

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**MONOİDLERİN PEİFFER ÇARPIMININ GEOMETRİK YÖNDEN
İNCELENMESİ**

DUYGU ASLIHAN İLGÖR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Fırat ATEŞ** **(Tez Danışmanı)**
 Prof. Dr. Recep ŞAHİN
 Prof Dr. Tahsin ÖNER

BALIKESİR, HAZİRAN - 2022

KABUL VE ONAY SAYFASI

Duygu Aslıhan İLGÖR tarafından hazırlanan “**MONOİDLERİN PEİFFER ÇARPIMININ GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23 Haziran 2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Prof. Dr. Fırat ATEŞ
Balıkesir Üniversitesi

Üye

Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Balıkesir Üniversitesi

Üye

Prof. Dr. Tahsin ÖNER
Ege Üniversitesi

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Dilek TÜRKER

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Monoidlerin Peiffer Çarpımının Geometrik Yönden İncelenmesi**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Duygu Aşlıhan İLGÖR

ÖZET

**MONOİDLERİN PEİFFER ÇARPIMININ GEOMETRİK YÖNDEN
İNCELENMESİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
DUYGU ASLIHAN İLGÖR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, HAZİRAN-2022

Bir monoid genişlemesinin bağıntılarını tanımlamak ve sunuşunu belirlemek için bir takım metodlar ortaya koymak gereklidir. Bu kapsamda, bu belirsizliği ortadan kaldırmak için Prof. Dr. Stephen J. Pride, küresel monoid resimlerini ortaya koymuştur. Bu tez çalışmasında amacımız bu metodu kullanarak önemli bir monoid genişlemesi olan Peiffer çarpımının (devirli monoid, direct çarpım monoidi üzerinde) sunuşunda yer alan bağıntıların sağlanması gereken özellikleri belirlemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde dikdörtgensel bant (rectangular band) ve bi-devirli (bicyclic) monoid yapılarının oluşumu üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde, monoid sunuşları üzerinde durulmuş ve bazı önemli monoid genişlemelerinin sunuşları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, monoid resimleri tanıtılmış olup çeşitli teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, matrisler ve küresel resimler kullanılarak rankı iki olan serbest abelyan monoidlerin yarı direkt çarpımı belirlenmiştir.

Son bölümde, ilk önce A iki sonlu devirli monoidin direkt çarpım monoidi ve B de verilen bir sonlu devirli monoid olmak üzere A ile B nin Peiffer çarpımını oluşturma koşulları verilmiştir. Daha sonra ise hem küresel monoid resimleri hem de matrisler yardımıyla rankı iki olan serbest abelyan monoidlerin oluşturduğu Peiffer çarpımı ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar yeni olup tarafımızdan ortaya konmuştur.

ANAHTAR KELİMELEER: Monoid sunuşu, Monoid resmi, Peiffer çarpımı.

Bilim Kodu: 20401

Sayfa Sayısı: 50

ABSTRACT

GEOMETRIC INVESTIGATION OF THE PEIFFER PRODUCT OF MONOIDS

MSC THESIS

DUYGU ASLIHAN İLGÖR

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, JUNE - 2022

It is necessary to introduce a number of methods to define the relations of a monoid extension and to determine its presentation. In this context, in order to eliminate this uncertainty, Prof. Dr. Stephen J. Pride reveals spherical monoid pictures. In this thesis, by using this method, our aim is to determine the properties that the relations in the presentation of the Peiffer product (cyclic monoid, on the direct product of monoids), which is an important monoid extension.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, we studies on the formation of rectangular band and bicyclic monoid structures.

In the second chapter, the presentations of monoids are emphasized and some important presentations of monoid extensions are given.

In the third chapter, monoid pictures are introduced and some theorems and examples are given.

In the fourth chapter, using matrices and spherical pictures. The semi-direct product of abelian monoids with rank two was determined.

In the last chapter, firstly, the conditions for forming the Peiffer product of A and B are given, with A being a direct product monoid of two finite-cycle monoids and finite-cycle monoid B . Then, with the help of both spherical monoid pictures and matrices, studies on Peiffer product formed by free abelian monoids of rank 2 were carried out. The results in this section are new and presented by us.

KEYWORDS: Monoid presentation, Monoid picture, Peiffer product.

Science Code : 20401

Page Number : 50

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Bazı Monoid Yapıları	2
2. MONOİD SUNUŞLARI	5
2.1 Bazı Önemli Monoid Genişlemelerinin Sunuşları.....	7
3. MONOİD SUNUŞLARINA GEOMETRİK BİR BAKIŞ	11
3.1 Atomik Monoid Resimler	11
3.2 Squier Graflar	12
4. MATRİSLER VE KÜRESEL RESİMLER YARDIMIYLA İKİ RANKLI ABELYAN MONOİDLERİN YARI DİREKT ÇARPIMININ BELİRLENMESİ	18
5. MONOİDLERİN PEIFFER ÇARPIMININ GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ	25
5.1 Peiffer Çarpım	25
5.2 Sonlu Devirli Monoidlerin Direkt Çarpım Monoidi ile Sonlu Devirli Monoidlerin Birlikte Oluşturduğu Peiffer Çarpım	26
5.1 Rankı İki Olan Serbest Abelyan Monoidlerin Oluşturduğu Peiffer Çarpım	39
6. KAYNAKLAR (APA)	47
ÖZGEÇMİŞ	50

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1	: Monoid Resmi	10
Şekil 3.2	: Pozitif Resim	11
Şekil 3.3	: Negatif Resim	11
Şekil 3.4	: Squier Graf	13
Şekil 3.5	: Yol Resmi	14
Şekil 3.6	: Küresel Olan Ve Küresel Olmayan Resim Örneği	15
Şekil 3.7	: Monoid Resimleri Üzerinde İşlemler	15
Şekil 4.1	: $y_1x_1x_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	20
Şekil 4.2	: $y_2x_1x_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	21
Şekil 4.3	: $y_1y_2x_1$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	22
Şekil 4.4	: $y_1y_2x_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	23
Şekil 5.1	: $x_1^{m_1}y$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	28
Şekil 5.2	: $x_2^{m_2}y$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	29
Şekil 5.3	: $yx_1^{m_1}$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	30
Şekil 5.4	: $yx_2^{m_2}$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	31
Şekil 5.5	: $y^n x_1$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	32
Şekil 5.6	: $y^n x_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	33
Şekil 5.7	: x_1y^n Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	34
Şekil 5.8	: x_2y^n Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	35
Şekil 5.9	: x_1x_2y Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	36
Şekil 5.10	: yx_1x_2 Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	37
Şekil 5.11	: $x_1y_1y_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	42
Şekil 5.12	: $x_2y_1y_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	43
Şekil 5.13	: $x_1x_2y_1$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	44
Şekil 5.14	: $x_1x_2y_2$ Çifti İle Belirlenen Üreteç Resmi	45

SEMBOL LİSTESİ

w	: Kelime
X^+	: Pozitif kelimeler kümesi
X^*	: $X^+ \cup \{1\}$
$\wp=[X, R]$: X tarafından üretilen ve R bağıntı kümelerinin oluşturduğu monoid sunuşu
$M(\wp)$: \wp sunuşu ile ilişkilendirilmiş monoid
$[w]$: w kelimesinin denklik sınıfı
(r_+, r_-)	: X kelimesi üzerinde birbirinden farklı pozitif semboller
$A \times B$: A ile B monoidinin direkt çarpımı
$A \rtimes_{\theta} B$: A ile B monoidinin yarı direkt çarpımı
$A \triangleright \triangleleft K$: A ile K monoidinin peiffer çarpımı
$A \diamond K$: A ile K monoidinin schützenberger çarpımı
$End(A)$: A monoidinin endomorfizmalarının kümesi
$\mathcal{D}(\wp)$: Squier kompleksi
$\Gamma(\wp)$: Squier graf

ÖNSÖZ

Tez yazım aşamamda çok değerli desteğinden dolayı danışman hocam Prof. Dr. Fırat Ateş'e, yaşamımda her zaman önemli bir yere sahip olan, beni cesaretlendiren ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım aileme, arkadaşlarıma, Anneme ve Babama

Sonsuz Teşekkürlerimi Sunuyorum.

Balıkesir, 2022

Duygu Aslıhan İLGÖR

1. GİRİŞ

Monoidler birim elemana sahip yarı grup olarak tanımlanır. Bu nedenle bir monoidin tersinir elemanlar içermeye zorunluluğu yoktur. Buda bizim karşımıza verilen bir monoide ait özelliklerin ortaya konmasında ve bu özelliklerin ispatlanmasında daha fazla güçlükler çıkarmaktadır.

M , A ve B monoidleri verilsin. Eğer bu monoidler arasında $M | A \cong B$ olacak şekilde bir izomorfizma varsa M monoidine A nın B monoidi ile olan genişlemesi denir. İlk paragrafta belirtildiği gibi monoid yapıları orjinal sonuçlara ulaşmada bir çok cebirsel yapılara göre daha zor konumdadır. Örneğin yukarıda tanımını verdiğimiz bir M monoid genişlemesini tanımlamak, bu genişlemelerin bağıntılarını belirlemek ve bu genişlemenin sunuşunu ortaya koymak bir takım zorlu aşamalar gerektirir. Bu aşamaları bir bir aşmak için bir takım metodlar ortaya çıkarmanız gerekir. Bu bağlamda Prof. Dr. Stephen J. Pride monoid (grup, yarı grup) genişlemelerinde elde edilen sunuştaki bağıntıları tanımlama belirsizliğini ortadan kaldırmanın bir metodu olarak monoid resimlerini kullanmıştır [1-3]. Bir çok yazarda Pride'ın bu çalışmalarını kullanarak monoid genişlemelerine dair son derece önemli sonuçlara ulaşmışlardır. Özellikle yarı direkt çarpım ile ilgili bu alanda bir çok önemli çalışma ortaya konmuştur. Örneğin, [4] de bazı sonlu monoidlerin yarı direkt çarpımının minimal ama etkisiz sunuşlarına dair literature önemli katkılar yapmışlardır. Ayrıca [5-7] de Çevik, monoid resimlerinde yer alan disk sayısına bağlı olarak bir çok önemli monoidin yarı direkt çarpımının p -Cockroft özelliğini araştırmıştır. Özellikle [7] de iki ranklı serbest abelyan gruplar üzerinde orijinal sonuçlar ortaya koymuştur. Benzer metodlar kullanarak [8] de n ranklı serbest abelyan gruplar ile sonsuz mertebeli devirli grupların yarı direkt çarpımının etkililiğine dair koşulları belirlemişlerdir.

Yarı direkt çarpımdan farklı olarak, [9] da önemli bir monoid genişlemesi olan graf çarpımın üreteç resimlerini belirlemişlerdir. [10] da ise yarı grup ve monoidlerin genel çarpımlarına dair yeni monoid genişlemeleri ortaya koymuş ve bu yeni monoidlerin bir takım cebirsel (regülerlik, invers olma vb. gibi) özelliklerine dair orijinal sonuçlar türetmişlerdir. Bu konularla ilgili daha detaylı bilgilere yukarıda verilen kaynaklara ek olarak da [11-14] deki kaynaklardan da ulaşılabilir.

Bu tez çalışmasında monoid resimleri yardımıyla önemli bir monoid genişlemesi olan Pieffer çarpımının (devirli monoid, direct çarpım monoidi üzerinde) sunuşunda yer alan bağıntıların sağlanması gereken özelliklere dair bir takım önemli sonuçlar verilecektir.

Şimdi tezin ileriki bölümlerinde kullanabilmek amacıyla [15-18] kaynaklarından ulaşılabilecek olan aşağıdaki bilgileri verelim.

1.1 Bazı Monoid Yapıları

Devirli monoidler, direkt çarpım ve yarı direkt çarpım monoidleri, monoidlerin schützenberger çarpımı, monoidlerin Bruck – Reilly genişlemesi, monoidlerin Peiffer çarpımı ve benzeri gibi monoidler üzerinde çokça çalışılan yapılar olup tezimizin ilerleyen bölümlerinde bu yapılara yer verilecektir. Tezimizin bu kısmında ise amacımız monoid yapılarının daha iyi anlaşılması açısından az bilinen ama önem derecesi yüksek olan dikdörtgensel bant (rectangular band) ve bi-devirli (bicyclic) monoid yapılarının oluşumuna dair çalışmalar yapmaktır.

Tanım: A, B kümeleri verilsin. $M = A \times B$ üzerinde, her $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M$ için,

$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ ikili işlemini tanımlayalım. Her $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in M$ için, M kümesi bu işleme göre,

$$((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1, b_2)(a_3, b_3) = (a_1, b_3)$$

$$(a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)) = (a_1, b_1)(a_2, b_3) = (a_1, b_3)$$

eşitliklerini sağladığından bir yarı grup oluşturur. Bu yarı grubu *dikdörtgensel bant* (rectangular band) adı verilir. Bu yarı grubun her $(a, b) \in M$ elemanı $(a, b)^2 = (a, b)(a, b) = (a, b)$ eşitliğini sağladığından idempotent elemandır. Ayrıca her $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M$ için $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ ve $(a_2, b_2)(a_1, b_1) = (a_2, b_1)$ den bu yarı grubun değişme özelliğine sahip olmadığı kolaylıkla görülür. Böylece bu yarı grubu diğer yarı gruplardan ayıran önemli bir durum ortaya çıkar. Bu da dikdörtgensel bantların her elemanının idempotent olmasına rağmen bu bantların değişme özelliğine sahip olmadığıdır.

Şimdi dikdörtgensel bant yardımıyla bir monoid örneği oluşturalım. M kümesi $\{a\} \times \{b, c\}$ kümesi üzerinde bir dikdörtgensel bant olsun. Yani $M = \{(a, b), (a, c)\}$ şeklindedir. Bu kümeden hareketle oluşturulan $M^1 = \{1, (a, b), (a, c)\}$ kümesini göz önünde bulunduralım. Bu kümenin aşağıda verilen tablodan hareketle bir monoid oluşturduğu kolaylıkla görülür

	1	(a, b)	(a, c)
1	1	(a, b)	(a, c)
(a, b)	(a, b)	(a, b)	(a, c)
(a, c)	(a, c)	(a, b)	(a, c)

Böylece her elemanı idempotent olan ama değişmeli olmayan bir monoid örneği ortaya çıkmış olur.

1.1.2 Tanım: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayılar kümesini düşünelim. Biliyoruz ki $a, b \in \mathbb{N}$ için

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & b \geq a \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımdan hareketle, $a, b, c \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \max\{a, \max\{b, c\}\} &= \max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}, \\ a + \max\{b, c\} &= \max\{a + b, a + c\}, \\ \max\{b, c\} &= a + \max\{b - a, c - a\} \end{aligned}$$

özelliklerinin sağlandığı kolaylıkla görülür. Şimdi $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi üzerinde, her $(a, b), (c, d) \in M$ için,

$$(a, b)(c, d) = (a - b + \max\{b, c\}, d - c + \max\{b, c\})$$

işlemleri tanımlansın.

Buna göre her $(a,b),(c,d),(e,f) \in M$ için,

$$\begin{aligned} ((a,b)(c,d))(e,f) &= (a-b+\max\{b,c\}, d-c+\max\{b,c\})(e,f) \\ &= (a-b-d+c+\max\{d-c+\max\{b,c\},e\}, f-e+\max\{d-c+\max\{b,c\},e\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a,b)((c,d)(e,f)) &= (a,b)(c-d+\max\{d,e\}, f-e+\max\{d,e\}) \\ &= (a-b+\max\{b,c-d+\max\{d,e\}\}, f-e-c+d+\max\{b,c-d+\max\{d,e\}\}) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca burada

$$\begin{aligned} -d+c+\max\{d-c+\max\{b,c\},e\} &= \max\{\max\{b,c\},e-d+c\} \\ &= \max\{b,c,e-d+c\} \\ &= \max\{b,\max\{c,e-d+c\}\} \\ &= \max\{b,\max\{c-d+d,e-d+c\}\} \\ &= \max\{b,c-d+\max\{d,e\}\} \end{aligned}$$

eşitlikleri kolaylıkla görülür. Bu da bizi $((a,b)(c,d))(e,f) = (a,b)((c,d)(e,f))$ sonucuna götürür. Yani M bir yarı gruptur. Bunlara ek olarak

$$\begin{aligned} (0,0)(a,b) &= (0-0+\max\{0,a\}, b-a+\max\{0,a\}) = (a,b) \\ (a,b)(0,0) &= (a-b+\max\{b,0\}, 0-0+\max\{b,0\}) = (a,b) \end{aligned}$$

Buda bize $(0,0) \in M$ elamanının M nin birim elamanı olduğunu söyler. Yani M bir monoidtir. Bu monoide *bi-devirli (bicyclic) monoid* adı verilir. Bi-devirli monoidler (yarı gruplar) özellikle birleşmeli cebir alanında uygulama örneği olması açısından çokça kullanılan bir yapıdır.

2. MONOİD SUNUŞLARI

X kümesi M monoidinin üreteç kümesi olmak üzere bu kümeden alınan elemanlarla elde edilen pozitif kelimelerin kümesi X^+ ile ifade edilsin. Ayrıca 1 elemanı M monoidinin birimi olmak üzere $X^* = X^+ \cup \{1\}$ için M ye ait bir w kelimesi X^* kümesinden seçilen elemanlar kullanılarak oluşturulur. Örneğin M nin üreteç kümesini $X = \{x, y\}$ (iki elemanlı) olarak alalım. Bu durumda $w_1, w_2 \in X^*$ kelimelerini $w_1 = x^2 y x y x^3 y^4$ ve $w_2 = y^5 x^2 y$ şeklinde alabiliriz. Daha temel bir örnek üzerinde duralım. Mesela M monoidini a elemanı ile üretilen ve mertebesi 5 olan devirli monoid olarak seçelim. Bu durumda M monoidinin elemanları $1, a, a^2, a^3$ ve a^4 şeklindedir. Dolayısıyla M ye ait bütün kelimeler $1, a, a^2, a^3, a^4$ elemanlarından oluşur. Eğer M monoidini a elemanı ile üretilen sonsuz mertbeli devirli monoid olarak seçersek M monoidinin elemanları $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$ şeklinde sonsuz tanedir. O halde M ye ait bütün kelimeler $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$ biçimindedir.

