdır.

Sonuç olarak,

- (i) $c_1 > 0$ ve $R_0 < 1$ yani $c_2 > 0$ ise sistem E^0 noktasında yerel asimptotik kararlıdır;
- (ii) $c_1 < 0$ ve $R_0 > 1$ yani $c_2 < 0$ ise sistem E^0 noktasında kararsızdır;
- (iii) $c_1 = 0$ ve $R_0 = 1$ yani $c_2 = 0$ ise sistem E^0 noktasında ne kararlıdır ne de kararsızdır yani kararlılığı saptanamaz. ■

Şimdi de (4.2) sisteminin E^1 endemik denge noktasındaki yerel kararlılığı aşığıdaki teorem ile verilecektir.

4.4.2 Teorem: $R_0 > 1$ ise (4.2) sistemi E^1 endemik denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

İspat: R_0 hesaplarken elde edilen $J_{\mathcal{F}}(S, E, I, R)$ ve $J_{\mathcal{V}}(S, E, I, R)$ matrisleri ile birlikte (4.2) sisteminin Jakobiyen matrisi aşığıdaki formda yazılabilir:

$$J(S, E, I, R) = J_{\mathcal{F}}(S, E, I, R) - J_{\mathcal{V}}(S, E, I, R)$$

$$= \begin{bmatrix} -(1-u)(\beta_1^\alpha I + \beta_2^\alpha E) + p + \mu^\alpha & -(1-u)\beta_2^\alpha S & -(1-u)\beta_1^\alpha S & 0 \\ (1-u)(\beta_1^\alpha I + \beta_2^\alpha E) & (1-u)\beta_2^\alpha S - k^\alpha - \sigma^\alpha - \mu^\alpha - u & (1-u)\beta_1^\alpha S & 0 \\ 0 & \sigma^\alpha & -d^\alpha - \mu^\alpha - u & 0 \\ p & k^\alpha + u & d^\alpha + u & -\mu^\alpha \end{bmatrix}.$$

Bu matriste $E^1 = (S^1, E^1, I^1, R^1)$ endemik denge noktası yerine yazılırsa J_{E^1} matrisi

$$\begin{bmatrix} -(1-u)(\beta_1^\alpha I^1 + \beta_2^\alpha E^1) + p + \mu^\alpha & -(1-u)\beta_2^\alpha S^1 & -(1-u)\beta_1^\alpha S^1 & 0 \\ (1-u)(\beta_1^\alpha I^1 + \beta_2^\alpha E^1) & (1-u)\beta_2^\alpha S^1 - k^\alpha - \sigma^\alpha - \mu^\alpha - u & (1-u)\beta_1^\alpha S^1 & 0 \\ 0 & \sigma^\alpha & -d^\alpha - \mu^\alpha - u & 0 \\ p & k^\alpha + u & d^\alpha + u & -\mu^\alpha \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. J_{E^1} matrisinin özdeğerleri aynı şekilde $|J_{E^1} - \delta I| = 0$ karakteristik denkleminin çözülmesiyle bulunur. Bu özdeğerlerinden biri $\delta_1 = -\mu^\alpha < 0$ dir. Diğer özdeğerler ise, aşağıdaki karakteristik denklemlerle elde edilir:

$$c_3\delta^3 + c_4\delta^2 + c_5\delta + c_6 = 0, \quad (4.25)$$

öyle ki c_3 , c_4 , c_5 ve c_6 katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$c_3 = \frac{\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)}{\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)} = 1 > 0,$$

$$c_4 = \frac{\beta_1^\alpha \sigma^\alpha}{\beta_2^\alpha} + \frac{\beta_1^\alpha \sigma^\alpha [-\beta_1^\alpha \sigma^\alpha - \beta_2^\alpha (d^\alpha - k^\alpha - \sigma^\alpha)]}{\beta_2^\alpha [\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)]} + d^\alpha - \beta_2^\alpha \Lambda^\alpha + \mu^\alpha + u$$

$$+ \frac{\Lambda^\alpha (k^\alpha + \mu^\alpha + \sigma^\alpha + 1) [\beta_2^\alpha (d^\alpha - k^\alpha - \sigma^\alpha) + \beta_1^\alpha \sigma^\alpha]}{(d^\alpha - k^\alpha - \sigma^\alpha)(k^\alpha + \mu^\alpha + \sigma^\alpha + u)} - \frac{\Lambda^\alpha \beta_1^\alpha \sigma^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + 1)}{(d^\alpha - k^\alpha - \sigma^\alpha)(d^\alpha + \mu^\alpha + u)},$$

$$c_5 = \frac{[\beta_1^\alpha \sigma^{2\alpha} + \beta_2^{2\alpha} (d^\alpha + \mu^\alpha + u)^2] \Lambda^\alpha (1-u) (d^\alpha + k^\alpha + 2\mu^\alpha + \sigma^\alpha + 2u)}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) [\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)]}$$

$$- \frac{\beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u) [\mu^{4\alpha} + \mu^{3\alpha} p - 4\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha \mu^\alpha + 2\mu^{3\alpha} \sigma^\alpha + 2\mu^{2\alpha} p \sigma^\alpha - 2\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^{2\alpha}]}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) [\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)]}$$

$$+ \frac{p\mu^\alpha \sigma^{2\alpha} + u(3\mu^{2\alpha}(\mu^\alpha + p) - 4\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha) + (\sigma^{2\alpha} + u4\mu^\alpha \sigma^\alpha)(\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha + \mu^\alpha + p)}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) [\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)]}$$

$$+ \frac{u^2(3\mu^\alpha(\mu^\alpha + p) + 2\sigma^\alpha(2\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha + \mu^\alpha + p)) + u^3(\mu^\alpha + p) + k^{2\alpha}(\mu^\alpha + p)(\mu^\alpha + u)}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) [\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)]}$$

$$+ \frac{2(-\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha + \mu^\alpha(\mu^\alpha + p)(\mu^\alpha + u) + \beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha u + u(\mu^\alpha + p)(2\mu^\alpha + \sigma^\alpha) + (\mu^\alpha + p)u^2)}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) [\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u)]}$$

$$+ \frac{d \left(-2\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha + (\mu^\alpha + p)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)^2 + 2u(\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha + (\mu^\alpha + p)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha)) \right)}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) \left[\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u) \right]}$$

$$+ \frac{du^2 (\mu^\alpha + p)}{(d^\alpha + \mu^\alpha + u)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u) \left[\beta_1^\alpha \sigma^\alpha + \beta_2^\alpha (d^\alpha + \mu^\alpha + u) \right]},$$

$$c_6 = \beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha - (d^\alpha + \mu^\alpha)(\mu^\alpha + p)(k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha) - u\beta_1^\alpha \Lambda^\alpha \sigma^\alpha$$

$$- u(\mu^\alpha + p)(d^\alpha + k^\alpha + 2\mu^\alpha + \sigma^\alpha) + \beta_2^\alpha \Lambda^\alpha (1-u)(d^\alpha + \mu^\alpha + u) - u^2(\mu^\alpha + p).$$

Böylece, (4.25) karakteristik denklemin kökleri δ_2 , δ_3 ve δ_4 tür. (5.2) sisteminin E^1 endemik denge noktasında yerel asimptotik kararlı olması için $|\arg(\delta_2)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $|\arg(\delta_3)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ ve $|\arg(\delta_4)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ olması yeterlidir.

5. BİLGİSAYAR VİRÜS YAYILIMININ OPTİMAL KONTROLÜ

Bu bölümde bir önceki bölümde kontrol fonksiyonu adapte edilen (4.2) bilgisayar virüsü yayılım modelinin optimal kontrol problemini formüle edeceğiz. Kontrol fonksiyonu anti-virüs programı olarak düşünülmüştür. Böylece virüsün yayılımının yavaşlaması ve hatta virüs yayılımının durması amaçlanmaktadır. Böylece virüsün yayılmasını önlemek için alınacak önlemleri belirlemede önemli bir matematiksel araç olan optimal kontrol teorisine ihtiyaç duyulur.

Temel amacımız hem virüslü (I) ve virüs tehdidi altında olan (E) bilgisayarların sayısını hem de virüsten koruma programını farklı bilgisayar kompartımanlarına kurmanın toplam maliyetini minimize etmektir [65]. Bir optimal kontrol problemi için amaç fonksiyoneli tek değildir. Adından da anlaşıldığı gibi problemde optimize edilmesi amaçlanan duruma göre değişir.

Bu tez probleminde göz önüne alınan amaç fonksiyoneli şu şekildedir:

$$J(t, S, E, I, R, u) = \int_0^{t_f} \left[I(t) + E(t) + \frac{1}{2} \epsilon u^2(t) \right] dt. \quad (5.1)$$

Burada $u(t)$ kontrol fonksiyonu, herhangi bir t anında anti-virüs programı yüklenen virüslü ve virüs tehdidi altındaki bilgisayarların oranı, ϵ anti-virüs programı yüklemenin maliyetini dengelemek için seçilebilen pozitif bir ağırlık ve t_f kontrolün son zamanını ifade eder.

Başka bir ifadeyle de belirtmek gerekirse, (5.1) amaç fonksiyoneli $[0, t_f]$ zaman aralığında minimize eden $u^*(t)$ kontrol fonksiyonu ile birlikte (4.2) sisteminin çözümünü bulmaktır.

Pontryagin' in maksimum prensibi kullanılarak hesaplanan (2.31)-(2.33) optimallik koşullarını belirlemek için öncelikle Hamilton fonksiyonunu tanımlanır.

$$\mathcal{L}(t, S, E, I, R, u) = I(t) + E(t) + \frac{1}{2} \epsilon u^2(t) \quad (5.2)$$

Lagrange fonksiyonu olmak üzere Hamilton fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{L}(t, S, E, I, R, u) + \lambda_i(t) {}_0^C D_t^\alpha X(t) \\
&= I(t) + E(t) + \frac{1}{2} \epsilon u^2(t) \\
&\quad + \lambda_1(t) \{ \Lambda^\alpha - (1-u(t)) \beta_1^\alpha S(t) I(t) - (1-u(t)) \beta_2^\alpha S(t) E(t) - pS(t) - \mu^\alpha S(t) \} \\
&\quad + \lambda_2(t) \{ 1-u(t) \beta_1^\alpha S(t) I(t) + (1-u(t)) \beta_2^\alpha S(t) E(t) - (k^\alpha + \sigma^\alpha + \mu^\alpha + u(t)) E(t) \} \\
&\quad + \lambda_3(t) \{ \sigma^\alpha E(t) - d^\alpha I(t) - \mu^\alpha I(t) - u(t) I(t) \} \\
&\quad + \lambda_4(t) \{ pS(t) + k^\alpha E(t) + d^\alpha I(t) + u(t) E(t) + u(t) I(t) - \mu^\alpha R(t) \}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $i=1,2,3,4$ olmak üzere $\lambda_i(t)$ 'ler yardımcı durum değişkenleridir. Yardımcı durum değişkenleri, adjoint vektör olarak da adlandırılır. Yani sıfırdan farklı mutlak sürekli yardımcı durum değişkenleri $\lambda_i: [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^4$ olmak üzere

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$$

adjoint vektörüdür.

