T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTI SAYILARI

BEYZA GERGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Doç. Dr. Aslı GÜÇLÜKAN İLHAN

BALIKESİR, HAZİRAN – 2022

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Sayısal Yarıgrup Halkalarının Betti Sayıları**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Beyza Gergin

ÖZET

SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTI SAYILARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BEYZA GERGİN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ PINAR METE)
BALIKESİR, HAZİRAN-2022

R, k cismi üzerinde polinom halkası ve M bir R-modül olsun. M modülünün Betti sayısı, R halkası üzerindeki sonlu üretilmiş derecelendirilmiş modüllerin çalışılmasında önemli değişmezlerden birisidir. Betti sayıları, üreteçler ve bunların arasındaki bağıntılar ile tanımlanırlar. Tanımının basitliğine rağmen çok sayıda bilgiyi içerirler. Matematiğin pek çok alanında karşımıza çıkan sayısal yarıgruplar, değişmeli monoidlerdir ve izomorfizmalarla $(\mathbb{N},+)$ monoidinin tüm alt monoidlerini sınıflandırırlar. Bu tez sayısal yarıgrup halkalarının Betti sayıları ile ilgili bazı sonuçların bir derlemesidir. Sayısal yarıgruplar ve serbest çözülümlere kısa bir giriş yaptıktan sonra, modüllerin serbest çözülümlerini hesaplamak için Gröbner Baz Teorisini kullanan Schreyer Algoritmasını çalışıyoruz. Derecelendirilmiş Betti sayılarını ve Betti tablolarını detaylı örnekler ile açıklıyoruz. Ardından, düşük gömme boyutundaki sayısal yarıgruplar hakkında bilinen bazı sonuçları veriyoruz.

ANAHTAR KELİMELER: Sayısal yarıgruplar, serbest çözülümler, Betti sayıları

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 45

ABSTRACT

BETTI NUMBERS OF NUMERICAL SEMIGROUPS RINGS
MSC THESIS
BEYZA GERGİN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS
(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, JUNE - 2022

Let R be a polynomial ring over a field k and M be an R-module. The Betti numbers of M, comes out as one of the most important invariants in the study of finitely generated graded modules over R. The Betti numbers are defined in terms of generators and relations between them. In spite of its simple definition, Betti numbers contain a great deal of information. Numerical semigroups appearing in various branches of mathematics are commutative monoids and classify all submonoids of $(\mathbb{N},+)$ up to isomorphism. This thesis a survey of some results about Betti numbers of numerical semigroup rings. After giving a short introduction to numerical semigroups and free resolutions, we study the Schreyer Algorithm which uses the theory of Gröbner bases to compute free resolutions of modules. We explain graded Betti numbers and Betti tables with detailed examples. Then, we give some results about the numerical semigroups in small embedding dimensions.

KEYWORDS: Numerical semigroups, free resolutions, Betti numbers

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 45

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
< A >	:	A tarafından üretilen yarıgrup
obeb	:	Ortak bölenlerin en büyüğü
m(S)	:	S yarıgrubunun katlılığı
e(S)	:	S yarıgrubunun boyutu
F(S)	:	S yarıgrubunun Frobenius sayısı
G(S)	:	S yarıgrubunun boşluklar kümesi
g(S)	:	S yarıgrubunun cinsi
$[\boldsymbol{x}]_\sigma$	:	x' in σ modülüne göre denklik sınıfı
Çek(f)	:	f dönüşümünün çekirdeği
Gör(f)	:	f dönüşümünün görüntü kümesi
k$[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p]$	:	k cismi üzerindeki $x_1, \dots, x_p$ değişkenli polinom halkası
$\boldsymbol{I_S}$	:	S' nin tanımlayan ideali
der$(\boldsymbol{x_i})$	:	x_i polinomunun derecesi
R/I	:	R/I bölüm halkası
okek	:	Ortak katların en küçüğü
LM(f)	:	f' nin en büyük dereceli tek terimlisi
LT(f)	:	f' nin en büyük dereceli terimi
$\bar{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{G}}$	:	f' nin G ile bölümünden kalan
$\boldsymbol{b_i^R(M)}$	:	M modülünün Betti sayısı
$\boldsymbol{pb_R(M)}$	:	M modülünün projektif boyutu
$\boldsymbol{P_M{}^R(t)}$	:	M'nin R üzerindeki Poincaré serisi
$\boldsymbol{b_{i,p}^R(M)}$	:	M' nin derecelendirilmiş Betti sayısı
$\boldsymbol{P_M^R(t,z)}$	:	M' nin derecelendirilmiş Poincaré serisi
$\boldsymbol{P_{\mathcal{G}}(t)}$	:	$\mathcal{G}$ çözülümünün Poincaré serisi

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, sorularıma daima sabırla cevap verip bana rehberlik eden saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE' ye teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan ve çalışmalarımı her zaman gönülden destekleyen aileme teşekkür ederim.

Balıkesir, 2022 **Beyza Gergin**

1. GİRİŞ

Bir S sayısal yarıgrubu, doğal sayılar kümesinin $obeb(n_1, ..., n_p) = 1$ ve $n_1 < n_2 < ... < n_p$ ile üretilen bir toplamsal yarıgrubudur. Sayısal yarıgruplar, tekillik teorisinin çalışılmasından sayılar ve kodlama teorisine kadar matematiğin birçok alanında ortaya çıkar. Sayısal yarıgruplar ile ilgili [1] ilk kaynak olarak verilebilir.

$k[t]$, k cismi üzerinde t değişkenli polinom halkası olmak üzere

$$k[S] = k[t^n \ : n \ \in S] \subseteq k[t]$$

k-cebirine, S sayısal yarıgrubunun yarıgrup halkası denir.

$$k[x_1, ..., x_p] \to k[S]$$
$$x_i \to t^{n_i}, i = 1, ..., p$$

k-cebiri homomorfizmasını düşünelim. Bu durumda

$$k[S] \cong k[x_1, ..., x_p]/I_S$$

dir. Burada, I_S idealine, S' nin tanımlayan ideali denir. I_S ideali ile ilgili bilinen ilk sonuç Herzog' un doktora tezindedir [2].

Bir standart k-cebirinin minimal serbest çözülümünü tam olarak bulmak, değişmeli cebirin temel sorularından birisidir. Serbest çözülümlerdeki diferansiyelin bir tanımını elde etmek genellikle oldukça zor olduğundan, Betti sayıları gibi çözünürlüğün sayısal değişmezleri hakkında bazı bilgiler elde edebiliriz. Bir M R-modülünün i. Betti sayısı, $\beta_i(M)$,

$$0 \to R^{\beta_{k-1}} \to \cdots \to R^{\beta_1} \to R^{\beta_0}$$

minimal serbest çözülümündeki, serbest modüllerin rankıdır. Yine, M' nin Betti dizisi, $\beta(M)$,

$$(\beta_0(M), \beta_1(M), ..., \beta_k(M))$$

dizisidir. Stamate [3], sayısal yarıgrup halkalarının Betti sayıları hakkında geniş bir araştırma yapmıştır ve sayısal yarıgrupların Betti sayıları üzerine birçok açık problem vermiştir.

Tezin 2. bölümünde, monoid ve sayısal yarıgrup kavramlarının tanımlarına, bu kavramlar arasındaki ilişkilere, benzerlik ve farklara değinilmiş, yarıgrup halkaları ile ilgili temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Devamında derecelendirilmiş cebir, modül ve serbest modül kavramlarının tanımları verilip örneklendirilmiştir.

Tezin 3. bölümünde, sizigi modül kavramı tanımlanarak sizigi modülün bir serbest çözülümdeki yeri önce homomorfizmalar yardımıyla serbest çözülüm bularak daha sonra Schreyer Algoritması ile daha formal şekilde çalışılmıştır.

Tezin 4. bölümünde, bir serbest çözülüm verildiğinde, Betti sayısı, projektif boyut, Poincaré serisi gibi sayısal değişmezlerin nasıl bulunacağı örneklerle gösterilmiştir. Daha sonra derecelendirilmiş Betti sayılarından bahsedilip Betti diyagramı dediğimiz tabloların formu verilmiştir. Son olarak, küçük gömme boyutlarında sayısal yarıgrupların Betti sayıları ile ilgili bazı bilinen sonuçlardan söz edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bir sayısal yarıgrubun bir değişmeli monoid olarak düşünülerek temsil edilme fikri çalışılmış, yarıgrup halkası, derecelendirilmiş cebir ve monoid kavramlarının tanımlarına ve örneklerine yer verilmiştir.

2.1 Monoidler ve Homomorfizmalar

2.1.1 Tanım. $S \neq \emptyset$ ve "$+$", S üzerinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem olmak üzere $(S, +)$ ikilisine bir yarıgrup denir.
Bir S yarıgrubunun, T alt yarıgrubu S üzerindeki işleme göre kapalı olan bir alt kümesidir.

2.1.2 Not. Bir S yarıgrubunun alt yarıgruplarının kesişimi yine S' nin bir alt yarıgrubudur.

2.1.3 Tanım. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subset S$ olsun. S yarıgrubunun A kümesini içeren en küçük alt yarıgrubu S yarıgrubunun A kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimidir. Bu yarıgruba A tarafından üretilen yarıgrup denir ve $< A >$ ile gösterilir.
Bir başka deyişle,

$$< A >= \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ a_1, ..., a_n \in A\}$$

$S =< A >$ ise, S yarıgrubu, A tarafından üretilmiştir denir. Bu durumda A, S' nin üreteçlerinin bir sistemidir. Eğer A alt yarıgrubu sonlu tane elemana sahipse, S sonlu üreteçlidir denir.

2.1.4 Tanım. M bir yarıgrup olsun. Her a $\in M$ için,

$$a + 0 = 0 + a = a$$

olacak şekilde bir $0 \in M$ birim elemanı var ise M yarıgrubuna monoid denir.
Eğer M'nin N alt kümesi, M monoidinin bir alt yarıgrubu ve $0 \in N$ ise N' ye M' nin bir alt monoidi denir.

2.1.5 Örnek. M bir monoid ise, $\{0\}$ kümesi, M' nin bir alt monoididir. Buna M' nin aşikar alt monoidi denir.

Yarıgruplarda olduğu gibi bir monoidin, alt monoidlerinin kesişimi de kendisinin bir alt monoidi olur.

Bir M monoidi ve M' nin bir A alt kümesi verilsin. A'yı içeren en küçük alt monoidi

$$< A >= \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}\ ve\ a_1, ..., a_n \in A\}$$

kümesine , M 'nin A tarafından üretilen alt monoidi denir.

$< A >= M$ ise, A' ya M' nin üreteçlerinin bir sistemi ve M, A tarafından üretilmiştir denir. Buna göre, bir M monoidinin üreteçlerinin bir sistemi sonlu sayıda elemandan oluşuyorsa M' ye sonlu üreteçli monoid denir.

2.1.6 Tanım. X ve Y yarıgrupları verilsin. $f : X \to Y$ dönüşümü için, her $a, b \in X$ iken

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

ise, f dönüşümüne bir yarıgrup homomorfizması denir.

f homomorfizması, birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, birebir ve örten ise izomorfizma adını alır. f^{-1}, f homomorfizmasının tersi olmak üzere, f bir izomorfizma ise, f^{-1} de bir izomorfizmadır. X ve Y yarıgrupları arasında bir izomorfizma var ise X ve Y izomorfiktir denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

2.1.7 Tanım. X ve Y monoid olsunlar. $f : X \to Y$ dönüşümü bir yarıgrup homomorfizması ve $f(0) = 0$ ise, f dönüşümüne bir monoid homomorfizması denir.