Bir M monoidinin üreteç elemanları arasında bağıntı olarak adlandırılan bazı özellikler olabilir. Örneğin üreteç kümesi $X = \{x, y\}$ olan bir M monoidinin üreteç elemanları arasında $xy = yx$ bağıntısının var olduğunu düşünelim. Bu bağıntı bize M monoidinin değişme özelliğine sahip olduğu sonucunu verir. Bu bağıntı sayesinde $X = \{x, y\}$ üreteç kümesinden elde edilen bir $w = x^2 y x y x^3 y^4$ kelimesini $w = x^6 y^6$ haline getirebiliriz. Bir diğer örnek olarak da üreteç kümesi $X = \{a\}$ olan bir M monoidinin $a^5 = a^2$ bağıntısına sahip olduğunu düşünelim. Böylece bu bağıntı sayesinde bu monoidin sonlu olduğunu görebiliriz. Çünkü $X = \{a\}$ üreteç kümesine sahip monoidin elemanlarını oluşturmak istediğimizde bu elemanların $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 = a^2, a^6 = a^3, a^7 = a^4, a^8 = a^5 = a^2, \dots$ şeklinde kendini tekrar ettiğini görürüz. Yani monoidimiz sadece $1, a, a^2, a^3$ ve a^4 elemanlarından oluşan bir monoidtir.

Genel anlamda bağıntılar $R \subseteq X^* \times X^*$ sembolü kullanılarak ifade edilir. Bu noktada belirtmek gerekir ki verilen bir monoidin üreteç elemanlarının belirlenmesi ve bu üreteç elemanları arasında ki bağıntıların ortaya konması zor bir süreçtir. Tezimizin ilk

paragrafında da belirtmiş olduğumuz gibi biz bu süreci önemli bir monoid genişlemesi olan Pieffer çarpım üzerinden inceleyeceğiz.

Şimdi monoid sunuşunu ifade edebiliriz. X üreteç kümesi ve R bağıntı kümesi olan bir M monoidinin sunuşu,

$$\wp = [X : R]$$

şeklinde gösterilir. Burada r_+ ve r_- ifadeleri birbirinden farklı pozitif kelimeler olmak üzere, X kümesinden elde edilen bir $r \in R$ bağıntısının gösterimi $r : r_+ = r_-$ şeklindedir.

$\wp = [X : R]$ sunuşu verilsin. Bu sunuşunda yer alan üreteç ve bağıntılar yardımıyla oluşturulan monoidi $M(\wp)$ ile gösterelim.

Şimdi monoid sunuşlarına ait bir takım örnekler verelim.

2.1.1 Örnek: $n > k$ olmak üzere $\wp = [x : x^n = x^k]$ sunuşu mertebesi n olan ve x ile üretilen devirli monoidin sunuşudur. Burada \wp sunuşu ile ilişkilendirilmiş olan monoid $M(\wp) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ şeklindedir.

2.1.2 Örnek: x ile üretilen sonsuz mertebeli bir monoidin sunuşu $\wp = [x :]$ şeklindedir. Burada \wp sunuşu ile ilişkilendirilmiş olan monoid $M(\wp) = \{1, x, x^2, \dots\}$ şeklindedir.

2.1.3 Örnek: $n > k$ ve $s > t$ olmak üzere $\wp = [x, y : x^n = x^k, y^s = x^t, xy = yx]$ mertebeleri n ve s olan ve sırasıyla x ve y ile üretilen iki monoidin direkt çarpımının monoidinin sunuşudur. Ayrıca \wp sunuşu ile ilişkilendirilmiş olan monoid $M(\wp) = \{1, x, x^2, \dots, x^n, y, y^2, \dots, y^s, xy, xy^2, \dots, x^{n-1}y^{s-1}\}$ biçimindedir.

2.1.4 Örnek: x ve y üreteç elemanlar olmak üzere rankı 2 olan serbest abelyan monoidinin sunuşu $\wp = [x, y : xy = yx]$ şeklindedir. Ayrıca \wp sunuşu ile ilişkilendirilmiş olan monoid $M(\wp) = \{1, x, x^2, \dots, y, y^2, \dots, xy, xy^2, \dots\}$ biçimindedir.

2.1.5 Örnek: x ve y üreteç elemanları olmak üzere derecesi iki olan plactic monoidinin sunuşu $\wp = [x, y : xyx = yxx, yyx = yxy]$ şeklindedir.

2.1.6 Örnek: x ve y üreteç elemanları olmak üzere one-relator (tek bağıntılı) monoid sunuşu örnekleri olarak $\wp_1 = [x, y : xy^2 = xyxy]$ ve $\wp_2 = [x, y : xyx = yx^k \ (k \in \mathbb{Z}^+)]$ verilebilir.

2.1 Bazı Önemli Monoid Genişlemelerinin Sunuşları

Birinci bölümde de belirtildiği gibi M , A ve B monoidleri için, bu monoidler arasında $M \mid A \cong B$ olacak şekilde bir izomorfizma varsa M monoidine A nın B ile olan genişlemesi denir. Bu bölümde monoid alanında üzerinde çok çalışılan monoid genişlemelerinden, yarı direkt çarpım, schützenberger çarpım ve benzeri monoidlerin sunuşlarına dair bilgilere yer verilecektir.

A ve B monoidleri verilsin. Her $a \in A$ ve $b, b_1, b_2 \in B$ için, $\theta : B \rightarrow \text{End}(A), b \mapsto \theta_b$ şeklinde tanımlanan θ homomorfizması $\theta_{b_1}(\theta_{b_2}(a)) = \theta_{b_1 b_2}(a)$ eşitliği sağlansın. A ve B nin yarı direkt çarpımı, her $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ sıralı ikilisi için, $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 \theta_{b_1}(a_2), b_1 b_2)$ işlemi ile tanımlanan bir kümedir. Bu küme verilen işleme göre birim elemanı $(1_A, 1_B)$ olan bir monoiddir. Bu monoide A ve B nin *yarı direkt çarpımı* denir ve $A \rtimes_{\theta} B$ şeklinde bir gösterime sahiptir [17].

2.1.1 Teorem [17] : $\wp_A = [X : R]$ ve $\wp_B = [Y : S]$ sunuşları için $A \rtimes_{\theta} B$ nin sunuşu $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere, $\wp_{A \rtimes_{\theta} B} = [X, Y : R, S, yx = (\theta_y(x))y]$ biçimindedir.

A ve B monoidleri için $P \subseteq A \times B$ alt kümesini düşünelim. $a \in A$ ve $b \in B$ için $aP = \{(ac, d) : (c, d) \in P\}$ ve $Pb = \{(c, db) : (c, d) \in P\}$ olarak verilsin. A ve B nin *schützenberger çarpımı* $(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1 a_2, P_1 b_2 \cup a_1 P_2, b_1 b_2)$ işlemi ile belirlenen

$A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesidir. Ayrıca bu çarpım $A \diamond B$ şeklinde bir gösterime sahiptir. Bu çarpım birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoiddir [19].

2.1.2 Teorem [19] : $[X : R_A]$ ve $[Y : R_B]$ sunuşları sırasıyla A ve B monoidlerine ait olsun.

$A \diamond B$ çarpımının üreteç kümesi, $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ için, $Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b}\}$ kümesi olup, bağıntı kümesi ise

$$R_A, R_B, z_{a,b}^2 = z_{a,b}, z_{a,b} z_{c,d} = z_{c,d} z_{a,b}, x z_{a,b} = z_{x a, b} x, z_{a,b} y = y z_{a, b y}, xy = yx$$

şeklindedir.

A ve B monoidleri için $P \subseteq A \times B$ alt kümesi verilsin. Buna göre $b \in B$ olmak üzere, $Pb = \{(a, db) : (a, d) \in P\}$ çarpımını ve $a \in A, b, b_1, b_2 \in B$ için, $\theta : B \rightarrow \text{End}(A), b \mapsto \theta_b$ şeklinde tanımlanan, $\theta_{b_1}(\theta_{b_2}(a)) = \theta_{b_1 b_2}(a)$ koşulunu sağlayan $\theta : B \rightarrow \text{End}(A)$

homomorfizmasını göz önünde bulunduralım. A ve B monoidlerinin **yarı direkt çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu**

$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1 \theta_{b_1}(a_2), P_1 b_2 \cup P_2, b_1 b_2)$ işlemi ile belirlenen $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesidir. Ayrıca bu çarpım $A \diamond_{sv} B$ biçiminde ifade edilir. $A \diamond_{sv} B$ çarpımı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ şeklinde birim elemana sahip olan bir monoiddir [20].

2.1.3 Teorem [20] : $[X : R_A]$ ve $[Y : R_B]$ sunuşları sırasıyla A ve B monoidlerine ait olsun.

Buna göre $A \diamond_{sv} B$ nin üreteç kümesi, $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ için,

$Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b}\}$ kümesi olup ve bağıntı kümesi ise

$$R_A, R_B, yx = (\theta_y(x)y), z_{a,b}^2 = z_{a,b}, z_{a,b} z_{c,d} = z_{c,d} z_{a,b}, z_{a,b} y = y z_{a, b y}, x z_{a,b} = z_{a, b} x$$

şeklindedir.

A ve B monoidleri verilsin. A nin endomorfizmalarının kümesi $\text{End}(A)$ olmak üzere $f : B \times B \rightarrow A$ ve $\alpha : B \rightarrow \text{End}(A)$ dönüşümleri, her $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $a \in A$ için

$$\alpha_{b_1}(\alpha_{b_2}(a))f(b_1, b_2) = f(b_1, b_2)\alpha_{b_1 b_2}(a) \text{ ve}$$

$$f(b_1, b_2) f(b_1 b_2, b_3) = \alpha_{b_1}(f(b_2, b_3)) f(b_1, b_2 b_3)$$

Koşullarını sağlasın. Ayrıca $b \in B$ ve $P \subseteq A \times B$ olmak üzere $b \in B$ için $Pb = \{(a, db) : (a, d) \in P\}$ olarak verilsin. Bu durumda A nın B ile olan ***crossed (çapraz) çarpımı altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu*** $(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1 \alpha_{b_1}(a_2) f(b_1, b_2), P_1 b_2 \cup P_2, b_1 b_2)$ eşitliğiyle belirlenen $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesidir. Ayrıca $A_{cp} \#_{\alpha}^f B$ biçiminde bir ifadeye sahiptir. Bu çarpım $(1_A, \emptyset, 1_B)$ şeklinde birim elemana sahip olan bir monoiddir [21].

2.1.4 Teorem [21]: $[X : R]$ ve $[Y : S]$ sunuşlar sırasıyla A ve B monoidlerin itemsil etsinler. Bu durumda $A_{cp} \#_{\alpha}^f B$ monoidinin çarpımının sunuşunda yer alan üreteç kümesi, $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ için, $Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b}\}$ kümesi olup ve bağıntı kümesi ise W_s , X üzerinde kelime olmak üzere, $R, S = W_s, yx = \alpha_y(x)y, z_{a,b}^2 = z_{a,b}, z_{a,b} z_{c,d} = z_{c,d} z_{a,b}, z_{a,b} y = y z_{a,b}$ ve $x z_{a,b} = z_{a,b} x$ şeklindedir.

A monoidi için $\theta : A \rightarrow A$ bir endomorfizması verilsin. Ayrıca $\mathbb{N}^0 \times A \times \mathbb{N}^0$ üzerinde, $(m, a, n)(p, b, q) = (m - n + t, \theta^{t-n}(a) \theta^{t-p}(b), q - p + t)$ işlemi tanımlansın. Burada $t = \max(n, p)$ şeklindedir. $\mathbb{N}^0 \times A \times \mathbb{N}^0$ kümesi bu işleme göre birim elemanı $(0, 1_A, 0)$ olan bir monoiddir ve bu monoid $S(A, \theta)$ ile gösterilir. Bu genişleme ***Bruck – Reilly genişlemesi*** olarak adlandırılır [19].

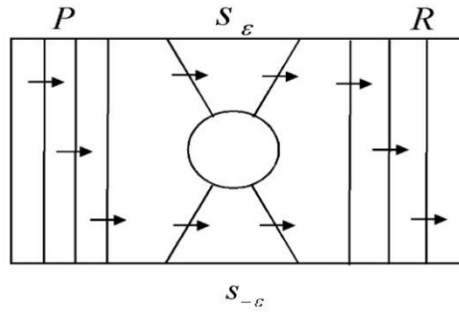
2.1.5 Teorem [19]: A monoidinin sunuşu $[X : R]$ olsun. $\theta : A \rightarrow A$ endomorfizması için $S(A, \theta)$ monoidinin sunuşu, a ve b ler sırasıyla $(0, 1_A, 1)$ ve $(1, 1_A, 0)$ elemanlarını temsil etmek üzere, $[X, a, b : R, ab = 1, ax = \theta(x)a, xb = b\theta(x), x \in X]$ şeklindedir.

3. MONOİD SUNUŞLARINA GEOMETRİK BİR BAKIŞ

3.1 Atomik Monoid Resimler

Bu bölümde, monoid resimleri ve monoid resimlerinden elde edilen squier graflar ile ilgili bir takım tanımlamalar yapılacaktır. Bu kısımda verilen tanım ve bilgilere [1-8],[13-14] ve [24] gibi kaynaklarından ulaşılabilir.

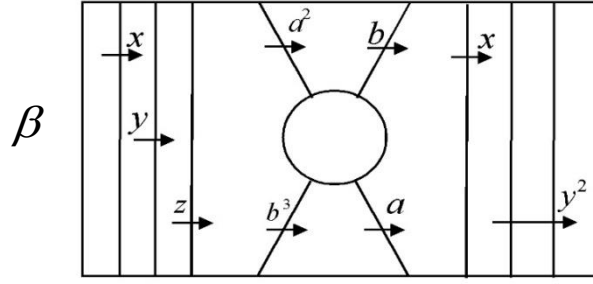
Bir M monoidi verilsin. Ayrıca bu monoidin sunuşu $\wp=[X,S]$ biçiminde olsun. Bu M monoidinin X üreteç kümesinin elamanları kullanılarak elde edilen $F(X)$ serbest monoidini düşünelim. $P,R \in F(X)$ kelimelerini ve $s:s_\varepsilon = s_{-\varepsilon} \in S$ ($\varepsilon = \pm 1$) bağıntısı için M monoidi üzerinde tanımlanan atomik monoid resmi, Şekil 3.1 de gösterildiği gibi çizilen, $\beta = (P,s,\varepsilon,R)$ şeklindeki bir sıralı dördlüdür.



Şekil 3.1: Monoid Resmi

Şekil 3.1 de verilen atomik monoid resminde $\varepsilon=1$ olarak alındığında pozitif disk, $\varepsilon = -1$ olarak alındığında ise negatif disk, biçiminde adlandırılır.

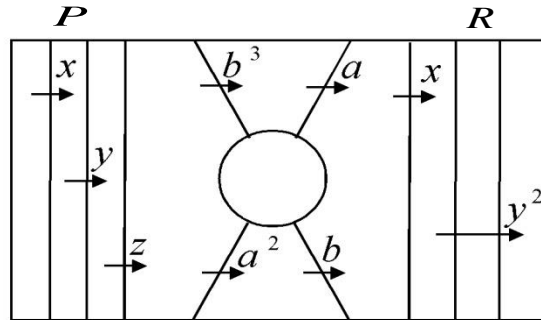
3.1.1 Örnek: Şimdi bir pozitif disk örneği verelim. Bunun için sol ve sağ kenarlara yazılacak olan kelimeleri sırasıyla xyz ve xy^2 olarak alalım. Ayrıca $s:s_\varepsilon = s_{-\varepsilon} \in S$ ($\varepsilon = \pm 1$) bağıntısını da $\varepsilon = +1$ için $a^2b = b^3a$ şeklinde seçelim. Bu durumda atomik monoid resmimiz $\beta = (xyz, a^2b = b^3a, +1, xy^2)$ dördlüsü olarak ifade edilir ve çizimi Şekil 3.2 de verildiği gibidir.



Şekil 3.2: Pozitif Resim

3.1.2 Örnek: Şimdi bir negatif disk örneği oluşturalım. Bunun için 3.1.1 Örnekte verilen atomik monoid resmini düşünelim. Bu resim de eğer $\varepsilon = -1$ olarak alınırsa

$\beta = (xyz, b^3a = a^2b, -1, xy^2)$ şeklinde atomik monoid resmi elde edilir. Bu durumu geometrik olarak Şekil 3.3 te verildiği gibi çizebiliriz.



Şekil 3.3: Negatif Resim

3.2 Squier Graflar

Bu kısımda atomik monoid resimlerinden hareketle graf elde edeceğiz. Bunun için Şekil 3.1

de verilen $\beta = (P, s, \varepsilon, R)$ atomik monoid resmini düşünelim. Bu resimden hareketle bir Γ

grafını, kenar elemanları $\beta = (P, s, \varepsilon, R)$ sıralı dördlüsü olmak üzere;

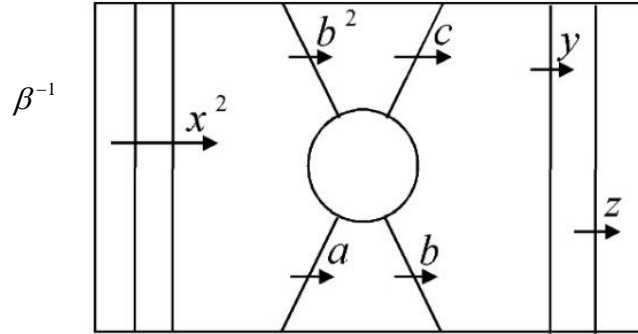
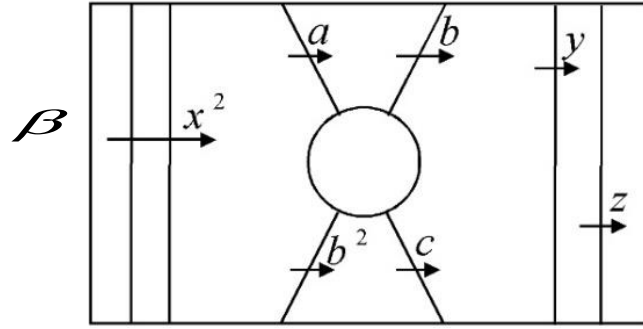
β kenarının giriş fonksiyonu $\iota(\beta) = Ps_{\varepsilon}R$

β kenarının çıkış fonksiyonu $\tau(\beta) = Ps_{-\varepsilon}R$

β kenarının ters fonksiyonu $\beta^{-1} = (P, s, -\varepsilon, R)$

tanımlamalarından hareketle oluştururuz. Oluşan bu grafa Squier graf adı verilir.