Optimallik koşullarına geçmeden önce optimal kontrolün varlığı ortaya koyulmalıdır. Çünkü (6.1) amaç fonksiyoneli minimize eden böyle bir $u^*(t)$ fonksiyonunun var olup olmadığının gösterilmesi problemin amacı için ön koşuldur. Diğer yandan optimal kontrolün varlığı amaç fonksiyonelinin kontrol değişkenine göre konveks olmasına ve ele alınan sistemin regülerliğine bağlıdır [61].

5.1 Optimal kontrolün varlığı

(4.2) sisteminin matris formu aşağıdaki gibidir:

$${}_0^C D_t^\alpha X(t) = G(X) = AX + F(X). \tag{5.4}$$

Burada

$$X(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t))^T,$$

A ve $F(X)$ matrisleri ise sırasıyla

$$A = \begin{bmatrix} -p - \mu^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^\alpha - \sigma^\alpha - \mu^\alpha - u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^\alpha & -d^\alpha - \mu^\alpha - u & 0 \\ p & k^\alpha + u & d^\alpha + u & -\mu^\alpha \end{bmatrix}$$

ve

$$F(X) = \begin{bmatrix} \Lambda^\alpha - (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) - (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) \\ (1-u(t))\beta_1^\alpha S(t)I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S(t)E(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi optimal kontrolün varlığını veren teorem aşağıdaki gibidir:

5.1.1 Teorem: (4.1) kabul edilebilir kontrol kümesi, (4.3) başlangıç koşulları, (4.2) sistemi, (5.1) amaç fonksiyoneli göz önüne alınsın. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\exists u^* \in U_{ad}$ öyle ki $J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$ dir.

- (i) Kontrol ve kontrole karşılık gelen durum değişkenlerinin kümesi boş değildir;
- (ii) U_{ad} kümesi konveks ve kompakttır;
- (iii) (4.2) sisteminin sağ tarafı süreklidir, aynı zamanda durum ve kontrol değişkenleri doğrusal bir fonksiyon ile üstten sınırlıdır;
- (iv) $J(u)$ ' nun integrandı yani $\mathcal{L}(t, S, E, I, R, u)$ fonksiyonu U_{ad} üzerinde konveks ve üstten sınırlıdır;
- (v) $J(u)$ ' nun integrandı için $d_1, d_2 > 0$ ve $\gamma > 1$ sabitleri vardır öyle ki

$$I(t) + E(t) + \frac{1}{2} \epsilon u^2(t) \geq d_1 (|u|^2)^{\frac{\gamma}{2}} - d_2$$

sağlanır.

İspat : (i) (4.2) sistemi sınırlı katsayılarla (parametrelere) sahip olduğundan ve çözümler $[0, t_f]$ zaman aralığında sınırlı olduğundan (4.2) sisteminin çözümü vardır [72].

(ii) U_{ad} 'ın kapalı ve sınırlı olduğu tanımından açıkça görülmektedir.

(iii) (5.4) eşitliğinden $X_1(t) = (S_1(t), E_1(t), I_1(t), R_1(t))^T$ ve

$X_2(t) = (S_2(t), E_2(t), I_2(t), R_2(t))^T$ vektörlerine karşılık gelen $F(X)$ matrisleri sırasıyla

$$F_1(X) = \begin{bmatrix} \Lambda^\alpha - (1-u(t))\beta_1^\alpha S_1(t)I_1(t) - (1-u(t))\beta_2^\alpha S_1(t)E_1(t) \\ (1-u(t))\beta_1^\alpha S_1(t)I_1(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S_1(t)E_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$F_2(X) = \begin{bmatrix} \Lambda^\alpha - (1-u(t))\beta_1^\alpha S_2(t)I_2(t) - (1-u(t))\beta_2^\alpha S_2(t)E_2(t) \\ (1-u(t))\beta_1^\alpha S_2(t)I_2(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha S_2(t)E_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $S(t) = S, E(t) = E, I(t) = I$ kısaltmaları göz önüne alınarak

$$F_1(X) - F_2(X) = \begin{bmatrix} (1-u)\beta_1^\alpha (S_2I_2 - S_1I_1) + (1-u)\beta_2^\alpha (S_2E_2 - S_1E_1) \\ (1-u)\beta_1^\alpha (S_1I_1 - S_2I_2) + (1-u)\beta_2^\alpha (S_1E_1 - S_2E_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrisi biçiminde yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
|F_1(X) - F_2(X)| &= |(1-u)\beta_1^\alpha (S_2I_2 - S_1I_1) + (1-u)\beta_2^\alpha (S_2E_2 - S_1E_1)| \\
&\quad + |(1-u)\beta_1^\alpha (S_1I_1 - S_2I_2) + (1-u)\beta_2^\alpha (S_1E_1 - S_2E_2)| \\
&\leq (1-u)\beta_1^\alpha |S_2I_2 - S_1I_1| + (1-u)\beta_2^\alpha |S_2E_2 - S_1E_1| \\
&\quad + (1-u)\beta_1^\alpha |S_1I_1 - S_2I_2| + (1-u)\beta_2^\alpha |S_1E_1 - S_2E_2| \\
&= 2(1-u)\beta_1^\alpha |S_1I_1 - S_2I_2| + 2(1-u)\beta_2^\alpha |S_1E_1 - S_2E_2| \\
&= 2(1-u)\beta_1^\alpha |S_1I_1 - I_2S_1 + I_2S_1 - S_2I_2| + 2(1-u)\beta_2^\alpha |S_1E_1 - E_2S_1 + E_2S_1 - S_2E_2| \\
&= 2(1-u)\beta_1^\alpha |(I_1 - I_2)S_1 + (S_1 - S_2)I_2| + 2(1-u)\beta_2^\alpha |(E_1 - E_2)S_1 + (S_1 - S_2)E_2| \\
&\leq 2(1-u)\beta_1^\alpha (|I_1 - I_2|S_1 + |S_1 - S_2|I_2) + 2(1-u)\beta_2^\alpha (|E_1 - E_2|S_1 + |S_1 - S_2|E_2) \\
&= 2(1-u)\underbrace{(\beta_1^\alpha I_2 + \beta_1^\alpha E_2)}_{\alpha_1} |S_1 - S_2| + 2(1-u)\underbrace{\beta_1^\alpha S_1}_{\alpha_2} |E_1 - E_2| + 2(1-u)\underbrace{\beta_1^\alpha S_1}_{\alpha_3} |I_1 - I_2| \\
&= \underbrace{2(1-u)\alpha_1}_{m_1} |S_1 - S_2| + \underbrace{2(1-u)\alpha_2}_{m_2} |E_1 - E_2| + \underbrace{2(1-u)\alpha_3}_{m_3} |I_1 - I_2|
\end{aligned}$$

elde edilir. $M = \max\{m_1, m_2, m_3\}$ olarak alındığında Hölder eşitsizliğinden

$$|F_1(X) - F_2(X)| \leq M(|S_1 - S_2| + |E_1 - E_2| + |I_1 - I_2|)$$

bulunur. Burada $M > 0$ sabiti, $S(t), E(t), I(t) \leq 2(1-u)$ koşulunu sağlayan durum değişkenlerinden bağımsızdır. Aynı zamanda durum değişkenleri de $2(1-u)$ doğrusal fonksiyonu ile üstten sınırlıdır.

Şimdi G fonksiyonunun Lipschitz sürekli olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
|G(X_1) - G(X_2)| &= |AX_1 - AX_2 + F(X_1) - F(X_2)| \\
&\leq \|A\| |X_1 - X_2| + |F(X_1) - F(X_2)| \\
&\leq \|A\| (|S_1 - S_2| + |E_1 - E_2| + |I_1 - I_2| + |R_1 - R_2|) \\
&\quad + M (|S_1 - S_2| + |E_1 - E_2| + |I_1 - I_2|) \\
&= (\|A\| + M) (|S_1 - S_2| + |E_1 - E_2| + |I_1 - I_2|) + \|A\| |R_1 - R_2|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\|A\| + M)(|S_1 - S_2| + |E_1 - E_2| + |I_1 - I_2| + |R_1 - R_2|) \\
&= \underbrace{(\|A\| + M)}_L |X_1 - X_2|
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$|G(X_1) - G(X_2)| \leq L |X_1 - X_2|$$

dir. Yine burada da $L = \max\{M, \|A\|\} < \infty$ dur. Sonuç olarak G fonksiyonu sınırlı da olduğundan düzgün Lipschitz süreklidir.

(iv) $\mathcal{L}(t, S, E, I, R, u) = I(t) + E(t) + \frac{1}{2}\epsilon u^2(t)$ Lagrange fonksiyonunun U_{ad} kümesi üzerinde konveks ve sınırlı olduğunu gösterelim. Yani $\forall u_1, u_2 \in U_{ad}$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için

$$I + E + \frac{\epsilon}{2}[(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2]^2 - (1-\lambda)\left[I + E + \frac{\epsilon}{2}u_1^2\right] - \lambda\left[I + E + \frac{\epsilon}{2}u_2^2\right] \leq 0 \quad (5.5)$$

olduğu gösterilmelidir. (5.5) eşitsizliğinin sol tarafını düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{\epsilon}{2}\left[(1-\lambda)^2 u_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)u_1 u_2 + \lambda^2 u_2^2\right] - \lambda\frac{\epsilon}{2}u_2^2 - \frac{\epsilon}{2}u_1^2 + \lambda\frac{\epsilon}{2}u_1^2 \\
&= \frac{\epsilon}{2}\left[(1-\lambda)^2 u_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)u_1 u_2 + \lambda^2 u_2^2 - \lambda u_2^2 - (1-\lambda)u_1^2\right] \\
&= \frac{\epsilon}{2}\left[-\lambda(1-\lambda)u_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)u_1 u_2 - \lambda(1-\lambda)u_2^2\right] \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\lambda(1-\lambda)(u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\lambda(1-\lambda)(u_1 - u_2)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda \in [0, 1]$ olduğundan $\lambda(1-\lambda) \geq 0$ ve $\epsilon > 0$ dir. Böylece

$$-\frac{\epsilon}{2}\lambda(1-\lambda)(u_1-u_2)^2 \leq 0$$

bulunur. Bu da $\mathcal{L}(t, S, E, I, R, u) = I(t) + E(t) + \frac{1}{2}\epsilon u^2(t)$ fonksiyonunun U_{ad} kümesi üzerinde konveks olduğunu gösteririr.

(v) Son olarak $\mathcal{L}(t, S, E, I, R, u) = I(t) + E(t) + \frac{1}{2}\epsilon u^2(t) \geq d_1(|u|^2)^{\frac{\gamma}{2}} - d_2$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $d_1 > 0$ olmak üzere $\min \epsilon = 2d_1$ alalım. Buna göre

$$\begin{aligned} I(t) + E(t) + \frac{1}{2}\epsilon u^2(t) &\geq I(t) + E(t) + \frac{1}{2}(2d_1 u^2) \\ &\geq I(t) + E(t) + d_1|u|^2 \\ &\geq d_1|u|^2 \\ &\geq d_1|u|^2 - d_2 \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $d_2 > 0$ sayısı vardır öyle ki $\gamma = 2$ dir. Böylece 2.3.2 Teorem'den optimal kontrol probleminin bir çözümünün var olduğu söylenir.