Monoidlerde de, monomorfizma, epimorfizma ve izomorfizma kavramları yarıgruplarda olduğu gibi tanımlanır.

2.1.8 Uyarı. Doğal sayılar kümesinde "+" işlemini alalım. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için, $x + y \in \mathbb{N}$ olduğundan $(\mathbb{N}, +)$ kapalıdır. Her $x, y, z \in \mathbb{N}$ için,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

olduğundan $(\mathbb{N}, +)$ birleşmelidir. $0 \in \mathbb{N}$ dir. Böylece $(\mathbb{N}, +)$ bir monoiddir.

2.2 Sayısal Yarıgruplar

Sayısal yarıgruplar, $\mathbb{N}$' nin alt monoidlerini sınıflandırırlar.

2.2.1 Tanım. $(\mathbb{N}, +)$ monoidinin, sıfırı içeren, toplamaya göre kapalı ve $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu olan S alt monoidine bir sayısal yarıgrup denir.

2.2.2 Yardımcı Teorem. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$< A > \text{ sayısal yarıgruptur } \iff obeb(A) = 1 \text{ dir.}$$

İspat: [1].

2.2.3 Örnek. $S =< 7, 11, 19 >= \{7x_1 + 11x_2 + 19x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}\}$ kümesinin bir sayısal yarıgrup olduğunu görelim.
$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \in \mathbb{N}$ dir. $0 = 7.0 + 11.0 + 19.0$ olarak yazılabilir. O halde $0 \in S$ dir.
$x, y \in S$ olsun.

$$x = 7x_1 + 11x_2 + 19x_3$$
$$y = 7y_1 + 11y_2 + 19y_3$$

olacak şekilde $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\begin{aligned} x + y &= (7x_1 + 11x_2 + 19x_3) + (7y_1 + 11y_2 + 19y_3) \\ &= 7x_1 + 7y_1 + 11x_2 + 11y_2 + 19x_3 + 19y_3 \\ &= 7(x_1 + y_1) + 11(x_2 + y_2) + 19(x_3 + y_3) \end{aligned}$$

$(x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3) \in \mathbb{N}$ olduğundan $x + y \in S$ dir.
$S = \{0, 7, 11, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, ...\}$ olarak listelendiğinden,

$$\mathbb{N} \backslash S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 23, 24, 27, 31, 34\}$$

kümesi olur. Bu sonlu bir kümedir. Böylece 2.2.1 Tanım' dan S bir sayısal yarıgruptur.

2.2.4 Önerme. M, $\mathbb{N}$' nin $\{0\} \neq M$ olan alt monoidi ise, M bir sayısal yarıgruba izomorfiktir.

İspat: [1].

2.2.4 Önerme' den, M monoidinin bir tek sonlu minimal üreteç sistemine sahip olduğu söylenebilir.

2.2.5 Tanım. $\{n_1 < ... < n_p\}$, S sayısal yarıgrubunun üreteçlerinin minimal sistemi olsun. n_1 sayısına S sayısal yarıgrubunun katlılığı denir ve $m(S)$ olarak gösterilir.

2.2.6 Tanım. S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sisteminin eleman sayısı, S' nin gömme boyutu olarak adlandırılır ve $e(S)$ ile gösterilir.

2.2.7 Not. S sayısal yarıgrubunda, $e(S) \leq m(S)$ dir [1].

2.2.8 Tanım. S sayısal yarıgrubunda olmayan en büyük tam sayıya S' nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir.

2.2.9 Tanım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x + n \in S$ olacak şekildeki en küçük x tam sayısına S' nin kondüktörü denir.

2.2.10 Not. $F(S)$=(S' nin kondüktörü) -1 dir.

2.2.11 Tanım. $G = \mathbb{N} \backslash S$ kümesine S' nin boşluklar kümesi denir. G kümesinin eleman sayısı olarak tanımlanan $g(S)$' ye S' nin cinsi denir. $g(S)$ bazen S' nin tekillik derecesi olarak da adlandırılır.

2.2.12 Örnek. $S =< 7, 11, 19 >= \{7x_1 + 11x_2 + 19x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}\}$ sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesini, Frobenius sayısını ve cinsini bulalım. S sayısal yarıgrubunu
$S = \{0, 7, 11, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, ...\}$ olarak listelersek,

$$\mathbb{N} \backslash S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 23, 24, 27, 31, 34\} = G(S)$$

$g(S) = |G(S)| = 20$
$F(S) = 34$
olarak bulunur.

2.3 Monoidler ve Temsiller

Bir monoid, monoid kategorisinde bir serbest obje ile temsil edilebilir. Sayısal bir yarıgrup, değişmeli bir monoid olarak düşünülebilir. Bu bölümde, monoidler için 1.izomorfizma teoremine yer verilecektir. Kaynak olarak [1] ve [4] kullanılmıştır.

2.3.1 Tanım. $X \neq \emptyset$ olsun. $X \times X$' in σ alt kümesi, X kümesi üzerinde bir bağıntıdır. Eğer $(x, y) \in \sigma$ ise, $x\sigma y$ yazılır ve x, y ile σ_bağıntılıdır denir. σ, yansıyan, simetrik ve geçişmeli ise, σ bir denklik bağıntısıdır. Her $x \in X$ için x' in σ bağıntısına göre denklik sınıfı, $[x]_\sigma$, X kümesinin, σ' ya göre x ile bağıntılı olan elemanlarını içerir. $\frac{X}{\sigma}$ kümesi, $[x]_\sigma$ elemanlarından oluşur ve X' in parçalanışı olan bu kümeye X' in σ bağıntısı ile bölüm kümesi denir.

2.3.2 Tanım. M monoidi üzerinde σ denklik bağıntısını düşünelim. M'nin x, y, z elemanları için,

$$x\sigma y \implies (x + z)\sigma(y + z)$$

ise σ bağıntısına bir kongrüans adı verilir.

2.3.3 Yardımcı Teorem. [1] σ, M monoidinin üzerinde bir kongrüans olsun.
$[x]_\sigma, [y]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ için,

$$[x]_\sigma + [y]_\sigma = [x + y]_\sigma$$

ile tanımlı toplama işlemi ile $\frac{M}{\sigma}$ bir monoiddir.

İspat: $+$ işleminin iyi tanımlı olduğunu görelim. Bunu görmek için,
$x\sigma y$ ve $z\sigma t$ iken

$$(x + z)\sigma(y + t)$$

olduğunu görmeliyiz.

$x\sigma y$ ve $z\sigma t$ olsun.

$$x\sigma y \implies (x+z)\sigma(y+z)$$
$$z\sigma t \implies (y+z)\sigma(y+t)$$

σ denklik bağıntısı olduğundan geçişme özelliğinden dolayı $(x+z)\sigma(y+t)$ elde edilir.
Her $[x]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ için,

$$[x]_\sigma + [e]_\sigma = [e]_\sigma + [x]_\sigma = [x]_\sigma$$

olacak şekilde $[e]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ bulmalıyız.

$$\begin{aligned} [x]_\sigma + [e]_\sigma &= [x+e]_\sigma \\ &= [x]_\sigma \end{aligned}$$

olduğundan $(x+e)\sigma x$ bulunur. M bir monoid olduğundan $0 \in M$' dir.

$$\begin{aligned} &\implies (x+e)\sigma(x+0) \\ &\implies e\sigma 0 \end{aligned}$$

Böylece $[e]_\sigma = [0]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ elde edilir.
Şimdi $+$ işleminin $\frac{M}{\sigma}$' da birleşmeli olduğunu görelim. Her $[x]_\sigma, [y]_\sigma, [z]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ için,

$$([x]_\sigma + [y]_\sigma) + [z]_\sigma = ([x+y]_\sigma) + [z]_\sigma = [(x+y)+z]_\sigma$$

$x, y, z \in M$ ve M bir monoid olduğundan,

$$[x+(y+z)]_\sigma = [x]_\sigma + ([y+z]_\sigma) = [x]_\sigma + ([y]_\sigma + [z]_\sigma)$$

Buradan, $(\frac{M}{\sigma}, +)$ bir bölüm monoididir.

2.3.4 Tanım. X ve Y birer monoid olsun. $f : X \to Y$ dönüşümü, Her $x, y \in X$ için,
i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
ii) $f(0) = 0$
koşullarını sağlıyorsa, f dönüşümüne bir monoid homomorfizması denir.

2.3.5 Tanım. $f : X \to Y$ bir monoid homomorfizması olsun. f' nin çekirdek kongrüansı,

$$\text{Çek}(f) = \{(x,y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$$

olarak tanımlanır.

2.3.6 Not. Çek(f), X monoidi üzerinde bir kongrüanstır:
$(x, y) \in$ Çek(f), $z \in X$ olsun.

$$((x+z),(y+z)) \in \text{Çek}(f)$$

olduğunu görmeliyiz. f bir homomorfizma olduğundan $x, y, z \in X$ iken,

$$\begin{aligned} f(x+z) &= f(x) + f(z) \\ f(y+z) &= f(y) + f(z) \end{aligned}$$

olur. $(x, y) \in$ Çek(f) olduğundan, $f(x) = f(y)$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} & f(x) + f(z) = f(y) + f(z) \\ \Longrightarrow\ & f(x+z) = f(y+z) \\ \Longrightarrow\ & ((x+z),(y+z)) \in \text{Çek}(f) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.7 Tanım. $f : X \to Y$ bir monoid homomorfizması olsun. f' nin görüntü kümesi

$$\text{Gör} f = \{f(a) \mid a \in X\}$$

olarak tanımlanır. Görf, Y' nin alt monoididir.

Monoidler ve değişmeli gruplardaki olağan tanımlar arasındaki ufak farklara dikkat ediniz. Monoid morfizmlerindeki $f(0) = 0$ koşulu grup homomorfizmaları için dayatılamaz. Diğer temel fark çekirdeğin tanımıdır. Çekirdek, grup teorisinde birim eleman ile eşlenen elemanlar kümesidir. Bazı temel farklar olmasına rağmen 1. İzomorfizma Teoremi hâlâ geçerlidir.

2.3.8 Önerme. [1] $f : X \to Y$ bir monoid homomorfizması olsun.

$$\widetilde{f} : \frac{X}{\text{Çekf}} \to \text{Gör} f$$

$$\widetilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) = f(x)$$

bir monoid izomorfizmasıdır.

