**T.C.**
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA h-LOKAL FONKSİYONLAR

**BÜŞRA GÖLPINAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Jüri Üyeleri :** **Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ (Tez Danışmanı)**
**Prof. Dr. Fırat ATEŞ**
**Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ**

**BALIKESİR, AĞUSTOS - 2022**

# ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Ideal Topolojik Uzaylarda h-Lokal Fonksiyonlar**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Büşra GÖLPINAR**

(imza)

# ÖZET


**IDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA *h*-LOKAL FONKSİYONLAR**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BÜŞRA GÖLPINAR**
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ)**

**BALIKESİR, AĞUSTOS - 2022**

Tez çalışmasında Fadhil Abbas'ın tanımladığı h-açık kümeler kavramı kullanılarak h-lokal fonksiyon tanımlanmış ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. h-açık kümeler ile topolojik yapı kurulup kurulamayacağı sorusuna cevap aranmıştır.

Bu çalışma beş kısımdan meydana gelmektedir. Birinci kısımda tezin giriş bölümü yer almaktadır. Bu bölümünde, tezde bahsi geçen kavramların kısaca tarihsel verileri sunulmuştur. İkinci kısımda ise yaptığımız çalışmada kullanılacak olan ideal topolojik uzayların temel görüşleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tarafımızca verilen semi h-açık küme kavramı tanımlanmış, semi-açık ve semi- h-açık küme ile karşılaştırılması örnekler ile gösterilmiştir. Ayrıca h-açık kümeler ile topolojik yapı kurulabileceği ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde, h-komşuluk ve h-açık komşuluk tanımlanmış, h-lokal fonksiyonksiyonun özellikleri incelenmiş ve gereken örnekler verilmiştir. Yine bu bölümde $Cl^*_h$ işlemi tanımlanmış ve gerekli teoremler örnekleri ile beraber verilmiştir. Beşinci bölümde; $I_g$-h-kapalı küme, $I_{s^*g}$-h-kapalı küme tanımlanmış ve $I_{s^*g}$ -kapalı küme ile karşılaştırılması gerekli ters örnek verilerek yapılmıştır.



**ANAHTAR KELİMELER:** Ideal topolojik uzaylar, lokal fonksiyon, h-lokal fonksiyon, semi h-açık küme, $Cl^*_h$ işlemi, $I_g$-h-kapalı küme, $I_{s^*g}$ -h-kapalı küme

Bilim Kod / Kodları: 20405 Sayfa Sayısı: 23

# ABSTRACT


**$h$-LOCAL FUNCTIONS IN TOPOLOGICAL SPACES**
**MSC THESIS**
**BÜŞRA GÖLPINAR**
**BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATICS**

**(SUPERVISOR: PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ )**

**BALIKESİR, AUGUST - 2022**

Among the thesis study, the h-local function was defined and examined in detail by using the notion of h-open sets, defined by Fadhil Abbas. A response has been sought to the inquires of whether a topological structure can be established with h-open sets.

This study comprises of five parts. The first division contains the introductory part of the thesis. In this section, the historical data of the notions mentioned in the thesis are briefly offered. In the second section, the fundamental views of ideal topological spaces that will be used in our study are dedicated.

Inside the third division, the concept of semi-h-open set given by us is defined and its comparison with semi-open and semi-h-open set is shown with examples. In addition, it has been proven that a topological structure can be established with h-open sets.

In the fourth chapter, h-neighborhood and h-open neighborhood are defined, properties of h-local function are examined and necessary examples are given. Again in this section, $Cl^{*}h$ operation is defined and necessary theorems are given with examples. In the fifth section; Ig-h-closed set, $I_{s*g}$-h-closed set are defined and comparison with $I_{s*g}$-closed set is made by giving the necessary reverse example.



**KEYWORDS:** Ideal topological spaces, local function, h-local function, semi h-open set, $Cl^{*}_{h}$ operation, $I_g$-h-closed set, $I_{s*g}$-h-closed set

Science Code / Codes : 20405 Page Number: 23

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\forall$ | : Her |
| $\exists$ | : Vardır |
| $\ni$ | : Öyleki |
| $\neq$ | : Eşit değil |
| $\in$ | : Ait |
| $\notin$ | : Ait değil |
| $\Rightarrow$ | : Gerek şart |
| $\Leftarrow$ | : Yeter şart |
| $\Leftrightarrow$ | : Gerek ve yeter şart |
| $\emptyset$ | : Boş küme |
| **Y** | : Evrensel küme |
| **D$\cup$E** | : D birleşim E |
| **D$\cap$E** | : D kesişim E |
| **D$\subset$E** | : E kümesi D kümesini kapsar |
| **D$\not\subset$E** | : E kümesi D kümesini kapsamaz |
| **D-E** | : D fark E |
| **Y-E** | : E kümesinin tümleyeni |
| **N** | : Doğal sayılar kümesi |
| **P(Y)** | : Güç kümesi |
| $\tau$ | : Topolojik yapı, açıklar ailesi |
| $\tau_F$ | : Kapalılar ailesi |
| **S** | : Y kümesi üzerinde alınan rastgele bir ideal |
| $S_f$ | : Y kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideal |
| $S_c$ | : Y kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideal |
| **(Y,$\tau$)** | : Topolojik Uzay |
| **(Y,$\tau$,I)** | : Ideal Topolojik Uzay |
| $E^c$ | : E kümesinin tümleyeni |
| **Cl(E)** | : E kümesinin kapanışı |
| **Int(E)** | : E kümesinin içi |
| **sCl(E)** | : E kümesinin semi kapanışı |
| **SO(Y,x)** | : Semi açık kümelerin oluşturduğu aile |
| **$\vartheta$(x)** | : Açık komşuluklar ailesi |
| **A*(I,$\tau$)** | : A kümesinin I idealine ve $\tau$ topolojisine göre lokal fonksiyonu |
| $A^{*s}(I,\tau)$ | : A kümesinin I idealine ve $\tau$ topolojisine göre semi lokal fonksiyonu |
| $\tau^h$ | : h-açık kümelerin oluşturduğu aile |

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamın araştırılmasında ve yürütülmesinde bigi ve desteğini sonsuz sunan sevgili danışmanım Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen sevgili anneme şükranlarımı sunarım.

**Balıkesir, 2022** **Büşra GÖLPINAR**

# 1. GİRİŞ

Topolojik uzaylarda ideal konsepti kullanılarak lokal fonksiyon kavramı ilk olarak Kuratowski tarafından 1933 yılında verildi ve bu fonksiyonun sağladığı özellikler incelendi. 1960 yılında ise Vaidyanathaswamy tarafından lokal fonksiyon kavramı kullanılarak ideal topolojik uzay kavramı tanımlandı.

Jankovic ve Hamlett, 1990 yılında lokal fonksiyon kavramından faydalanıp kapanış operatörü ve bu operatörün sonucu ortaya çıkan kapalı kümelerden faydalanıp bu küme üzerinde yeni bir topoloji elde edileceğini gösterdiler. Ideal topolojik uzaylar üzerine çalışmalarını geliştirip ve bu kavrama ait yeni özellikler elde ettiler. Ayrıca I-açık küme kavramını da verip ideallere göre topolojileri incelediler.