5.2 Optimallik Koşulları

(4.2) sistemi ve (5.1) amaç fonksiyoneli için optimallik koşulları Pontryagin' in maksimum prensibi kullanılarak aşağıdaki teorem ile elde edilecektir:

5.2.1 Teorem $(S^*(t), E^*(t), I^*(t), R^*(t))$, (4.2) sisteminin optimal çözümü ve $u^*(t) \in U_{ad}$ fonksiyonu (5.1) amaç fonksiyoneli $J(t, S, E, I, R, u)$ ' yi minimize eden optimal kontrol olsun. Bu durumda $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ yardımcı durum değişkenleri vardır öyle ki $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $\lambda_i(t_f) = 0$ sınır koşulu ile

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_1(t) = -\lambda_1(t) \left[(1-u(t))\beta_1^\alpha I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha E(t) + p + \mu^\alpha \right] \\ \quad + \lambda_2(t) \left[(1-u(t))\beta_1^\alpha I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha E(t) \right] + \lambda_4(t) p, \\ {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_2(t) = -\lambda_1(t)(1-u(t))\beta_2^\alpha S(t) + \lambda_2(t) \left[(1-u(t))\beta_2^\alpha S(t) - k^\alpha - \sigma^\alpha - \mu^\alpha - u(t) \right] \\ \quad + \lambda_3(t)\sigma^\alpha + \lambda_4(t)(k^\alpha + u(t)) + 1, \\ {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_3(t) = -\lambda_1(t)(1-u(t))\beta_1^\alpha S(t) + \lambda_2(t)(1-u(t))\beta_1^\alpha S(t) \\ \quad - \lambda_3(t) \left[d^\alpha + \mu^\alpha + u(t) \right] + \lambda_4(t) \left[d^\alpha + u(t) \right] + 1, \\ {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_4(t) = -\lambda_4(t)\mu^\alpha \end{array} \right.$$

yardımcı durum sistemi sağlanır. Bununla birlikte $u^*(t)$ optimal kontrol fonksiyonu $\lambda_i(t) = \lambda_i$ ve $S(t) = S, E(t) = E, I(t) = I, R(t) = R$ olmak üzere

$$u^*(t) = \text{maks} \left\{ \min \left\{ \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^*) + (\lambda_2 - \lambda_4) E^* + (\lambda_3 - \lambda_4) I^*}{\epsilon}, 1 \right\}, 0 \right\} \text{ dir.}$$

İspat: (5.1) amaç fonksiyonelinesi optimum yapan değerler (4.2) sisteminin optimal çözümleridir. Bu optimal çözümler, Caputo türevli bir sistem için ilk kez Agrawal [60] tarafından önerilen optimallik koşulları göz önüne alınarak hesaplanır. Bu koşulları aşağıdaki gibi üç sistem takımı meydana getirir. Bunlara kesirli türevli Euler-Lanrange denklemleri denir:

- *Durum denklemleri*

$${}^C D_{t_f}^\alpha S = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}, \quad {}^C D_{t_f}^\alpha E = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}, \quad {}^C D_{t_f}^\alpha I = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3}, \quad {}^C D_{t_f}^\alpha R = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4}, \quad (5.6)$$

- *Yardımcı durum denklemleri*

$${}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_1 = \frac{\partial H}{\partial S}, \quad {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_2 = \frac{\partial H}{\partial E}, \quad {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_3 = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_4 = \frac{\partial H}{\partial R}, \quad (5.7)$$

- *Kontrol denklemi*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0, \quad (5.8)$$

- *Başlangıç koşulları*

$$S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, \quad (5.9)$$

- *Sınır koşulları*

$$\lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 0, \lambda_4(t_f) = 0. \quad (5.10)$$

Hali hazırda durum denklemleri (4.2) sisteminin kendisine karşılık gelir. Yardımcı durum denklemleri ise (5.3) ile verilen Hamilton fonksiyonu ve (5.7) denklemleri göz önüne alınarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_1(t) = -\lambda_1(t) \left[(1-u(t))\beta_1^\alpha I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha E(t) + p + \mu^\alpha \right] \\ \quad + \lambda_2(t) \left[(1-u(t))\beta_1^\alpha I(t) + (1-u(t))\beta_2^\alpha E(t) \right] + \lambda_4(t) p, \\ {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_2(t) = -\lambda_1(t)(1-u(t))\beta_2^\alpha S(t) + \lambda_2(t) \left[(1-u(t))\beta_2^\alpha S(t) - k^\alpha - \sigma^\alpha - \mu^\alpha - u(t) \right] \\ \quad + \lambda_3(t)\sigma^\alpha + \lambda_4(t)(k^\alpha + u(t)) + 1, \\ {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_3(t) = -\lambda_1(t)(1-u(t))\beta_1^\alpha S(t) + \lambda_2(t)(1-u(t))\beta_1^\alpha S(t) \\ \quad - \lambda_3(t) \left[d^\alpha + \mu^\alpha + u(t) \right] + \lambda_4(t) \left[d^\alpha + u(t) \right] + 1, \\ {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_4(t) = -\lambda_4(t)\mu^\alpha. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Burada $\lambda_i(t)$ 'ler için sınır koşulları:

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0 \quad (5.12)$$

dir. Dikkat edilirse (5.11) yardımcı durum denklemleri sağ Caputo kesirli türevlidir. Problemin nümerik çözümleri için bu denklemler 2.1.1 Lemması yardımıyla sol Caputo kesirli türevli olarak tekrar aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 {}_0^C D_t^\alpha \lambda_1(t_f - t) = -\lambda_1(t_f - t) \left[(1 - u(t_f - t)) \beta_1^\alpha I(t_f - t) \right] \\
 \quad - \lambda_1(t_f - t) \left[(1 - u(t_f - t)) \beta_2^\alpha E(t_f - t) + p + \mu^\alpha \right] \\
 \quad + \lambda_2(t_f - t) \left[(1 - u(t_f - t)) \beta_1^\alpha I(t_f - t) + (1 - u(t_f - t)) \beta_2^\alpha E(t_f - t) \right] \\
 \quad + \lambda_4(t_f - t) p, \\
 {}_0^C D_t^\alpha \lambda_2(t_f - t) = -\lambda_1(t_f - t) (1 - u(t_f - t)) \beta_2^\alpha S(t_f - t) \\
 \quad + \lambda_2(t_f - t) \left[(1 - u(t_f - t)) \beta_2^\alpha S(t_f - t) - k^\alpha - \sigma^\alpha - \mu^\alpha - u(t_f - t) \right] \\
 \quad + \lambda_3(t_f - t) \sigma^\alpha + \lambda_4(t_f - t) (k^\alpha + u(t_f - t)) + 1, \\
 {}_0^C D_t^\alpha \lambda_3(t_f - t) = -\lambda_1(t_f - t) (1 - u(t_f - t)) \beta_1^\alpha S(t_f - t) \\
 \quad + \lambda_2(t_f - t) (1 - u(t_f - t)) \beta_1^\alpha S(t_f - t) \\
 \quad - \lambda_3(t_f - t) [d^\alpha + \mu^\alpha + u(t_f - t)] + \lambda_4(t_f - t) [d^\alpha + u(t_f - t)] + 1, \\
 {}_0^C D_t^\alpha \lambda_4(t_f - t) = -\lambda_4(t_f - t) \mu^\alpha.
 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

(5.8) eşitliğinden kontrol denklemi ise

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \Big|_{u=u^*} = \epsilon u^* + \lambda_1 (\beta_1 S I + \beta_2 S E) - \lambda_2 (\beta_1 S I + \beta_2 S E + E) - \lambda_3 + \lambda_4 (E + I) = 0 \quad (5.14)$$

olarak bulunur. Pontryagin maksimum prensibi ve $u(t) \in [0, 1]$ olması göz önüne alınırsa optimal kontrol fonksiyonu:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u(t) \\ \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^*) + (\lambda_2 - \lambda_4) E^* + (\lambda_3 - \lambda_4) I^*}{\epsilon}, & 0 < u(t) < 1 \\ 1, & u(t) \geq 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

veya buna denk olarak

$$u^*(t) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^*) + (\lambda_2 - \lambda_4) E^* + (\lambda_3 - \lambda_4) I^*}{\epsilon}, 1 \right\}, 0 \right\} \quad (5.16)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç olarak, optimal sistem (4.2), (5.13) ve (5.16) denklem sistemleri takımından oluşur.

6. NÜMERİK ÇÖZÜMLER VE ALTERNATİF KONTROL STRATEJİLERİ

Bu bölümde öncelikle elde edilen optimal sistemi çözmek için kullanılacak olan nümerik yöntem tanıtılacak ve yöntemin algoritması verilecektir. Ardından bir sonraki alt bölümde (3.1) sistemine uygulanan kontrol stratejisi 1'e ek olarak iki farklı kontrol stratejisi daha verilecektir ve en sonunda elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak yorumlanacaktır.

6.1 Nümerik Yöntem

Optimallik sistemlerini çözmek için çeşitli nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Tamsayı mertebeli sistemlerden farklı olarak kesirli sistemlerin optimallik koşulları sol ve sağ yönlü kesirli türevler içerir. Bu koşullar her bir kesirli türev operatörü için ayrı ayrı elde edilir ([58],[60],[73],[74]). Fakat görülen odur ki farklı kesirli türevler için elde edilen optimallik koşulları biçimsel olarak aynıdır. Kesirli türevli optimallik sistemlerini çözmek için sınırlı sayıda nümerik yöntem vardır. Bunun sebebi optimallik sistemindeki farklı yönlü kesirli türevlerin eş zamanlı zaman ayırıklaştırmasının gerekliliğidir. Bu yöntemlerin başlıcaları Grünwald-Letnikov yaklaşımı, Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi, kesirli Euler yöntemi, ortogonal polinom yaklaşımlarıdır. Bu tezde Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi ile ileri-geri süpürme yöntemi birlikte uygulanmaktadır [40],[42],[60],[75]. İleri-Geri Süpürme yöntemi dördüncü dereceden Runge-Kutta (RK4) şeması kullanılarak geliştirilmiş bir yöntemdir.

6.1.1 Algoritma

1. Adım: $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$ başlangıç koşulları ve sistemin parametreleri tanımlanır.

2. Adım: $[0, t_f]$ aralığı eşit uzunluklu M alt aralığa bölünür ve böylece her zaman düğümü

$$h = \frac{t_f - 0}{M}, t_k = kh, k = 0, 1, \dots, M,$$

olarak ayarlanır.

3. Adım: $k = 0, 1, \dots, M$ olmak üzere $u = (u_k)$ kontrolü için bir başlangıç tahmini yapılır. Kontrol fonksiyonu için bu başlangıç tahmini, (S_0, E_0, I_0, R_0) başlangıç koşulu ve $\lambda_i(t_f) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sınır koşulları ile birlikte

$$u(t_k) = \frac{(\lambda_2(t_k) - \lambda_1(t_k))(\beta_1 S(t_k) I(t_k) + \beta_2 S(t_k) E(t_k))}{\epsilon} + \frac{(\lambda_2(t_k) - \lambda_4(t_k))E(t_k) + (\lambda_3(t_k) - \lambda_4(t_k))I(t_k)}{\epsilon} \quad (6.1)$$

kontrolü hesaplanır.