3.2.1 Örnek: $\beta = (x^2, ab = b^2c, +1, yz)$ ve $\beta^{-1} = (x^2, ab = b^2c, -1, yz)$ sıralı dörtlüleri ile verilen atomik monoid resimleri için

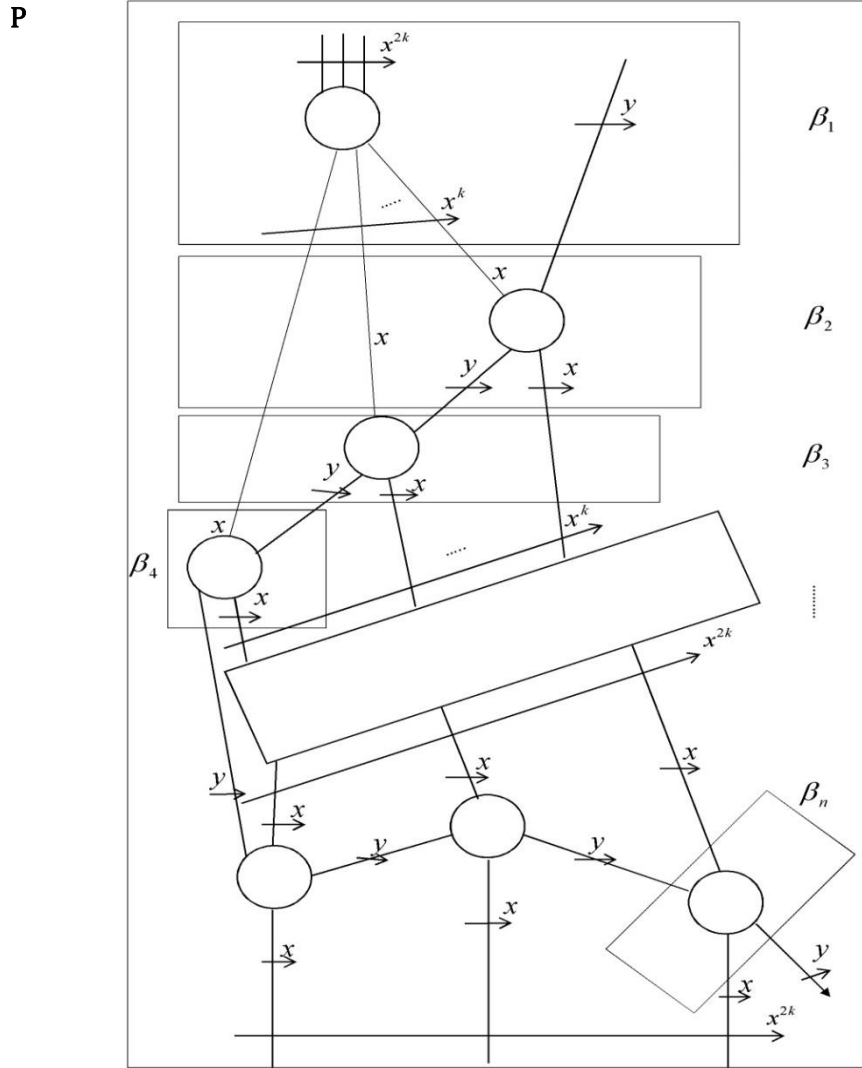


Şekil 3.4: Squier Graf

Şekil 3.4 de verilen resimleri çizebiliriz. Bu çizimlerden yola çıkarak Γ squier grafının, β kenarı için giriş ve çıkış fonksiyonlarının $\iota(\beta) = x^2abyz$ ve $\tau(\beta) = x^2b^2cyz$ olduğu kolaylıkla görülür. Benzer şekilde β^{-1} kenarı için giriş ve çıkış fonksiyonları $\iota(\beta) = x^2b^2cyz$ ve $\tau(\beta) = x^2abyz$ şeklindedir.

Bir Γ squier grafında verilen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ atomik monoid resimlerini düşünelim. Eğer bu resimler arasında $1 \leq i \leq n$ için $\tau(\beta_i) = \iota(\beta_{i+1})$ koşulları sağlanıyor ise $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ atomik monoid resimlerinin bir araya getirilmesi ile bir \mathbf{P} yolu oluşur. Bu durumu aşağıda verilen örnekle açıklayabiliriz.

3.2.2 Örnek: Üreteç kümesini $X = \{x, y\}$ ve bu kümenin elemanları ile elde edilen s bağıntı kümesini $\{x^{2k} = x^k, xy = yx\}$ olarak ele alalım. Bu durumda bu bağıntı ve üreteç elemanlarını kullanarak ortaya birçok çeşitli yol örnekleri verebiliriz. Örneğin bu yollardan bir tanesini

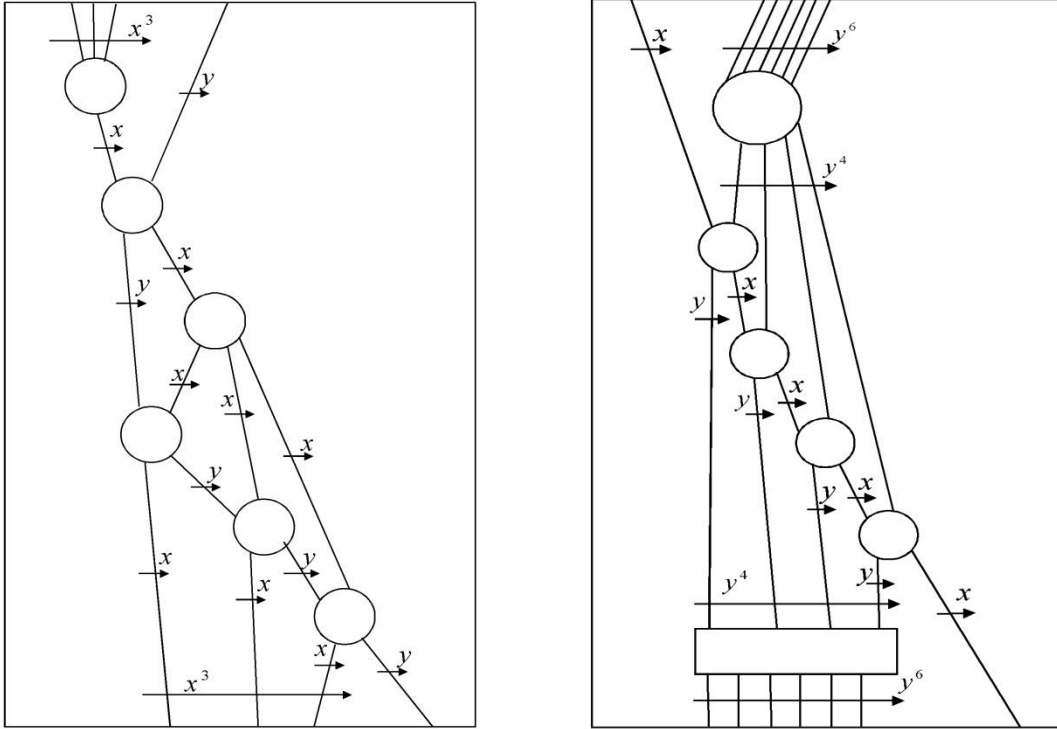


Şekil 3.5: Yol Resmi

Burada $\beta_1 = (1, x^{2k} = x^k, +1, y)$, $\beta_2 = (x^{k-1}, xy = yx, +1, 1)$, $\beta_3 = (x^{k-2}, xy = yx, +1, x)$,
 $\beta_n = (x^{2k-1}, yx = xy, -1, 1)$ biçimindedir. Böylece bir \mathbf{P} yolu $\beta_1\beta_2\dots\beta_n$ den oluşur.

3.2.3 Tanım: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ile ifade edilen atomik monoid resimlerini düşünelim. Eğer $\mathbf{P} = \beta_1\beta_2\dots\beta_n$ yolu için $\iota(\beta_1) = \tau(\beta_n)$ oluyorsa bu \mathbf{P} resmine küresel monoid resmi denir. Eğer $\iota(\beta_1) \neq \tau(\beta_n)$ ise elde edilen bu resme küresel olmayan monoid resmi denir.

3.2.4 Örnek: $M_1 \times M_2$ direkt çarpımı için $\mathcal{P}_{M_1 \times M_2} = [x.y, x^3 = x, y^6 = y^4, xy = yx]$ sunuşunu düşünelim. Böylece bu sunuştan elde edilen küresel olan ve küresel olmayan monoid resimlerine örnek olarak Şekil 3.6 da verilen resimleri düşünebiliriz.



a) Küresel Resim

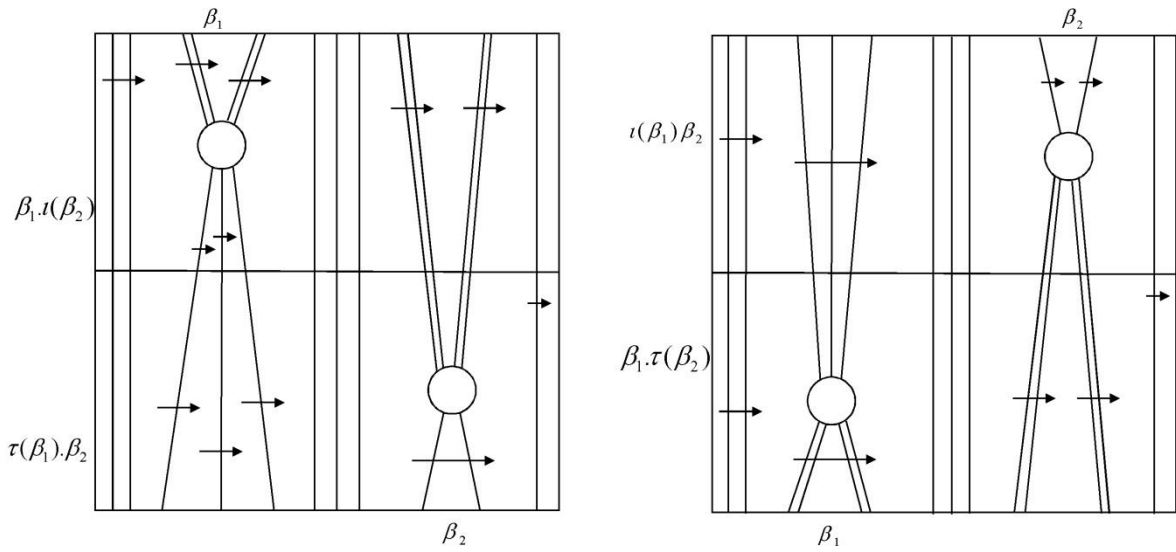
b) Küresel Olmayan Resim

Şekil 3.6: Küresel Olan ve Küresel Olmayan Resim Örneği

3.2.5 Tanım: X üreteç ve S bağıntı kümesi olan bir M monoidinin sunuşunun $\wp = [X, S]$ olduğunu biliyoruz. Bu sunuştan elde edilen $\Gamma = \Gamma(\wp)$ squier grafını düşünelim. Bu grafta yer alan β_1 ve β_2 iki atomik monoid resmi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- i) $\beta_1\beta_1^{-1}$ çiftini silme.
- ii) $\beta_1\beta_1^{-1}$ çiftini ekleme.
- iii) $(\beta_1.\iota(\beta_2))(\tau(\beta_1)\beta_2)$ alt resmi $(\iota\beta_1.(\beta_2))((\beta_1)\tau\beta_2)$ alt resmi ile yer değiştirme.

Buradaiii) durumu Şekil 3.7 ile gösterilmiştir.



Şekil3.7: Monoid Resimleri Üzerinde İşlemler

3.2.6 Tanım: İki küresel resimden biri diğerinden sonlu sayıda $i)$, $ii)$, $iii)$ işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa bu iki küresel resme denk küresel resimler denir. Bu denklik bağıntısıyla oluşturulan Γ grafına \wp sunuşunun squier kompleksi denir ve $D(\wp)$ ile gösterilir.

Verilen bir monoid genişlemesinin bağıntılarını belirlemek bazen çok zor olabilir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için bazı metotlar ortaya koymanız gerekebilir. Bu bağlamda aşağıda verilen ve Pride [2] tarafından ortaya konulan teorem bağıntılardaki belirsizliği ortadan kaldıran önemli yöntemlerden biri olarak kabul edilir.

3.2.7 Teorem [2]: A kümesi \wp sunuşuna ait resimlerin bir alt kümesi olsun. \wp sunuşunda tanımlanan bağıntılara yardımıyla elimizde var olan bütün küresel resimleri boş resme denk oluyor ise A kümesi $D(\wp)$ nin üreteç resimlerinin kümesidir.

4. MATRİSLER VE KÜRESEL RESİMLER YARDIMIYLA İKİ RANKLIABELYAN MONOİDLERİN YARI DİREKT ÇARPIMININ BELİRLENMESİ

A ve B monoidleri verilsin. 2. Bölümde yer alan 2.2.1 Teoremde bu monoidlerin yarı direkt çarpımının sunuşu yer almaktadır. Dikkat edilirse bu sunuşta $\theta: B \rightarrow \text{End}(A)$ homomorfizması ve bu homomorfizmaya bağlı olarakta $yx = (\theta_y(x))y$ bağıntıları yer almaktadır. Bu bölümdeki esas amacımız bu bağıntıları rankı iki olan serbest abelyan monoidler için matrisler ve küresel resimler yardımıyla belirlemektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlara [7-8] de verilen kaynaklardan ulaşılabilmektedir.

F_1 ve F_2 rankı iki olan serbest abelyan monoidler olsunlar. Ayrıca F_1 ve F_2 nin sunuşları sırasıyla

$$\wp_{F_1} = [x_1, x_2 : x_1 x_2 = x_2 x_1] \text{ ve } \wp_{F_2} = [y_1, y_2 : y_1 y_2 = y_2 y_1]$$

olarak verilsin. Rankı iki olarak seçtiğimizden her bir monoidimiz için

$$M_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } M_2 = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (4.1)$$

matrislerini düşünelim. Monoidler üzerinde çalıştığımızdan burada $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ şeklindedir. Bu durumda $F_1 \rtimes_{\theta} F_2$ yarı direkt çarpımının sunuşu için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.1 Teorem [7]: F_1 ve F_2 monoidleri sırasıyla $\wp_{F_1} = [x_1, x_2 : x_1 x_2 = x_2 x_1]$ ve

$\wp_{F_2} = [y_1, y_2 : y_1 y_2 = y_2 y_1]$ sunuşlarına sahip olsunlar. Ayrıca $M_1 M_2 = M_2 M_1$ eşitliği

sağlansın. Bu durumda $M = F_1 \rtimes_{\theta} F_2$ yarı direkt çarpımının sunuşu, her

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için,

$$\mathcal{O}_M = [x_1, x_2, y_1, y_2 : x_1x_2 = x_2x_1, y_1y_2 = y_2y_1, y_1x_1 = x_1y_1^{\alpha_{11}}y_2^{\alpha_{12}}, \\ y_2x_1 = x_1y_1^{\alpha_{21}}y_2^{\alpha_{22}}, y_1x_2 = x_2y_1^{\beta_{11}}y_2^{\beta_{12}}, y_2x_2 = x_2y_1^{\beta_{21}}y_2^{\beta_{22}}]$$

şeklindedir.

İspat : $\mathcal{O}_{F_1} = [x_1, x_2 : x_1x_2 = x_2x_1]$ ve $\mathcal{O}_{F_2} = [y_1, y_2 : y_1y_2 = y_2y_1]$ sunuşlarını düşünelim. Bu durumda 2.2.1 Teoremde F_1 ile F_2 nin yarıdirekt çarpımının sunuşu

$$\mathcal{O}_M = [x_1, x_2, y_1, y_2 : x_1x_2 = x_2x_1, y_1y_2 = y_2y_1, y_1x_1 = x_1\theta_{x_1}(y_1), \\ y_1x_2 = x_2\theta_{x_2}(y_1), y_2x_1 = x_1\theta_{x_1}(y_2), y_2x_2 = x_2\theta_{x_2}(y_2)]$$

Şeklindedir. Burada

$$\theta : F_1 \rightarrow \text{End } F_2 \\ x_1 \rightarrow \theta_{x_1} \\ x_2 \rightarrow \theta_{x_2}$$

homomorfizması şeklindedir. Şimdi(4.1) de verilen M_1 ve M_2 matrislerini düşünelim. Bu matrislerin bileşenleriyle oluşturulan

$$\theta_{x_1}(y_1) = y_1^{\alpha_{11}}y_2^{\alpha_{12}}, \quad \theta_{x_1}(y_2) = y_1^{\alpha_{21}}y_2^{\alpha_{22}}, \quad \theta_{x_2}(y_1) = y_1^{\beta_{11}}y_2^{\beta_{12}}, \quad \theta_{x_2}(y_2) = y_1^{\beta_{21}}y_2^{\beta_{22}}$$

dönüşümlerini düşünelim. Serbest abelyan monoidler değişme özelliğine sahip olduğunda bu matrisler arasında da değişme özelliğinin yani $M_1M_2 = M_2M_1$ eşitliğinin sağlandığı bize teoremden verilmiş olduğundan

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = M_2 M_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{12}\alpha_{21} & \beta_{11}\alpha_{12} + \beta_{12}\alpha_{22} \\ \beta_{21}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{21} & \beta_{21}\alpha_{12} + \beta_{22}\alpha_{22} \end{bmatrix}$$