Dontchev ve arkadaşları tarafından 1999 yılında $I_g$ kapalı küme kavramı verildi. Khan ve Hamza tarafından $I_{s*g}$-kapalı küme kavramı tanıtıldı. Ideal topolojik uzay değerli bir araştırma meselesi oldu ve topolojide yer alan birçok görüş ideal topolojik uzaya taşındı.

Bu çalışmada; h- komşuluk, h-açık komşuluk tanımlandı ve birbiri ile olan bağlantıları örnekler ile açıklandı. Semi h-açık küme kavramı örnekleriyle beraber verildi ve h-açık kümelerle kıyaslaması yapıldı. h-açık kümeler aracılığı ile h-lokal fonksiyon kavramı tanımlandı ve bu kavramın özelliklerinden ayrıntılı olarak bahsedildi. Ayrıca h-lokal fonksiyonunun sağladığı özellikleri için gereken örnekleri verdik. Semi h-lokal fonksiyon ve h-lokal fonksiyonun ideal topolojik uzaydaki özelliklerini teoremler ile ispat ettik. $Cl^*_h$ işlemini tanımladık ve özelliklerini örnekler ile inceledik. Ayrıca tanımladığımız h-lokal fonksiyonunun idealler ile olan bağlantısını karşılaştırdık. $\tau^*_h$ topolojisini tanımladık ve inceledik. Son olarak, ideal topolojik uzaylarda $I_g$-h-kapalı küme ile $I_{s*g}$-h-kapalı küme tanımı verdik ve $I_{s*g}$ kapalı küme ile karşılaştırmasını yaparak ters örnekle açıkladık.

# 2. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARIN ESAS KAVRAMLARI

## 2.1 İdeal Topolojik Uzaylar

1933 senesinde, Kuratowski tarafından kümenin lokal fonksiyonu, bu fonksiyonun sağladığı özellikler sunulmuş ve daha sonra bu görüş üzerinde araştırmalar yoğunlaştırılmış, topolojik alandaki çalışmalar adına mühim bir konu durumuna gelmiştir. [5]

### 2.1.1 Tanım

Boş küme olmayan bir Y kümesi alınsın. P(Y), Y' nin güç kümesi olsun. "Boş olmayan bir I ailesi;

1) Her D, E $\in$ I kümeleri için $D \cup E \in I$ (Sonlu toplamsallık)
2) Her $D \in I$ kümesi ve $E \subset D$ alt kümesi için $E \in I$ (Kalıtımsallık)

özelliklerini sağlasın. Bu takdirde I ailesine, Y kümesi üzerinde bir ideal denir. $(Y,\tau,I)$ üçlüsüne de ideal topolojik uzay denir" . [4]

## 2.2 Kümenin Lokal Fonksiyonu

### 2.2.1 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayı ve $D \subset Y$ alt kümesi alınsın. "I ailesi Y kümesi üzerinde bir ideal olduğunda;

$$D^*(I,\tau)=\{x\in Y : \forall\ V\in \vartheta_{(x)}, (V\cap D)\notin I\}$$

kümesine, D kümesinin I idealine bağlı lokal fonksiyonu denir. Ayrıca $D^*(I,\tau)$ simgesi yerine $D^*$ kullanılacaktır" . [4], [10]

### 2.2.2 Teorem

[4] Y kümesi üzerinde $S_1$, $S_2$ idealleri ile verilen $(Y,\tau)$ topolojik uzayı ve $D,E\subset Y$ alt kümeleri alınsın. Buradan;

1. $D \subset E \Rightarrow D^* \subset E^*$

2. $S_1 \subset S_2 \Rightarrow D^*(S_2) \subset D^*(S_1)$

3. $D^* \subset Cl(D^*) \subset Cl(D)$, ($D^*$ kümesi kapalı bir kümedir)

4. $(D^*)^* \subset D^*$

5. $(D \cup E)^* = D^* \cup E^*$

6. $D^* - E^* = (D-E)^* - E^* \subseteq (D-E)^*$

7. $H \in \tau \Rightarrow H \cap D^* = H \cap (H \cap D)^* \subseteq (H \cap D)^*$

8. $R \in S \Rightarrow (D \cup R)^* = D^* = (D-R)^*$

### 2.2.3 Tanım

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve $D \subset Y$ alt kümesi alınsın. I ailesi Y kümesi üzerinde bir ideal olmak üzere:

$D^{*s}(I,\tau)=\{x \in Y: \forall\ V \in SO(Y,x), (V \cap A) \notin I\}$

kümesine, D kümesinin I idealine tabi semi lokal fonksiyonu denir. Dahası $D^{*s}(I,\tau)$ simgesi yerine $D^{*s}$ kullanılacaktır. [3], [7]

## 2.3 Kuratowski Kapanış İşlemi

### 2.3.1 Tanım

P(Y), Y kümesinin güç kümesi olmak şartıyla ; $d:P(Y) \rightarrow P(Y)$ dönüşümü

1. $d(\emptyset)=\emptyset$

2. $D \in P(Y) \Rightarrow D \subset d(D)$

3. $d(D \cup E) = d(D) \cup d(E)$

4. $d(d(D)) \subseteq d(D)$

koşullarını temin etsin. Buradan $(D)^c = D \cup d(D)$ biçiminde belirlenen $(\ )^c = P(Y) \to P(Y)$ dönüşümü, P(Y) üzerinde Kuratowski Kapanış operatörüdür. [5]

**2.3.2 Tanım**

$(Y,\tau)$ topolojik uzayı ve Y kümesi üzerinde bir S ideali alınsın. Rastgele bir $F \subset Y$ alt kümesi için, $Cl^*(F) = F \cup F^*$ biçiminde verilen $Cl^* = P(Y) \to P(Y)$ dönüşümü 2.3.1 Tanımda verilen şartaları sağlıyor ise bu fonksiyona Kuratowski Kapanışı denir. [4] Bu nedenle,

1. $Cl^*(\emptyset) = \emptyset \cup \emptyset^* = \emptyset$ olur.

2. $Cl^*(F) = F \cup F^*$ olduğundan, $F \subset Cl^*(F)$ bulunur.

3. $Cl^*(F \cup G) = (F \cup G) \cup (F \cup G)^*$

$= (F \cup G) \cup (F^* \cup G^*)$

$= (F \cup F^*) \cup (G \cup G^*)$

$= Cl^*(F) \cup Cl^*(G)$

elde edilir.

