T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ UZAYLARDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

FATİH ÇELİK

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE** **(Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, HAZİRAN - 2022

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Değişken Üslü Uzaylarda Polinomlarla Yaklaşım**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Fatih ÇELİK

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ UZAYLARDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM
DOKTORA TEZİ
FATİH ÇELİK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2022

Bu tez çalışması giriş ve kaynaklar dahil olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş kısmında bu tez çalışmasında araştırılan konu ile ilgili literatürde var olan çalışmaların kısa özeti verilmiş ve bu tez konusunun güncelliği açıklanmıştır.

Ön bilgiler bölümünde temel tanım ve teoremler verilmiş, ayrıca Faber polinomları ve Faber serileri, bunların yaklaşım özellikleri ile ilgili bazı bilgiler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde diskte analitik ve diskin kapanışında sürekli fonksiyonlar uzayında, klasik Hardy ve değişken üslü Hardy uzaylarında Taylor serilerinin eş zamanlı maksimal yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçlar verilmiş ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde disk yerine basit bağlantılı bölge alınarak, klasik Smirnov ve değişken üslü Smirnov sınıflarında Faber serilerinin eş zamanlı maksimal yaklaşım problemlerine bakılmış ve bu problemlerin çözüm yöntemleri incelenmiş, elde edilen sonuçların ispatı yapılmıştır.

Beşinci bölümde tez çalışmasında kullanılan kaynaklar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üslü Lebesgue uzayları, Maksimal yaklaşım, Taylor serileri, Faber polinomları, Faber serileri, En iyi yaklaşım sayısı

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 63

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN THE VARIABLE EXPONENT SPACES
PH.D THESIS
FATİH ÇELİK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, JUNE - 2022

This thesis consists of five chapters including introduction and sources.

In the introduction part, a brief summary of the studies in the mathematical literature related to the subject investigated in this thesis study is given and the topicality of this thesis subject is explained.

In the preliminary information section, basic definitions and theorems are given, as well as some information about Faber polynomials and Faber series and their approximation properties.

In the third chapter, the results about the simultaneous maximal approximation properties of Taylor series in the space of analytic and continuous functions at the closure of the disc, classical Hardy and variable exponent Hardy spaces are given and proven.

In the fourth chapter, by taking the simply connected region instead of the disc, simultaneous maximal approximation problems of Faber series, in the classical Smirnov and variable exponent Smirnov classes are examined, the solution methods of these problems are examined and the results obtained are proved.

In the fifth chapter, the sources used in the thesis work are given.

KEYWORDS: Lebesgue spaces with variable exponent, Maximal approximation, Taylor series, Faber polynomials, Faber series, Number of best approaches

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 63

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	: Pozitif Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\boldsymbol{D}$	: Birim disk
$\boldsymbol{G}$	: Basit bağlantılı ve sınırlı bölge
$\overline{\boldsymbol{G}}$	: G 'nin kapanışı
$\boldsymbol{G}^{-}$	: $\overline{G}$ ' nin tümleyeni
$\boldsymbol{D}^{-}$	: Birim diskin dış bölgesi
$\boldsymbol{\varphi}$	: G^{-}den D^{-} üzerine konform dönüşüm
$\boldsymbol{\psi}$	: φ'nin tersi
$\boldsymbol{D_R}$	: R yarıçaplı disk
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu eğri
$\boldsymbol{W_n}$	: Derecesi n 'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfı
$\boldsymbol{\Phi_n(z)}$	: $\overline{G}$ için $n.$ dereceden Faber polinomları
$\boldsymbol{\Gamma_R}$	: R. seviye eğrisi
$\boldsymbol{G_R}$	: Γ_R eğrisi ile sınırlı sonlu bölge
$\boldsymbol{L_p(\Gamma)}$	: Γ üzerinde p. dereceden Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{E^p(G)}$	: G bölgesinde analitik fonksiyonların Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{H^p(D_R)}$	: D_R'de Hardy uzayı
$\boldsymbol{H^{p(\cdot)}(D_R)}$	: D_R'de değişken üslü Hardy uzayı
$\boldsymbol{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$	: Γ üzerinde değişken üslü Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{E^{p(\cdot)}(G)}$	: G bölgesinde değişken üslü Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{E^{p(\cdot)}(G_R)}$	: G_R bölgesinde değişken üslü Smirnov sınıfı

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim süresince, bana her türlü desteği sağlayan, engin bilgi birikimini, derin tecrübesini esirgemeyen, bu yolda karşılaştığım her zorlukta beni doğru yönlendiren, değerli vakitlerini ayırmakta tereddüt etmeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince samimi ve arkadaşça yaklaşımlarıyla destek sağlayan, motivasyonumu artıran değerli hocalarım Prof. Dr. Ali GÜVEN'e, Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR'a çok teşekkür ederim.

Beraberce öğrencilik süreci yaşadığımız, çalışma azmimin oluşmasında önemli katkıları bulunan, kızım İlkay ÇELİK'e, oğlum Şahan ÇELİK'e, ve kızım İrem ÇELİK'e desteklerinden dolayı müteşekkirim.

Hayatımın her aşamasında sonsuz katkıları olan, babam Hakkı ÇELİK'e, annem Herdem ÇELİK'e ve varlıkları ile daima güç bulduğum kardeşlerime sonsuz teşekkürler.

Balıkesir, 2022 **Fatih ÇELİK**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belirli özelliklere sahip fonksiyonların oluşturduğu uzaylarda yaklaşım problemleri incelenmektedir. Bu uzaylardan alınan her obje yaklaşılan fonksiyon olarak değerlendirilir. Yaklaşan fonksiyonlar olarak bu uzayın daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt uzaylar alınır. Bu alt uzaylar genellikle trigonometrik polinomlar, cebirsel polinomlar, rasyonel fonksiyonlar ve diğer basit özelliklere sahip olan fonksiyonlar yardımı ile oluşturulur.

Literatürde değişik fonksiyon uzaylarında yaklaşımla ilgili geniş bilgiler ve sonuçlar özel halde [29], [49], [16], [68] kaynaklarında detaylı bir şekilde verilmektedir. Örneğin: Sürekli fonksiyonlar sınıfında, sabit üslü Lebesgue uzaylarında, bu uzayların periyodik benzerlerinde klasik sonuçlar [49] kaynağında, daha sonra elde edilen sonuçlar [16] kaynağında, kompleks düzlemde ve onun basit bağlantılı bölgelerinde yaklaşım teorisi alanında elde edilmiş sonuçların bir kısmı ise [20] kaynağında görülebilir. Üstelik kompleks düzlemde yaklaşım problemlerinin incelenmesi sürecinde Faber polinomları ve bu polinomların yardımı ile oluşturulan Faber serileri vazgeçilmez objeler olarak araştırılmaktadır. Faber serilerinin avantajı, onların diskte tanımlı Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgelere direkt genelleştirmeleri olmasıdır. Bu açıdan bakıldığında basit bağlantılı bölgelerde elde edilen sonuçların ispatında kullanılan yöntemler diskteki benzer sonuçların ispatında kullanılan yöntemlerin genelleşmeleri olarak karşımıza çıkmaktadır.

Yaklaşım teorisinin bir diğer önemli problemi eş zamanlı yaklaşım problemleri olarak bilinen problemlerdir. Bu tip problemlerde belli mertebeye kadar türevleri olan fonksiyonlar uzayında yaklaşım problemleri incelenir. Bu tip yaklaşımın başlıca özelliği belli sınıftan olan yaklaşım araçlarının verilen fonksiyonlara, bu araçların türevlerinin ise bu fonksiyonların türevlerine yaklaşabilir olmasıdır. Böylece eş zamanlı yaklaşım normal yaklaşımın bir genelleştirilmesimesi olarak da nitelendirilebilir.