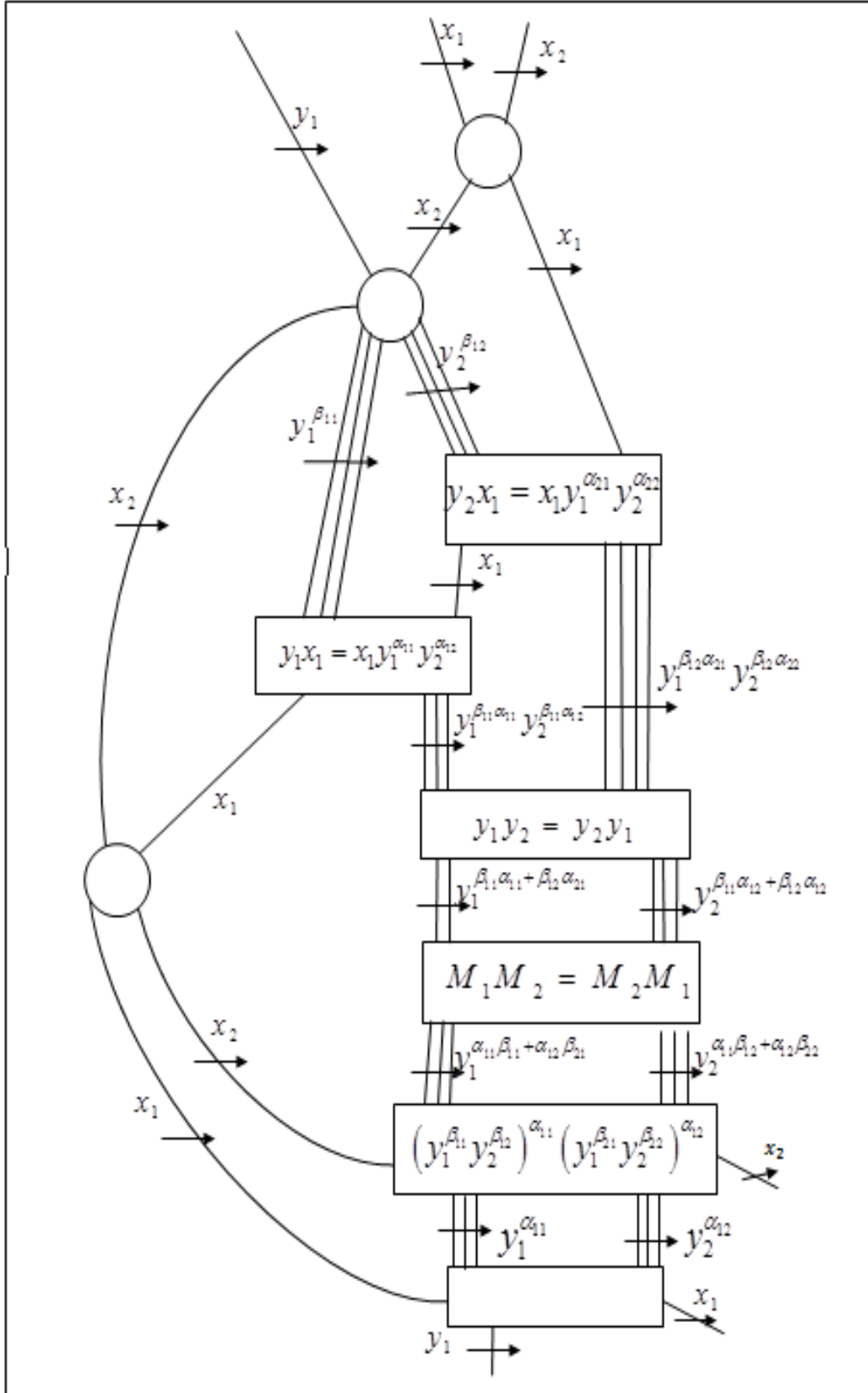
$$\Rightarrow \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} = \beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{12}\alpha_{21}$$

$$\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} = \beta_{11}\alpha_{12} + \beta_{12}\alpha_{22}$$

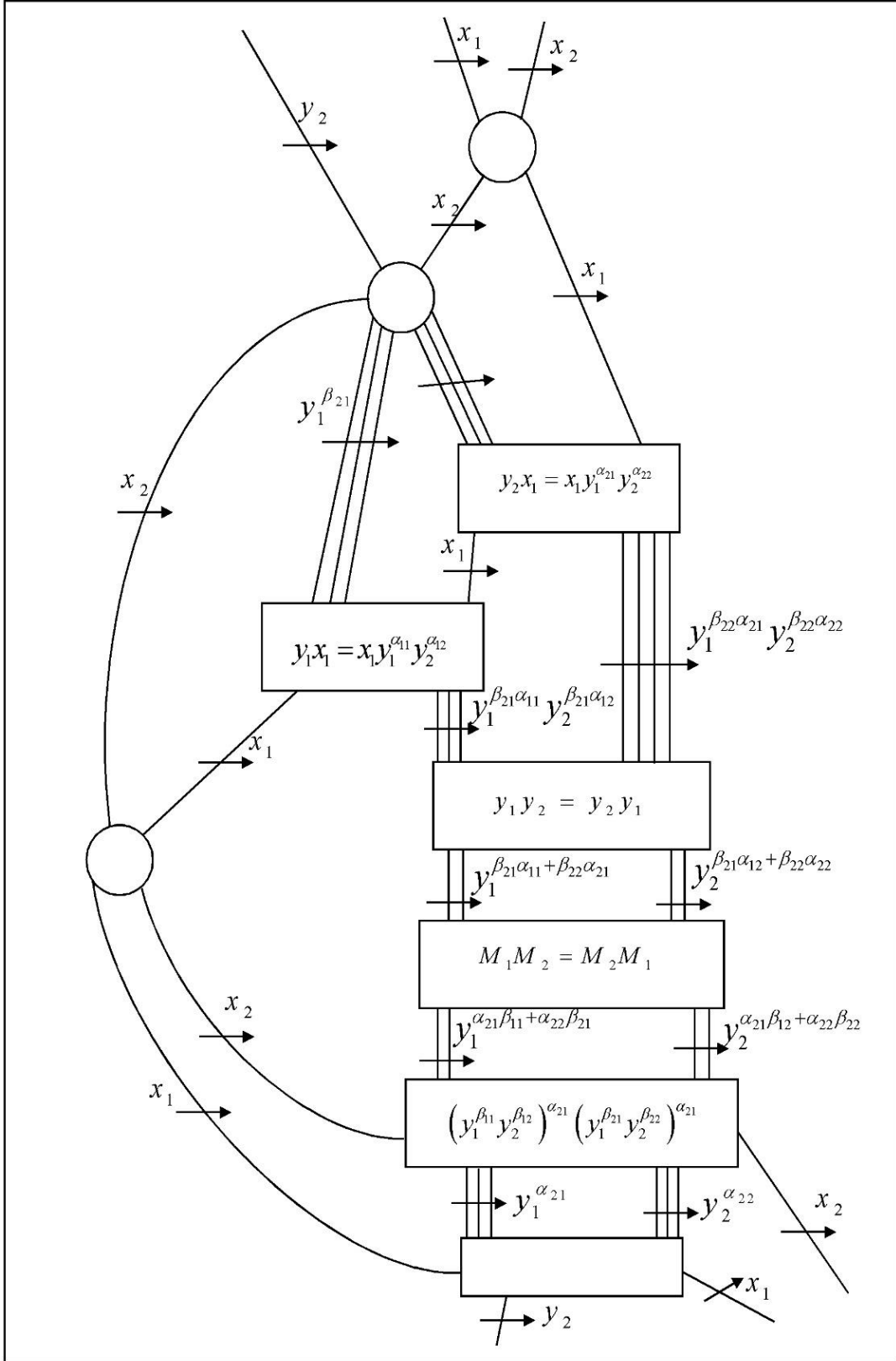
$$\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} = \beta_{21}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{21}$$

$$\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} = \beta_{21}\alpha_{12} + \beta_{22}\alpha_{22}$$

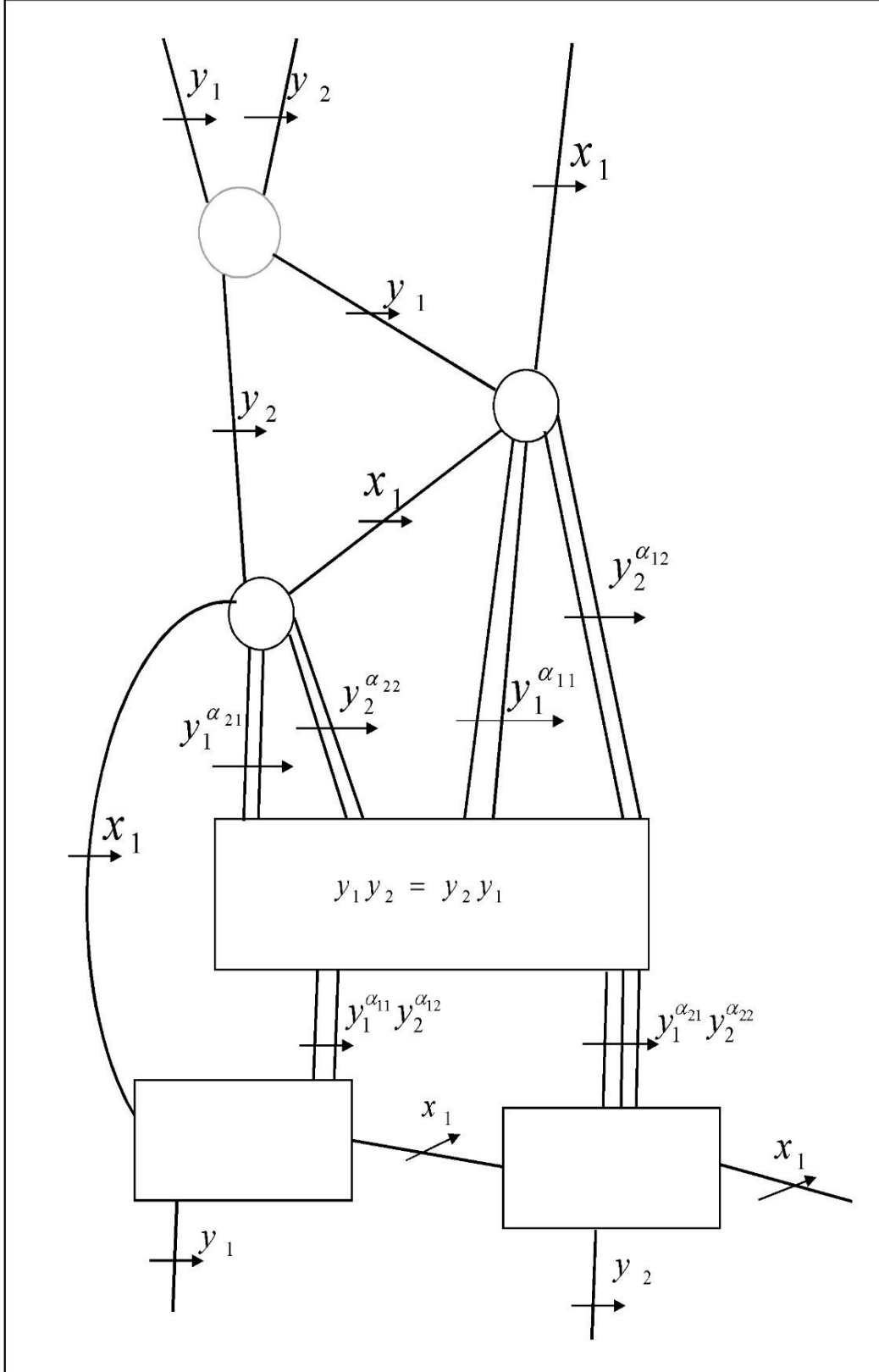
Eşitlikleri elde edilir. Şimdi seçtiğimiz bu dönüşümün yarı direkt çarpım genişlemesi olduğunu gösterelim. Bunun için küresel monoid resimlerini kullanacağız. Küresel monoid resimleri oluşturabilmemiz için sunuşumuzda yer alan $x_1 x_2 = x_2 x_1$ ve $y_1 y_2 = y_2 y_1$ bağıntılarını düşünelim. Bu bağıntılardan $y_1 x_1 x_2$, $y_2 x_1 x_2$, $y_1 y_2 x_1$ ve $y_1 y_2 x_2$ çakışmaları elde edilir. Bu çakışmalardan sırasıyla Şekil 4.1-4.4 deki üreteç resimleri ortaya çıkar.



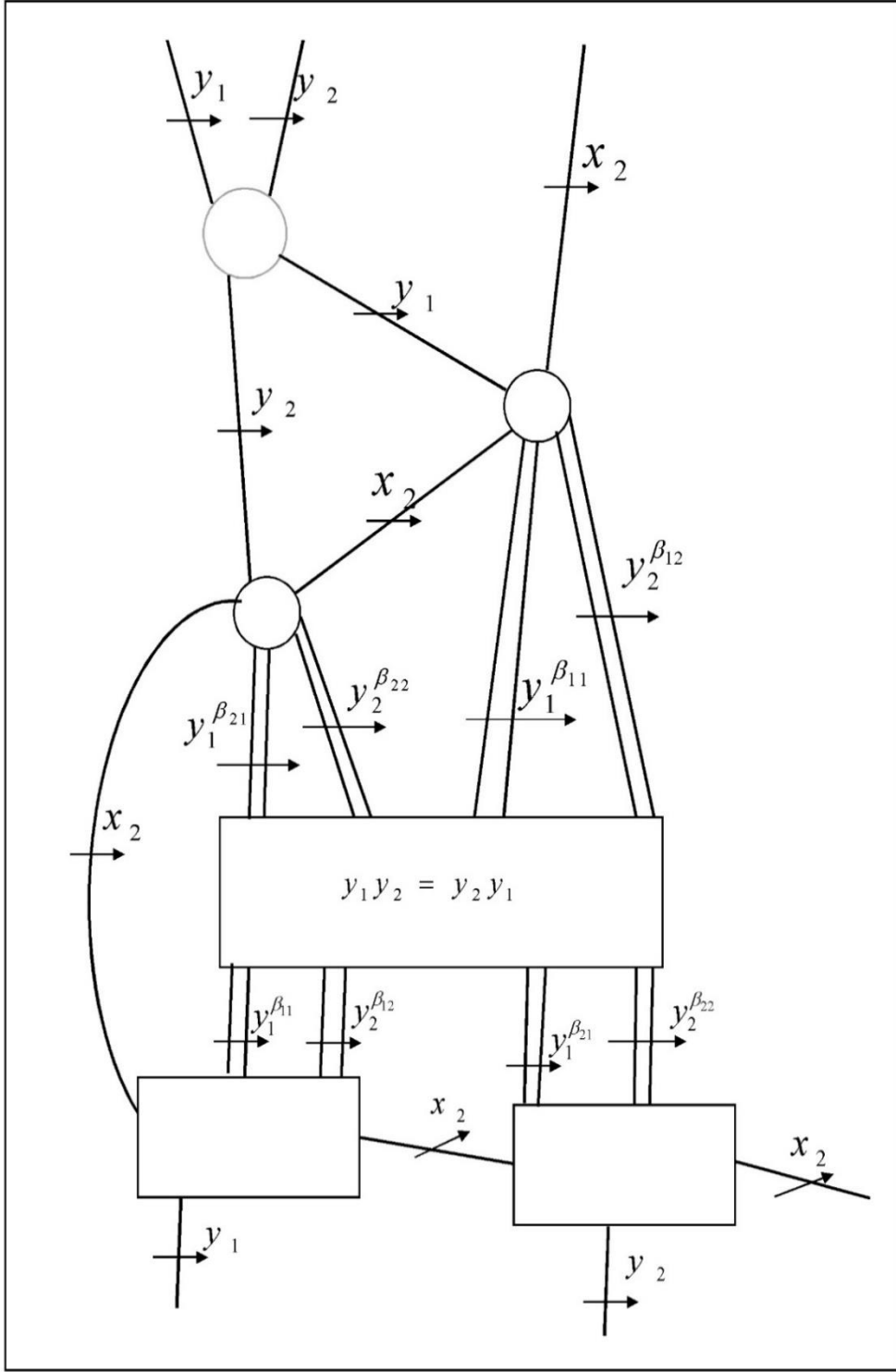
Şekil 4.1: $y_1 x_1 x_2$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 4.2: $y_2 x_1 x_2$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 4.3: $y_1 y_2 x_1$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 4.4: y_1, y_2, x_2 Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi

Şekil 4.1-4.4 çizilen bütün resimler küresel olduğundan \mathcal{O}_M sunuşu içerisinde seçtiğimiz

$\theta_{x_1}(y_1) = y_1^{\alpha_{11}} y_2^{\alpha_{12}}$, $\theta_{x_1}(y_2) = y_1^{\alpha_{21}} y_2^{\alpha_{22}}$, $\theta_{x_2}(y_1) = y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{12}}$, $\theta_{x_2}(y_2) = y_1^{\beta_{21}} y_2^{\beta_{22}}$ dönüşümü

F_1 ve F_2 serbest abelyan grupları için yarı direkt çarpım genişlemesi olarak ortaya çıkar.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. MONOİDLERİN PEİFFER ÇARPIMININ GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ

Sarı, K [23] de küresel monoid resimlerini kullanarak verilen sonlu iki devirli monoidin Peiffer çarpımına dair bir takım önemli sonuçlar ortaya koymuşlardır. Biz ise bu bölümde, küresel monoid resimleri yardımıyla, ilk önce, A iki sonlu devirli monoidin direkt çarpım monoidi ve B de verilen bir sonlu devirli monoid olmak üzere A ile B nin Peiffer çarpımını oluşturma koşulları üzerinde duracağız. Daha sonra ise hem küresel monoid resimleri hem de matrisler yardımıyla rankı iki olan serbest abelyan monoidlerin oluşturduğu Peiffer çarpımı ile ilgili çalışmalar yapacağız. Bu kısımda yer alan bütün teoremler yeni olup tarafımızdan ortaya konmuştur.

5.1 Pieffer Çarpım

Şimdi öncelikle verilen iki monoidin Peiffer çarpımı ile ilgili bilgiler verelim. A ve K monoidleri verilsin. $a \in A$ ve $k \in K$ olmak üzere, $A \times K$ çarpımı için $(a, k) \mapsto a^k \in A$ ve $(a, k) \mapsto k^a \in K$ hareketlerini tanımlayalım öyle ki burada $(a^k)^{k'} = a^{kk'}$ ($k' \in K$) ve $(k^a)^{a'} = k^{aa'}$ ($a' \in A$) eşitlikleri sağlansın. Ayrıca bu hareketlere bağlı olarak

$$ka = ak^a \text{ ve } ak = ka^k$$

bağıntılarını göz önüne alalım. Bu bağıntılardan hareketle $\wp_A = [X : R]$ ve $\wp_K = [Y : S]$ sunuşları sırasıyla A ile K monoidlerinin sunuşları olmak üzere, $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\wp_{A \triangleright \triangleleft K} = [X, Y; R, S, xy = yx^y, yx = xy^x] \quad (5.1)$$

sunuşu ile temsil edilen monoide A ile K nin Peiffer çarpımı denir. Ayrıca bu monoid $A \triangleright \triangleleft K$ ile gösterilir. Bu çarpım ile ilgili detaylı bilgilere [23-24] kaynaklarından ulaşılabilir.