4. $Cl^*(Cl^*(F)) = Cl^*(F \cup F^*)$
$= (F \cup F^*) \cup (F \cup F^*)^*$

$= (F \cup F^*) \cup (F^* \cup (F^*)^*)$

$\subseteq (F\cup F^*) \cup (F^* \cup F^*)$

$\subseteq (F\cup F^*) \cup (F^*) \subseteq (F\cup F^*) \subseteq Cl^*(F)$ (1)

olur. Diğer taraftan, $Cl^*(F) = F\cup F^*$ olduğundan;

$Cl^* (Cl^*(F)) = Cl^*(F) \cup (Cl^*(F)^*)$ olur ve buradan birleşim işlemi tanımı gereği

$Cl^*(F) \subseteq Cl^* (Cl^*(F))$ (2)

elde edilir. (1) ve (2) den $Cl^* (Cl^*(F)) = Cl^* (F)$ sonucuna varılır.

## 2.4 Ideal Topololojik Uzaylarda $\tau^*$ Topolojisi

### 2.4.1 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayı ile Y kümesi üzerinde bir S ideali alınsın. Buradan,

$\tau^*(S)=\{U\subset Y : Cl^*=(Y-U)=(Y-U)\}$

olarak sunulan $\tau^*(S)$ ailesi, Y kümesi üzerinde bir topolojidir. Dahası $\tau$ topolojisine göre daha incedir. [4]

### 2.4.2 Örnek

N doğal sayılar kümesi olmak üzere; N kümesi üzerinde $\beta=\{\{2n-1,2n\},n\in N\}$ tabanı tarafından üretilen sonlu $\tau$ topolojisini kurup $S_f$ ideali göz öününe alındığında $N^*(S_f)=\varnothing$ bulunur.

Buradan $Cl^*(N)=N$ elde edilir. Bu değer $\tau^*(S)$ de yerine yazılırsa $\tau^*(S)=P(N)$ sonucuna ulaşılır. [4]

### 2.5 Topolojik Uzaylarda Tanımlanan Bazı Açık Kümeler

Topolojide açık küme kavramı çok önemli olduğundan bu zamana kadar birçok açık küme tanımlanmış olup bu kısımda bize gerekli olan açık kümelerden bahsedeceğiz.

#### 2.5.1 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayında $D\subset Y$ alt kümesi alınsın. Şayet $D=Int(cl(D))$ oluyor ise D kümesine regüler açık küme denir. Bütün regüler açık kümelerin oluşturduğu aile RO(Y) ile gösterilir. [9]

#### 2.5.2 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayındaki $D\subset Y$ alt kümesi alınsın. Şayet $D\subset cl(Int(D))$ oluyor ise D kümesine semi açık küme denir. Tüm semi açık kümelerin oluşturduğu aile SO(Y) ile kısaca belirtilir. [8]

#### 2.5.3 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayında $D\subset Y$ alt kümesi göz önüne alınsın. D kümesinin kapsadığı bütün semi açık kümelerin birleşimine, D kümesinin semi içi denir ve sInt D ile gösterilir. [8]

#### 2.5.4 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayında $D\subset Y$ alt kümesi alınsın. Boş kümeden ve Y evrensel kümesinden farklı bir U açık kümesi için $D\subseteq Int(D\cup U)$ oluyor ise D kümesine h-açık küme denir. h-açık kümenin tümleyenine h- kapalı küme denir. $(Y,\tau)$ topolojik uzayındaki bütün h-açık kümelerin ailesi $\tau^h$ ile gösterilir. Ayrıca $\tau^h = hO(Y)$ gösterimi de kullanılır. [1]

#### 2.5.5 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayında $D\subset Y$ alt kümesi alınsın. Y evrensel kümesinde D kümesini kendinde bulunduran bütün h-kapalı kümelerin arakesitine D kümesinin h-kapanışı denir ve Clh(D) simgesi ile ifade edilir. [1]

# 3. h -AÇIK KÜMELERLE TOPOLOJİK YAPI KURMA

## 3.1 Semi h-Açık Kümeler

### 3.1.1 Tanım

$(Y,\tau)$ topolojik uzayında $D\subset Y$ alt kümesi göz önüne alınsın. Boş kümeden ve Y evrensel kümesinden farklı bir U açık kümesi için

$D\subseteq sInt(D\cup U)$

oluyor ise D kümesine semi h-açık küme denir. Semi h-açık kümenin tümleyenine semi h-kapalı küme denir. $(Y,\tau)$ topolojik uzayındaki semi h-açık kümelerin hepsinin ailesi $S_hO(Y)$ ile gösterilir.

### 3.1.2 Uyarı:

Birer birer olarak h-açık küme semi h-açık kümedir. Ancak her semi h-açık küme h-açık küme değildir.

### 3.1.3 Örnek:

$Y=\{k,m,p,s\}$ evrensel kümesi ve $\tau=\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,p\},\{k,p,s\}\}$ topolojisi verilsin. 2.5.4 Tanımdan $\tau^h=\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,p\},\{k,p,s\}\}$ bulunur. Tanım gereği $SO(Y)=\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,p\},\{m,s\},\{k,m,p\},\{k,p,s\}\}$ olurken 3.1.1 Tanım gereği $S_hO(Y)=\{\emptyset,Y,\{m\},\{s\},\{k,p\},\{m,s\},\{k,m,p\},\{k,p,s\}\}$ olduğunu kolaylıkla bulabiliriz. Buradan $\{m\},\{m,s\},\{k,m,p\}$ kümeleri semi h-açık kümelerdir fakat h-açık küme değillerdir.

### 3.1.4 Uyarı:

Her semi açık küme semi h-açık kümedir. Fakat tersi her zaman geçerli değildir.

### 3.1.5 Örnek:

$Y=\{k,m,p,s\}$ evrensel kümesi ve $\tau=\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,p\},\{k,p,s\}\}$ topolojisi ile $(Y,\tau)$ topolojik uzayını alalım. $I=\{\emptyset,\{p\}\}$ ideali verilsin. 2.5.2 Tanım gereği $SO(Y) =\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,p\},\{m,s\},\{k,m,p\},\{k,p,s\}\}$ olarak bulunur ve 3.1.1 Tanımdan $S_hO(Y) =\{\emptyset,Y, \{m\},\{s\},\{k,p\},\{m,s\},\{k,m,p\},\{k,p,s\}\}$ elde edilir. Böylece

$\{m\}\in S_hO(Y)$ fakat $\{m\}\notin SO(Y)$ dır.

## 3.2 h-Açık Kümeler ile Topolojik Yapı Kurma

h-açık küme tanımı gereği her açık küme h-açık kümedir. Dahası h-açık kümelerin herhangi bir birleşimi de h-açık küme olmaktadır. Bu kısımda h-açık kümeler aracılığı ile topolojik yapı kurulabiceğini ispat ettik.

### 3.2.1 Teorem:

$(Y,\tau)$ topolojik uzayı verilsin. $\tau^h$ ailesi, Y kümesi için topolojik yapı belirtir.