4. Adım: (S_0, E_0, I_0, R_0) başlangıç koşulu ve (6.1) deki u kontrolü ile (4.2) sistemi ileri yönlü zaman ayrıklaştırması ile çözülür. Bunun için durum denklemleri

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (6.2)$$

Caputo kesirli integral denklemi olarak tekrar ifade edilir. Daha sonra durum denklemlerine Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır:

$$S(t_{k+1}) = S(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \left[g_1(t_{k+1}, S^p(t_{k+1}), E^p(t_{k+1}), I^p(t_{k+1}), R^p(t_{k+1}), u(t_{k+1})) + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} g_1(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right],$$

$$S^p(t_{k+1}) = S(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g_1(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right],$$

$$\begin{aligned}
E(t_{k+1}) &= E(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\mathbf{g}_2(t_{k+1}, S^p(t_{k+1}), E^p(t_{k+1}), I^p(t_{k+1}), R^p(t_{k+1}), u(t_{k+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \mathbf{g}_2(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right], \\
E^p(t_{k+1}) &= E(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \mathbf{g}_2(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right], \tag{6.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(t_{k+1}) &= I(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\mathbf{g}_3(t_{k+1}, S^p(t_{k+1}), E^p(t_{k+1}), I^p(t_{k+1}), R^p(t_{k+1}), u(t_{k+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \mathbf{g}_3(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right], \\
I^p(t_{k+1}) &= I(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \mathbf{g}_3(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(t_{k+1}) &= R(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\mathbf{g}_4(t_{k+1}, S^p(t_{k+1}), E^p(t_{k+1}), I^p(t_{k+1}), R^p(t_{k+1}), u(t_{k+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \mathbf{g}_4(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right], \\
R^p(t_{k+1}) &= R(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \mathbf{g}_4(t_k, S(t_k), E(t_k), I(t_k), R(t_k), u(t_k)) \right].
\end{aligned}$$

Burada $k = 0, 1, \dots, M-1$ ve $j = 0, 1, \dots, k$ dır. Ayrıca (6.3) denklemlerindeki $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j=0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq k, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$b_{j,k+1} = (k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha. \tag{6.5}$$

5. Adım: $\lambda_i(t_f) = 0$ ($i=1,2,3,4$) sınır koşulu altında (5.13) sistemi (6.1) kontrolü ile ileri yönlü zaman ayrıklaştırması ile çözülür. Bunun için yardımcı durum denklemleri

$$\lambda(t_f - t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t_f - \tau, x(t_f - \tau), u(t_f - \tau), \lambda(t_f - \tau)) d\tau \quad (6.6)$$

Caputo kesirli integral denklemi olarak tekrar ifade edilir. Daha sonra durum denklemlerine Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\partial H}{\partial S}(t_{M-k-1}, S(t_{M-k-1}), E(t_{M-k-1}), I(t_{M-k-1}), R(t_{M-k-1}), u(t_{M-k-1}), \lambda_i^p(t_{M-k-1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial S}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda_1^p(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial S}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda_2(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\partial H}{\partial E}(t_{M-k-1}, S(t_{M-k-1}), E(t_{M-k-1}), I(t_{M-k-1}), R(t_{M-k-1}), u(t_{M-k-1}), \lambda_i^p(t_{M-k-1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial E}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda_2^p(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial S}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\partial H}{\partial I}(t_{M-k-1}, S(t_{M-k-1}), E(t_{M-k-1}), I(t_{M-k-1}), R(t_{M-k-1}), u(t_{M-k-1}), \lambda_i^p(t_{M-k-1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial I}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda_3^p(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial I}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda_4(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\partial H}{\partial R}(t_{M-k-1}, S(t_{M-k-1}), E(t_{M-k-1}), I(t_{M-k-1}), R(t_{M-k-1}), u(t_{M-k-1}), \lambda_i^p(t_{M-k-1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial R}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda_4^p(t_{M-k-1}) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial R}(t_{M-j}, S(t_{M-j}), E(t_{M-j}), I(t_{M-j}), R(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \end{aligned}$$

Burada $k = 0, 1, \dots, M - 1$ ve $j = 0, 1, \dots, k$ dır. Ayrıca (6.7) denklemlerindeki $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları için de 4. adımda verilmiştir.

6. Adım: 4. adım ve 5. adımda elde edilen yinelemeli değerler kullanılarak, 3. adımda hesaplanan kontrol fonksiyonunun değerleri güncellenir.

7. Adım: Durum ve yardımcı durum fonksiyonları için hata tolerans değerleri belirlenir. Eğer bu fonksiyonların ardışık değerleri arasındaki fark belirlenen tolerans aralığı içinde kalacak kadar küçükse hesaplama sonlandırılır ve bu durumda elde edilen sonuçlar optimal çözümlere karşılık gelir. Aksi halde 3. adıma dönülür.

Çalışmada ele alınan (4.2) sistemi Caputo kesirli türevlidir. Ancak “Acaba Caputo-Fabrizio veya Atangana-Baleanu kesirli türevleri ile sistemin optimal kontrol probleminin çözümü nasıl olurdu?” sorusuna da bu tezde cevap aranmıştır. Bunun için yukarıda adımları verilen algoritma Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli operatörleri için uygun hale getirilmelidir.

6.1.2 Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi için Algoritma

Bu operatör için algoritmanın ilk üç adımı ve son iki adımı aynı şekilde geçerlidir. 4. ve 5. adımdaki farklılığın sebebi ise operatör değişmesi yani integral denklemin değişiyor olmasıdır. Aynı zamanda $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları da değişecektir. Bu değişikliklerle birlikte Caputo-Fabrizio kesirli operatörü için algoritmanın 4. ve 5. adımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [76]:

4. Adım: (S_0, E_0, I_0, R_0) başlangıç koşulu ve u kontrolü ile (4.2) sistemi ileri yönlü zaman ayrıklaştırılması ile çözülür. Bunun için durum denklemleri

$$x(t) = x(0) + (1 - \alpha)g(t, x(t), u(t)) + \alpha \int_0^t g(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (6.8)$$

Caputo-Fabrizio kesirli integral denklemini biçiminde tekrar ifade edilir. Daha sonra durum denklemlerine Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = x(0) + \frac{\alpha h}{2} \left[g(t_{k+1}, x^p(t_{k+1}), u(t_{k+1})) + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} g(t_k, x(t_k), u(t_k)) \right], \\ x^p(t_{k+1}) = x(0) + h \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_k, x(t_k), u(t_k)) \right]. \end{cases} \quad (6.9)$$

Burada $k = 0, 1, \dots, M-1$ ve $j = 0, 1, \dots, k$ dır. Ayrıca (6.9) denklemlerindeki $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları aşağıdaki şekildedir:

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq k \\ 1, & j = k+1, \end{cases} \quad (6.10)$$

$$b_{j,k+1} = \begin{cases} 1 + \frac{1-\alpha}{h}, & j = k \\ 1, & j = 0, 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (6.11)$$

5. Adım: $\lambda_i(t_f) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sınır koşulu altında (5.13) sistemi (6.1) kontrolü ile ileri yönlü zaman ayrıklaştırması ile çözülür. Bunun için yardımcı durum denklemleri

$$\begin{aligned} \lambda(t_f - t) &= (1-\alpha) g(t_f - t, x(t_f - t), u(t_f - t)) \\ &+ \alpha \int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}(t_f - \tau, x(t_f - \tau), u(t_f - \tau), \lambda(t_f - \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Caputo-Fabrizio kesirli integral denklemi biçiminde tekrar ifade edilir. Daha sonra yardımcı durum denklemlerine Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t_{M-k-1}) = \frac{\alpha h}{2} \left[\frac{\partial H}{\partial x}(t_{M-k-1}, x(t_{M-k-1}), u(t_{M-k-1}), \lambda^p(t_{M-k-1})) \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial x}(t_{M-j}, x(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda^p(t_{M-k-1}) = h \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial x}(t_{M-j}, x(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right]. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Burada $k = 0, 1, \dots, M-1$ ve $j = 0, 1, \dots, k$ dir. Ayrıca (6.13) denklemlerindeki $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları içinde 4. adımda verilmiştir.

6.1.3 Atangana-Baleanu Kesirli Türevi için Algoritma

Bu operatör içinde aynı şekilde algoritmanın ilk üç adımı ve son iki adımı aynıdır. Operatör değiştiği için yine 4. ve 5. adımdaki denklemler ile $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları değişiklik gösterir. Bu değişikliklerle birlikte Atangana-Baleanu kesirli operatörü için algoritmanın 4. ve 5. adımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [76]:

4. Adım: (S_0, E_0, I_0, R_0) başlangıç koşulu ve u kontrolü ile (4.2) sistemi ileri yönlü zaman ayrıklaştırılması ile çözülür. Bunun için durum denklemleri

$$x(t) = x(0) + \frac{(1-\alpha)}{M(\alpha)} g(t, x(t), u(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad 6.14$$

Atangana-Baleanu kesirli integral denklemi olarak tekrar ifade edilir. Daha sonra durum denklemlerine Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_{k+1}) = x(0) + \frac{h^\alpha}{(\alpha+1)M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[g(t_{k+1}, x^p(t_{k+1}), u(t_{k+1})) \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} g(t_k, x(t_k), u(t_k)) \right], \\ x^p(t_{k+1}) = x(0) + \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_k, x(t_k), u(t_k)) \right]. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Burada $k = 0, 1, \dots, M-1$ ve $j = 0, 1, \dots, k$ dir. Ayrıca (6.15) denklemlerindeki $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları aşağıdaki şekildedir:

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq k \\ 1, & j = k+1, \end{cases} \quad (6.16)$$

$$b_{j,k+1} = \begin{cases} 1 + \frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{h^\alpha}, & j = k \\ (k-j+1)^\alpha - (k-j)^\alpha, & j = 0, 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (6.17)$$

5. Adım: $\lambda_i(t_f) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sınır koşulu altında (5.13) sistemi (6.1) u kontrolü ile ileri yönlü zaman ayrıklaştırılması ile çözülür. Bunun için yardımcı durum denklemleri

$$\lambda(t_f - t) = \frac{(1-\alpha)}{M(\alpha)} g(t_f - t, x(t_f - t), u(t_f - t)) \\ + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}(t_f - \tau, x(t_f - \tau), u(t_f - \tau), \lambda(t_f - \tau)) d\tau \quad (6.18)$$

Caputo-Fabrizio kesirli integral denklemini biçiminde tekrar ifade edilir. Daha sonra yardımcı durum denklemlerine Adams-tipi öngörücü-düzeltilici yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t_{M-k-1}) = \frac{h^\alpha}{(\alpha+1)M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\partial H}{\partial x}(t_{M-k-1}, x(t_{M-k-1}), u(t_{M-k-1}), \lambda^p(t_{M-k-1})) \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial x}(t_{M-j}, x(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right], \\ \lambda^p(t_{M-k-1}) = \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} \frac{\partial H}{\partial x}(t_{M-j}, x(t_{M-j}), u(t_{M-j}), \lambda_i(t_{M-j})) \right]. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Burada $k = 0, 1, \dots, M-1$ ve $j = 0, 1, \dots, k$ dir. Ayrıca (6.19) denklemlerindeki $a_{j,k+1}$ ve $b_{j,k+1}$ katsayıları için de 4. adımda verilmiştir. Ayrıca nümerik sonuçların elde edilmesinde normalleştirme fonksiyonu $M(\alpha) = 1$ olarak kabul edilmiştir.