Ateş, F [22] de (5.1) de verilen x^y ve y^x hareketlerini belirleme amaçlı cebirsel yönden ikinci homolojiyi kullanarak gruplar üzerinde çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Sarı, K [23] de ise (5.1) de verilen x^y ve y^x hareketlerini devirli monoidler üzerinde tanımlayabilmek için küresel monoid resimlerini kullanmışlardır. Biz ise bu kısımda sonlu devirli monoidlerin, direkt çarpım monoidlerinin ve rankı iki olan serbest abelyan monoidlerinin Peiffer çarpımında yer alan x^y ve y^x hareketlerini belirleme amaçlı çalışmalar yapacağız.

5.2 Sonlu Devirli Monoidlerin Direkt Çarpım Monoidi ile Sonlu Devirli Monoidlerin Birlikte Oluşturduğu Peiffer Çarpım

A mertebeleri m_1 ve m_2 olan iki devirli monoidin direkt çarpım monoidi olmak üzere A nın sunuşu $\wp_A = [x_1, x_2 : x_1^{m_1} = x_1^{k_1}, x_2^{m_2} = x_2^{k_2}, x_1 x_2 = x_2 x_1]$ olarak verilsin. Ayrıca K monoidi sunuşu $\wp_K = [y : y^n = y^s]$ şeklinde olan bir devirli monoid olsun. Burada amacımız A ile K nın Peiffer çarpım sunuşunu elde etmektir. Bunun için

$$x_1^y = x_1^{a_1}, x_2^y = x_2^{a_2}, y^{x_1} = y^{b_1}, y^{x_2} = y^{b_2} \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}^+)$$

hareketlerini düşünelim. Bu durumda (5.1) den hareketle A ile K nın peiffer çarpım sunuşu

$$\wp_{A \triangleright \triangleleft K} = [x_1, x_2, y : x_1^{m_1} = x_1^{k_1}, x_2^{m_2} = x_2^{k_2}, x_1 x_2 = x_2 x_1, y^n = y^s, x_1 y = y x_1^{a_1}, x_2 y = y x_2^{a_2}, y x_1 = x_1 y^{b_1}, y x_2 = x_2 y^{b_2}] \quad (5.2)$$

olarak elde edilir.

(5.2) de verilen sunuşunda yer alan bütün $m_1, m_2, k_1, k_2, n, s, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}^+$ sayıları için bir monoid genişlemesi oluşmaz. Şimdi bir monoid genişlemesi oluşturmamıza yarayan ve bu sayıların sağlaması gereken özellikleri ortaya koyan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

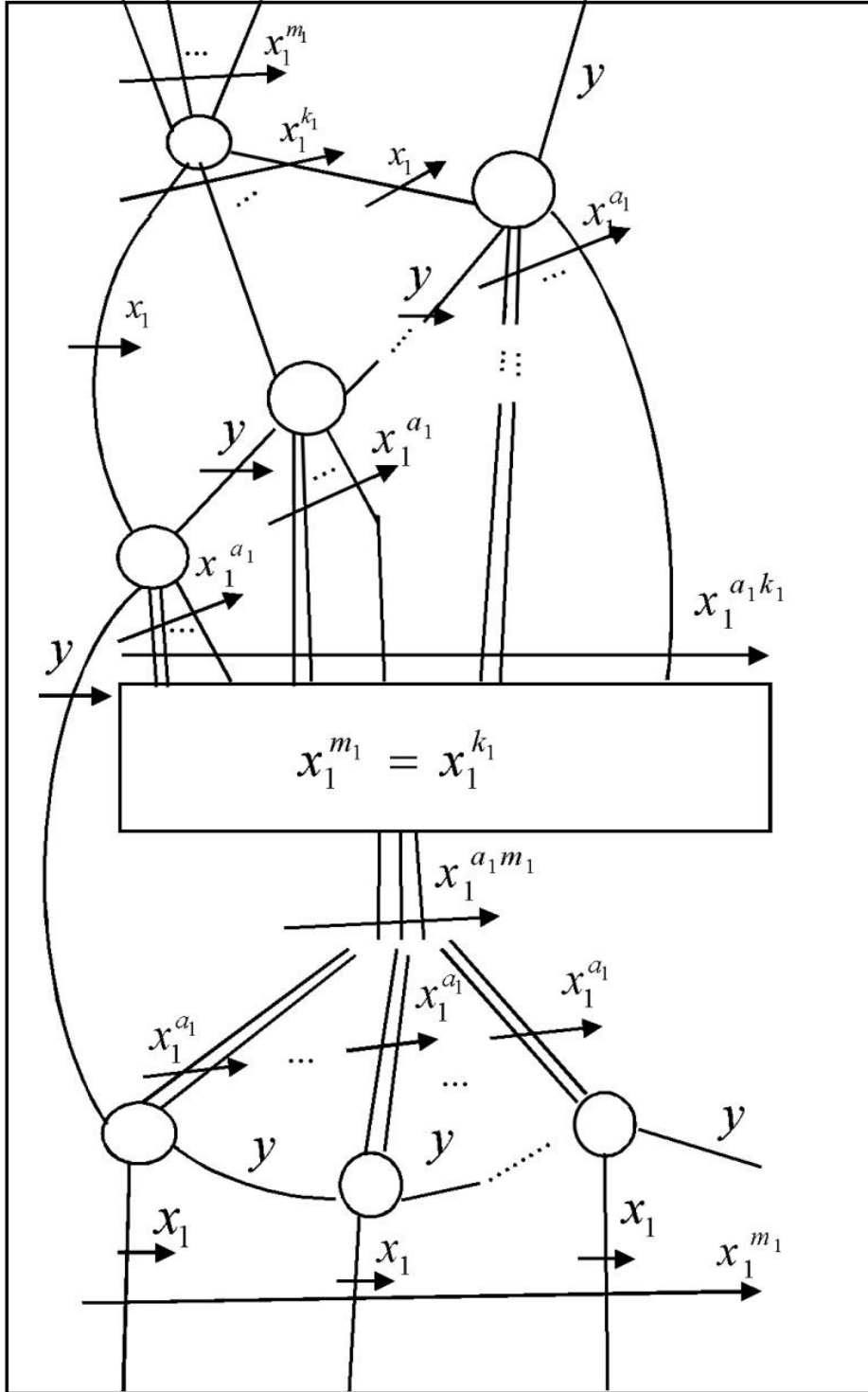
Teorem 5.2.1: (5.2) de verilen $\wp_{A \triangleright \triangleleft K}$ sunuşunun A ile K monoidlerinin Peiffer çarpımının sunuşunu temsil edebilmesi için gerek ve yeter şart ;

$$b_1^{m_1} \equiv b_1^{k_1} \pmod{n-s}, \quad a_1^n \equiv a_1^s \pmod{m_1-k_1}$$

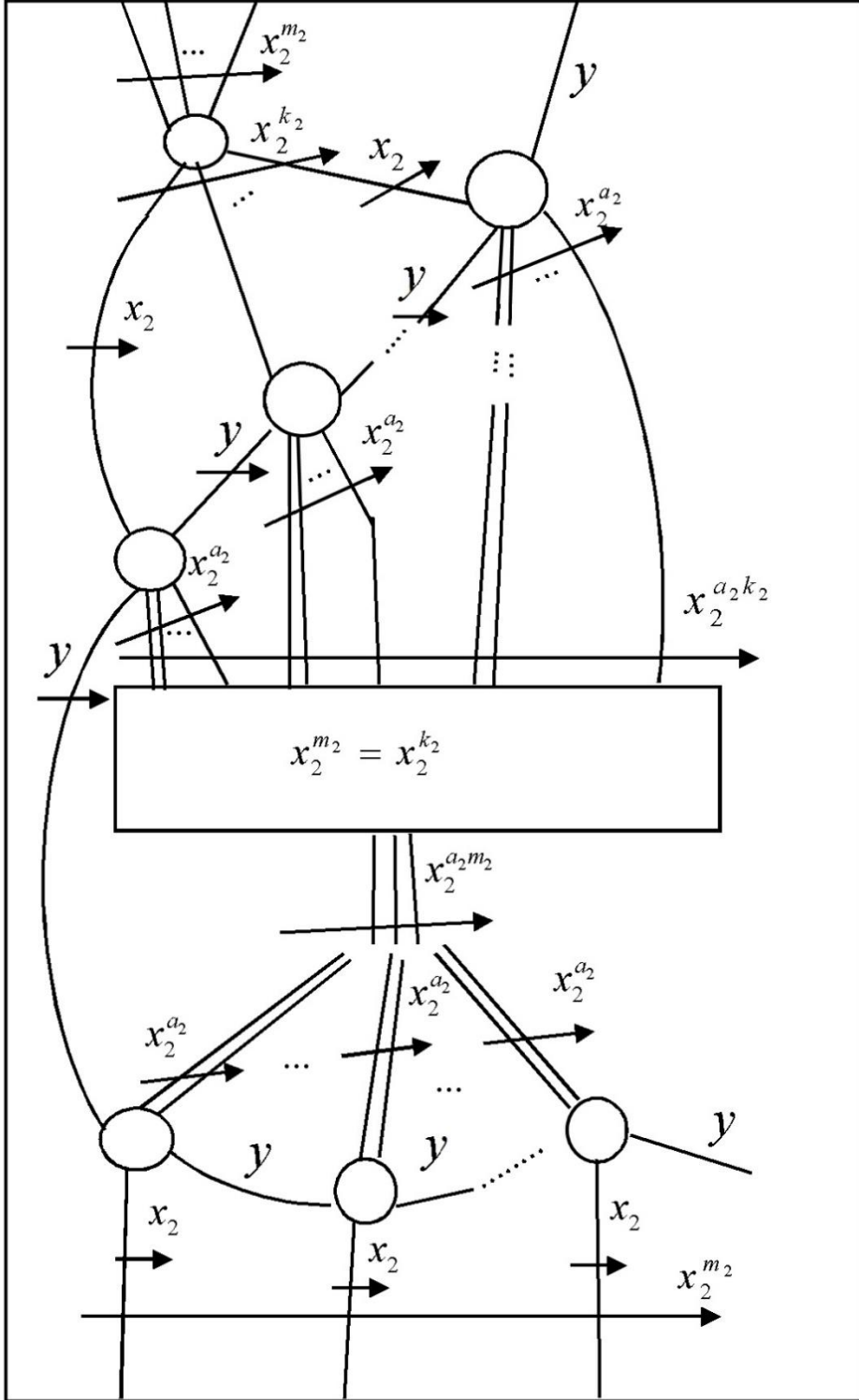
$$b_2^{m_2} \equiv b_2^{k_2} \pmod{n-s}, \quad a_2^n \equiv a_2^s \pmod{m_2-k_2}$$

olmasıdır.

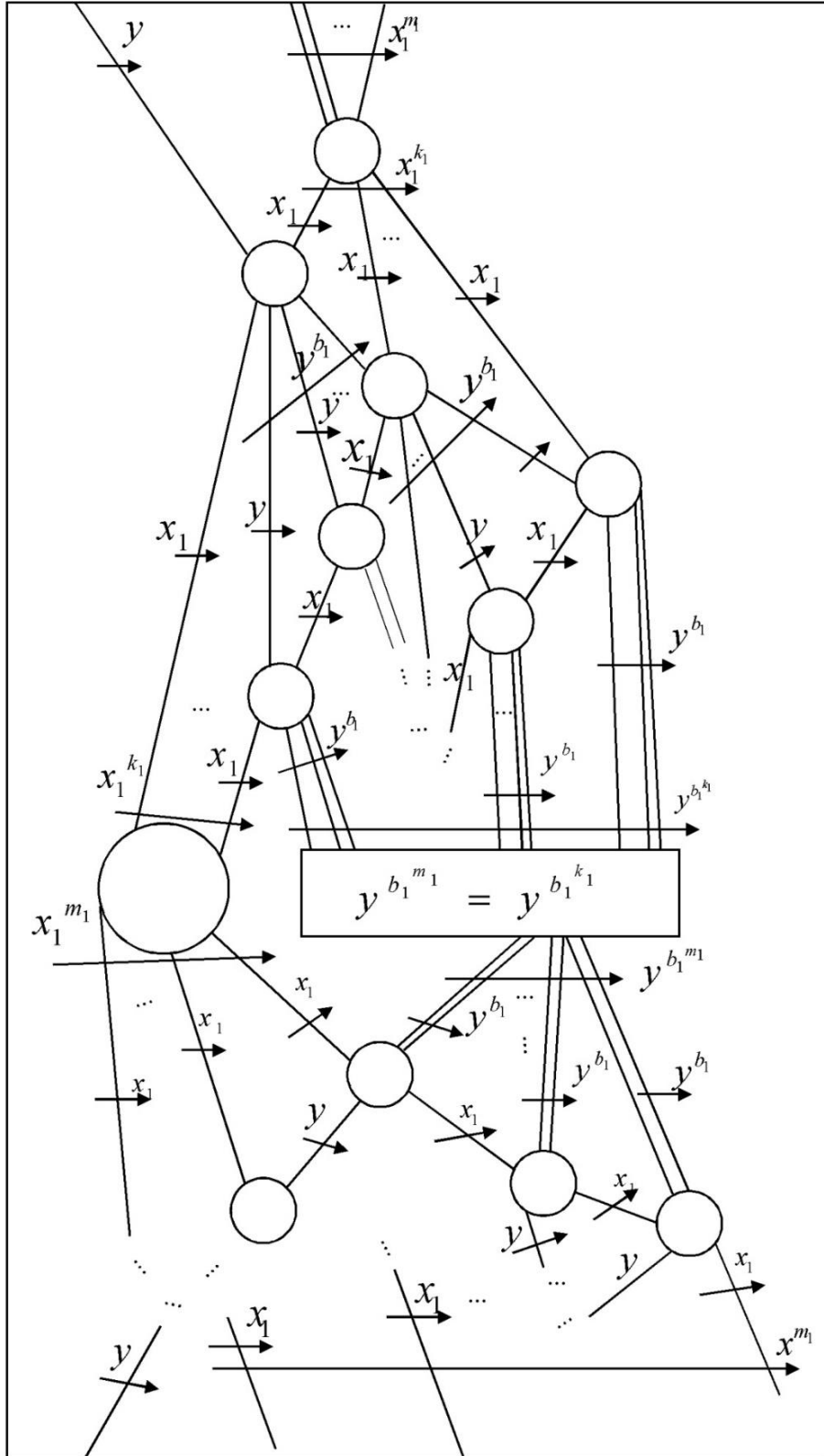
İspat: Kabul edelim ki $\mathcal{O}_{A \triangleright \triangleleft K}$ sunuşu A ile K nin Peiffer çarpımını temsil etsin. Şimdi bu sunuşta bulunan $x_1^{m_1} = x_1^{k_1}$, $x_2^{m_2} = x_2^{k_2}$, $x_1 x_2 = x_2 x_1$, $y^n = y^s$, $x_1 y = y x_1^{a_1}$, $x_2 y = y x_2^{a_2}$, $y x_1 = x_1 y^{b_1}$, $y x_2 = x_2 y^{b_2}$ bağıntılarını düşünelim. Bu bağıntılardan; $x_1^{m_1} y$, $x_2^{m_2} y$, $y x_1^{m_1}$, $y x_2^{m_2}$, $y^n x_1$, $y^n x_2$, $x_1 y^n$, $x_2 y^n$, $x_1 x_2 y$, $y x_1 x_2$ çakışmalarını elde ederiz. Dolayısıyla aşağıda verilen üreteç resimlerini elde ederiz.



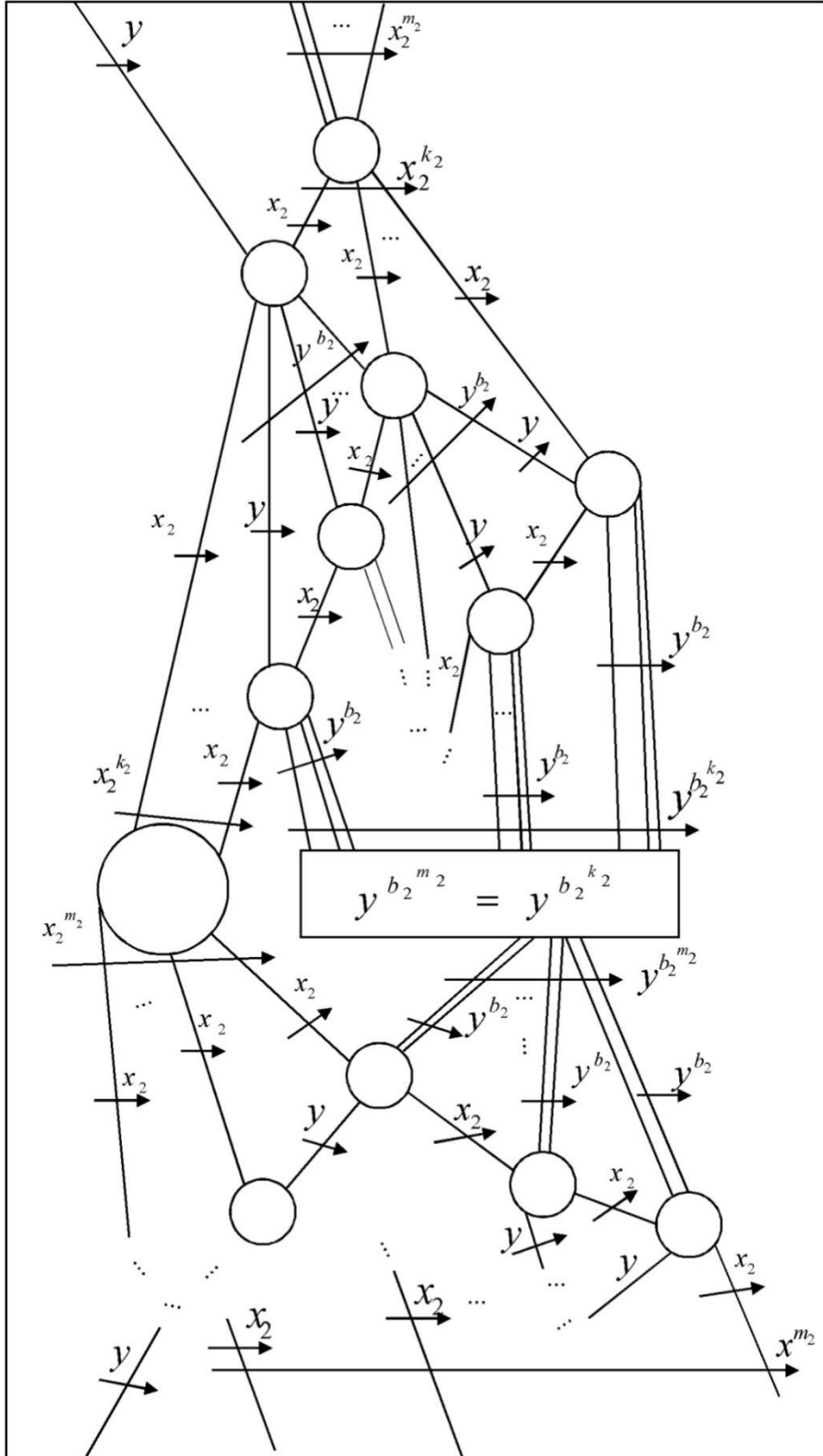
Şekil 5.1: $x_1^{m_1}$ y Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