**İspat :**

1) h-açık küme tanımından $\emptyset,Y\in\tau^h$ olduğu açıktır.
2) Herhangi $D,E\subset Y$ iken $D\cap E\in\tau^h$ dır.[1]
3) $(Y,\tau)$ topolojik uzayı ve $\{A_i\subset Y : A_i\in\tau^h,\forall i \in I \text{ için}\}$ verilsin. Buradan kolaylıkla,

$A_i \subset\cup_{i\in I} A_i$

$\Rightarrow A_i \cup U\subset\cup_{i\in I} A_i \cup U$

$\Rightarrow Int(A_i \cup U)\subset Int(\cup_{i\in I} A_i \cup U)$

$\Rightarrow A_i \subset Int(A_i \cup U)\subset Int(\cup_{i\in I} A_i \cup U)$ ( 2.5.4 Tanım)

$\Rightarrow \cup_{i\in I} A_i\subset \cup_{i\in I} Int(\cup_{i\in I} A_i \cup U)$

$\Rightarrow \cup_{i\in I} A_i\subset Int(\cup_{i\in I} A_i \cup U)$ olduğundan $\cup_{i\in I} A_i \in\tau^h$ bulunur.

Bu nedenle h-açık kümelerin ailesi ile topolojik yapı kurulabilir.

# 4. h-LOKAL FONKSİYONLAR

## 4.1 h-Komşuluk

### 4.1.1 Tanım

$(Y,\tau^h)$ topolojik uzayında bir $z\in Y$ noktası alınsın. Bu durumda z noktasını ihtiva eden her h-açık komşuluğa z noktasının h-açık komşuluğu denir. Yani,

F kümesi z noktasının bir h-açık komşuluğudur $\Leftrightarrow$ $z\in Y$ ve $F\in\tau^h \ni z\in F$ dır .

### 4.1.2 Tanım

$(Y,\tau^h)$ topolojik uzayında bir $z\in Y$ noktası alınsın. Eğer $U\subset Y$ h-açık alt kümesini kapsayan bir $V \subset Y$ alt kümesi var ise, V alt kümesi z noktasının h-komşuluğudur.

Şöyleki,

V kümesi z noktasının h-komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists\, U\in \tau^h \ni z\in U \subseteq V$ dır.

### 4.1.3 Uyarı

$(Y,\tau^h)$ topolojik uzayında her h-açık komşuluk h-komşuluktur.

### 4.1.4 Uyarı

4.1.3 Uyarı'nın tersi her zaman doğru olmayabilir.

### 4.1.5 Örnek:

$Y=\{v,y,z\}$ evrensel kümesi ve $\tau=\{\emptyset,Y,\{v\},\{v,y\}\}$ topolojisi ile $(Y,\tau)$ topolojik uzayını ele alalım. 2.5.4 Tanım gereği

$\tau^h= hO(Y)=\{\emptyset,Y,\{v\},\{y\},\{v,y\},\{y,z\}\}$ olarak elde edilir.

Y evrensel kümesindeki v noktasının h-açık komşulukları: Y, $\{v\},\{v,y\}$ dır.

Y evrensel kümesindeki v noktasının h-komşulukları: Y, $\{v\},\{v,y\},\{v,z\}$ bulunur.

## 4.2 Bir Kümenin h-Lokal Fonksiyonu

### 4.2.1 Tanım

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve bir $D\subset Y$ verilsin. I idealine ve $\tau$ topolojisine bağlı olarak

$$D_h^*(I,\tau)=\{x\in Y : (D\cap U)\notin I, \text{ her } U\in hO(Y,x) \text{ için}\}$$

şeklinde tanımladığımız $D_h^*(I,\tau)$ kümesine D kümesinin h-lokal fonksiyonu denir ve $D_h^*(I,\tau)$ sembolü yerine kısaca $D_h^*$ gösterilebilir.

### 4.2.2 Örnek:

$Y=\{k,l,m\}$ evrensel kümesi ve $\tau=\{\emptyset,Y,\{k\},\{k,l\}\}$ topolojisi ile $(Y,\tau)$ topolojik uzayı verilsin. $I=\{\emptyset,\{m\}\}$ idealini ve $A=\{k,l\}$ alt kümesini göz önüne alalım. Buradan $\tau^h=\{\emptyset,Y,\{k\},\{k,l\},\{l\},\{l,m\}\}$ olarak bulunur ve $\tau^t=\{\emptyset,Y,\{l,m\},\{m\}\}$ dır. 4.2.1 Tanım gereği $A^*{}_h=\{k,l,m\}=Y$ olur.

### 4.2.3 Tanım

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve bir $D\subset Y$ alınsın. I idealine ve $\tau$ topolojisine bağlı olarak

$$D^{*s}{}_h(I,\tau)=\{x\in Y : (D\cap U)\notin I, \text{ her } U\in S_hO(Y,x) \text{ için}\}$$

şeklinde tanımladığımız $D^{*s}{}_h\,(I,\tau)$ kümesine D kümesinin semi h-lokal fonksiyonu denir ve D kümesinin semi h-lokal fonksiyonu $D^{*s}{}_h\,(I,\tau)$ sembolü yerine kısaca $D^{*s}{}_h$ gösterilebilir.

## 4.3 h-Lokal Fonksiyonla İlgili Bazı Teoremler

### 4.3.1 Teorem

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayında $D,E\subset Y$ alt kümeleri alınsın.

1. $D \subset E \Rightarrow D_h^* \subset E_h^*$

2. $(D \cup E)_h^* = D_h^* \cup E_h^*$

3. $(D \cap E)_h^* \subset D_h^* \cap E_h^*$

4. $(D_h^*)_h^* \subset D_h^*$

5. $D_h^* = Clh(D_h^*) \subset Clh(D)$ ve $D_h^*$ h-kapalıdır.

**İspat:**

1) Varsayalım ki $x \notin E_h^*$ olsun. Buradan, en az bir tane $U \in hO(Y,x)$ vardır öyleki $(U \cap E) \in I$ elde edilir. $D \subset E$ bilgisinden, $(U \cap D) \in I$ elde edilir. Bu nedenle $x \notin D_h^*$ bulunur. Böylece $D_h^* \subset E_h^*$ sonucuna varılır.

2) 4.2.1 Tanım gereği;
$D_h^*(S,\tau) = \{y \in Y : (D \cap H) \notin S$, her $H \in hO(Y,y)$ için$\}$
$E_h^*(S,\tau) = \{y \in Y : (E \cap H) \notin S$, her $H \in hO(Y,y)$ için$\}$
olup birleşim operatörü kullanılarak,
$(D \cup E)_h^*(S,\tau) = \{y \in Y : (D \cap H) \notin S$ veya $(E \cap H) \notin S$, her $H \in hO(Y,y)$ için$\}$
$= \{y \in Y : (D \cap H) \cup (E \cap H) \notin S$, her $H \in hO(Y,y)$ için$\}$
$= D_h^* \cup E_h^*$ elde edilir.

3) $(D \cap E) \subset D$ olduğundan, 1) gereği $(D \cap E)_h^* \subset D_h^*$ bulunur. Ayrıca $(D \cap E) \subset E$ olduğundan $(D \cap E)_h^* \subset E_h^*$ sonucuna varırız. Kesişim işlemi uygulanırsa, $(D \cap E)_h^* \subset D_h^* \cap E_h^*$ dır.