6.2 Alternatif Kontrol Stratejileri

Önceki bölümlerde, kontrol fonksiyonuna neden ihtiyaç duyulduğunun öneminden bahsedildi. Bununla birlikte kontrol fonksiyonunun sisteme hangi amaç için adapte edildiği oldukça önemlidir. Optimal kontrol probleminin amaç fonksiyonuna göre kontrol stratejisinin yapısı değişebilir. Hatta bir kontrol fonksiyonu yerine birden fazla kontrol fonksiyonu gerekebilir. Bu durum bazı SEIR modelleri için ele alınmıştır [39]-[41]. Tez çalışmasındaki (4.2) sisteminin Strateji 1 olarak adlandırıldığı göz önünde bulundurulduğunda diğer iki strateji aşağıdaki biçimdedir:

6.2.1 Strateji 2

Bu senaryoda, [41] çalışmasındaki kontrol adaptasyonu mantığı ele alınarak anti-virüs programının yalnızca virüs bulaşmış bilgisayarlara yüklendiği varsayılmıştır. Başka bir deyişle, anti-virüs programının, sadece virüs bulaşmış bilgisayarlara yüklendiği varsayılmıştır. Aslında, virüslü bilgisayarların hem duyarlı hem de virüs tehdidi altındaki bilgisayarlara yönelik oluşturduğu tehdit ihmal edilmiştir. Bu varsayım altında, kontrollü sistem $w \in [0, 1]$ olmak üzere şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha S(t) &= \Lambda^\alpha - \beta_1^\alpha S(t)I(t) - \beta_2^\alpha S(t)E(t) - pS(t) - \mu^\alpha S(t) + wu(t)I(t), \\
{}_0^C D_t^\alpha E(t) &= \beta_1^\alpha S(t)I(t) + \beta_2^\alpha S(t)E(t) - k^\alpha E(t) - \sigma^\alpha E(t) - \mu^\alpha E(t), \\
{}_0^C D_t^\alpha I(t) &= \sigma^\alpha E(t) - d^\alpha I(t) - \mu^\alpha I(t) - u(t)I(t), \\
{}_0^C D_t^\alpha R(t) &= pS(t) + k^\alpha E(t) + d^\alpha I(t) - \mu^\alpha R(t) + (1-w)u(t)I(t).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

6.2.2 Strateji 3

Bu senaryoda ise, [39] çalışmasındaki kontrol ekleme mantığına dayanarak anti-virüs programı yalnızca koruma amacıyla virüse duyarlı olan bilgisayarlara kurulduğu düşünülmüştür. Böylece sistem aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha S(t) &= \Lambda^\alpha - \beta_1^\alpha S(t)I(t) - \beta_2^\alpha S(t)E(t) - pS(t) - \mu^\alpha S(t) - u(t)S(t), \\
{}_0^C D_t^\alpha E(t) &= \beta_1^\alpha S(t)I(t) + \beta_2^\alpha S(t)E(t) - k^\alpha E(t) - \sigma^\alpha E(t) - \mu^\alpha E(t), \\
{}_0^C D_t^\alpha I(t) &= \sigma^\alpha E(t) - d^\alpha I(t) - \mu^\alpha I(t), \\
{}_0^C D_t^\alpha R(t) &= pS(t) + k^\alpha E(t) + d^\alpha I(t) - \mu^\alpha R(t) + u(t)S(t).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

6.3 Nümerik Sonuçlar ve Tartışma

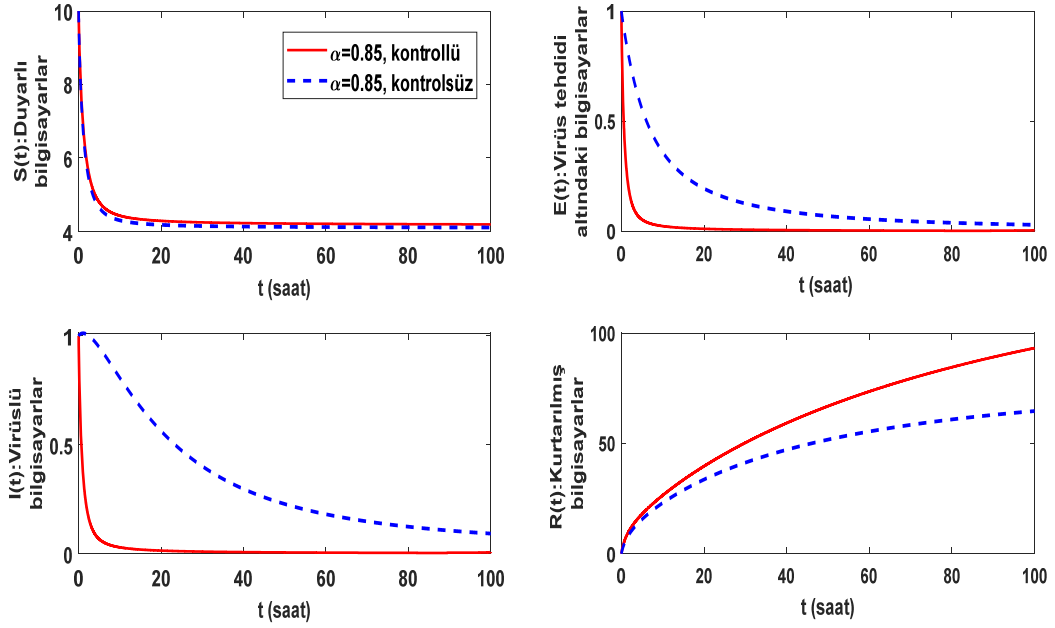
Bu bölümde çalışmanın amacı yönünde elde edilen sonuçlar verilecektir. İlk olarak sistemin kontrol olmadan ve ana stratejimiz olan Strateji 1 deki kontrollü sistemin sonuçları karşılaştırmalı olarak verilecektir. Ardından çalışmanın diğer bir amacı olan kontrol stratejilerini karşılaştırmak için sonuçlarımız olacaktır. Son olarak çalışmada ele alınan sistem Caputo kesirli operatöre sahip olsa da diğer yeni nesil operatörler için yani Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli operatörleri içinde sistemin cevabı her bir operatör için elde edilmiş ve üç operatörün karşılaştırması yine sonuçlar arasındadır.

Nümerik sonuçlar [43]'te verilen parametre değerleri kullanılarak elde edilmiştir. Ağırlık katsayısı olan $\epsilon = 0.009$ olarak alınmıştır. Başlangıç koşulları $S(0) = 10$; $E(0) = 1$; $I(0) = 1$; $R(0) = 0$ seçilmiş ve kesirli mertebeye için $0.8 \leq \alpha \leq 1$ aralığı seçilmiştir. Ayrıca sistemdeki diğer parametrelerin değerleri bir sonraki sayfada Tablo 6.1 ile verilmiştir. Tüm nümerik çözümler MATLAB R2007b programı kullanılarak yazılan algoritmalar ile elde edilmiştir.

Tablo 6.1: (4.2) bilgisayar virüsü SEIR modelindeki parametreler, tanımları ve nümerik çözümler için kullanılan değerleri.

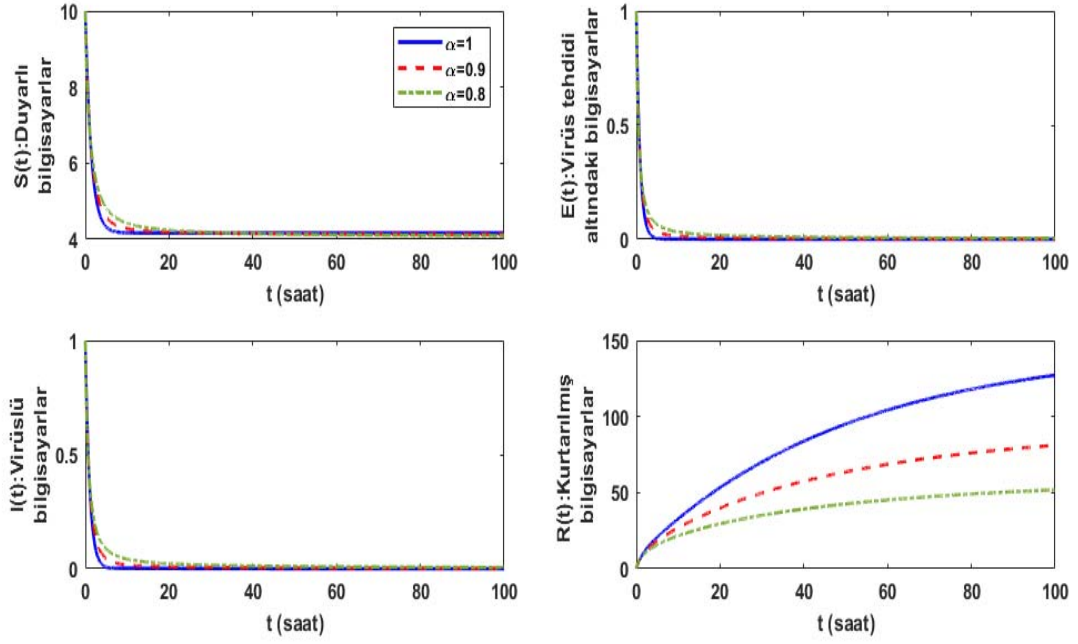
Parametre	Tanım	Değer
Λ	İnternet ağına bağlanan toplam harici bilgisayar sayısı	10
p	Ağın doğal anti-virüs yeteneği ile duyarlı bilgisayarların kurtarılma oranı	0.7
β_1	Virüslü ve duyarlı bilgisayarların etkileşim oranı	0.002
β_2	Virüslü ve virüs tehdidi altındaki bilgisayarların etkileşim oranı	0.003
μ	Mekanik vb. nedenlerle bilgisayarların arızalanma oranı	0.02
k	Ağın doğal anti-virüs yeteneği ile virüs tehdidi altındaki bilgisayarların kurtarılma oranı	0.04
σ	Virüs tehdidi altındaki ve bir anti virüs programı tarafından kurtarılamayan ve bozulabilen bilgisayarların oranı	0.09
d	Virüslü bilgisayarların doğal kurtarılma oranı	0.04

6.3.1 Strateji 1 için Karşılaştırmalı Sonuçlar



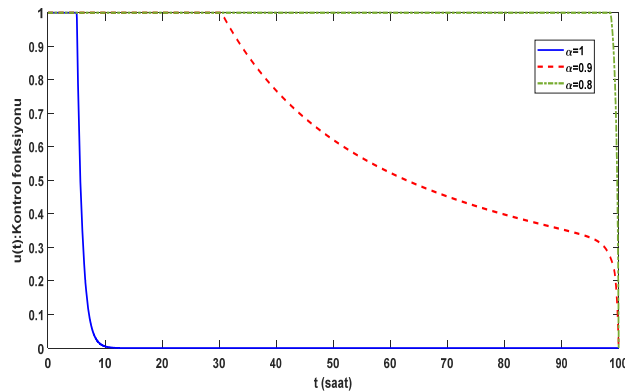
Şekil 6.1: $\alpha = 0.85$ için Strateji 1 de kontrollü ve kontrolsüz sistem davranışları.