Yaklaşım teorisinde geleneksel araştırma problemlerinden biri de maksimal yakınsaklık problemidir. Bu tip problemlerde kompleks düzlemin belirli bölgelerinde (kanonik bölgelerde) tanımlı fonksiyonlar uzayı verilir, fakat yaklaşım problemi kanonik bölgeden daha dar olan alt bölgede araştırılır. Bunun sonucunda alt bölgede elde edilen yaklaşım hızının kanonik bölgedeki yaklaşım hızından daha büyük olacağı beklenebilir. Bu

beklentinin doğruluğu sadece maksimal yaklaşımın incelendiği ve bu yönde bir dizi sonuçların elde edildiği çalışmaları kapsayan [12] kaynağında da görülebilir.
Matematik literatürde kompleks düzlemin alt kümelerinde tanımlı fonksiyon uzaylarında hem maksimal yaklaşım hem de eş zamanlı yaklaşımın araştırıldığı çalışmalar yok denecek kadar azdır.

Bu tez çalışmasının başlıca özelliği kompleks düzlemin belirli alt kümelerinde tanımlı fonksiyon uzaylarında aynı zamanda hem eş zamanlı yaklaşımın hem de maksimal yaklaşım problemlerinin birlikte incelenmesidir. Tezde bu problemler sürekli fonksiyonlar uzayında, klasik Hardy ve değişken üslü Hardy uzaylarında, klasik Smirnov ve değişken üslü Smirnov sınıflarında araştırılmaktadır.

Tez çalışmasını oluşturan başlıca sonuçların ispatında kullanılan yöntemler genel olarak, sabit veya değişken üslü Smirnov uzaylarında benzer problemlerin araştırıldığı [33]-[45] çalışmalarında ve [12] kaynağında uygulanan yöntemlerdir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir **eğri** denir. $\gamma(a)=\gamma(b)$ olması halinde γ 'ya **kapalı eğri**, γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa γ 'ya **Jordan eğrisi** denir. γ' türevi var ve sürekli ise γ 'ya **diferansiyellenebilir eğri,** diferansiyellenebilir γ eğrisi için eğer her $t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)\neq 0$ oluyorsa γ 'ya **düzgün eğri** denir [1, sayfa: 120].

2.1.2 Tanım $a\le t\le b$ için $\gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$ sürekli bir eğri olsun. $[a,b]$ kapalı aralığının

$a=t_1<t_2<t_3<...<t_{n+1}=b$

biçimindeki parçalanışı olan keyfi bir $\{t_{n+1}\}$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n}\left|z(t_{k+1})-z(t_k)\right|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa γ eğrisine **sonlu uzunluklu eğri** denir [2, sayfa: 417].

2.1.3 Tanım $(V,\|.\|)$ bir normlu uzay olsun. V üzerinde $d(x,y)=\|x-y\|$ şeklinde tanımlanan metriğe $\|.\|$ **normu ile ilişkili metrik** ve (V,d) uzayına $\|.\|$ **normu ile ilişkili metrik uzay** denir [3, sayfa: 36]**.**

2.1.4 Tanım $(V,\|.\|)$ normlu uzay olsun. Eğer $\|.\|$ normu ile ilişkili metrik uzay (V,d) tam metrik uzay ise $(V,\|.\|)$ uzayına **Banach uzayı** denir [3, sayfa: 48].

2.1.5 Tanım Bir f kompleks değişkenli fonksiyonu z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 noktasında **analitiktir** denir [1, sayfa: 97].

2.1.6 Tanım B, $\mathbb{C}$ 'de bir bölge olmak üzere $f:B\to\mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0\in B$ noktasından geçen ve aralarındaki açı α olan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0=f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 'da bir **konform dönüşümdür** denir. Eğer her $z_0\in B$ noktasında f konform ise f, B 'de **konformdur** denir [3, sayfa:295].

2.1.7 Tanım γ kompleks düzlemde bir eğri olsun. Eğer U çemberini γ 'ya resmeden ve

U çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa γ eğrisine **analitik eğri** denir [4].

Her analitik eğri bir Jordan eğrisidir.

2.1.8 Tanım f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\underset{x}{esssup}\, f(x) = \inf \{ c : f(x) \leq c \text{ hemen her yerde} \}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun **esaslı supremumu** denir [3, sayfa:26].

2.1.9 Tanım f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\underset{x}{essinf}\, f(x) = \sup \{ c : f(x) \geq c \text{ hemen her yerde} \}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun **esaslı infimumu** denir [3, sayfa:26].

2.1.10 Tanım A Lebesgue ölçülebilir bir küme olsun**.** $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\begin{cases} \int_A |f(x)|^p dx < \infty, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{x \in A}{ess\sup} |f(x)| < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

şartını sağlayan A üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının oluşturduğu küme $L^p(A)$ ile gösterilir. $L^p(A)$ kümesine **Lebesgue uzayı** denir [3,sayfa:27].

2.1.11 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun**.** $1 \leq p < \infty$ için

$$\| f \|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < \infty$$

şartını sağlayan Γ üzerinde tanımlı bütün Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların kümesine **Lebesgue uzayı** denir ve $L^p(\Gamma)$ ile gösterilir.

$L^p(\Gamma)$ uzayı $\| f \|_{L^p(\Gamma)}$ normu ile bir Banach uzayıdır [5].

2.1.12 Tanım $a_k \in \mathbb{C}, k = 0,1,2,...,n$ ve $|a_n| \neq 0$ olmak üzere $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ olarak tanımlanan ifadeye n dereceli **cebirsel polinom** denir [6, sayfa:2].

2.1.13 Tanım Kompleks düzlemde bağlantılı ve kapalı kümeye **kontinyum,** bağlantılı ve açık kümeye de **bölge** denir [7]**.**

2.1.14 Tanım A, $\mathbb{C}$'de bir bölge olsun. A içindeki her γ eğrisi yine A içinde sabit bir z_0 noktasına homotop ise A'ya **basit bağlantılı bölge** denir [1, sayfa:25].

2.1.15 Tanım G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge, f, G bölgesi içerisinde analitik ve $p>0$ olsun. G içindeki $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir $\{\Gamma_n\}$ dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

koşulunu n 'den bağımsız bir M sabiti ile sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına **Smirnov sınıfı** denir ve $E_p(G)$ ile gösterilir. Özel halde $G := D := \{z : |z| < 1\}$ ise $H^p(D)$ **Hardy uzayı** elde edilir [2].

2.1.16 Teorem (Cauchy İntegral Formülü) G bir bölge ve γ bu bölge içinde kapalı bir eğri olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, G 'de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

olur [1, sayfa:148].

2.1.17 Teorem (Sınırsız Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü) G sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. $f, \mathbb{C}-G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z), & z \in C - \bar{G} \\ f(z) & , \quad z \in G \end{cases}$$

olur [8, sayfa:486].

2.1.18 Teorem (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi) $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Buna göre, G bölgesini D birim diskine, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [9].

2.1.19 Teorem $E \subset \mathbb{C}$ en az iki noktadan oluşan, basit bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum olsun**.** Bu durumda $\mathbb{C} \setminus E$ bölgesini $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$ bölgesine

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

şartları altında resmeden φ konform dönüşümü tektir [9].