### 4.3.2 Örnek

$Y=\{k,m,p,s\}$ ve $\tau=\{\varnothing,Y,\{k\},\{k,m\},\{k,m,s\}\}$ ile $(Y,\tau)$ topolojik uzayı verilsin. $I=\{\varnothing,\{s\}\}$ ideali göz önüne alındığında 2.5.4 Tanım gereği h-açık kümelerin ailesi $\tau^h=\{\varnothing,Y,\{k\},\{m\},\{k,m\},\{m,s\},\{m,p,s\},\{k,m,s\}\}$ bulunur. $D=\{k,m\} \subset Y$ ve $E=\{p\} \subset Y$ alt kümeleri için 4.2.1 Tanım dan;

$(D\cap E)=\varnothing$ ve $(D\cap E)_h^* = \varnothing_h^*=\varnothing$ dır.

$D_h^* =\{k,m,p\}$ ve $E_h^* =\{p\}$ olduğundan $D_h^* \cap E_h^* =\{p\}$ bulunur. Sonuç olarak

$(D\cap E)_h^*=\varnothing \subset D_h^* \cap E_h^*=\{p\}$ elde edilir.

4) $(D_h^*)_h^*=\{x\in Y : (D_h^*\cap U)\notin I$, her $U\in hO(Y,x)$ için$\}$

$(D_h^*)_h^*=\{x\in Y : D_h^* \notin I$ ve $U\notin I$, her $U\in hO(Y,x)$ için

$$(D_h^*)_h^*= \begin{cases} \nearrow \subseteq\{x\in Y : U\notin I, \text{ her } U\in hO(Y,x) \text{ için}\} \\ \searrow \subseteq\{x\in Y : D_h^*\notin I, \text{ her } U\in hO(Y,x) \text{ için}\} \end{cases}$$

$\subseteq\{x\in Y : (D\cap U)\notin I$, her $U\in hO(Y,x)$ için$\}= D_h^*$

$\Rightarrow(D_h^*)_h^*\subset D_h^*$ dır.

**4.3.3 Örnek**

$Y=\{k,m,p,s\}$ ve $\tau=\{\varnothing,Y,\{k\},\{k,m\},\{k,m,s\}\}$ topolojisi ile $(Y,\tau)$ topolojik uzayı verilsin. $I=\{\varnothing,\{k\}\}$ ideali göz önüne alındığında 2.5.4 Tanım gereği h-açık kümelerin ailesi $\tau^h=\{\varnothing,Y,\{k\},\{m\},\{k,m\},\{m,s\},\{m,p,s\},\{k,m,s\}\}$ bulunur. $A=\{k,m\}\subset Y$ olarak seçildiğinde; 4.2.1 Tanımdan, $A_h^* =Y$ evrensel kümesi olarak hesaplanır. Buradan $(A_h^*)_h^* =\{m,p,s\}$ ve böylece $(A_h^*)_h^*\subset A_h^*$ elde edilir. Fakat örneğimizden de görüldüğü üzere $A_h^*\not\subset (A_h^*)_h^*$ olmadığı aşikardır.

5) 2.5.5 Tanım gereği $D_h^*\subset Clh(D_h^*)$ olur. Bir $x \in Clh(D_h^*)$ noktasını alalım. Buradan, her $U\in hO(Y,x)$ için $(D_h^*\cap U)\neq\varnothing$ bulunur. $y\in(D_h^*\cap U)$ alalım. Böylece her $U\in hO(Y,x)$ için $y\in D_h^*$ ve $y\in U$ elde edilir. $(D\cap U)\notin I$ ve buradan $x\in D_h^*$ dır.
Yani $Clh(D_h^*) \subset D_h^*$ olduğundan $Clh(D_h^*) =D_h^*$ elde edilir ki $D_h^*$ h-kapalı olduğu aşikardır. Varsayalımki $x\notin Clh(D)$ olsun. Buradan, $U\cap D=\varnothing\in I$ olduğundan $x\notin D_h^*$ sonucuna varılır. Böylece $D_h^* \subset Clh(D)$ elde edilir.

### 4.3.4 Uyarı

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve $D\subset Y$ alt kümesi verilsin.

1) $I=\{\varnothing\}$ olduğu zaman, $D_h^*=Clh(D)$ dır.

2) Eğer $D\in I$ ise $D_h^*=\varnothing$ ve $\{\varnothing\}_h^*=\varnothing$ olur.

3) $D\subset D_h^*$ veya $D_h^*\subset D$ olması gerekmez.

4) Eğer $SO(Y)=hO(Y)$ ise $D_h^*(I,hO(Y))=D_h^{*s}(I,\tau)$ bulunur.

5) Eğer $hO(Y)=\tau(Y)$ ise $D_h^*(I,hO(Y))=D^*(I,\tau)$ olur.

### 4.3.5 Örnek

$(Y,\tau)$ topolojik uzayında $Y=\{k,m,p,s\}$ evrensel kümesi olmak üzere $\tau=\{\varnothing,Y,\{k\},\{k,m,s\}\}$ topolojisi ve $I=\{\varnothing,\{p\},\{k,p\}\}$ alınsın. Ayrıca 2.5.4 Tanımdan,
$\tau^h=\{\varnothing,Y,\{k\},\{m,s\},\{m,p,s\},\{k,m,s\}\}$ elde ederiz.
$A=\{k,m\}$ ve $B=\{k,p\}$ iken 4.2.1 Tanım gereği $A_h^*=Y$ , $B_h^*=\varnothing$ sonucuna varılır.

### 4.3.6 Lemma

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzay olsun. Buradan aşağıdaki özellikler geçerlidir;

1) $RO(Y)\subset\tau\subset hO(Y)=\tau^h\subset S_hO(Y)$,
2) $D^{*s}{}_h\subset D_h^*\subset D^*$.

**İspat:**

1) Her regüler açık küme açık kümedir ve her açık küme h-açık küme olduğundan kolaylıkla görülür.

2) $x \in D^{*s}{}_h$ noktasını alalım. Buradan 4.2.3 Tanım gereği her $U \in S_hO(Y)$ için $(D \cap U) \notin I$ olur. Buradan her $U \in hO(Y)$ kümesi için $(D \cap U) \notin I$ elde edilir. Öyle ise $x \in D_h^*$, $D^{*s}{}_h \subset D_h^*$ dır. $x \in D_h^*$ noktası alındığında her U h-açık kümesi için $(D \cap U) \notin I$ bulunur. Her açık küme h-açık küme olduğundan her U açık kümesi için $(D \cap U) \notin I$ olur (2.2.1 Tanım). Bu yüzden $x \in D^*$ sonucuna varırız. Böylece $D_h^* \subset D^*$ dır.

## 4.4 $Cl^*_h$ İşlemi

### 4.4.1 Tanım

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayındaki $D \subset Y$ alt kümesi göz önüne alınsın. Buradan $Cl^*_h(D)$, $Cl^*_h(D) = D \cup D_h^*$ olarak tanımlanır.