İlk olarak Şekil 6.1, Strateji 1 olarak adlandırılan ana model için kontrollü ve kontrolsüz sistemin davranışlarını göstermektedir. Bu durumda α keyfi olarak 0.85 olarak seçilmiştir. Üç stratejinin de amacı, virüs bulaşmış ve virüse maruz kalan bilgisayarların sayısını azaltmaktır. Bu stratejileri birbirinden ayıran ise, anti-virüs programının bilgisayar ağına nasıl yüklendiğidir. Şekil 6.1, virüsten koruma programının virüs bulaşmış ve virüse maruz kalan bilgisayarlara yüklendiği durumu göstermektedir. Bu durumda, kontrolün etkisi modelde $(1-u)SI$, $(1-u)SE$, uI ve uE terimleriyle matematiksel olarak temsil edilir. Amaçlandığı gibi, $t = 100$ anında hem virüs bulaşmış hem de virüse maruz kalan bilgisayarların sayısı neredeyse sıfırdır. Bu nedenle, kurtarılan bilgisayarların sayısı artmıştır. Bakıldığında duyarlı bilgisayarların sayısında belli belirsiz bir değişiklik vardır. Bununla birlikte, çeşitli karşılaştırmalar için [43] deki küçük başlangıç popülasyon değerleri kullandığı için bu fark anlaşılabilir. Sonuçlar arasında verilmese de, bu farkın daha büyük popülasyonlar için önemli olduğu gözlenmiştir. Benzer bir durum, kurtarılan bilgisayar popülasyonu için de geçerlidir.



Şekil 6.2: Strateji 1 için sistem davranışlarının α 'ya bağlılığı.

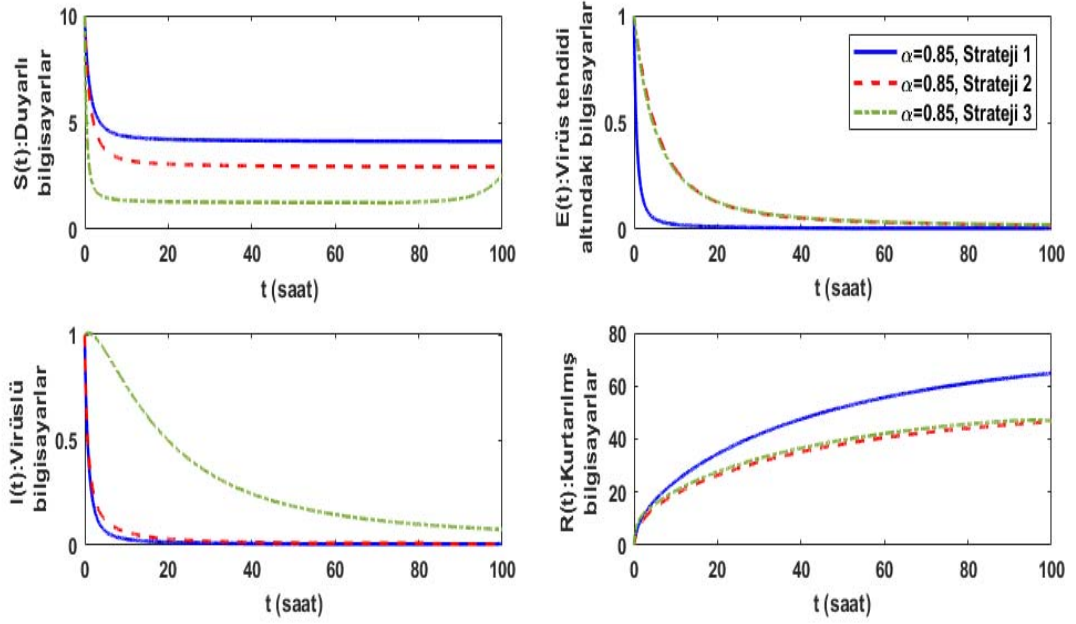
Şekil 6.2, Strateji 1 için sistem davranışlarının α 'ya bağlılığını göstermektedir. α değeri azaldıkça, virüs bulaşmış ve virüse tehdidi altındaki bilgisayarların sayısının sifıra ulaşmasının daha uzun süreceği görülmektedir. Diğer bir deyişle, α değeri ne kadar küçükse, virüsün ağ üzerindeki etkisini azaltmak için anti-virüs programı o kadar uzun süre çalışmalıdır. Bu durumun gerçekliği, Şekil 6.3'teki kontrol fonksiyonunun davranışından da açıkça görülmektedir.



Şekil 6.3: α 'ya göre Strateji 1 için $u(t)$ kontrol fonksiyonunun davranışı.

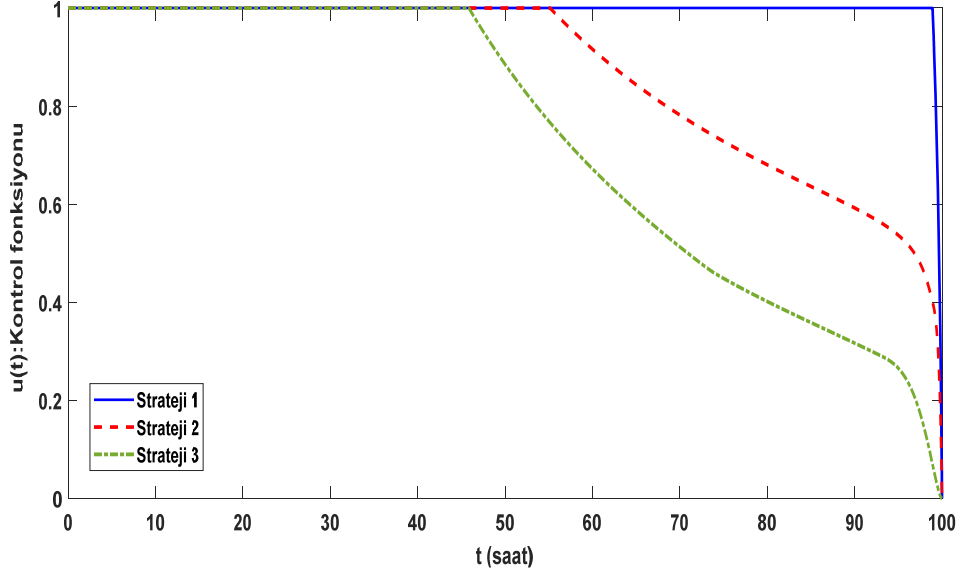
Şekil 6.3, α değeri 1'den azaldıkça kontrolün etkinliğinin süresinin uzadığının göstermektedir. Yani anti-virüs programı daha uzun süre çalışırsa istenilen sonuç elde edilir.

6.3.2 Kontrol Stratejileri için Karşılaştırmalı Sonuçlar



Şekil 6.4: $\alpha = 0.85$ için kontrol stratejilerinin karşılaştırılması.

Şekil 6.4, $\alpha = 0.85$ için üç kontrol stratejisinin karşılaştırmasını gösterir. Strateji 2'de, anti-virüs programı yalnızca virüslü bilgisayarlara kurulur [41]. Bu, virüslü bilgisayarlara bağlı bilgisayarların korunmasının ihmal edildiği anlamına gelir. Ancak popülasyon küçük olduğu için bu stratejide virüslü bilgisayarların azaltılması Strateji 1'e benzer. Strateji 2'de, virüs tehdidi altındaki bilgisayarlara virüs koruması kurulmadığı için sayılarındaki azalma yavaştır. Aynı durum Strateji 3 için de geçerlidir. Ancak büyük bir bilgisayar ağında büyük hasarlara yol açmamak için anti-virüs programının bu bölme yüklenmesi gerektiği göz ardı edilmemelidir. Strateji 3 yalnızca duyarlı bölme uygulandığından, virüslü bilgisayarlar ağdaki diğer bilgisayarlara zarar vermeye devam eder [39]. Bu nedenle, Strateji 3'te virüslü bölmede önemli bir azalma yoktur. Her üç strateji için de kurtarılan bilgisayar sayısı birbirine yakındır. Nüfus arttıkça bu kompartımanda da önemli farklılıklar olacaktır.

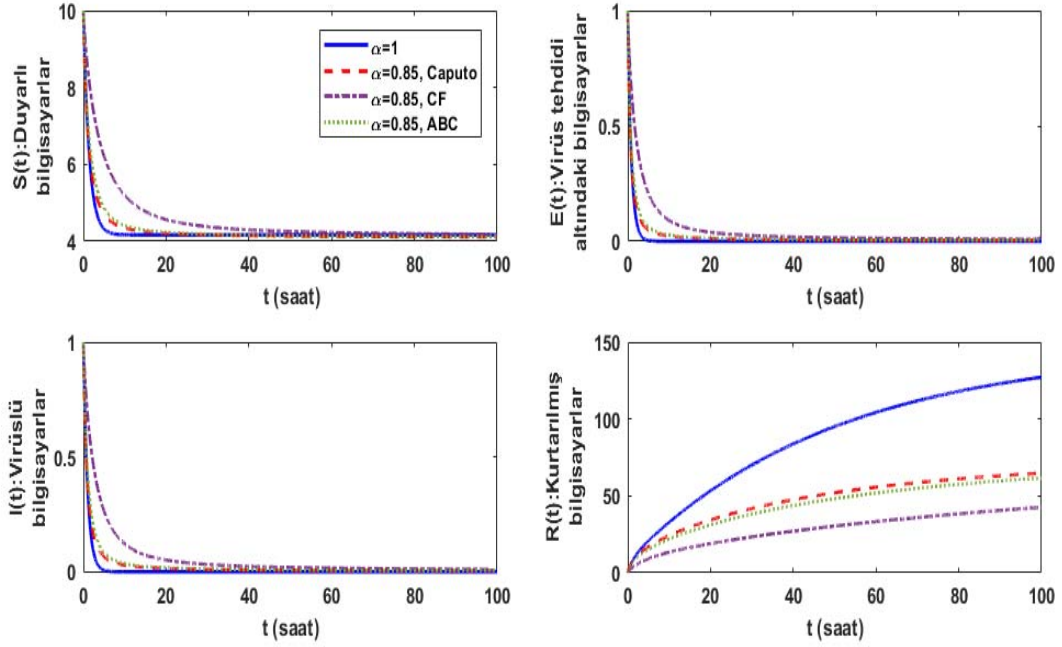


Şekil 6.5: $\alpha = 0.85$ için stratejilerin kontrol fonksiyonlarının karşılaştırılması.