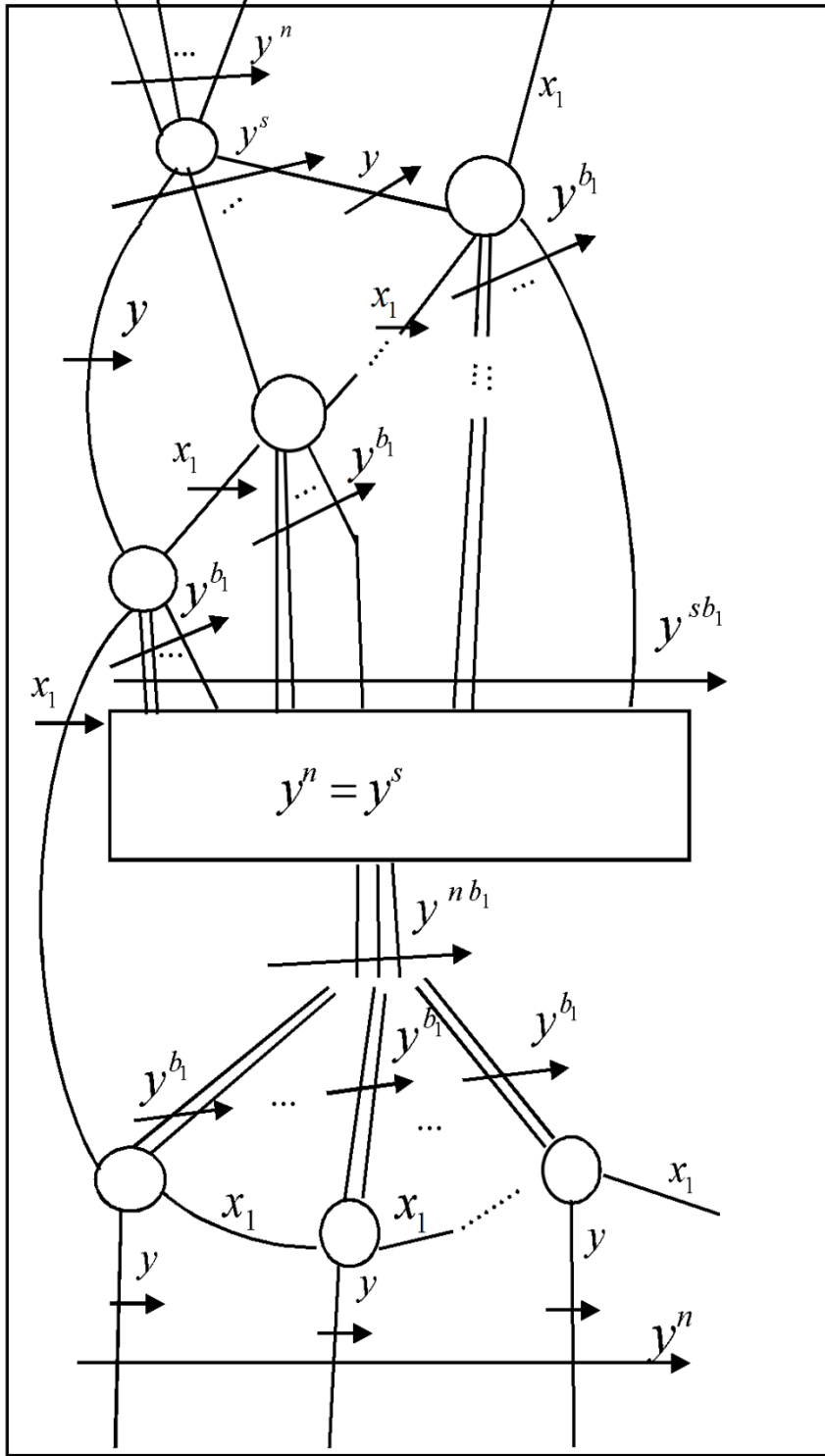
Şekil 5.2: $x_2^{m_2}$ y Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



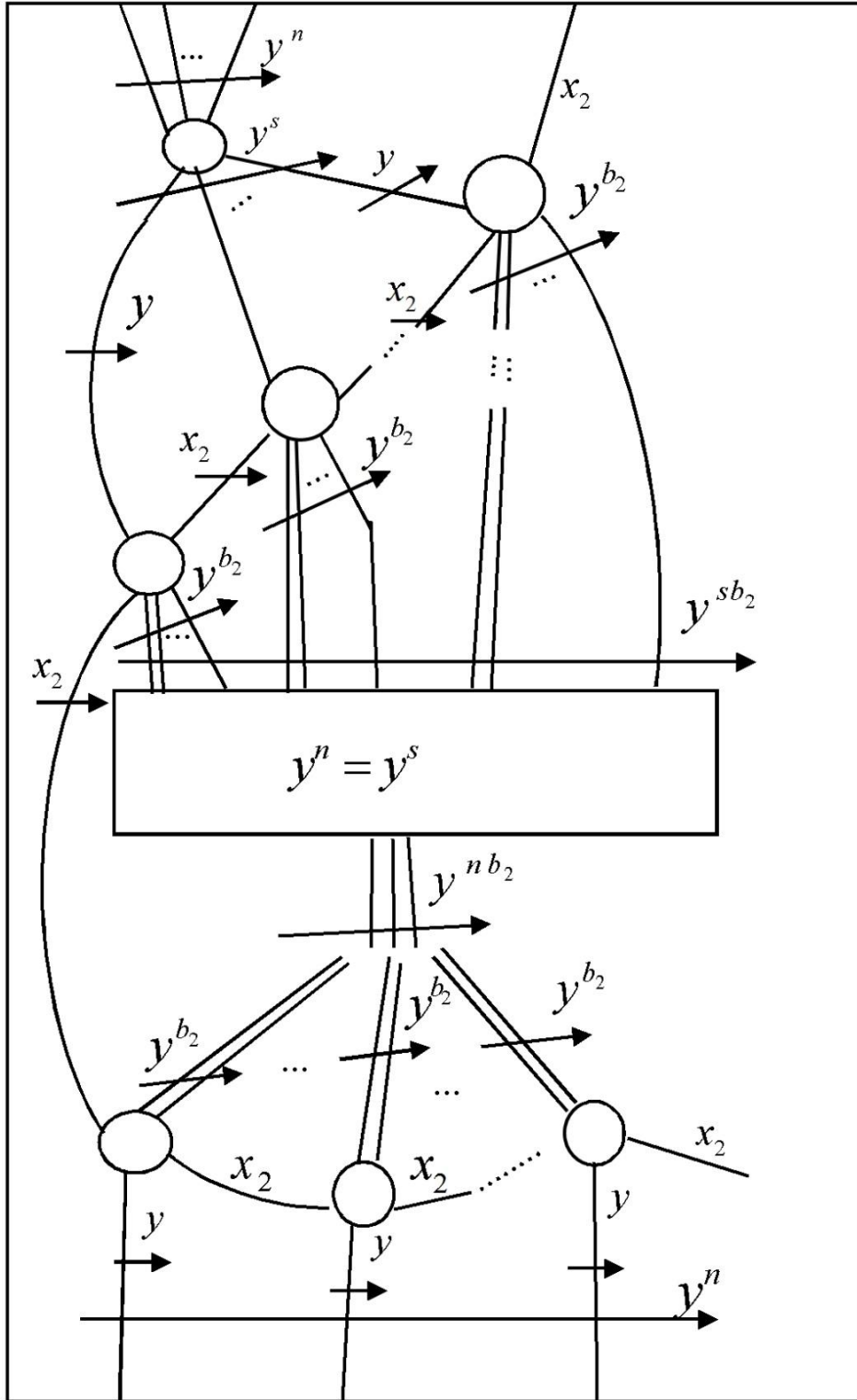
Şekil 5.3: $y x_1^m$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



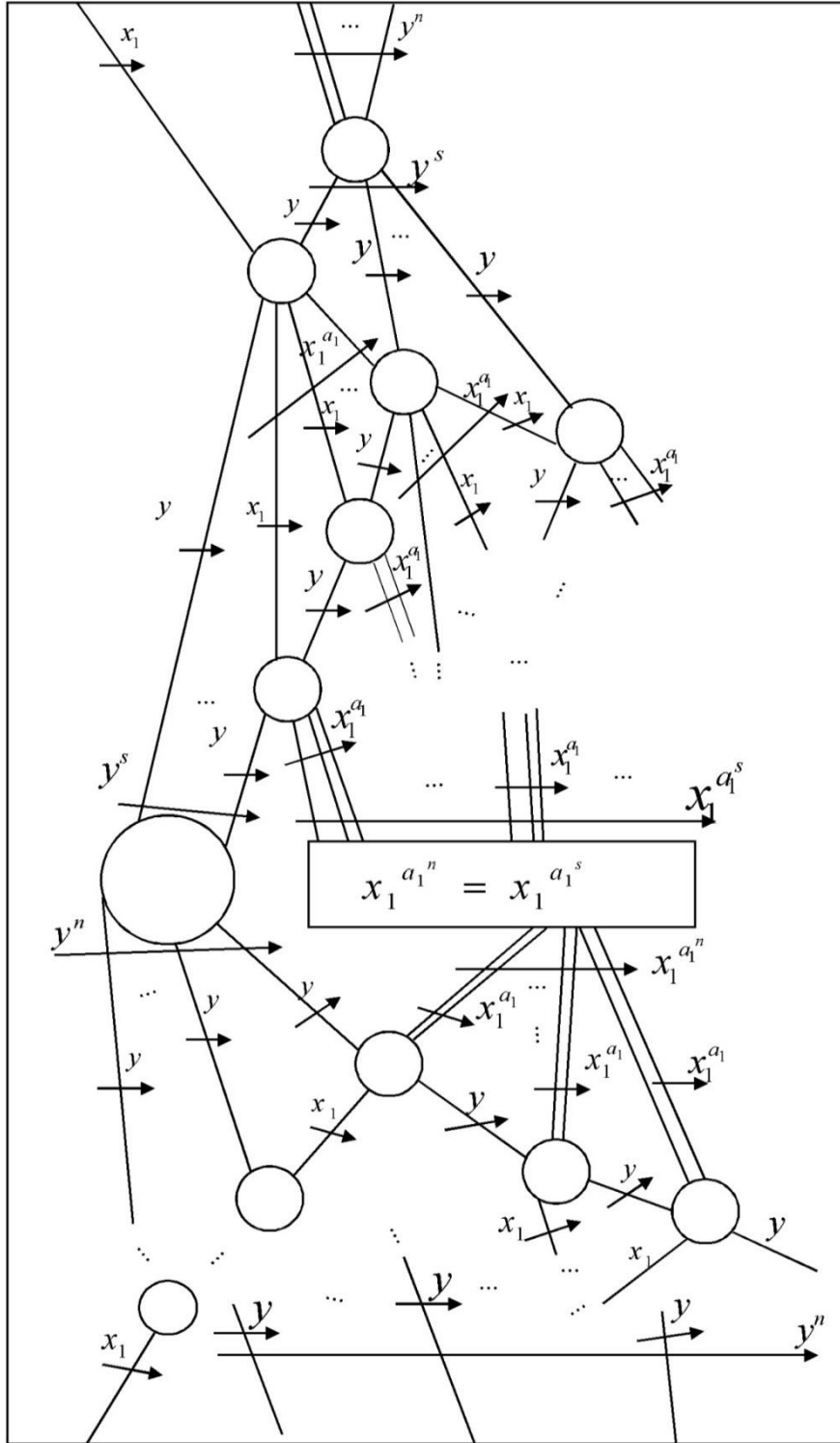
Şekil 5.4: $yx_2^{m_2}$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



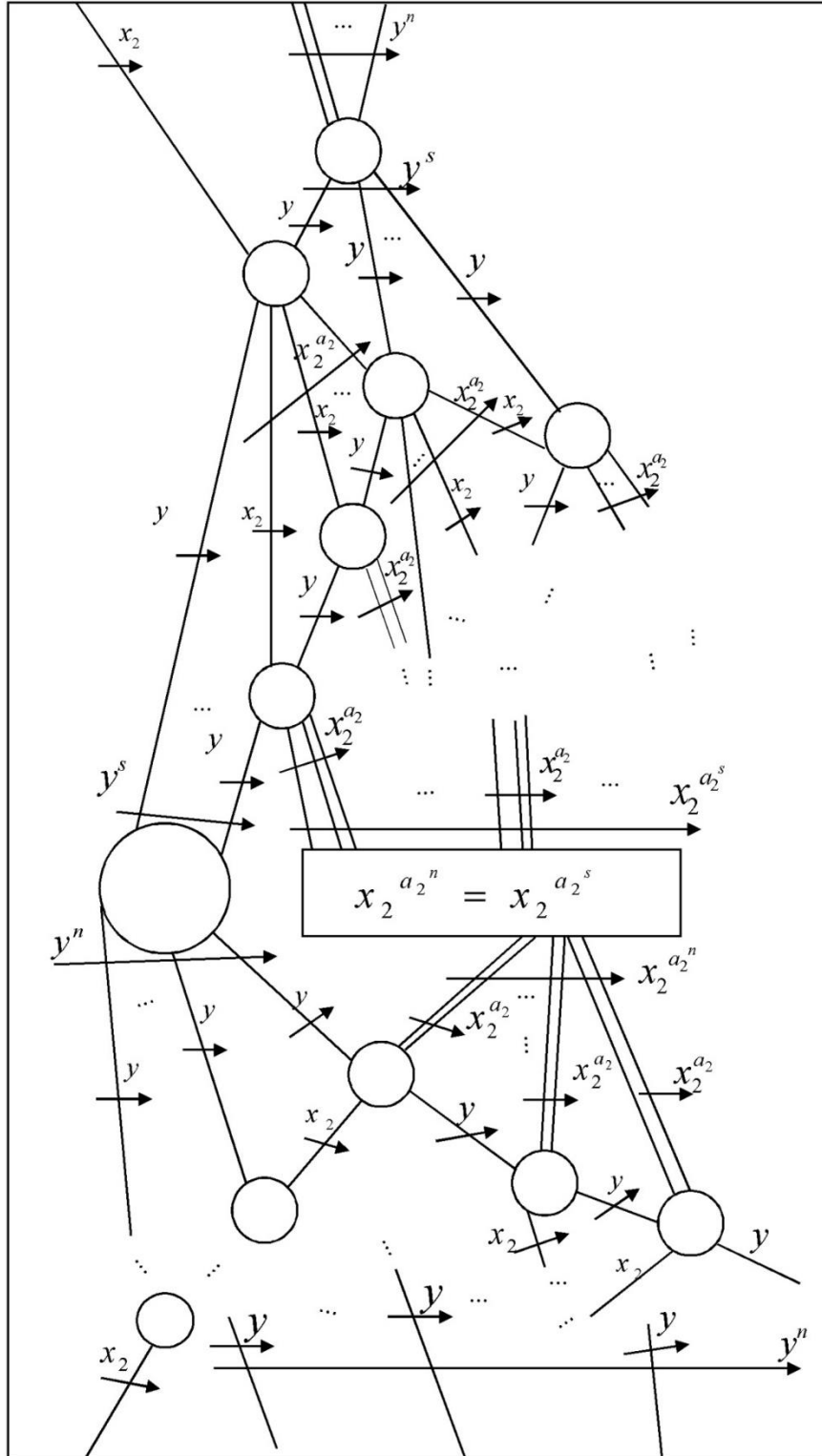
Şekil 5.5: $y^n x_1$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



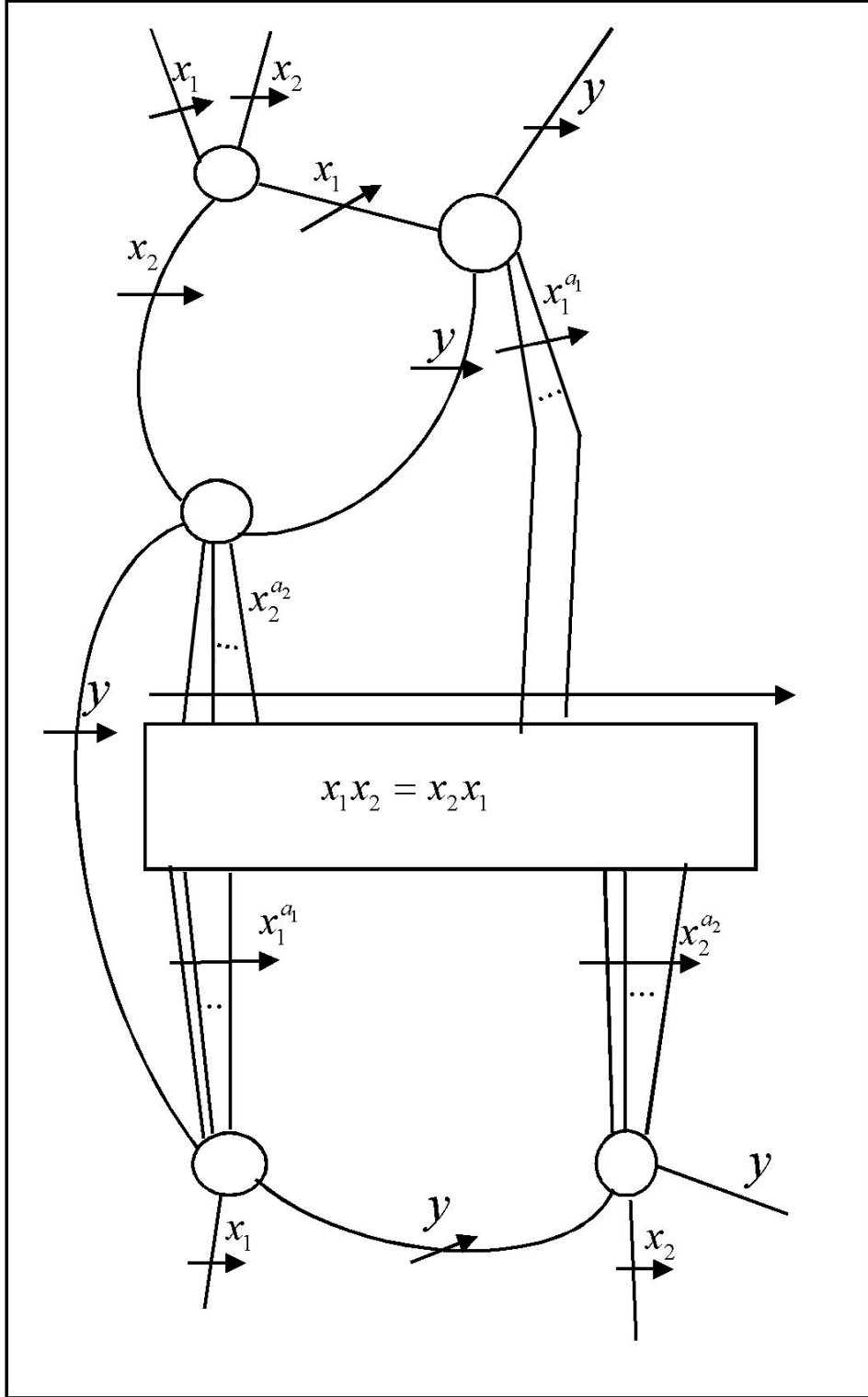
Şekil 5.6: $y^n x_2$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