İspat: $\widetilde{f}$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.
$[x]_{\text{Çekf}}$, $[y]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}}$ ve $[x]_{\text{Çekf}} = [y]_{\text{Çekf}}$ olsun. $(x, y) \in$ Çek$f$ olduğundan $f(x) = f(y)$' dir.

$$\Longrightarrow \widetilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) = \widetilde{f}([y]_{\text{Çekf}})$$

olur. Böylece $\widetilde{f}$ dönüşümü iyi tanımlıdır.
$[x]_{\text{Çekf}},\ [y]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}}$ için, $\widetilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) = \widetilde{f}([y]_{\text{Çekf}})$ olsun.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow (x, y) \in \text{Çekf} \\ &\Longrightarrow [x]_{\text{Çekf}} = [y]_{\text{Çekf}} \end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{f}$ dönüşümü birebirdir.

$$\begin{aligned} \text{Gör}\widetilde{f} &= \{\widetilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) \mid [x]_{\text{Çekf}} \in \tfrac{X}{\text{Çekf}}\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X\} \\ &= \text{Gör}f \end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{f}$ dönüşümü örtendir.
Şimdi $\widetilde{f}$ dönüşümünün homomorfizma olduğunu gösterelim.
$[x]_{\text{Çekf}},\ [y]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}}$ alalım.

$$\widetilde{f}([x]_{\text{Çekf}} + [y]_{\text{Çekf}}) = \widetilde{f}([x + y]_{\text{Çekf}}) = f(x + y).$$

f homomorfizma olduğundan,

$$\begin{aligned} &= f(x) + f(y) \\ &= \widetilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) + \widetilde{f}([y]_{\text{Çekf}}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\widetilde{f}([0]_{\text{Çekf}}) = f(0) = 0$ olur. Buradan, $\widetilde{f}$ bir monoid homomorfizmasıdır. $\widetilde{f}$ homomorfizması birebir ve örten olduğundan bir izomorfizmadır. Böylece,

$$\frac{X}{\text{Çekf}} \cong \text{Gör}f$$

yazılır.

$S =< 2, 3 >$ olan bir sayısal yarıgrup olsun. Buradan $S = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ S sayısal yarıgrubunu, $3x = 2y$ olacak şekilde x ve y elemanları tarafından üretilen bir değişmeli monoid olarak düşünebiliriz. Böylece $S =< (x, y) \mid 3x = 2y >$ yazılabilir. Bu temsil etme fikrini oluşturur. Şimdi bunu resmileştirelim.

S sayısal yarıgrubunun, minimal olarak $\{n_1, ...n_p\}$ elemanları tarafından üretildiğini varsayalım.

$$\varphi : \mathbb{N}^p \to (S, +)$$
$$(a_1, ..., a_p) \to a_1 n_1 + ... + a_p n_p$$

dönüşümünü alalım. φ bir monoid epimorfizmasıdır. $\mathbb{N}^p$ ve $(S, +)$ değişmeli monoidlerdir.
$(a_1, ..., a_p), (b_1, ..., b_p) \in \mathbb{N}^p$ ve $(a_1, ..., a_p) = (b_1, ..., b_p)$ olduğunu varsayalım.
O halde her $i = 1, ..., p$ için, $a_i = b_i$ olur.

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, ..., a_p) &= a_1 n_1 + ... + a_p n_p \\ &= b_1 n_1 + ... + b_p n_p \\ &= \varphi(b_1, ..., b_p) \end{aligned}$$

olduğundan φ iyi tanımlıdır.
φ dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu görelim.
$$\begin{aligned} \varphi((a_1, ..., a_p) + (b_1, ..., b_p)) &= \varphi(a_1 + b_1, ..., a_p + b_p) \\ &= (a_1 + b_1) n_1 + ... + (a_p + b_p) n_p \end{aligned}$$
S sayısal yarıgrubu, $\mathbb{N}$' nin alt kümesi olduğundan,
$$\begin{aligned} &= a_1 n_1 + b_1 n_1 + ... + a_p n_p + b_p n_p \\ &= (a_1 n_1 + ... + a_p n_p) + (b_1 n_1 + ... + b_p n_p) \\ &= \varphi(a_1, ..., a_p) + \varphi(b_1, ..., b_p) \end{aligned}$$
Dolayısıyla φ bir homomorfizmadır.
Gör$\varphi = S$ olduğunu görelim.

$$\varphi(a_1, ..., a_p) = a_1 n_1 + ... + a_p n_p \in S$$

olduğu açıktır. $x \in S$ alalım. Bu durumda, $S =< n_1, ..., n_p >$ olduğundan,

$$x = a_1 n_1 + ... + a_p n_p$$

olacak şekilde $a_1, ..., a_p \in \mathbb{N}$ vardır.
$\implies x = a_1 n_1 + ... + a_p n_p = \varphi(a_1, ..., a_p)$
$\implies x \in$ Görφ

$\Longrightarrow \ S \subseteq$ Görφ

Böylece $S =$ Görφ olduğundan φ örtendir.

φ monoid homomorfizmasının çekirdeği,

$$\text{Çek}\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p \mid \varphi(a) = \varphi(b)\}$$

olarak tanımlanır. 2.3.8 Önerme' den

$$\psi : \frac{\mathbb{N}^p}{\text{Çek}\varphi} \to \text{Gör}\varphi$$

bir monoid izomorfizmasıdır. Böylece,

$$\frac{\mathbb{N}^p}{\text{Çek}\varphi} \cong \text{Gör}\varphi = S$$

elde edilir.

2.4 Sayısal Yarıgrup Halkaları

Yarıgrup halkaları ve bunların idealleri cebirsel ve kombinotorik bakış açısıyla yaygın biçimde çalışılmaktadır. Halkaların $\mathbb{N}^p$ yarıgrubu ile ilişkilendirilmiş zengin bir sınıfı olan yarıgrup halkaları, $k[x_1, ..., x_p]$ polinom halkasını da içerir.

2.4.1 Tanım. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, p pozitif tam sayı ve $\{a_1, ..., a_p\}$, $\mathbb{Z}^p$' nin bir alt kümesi olsun. $\mathbb{Z}^p$' nin toplamsal grubunun $\{a_1, ..., a_p\}$ ile üretilen alt monoidi

$$H =< a_1, ..., a_p >= \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p\}$$

olsun.

$g = (g_1, ..., g_p) \in \mathbb{Z}^p$ ve $x^g = {x_1}^{g_1} ... {x_p}^{g_p}$ iken,

$$x^g \in k[H] \iff g \in H.$$

$$k[H] = \{\sum_{\lambda} g_\lambda f^\lambda \mid g_\lambda \in k, \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p), \ f^\lambda = {f_1}^{\lambda_1} ... {f_p}^{\lambda_p}\}.$$

Burada, $f_1, ..., f_p$ katsayıları k üzerinde olan polinomlardır. $k[H]$ bir k-cebirdir ve $k[H]$' ye H yarıgrubu ile ilişkilendirilmiş yarıgrup halkası denir.

2.4.2 Örnek. $H = \mathbb{N}^p$ ise,

$$k[\mathbb{N}^p] = k[x_1, ..., x_p]$$

ve $H = \mathbb{Z}^p$ ise,

$$k[\mathbb{Z}^p] = k[x_1, {x_1}^{-1}, ..., x_p, {x_p}^{-1}]$$

olur.

$\mathbb{N}^p = \{(a_1, ..., a_p) \mid a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p\}$ ve $S =< n_1, ..., n_p >$ sayısal yarıgrup olsun.

$$\varphi : \mathbb{N}^p \to (S, +)$$
$$(a_1, ..., a_p) \to a_1 n_1 + ... + a_p n_p$$

yarıgrup homomorfizmasını,

$$\psi : k[x_1, ..., x_p] \to k[t]$$
$$x_i \to t^{n_i}$$

şeklinde genişletebiliriz. ψ bir halka homomorfizmasıdır.

$$\begin{aligned} \text{Çek}\psi &= \{f(x_1, ..., x_p) \mid \psi(f) = 0\} \\ &= \{f(x_1, ..., x_p) \mid f(t^{n_1}, ..., t^{n_p}) = 0\} \end{aligned}$$

ideali bir asal idealdir. Bu ideale S' nin tanımlayan ideali denir ve I_S ile gösterilir. Halkalar için 1.İzomorfizma Teoreminden,

$$k[x_1, ..., x_p]/\text{Çek}\psi \cong \text{Gör}\psi = k[t^{n_1}, ..., t^{n_p}]$$

elde edilir.

2.4.3 Tanım. $k[S] = k[t^{n_1}, ..., t^{n_p}]$ halkasına, $\{n_1, ..., n_p\}$ ile üretilen $S =< n_1, ..., n_p >$ sayısal yarıgrubunun yarıgrup halkası denir.

2.4.4 Tanım. $k[[S]] = \{h = \sum\limits_{s \in S} a_s t^s \mid \forall s \in S$ için $a_s \in \mathbb{N}\}$ olarak tanımlayalım.

$$h \in k[S] \iff \text{Hemen hemen her s} \in S \text{ için } a_s = 0$$

olduğu açıktır. $k[[S]]$ üzerinde toplama işlemi, $h_1 = \sum a_s t^s$ ve $h_2 = \sum b_{s'} t^{s'}$ olmak üzere, bileşenlerinin katsayılarını toplayarak

$$h_1 + h_2 = \sum_{s,s' \in S} a_s t^s + b_{s'} t^{s'}$$

şeklinde tanımlanır. $(k[[S]], +, .)$ bir halkadır. $k[[S]]$ ve $k[S]$ halkalarının bazı özellikleri, S sayısal yarıgrubunun özelliklerinden belirlenebilir. Bunun sonucunda, sayısal yarıgruplardaki bazı kavramlar, halka teorisinde zaten var olan karşılıklardan isimlendirilmiştir [4].

2.5 Derecelendirilmiş Cebirler

2.5.1 Tanım. A, k cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. A uzayında her $x_1, x_2, x_3 \in A$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in k$ için,

i) $\alpha_1(\alpha_2 x_1) = (\alpha_1 \alpha_2) x_1$

ii) $\alpha_1(x_1 x_2) = (\alpha_1 x_1) x_2 = x_1(\alpha_1 x_2)$

iii) $x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3$

iv) $x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$

özelliklerini sağlayan bir çarpma işlemi varsa, A' ya k üzerinde bir k-cebiri, ek olarak,

v) $x_1 x_2 = x_2 x_1$

ise, A' ya k üzerinde bir değişmeli k-cebiri denir.

2.5.2 Tanım. A, bir k-cebir olsun. Eğer, bir k cismi üzerinde bir vektör uzay olarak,

i) $A_0 \cong k$

ii) $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, $\forall i, j \geq 0$

olacak şekilde,

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

ayrışımına sahip ise, A' ya derecelendirilmiş k-cebiri denir. Her $x \in A_n$ elemanı n. dereceden homojen eleman olarak isimlendirilir.

2.5.3 Örnek. k bir cisim ve $k[x_1, ..., x_p]$ her $1 \leq i \leq p$ için $der(x_i) = 1$ olan p değişkenli polinom halkası olsun. $k[x_1, ..., x_p]$ sonlu üretilmiş bir standart derecelendirilmiş değişmeli k-cebiridir [5].

2.5.4 Tanım. R bir halka, G değişmeli bir grup ve değişmeli grupların bir ayrışımı

$$R = \bigoplus_{i \in G} R_i$$

olsun. Eğer her $i, j \in G$ için,

$$R_i R_j \subseteq R_{i+j}$$

ise, R' ye G-derecelendirilmiş halka denir. $G = \mathbb{N}$ ise, R' ye $\mathbb{N}$-derecelendirilmiş, $G = \mathbb{Z}$ ise, R' ye $\mathbb{Z}$-derecelendirilmiş halka denir.

2.5.5 Tanım. $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ bir derecelendirilmiş k-cebiri ve I, A' nın bir ideali olsun. Eğer I ideali,

i) Her $n \geq 0$ için $I_n \subseteq A_n$

ii) Her $i, j \geq 0$ için $A_i I_j \subseteq I_{i+j}$

olacak şekilde,

$$I = \bigoplus_{n \geq 0} I_i$$

formunda bir alt vektör uzayı ise, I' ya bir derecelendirilmiş ideal denir.