2.1.20 Teorem G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi olsun. Buna göre G bölgesinden D birim diske tanımlı her konform dönüşüm $\bar{G}$ 'ye bire bir ve sürekli olarak genişletilebilir [10, sayfa:24]**.**

2.1.21 Tanım $t \in [a,b]$ için $\gamma,\ z = z(t)$ parametrik gösterimine sahip sonlu uzunluklu eğri olsun. $0 < \alpha \le 1$ olduğunda $|z(t_1) - z(t_2)| \le c|t_1 - t_2|^{\alpha}$ olacak şekilde bir c sabiti bulunuyorsa γ eğrisine α dereceden **Lipschitz eğrisi** denir ve $\gamma \in Lip\alpha$ olarak gösterilir [11].

2.1.22 Teorem (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.

Eğer $f \in L_p$ *ve* $g \in L_q$ ise $fg \in L_1$ dir ve

$$\int_{\Gamma} |fg||dz| \le \left\{ \int_{\Gamma} |f|^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{\Gamma} |g|^q |dz| \right\}^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

olur [9].

2.2 Faber Polinomları ve Faber Serileri

$R > 0$ olmak üzere $|z - z_0| < R$ diskinde analitik bir f fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklinde Taylor serisine açıldığı bilinmektedir. Bu seri diskte yakınsak ve bu diskin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Faber serileri, disk durumunda bilinen Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgeler durumuna genelleştirilmesidir.

K, basit bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum olsun. K kontinyumunun tümleyenini G^- ile gösterelim.

$G^- := \mathbb{C} - K$, $D := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ ve $D^- := \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ olmak üzere

Riemann konform dönüşüm teoremine göre; G^- bölgesini D^- bölgesine

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \varphi'(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$$

şartları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü vardır.

φ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitik ve bu nokta fonksiyonun birinci mertebeden bir kutup noktasıdır.

Laurent teoremine göre ∞ noktasının çıkarılmış komşuluğunda φ fonksiyonunun seri açılımı

$$\varphi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \dots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \dots$$

şeklindedir.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left[\varphi(z)\right]^n = \left(\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + ... + \frac{\gamma_k}{z^k} + ...\right)^n$$

$$= \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + ... + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + ...$$

olduğu görülür.

Bu eşitlikte z 'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan ve $n+1$ tane terimin toplamını

$$\Phi_n(z) = \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + ... + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

ile, z 'nin negatif kuvvetlerinden oluşan ve sonsuz terim içeren toplamı ise

$$-E_n(z) = \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + ... + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + ...$$

ile gösterilecek olursa,

$$\left[\varphi(z)\right]^n = \Phi_n(z) - E_n(z), \qquad z \in G^- \tag{2.1}$$

eşitliği yazılır.

$\left[\varphi(z)\right]^n$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında n dereceli bir kutba sahiptir. $\Phi_n(z)$, n dereceli bir polinom, $E_n(z)$ fonksiyonu ise G^- bölgesinde analitik olup $E_n(\infty) = 0$ dır.

2.2.1 Tanım $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Phi_n(z)$ polinomlarına K kontinyumunun *n.* **dereceden Faber polinomları** denir. $z \in G^-$ için (2.1) eşitliğinden

$$\Phi_n(z) = \left[\varphi(z)\right]^n + E_n(z) \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir.

2.2.2 Tanım $\Gamma_R := \left\{ z \in G^- : ve \left|\varphi(z)\right| = R > 1 \right\}$ olmak üzere,

Γ_R eğrilerine K kontinyumunun **seviye eğrileri** denir. $w = \varphi(z)$ dönüşümü konform ve univalent (bire-bir ve analitik) olduğundan, Γ_R kapalı analitik bir eğridir. Bu sebeple Γ_R seviye eğrisi kompleks düzlemi iki bölgeye ayırır. Bu bölgelerden, Γ_R ile sınırlanan sınırlı bölgeyi G_R ve sınırı Γ_R olup, sonsuzluğu içeren sınırsız bölgeyi G_R^- ile gösterelim. G_R ve G_R^- bölgelerine **kanonik** veya **doğal bölgeler** denir.

G^- bölgesini D^- bölgesine dönüştüren $w = \varphi(z)$ dönüşümünün tersini $z = \psi(w)$ ile gösterelim.

Buna göre, ψ fonksiyonu D^- bölgesini G^- bölgesine konform ve univalent (bire-bir ve analitik) olarak resmeder.

$\varphi(\infty)=\infty$ ve $\varphi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\varphi(z)}{z}=\gamma>0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\psi(\infty)=\infty \ \ ve \ \ \psi'(\infty)=\frac{1}{\varphi'(\infty)}=\frac{1}{\gamma}=\beta>0$$

olur.

Bu durumda, ψ fonksiyonu D^- bölgesinde ∞ noktası haricinde analitiktir ve ∞ noktasında bir basit kutba sahiptir. ψ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı,

$$z=\psi(w)=\beta w+\beta_0+\frac{\beta_1}{w}+\frac{\beta_2}{w^2}+...+\frac{\beta_k}{w^k}+..., \quad |w|>1$$

şeklindedir.

$z\in G_R$ için (2.1) eşitliğinden hareketle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\Phi_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{2.3}$$

eşitliği elde edilir.

$z\in G_R$ olduğundan sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$$

olur. Buna göre (2.3) ifadesinden, $z\in G_R$ için

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta \tag{2.4}$$

eşitliği elde edilir.

(2.4) ifadesinde $\zeta=\psi(t)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{t^n\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt, \qquad z\in G_R$$

olduğu görülür. Son eşitlikten görüldüğü gibi $\{\Phi_n(z)\}$ Faber polinomları, $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonunun ∞ noktasının çıkarılmış komşuluğundaki Laurent açılımının Laurent katsayılarıdır. Buna göre,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad z\in G_R \; ve \; |t|>R$$

elde edilir.

2.2.3 Tanım $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonuna $\{\Phi_n(z)\}$ Faber polinomlarının **üreteç fonksiyonu** denir.

2.2.4 Tanım $\{\Phi_n(z)\}$'ler K kontinyumunun Faber polinomarı olsun. $\{a_n\}$ bir karmaşık sayı dizisi olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z)$$

şeklindeki serilere K kontinyumuna göre **Faber serileri** denir.

$\{a_n\}$ bir kompleks sayı dizisi ve $\{\Phi_n(z)\}$'ler K kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere,

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<1, \qquad R>1 \tag{2.5}$$

şartıyla $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z)$ Faber serisi, G_R bölgesinde mutlak yakınsak, G_R bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır [12, sayfa 49].

f fonksiyonu G_R bölgesinde analitik ve sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu için

$$|f(z)|\le M, \qquad z\in G_R$$

olacak şekilde bir M sabiti vardır.

(2.5) şartı sağlanmak üzere , f fonksiyonu için,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k(z), \qquad z\in G_R$$

seri açılımı yazılabilir [12, sayfa 50].

Bu serideki $\{a_k\}$ katsayılarına, f fonksiyonunun Faber katsayıları denir ve

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt$$

formülü ile ifade edilir.

Bu seri G_R bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak olduğundan türev serileri

$$f'(z)=\sum_{K=0}^{\infty}a_k\Phi_k'(z), \qquad z\in G_R$$

$$f''(z)=\sum_{K=0}^{\infty}a_k\Phi_k''(z),\qquad z\in G_R$$

$\dots$

$$f^{(m)}(z)=\sum_{K=0}^{\infty}a_k\Phi_k^{(m)}(z),\qquad z\in G_R \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır.

3. TAYLOR SERİLERİ İLE EŞ ZAMANLI MAKSİMAL YAKLAŞIM

3.1 Taylor Serilerinin Düzgün Normda Eş Zamanlı Maksimal Yakınsaklığı

3.1.1 $R>1$ için D_R, kompleks düzlemde R yarıçaplı disk olmak üzere, D_R diskinde analitik ve $\overline{D}_R$ ' da sürekli fonksiyonların sınıfını $C\left(\overline{D}_R\right)$ ile tanımlayalım.