### 4.4.2 Teorem

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzay olsun. Rastgele $D, E \subset Y$ alt kümeleri için,

1) $D \subset Cl^*_h(D)$ bulunur.

2) $Cl^*_h(\varnothing) = \varnothing$ ve $Cl^*_h(Y) = Y$ olur.

3) Eğer $D \subset E$ ise $Cl^*_h(D) \subset Cl^*_h(E)$ dır.

4) $Cl^*_h(D) \cup Cl^*_h(E) = Cl^*_h(D \cup E)$ elde edilir.

5) $(Cl^*_h(D))_h^* \subset Cl^*_h(D) = Cl^*_h(Cl^*_h(D))$ dır.

**İspat:**

1) 4.4.1 Tanım dan $Cl^*_h(D) = D \cup D_h^*$ olduğu için ispat görülür.

2) $Cl^*_h(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\}_h^* = \varnothing$ ve $Cl^*_h(Y) = Y \cup Y_h^* = Y$ elde edilir.

3) $D\subset E$ olsun. Her $D\subset Y$ alt kümesi için $Cl^*_h = D\cup D_h^*$ ve her $E\subset Y$ alt kümesi için $Cl^*_h(E)=E\cup E_h^*$ olup 4.3.1. Teoremden $D\subset E$ iken $D_h^*\subset E_h^*$ bulunur. Bu yüzden $Cl^*_h(D) = D\cup D_h^* \subset Cl^*_h(E) = E\cup E_h^*$ elde edilir.

4) 4.4.1 Tanım gereği $Cl^*_h(D\cup E) = (D\cup E) \cup (D\cup E)_h^* = (D\cup E) \cup D_h^*\cup E_h^* = (D\cup D_h^*)\cup(E\cup E_h^*) = Cl^*_h(D)\cup Cl^*_h(E)$ bulunur.

5) 4.3.1 Teoremden $(Cl^*_h(D))^*_h=(D\cup D^*_h)^*_h=D^*_h\cup(D^*_h)^*_h=D^*_h\subset Cl^*_h(D)$ elde edilir. Böylece $Cl^*_h(Cl^*_h(D))=Cl^*_h(D)\cup(Cl^*_h(D))^*_h=Cl^*_h(D)$.

### 4.4.3 Örnek

4.3.5. Örneğindeki B kümesini göz önüne alalım. $B_h^*=\emptyset$ bulunmuştu buradan,
$(Cl^*_h(B))_h^*=((B\cup B_h^*))_h^*=\emptyset$ ve $Cl^*_h(B)=B$ bulunur.
Ayrıca $Cl^*_h(Cl^*_h(B)) = Cl^*_h(B) = B$ olduğundan $(Cl^*_h(B))_h^*\subset Cl^*_h(B) = Cl^*_h(Cl^*_h(B))$ dır.

### 4.4.4 Teorem

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayındaki $D, E\subset Y$ alt kümeleri alınsın. h-lokal fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) Y evrensel kümesi üzerinde bir diğer $J\supset I$ ideali için, $D_h^*(J) \subset D_h^*(I)$ dır.

2) $D_h^* - E_h^* = (D-E)_h^* - E_h^* \subset (D-E)_h^*$ olur.

3) $U\in\tau^h$ iken $U\cap D_h^* = U\cap (U\cap D)_h^* \subset (U\cap D)_h^*$ bulunur.

4) $U\in I$ iken $(D-U)_h^* \subset D_h^* = (D\cup U)_h^*$ elde edilir.

**İspat:**

1) $x\in D_h^*(J)$ elemanını alalım. Buradan 4.2.1. Tanımdan her $hO(Y)$ için $U\cap D\notin J$ bulunur. Öyle ise $U\cap D\notin I$ olduğundan $x\in D_h^*(I)$ olur. Böylece $D_h^*(J) \subset D_h^*(I)$ elde edilir.

2) $D-E\subset D$ olduğundan, 4.3.1. Teorem gereği $(D-E)_h^*\subset(D)_h^*$ olur ve
$(D-E)_h^* - E_h^*\subset(D)_h^* - E_h^*$ bulunur. Diğer taraftan $D\subset(D-E)\cup E$ olduğundan, 4.3.1. Teoremden $D_h^*\subset(D-E)_h^* \cup E_h^*$ dır. Böylece $D_h^*- E_h^*\subset((D-E)_h^* \cup E_h^*)- E_h^*$ elde edilir. Bu nedenle $D_h^*- E_h^*\subset(D-E)_h^*-(D_h^*\cup E_h^*)$ olur ve bu yüzden
$D_h^*-E_h^*\subset(D-E)_h^*-E_h^*$ dır.

3) $U\in hO(Y)$ ve $x\in U\cap D_h^*$ alalım. Buradan $x\in U$ ve $x\in D_h^*$ olur. Her $V\in hO(Y)$ için $U\cap V\in hO(Y)$ olur. Böylece $V\cap(U\cap D) = (U\cap V)\cap D\notin I$ olduğundan $x\in(U\cap D)_h^*$ bulunur. Buradan $U\cap D_h^*\subset(U\cap D)_h^*$ ve $D\cap U\subset D$ olup, $U\cap D_h^*\subset U\cap (U\cap D)_h^*$ dır. 4.3.1. Teorem gereği $(D\cap U)_h^*\subset D_h^*$ ve $U\cap (D\cap U)_h^*\subset (U\cap D)_h^*$ sonucuna ulaşılır.

4) 4.3.1 Teoremden ve 4.3.4. Uyarı gereği $(U\cup D)_h^*=U_h^* \cup D_h^*= \emptyset\cup D_h^*= D_h^*$olur,
$D-U\subset D$ olduğundan, $(D-U)_h^*\subset D_h^*$ elde edilir.

**4.4.5 Teorem**

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzay, Y kümesi üzerindeki idealler $I_1$ ve $I_2$ olmak üzere $D\subset Y$ alt kümesi verilsin. Aşağıdakiler geçerlidir:

1) $I_1 \subset I_2$ iken, $D_h^*(I_2) \subset D_h^*(I_1)$

2) $D_h^*(I_1\cap I_2) = D_h^*(I_1)\cup D_h^*(I_2)$

**İspat:**

1) $x\in D_h^*(I_2)$ noktasını alalım. 4.2.1 Tanımdan her $U\in hO(Y,x)$ için $U\cap D\notin I_2$ dir. $I_1 \subset I_2$ olduğundan $U\cap D\notin I_1$ olur ve böylece $x\in D_h^*(I_1)$ bulunur.

2) $(I_1\cap I_2) \subset I_1$ ve $(I_1\cap I_2) \subset I_2$ olduğundan 4.4.4 Teorem 1) gereği $D_h^* (I_1) \subset D_h^* (I_1\cap I_2)$ ve $D_h^* (I_2)\subset D_h^* (I_1\cap I_2)$ bulunur. Birleşim işleminden $D_h^* (I_1) \cup D_h^* (I_2)\subset D_h^* (I_1\cap I_2)$.