2.5.6 Not. R bir derecelendirilmiş k-cebiri ve I, R' nin bir derecelendirilmiş ideali olsun. Bu durumda,

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus ...$$

$$I = I_0 \oplus I_1 \oplus ...$$

olarak yazılabilir. R/I bölüm halkası da

$$R/I = R_0/I_0 \oplus R_1/I_1 \oplus ...$$

bir derecelendirilmiş k-cebiridir [5].

2.6 Modüller ve Serbest Modüller

Bir halka üzerinde, ideallerin genellemeleri olan modüller, bir vektör uzayın bir cisim üzerindeki davranışına benzer şekilde davranan cebirsel yapılardır.

2.6.1 Tanım. R bir halka ve M bir küme olsun. Her $r, s \in R$ ve $a, b \in M$ için

$$R \otimes M \to M$$

etkisi ile,

i) $(M, +)$ değişmeli grup

ii) $r(a + b) = ra + rb$

iii) $(r + s)a = ra + sa$

iv) $r(sa) = (rs)a$

özelliklerini sağlayan M kümesine, R halkası üzerinde bir modül veya R-modül denir. Eğer 1_R, R' nin çarpımsal birimi iken, her $a \in M$ için $1_R.a = a$ ise M' ye birimli R-modül denir. R bir cisim olduğunda, üstteki özellikleri sağlayan M kümesi, vektör uzay adını alır.

2.6.2 Örnek. R halkası verilsin. R^n bir R-modüldür.

$$R^n = \{(r_1, r_2, ..., r_n) \mid r_1, ..., r_n \in R\}$$
$$R \otimes R^n \to R^n$$
$$(s, (r_1, r_2, ..., r_n)) \to s(r_1, ..., r_n) = (sr_1, ..., sr_n)$$

i) $(R^n, +)$ değişmeli gruptur.

ii) $s \in R$, $(r_1, r_2, ..., r_n), (t_1, t_2, ..., t_n) \in R^n$ olsun.

$$\begin{aligned} s((r_1, ..., r_n) + (t_1, ..., t_n)) &= s(r_1 + t_1, ..., r_n + t_n) \\ &= (s(r_1 + t_1), ..., s(r_n + t_n)) \\ &= (sr_1 + st_1, ..., sr_n + st_n) \\ &= (sr_1, ..., sr_n) + (st_1, ..., st_n) \\ &= s(r_1, ..., r_n) + s(t_1, ..., t_n) \end{aligned}$$

iii) $r, s \in R$, $(a_1, ..., a_n) \in R^n$ olsun.

$$\begin{aligned} (r + s)(a_1, ..., a_n) &= ((r + s)a_1, ..., (r + s)a_n) \\ &= (ra_1 + sa_1, ..., ra_n + sa_n) \\ &= (ra_1, ..., ra_n) + (sa_1, ..., sa_n) \end{aligned}$$

$$= r(a_1, ..., a_n) + s(a_1, ..., a_n)$$

iv) $r, s \in R$, $(a_1, ..., a_n) \in R^n$ olsun.

$$\begin{aligned} r(s(a_1, ..., a_n)) &= r(sa_1, ..., sa_n) \\ &= (r(sa_1), ..., r(sa_n)) \\ &= ((rs)a_1, ..., (rs)a_n) \\ &= (rs)(a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

2.6.3 Örnek. R bir halka ve I, R' nin bir ideali olsun. R/I bir R-modüldür.

$$R \times R/I \to R/I$$
$$(s, (r + I)) \to (s.r) + I$$

i) $(R/I, +)$ değişmeli gruptur.

ii) $r \in R, s_1 + I, s_2 + I \in R/I$ olsun.

$$\begin{aligned} r((s_1 + I) + (s_2 + I)) &= r((s_1 + s_2) + I) \\ &= (rs_1 + rs_2) + I \\ &= (rs_1 + I) + (rs_2 + I) \\ &= r(s_1 + I) + r(s_2 + I) \end{aligned}$$

iii) $r, s \in R, t + I \in R/I$ olsun.

$$\begin{aligned} (r + s)(t + I) &= (r + s)t + I \\ &= (rt + st) + I \\ &= (rt + I) + (st + I) \\ &= r(t + I) + s(t + I) \end{aligned}$$

iv) $r, s \in R, t + I \in R/I$ olsun.

$$\begin{aligned} r(s(t + I)) &= r(st + I) \\ &= r(st) + I \\ &= (rs)t + I \\ &= (rs)(t + I) \end{aligned}$$

2.6.4 Not. Bir vektör uzayın her zaman bir bazı vardır fakat modüller her zaman bir baza sahip olmak zorunda değildir.

2.6.5 Örnek. $R = k[x, y]$ halkasında $I =< x^2, y^4 >$ idealini alalım. I, k cismi üzerinde bir vektör uzaydır.

$$k \times I \to I$$
$$(c, p) \to c.p$$

$(I, +)$ alt halka olduğundan $(I, +)$ değişmeli gruptur.

$p \in I \implies p = p_1.x^2 + p_2.y^4, p_1, p_2 \in k[x, y]$

$c.p = c(p_1.x^2 + p_2.y^4)$

$\quad = (cp_1)x^2 + (cp_2)y^4$

Burada $cp_1, cp_2 \in k[x, y]$ olduğundan $cp \in I$ elde edilir.

$c_1, c_2 \in k$ için,

$$c_1x^2 + c_2y^4 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0$$

olduğundan $\{x^2, y^4\}$, k cismi üzerinde lineer bağımsızdır.

$I =< x^2, y^4 >$ ideali $k[x, y]$ halkası üzerinde

$$k[x, y] \times I \to I$$

etkisi ile bir modüldür. $\{x^2, y^4\}$, I modülünün üreteçleridir. $-y^4, x^2 \in k[x, y]$ için,

$$(-y^4)x^2 + x^2y^4 = 0$$

olduğundan $\{x^2, y^4\}$, $k[x, y]$ üzerinde lineer bağımlıdır. Böylece $\{x^2, y^4\}$, I için bir baz olamaz.

2.6.6 Tanım. R halkası ve M R-modülü verilsin. Eğer M modülü bir baza sahipse, serbest modül olarak adlandırılır.

2.6.7 Örnek. R halkasını ve $M = R^n$ modülünü alalım. 2.6.2 Örnek' ten R^n nin bir R-modül olduğunu biliyoruz.

$$\{e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, ..., 0), ...,\ e_n = (0, ..., 0, 1)\} \subset R^n$$

kümesi $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ için,

$r_1(1, 0, ..., 0) + r_2(0, 1, ..., 0) + ... + r_n(0, ..., 0, 1) = (0, 0, ..., 0)$

$\implies (r_1, r_2, ..., r_n) = (0, 0, ..., 0)$

$\implies r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$

olduğundan R üzerinde lineer bağımsızdır. Böylece R^n bir serbest R-modüldür.

2.6.8 Örnek. R iki değişkenli polinom halkası ve

$$M = \{(f_1, f_2, f_3) \in R^3 \mid xf_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3 = 0\}$$

kümesini alalım. M bir R-modüldür.

$$R \times M \to M$$
$$(p, (f_1, f_2, f_3)) \to p(f_1, f_2, f_3) = (pf_1, pf_2, pf_3)$$

$(f_1, f_2, f_3) \in M$ olduğundan

$$xf_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3 = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} x(pf_1) + (y^3 - 5)(pf_2) + (pf_3) &= p(xf_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3) \\ &= p.0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $(pf_1, pf_2, pf_3) \in M$ elde edilir.

i) $(M, +)$ değişmeli gruptur.

ii) $r \in R$ ve $(f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3) \in M$ olsun.

$$\begin{aligned} r((f_1, f_2, f_3) + (g_1, g_2, g_3)) &= r(f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) \\ &= (rf_1 + rg_1, rf_2 + rg_2, rf_3 + rg_3) \\ &= (rf_1, rf_2, rf_3) + (rg_1, rg_2, rg_3) \\ &= r(f_1, f_2, f_3) + r(g_1, g_2, g_3). \end{aligned}$$

iii) $r, s \in R$ ve $(f_1, f_2, f_3) \in M$ olsun.

$$\begin{aligned} (r + s)(f_1, f_2, f_3) &= ((r + s)f_1, (r + s)f_2, (r + s)f_3) \\ &= (rf_1 + sf_1, rf_2 + sf_2, rf_3 + sf_3) \\ &= (rf_1, rf_2, rf_3) + (sf_1, sf_2, sf_3) \\ &= r(f_1, f_2, f_3) + s(f_1, f_2, f_3). \end{aligned}$$

iv) $r, s \in R$ ve $(f_1, f_2, f_3) \in M$ olsun.

$$\begin{aligned} r(s(f_1, f_2, f_3)) &= r(sf_1, sf_2, sf_3) \\ &= (r(sf_1), r(sf_2), r(sf_3)) \\ &= ((rs)f_1, (rs)f_2, (rs)f_3) \end{aligned}$$

$= (rs)(f_1, f_2, f_3).$

$xf_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3 = 0$
$\implies f_3 = -xf_1 + (5 - y^3)f_2$
olarak yazılabilir.
$(f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, -xf_1 + (5 - y^3)f_2)$
$= f_1(1, 0, -x) + f_2(0, 1, 5 - y^3)$
Buradan $\{b_1 = (1, 0 - x), b_2 = (0, 1, 5 - y^3)\}$ listesi M' yi üretir.
Şimdi $\{b_1, b_2\}$ listesinin lineer bağımsız olduğunu görelim.
$p_1b_1 + p_2b_2 = 0$ olsun.
$\implies p_1(1, 0, -x) + p_2(0, 1, 5 - y^3) = (0, 0, 0)$
$\implies (p_1, p_2, -xp_1 + (5 - y^3)p_2) = (0, 0, 0)$
$\implies p_1 = p_2 = 0.$
Böylece, $\{b_1, b_2\}$ listesi, M R-modülü için bir bazdır. Buradan, M' nin bir serbest R-modül olduğu sonucuna varılır.

2.6.9 Tanım. R bir halka, M bir R-modül ve $\emptyset \neq N$, M' nin bir alt kümesi olsun. N, M modülünün bir toplamsal alt grubu ve her $r \in R, n \in N$ için $r.n \in N$ ise N' ye M' nin alt modülü denir.

2.6.10 Tanım. R bir halka ve M, N R-modüller olsun. $\phi : M \to N$ dönüşümü her $c \in R$ ve $f, g \in M$ için,

$$\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$$
$$\phi(cf) = c\phi(f)$$

şartları sağlanıyor ise ϕ R-modül homomorfizması adını alır.
ϕ, R-modül homomorfizmasının çekirdeği,

$$\text{Çek}\phi = \{f \in M \mid \phi(f) = 0_N\}$$

ϕ, R-modül homomorfizmasının görüntü kümesi,

$$\text{Gör}\phi = \{g \in N \mid \exists f \in M \text{ için } \phi(f) = g\}$$

olarak tanımlanır. Çekϕ ve Görϕ sırasıyla M ve N R-modüllerinin alt modülleridir.

3. MODÜLLERİN SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİ

Bir k cismi üzerindeki cebirsel geometride, varyetelerin geometrisini $R = k[x_1, ..., x_n]$ polinom halkası ve ideallerinin özelliklerini etkin bir şekilde incelemek için polinom halkası üzerindeki derecelendirilmiş modülleri çalışmak gerekmektedir. Bir modülü ayrıntılı bir şeklide açıklamanın en basit yolu, modülün üreteçleri ve bunların arasındaki bağıntılardır. Bir modülün önemli invaryantlarından birisi, M modülünü üretmek için gerekli olan minimal üreteç sayısıdır. Bu sayı, modülün serbest bir modül olmaktan ne kadar uzak olduğunu açıklayan Betti sayılarının bir dizisindeki ilk sayıdır. Bu bölümde [6] numaralı kaynak kullanılmıştır.