Bu bölümde $C\left(\overline{D}_R\right)$ sınıfından olan fonksiyonların m. türevine verilen fonksiyonun Taylor serisinin uygun türev serisi ile $|z|\leq 1$ diskinde yaklaşım incelenmiş ve yaklaşım hatası $C\left(\overline{D}\right)$ uzayının normunda değerlendirilmiştir.

$R>1$ olmak üzere, $f\in C\left(\overline{D}_R\right)$ olsun. Bu durumda, Taylor teoremine göre

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad z\in D_R \tag{3.1}$$

olduğu bilinmektedir [12, sayfa 196].

Bu serideki $\{a_k\}$ katsayılarına, f fonksiyonunun Taylor katsayıları denir ve

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{t^{k+1}}dt$$

formülü ile ifade edilir.

Bu seri $|z|<R$ diskinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak olduğundan türev serileri

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{k-1}, \qquad z\in D_R \tag{3.2}$$

$$f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) z^{k-2}, \qquad z\in D_R$$

$\ldots$

$$f^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m}, \qquad z\in D_R \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır.

3.1.2 Tanım $f\in C\left(\overline{D}_R\right)$**,** her $n,m\in\mathbb{N}^+$ ve $m\leq n$ olmak üzere, $f^{(m)}$ türevine Taylor türev serisi ile $|z|\leq 1$ diskinde **maksimal yaklaşım hatası**

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|=\left|f^{(m)}(z)-\sum_{k=m}^{n} a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}\right|, \quad |z|\leq 1 \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.3 Tanım $f \in C\left(\bar{D}_R\right)$ için,

$$\|f\|_{C\left(\bar{D}_R\right)} = \max_{|z|\le R} \left|f(z)\right|$$

şeklinde tanımlanan norma f 'in $\bar{D}_R$ 'deki **düzgün normu** denir.

3.1.4 Tanım W_n derecesi n 'yi aşmayan polinomlar sınıfı olmak üzere,

$$E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C\left(\bar{D}_R\right)} = \inf_{p_n \in W_n} \|f - p_n\|_{C\left(\bar{D}_R\right)}$$

sayısına f fonksiyonu için $C\left(\bar{D}_R\right)$ uzayında cebirsel polinomlarla düzgün normda **en iyi yaklaşım sayısı** denir.

Buna göre p_n ile $\bar{D}_R$ kapalı diskinde f 'ye en iyi yaklaşan polinomunu gösterecek olursak,

$$\left|f(z) - p_n(z)\right| \le E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C\left(\bar{D}_R\right)}, \quad z \in \bar{D}_R \tag{3.5}$$

yazılabilir.

3.1.5 Lemma $|u|<1$ olmak üzere

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} u^{k-m} = \sum_{j=1}^{m} \binom{m-1}{j-1} P(n, m-j)\, u^{n+j-m} \left(\frac{(j-1)!.n}{(1-u)^j} + \frac{j!}{(1-u)^{j+1}} \right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} u^{k-m} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(u^k\right)^{(m)} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u^k \right)^{(m)} = \left(\frac{u^{n+1}}{1-u} \right)^{(m)}.$$

Buradan $\dfrac{u^{n+1}}{1-u}$ ifadesinde 1. türev,

$$\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)' = \frac{(n+1)u^n(1-u) - (-1)u^{n+1}}{(1-u)^2} = \frac{(n+1)u^n(1-u)}{(1-u)^2} + \frac{u^{n+1}}{(1-u)^2}$$

$$= u^n \left(\frac{n+1}{1-u} + \frac{u}{(1-u)^2} \right) = u^n \left(\frac{n}{1-u} + \underset{(1-u)}{\frac{1}{1-u}} + \frac{u}{(1-u)^2} \right) = u^n \left(\frac{n}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} \right)$$

olarak bulunur. 2. türev,

$$\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)'' = \left(u^n \left(\frac{n}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} \right) \right)' = nu^{n-1} \left(\frac{n}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} \right) + u^n \left(\frac{n}{(1-u)^2} + \frac{2}{(1-u)^3} \right)$$

olarak bulunur. Bu sonucun tekrar türevini alarak 3. türevi,

$$\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)''' = n(n-1)u^{n-2}\left(\frac{n}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)+nu^{n-1}\left(\frac{n}{(1-u)^2}+\frac{2}{(1-u)^3}\right)$$

$$+nu^{n-1}\left(\frac{n}{(1-u)^2}+\frac{2}{(1-u)^3}\right)+u^n\left(\frac{n}{(1-u)^3}+\frac{6}{(1-u)^4}\right)$$

$$=n(n-1)u^{n-2}\left(\frac{n}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)+2nu^{n-1}\left(\frac{n}{(1-u)^2}+\frac{2}{(1-u)^3}\right)+u^n\left(\frac{2n}{(1-u)^3}+\frac{6}{(1-u)^4}\right)$$

olarak bulunur. Bu şekilde ardışık türevler alıp m. türev için genelleştirdiğimiz takdirde

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-m)!}u^{k-m}=\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)u^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!.n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right)$$

eşitliği elde edilir. □

3.1.6 Teorem $R>1$ için $f\in C(\bar{D}_R)$ olsun. Her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\le n$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{C(R)(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^n(R-1)}E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)},\quad |z|\le 1$$

olur.

İspat (3.3) den , $f^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m},\qquad z\in D_R$ olduğu biliniyor

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{t^{k+1}}dt$$

olmak üzere (3.4) ifadesi

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}f(t)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]dt,\qquad |z|\le 1 \tag{3.6}$$

olarak yazılır.

$p_n(t)$ ile f fonksiyonuna $C(\bar{D}_R)$ uzayında derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t|=R$ üzerinden ortogonallığı da dikkate alındığında;

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\left(f(t)-p_n(t)\right)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]dt,\qquad |z|\le 1 \tag{3.7}$$

olduğu görülür. (3.5) ve (3.7) den

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m+1}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k-m}}\right||dt|,\qquad |z|\le 1 \tag{3.8}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$|t|=R$ ve $|z|\le 1$ olduğundan Lemma 3.1.5 den, $u=\frac{z}{t}$ olduğunda

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!.z^{k-m}}{(k-m)!.t^{k-m}}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-m)!}u^{k-m}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)u^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!.n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right) \tag{3.9}$$

elde edilir.

Buna göre (3.8) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\left|\frac{z}{t}\right|^{n+j-m}.\left(\frac{(j-1)!.n|t|^j}{|t-z|^j}+\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right)|dt|$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m+1}}.\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+j-m}}.\frac{(j-1)!n|t|^j}{|t-z|^j}|dt|+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m+1}}.\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+j-m}}.\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right]$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\left[\frac{n.(j-1)!}{R^{n+1}2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^j}+\frac{j!}{R^n 2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{j+1}}\right]. \tag{3.10}$$

$|t|=R$ ve $|z|\le 1$ olduğu dikkate alınırsa $|t-z|\ge R-1$ yazılır. Böylece (3.10) eşitsizliğinden

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!.(j-1)!}.\frac{n!}{(n-m+j)!}\left[\frac{n.(j-1)!}{R^n(R-1)^j}+\frac{j!}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}\right]\right)$$

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}.\frac{n!}{(n-m+j)!}.\frac{n}{R^n(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}.\frac{n!}{(n-m+j)!}.\frac{j}{R^{n-1}.(R-1)^{j+1}}\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)}\frac{(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^n}\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}} & ,\quad 1<R<2\\[2mm] \dfrac{1}{R-1} & ,\quad 2<R\end{cases}$$

değerlendirmesi yapılabilir ve sonuç olarak

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{C(R)(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^n(R-1)}E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)},\ |z|\le 1 \tag{3.11}$$

olduğu görülür. □

$m=0$ durumunda bu Teorem ispatı [12, sayfa: 197] de verilmektedir.