Şekil 6.5 farklı stratejiler için anti-virüs kontrolünün etkinlik süresini göstermektedir. Buna göre, Strateji 2 ve 3'te anti-virüs programı daha sınırlı bir bilgisayar sınıfına kurulduğundan, kontrolün çalışma süresi Strateji 1'e göre daha kısadır. Strateji 3 için en düşüktür ve bu bir avantaj gibi görünebilir. Ancak, Şekil 6.4'te görüldüğü gibi, düşük maliyetli ve kısa çalışma süresine rağmen, Strateji 3, diğer stratejilere kıyasla virüslü bilgisayarların sayısını azaltmada en az başarılı olanıdır.

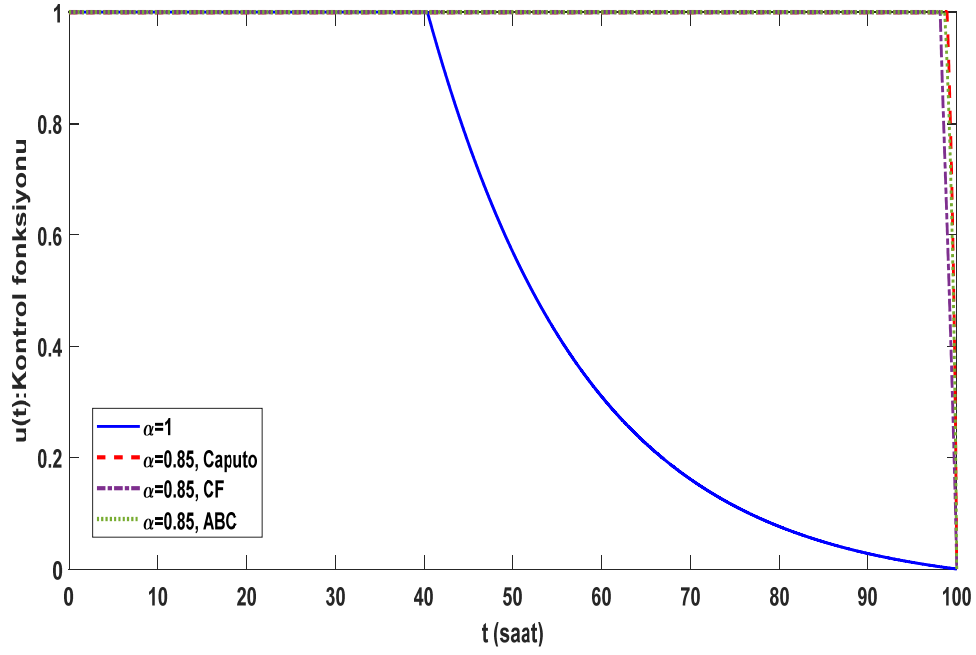
Sonuç olarak, Strateji 1, bir virüsten koruma programı yükleyerek bir ağdaki virüs yayılmasını etkili bir şekilde kontrol etmede en başarılı olanıdır. Ancak bu, diğer stratejilerin etkisiz olduğu anlamına gelmez. SEIR modelleri ile karakterize edilen farklı ağların doğasına bağlı olarak 2. ve 3. kontrol stratejileri oldukça etkili olabilir.

6.3.3 Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu Kesirli Türevleri için Karşılaştırmalı Sonuçlar



Şekil 6.6: $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.85$ için Strateji 1 de sistemin davranışının Caputo, CF ve ABC kesirli türevleri için karşılaştırılması.

$\alpha = 0.85$ değeri için, tüm kompartımanların sayısında en çok istenen durum, Caputo kesirli türevi içindir. Ardından ABC türevi ve CF türevi gelir. Caputo kesirli türevi için α değeri 1'e yaklaşırsa, tüm kompartımanlar için amaçlanan sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 6.7: $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0.85$ için Strateji 1 de kontrol fonksiyonunun Caputo, CF ve ABC kesirli türevleri için karşılaştırılması.

Şekil 6.7'de $\alpha = 0.85$ değeri için kontrolün davranışı Caputo, CF ve ABC kesirli türevleri için neredeyse aynıdır. Başka bir deyişle, antivirüs programı aynı anda kullanılan tüm kesirli türevler için etkilidir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, kuvvet yasasına uygun bir bilgisayar ağındaki bilgisayar virüslerinin yayılmasını önleyecek en uygun kontrol stratejilerini incelemektedir. Önerilen optimal kontrol probleminin amacı, virüsün ağda neden olduğu hasarı minimum maliyetle ortadan kaldırmak olmuştur. Bu doğrultuda amaç fonksiyonu belirlenmiştir. Kontrol parametresinin sistemin kararlılığına etkisi göz önüne alınarak, kontrol altındaki sistem için R_0 üreme sayısı yeniden hesaplanmış ve kararlılık analizi yapılmıştır. Unutulmamalıdır ki, kontrol parametrelili bir sistemin kararlılık analizi, hesaplama karmaşıklığına neden olduğundan, literatürde çoğunlukla kontrolsüz model için kararlılık analizi verilmektedir. Mevcut model Ebenezer Bonyah ve diğ. [43] tarafından Caputo kesirli türevi ile genelleştirilmiştir. [43]'te bahsedilmemesine rağmen, çalışmada ele alınan ağ orta derecede heterojen bir yapıya sahip olduğundan, virüs yayılımı kuvvet yasasına göre davranır, bu da modelin Caputo kesirli türevi ile geliştirilmesini anlamlı kılar. Ancak bu çalışmada, kesirli mertebeden modeller için önemli olan birim uygunluğu sağlanarak optimal kontrol problemi oluşturulmuştur. Hamilton formalizmi kullanılarak optimal sistem elde edilmiştir. Nümerik çözümleri elde etmek için Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi ve ileri-geri süpürme yöntemi birleştirilmiştir. Üç optimal kontrol stratejisinden en avantajlısının ana problem olarak incelenen Strateji 1 olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, virüs bulaşmış bilgisayarlara ve virüs bulaşmış ve virüs tehdidi altındaki bilgisayarlara bağlı duyarlı bilgisayarlara virüsten koruma yazılımı yüklemek, söz konusu ağ için oldukça etkilidir. Çalışmanın devamında Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu gibi singüler olmayan kesirli türevlerinin sistemin cevabı üzerindeki etkisi incelenmiştir ve Caputo kesirli türeviyle kıyaslanmıştır. Fakat sonuçlar gösteriyor ki en istendik sonuç Caputo kesirli türevi için olmuştur. Bunun sebebi ağın orta derecede heterojen bir yapıya sahip olmasıdır. Sadece internetin değil, cep telefonlarının ve USB bağlantılarının da etkisi altında olan heterojen bir ağ için virüs tehdidini ortadan kaldırmaya yönelik optimal kontrol stratejilerinin geliştirilmesinde Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevleri daha etkili olabilir. Çünkü ağın yapısı tam heterojen yani üstel yasaya uygun davranır.

8. KAYNAKLAR

- [1] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “Contributions to the mathematical theory of epidemics IV. Analysis of experimental epidemics of the virus disease mouse ectromelia”, *Epidemiology & Infection*, vol. 37, no. 2, pp. 172-187, 1937, doi.org/10.1017/S0022172400034902.
- [2] H. Heesterbeek, R. M. Anderson, V. Andreasen, S. Bansal, D. De Angelis, C. Dye and Isaac Newton Institute IDD Collaboration, “Modeling infectious disease dynamics in the complex landscape of global health”, *Science*, vol. 347, no. 6227, aaa4339, 2015, doi: 10.1126/science.aaa4339.
- [3] X. Meng, S. Zhao, T. Feng and T. Zhang, “Dynamics of a novel nonlinear stochastic SIS epidemic model with double epidemic hypothesis”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 433, no. 1, pp. 227-242, 2016.
- [4] I. Nesteruk, “Estimations of the coronavirus epidemic dynamics in South Korea with the use of SIR model”, *Preprint, ResearchGate*, 2020, doi: 10.13140/RG.2.2.15489.40807.
- [5] M. B. Hooten, J. Anderson and L. A. Waller, “Assessing North American influenza dynamics with a statistical SIRS model”, *Spatial and spatio-temporal epidemiology*, vol. 1, no. 2-3, pp. 177-185, 2010.
- [6] D. Efimov and R. Ushirobira, “On an interval prediction of COVID-19 development based on a SEIR epidemic model”, *Annual reviews in control*, vol. 51, pp. 477-487, 2021.
- [7] S. Jain and S. Kumar, “Dynamic analysis of the role of innate immunity in SEIS epidemic model”, *The European Physical Journal Plus*, vol. 136, no. 4, pp. 1-28, 2021.
- [8] U. Mishra, An introduction to computer viruses, *Available at SSRN 1916631*, 2010.
- [9] W. H. Murray, “The application of epidemiology to computer viruses”, *Computers & Security*, vol. 7, no. 2, pp. 139-145, 1988.

- [10] H. Thimbleby, S. Anderson and P. Cairns, “A framework for modelling trojans and computer virus infection”, *The Comput. J.*, vol. 41, no. 7, pp. 444-458, 1998.
- [11] L. Billings, W. M. Spears and I. B. Schwartz, “A unified prediction of computer virus spread in connected networks”, *Physics Letters A*, vol. 297, no. 3-4, pp. 261-266, 2002.
- [12] J. O. Kephart, S. R. White and D. M. Chess, “Computers and epidemiology”, *IEEE Spectrum*, vol. 30, no. 5, pp. 20-26, 1993.
- [13] J. R. C. Piqueira, B. F. Navarro and L. H. A. Monteiro, “Epidemiological models applied to viruses in computer networks”, *J. Comput. Sci.*, vol. 1, no. 1, pp. 31-34, 2005.
- [14] L. X. Yang and X. Yang, “The spread of computer viruses over a reduced scale-free network”, *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, vol. 396, pp. 173-184, 2014.
- [15] J. C. Wierman and D. J. Marchette, “Modeling computer virus prevalence with a susceptible-infected-susceptible model with reintroduction”, *Comput. Stat. Data Anal.*, vol. 45, no. 1, pp. 3-23, 2004.
- [16] J. R. C. Piqueira and V. O. Araujo, “A modified epidemiological model for computer viruses”, *Appl. Math. Comput.*, vol. 213, no. 2, pp. 355-360, 2009.
- [17] J. Ren, X. Yang, L. X. Yang, Y. Xu and F. Yang, “A delayed computer virus propagation model and its dynamics”, *Chaos Solit. Fractals.*, vol. 45, no. 1, pp. 74-79, 2012.
- [18] C. Gan, X. Yang and Q. Zhu, “Propagation of computer virus under the influences of infected external computers and removable storage media”, *Nonlinear Dyn.*, vol. 78, no. 2, pp. 1349-1356, 2014.
- [19] L. Chen and J. Sun, “Global stability and optimal control of an SIRS epidemic model on heterogeneous networks”, *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, vol. 410, pp. 196-204, 2014.
- [20] R. Almeida, “Analysis of a fractional SEIR model with treatment”, *Appl. Math. Lett.*, vol. 84, pp. 56-62, 2018.