3.1 Sizigiler

$M =< m_1, ..., m_{t_0} >$ ve $i = 1, ..., t_0$ için 1, i. koordinatta olmak üzere,
$e_i = (0, ..., 1, ..., 0) \in R^{t_0}$ kanonik baz olduğunu varsayalım. Bu,

$$\begin{aligned} R^{t_0} &\xrightarrow{\pi_0} M =< m_1, ..., m_{t_0} > \\ e_i &\to m_i \end{aligned}$$

modül homomorfizmasının örten olması demektir.

Eğer π_0 bir izomorfizma ise, $M \cong R^{t_0}$ rankı t_0 olan bir serbest modül olur. Diğer durumda, bir başka deyişle π_0 birebir değil ise, Çek$\pi_0 \neq \{0\}$ dır.

$$\begin{tikzcd} R^{t_1} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dash] & & R^{t_0} \arrow[r, "\pi_0"] & M \\ & \text{Çek}(\pi_0) \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \text{Çek}(\pi_0) &= \{(r_1, ..., r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid \pi_0(r_1, ..., r_{t_0}) = 0_M\} \\ &= \{(r_1, ..., r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid \pi_0(r_1 e_1 + ... + r_{t_0} e_{t_0}) = 0_M\} \\ &= \{(r_1, ..., r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid r_1 \pi_0(e_1) + ... + r_{t_0} \pi_0(e_{t_0}) = 0_M\} \\ &= \{(r_1, ..., r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid r_1 m_1 + ... + r_{t_0} m_{t_0} = 0_M\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Çek(π_0)' daki $(r_1, ..., r_{t_0})$ elemanı,

$$r_1 m_1 + ... + r_{t_0} m_{t_0} = 0$$

olan m_i elemanları arasındaki bağıntıdır. Bu bağıntıların kümesi, M modülünün sizigileri olarak adlandırılır.

3.1.1 Tanım. M, R^{t_0}' ın $\{m_1, ..., m_{t_0}\}$ kümesi ile üretilen bir modülü olsun. M' nin sizigi modülü,

$$Syz(M) = Syz(m_1, ..., m_{t_0}) = \{(r_1, ..., r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid r_1 m_1 + ... + r_{t_0} m_{t_0} = 0\}$$

kümesidir. $Syz(M)$' nin bir elemanına sizigi denir.

3.2 Serbest Çözülüm Nedir?

$R = k[x_1, ..., x_n]$ polinom halkasında $n = 1$ ise $R = k[x_1]$ tek değişkenli polinom halkasıdır ve bir temel ideal bölgesidir. Temel ideal bölgelerinde bir serbest modülün her alt modülü serbest modüldür. Dolayısıyla $Syz(M)$ bir serbest modüldür.

$n > 0$ ise, sizigi modülünün üreteçlerinin herhangi bir kümesinin bağıntılara sahip olma durumları oluşabilir. Bunu anlamak için M modülüne tam diziler ile yaklaşabiliriz.

3.2.1 Tanım. M_i' ler R-modüller olsun. φ_i R-modül homomorfizmalarının

$$\cdots \to M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \to \cdots$$

dizisini düşünelim. Eğer, Gör(φ_{i+1}) $=$ Çek(φ_i) oluyor ise, dizi M_i' de tamdır denir. Dizi her bir M_i' de tam ise tüm dizi tamdır denir.

Tam diziler ile ilgili detaylı bilgiler ve özellikler için bakınız [7].

M bir R-modül olsun. M modülünden elemanlar seçmek, homomorfizmalar aracılığıyla da gerçekleştirilebilir.

3.2.2 Önerme. [7] M bir R-modül olsun.

i) M' den bir eleman seçmek, $R \to M$' ye bir homomorfizma seçmeye denktir.

ii) M' den t elemanlar seçmek, $R^t \to M$' ye bir homomorfizma seçmeye denktir.

iii) M' nin t üreteçli bir kümesini seçmek, $R^t \to M$' ye örten bir homomorfizma seçmeye denktir.
iv) M bir serbest modül iken, t elemanlı bir baz seçmek, $R^t \to M$' ye bir izomorfizma seçmeye denktir.

İspat: **i) ii)** $1 \in R$ alalım. $f \in M$ seçmek, $\varphi(1) = f$' yi sağlayan

$$\varphi : R \to M$$

R-modül homomorfizmasını seçmek ile aynıdır.
$g \in R$ alalım. 1, R' nin birimidir. Buradan

$$\varphi(g) = \varphi(g.1) = g\varphi(1) = gf \in M$$

olduğundan $\varphi(1)$, φ' nin her $g \in R$' deki değerini belirler. Böylece, M'den t eleman seçmek;

$$R \to M$$

t tane R-modül homomorfizmasını seçmek veya denk olarak

$$R^t \to M$$

R-modül homomorfizmasını seçmek gibi düşünülebilir.

iii) iv) R^t' yi sütun vektörlerinin bir vektör uzayı olarak düşünelim ve R^t' nin standart bazını $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ ile gösterelim. M' nin $\{f_1, ..., f_t\}$ elemanını seçmek, $i = 1, 2, ..., t$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : R^t &\to M \\ e_i &\to f_i \end{aligned}$$

olarak tanımlı R-modül homomorfizmasını seçmeye karşılık gelir.
Gör$(\varphi) = \{\varphi(r_1, ..., r_t) \mid (r_1, ..., r_t) \in R^t\}$
$$\begin{aligned} (r_1, ..., r_t) &= r_1(1, 0, ..., 0) + ... + r_t(0, ..., 0, 1) \\ &= r_1e_1 + ... + r_te_t \end{aligned}$$
olmasından,

$$\text{Gör}(\varphi) = \{\varphi(r_1e_1 + ... + r_te_t) \mid (r_1, ..., r_t) \in R^t\}$$

yazılır. φ bir R-modül homomorfizması olduğundan,

$$\begin{aligned}\text{Gör}(\varphi) &= \{r_1\varphi(e_1) + ... + r_t\varphi(e_t) \mid (r_1, ..., r_t) \in R^t\} \\ &= \{r_1 f_1 + ... + r_t f_t \mid (r_1, ..., r_t) \in R^t\}\end{aligned}$$

olur. Böylece, $< f_1, ..., f_t > \subset M$ elde edilir.
Eğer φ örten olursa,

$$\text{Gör}(\varphi) = < f_1, ..., f_t > = M$$

elde edilir. Böylece, M için t üreteçli küme seçmek

$$R^t \to M$$

bir R-modül epimorfizmasını seçmeye karşılık gelir. Bu, bir

$$R^t \to M \to 0$$

tam dizisi seçmek ile aynıdır. M bir serbest modül ise, M' nin bir bazı vardır. $\{f_1, ..., f_t\}$ M' nin bazı olsun. O halde, $\{f_1, ..., f_t\}$ lineer bağımsızdır. Böylece,

$$r_1 f_1 + ... + r_t f_t = 0$$

iken,

$$r_1 = ... = r_t = 0$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\text{Çek}(\varphi) &= \{(r_1, ..., r_t) \mid \varphi(r_1, ..., r_t) = 0\} \\ &= \{(r_1, ..., r_t) \mid r_1 f_1 + ... + r_t f_t = 0\} \\ &= \{0_{R^t}\}\end{aligned}$$

bulunur. Bu, φ' nin birebir olması demektir. Böylece M modülü için t elemanlı bir baz seçmek,

$$R^t \to M$$

bir R-modül izomorfizmasını seçmeye karşılık gelir.

3.2.3 Tanım. M R-modülünün bir temsili, $Syz(f_1, ..., f_t)$ sizigi modülü için bir üreteçler kümesi ile birlikte $\{f_1, ..., f_t\}$ üreteçlerinin bir kümesidir.

$Syz(f_1, ..., f_t)$' nin üreteçlerini sütunlar olarak düzenleyerek, bir M modülü için bir temsilci matris elde edilebilir. Bir temsilci matris vermek, M' nin bir temsilini vermek ile aynıdır.

3.2.3 Tanım' ı, tam diziler aracılığıyla yeniden yorumlarsak, 3.2.2 Önerme (iii)' den $\{f_1, ..., f_t\}$ üreteçleri

$$R^t \to M \to 0$$

tam dizisi anlamına gelen bir

$$\varphi : R^t \to M$$

örten homomorfizmasını verir.

$$R^t \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$
$$(g_1, ..., g_t) \to \varphi(g_1, ..., g_t)$$

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1, ..., g_t) &= g_1\varphi(e_1) + ... + g_t\varphi(e_t) \\
&= g_1 f_1 + ... + g_t f_t \\
&= \sum_{i=1} g_i f_i \in M.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Syz(f_1, ..., f_t) &= \{(g_1, ...g_t) \in R^t \mid g_1 f_1 + ... + g_t f_t = 0\} \\
&= \text{Çek}(\varphi) \\
&= \text{Çek}(\varphi : R^t \to M)
\end{aligned}$$

3.2.2 Önerme (iii)' den, sizigi modül için üreteç kümesi seçmek,

$$R^s \to \text{Çek}(\varphi) = Syz(f_1, ..., f_t)$$

örten ψ homomorfizması seçmeye karşılık gelir. Fakat ψ' nin örten olması

$$\text{Gör}\psi = \text{Çek}\varphi$$

olmasına denktir ve bu

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

dizisinde R^t' de tam olmak için koşuldur. Böylece, M' nin bir temsilinin

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

formundaki bir tam diziye denk olması anlamına gelir.

ψ' nin R^s ve R^t' nin standart bazlarına göre matrisi, M için bir temsilci matristir.

3.2.4 Önerme. M bir sonlu üretilmiş R-modül olsun.

i) M modülünün

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

formunda bir temsilci matrisi vardır.

ii) M, bir serbest R-modülün homomorfik görüntüsüdür.

İspat: [7].

3.2.5 Örnek. $R = \mathbb{Z}$, $M =< x, y >$ ve $2x - y = 0$ bağıntısı ile verilen bir $\mathbb{Z}$-modül olsun. M' nin bir temsilini bulalım.

$$\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to M$$
$$(a, b) \to ax + by$$

homomorfizması,

$$\begin{aligned} \text{Gör}\varphi &= \{\varphi(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\ &= \{ax + by \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\ &=< x, y > \\ &= M \end{aligned}$$

olduğundan örten bir homomorfizmadır.

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(a, b) \mid \varphi(a, b) = 0\} \\ &= \{(a, b) \mid ax + by = 0\} \\ &= \{(a, b) \mid ax = -by\} \end{aligned}$$

$2x - y = 0 \implies y = 2x$

$ax = -by \implies ax = -b(2x) \implies a = -2b$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(a, b) \mid a = -2b\} \\ &= \{(-2b, b) \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b(-2, 1) \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= Syz(M) \end{aligned}$$

olur.

Böylece,

$$\mathbb{Z}^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}} M \to 0$$

bulunur.