Özel halde (3.11) eşitsizliğinde $m=1$ ve $m=2$ alındığında sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\left|R_n(z;f')\right| \leq \frac{n.c(R)}{R^n(R-1)} E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)},$$

$$\left|R_n(z;f'')\right| \leq \frac{n^2 c(R)}{R^n(R-1)} E_n\left(f;\bar{D}_R\right)_{C(\bar{D}_R)}.$$

3.2 Taylor Serilerinin Hardy Uzaylarında Eş Zamanlı Maksimal Yakınsaklığı

Bu alt bölümde $H^p(D_R)$ sınıfından olan fonksiyonların eş zamanlı maksimal yakınsaklığı incelenmiş ve yaklaşım hatası $C(\bar{D})$ uzayı normunda değerlendirilmiştir.

3.2.1 Tanım f **,** $R>0$ için D_R diskinde analitik olsun. $1\leq p<\infty$ olmak üzere**,** f fonksiyonu

$$\sup_{0<r<R} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şartını sağlıyor ise $f \in H^p(D_R)$' dir.

$f \in H^p(D_R)$ ise f 'in $|z|=R$ çemberi üzerinde hemen her yerde açısal yollar üzerinden sınır değerlerinin olduğu ve sınır değerlerinin oluşturduğu fonksiyonun $|z|=R$ çemberi üzerinde L^p Lebesgue uzayına ait olduğu, yani $f \in L^p(|z|=R)$ olduğu bilinmektedir.

3.2.2 Tanım $R>1$ ve $1\leq p<\infty$ için $f^{(m)} \in H^p(D_R)$ olsun**.** Her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\leq n$ olmak üzere

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right) := f^{(m)}(z) - \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m}, \quad |z|\leq 1 \tag{3.12}$$

olarak gösterilsin.

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right| = \left| f^{(m)}(z) - \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m} \right|, \quad |z|\leq 1$$

ifadesine $f^{(m)}$ ne m. Taylor türev serisinin **eş zamanlı maksimal yaklaşım hatası** denir.

3.2.3 Tanım $R>1$ ve $1\le p<\infty$ için $f\in H^p(D_R)$ olsun. $p_n(t)$, f fonksiyonuna $H^p(D_R)$ normunda derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olmak üzere f fonksiyonunun n. dereceden p ortalamada **en iyi yaklaşım sayısı,**

$$E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(t)-p_n(t)|^p|dt|\right]^{1/p}$$

olarak tanımlanır.

3.2.4 Teorem $R>1$ için $f\in H_1(D_R)$ olsun. Her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\le n$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{C(R)(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(1)}(f;D_R)_{H^1(D_R)},\quad |z|\le 1$$

olur.

İspat (3.3) den , $f^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m},\qquad |z|<R$ olarak yazılır.

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{t^{k+1}}dt$$

olduğunda (3.12) ifadesi

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}f(t)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]dt,\qquad |z|\le 1\quad \text{olarak elde edilir .}$$

$p_n(t)$ ile $H_1(D_R)$ diskinde f *ye* en iyi yaklaşan derecesi n'den büyük olmayan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t|=R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığında

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\left(f(t)-p_n(t)\right)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]dt,\qquad |z|\le 1\tag{3.13}$$

olduğu görülür.

(3.13) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamın $u=\dfrac{z}{t}$ için Lemma 3.1.5 yardımı ile

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right|\le\frac{1}{t^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\left|\frac{z}{t}\right|^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!.n|t|^j}{|t-z|^j}+\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right)$$

şeklinde değerlendirilebileceği görülür. Buradan

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right|\le\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{n}{R^{n+1}(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{j}{R^n(R-1)^{j+1}}\right)$$

yazılır. Böylece,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n^{(1)}\left(f;D_R\right)_{H^1(D_R)}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{n}{R^{n+1}(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{j}{R^n(R-1)^{j+1}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n^{(1)}\left(f;D_R\right)_{H^1(D_R)}\frac{(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}}\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}} & , \quad 1<R<2\\ \dfrac{1}{R-1} & , \quad 2<R\end{cases}$$

değerlendirmesi yapılabilir ve

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{C(R)(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(1)}\left(f;D_R\right)_{H^1(D_R)},\quad |z|\le 1 \tag{3.14}$$

sonucu elde edilir. □

Bu teorem $m=0$ durumunda [12, sayfa:198]' de ispat edilmiştir. Özel halde (3.14) eşitsizliğinde $m=1$ ve $m=2$ alındığında sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\left|R_n\left(z;f'\right)\right|\le\frac{nC(R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{(1)}\left(f;D_R\right)_{H^1(D_R)}\ ,$$

$$\left|R_n\left(z;f''\right)\right|\le\frac{n^2C(R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{(1)}\left(f;D_R\right)_{H^1(D_R)}.$$

3.2.5 Teorem $R>1$ ve $1<p<\infty$ için $f\in H^p\left(D_R\right)$ olsun. Her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\le n$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{c(R)(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}\left(f;D_R\right)_{H^p(D_R)},\quad |z|\le 1$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat (3.3) den , $f^{(m)}(z)=\sum\limits_{k=m}^{\infty}a_k\dfrac{k!}{(k-m)!}z^{k-m},\qquad z\in D_R$, ve (3.12) den

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=f^{(m)}(z)-\sum_{k=m}^{n}a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}$$

olduğu biliniyor.

$a_k=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{t^{k+1}}dt$ olmak üzere, bu eşitlik

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}f(t)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]dt,\qquad |z|\le 1\ ,$$

biçiminde yazılır.

$p_n(t)$ ile f fonksiyonuna $H^p(D_R)$ uzayında derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t|=R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığın da

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\left(f(t)-p_n(t)\right)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]dt,\qquad |z|\le 1 \tag{3.15}$$

olduğu görülür.

(3.15) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam $u=\dfrac{z}{t}$ için Lemma 3.1.5 yardımı ile

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}=\frac{1}{t^{m+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k-m}}=\frac{1}{t^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)u^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!.n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right)$$

şeklinde yazılır. Buna göre

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\left|\frac{z}{t}\right|^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!n|t|^j}{|t-z|^j}+\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right)|dt|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+j-m}}\left(\frac{(j-1)!n|t|^j}{|t-z|^j}+\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right)|dt|$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{n}{R^{n+1}}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{|dt|}{|t-z|^j}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{j}{R^{n}}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{|dt|}{|t-z|^{j+1}}$$

eşitsizliği elde edilir. $p>1, q>1$ *ve* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{n}{R^{n+1}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(t)-p_n(t)\right|^p|dt|\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{jq}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{j}{R^{n}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(t)-p_n(t)\right|^p|dt|\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{(j+1)q}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{n}{R^{n+1}}E_n^{(p)}\left(f;D_R\right)_{H^p(D_R)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{jq}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{j}{R^n}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{(j+1)q}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlik

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\frac{(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}}\begin{cases}\dfrac{R^{1/q}}{(R-1)^{m+1}} & , \quad 1<R<2\\ \dfrac{R^{1/q}}{R-1} & , \quad 2<R\end{cases}$$

olarak değerlendirildiğinde,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{c(R)(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\ ,\quad |z|\le 1 \tag{3.16}$$

sonucu elde edilir. □

Özel halde (3.16) eşitsizliğinde $m=1$ ve $m=2$ alındığında sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler zinciri elde edilir:

$$|R_n(z;f')|\le\frac{n}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^q}\right]^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{R^n}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{2q}}\right]^{\frac{1}{q}}\Rightarrow$$

$$|R_n(z;f')|\le E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left[\frac{n.R^{\frac{1}{q}}}{R^{n+1}.(R-1)}+\frac{R^{\frac{1}{q}}}{R^n(R-1)^2}\right]\Rightarrow$$

$$|R_n(z;f')|\le\frac{nC(R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\ , \tag{3.17}$$

$$|R_n(z;f'')|\le\frac{nn}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p_{(D_R)}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^q}\right]^{\frac{1}{q}}+\frac{n}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p_{(D_R)}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{2q}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{n}{R^n}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{2q}}\right]^{\frac{1}{q}}+\frac{2}{R^n}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-z|^{3q}}\right]^{\frac{1}{q}}\Rightarrow$$

$$|R_n(z;f'')|\le E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\left(\frac{n.nR^{\frac{1}{q}}}{R^{n+1}(R-1)}+\frac{n.R^{\frac{1}{q}}}{R^{n+1}(R-1)^2}+\frac{n.R^{\frac{1}{q}}}{R^n(R-1)^2}+\frac{2.R^{\frac{1}{q}}}{R^n(R-1)^3}\right)\Rightarrow$$

$$|R_n(z;f'')|\le\frac{n^2.C(R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}(f;D_R)_{H^p(D_R)}\ . \tag{3.18}$$

3.3 Taylor Serilerinin Değişken Üslü Hardy Uzaylarında Eş Zamanlı Maksimal Yakınsaklığı

3.3.1 Tanım $E:=[0,2\pi]$ ve $p(.):E\to[1,\infty)$ şeklinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir bir üs fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_E |f(x)|^{p(x)}dx<\infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir tüm f fonksiyonlarının kümesine **değişken üslü Lebesgue uzayı** denir ve $L^{p(.)}(E)$ şeklinde gösterilir.

E üzerinde tanımlı $p(.)$ üs fonksiyonu için

$$p_-:=\underset{x\in E}{essinf}\ p(x) \qquad ve \qquad p_+:=\underset{x\in E}{ess\sup}\ p(x)$$

notasyonları tanımlansın.

$1<p_-\le p_+<\infty$ olmak üzere, yukarıda tanımlı $L^{p(.)}(E)$ kümesi normlu bir uzaydır. Ayrıca bu uzayda denk normlardan biri

$$\|f\|_{p(.)}:=\inf\left\{\lambda>0:\ \int_E\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}dx\le 1\right\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Değişken üslü uzaylarda yaklaşım teorisinin incelenebilmesi için $p(.)$ üs fonksiyonu ile ilgili bazı şartların konulması gereklidir.

3.3.2 Tanım $x,y\in E,\ x\neq y$ için $|p(x)-p(y)|\le\dfrac{c}{-\log(|x-y|)},\ |x-y|\le\dfrac{1}{2}$

koşullarına ek olarak, $1<p_-\le p_+<\infty$ koşulunu da sağlayan $p(.)$ fonksiyonlarının kümesi $\wp_0(E)$ ile gösterilsin.

3.3.3 Tanım $p(.):E\to[1,\infty)$ şeklinde tanımlı üs fonksiyonu E kümesinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $H^p(D_R)$ analitik fonksiyonların bilinen **Hardy uzayı** olmak üzere**,**

$$H^{p(.)}(D_R):=\left\{f\in H^1(D_R): f\in L^{p(.)}(|z|=R)\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye D_R çemberinde analitik fonksiyonların **değişken üslü Hardy uzayı** denir.

3.3.4 Tanım $p(.)\in\wp_0(E)$ ve $f\in H^{p(.)}(D_R)$ olsun. p_n, $H^{p(.)}(D_R)$ uzayında f fonksiyonuna derecesi n 'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfından en iyi yaklaşan polinom olmak üzere

$$E_n(f;D_R)_{H^{p(.)}(D_R)}:=\|f-p_n\|_{L^{p(.)}(|z|=R)}\ E_n(f;D_R)_{H^{p(.)}(D_R)}:=\|f-p_n\|_{L^{p(.)}(|z|=R)}$$

ifadesine f için $H^{p(.)}(D_R)$ uzayında cebirsel polinomlarla **en iyi yaklaşım sayısı** denir.

3.3.5 Tanım $f\in H^{p(.)}(D_R)$, her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\le n$ olmak üzere $f^{(m)}$ türevine Taylor türev serisi ile **eş zamanlı maksimal yaklaşım hatası**

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|=\left|f^{(m)}(z)-\sum_{k=m}^{n}a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}\right|,\quad |z|\le 1 \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanır.

$p(.):E\to[1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{p'(.)}=1$ olmak üzere,

$f\in L^{p(.)}(E)$ *ve* $g\in L^{p'(.)}(E)$ için $fg\in L^1(E)$ olur. Ayrıca

$$\int_E|f(x)g(x)|dx\le K(p)\|f\|_{p(.)}\|g\|_{p'(.)}$$

eşitsizliğini sağlayan $p(.)$ fonksiyonuna bağlı pozitif bir $K(p)$ sabitinin olduğu bilinmektedir [13, sayfa:27].

3.3.6 Teorem $R>1$ ve $p(.)\in\wp_0(E)$ için $f\in H^{p(.)}(D_R)$ olsun. Her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\le n$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le c(p,R)\frac{(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n(f;D_R)_{H^{p(.)}(D_R)},\quad |z|\le 1$$

olur.

İspat (3.19) dan $a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{f(t)}{t^{k+1}}dt$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}f(t)\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right]\right||dt|,\qquad |z|\le 1\ ,$$

elde edilir.

$p_n(t)$ ile f fonksiyonuna $H^{p(.)}(D_R)$ uzayında derecesi n 'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t|=R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığında;

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k+1}}\right||dt|, \qquad |z|\leq 1 \tag{3.20}$$

olur. Buradan

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!z^{k-m}}{(k-m)!t^{k-m}}\right||dt|, \qquad |z|\leq 1$$

elde edilir.

Bu son eşitlikte $u=\frac{z}{t}$ alınırsa, Lemma 3.1.5'e göre

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\left|\frac{z}{t}\right|^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!n|t|^{j}}{|t-z|^{j}}+\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right)|dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+j-m}}\left(\frac{(j-1)!n|t|^{j}}{|t-z|^{j}}+\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}\right)|dt|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+j-m}}\frac{(j-1)!n|t|^{j}}{|t-z|^{j}}|dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{1}{|t|^{m+1}}\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+j-m}}\frac{j!|t|^{j+1}}{|t-z|^{j+1}}|dt|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+1}|t-z|^{j}}|dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!j}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left|f(t)-p_n(t)\right|\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n}|t-z|^{j+1}}|dt|$$

olduğu görülür. Buradan $\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{p'(.)}=1$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}\left\|f(t)-p_n(t)\right\|_{H^{p(.)}(D_R)}\left\|\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+1}|t-z|^{j}}\right\|_{H^{p'(.)}(D_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!j}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}\left\|f(t)-p_n(t)\right\|_{H^{p(.)}(D_R)}\left\|\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n}|t-z|^{j+1}}\right\|_{H^{p'(.)}(D_R)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}E_n\left(f; D_R\right)_{H^{p(.)}(D_R)}\left\|\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^{n+1}|t-z|^{j}}\right\|_{H^{p'(.)}(D_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!\,j}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)}\left\|\frac{|z|^{n+j-m}}{|t|^n|t-z|^{j+1}}\right\|_{H^{p'(\cdot)}(D_R)}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)}\frac{1}{R^{n+1}(R-1)^j}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!\,j}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)}\frac{1}{R^n(R-1)^{j+1}}$$

yazılır. Bu eşitsizlik

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\leq c(p)E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)}\frac{(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}}\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}} & ,\quad 1<R<2\\[2mm] \dfrac{1}{R-1} & ,\quad 2<R\end{cases},\ |z|\leq 1$$