- [21] C. Gan, X. Yang, Q. Zhu, J. Jin and L. He, “The spread of computer virus under the effect of external computers”, *Nonlinear Dyn.*, vol. 73, no. 3, pp. 1615-1620, 2013.
- [22] L. X. Yang and X. Yang, “The effect of infected external computers on the spread of viruses: a compartment modeling study”, *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, vol. 392, no. 24, pp. 6523-6535, 2013.
- [23] O. A. Toutonji, S. M. Yoo and M. Park, “Stability analysis of VEISV propagation modeling for network worm attack”, *Appl. Math. Model.*, vol. 36, no. 6, pp. 2751-2761, 2012.
- [24] X. Yang and L. X. Yang, “Towards the epidemiological modeling of computer viruses”, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, vol. 2012, 2012.
- [25] J. Hristov, “Derivatives with non-singular kernels from the Caputo-Fabrizio definition and beyond: appraising analysis with emphasis on diffusion models”, *Front. Fract. Calc.*, vol. 1, pp. 270-342, 2017.
- [26] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204, Elsevier, 2006.
- [27] M. Caputo and M. Fabrizio, “A New Definition of Fractional Derivative Without Singular Kernel”, *Prog. Fract. Differ. Appl.*, vol. 1, no. 2, pp. 73-85, 2015.
- [28] A. Atangana and D. Baleanu, “New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non-Singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model”, *Therm. Sci.*, vol. 20, no. 2, pp. 763-769, 2016.
- [29] E. Bonyah, A. K. Sagoe, D. Kumar and S. Deniz, “Fractional optimal control dynamics of coronavirus model with Mittag-Leffler law”, *Ecol. Complex.* vol. 45, 2021, Article ID 100880.

- [30] S. Bushnaq, T. Saeed, D. F. Torres and A. Zeb, “Control of COVID-19 dynamics through a fractional-order model”, *Alex. Eng. J.*, vol. 60, no. 4, pp. 3587-3592, 2021.
- [31] M. A. Dokuyucu and H. Dutta, “A fractional order model for Ebola Virus with the new Caputo fractional derivative without singular kernel”, *Chaos Solit. Fractals.* vol. 134, 2020, Article ID 109717.
- [32] H. M. Ali and I. G. Ameen, “Optimal control strategies of a fractional order model for zika virus infection involving various transmissions”, *Chaos Solit. Fractals.*, vol. 146, 2021, Article ID 110864.
- [33] K. S. Nisar, K. Logeswari, V. Vijayaraj, H. M. Baskonus and C. Ravichandran, “Fractional Order Modeling the Gemini Virus in Capsicum annum with Optimal Control”, *Fractal Fract.*, vol. 6, no. 2, pp. 61, 2022.
- [34] M. A. Dokuyucu, E. Celik, H. Bulut and H. M. Baskonus, “Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative”, *Eur. Phys. J. Plus.*, vol. 133, no. 3, pp. 1-6, 2018.
- [35] E. Uçar and N. Özdemir, “A fractional model of cancer-immune system with Caputo and Caputo Fabrizio derivatives”, *Eur. Phys. J. Plus.*, vol. 136, no. 1, pp. 1-17, 2021.
- [36] N. Özdemir, S. Uçar, and B.B.İ Eroğlu, “Dynamical Analysis of Fractional Order Model for Computer Virus Propagation with Kill Signals”, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* vol. 21, no. 3-4, pp. 239-247, 2020.
- [37] A. Mojaver and H. Kheiri, “Dynamical analysis of a class of hepatitis C virus infection models with application of optimal control”, *Int. J. Biomath.*, vol. 9, no. 03, 2016, Article ID 1650038.
- [38] P. A. Naik, J. Zu and K. M. Owolabi, “Global dynamics of a fractional order model for the transmission of HIV epidemic with optimal control”, *Chaos Solit. Fractals.*, vol. 138, 2020, Article ID 109826.

- [39] A. Rachah, “Analysis, simulation and optimal control of a SEIR model for Ebola virus with demographic effects”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* vol. 67, no. 1, pp. 179-197, 2018.
- [40] H. Kheiri and M. Jafari, “Optimal control of a fractional-order model for the HIV/AIDS epidemic”, *Int. J. Biomath.*, vol. 11, no. 07, 2018, Article ID 1850086.
- [41] J. Ren, Y. Xu and C. Zhang, “Optimal control of a delay-varying computer virus propagation model”, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, vol. 2013, 2013.
- [42] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal control applied to biological models*, Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [43] B. Ebenezer, N. Farai and A. A. S. Kwesi, “Fractional dynamics of computer virus propagation”, *Int. J. Appl. Math. Stat.*, vol. 3, no. 3, pp. 63-69, 2015.
- [44] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Pres, New York, 1999.
- [45] Y. Z. Povstenko, *Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*, Birkhauser, Switzerland, 2015.
- [46] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi and S. V. Rogosin, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, p. 540, New York, NY, USA: Springer, 2020.
- [47] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations. An application oriented exposition using operators of Caputo type*, Berlin: Springer, 2004.
- [48] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Yverdonles-Bains, Switzerland: Gordon and breach science publishers, Yverdon, vol. 1, 1993.
- [49] I. Ameen, D. Baleanu and H. M. Ali, “An efficient algorithm for solving the fractional optimal control of SIRV epidemic model with a combination of vaccination and treatment”, *Chaos Solit. Fractals.*, vol. 137, 2020, Article ID 109892.

- [50] J. D. Djida, I. Area and A. Atangana, “New Numerical Scheme of Atangana-Baleanu Fractional Integral: an Application to Groundwater Flow Within Leaky Aquifer”, arXiv:1610.08681, 2016.
- [51] M. Weilbeer, “Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background”, US Army Medical Research and Materiel Command, Carl-Friedrich-Gauß Mathematik und Informatik, Technischen Universität Braunschweig, 2005.
- [52] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer Science & Business Media, vol. 7, 2013.
- [53] L. J. S. Allen, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson Prentice Hall, vol. 348, USA, 2007.
- [54] V. S. Ertürk and S. Momani, “Solving systems of fractional differential equations using differential transform method”, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 215, no. 1, pp. 142-151, 2008.
- [55] D. S. Naidu, *Optimal control systems*, CRC Press, Boca-Raton, 2002.
- [56] S. I. Oke, M. B. Matadi and S. S. Xulu, “Optimal control analysis of a mathematical model for breast cancer”, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 23, no. 2, pp. 21, 2018.
- [57] I. Petras, *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [58] O. P. Agrawal, “A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems”, *Nonlinear Dyn.*, vol. 38, no. 1, pp. 323-337, 2004.
- [59] O. P. Agrawal and D. Baleanu, “A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems”, *J. Vib. Control*, vol. 13, no. 9-10, pp. 1269-1281, 2007.
- [60] O. P. Agrawal, “A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems”, *J. Vib. Control*, vol. 14, no. 9-10, pp. 1291-1299, 2008.

- [61] W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, vol. 222, New York Heidelberg Berlin, 1975.
- [62] P. Pedregal, *Introduction to optimization*, vol. 46, Springer Science & Business Media, 2006.
- [63] M. Peng, X. He, J. Huang and T. Dong, “Modeling computer virus and its dynamics”, *Math. Probl. Eng.*, vol. 2013, pp. 1-5, 2013.
-
- [64] A. Yusuf, B. Acay, U. T. Mustapha, M. Inc and D. Baleanu, “Mathematical modeling of pine wilt disease with Caputo fractional operator”, *Chaos Solit. Fractals.*, vol. 143, 2021, Article ID 110569.
- [65] A. U. Chukwu, J. A. Akinyemi, M. O. Adeniyi and S. O. Salawu, “On the reproduction number and the optimal control of infectious diseases in a heterogeneous population”, *Adv Differ Equ.*, vol. 2020, no. 1, pp. 1-14, 2020.
- [66] Z. M. Odibat and N. T. Shawagfeh, “Generalized Taylor's formula”, *Appl. Math. Comput.*, vol. 186, no. 1, pp. 286-293, 2007.
- [67] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics”, *Proc. R. Soc. Lond., Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 115, no. 772, pp. 700-721, 1927.
- [68] O. Diekmann, K. Dietz and J. A. P. Heesterbeek, “The basic reproduction ratio for sexually transmitted diseases: I. Theoretical considerations”, *Math. Biosci.*, vol. 107, no. 2, pp. 325-339, 1991.
- [69] P. Van den Driessche and J. Watmough, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission”, *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1-2, pp. 29-48, 2002.

- [70] H. A. A. El-Saka, “The fractional-order SIS epidemic model with variable population size”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society(JOEMS)*, vol. 22, no. 1, pp. 50-54, 2014.
- [71] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed and H. A. A. El Saka, “Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 325, no. 1, pp. 542-553, 2007.
- [72] D. L. Lukes, *Differential Equations: Classical to Controlled*, in: *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 162, Academic Press, New York, 1982.
- [73] T. A. Yildiz, A. Jajarmi, B. Yildiz and D. Baleanu, “New aspects of time fractional optimal control problems within operators with nonsingular kernel”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. – S*, vol. 13, no. 3, pp. 407–428, 2020.
- [74] G. M. Bahaa and A. Atangana, *Necessary and sufficient optimality conditions for fractional problems involving Atangana–Baleanu’s derivatives*, In *Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel*, Springer, Cham., pp. 13-33, 2019.
- [75] K. Diethelm, N. J. Ford and A. D. Freed, “A predictor–corrector approach for the numerical solution differential equations”, *Nonlin. Dyn.*, vol. 29, no. 1, pp. 3–22, 2002.
- [76] D. Baleanu, A. Jajarmi, S. S. Sajjadi and D. Mozyrska, “A new fractional model and optimal control of a tumor-immune surveillance with non-singular derivative operator”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 29, no. 8, 2019, Article ID 083127.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Fatma BOZANER
Doğum tarihi ve yeri : 16.02.1996-Gönen/BALIKESİR
e-posta : fatmastrk@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2014-2018
Lise	Gönen Mustafa Uşdu Anadolu Lisesi	2010-2014

Yayın Listesi

D. Avcı and F. Soyürk, “Optimal control strategies for a computer network under virus threat”, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 419, pp. 1-17, 2023, Article ID 114740. [Tezden türetilmiştir]

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında (proceedings) basılan bildiriler

Avcı Derya, Soyürk Fatma (2022). Optimal Control of a Fractional SIR Model under the effect of Beddington-DeAngelis Incidence and Holling Type II Recovery Rate for COVID-19, 6th International Conference on Mathematics (ICOM-2022) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

Soyürk Fatma, Avcı Derya (2022). Optimal Control of a Fractional SIR Model Under the Effect of Nonlinear Incidence and Recovery Rates, 1st International Symposium on Current Developments in Fundamental and Applied Mathematics Sciences (ISCDFAMS-2022) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

Avcı Derya, Soytürk Fatma (2022). Fractional Optimal Control Of an Epidemic Modeled with Two Types of Nonlinear Incidence Rates, 6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2022) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

Soytürk Fatma, Avcı Derya (2022). A Comparative Study on Optimal Control of Computer Virus Spread, 5th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2022) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

Avcı Derya, Soytürk Fatma (2021). Optimal Control of a Fractional Computer Virus Propagation Model, International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME-21) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

Ödüller

Balıkesir Üniversitesi Matematik Bölüm Birinciliği (2018)