3.2.6 Uyarı. Bir M modülünün temsilci matrisi tek olmayabilir.

3.2.7 Tanım. R bir halka ve M bir R-modül olsun. Her i için $F_i \cong R_i^{\ r}$ olan bir $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\cdots F_2 \overset{\varphi_2}{\to} F_1 \overset{\varphi_1}{\to} F_0 \overset{\varphi_0}{\to} M \to 0$$

formudaki tam dizi M modülünün serbest çözülümü olarak isimlendirilir.

$i > l$ için $F_i = 0$ ve $F_l \neq 0$ olacak şekilde bir pozitif l tam sayısı var ise çözülüm sonludur. Bu durumda, çözülüm l uzunluktadır denir ve

$$0 \to F_l \to F_{l-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

olarak yazılır.

"Herhangi bir R-modül için serbest çözülüm sonlu mudur?" sorusu doğal bir sorudur. Cevap genellikle olumsuzdur. Fakat $R = k[x_1, ...x_n]$ polinom halkalarında cevap olumludur.

3.2.8 Teorem. (Hilbert Sizigi Teorem) R, n değişkenli polinom halkası olmak üzere, her sonlu üretilmiş R-modül en fazla n uzunlukta bir sonlu serbest çözülüme sahiptir.

İspat: [7].

3.3 Schreyer Algoritması

Bu bölümde bir modülün elemanlarının oluşturduğu bir küme üzerindeki sizigiler çalışılacaktır. Bu amaçla R^s' nin $(f_1, ..., f_s)$ elemanlarının bir sıralı s-lisi verildiğinde, $Syz(f_1, ..., f_s) \subset R^s$ sizigi modülü için bir üreteç kümesini bulacağız.

$R = k[x_1, ..., x_n]$ polinom halkasındaki bir I ideali için, bir tek terimli sıralamasına göre Buchberger Algoritmasını kullanarak $G = \{f_1, ..., f_s\}$ Gröbner bazını hesaplayabiliriz. Bu konu ile ilgili en iyi kaynaklardan biri olarak [8] verilebilir. Bu algoritmanın bir modifikasyonu ile $Syz(f_1, ..., f_s)$ modülü için bir üreteç kümesi hesaplanabilmektedir.

İlk olarak, Gröbner baz tanımını ve Gröbner baz ile ilgili bazı temel kavramları hatırlayalım.

3.3.1 Tanım. " $<$ " tek terimli sıralaması $G = \{f_1, ..., f_s\} \subset I$ olsun. $L(I)$, I idealindeki tüm polinomların en yüksek dereceli terimleri tarafından üretilen ideal olmak üzere,

$$< LT(f_1), ..., LT(f_s) >=< LT(I) >$$

ise G kümesine I idealinin Gröbner bazı denir.

3.3.2 Tanım. $0 \neq f, g \in k[x_1, ..., x_n]$ için $S(f, g)$, S-polinomu,

$$S(f,g) = \frac{okek(LM(f),LM(g))}{LT(f)}\, f - \frac{okek(LM(f),LM(g))}{LT(g)}\, g$$

olarak tanımlanır.

3.3.3 Tanım. $0 \neq f \in k[x_1, ..., x_n]$ olsun. f' nin, $G = \{f_1, ..., f_s\}$ sıralı s-lisi ile bölümünden kalan $\overline{f}^G$ olarak yazılır.

3.3.4 Teorem. $\emptyset \neq I \subset k[x_1, ..., x_n]$ olsun. $G = \{f_1, ..., f_s\}$ bazı, I ideali için bir Gröbner bazdır $\iff$ Her $i \neq j$ için $\overline{S(f_i, f_j)}^G = 0$

İspat: [8].

$k[x_1, ..., x_n]$ halkasındaki bölme algoritmasından [8], $a_{ijk} \in R = k[x_1, ..., x_n]$ ve her i, j, k için $LT(a_{ijk}f_k) \leq LT(S(f_i, f_j))$ olmak üzere,

$$S(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} f_k$$

ifadesini elde edebiliriz.

$a_{ij} \in R^s$, $a_{ij} = a_{ij1}e_1 + a_{ij2}e_2 + ... + a_{ijs}e_s$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij1} \\ a_{ij2} \\ \vdots \\ a_{ijs} \end{pmatrix} \in R^s$$

ve

$$S_{ij} = \frac{okek(LM(f_i))}{LT(f_i)} e_i - \frac{okek(LM(f_j)}{LT(f_j)} e_j - a_{ij}$$

olarak $S_{ij} \in R^s$ alalım.

Şimdi, Schreyer Teoremini verebiliriz.

3.3.5 Teorem. $G = \{f_1, ..., f_s\}$, $R = k[x_1, ..., x_n]$ halkasındaki bir I idealinin bir tek terimli sıralamasına göre Gröbner bazı ve $M = Syz(f_1, ..., f_s)$ olsun. $\{S_{ij}, 1 \leq i, j \leq s\}$ M' yi bir R-modül olarak üretir.

İspat: [7].

3.3.6 Örnek. $M =< x^2, xy, y^3 >$ modülünü ve $R = k[x, y]$ halkasını alalım. M modülünün Gröbner bazını bulalım.
$f_1 = x^2, LM(f_1) = LT(f_1) = x^2$
$f_2 = xy, LM(f_2) = LT(f_2) = xy$
$\Longrightarrow\ okek(LM(f_1), LM(f_2)) = x^2y$ olduğundan,

$$S(f_1, f_2) = \frac{okek(LM(f_1),LM(f_2))}{LT(f_1)} f_1 - \frac{okek(LM(f_1),LM(f_2))}{LT(f_2)} f_2$$

$\Longrightarrow\ S(f_1, f_2) = \frac{x^2y}{x^2}x^2 - \frac{x^2y}{xy}xy = 0$
$\Longrightarrow\ S(f_1, f_2) = yf_1 - xf_2 = 0$

$f_1 = x^2, LM(f_1) = LT(f_1) = x^2$
$f_3 = y^3, LM(f_3) = LT(f_3) = y^3$
$\Longrightarrow\ okek(LM(f_1), LM(f_2)) = x^2y^3$ olduğundan,

$$S(f_1, f_3) = \frac{okek(LM(f_1),LM(f_3))}{LT(f_1)} f_1 - \frac{okek(LM(f_1),LM(f_3))}{LT(f_3)} f_3$$

$\Longrightarrow\ S(f_1, f_3) = \frac{x^2y^3}{x^2}x^2 - \frac{x^2y^3}{y^3}y^3 = 0$
$\Longrightarrow\ S(f_1, f_3) = y^3f_1 - x^2f_3 = 0$

$f_2 = xy, LM(f_2) = LT(f_2) = xy$

$f_3 = y^3, LM(f_3) = LT(f_3) = y^3$

$\implies okek(LM(f_2), LM(f_3)) = xy^3$ olduğundan,

$$S(f_2, f_3) = \frac{okek(LM(f_2,LM(f_3))}{LT(f_2)} f_2 - \frac{okek(LM(f_2),LM(f_3))}{LT(f_3)} f_3$$

$\implies S(f_2, f_3) = \frac{xy^3}{xy} xy - \frac{xy^3}{y^3} y^3 = 0$

$\implies S(f_2, f_3) = y^2 f_2 - x f_3 = 0$

$\implies \{f_1, f_2, f_3\}$, M modülü için Gröbner bazdır.

1. Sizigi modülün üreteçleri

$$\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$S(f_1, f_2) = y f_1 - x f_2 = 0 \implies S_1 = y\varepsilon_1 - x\varepsilon_2$

$S(f_1, f_3) = y^3 f_1 - x^2 f_3 = 0 \implies S_2 = y^3\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3$

$S(f_2, f_3) = y^2 f_2 - x f_3 = 0 \implies S_3 = y^2\varepsilon_2 - x\varepsilon_3$

$LT(S_1) = y\varepsilon_1, LT(S_2) = y^3\varepsilon_1$ ve $okek(LM(S_1), LM(S_2)) = y^3\varepsilon_1$ olduğundan,

$$S(S_1, S_2) = \frac{okek(LM(S_1),LM(S_2))}{LT(S_1)} S_1 - \frac{okek(LM(S_1),LM(S_2))}{LT(S_2)} S_2$$

$\implies S(S_1, S_2) = \frac{y^3\varepsilon_1}{y\varepsilon_1} (y\varepsilon_1 - x\varepsilon_2) - \frac{y^3\varepsilon_1}{y^3\varepsilon_1} (y^3\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3)$

$\implies S(S_1, S_2) = y^3\varepsilon_1 + y^2 x\varepsilon_2 - y^3\varepsilon_1 + x^2\varepsilon_3$

$\implies S(S_1, S_2) = -x^2 y^2\varepsilon_2 + x^2\varepsilon_3$

$\implies S(S_1, S_2) = -x(y^2\varepsilon_2 - x\varepsilon_3)$

$\implies S(S_1, S_2) = -xS_3$

$S_1 = {\varepsilon_1}', S_2 = {\varepsilon_2}', S_3 = {\varepsilon_3}'$ yazalım.

$\implies S(S_1, S_2) = y^2{\varepsilon_1}' - {\varepsilon_2}' + x{\varepsilon_3}' = 0$

elde edilir.

(S_1, S_3) ve (S_2, S_3) çiftleri ortak elemana sahip olmadıklarından S-polinomları bulunamaz.

Böylece 2. Sizigi matrisi

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Buradan M modülünün bir serbest çözülümü

$$0 \to R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olarak yazılır.

3.4 Derecelendirilmiş Modüller ve Homomorfizmalar

Modül derecelendirildiğinde çözünürlüğünden bir modülün yapısı ile ilgili çok daha fazla bilgi edinilmektedir. Şimdi derecelendirilmiş modül tanımını verelim.

3.4.1 Tanım. R bir derecelendirilmiş cebir ve M bir R-modül olsun. Eğer, M modülü $t \in \mathbb{Z}$ için M_t vektör uzaylar olmak üzere,

i) $M = \bigoplus\limits_{t \in \mathbb{Z}} M_t$

ii) Her s$\geq$ 0 ve t$\in \mathbb{Z}$ için $R_s M_t \subset M_{s+t}$

şartlarını sağlıyor ise, M'ye derecelendirilmiş modül denir. M_t' nin elemanlarına derecesi t olan homojenler adı verilir.

3.4.2 Örnek. I, R halkasının homojen bir ideali, bir başka deyişle, homojen polinomlar tarafından üretilen bir ideali olsun. I bir derecelendirilmiş modüldür. I bir homojen ideal olduğundan R/I bölüm halkası da derecelendirilmiş modül olur.

3.4.3 Örnek. 2.6.7 Örnek' ten R^m' nin bir serbest R-modül olduğunu biliyoruz.

$$(R^m)_t = (R_t)^m$$

olarak tanımlarsak, $(R^m)_t$' nin elemanları her bir koordinatı t dereceli homojen elemanlar olan m-lilerdir. Böylece, R^m serbest R-modülleri, derecelendirilmiş modüller olurlar.

3.4.4 Tanım. $d \in \mathbb{Z}$ ve M bir derecelendirilmiş R-modül olsun. Her $t \in \mathbb{Z}$ için,

$$M(d)_t = M_{t+d}$$

olarak tanımlansın. $M(d)$ R-modülüne, d ile kaydırılmış modül denir.

3.4.5 Önerme. M bir derecelendirilmiş R-modül ve d bir tam sayı olsun. $M(d)_t = M_{t+d}$ olmak üzere,

$$M(d) = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} M(d)_t$$

alalım. Bu durumda, $M(d)$ bir derecelendirilmiş R-modüldür.

İspat: [9].