$x \in D_h^* (I_1 \cap I_2)$ noktasını alalım. Buradan her $U \in hO(Y)$ için, $U \cap D \notin (I_1 \cap I_2)$ vardır. Yani $U \cap D \notin (I_1)$ veya $U \cap D \notin (I_2)$ olmalıdır. Böylece $x \in D_h^* (I_1)$ veya $x \in D_h^* (I_2)$ olur. Bu ise $D_h^* (I_1 \cap I_2) \subset D_h^* (I_1) \cup D_h^* (I_2)$ olması anlamına gelir. Sonuç olarak $D_h^*(I_1 \cap I_2) = D_h^*(I_1) \cup D_h^*(I_2)$

olarak yazılır.

**4.4.6 Teorem**

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzay olmak üzere

$\tau^*_h = \{U \subset Y \ni Cl^*_h(Y-U) = (Y-U)\}$

olarak sunulan $\tau^*_h$ ailesi, Y için topolojidir hatta $\tau^* \subset \tau^*_h$ ve $hO(Y) \subset \tau^*_h$ dır.

**İspat:**

4.4.1. Tanımdan $Cl^*_h (D) = D \cup D_h^*$, $\tau^*_h$ ailesi Y kümesi için $Cl^*_h (D)$ tarafından üretilmiş bir topolojidir.

$\tau^* \subset \tau^*_h$ olduğunu gösterelim. 4.3.6 Lemma gereği;

$Cl^*_h = D \cup D_h^* \subset D \cup D^* = Cl^*(D)$ dır. A kümesi $\tau^*$ kapalı küme olsun. Buradan $Cl^*(D) = D$ ve $Cl^*_h \subset D$ olur. Buyüzden $Cl^*_h = D$ ve D kümesi $\tau^*_h$ -kapalıdır.

Şimdi $hO(Y) \subset \tau^*_h$ olduğunu gösterelim. Varsayalımki D kümesi h-kapalı bir küme olsun. Eğer $x \notin D$ ise 4.2.1 Tanım gereği her $x \in G \in \tau^h$ olacak şekilde $D \cap G = \varnothing \in I$ vardır. Böylece $x \notin D_h^*$ ve $D_h^* \subset D$ olur. $Cl^*_h(D) = D \cup D_h^* = D$ ve $Cl^*(D) = D$ olması sebebiyle D kümesi $\tau^*_h$-kapalı kümedir. Bunedenle $hO(Y) \subset \tau^*_h$ bulunur.

**4.4.7 Teorem:**

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve

$\beta^*(\tau^h, \mathcal{I}) = \{U-J \ni U \in \tau^h, J \in \mathcal{I}\}$

tabanı verilsin. Buradan $\beta^*(\tau^h, \mathcal{I})$ ailesi, $\tau^*_h$ topolojisi için bir bazdır.

**İspat:** $\varnothing \in I$ olduğundan, U-$\varnothing$=U$\in\tau^h$ ve $\tau^h \subset \beta^*$ olduğundan Y=$\cup\beta^*$ olur. Ayrıca $\beta^*_1$, $\beta^*_2 \in \beta^*$ ve $J_1, J_2 \in I$ aldığımızda $U_1$, $U_2 \in \tau^h$ için $\beta^*_1 = U_1 - J_1$ ve $\beta^*_2 = U_2 - J_2$ yazabiliriz. Kesişim işleminden $(U_1 \cap U_2) \in \tau^h$ iken $\beta^*_1 \cap \beta^*_2 = (U_1 - J_1) \cap (U_2 - J_2) = (U_1 \cap (Y - J_1)) \cap (U_2 \cap (Y - J_2)) = (U_1 \cap U_2) - (J_1 \cup J_2) \in \beta^*$ olur ve buradan $(J_1 \cup J_2) \in I$ dır.

# 5. $I_{s^*g}$ h-KAPALI KÜMELER ve BAZI ÖZELLİKLERİ

## 5.1 $I_g$-h-Kapalı Kümeler

### 5.1.1 Tanım

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayındaki $D \subset Y$ alt kümesini göz önüne alalım.
$U \in hO(Y)$ olmak üzere, $D \subset U$ iken $D_h^* \subset U$
oluyor ise D kümesine $I_g$-h kapalı küme denir.

### 5.1.2 Teorem

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve $D \subset Y$ alt kümesini alalım. Alttaki nitelikler eşdeğerdir:

1) D kümesi $I_g$-h kapalı kümedir.

2) $D \subset U$ ve $U \in hO(Y)$ iken $Cl^*_h(D) \subset U$ olur.

3) Her $x \in Cl^*_h(D)$ için $Clh(\{x\}) \cap D \neq \varnothing$ dır.

4) $Cl^*_h(D)$-D kümesi boş olmayan h-kapalı küme içermez.

5) $D_h^*$-D kümesi boş olmayan h-kapalı küme içermez.

**İspat:**

1)$\Rightarrow$2) Hipotezden, D kümesi $I_g$-h kapalı kümedir. 5.1.1 Tanımdan $U\in hO(Y)$ olmak üzere, $D\subset U$ iken $D_h^*\subset U$ olur. Buradan $D_h^*\cup D\subset U$ bulunur dolayısı ile $D\subset U$ ve $U\in hO(Y)$ iken $Cl^*_h(D)\subset U$ dır.

2) $\Rightarrow$3) $x\in Cl^*_h$ noktasını alalım. Eğer $Clh(\{x\})\cap D=\emptyset$ ise $D\subset (Y-Clh(\{x\}))$ olur ve $D\subset (Y-Clh(\{x\}))$ kümesi h-açıktır. Hipotezden $Cl^*_h(D)\subset (Y-Clh(\{x\}))$ elde edilir. Bu sebeple $Cl^*_h(D)\cap Clh(\{x\})=\emptyset$ olur ki $x\in Cl^*_h(D)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Her $x\in Cl^*_h(D)$ için $Clh(\{x\})\cap D\neq\emptyset$ bulunur.

3) $\Rightarrow$ 4) K boş olmayan h-kapalı bir küme ve $x\in K$ iken $K\subset Cl^*_h(D)-D$ olsun. Buradan $K\subset Y-D$ ve $K\cap D=\emptyset$ dır. Bu yüzden $Clh(\{x\})\cap D=\emptyset$ olur. Bu ise $Clh(\{x\})\cap D\neq\emptyset$ hipoteze aykırıdır. $Cl^*_h(D)-D$ kümesi boş olmayan h-kapalı küme içermez.

4) $\Rightarrow$5) Bu kısım $D_h^*\subset Cl^*_h(D)$ ifadesinden açıktır.

5)$\Rightarrow$1) U kümesi, Y kümesinin herhangi bir h-açık kümesi olmak üzere $D\subset U$ alalım. 4.3.1 Teoremden $D_h^*\cap (Y-U)$ kümesi h-kapalı iken $D_h^*$ kümesi h-kapalıdır ve $D_h^*\cap (Y-U)\subset D_h^*-D$ olur. 5) gereği $D_h^*\cap (Y-U)=\emptyset$ dır. Bu yüzden $D_h^*\subset U$ ve böylece D kümesi $I_g$-h kapalı kümedir.