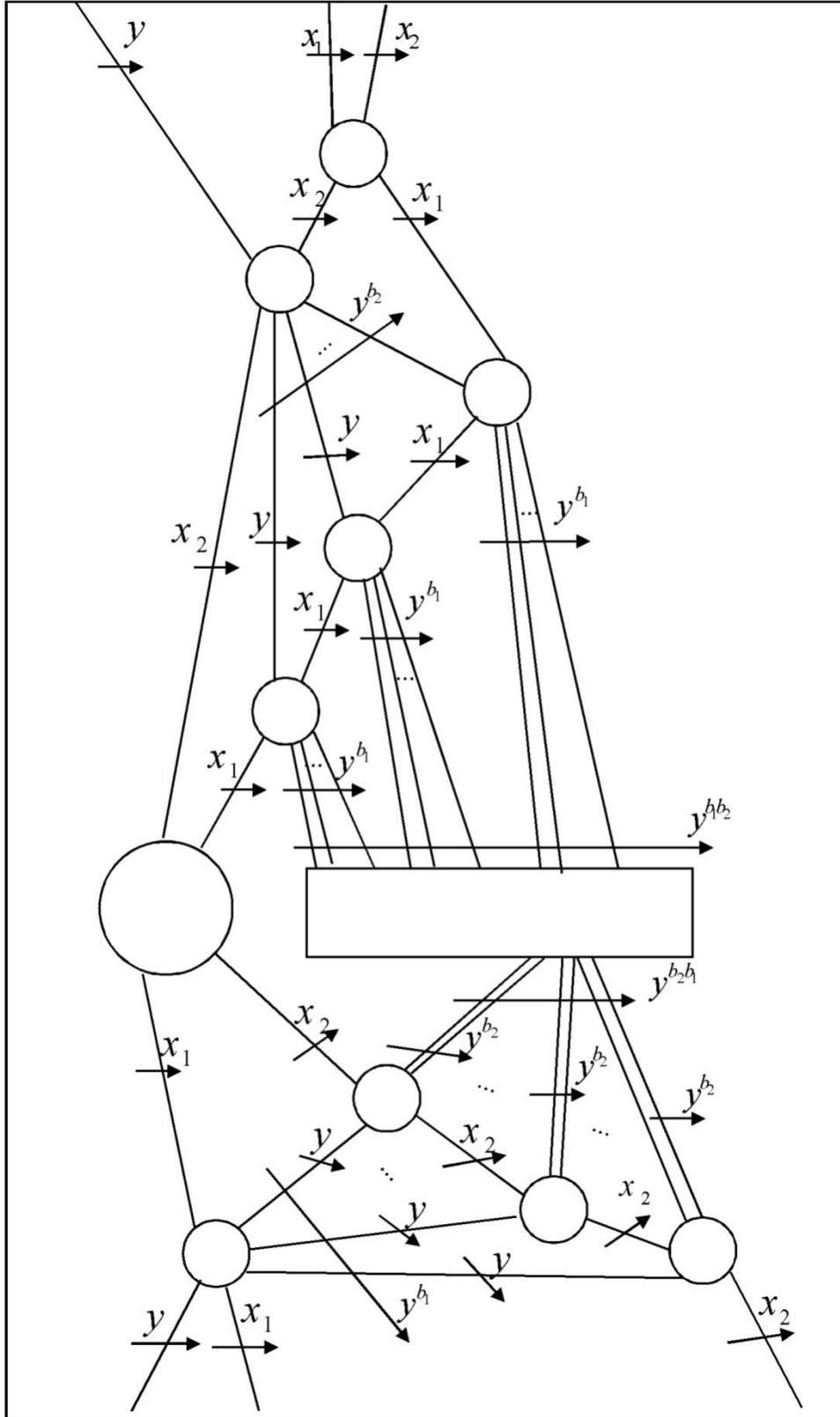
Şekil 5.7: x_1, y^n Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 5.8: $x_2 y^n$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 5.9: x_1x_2y Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 5.10: $y_{x_1 x_2}$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi

Amacımız Şekil 5.1-Şekil 5-10 da verilen bütün üreteç resimleri küresel hale getiren koşulları ortaya koymaktır. Bunun için ilk önce (5.2) de verilen sunuşumuzda yer alan $x_1^{m_1} = x_1^{k_1}$ ve $x_2^{m_2} = x_2^{k_2}$ bağıntılarını düşünelim. Bu bağıntılardan $x_1^{a_1 m_1} = x_1^{a_1 k_1}$ ve $x_2^{a_2 m_2} = x_2^{a_2 k_2}$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $x_1^{m_1} y$ ve $x_2^{m_2} y$ çiftleri ile belirlenen ve Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 de verilen üreteç resimleri küresel hale gelir. Şimdi $y x_1^{m_1}$ ve $y x_2^{m_2}$ çiftleri ile belirlenen Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 de verilen üreteç resimleri ele alalım. Bu resimlerin küresel olması için $y b_1^{k_1} = y b_1^{m_1}$ ve $y b_2^{k_2} = y b_2^{m_2}$ eşitlikleri sağlanmalıdır. Bu eşitliklerin sağlanması için $y^n = y^s$ bağıntısını düşünerek $b_1^{m_1} \equiv b_1^{k_1} \pmod{n-s}$ ve $b_2^{m_2} \equiv b_2^{k_2} \pmod{n-s}$ denklemleri elde edilir. Şimdi Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 yı düşünelim. Elimizde $y^n = y^s$ bağıntısı var olduğundan $y b_1^s = y b_1^n$ ve $y b_2^s = y b_2^n$ sağlanır. Buda bize bu resimlerin küresel olduğunu söyler. Şekil 5.7 ve Şekil 5.8 de verilen ve $x_1 y^n$, $x_2 y^n$ çiftleri ile belirlenen üreteç resimlere baktığımızda ise küresellik için $x_1^{a_1^s} = x_1^{a_1^n}$ ve $x_2^{a_2^s} = x_2^{a_2^n}$ eşitlikleri sağlanmalıdır. O halde $x_1^{m_1} = x_1^{k_1}$, $x_2^{m_2} = x_2^{k_2}$ bağıntılarından hareketle $a_1^n \equiv a_1^s \pmod{m_1 - k_1}$ ve $a_2^n \equiv a_2^s \pmod{m_2 - k_2}$ denklemleri elde edilir. Son olarak 5.9 ve Şekil 5.10 de verilen üreteç resimleri düşündüğümüzde $x_1 x_2 = x_2 x_1$ bağıntısı yardımıyla küreselliğin sağlandığını kolaylıkla görürüz.

Kabul edelim ki

$$b_1^{m_1} \equiv b_1^{k_1} \pmod{n-s}, \quad a_1^n \equiv a_1^s \pmod{m_1 - k_1}$$

$$b_2^{m_2} \equiv b_2^{k_2} \pmod{n-s}, \quad a_2^n \equiv a_2^s \pmod{m_2 - k_2}$$

bağıntıları sağlansın. O zaman Şekil 5.1-Şekil 5.10 da verilen bütün resimlerin küreselliği sağlanmış olur. Buda bize (5.2) de verilen sunuşun Peiffer çarpımı temsil ettiğini söyler. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.3 Rankı İki Olan Serbest Abelyan Monoidlerin Oluşturduğu Peiffer Çarpım

Bu bölümde amacımız rankı iki olan serbest abelyan monoidlerin Peiffer çarpımına ait olan bağıntıları matrisler ve küresel resimler yardımıyla ortaya koymaktır.

A ve K rankı iki olan serbest abelyan monoid olmak üzere sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = [x_1, x_2 : x_1 x_2 = x_2 x_1] \text{ ve } \mathcal{P}_K = [y_1, y_2 : y_1 y_2 = y_2 y_1]$$

sunuşlarına sahip olsunlar. Rankı iki olarak ele aldığımızdan dolayı aşağıda verilen 2×2 tipindeki

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } N_2 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (5.3)$$

matrislerini düşünelim. Monoidler üzerinde çalıştığımızdan kelimelerimiz pozitif kelimelerden oluşmalıdır. O halde burada $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmalıdır. O halde aşağıdaki teoremi sunabiliriz.

5.3.1 Teorem: A ve K monoidleri $\mathcal{P}_A = [x_1, x_2 : x_1 x_2 = x_2 x_1]$ ve $\mathcal{P}_K = [y_1, y_2 : y_1 y_2 = y_2 y_1]$

sunuşlarına sırasıyla sahip olsun. Ayrıca (5.3) de verilen M_1, M_2, N_1 ve N_2 matrisleri için

$M_1 M_2 = M_2 M_1$ ve $N_1 N_2 = N_2 N_1$ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda A ile K nın Peiffer

çarpımının sunuşu, her

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A \triangleright \triangleleft K} = [x_1, x_2, y_1, y_2 : & x_1 x_2 = x_2 x_1, y_1 y_2 = y_2 y_1, y_1 x_1 = x_1 y_1^{a_{11}} y_2^{a_{12}}, y_2 x_1 = x_1 y_1^{a_{21}} y_2^{a_{22}} \\ & y_1 x_2 = x_2 y_1^{b_{11}} y_2^{b_{12}}, y_2 x_2 = x_2 y_1^{b_{21}} y_2^{b_{22}}, x_1 y_1 = y_1 x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} \\ & x_2 y_1 = y_1 x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}}, x_1 y_2 = y_2 x_1^{d_{11}} x_2^{d_{12}}, x_2 y_2 = y_2 x_1^{d_{21}} x_2^{d_{22}}] \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat : A ve K monoidleri $\mathcal{P}_A = [x_1, x_2 : x_1 x_2 = x_2 x_1]$ ve $\mathcal{P}_K = [y_1, y_2 : y_1 y_2 = y_2 y_1]$

sunuşlarına sahip olduğundan (5.1) den hareketle A ile K'nın Peiffer çarpımının sunuşu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A \triangleright \triangleleft K} = [x_1, x_2, y_1, y_2 : & x_1 x_2 = x_2 x_1, y_1 y_2 = y_2 y_1, y_1 x_1 = x_1 y_1^{x_1}, y_1 x_2 = x_2 y_1^{x_2} \\ & y_2 x_1 = x_1 y_2^{x_1}, y_2 x_2 = x_2 y_2^{x_2}, x_1 y_1 = y_1 x_1^{y_1} \\ & x_2 y_1 = y_1 x_2^{y_1}, x_1 y_2 = y_2 x_1^{y_2}, x_2 y_2 = y_2 x_2^{y_2}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} y_1^{x_1} &= y_1^{a_{11}} y_2^{a_{12}}, y_1^{x_2} = y_1^{b_{11}} y_2^{b_{12}}, y_2^{x_1} = y_1^{a_{21}} y_2^{a_{22}}, y_2^{x_2} = y_1^{b_{21}} y_2^{b_{22}}, \\ x_1^{y_1} &= x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}}, x_2^{y_1} = x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}}, x_1^{y_2} = x_1^{d_{11}} x_2^{d_{12}}, x_2^{y_2} = x_1^{d_{21}} x_2^{d_{22}} \end{aligned}$$

hareketlerini düşünelim. Böylece (5.4) de verilen sunuş

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A \triangleright \triangleleft K} = [x_1, x_2, y_1, y_2 : & x_1 x_2 = x_2 x_1, y_1 y_2 = y_2 y_1, y_1 x_1 = x_1 y_1^{a_{11}} y_2^{a_{12}}, y_2 x_1 = x_1 y_1^{a_{21}} y_2^{a_{22}} \\ & y_1 x_2 = x_2 y_1^{b_{11}} y_2^{b_{12}}, y_2 x_2 = x_2 y_1^{b_{21}} y_2^{b_{22}}, x_1 y_1 = y_1 x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} \\ & x_2 y_1 = y_1 x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}}, x_1 y_2 = y_2 x_1^{d_{11}} x_2^{d_{12}}, x_2 y_2 = y_2 x_1^{d_{21}} x_2^{d_{22}}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

haline gelir. Şimdi bütün $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ elemanları için (5.5) de verilen sunuşun $M_1 M_2 = M_2 M_1$ ve $N_1 N_2 = N_2 N_1$ eşitlikleri altında monoid genişlemesi oluşturduğuna bakalım. Bunun için

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_2 x_1, y_1 y_2 = y_2 y_1, y_1 x_1 = x_1 y_1^{a_{11}} y_2^{a_{12}}, y_2 x_1 = x_1 y_1^{a_{21}} y_2^{a_{22}}, y_1 x_2 = x_2 y_1^{b_{11}} y_2^{b_{12}}, \\ y_2 x_2 &= x_2 y_1^{b_{21}} y_2^{b_{22}}, x_1 y_1 = y_1 x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}}, x_2 y_1 = y_1 x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}}, x_1 y_2 = y_2 x_1^{d_{11}} x_2^{d_{12}}, x_2 y_2 = y_2 x_1^{d_{21}} x_2^{d_{22}} \end{aligned}$$

bağıntılarını düşünelim. Bu bağıntılardan;

$y_1 x_1 x_2, y_2 x_1 x_2, x_1 y_1 y_2, x_2 y_1 y_2, x_1 x_2 y_1, x_1 x_2 y_2, y_1 y_2 x_1, y_1 y_2 x_2$ çakışmalarını elde ederiz. Ayrıca $M_1 M_2 = M_2 M_1$ ve $N_1 N_2 = N_2 N_1$ den hareketle

$$\begin{array}{ll}
a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} = d_{11}c_{11} + d_{12}c_{21} \\
a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} = d_{11}c_{12} + d_{12}c_{22} \\
a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21} = d_{21}c_{11} + d_{22}c_{21} \\
a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} = d_{21}c_{12} + d_{22}c_{22}
\end{array}$$

eşitliklerine ulaşırız.

Şimdi $y_1x_1x_2$, $y_2x_1x_2$, $y_1y_2x_1$ ve $y_1y_2x_2$ çakışmalarını düşünelim. Bu çakışmalardan elde

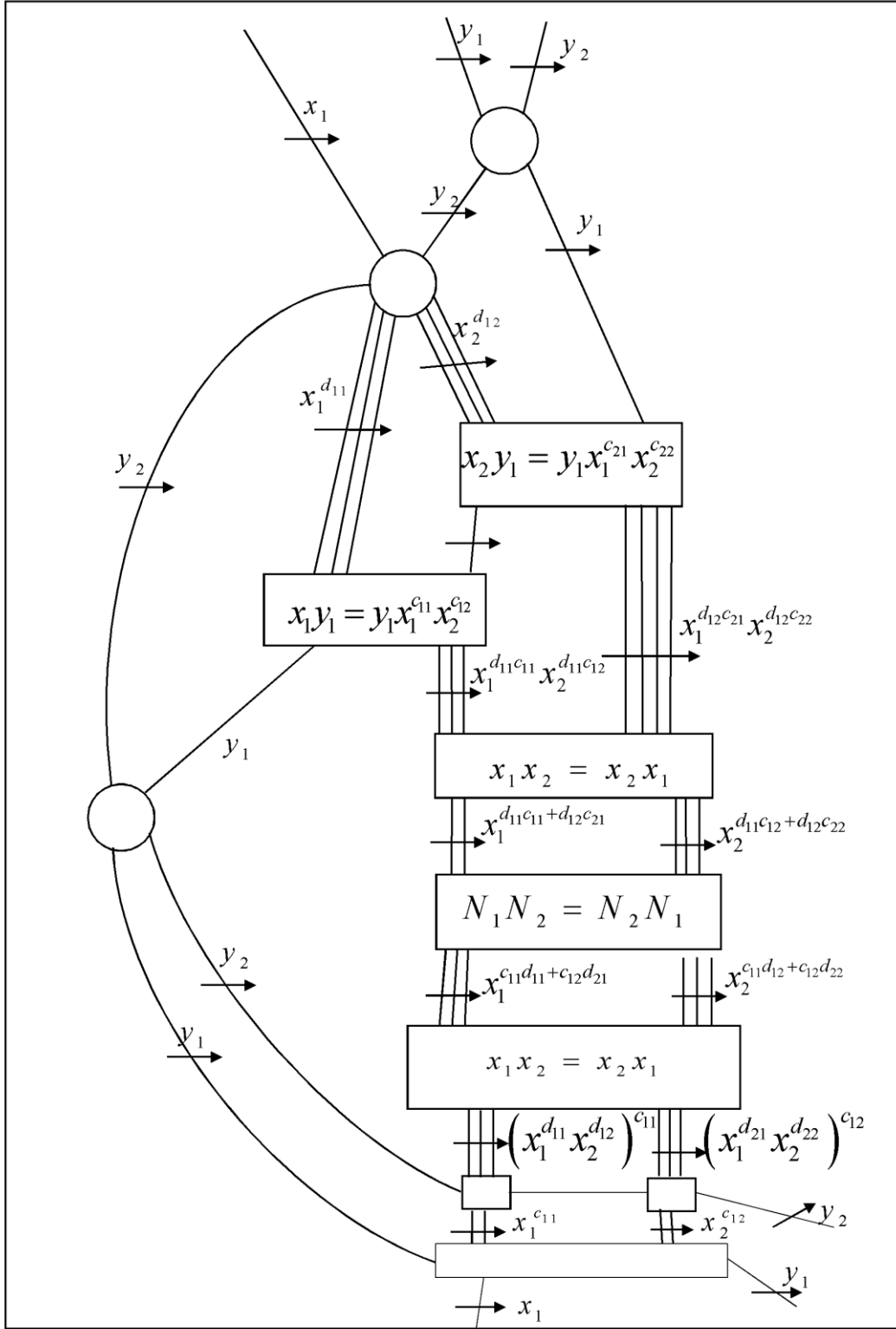
edilen üreteç resimler $a_{11} = \alpha_{11}$, $a_{12} = \alpha_{12}$, $a_{21} = \alpha_{21}$, $a_{22} = \alpha_{22}$ ve $b_{11} = \beta_{11}$, $b_{12} = \beta_{12}$,