3.4.6 Tanım. $(R^m)(d) = (R(d)^m)$ modülüne, R üzerinde d ile kaydırılmış derecelendirilmiş serbest modül denir.

1, i. koordinatta olmak üzere $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ iken $(e_1, ..., e_m)$, $R(d)^m$ için bir baz oluşturur. Fakat $R(d)_{-d} = R_0$ olduğundan e_i' ler $-d$ dereceli homojen elemanlardır.

3.4.7 Önerme. $d_1, d_2, ..., d_m \in \mathbb{Z}$ verilsin. Bu durumda

$$M = R(d_1) \oplus ... \oplus R(d_m)$$

her $1 \leq i \leq m$ için baz elemanları $-d_i$ dereceli homojenler olan bir derecelendirilmiş serbest modüldür.

İspat: [9].

3.4.8 Uyarı. Kaydırılmış serbest modüllerin, genel olarak

$$M = R(-d_1) \oplus ... \oplus R(-d_m)$$

formunda olanları ile ilgileniriz. Burada, $e_1, ..., e_m$ standart baz elemanlarının dereceleri sırasıyla $d_1, ..., d_m$' dir.

3.4.9 Tanım. M ve N, R üzerinde derecelendirilmiş modüller olsun. Her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\varphi(M_t) \subset N_{t+d}$$

ise, $\varphi : M \to N$ homomorfizmasına d dereceden derecelendirilmiş homomorfizma denir.

3.4.10 Örnek. A, girdileri R halkasındaki d dereceden homojen polinomlar olan bir $m \times p$ matris olsun. Bu durumda, her $f \in R^p$ için

$$\begin{aligned} \phi : R^p &\to R^m \\ f &\to A.f \end{aligned}$$

d dereceden bir derecelendirilmiş homomorfizmadır.
$f = (f_1, ..., f_p) \in R^p$ için

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \phi(f_1, ..., f_p) \\ &= \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1p} \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ h_{m1} & \cdots & h_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p} \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_p \end{pmatrix}_{p \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} h_{11}.f_1 + \cdots + h_{1p}.f_p \\ . \\ . \\ . \\ h_{m1}.f_1 + \cdots + h_{mp}.f_p \end{pmatrix}_{m \times 1} \end{aligned}$$

Burada, $deg(h_{ij}.f_i) = deg(h_{ij}) + deg(f_i)$
$= d + t$
olduğundan ϕ, d dereceden bir derecelendirilmiş homomorfizmadır.

3.4.11 Örnek. $M =< f_1, f_2, ..., f_m >$ bir derecelendirilmiş R-modül ve f_i' ler derecesi d_i' ler olan homojen polinomlar olsun. e_i' ler R^m' nin standart baz elemanları olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : R(-d_1) \oplus .... \oplus R(-d_m) &\to M =< f_1, ..., f_m > \\ e_i &\to f_i \end{aligned}$$

homomorfizması, 0 dereceden derecelendirilmiş bir homomorfizmadır.
3.4.7 Önerme' den

$$R(-d_1) \oplus ... \oplus R(-d_m) = M$$

modülünde

$$der(e_i) = d_i$$

olur.

$$N_t = R(-d_1)_t \oplus ... \oplus R(-d_m)_t = R(-d_1)_{t-d_1} \oplus ... \oplus R(-d_m)_{t-d_m}$$

olsun. $g \in N_t$ ise,

$$g = (g_1, g_2, ..., g_m) \text{ ve } der(g_i) = t - d_i$$

dir.

$g = (g_1, g_2, ..., g_m) = g_1e_1 + g_2e_2 + ... + g_me_m$ için,

$$\begin{aligned} \phi(g) &= \phi(g_1e_1 + g_2e_2 + ... + g_me_m) \\ &= g_1\phi(e_1) + g_2\phi(e_2) + ... + g_m\phi(e_m) \\ &= g_1f_1 + g_2f_2 + ... + g_mf_m \end{aligned}$$

Burada, $der(g_if_i) = der(g_i) + der(f_i)$

$$\begin{aligned} &= (t - d_i) + d_i \\ &= t \\ &\implies \phi(g) \in M_t = M_{t+0} \end{aligned}$$

Böylece, ϕ derecesi 0 olan bir derecelendirilmiş homomorfizmadır.

$h \in M =< f_1, ..., f_m >$ ise,

$$h = h_1f_1 + ... + h_mf_m$$

olacak şekilde $h_1, ...h_m \in R$ vardır.

$$h_1e_1 + ... + h_me_m \in R(-d_1) \oplus ... \oplus R(-d_m)$$
$$\phi(h_1e_1 + ... + h_me_m) = h$$

Böylece, ϕ örtendir.

3.4.12 Örnek. A, girdileri R halkasındaki d dereceden homojen polinomlar olan bir $m \times p$ matris olsun. Eğer, j. sütundaki girdiler d_j dereceli homojen polinomlar fakat derece sütunda değişiyor ise,

$$\begin{aligned} \phi : R(-d_1) \oplus ... \oplus R(-d_m) &\to R^m \\ f &\to A.f \end{aligned}$$

sıfır dereceden derecelendirilmiş bir homomorfizmadır.

Daha genel olarak, A, ij. girdisi $a_{ij} \in R$ ve i, j için derecesi $d_j - c_i$ olan homojen polinom olsun. Bu durumda,

$$\phi : R(-d_1) \oplus ... \oplus R(-d_p) \to R(-c_1) \oplus ... \oplus R(-c_m)$$
$$f \to A.f$$

sıfır dereceden derecelendirilmiş bir homomorfizmadır.

3.5 Derecelendirilmiş Çözülümler

Bölüm 3.4' te verilen derecelendirilmiş modül, d ile kaydırılmış modül ve sıfır dereceden homomorfizma kavramları derecelendirilmiş çözülüm kavramı için temel oluşturur. Bu bölümde derecelendirilmiş çözülüm kavramının tanımı ile birlikte bir serbest çözülümün derecelendirilmiş formda yazılışına ilişkin örnek verilecektir.

3.5.1 Tanım. M bir derecelendirilmiş R-modül olsun. F_i modülleri,

$$R(-d_1) \oplus ... \oplus R(-d_p)$$

formunda kaydırılmış serbest derecelendirilmiş modüller ve bunların arasında sıfır dereceden derecelendirilmiş homomorfizmalar var ise,

$$\cdots F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

çözülümüne, M' nin derecelendirilmiş serbest çözülümü denir.

3.5.2 Örnek. $R = k[x, y]$ ve $M =< x^2, xy, y^3 >$ modülünü alalım. 3.3.6 Örnek' ten M modülünün serbest çözülümünün

$$0 \to R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi bu modülün derecelendirilmiş çözülümünü yazalım.

$f_1 = x^2,\ der(f_1) = 2$

$f_2 = xy,\ der(f_2) = 2$

$f_3 = y^3,\ der(f_3) = 3$

Bu durumda,

$$\varphi_1 : R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} M$$

yazılır.

$$\varphi_2 : F_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3)$$

olacak şekilde F_1 modülünü bulalım.

$c_1 = 2,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3$

$a_{11} = y\ \ d_1 - c_1 = 1 \implies d_1 - 2 = 1 \implies d_1 = 3$

$a_{12} = y^3\ \ d_2 - c_1 = 3 \implies d_2 - 2 = 3 \implies d_2 = 5$

$a_{33} = -x\ \ d_3 - c_3 = 1 \implies d_3 - 3 = 1 \implies d_3 = 4$

$$\implies \varphi_2 :\ R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3)$$

sıfır dereceden bir homomorfizmadır.

Benzer şekilde,

$$\varphi_3 : F_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$$

olacak şekilde F_2 modülünü bulalım.

$c_1 = 3,\ c_2 = 4,\ c_3 = 5$

$a_{11} = y^2\ \ d_1 - c_1 = 2 \implies d_1 - 3 = 2 \implies d_1 = 5$

Böylece,

$$\varphi_3 : R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$$

sıfır dereceden bir homomorfizmadır.

Buradan, $M =< x^2, xy, y^3 >$ modülünün

$$0 \longrightarrow R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}}$$

$$R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

derecelendirilmiş serbest çözülümü elde edilir.

4. SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTI SAYILARI

Bir derecelendirilmiş serbest çözülümde, diferansiyeli tarif etmek genellikle oldukça zordur. Böyle durumlarda, Betti sayısı, projektif boyut, Poincaré serisi gibi sayısal değişmezler ile ilgili bilgiler elde etmeyi deneriz. Bu bölümde [2], [3], [10] ve [11] numaralı kaynaklar kullanılmıştır.

4.1 Betti Sayıları

4.1.1 Tanım. M bir sonlu üretilmiş R-modül ve

$$\mathcal{F} : \cdots \to F_i \stackrel{\varphi_i}{\to} F_{i-1} \stackrel{\varphi_{i-1}}{\to} \cdots \stackrel{\varphi_2}{\to} F_1 \stackrel{\varphi_1}{\to} F_0$$

M' nin bir minimal derecelendirilmiş serbest çözülümü olsun. M'nin i. Betti sayısı,

$$b_i^R(M) = rank(F_i)$$

olarak tanımlanır.
M' nin izomorfizma altında bir tek minimal derecelendirilmiş serbest çözülümü olduğundan Betti sayıları, M' nin minimal derecelendirilmiş serbest çözülümünden bağımsızdır.

4.1.2 Tanım. $\mathcal{G}$, M R-modülünün bir derecelendirilmiş serbest çözülümü olsun.

$$maks\{i \mid G_i \neq 0\}$$

sayısına, $\mathcal{G}$ serbest çözülümünün uzunluğu denir. $\mathcal{G}$' nin uzunluğu sonlu ise, $\mathcal{G}$' ye sonlu çözülüm, diğer durumda $\mathcal{G}$' ye sonsuz çözülüm denir.
M modülünün projektif boyutu

$$pb_R(M) = maks\{i \mid b_i^R \neq 0\}$$

sayısıdır. Bir başka deyişle, $pb_R(M)$, M' nin $\mathcal{F}$ minimal serbest çözülümünün uzunluğudur.
M' nin R üzerindeki Poincaré serisi

$$P_M{}^R(t) = \sum_{i \geq 0} b_i^R(M) t^i$$

formülü ile elde edilir.

4.1.3 Örnek. $R = k[x,y]$ ve $M =< x^2, xy, y^3 >$ olsun. R/M' nin minimal serbest çözülümünün,

$$0 \to R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olduğunu 3.3.6 Örnek' ten biliyoruz. Burada,

$pb_R(R/M) = maks\{i \mid b_i^R(M) \neq 0\} = 3$

$P_{R/M}{}^R(t) = \sum_{i=0}^{3} b_i^R(R/M)t^i$

$\quad = b_0^R(R/M)t^0 + b_1^R(R/M)t^1 + b_2^R(R/M)t^2 + b_3^R(R/M)t^3$

$\quad = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$

olarak bulunur.

4.2 Derecelendirilmiş Betti Sayıları

Bu bölümde, derecelendirilmiş Betti sayılarını tanıtacağız.

4.2.1 Tanım. M' nin bir minimal derecelendirilmiş serbest çözülümü,

$$\mathcal{F} : \cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

olsun. $\mathcal{F}$ derecelendirilmiş çözülüm olduğundan, her bir F_i serbest modülü $R(-p)$ formundaki modüllerin bir direkt toplamıdır. M' nin derecelendirilmiş Betti sayısı,

$$b_{i,p}^R(M) = R(-p) \text{ formundaki } F_i \text{ modüllerindeki toplamların sayısı}$$

olarak tanımlanır.