## 5.2 $I_{s*g}$ h-kapalı kümeler

### 5.2.1 Tanım

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayı ve $D\subset Y$ alt kümesi göz önüne alınsın..

$U\in SO(Y)$ ve $D\subset U$ iken $D_h^*\subset U$

oluyor ise, D kümesine $I_{s*g}$ h-kapalı küme **(**sırasıyla $I_{s*g}$ kapalı küme, $U\in SO(Y)$ ve $D\subset U$ iken $D^*\subset U$ [6]) denir. $I_{s*g}$ h-kapalı kümenin tümleyenine $I_{s*g}$ h-açık küme denir. $I_{s*g}$ h-kapalı kümelerin ailesi (sırasıyla $I_{s*g}$ kapalı kümeler) $I_{s*g}$ $hC(Y)$ ($I_{s*g}$ $C(Y)$) ile gösterilir.

**5.2.2 Teorem**

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayındaki $D \subset Y$ alt kümesi alınsın. D kümesi $I_{s^*g}$ kapalı bir küme ise D kümesi $I_{s^*g}$ h-kapalı bir kümedir.

**İspat:**

D kümesi $I_{s^*g}$ kapalı bir küme olsun. D kümesini içeren her $U \in SO(Y)$ için $D^* \subset U$ olur ve 4.3.6 Lemma 2) gereği $D_h^* \subset D^* \subset U$ olmalıdır. Böylece D kümesi $I_{s^*g}$ h-kapalı bir kümedir.

**5.2.3 Uyarı**

5.2.2. Teoremin tersi her zaman doğru olmayabilir.

**5.2.4 Örnek**

$Y=\{k,m,p,s\}$ evrensel kümesi ve $\tau=\{\emptyset,Y,\{p\},\{k,m,p\}\}$ topolojisi verilsin. Buradan $\tau_F=\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,m,s\}\}$ ve 2.5.4 Tanım gereği $\tau^h=\{\emptyset,Y,\{p\},\{k,m\},\{k,m,s\},\{k,m,p\}\}$ olur. $I=\{\emptyset,\{s\}\}$ idealini göz öününe aldığımızda; 5.2.1. Tanım gereği,

$I_{s^*g}\, hC(Y)=\{\emptyset,Y,\{p\},\{s\},\{p,s\},\{k,m,s\}\}$ ve

$I_{s^*g}\, C(Y)=\{\emptyset,Y,\{s\},\{k,m,s\}\}$ bulunur. Buradan dikkat edilirse $\{p\},\{p,s\}$ kümeleri X evrensel kümesi üzerinde $I_{s^*g}hC(Y)$ kümelerdir fakat $I_{s^*g}\, C(Y)$ ailesine ait küme değillerdir.

**5.2.5 Örnek**

5.2.4 Örnekte verilen $\emptyset,Y,\{s\},\{k,m,s\}$ kümeleri kapalı kümelerdir ve $I_{s^*g}$ h-kapalı küme olurlar. Ancak $\{p\},\{p,s\}$ kümeleri $I_{s^*g}$ h-kapalı küme iken kapalı küme değillerdir.

**5.2.6 Teorem**

$(Y,\tau,I)$ ideal topolojik uzayında $D, E \subset Y$ alt kümeleri alınsın.

1) Dve E kümeleri $I_{s^*g}$ h- kapalı kümeler ise $(D \cup E)$ $I_{s^*g}$ h-kapalı kümedir.

2) $D \subset Y$ alt kümesi kapalı bir küme ise, D kümesi $I_{s^*g}$ h-kapalı bir kümedir.

3) $U \subset Y$ alt kümesi açık küme ve D kümesi $I_{s^*g}$ h-açık bir küme ise $(U \cap D)$ $I_{s^*g}$ h-açık bir kümedir.

**İspat:**

1) $U \in SO(Y)$ ve $(D \cup E) \subset U$ olsun. Varsayımımızdan $D \subset U$ ve $E \subset U$ olur. D ve E kümeleri $I_{s^*g}$ h-kapalı kümeler olduğundan $D_h^* \subset U$ ve $E_h^* \subset U$ bulunur. Yani
$D_h^* \cup E_h^* \subset U$ elde edilir. Böylelikle $(D \cup E)$ $I_{s^*g}$ h-kapalı kümedir.

2) $U \in SO(Y)$ ve $D \subset U$ olsun. 4.3.6 Lemma gereği, $D_h^* \subset D^* \subset Cl(D) = D \subset U$ olur. Böylece D $I_{s^*g}$ h-kapalı kümedir.

3) 1) ve 2) ifadelerinin tümleyeninden kolaylıkla bulunur.

# 6. KAYNAKLAR


[1] F. Abbas, “On H-open sets and H-continuous functions”, J. Appl. Comput. Math., Vol. 9, pp. 1-5, 2020.

[2] J. Dontchev, M. Ganster and T. Noiri, “Unified operation approach of generalized closed sets via topological ideals”, Math. Japon., Vol. 49(3), pp. 395-401, 1999.

[3] M. E. Abd El-Monsef, E. F. Lashien and A. A. Nasef, “Some topological operators via ideals”, Kyungpook J. Math., Vol. 32(2), pp. 273 – 284, 1992.

[4] D. Jankovic and T.R. Hamlett, “New topologies from old via ideals”, Amer. Math. Monthly, Vol. 97, pp. 295-310, 1990.

[5] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I. New York, Academic Press, 1966.

[6] M. Khan and M. Hamza, “$I_{s^*g}$-closed sets in ideal topological spaces, Glob. J. PureAppli. Math. ”, Vol. 7(1), pp. 89 – 99, 2011.

[7] M. Khan and T. Noiri, “Semi-local functions in ideal topological spaces, J. Adv. Res. Pure Math. ”, Vol. 2(1), pp. 36 – 42, 2010.

[8] N. Levine, “Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces”, Amer. Math. Monthly, Vol. 70, pp. 36 – 41, 1963.

[9] P. L. Powar and K. Rajak, “Some new concepts of continuity in generalized topological space”, Int. J. Com. Appl., Vol. 38(5), pp. 12 – 17, 2012.

[10] R.Vaidyanathaswamy, “The localization theory in set-topology”, Proc. Indian Acad. Sci., Vol. 20, pp. 51-61, 1945.

[11] R. Vaidyanathaswamy, *Set topology*, Chelsea Publishing Company, 1960.

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Büşra Gölpınar

Doğum tarihi ve yeri : **29/08/1994 - İzmir/Konak**

e-posta : bsraglpnr35@gmail.com

## Öğrenim Bilgileri

| **Derece** | **Okul/Program** | **Yıl** |
|---|---|---|
| Y. Lisans | Balıkesir Üniversitesi/ Topoloji Anabilim Dalı | 2020-2022 |
| Lisans | Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü | 2012-2016 |
| Lise | İTO Vakfı Süleyman Taştekin Anadolu Teknik Lisesi/ Yazılım | 2008-2012 |