$b_{21} = \beta_{21}$, $b_{22} = \beta_{22}$ olarak alınırsa, 4. Bölüm de verilen Şekil 4.1- Şekil 4.4 deki resimler

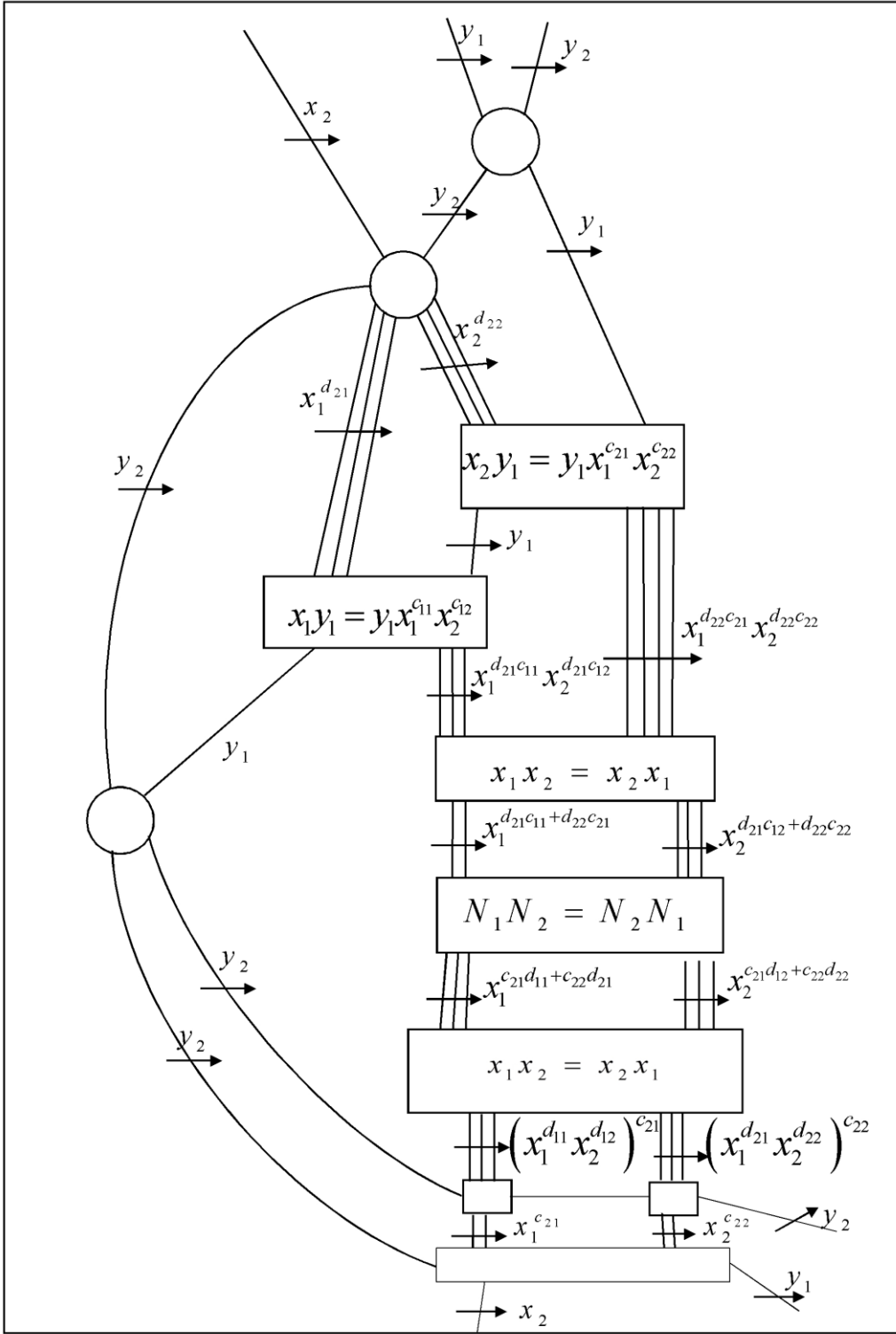
ortaya çıkar.

Şimdi ise $x_1y_1y_2$, $x_2y_1y_2$, $x_1x_2y_1$ ve $x_1x_2y_2$ çakışmalarını düşünelim. Böylece aşağıda

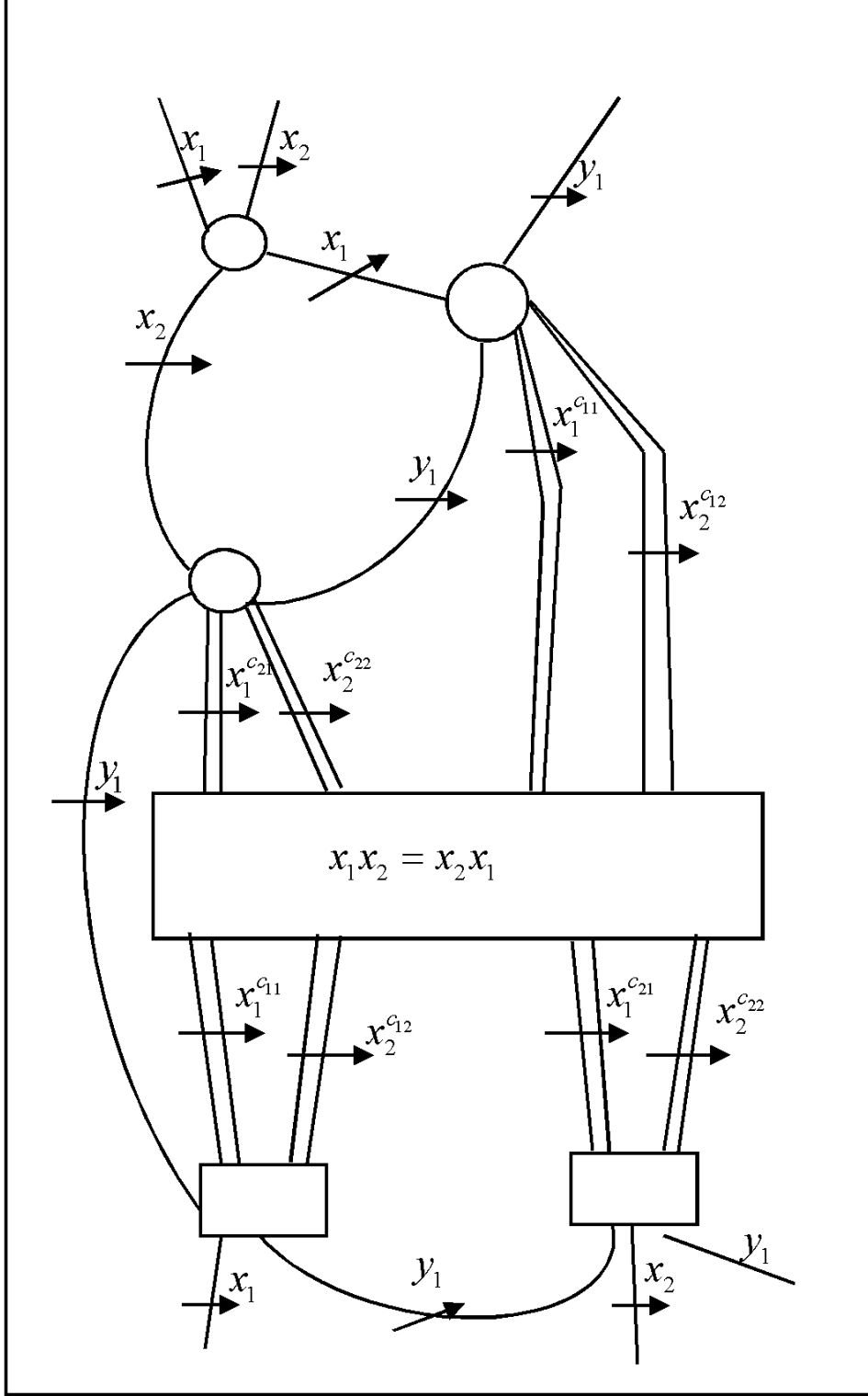
verilen resimleri elde ederiz.



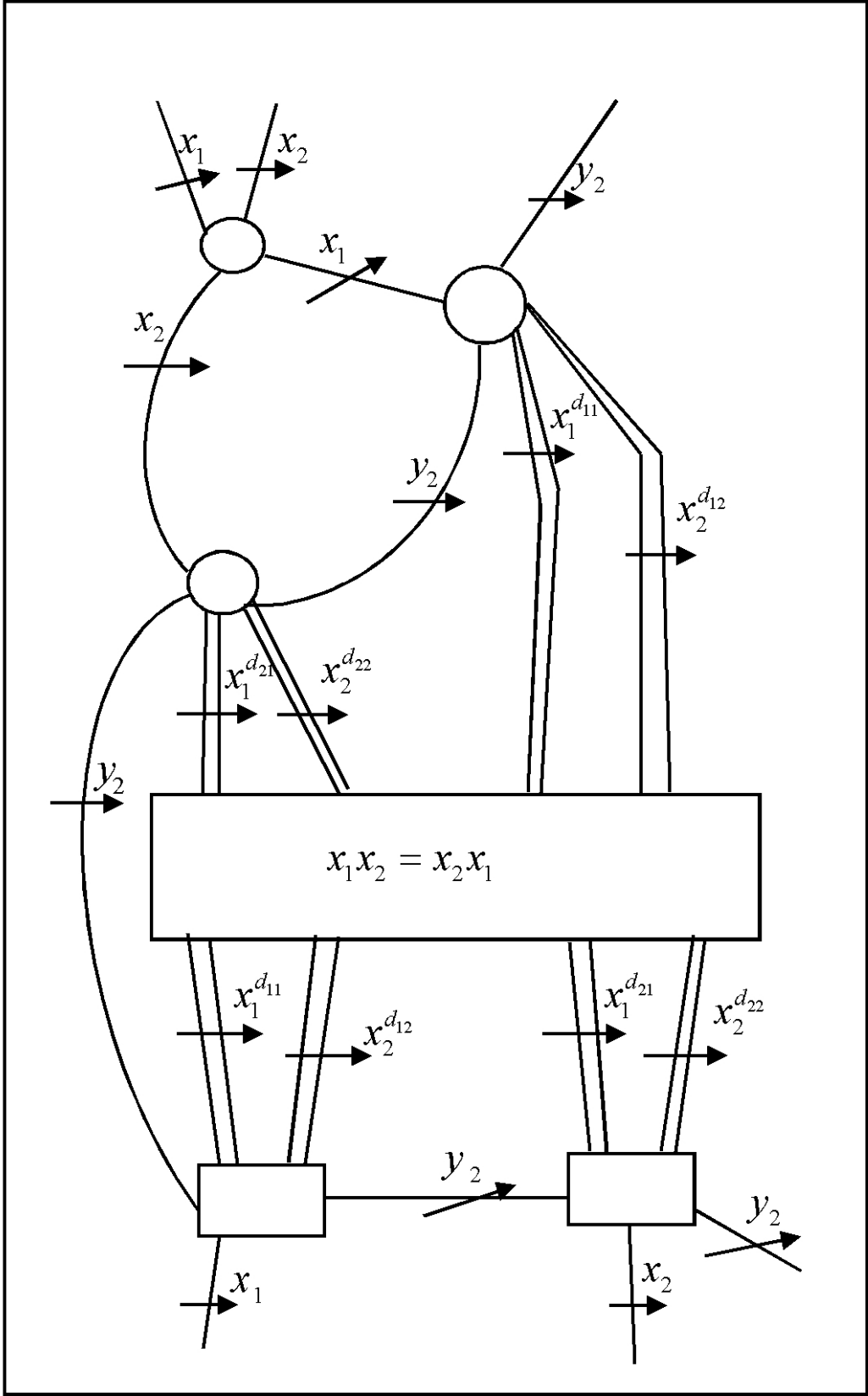
Şekil 5.11: x_1, y_1, y_2 Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 5.12: $x_2 y_1 y_2$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 5.13: x_1, x_2, y_1 Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi



Şekil 5.14: $x_1 x_2 y_2$ Çifti ile Belirlenen Üreteç Resmi

Dikkat edilirse Şekil 5.11, Şekil 5.12, Şekil 5.13 ve Şekil 5.14 de verilen bütün üreteç resimleri küresel resimdir. Dolayısıyla (5.5) de verilen sunuşumuz A ile K nın Peiffer çarpımını sunuşunu temsil eder. Böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇ

Bu tezimizde bizler verilen iki sonlu devirli monoidin direkt çarpım monoidi ve verilen bir sonlu devirli monoidin Peiffer Çarpım oluşturma koşulları ile ilgili çalışmalar yaptık. Ayrıca matrisler ve küresel resimler yardımıyla Peiffer çarpım monoidlerinin küresel olma durumlarını ve bu monoidleri küresel yapan bağıntıları nasıl bulacağımızı ortaya koyan yöntemleri belirledik.

6. KAYNAKLAR

- [1] Pride, S.J., “Identities among the relations of group presentations”, in *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, Trieste 1990, World Scientific Publishing (1991).
- [2] Pride, S.J., “Geometric methods in combinatorial semigroup theory”, *Semigroups, Formal Languages and Groups*, Kluwer Academic Publishers, (1995).
- [3] Pride, S.J., “Low-dimensional homotopy theory for monoids”, *International Journal of Algebra and Computation*, 5,(1995).
- [4] F. Ateş and A.S Çevik, “Minimal but inefficient presentations for semi-direct products of finite cyclic monoids”, *Groups St. Andrews 2005 in St. Andrews*, Cambridge University Press, *L.M.S. Lecture Note Series*, 339,170, (2006).
- [5] Çevik, A.S., “The *Thompson-Cockcroft* property of the semi-direct product of some monoids”, *International Journal of Algebra and Computation*, 13,(2003).
- [6] Çevik, A.S., “Minimal but inefficient presentations of the semi-direct product of some monoids”, *Semigroup Forum*, 66, (2003).
- [7] Çevik, A.S., “Efficiency for Self Semi-Direct Products of the Free Abelian Monoid on Two Generators”, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Vol 35(1), 47-59 2005
- [8] Çevik, A.S., Ates, F., Karpuz, E.G., “The efficiency of the semi-direct products of free abelian monoid with rank n by the infinite cyclic monoid”, *Conference Information: 9th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2011 (ICNAAM 2011)*, SEP 19-25 2011, Halkidiki, GREECE
- [9] Çevik, A.S., Karpuz, E.G., Ates, F., Cangul, I.N., “Finite Derivation Type of Graph Products of Monoids”, *Filomat*, Vol 30, Number 7, 1987-1995, (2016).
- [10] Çevik, A.S., Wazzan, S. A., Ates, F. “Some algebraic structures on the generalization of general products of monoids and semigroups”, *Arabian Journal of Mathematics*, Vol. 9(3), 727-737, (2020).
- [11] Baik, Y.G., Generators of second homotopy module of group Presentations with applications, Ph.D Thesis, *University of Glasgow*, (1992).
- [12] Brown, R. and Huebschmann, J., “Identities among relations”, in *Low Dimensional Topology*, Cambridge University Press, *L.M.S. Lecture Note Series*, 48, (1982).
- [13] Cho, J.R. and Pride, S.J., “Embedding semigroups into groups and asphericity of semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, 3,(1993).

- [14] Kilgour, C.W. and Pride, S.J., “Cockcroft presentations”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 106, (1996).
- [15] Baumslag, G., *Topics in combinatorial group theory*, Lectures in Mathematics, Birkhauser Verlag, (1993).
- [16] Lyndon, R.C. and Schupp P.E., “*Combinatorial group theory, Classic in Mathematics*”, Reprint of the 1997 Edition, Springer-Verlag, (1977).
- [17] Johnson, D.L., “*Presentation of groups*”, London Mathematic Society Student Series 15, Cambridge University Press, (1990).
- [18] Gould, V., Semigroup Theory Lecture Notes, <https://www-users.york.ac.uk/~varg1/SemigroupTheory.pdf>
- [19] Howie, J.M. and Ruskuc, N., “Constructions and Presentations for Monoids”, *Communications In Algebra*, 22 (15), 6209-6224, (1994).
- [20] Ateş, F., “Some New Monoid and Group Constructions Under Semidirect Products” *Ars Combinatoria*, 91, 203-218, (2009).
- [21] Emin, A., Ateş, F., İkkardeş, S. and Cangül, İ. N., “A New Monoid Construction Under Crossed Products”, *Journal of Inequalities and Applications*, 244, 1-6, (2013).
- [22] Ateş, F., “Grup ve Monoid Yapılarına Geometrik Yaklaşımlar”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2007).
- [23] Sarı, K., “Genişleme Probleminin Bazı Monoid Sunuşları Üzerinde Geometrik Yönden İncelenmesi”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2019).
- [24] Bogley, W.A., Gilbert, N.D., “The homology of Peiffer products of groups”, *New York Journal of Mathematics*, 6, 55-71, (2000).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Duygu Aslıhan İLGÖR

Doğum tarihi ve yeri : 01.01.1990 / İvrindi

e-posta : duyguaslihan@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2022
Lisans	Abant İzzet Baysal Üniversitesi/İ.Ö Mat. Öğretmenliği	2011
Lise	Sırrı Yırcalı Anadolu Lisesi	2007