M R-modülünün derecelendirilmiş Poincaré serisi,

$$P_M^R(t,z) = \sum_{i \geq 0,\ p \in \mathbb{Z}} b_{i,p}^R(M) t^i z^p$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde, serbest R-modüllerin herhangi bir $\mathcal{G}$ kompleksi için $\mathcal{G}$' nin Poincaré serisi,

$$P_{\mathcal{G}}(t) = \sum_i rank(G_i) t^i$$

olarak tanımlanır.

4.2.2 Örnek. $M =< x^2, xy, y^3 >$ ve $R = k[x,y]$ olsun. 3.5.2 Örnek' ten R/M' nin derecelendirilmiş serbest çözülümünün

$$\mathcal{G} : 0 \longrightarrow R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}}$$

$$R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olduğunu biliyoruz.

R/M' nin derecelendirilmiş Betti sayıları, $F_0 = R(-0)$ ve $i = 0$, $p = 0$ olduğundan,

$$b_{0,0} = b^R_{0,0}(R/M) = 1$$

$F_1 = R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3)$ ve $i = 1$, $p = 2$, $p = 3$ olduğundan,

$$b_{1,2} = b^R_{1,2}(R/M) = 2$$

$$b_{1,3} = b^R_{1,3}(R/M) = 1$$

$F_2 = R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$ ve $i = 2$, $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$ olduğundan,

$$b_{2,3} = b^R_{2,3}(R/M) = 1$$

$$b_{2,4} = b^R_{2,4}(R/M) = 1$$

$$b_{2,5} = b^R_{2,5}(R/M) = 1$$

$F_3 = R(-5)$ ve $i = 3$ $p = 5$ olduğundan,

$$b_{3,5} = b^R_{3,5}(R/M) = 1$$

olarak bulunur.

R/M' nin, R üzerindeki derecelendirilmiş Poincaré serisi,

$$\begin{aligned} P^R_{R/M}(t,z) &= \textstyle\sum_{i\geq 0,\ p\in\mathbb{Z}} b^R_{i,p}(R/M)t^i z^p \\ &= b_{0,0}t^0z^0 + b_{1,2}t^1z^2 + b_{1,3}t^1z^3 + b_{2,3}t^2z^3 + b_{2,4}t^2z^4 + b_{2,5}t^2z^5 + b_{3,5}t^3z^5 \\ &= 1 + 2tz^2 + tz^3 + t^2z^3 + t^2z^3 + t^2z^4 + t^2z^5 + t^3z^5 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.3 Betti Tabloları

Minimal serbest çözülümlerin sayısal değişmezleri, modül hakkında oldukça fazla bilgi içerirler. Bu sebeple, Betti diyagramı olarak isimlendirilen tablo bize bu sayısal değişmezleri görüntülemenin derli toplu bir yolunu sunar. Betti sayıları, iki yolla bir tablo şeklinde verilebilir.

1. Yol: Satırlar ve sütunlardaki etiketler sırasıyla yukarıya ve sağa doğru artar. En alttaki satır, 0. satır ve başlangıç sütunu, 0. sütundur. i. sütundaki ve p. satırdaki girdi $b_{i,p}$' dir. Böylece i. sütun minimal derecelendirilmiş serbest çözülümün i. adımındaki veriyi içerir. Olmayan Betti sayıları boş bırakılır veya $-$ ile gösterilir. Bu tablo,

$$\begin{array}{cccc} b_{0,p} & b_{1,p} & \cdots & b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{0,1} & b_{1,1} & \cdots & b_{i,1} \\ b_{0,0} & b_{1,0} & \cdots & b_{i,0} \end{array}$$

formundadır.

4.3.1 Örnek. 4.2.2 Örnek' ten $M = < x^2, xy, y^3 >$ modülünün derecelendirilmiş Betti sayılarının, $b_{0,0} = 1$, $b_{1,2} = 2$, $b_{1,3} = 1$, $b_{2,3} = 1$, $b_{2,4} = 1$, $b_{2,5} = 1$ olduğunu biliyoruz.
Bu durumda, 4.2.2 Örnek' teki $\mathcal{G}$ çözülümünün Betti diyagramı,

$$\begin{array}{ccc} - & - & 1 \\ - & - & 1 \\ - & 1 & 1 \\ - & 2 & - \\ - & - & - \\ 1 & - & - \end{array}$$

olarak elde edilir.

2. Yol: Satırlardaki ve sütunlardaki etiketler sırasıyla sağa ve aşağı doğru artar. i. sütundaki ve p. satırdaki girdi $b_{i,i+p}$' dir. i. sütun, minimal derecelendirilmiş serbest çözülümün i. adımındaki veriyi içerir. Tabloda, her bir sütunun üzerinde i. Betti sayısı b_i olan ek bir satır vardır. Bu Betti sayılarının olduğu üst satırın altı çizilidir. Solda ek bir sütun vardır. Bu sütun, satırların etiketlerini içerir ve diğer sütunlardan dikey bir doğru ile ayrılmıştır. Olmayan Betti sayıları · veya – ile gösterilir. Bu tablo, Macaulay ve Macaulay2 gibi bilgisayar programlarında bulunan tablodur. Bu sebeple, bu tipten olan Betti diyagramına bilgisayar tablosu da denir. Bu tablo,

$$\begin{array}{c|ccccc} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ \hline 0 & b_{0,0} & b_{1,1} & b_{2,2} & \cdots \\ 1 & b_{0,1} & b_{1,2} & b_{2,3} & \cdots \\ 2 & b_{0,2} & b_{1,3} & b_{2,4} & \cdots \\ 3 & b_{0,3} & b_{1,4} & b_{2,5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

formundadır.

4.3.2 Örnek. 4.2.2 Örnek' ten, $M =< x^2, xy, y^3 >$ modülünün Betti sayılarının, $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, Betti tablosu,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & - & 2 & 1 & - \\ 2 & - & 1 & 1 & - \\ 3 & - & - & 1 & - \end{array}$$

olarak elde edilir.

4.3.3 Uyarı. Betti tablolarında, sağdan sola doğru görünen Betti sayıları, çözülümde tam tersi sıradadır.

4.4 Sayısal Yarıgruplar ve Betti Sayıları

k bir cisim olsun. $k[x_1, ..., x_p]$ polinom halkasını ve $S =< n_1, ..., n_p >$ sayısal yarıgrubunu alalım. $u = (u_1, ..., u_p)$ ve $x^u = x_1^{u_1} ... x_p^{u_p}$ olmak üzere,

$$I_S =< x^u - x^v \mid u, v \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^{p} u_i n_i = \sum_{i=1}^{p} v_i n_i >$$

olduğunu biliyoruz [11].

$S =< n_1, n_2 >$, $n_1 < n_2$ ve $obeb(n_1, n_2) = 1$ olsun.

$$u_1 n_1 + u_2 n_2 = v_1 n_1 + v_2 n_2$$

eşitliğinden,

$$u_1 = n_2,\ v_2 = n_1$$

yazılabilir. Böylece,

$$I_S =< x_1^{n_2} - x_2^{n_1} >$$

bulunur.

I_S idealinin üreteçlerinin herhangi bir minimal kümesi, $k[S]$ halkasının 1. Sizigisidir ve bunun eleman sayısı $k[S]$ halkasının 1. Betti sayısıdır. 1. Sizigilerin arasındaki bağıntının bir minimal kümesi, $k[S]$' nin 2. Sizigi kümesidir. Bunun eleman sayısı da $\beta_2(k[S])$ olarak gösterilir. Bu şekilde devam edersek, $k[S]$ halkasının Betti dizisi,

$$(\beta_0(k[S]), \beta_1(k[S]), \beta_2(k[S]), ...)$$

listesidir.

$$k[S] \cong k[x_1, x_2]/I_S = k[x_1, x_2]/ < x_1^{n_2} - x_2^{n_1} >$$

olduğundan, Betti dizisi (1,1) olarak elde edilir.

Herzog, $S =< n_1, n_2, n_3 >$ olduğunda I_S idealinin en fazla üç binom tarafından üretildiğini göstermiştir [11]. Her bir $1 \leq i \leq 3$ için, S yarıgrubunun diğer iki üreteci tarafından üretilen yarıgruptaki en küçük pozitif $c_i n_i$ çarpımına bakarız ve bu bize I_S için bir binom üreteci verir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

4.4.1 Örnek. S bir sayısal yarıgrup olsun. $S =< 6, 7, 10 >$ alalım.

$$4.6 = 2.7 + 1.10$$

$$4.7 = 3.6 + 1.10$$

$$2.10 = 1.6 + 2.7$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu bize,

$$I_S =< x^4 - y^2 z^1,\ y^4 - x^3 z^1,\ z^2 - xy^2 >$$

idealini verir.

Böylece, I_S' nin üreteç sayısı iki ise, $k[S]$' nin Betti dizisi (1,2,1), eğer I_S ideali üç üreteçli ise $k[S]$' nin Betti dizisi (1,3,2) olur.

$S =< n_1, n_2, n_3, n_4 >$ sayısal yarıgrubunu alalım. Bu durumda, I_S' nin üreteç sayısı ve $k[S]$' nin Betti sayıları için bir üst sınır yoktur. Bir örnekle açıklayalım.

4.4.2 Örnek. $n \geq 2$ için,

$$\mathcal{B}_n =< (2n-1)2n, (2n-1)(2n+1), 2n(2n+1), 2n(2n+1) + 2n - 1 >$$

Bresinsky sayısal yarıgrubunu alalım. Bresinsky, I_S ideali için üreteç sayısının en az $2n$ olduğunu göstermiştir [3]. Stamate [3], $\mathcal{B}_n$ sayısal yarıgrubunun Betti dizisini $(1, 4n, 8n - 4, 4n - 3)$ olarak hesaplamıştır.

5. KAYNAKLAR

[1] J.C. Rosales and P.A. Garcia-Sanchez, *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, 20, New York, USA : Springer, 2009.

[2] J. Herzog, "Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings", Ph. D. dissertation, Lousiana State University, USA, 1969.

[3] D.I. Stamate, "Betti Numbers for Numerical Semigroup Rings", *Multigraded Algebra and Applications Springer Proceedings and Statistics*, 238, 133-157, 2018.

[4] P.A. Garcia-Sanchez, *Numerical Semigroups Mini-Course*.

Erişim adresi: https://www.ugr.es/∼pedro/minicurso-porto.pdf, t.y.

[5] J.A. Smith "Hilbert Sequences of Monomial Ideals", dissertation thesis, The Division of Natural Science and Mathematics of Bard College, New York, 2002.

[6] A. Boocher and E. Grifo, *Commutative Algebra*, 77-111, Springer, Cham, 2021.

[7] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebra Geometry*, New York, USA: Springer, 2005.

[8] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, Cham, 2005.

[9] E. Grigorescu "Hilbert Series and Free Resolutions", dissertation thesis, The Division of Natural Science and Mathematics of Bard College, New York, 2003.

[10] I. Peeva, *Graded Syzygies*. Algebra and Applications. 14. New York, USA : Springer-Verlag, London, 2011.

[11] J. Herzog, "Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings", *Manuscripta Math*, 3, 175-193, 1970.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Beyza Gergin

Doğum tarihi ve yeri : 19.01.1997 Manisa

e-posta : byzagrgin@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2022
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2018
Lise	Akhisar Anadolu Lisesi	2014