şeklinde değerlendirilir ve

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\leq c(p,R)\frac{(m+1)!nn!}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)},\quad |z|\leq 1 \tag{3.21}$$

olduğu görülür. □

(3.21) eşitsizliğinde $m=1$ ve $m=2$ için hesaplamalar yapılırsa sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\left|R_n(z;f')\right|\leq\frac{nC(p)}{R^{n+1}(R-1)}E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)},$$

$$\left|R_n(z;f'')\right|\leq\frac{n^2C(p)}{R^{n+1}(R-1)}E_n(f;D_R)_{H^{p(\cdot)}(D_R)}.$$

4. FABER SERİLERİ İLE EŞ ZAMANLI MAKSİMAL YAKLAŞIM

4.1 Faber Serilerinin Düzgün Normda Eş Zamanlı Maksimal Yakınsaklığı

Önce teorem ifade ve ispatlarında kullanılmak üzere sonlu uzunluklu Jordan eğrilerinin bir özel alt sınıfını tanımlayalım.

G, sonlu uzunluklu Γ eğrisiyle sınırlanan sınırlı bir bölge olup, Γ sınırı $z = x(s) + iy(s) = z(s)$ denklemi ile verilmiş olsun. Burada s, Γ eğrisinin belli bir noktasından $z(s)$ noktasına kadar olan yayın uzunluğunu ifade etmektedir.

4.1.1 Tanım $p \in \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Eğer, Γ eğrisini ifade eden $z = z(s)$ fonksiyonu $p.$ mertebeden sürekli türevlenebilir ve l eğrinin uzunluğu olmak üzere $(0,l)$ aralığında $z^{(p)}(s) \in Lip\alpha$ koşulunu sağlıyorsa, bunu $\Gamma \in C(p,\alpha)$ olarak gösterelim.

Riemann konform dönüşüm teoremine göre, G^- bölgesini D^- bölgesine $\varphi(\infty) = \infty$ ve $\varphi'(\infty) > 0$ şartları altında resmeden bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü olduğunu biliyoruz.

Ayrıca $\Gamma \in C(p,\alpha)$ ise $\varphi(z)$ ve $\psi(w)$ fonksiyonları sırasıyla $\bar{G}$ ve $|w| \geq 1$ kapalı bölgelerinde sürekli türevlenebilirdirler. Bu yüzden $\varphi^{(p)}(z) \in Lip\alpha$ ve $\psi^{(p)}(z) \in Lip\alpha$ olur. Aynı durum G bölgesini birim diske konform olarak dönüştüren dönüşüm ve onun tersi için de geçerlidir.

4.1.2 Tanım Γ bir Jordan eğrisi ve G, Γ eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun. $R > 1$ olmak üzere kompleks düzlemde G_R bölgesinde analitik ve $\bar{G}_R$ *'da* sürekli fonksiyonların sınıfını $C(\bar{G}_R)$ ile tanımlayalım.

4.1.3 Tanım $f \in C(\bar{G}_R)$, her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m \leq n$ olmak üzere, $f^{(m)}$ türevine Faber türev serisi ile **eş zamanlı maksimal yaklaşım hatası,**

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| = \left|f^{(m)}(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k^{(m)}(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z)\right|, \quad z \in \bar{G}_R \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $a_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|t|=R} \dfrac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt$ olduğundan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} f(\psi(t)) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} dt$$

elde edilir.

$G^- := \overline{\mathbb{C}} - K$ olmak üzere, $\Phi_k(z) = (\varphi^k)(z) + E_k(z)$, $(z \in G^-)$, olduğu biliniyor. Bu eşitliğin her iki tarafının m. türevi alındığında

$$\Phi_k^{(m)}(z) = (\varphi^k)^{(m)}(z) + E_k^{(m)}(z), \qquad (z \in G^-)$$

olur . Buradan,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} \tag{4.2}$$

eşitliği yazılır.

4.1.4 Tanım $f \in C(\overline{G}_R)$ için

$$\| f \|_{C(\overline{G}_R)} = \max_{|z| \le R} |f(z)|$$

şeklinde tanımlanan norma f 'in $C(\overline{G}_R)$ uzayında **düzgün normu** denir.

W_n derecesi n 'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfı olmak üzere,

$$E_n(f; \overline{G}_R)_{C(\overline{G}_R)} = \inf_{p_n \in W_n} \| f - p_n \|_{C(\overline{G}_R)}$$

sayısına f fonksiyonu için düzgün normda derecesi n 'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfında **en iyi yaklaşım sayısı** denir.

Buna göre $p_n(z)$ ile $\overline{G}_R$ kapalı bölgesinde f 'ye en iyi yaklaşan polinomu gösterecek olursak,

$$|f(z) - p_n(z)| \le E_n(f; \overline{G}_R)_{C(\overline{G}_R)}, \quad z \in \overline{G}_R$$

yazılabilir.

4.1.5 Tanım $1 \le i, j \le m$ olmak üzere**,**

$A_i(\varphi', \varphi'', \varphi''', .., \varphi^{(i)})$: φ 'nin 1.,2.,3.,…, i . mertebebeden türevlerine bağlı bir ifade,

$B_j(\psi', \psi'', \psi''', .., \psi^{(j)})$: ψ 'ın 1.,2.,3.,…, j . mertebebeden türevlerine bağlı bir ifade olarak tanımlansın.

Teorem ispatlarında kullanılacak $\Phi_n^{(m)}(z) = (\varphi^k)^{(m)}(z) + E_n^{(m)}(z)$ türevinin 1. ve 2. terimleri için sırasıyla aşağıdaki lemmalar geçerlidir.

4.1.6 Lemma $z \in G^-$ olsun. Bu durumda

$$(\varphi^k)^{(m)}(z) = k(k-1)(k-2)...(k-(m-1))\varphi^{k-m}(z) A_1(\varphi') + ... + k\varphi^{k-1}(z) A_m(\varphi^{(m)})$$

olur. Burada $A_k(.)$ çarpanları genellikle $\varphi', \varphi'', ..., \varphi^{(m-1)}$ türevlerine bağlı olan ifadelerdir.

İspat $m=1$ olduğunda

$$\left(\varphi^k\right)'(z) = k\varphi^{k-1}(z)\varphi'(z)$$

eşitliği elde edilir.

$m=2$ olması halinde,

$$\left(\varphi^k\right)''(z) = k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'(z)\varphi'(z) + k\varphi^{k-1}(z)\varphi''(z)$$

$$= k(k-1)\varphi^{k-2}(z)(\varphi')^2(z) + k\varphi^{k-1}(z)\varphi''(z)$$

yazılır. $m=3$ için son eşitlikten türev alınırsa,

$$\left(\varphi^k\right)'''(z) = k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)\varphi'(z)(\varphi')^2(z) + k(k-1)\varphi^{k-2}(z)2\varphi'(z)\varphi''(z)$$

$$+k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'(z)\varphi''(z) + k\varphi^{k-1}(z)\varphi'''(z)$$

$$\left(\varphi^k\right)'''(z) = k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)(\varphi')^3(z) + 3k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'(z)\varphi''(z) + k\varphi^{k-1}(z)\varphi'''(z)$$

olarak bulunur.

$m=4$ alındığında,

$$\left(\varphi^k\right)^{(4)}(z) = k(k-1)(k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(z)(\varphi')^4(z)$$

$$+k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)3(\varphi')^2(z)\varphi''(z)$$

$$+3k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)(\varphi')^2(z)\varphi''(z) + 3k(k-1)\varphi^{k-2}(z)(\varphi'')^2(z)$$

$$+3k(k-1)\varphi^{k-2}(z)(\varphi')(z)(\varphi''')(z) + k(k-1)\varphi^{k-2}(z)(\varphi')(z)(\varphi''')(z)$$

$$+k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(4)}(z)$$

$$\left(\varphi^k\right)^{(4)}(z) = k(k-1)(k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(z)(\varphi')^4(z)$$

$$+4k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)(\varphi')^2(z)\varphi''(z) + 3k(k-1)\varphi^{k-2}(z)(\varphi'')^2(z)$$

$$+4k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'(z)\varphi'''(z) + k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(4)}(z)$$

$$\left(\varphi^k\right)^{(4)}(z) = k(k-1)(k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(z)(\varphi')^4(z)$$

$$+4k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)(\varphi')^2(z)\varphi''(z)$$

$$+k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\left[3(\varphi'')^2(z) + 4\varphi'(z)\varphi'''(z)\right] + k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(4)}(z)$$

$m=5$ alındığında

$$\left(\varphi^{k}\right)^{(5)}(z)=k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\varphi^{k-5}(z)(\varphi')^{5}(z)$$

$$+k(k-1)(k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(z)4(\varphi')^{3}(z)\varphi''(z)$$

$$+4k(k-1)(k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(z)(\varphi')^{3}(z)\varphi''(z)$$

$$+4k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)2\varphi'(z)(\varphi'')^{2}(z)$$

$$+4k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)(\varphi')^{2}(z)\varphi'''(z)+3k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)\varphi'(z)\varphi''(z)$$

$$+3k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'''(z)+4k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)(\varphi')^{2}(z)\varphi'''(z)$$

$$+4k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi''(z)\varphi'''(z)+4k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'(z)\varphi^{(4)}(z)$$

$$+k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\varphi'(z)\varphi^{(4)}(z)+k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(5)}(z)$$

bulunur, bu ifade ortak çarpan parantezine alınarak,

$$\left(\varphi^{k}\right)^{(5)}(z)=k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\varphi^{k-5}(z)(\varphi')^{5}(z)$$

$$+8k(k-1)(k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(z)(\varphi')^{3}(z)\varphi''(z)$$

$$+k(k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(z)\left[8(\varphi')(z)(\varphi'')^{2}(z)+8(\varphi')^{2}(z)\varphi'''(z)+3(\varphi')(z)\varphi''(z)\right]$$

$$+k(k-1)\varphi^{k-2}(z)\left[3\varphi'''(z)+4\varphi''(z)\varphi'''(z)+5\varphi'(z)\varphi^{(4)}(z)\right]+k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(5)}(z)$$

sonucu elde edilir.

Yukarıdaki gibi ardışık türevler alınırsa, m. türev için aşağıdaki genelleştirme yazılabilir.

$$\left(\varphi^{k}\right)^{(m)}(z)=k(k-1)(k-2)...(k+1-m)\varphi^{k-m}(z)A_1(\varphi')$$

$$+k(k-1)(k-2)...(k+2-m)\varphi^{k+1-m}(z)A_2(\varphi',\varphi'')$$

$$+k(k-1)(k-2)...(k+3-m)\varphi^{k+2-m}(z)A_3(\varphi',\varphi'',\varphi''')$$

$$+...+k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(m)}(z)A_m\left(\varphi^{(m)}\right).$$

Buradan,

$$\left(\varphi^{k}\right)^{(m)}(z)=k(k-1)(k-2)...(k-(m-1))\varphi^{k-m}(z)A_1(\varphi')+...+k\varphi^{k-1}(z)A_m\left(\varphi^{(m)}\right)$$

olur. □

4.1.7 Lemma $F(\tau,w):=\dfrac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)}-\dfrac{1}{\tau-w},\quad |\tau|\geq 1,\quad |w|\geq 1$ olmak üzere**,**

$$E_k(\psi(w))=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F(\tau,w)d\tau,\qquad |w|\geq 1$$ ifadesi için

$$E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)=B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)\,d\tau+B_{m-1}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m-1)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)\,d\tau+...$$

$$\left(\psi(w)\right)=B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)\,d\tau+B_{m-1}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m-1)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)\,d\tau+...$$

$$+B_1(\psi')\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w^{(m)}(\tau,w)\,d\tau\,.$$

İspat $m=1$ olduğunda

$$\psi'(w)E_k'\left(\psi(w)\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)d\tau$$

$$E_k'\left(\psi(w)\right)=\frac{1}{\psi'(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)d\tau$$

eşitliği yazılır. Buradan tekrar türev alınırsa, 2. türev

$$\psi'(w)E_k''\left(\psi(w)\right)=\frac{-\psi''(w)}{(\psi')^2(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)d\tau+\frac{1}{\psi'(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)d\tau$$

$$E_k''\left(\psi(w)\right)=\frac{-\psi''(w)}{(\psi')^3(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)d\tau+\frac{1}{(\psi')^2(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)d\tau$$

olarak elde edilir. $m=3$ için

$$\psi'(w)E_k'''\left(\psi(w)\right)=\frac{-\psi'''(w)(\psi')^3(w)+\psi''(w)3(\psi')^2(w)\psi''(w)}{(\psi')^6(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)d\tau$$

$$+\frac{-\psi''(w)}{(\psi')^3(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)d\tau+\frac{-2\psi'(w)\psi''(w)}{(\psi')^4(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)d\tau$$

$$+\frac{1}{(\psi')^2(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'''(\tau,w)d\tau$$

ifadesi yazılır. Bu ifadeden gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\psi'(w)E_k'''\left(\psi(w)\right)=\frac{-\psi'''(w)\psi'(w)+\psi''(w)3\psi''(w)}{(\psi')^4(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'(\tau,w)d\tau$$

$$+\frac{-\psi''(w)}{(\psi')^3(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)d\tau+\frac{-2\psi''(w)}{(\psi')^3(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w''(\tau,w)d\tau$$

$$+\frac{1}{(\psi')^2(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^k F_w'''(\tau,w)d\tau$$

yazılır ve

$$E_k'''(\psi(w)) = \frac{-\psi'''(w)\psi'(w) + 3(\psi'')^2(w)}{(\psi')^5(w)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w'(\tau, w) d\tau$$

$$+\frac{-3\psi''(w)}{(\psi')^4(w)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w''(\tau, w) d\tau + \frac{1}{(\psi')^3(w)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w'''(\tau, w) d\tau$$

olarak bulunur. Bu şekilde ardışık türevler alıp m. türev için genelleştirdiğimiz takdirde,

$$E_k^{(m)}(\psi(w)) = \frac{-\psi^{(m)}(w)...}{(\psi')^{2m-1}(w)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w'(\tau, w) d\tau + ... + ... \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w''(\tau, w) d\tau + ...$$

$$+\frac{1}{(\psi'(w))^m} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w^{(m)}(\tau, w) d\tau,$$

$$E_k^{(m)}(\psi(w)) = B_m(\psi', \psi'', ..., \psi^{(m)}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w'(\tau, w) d\tau + B_{m-1}(\psi', \psi'', ..., \psi^{(m-1)}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w''(\tau, w) d\tau + ...$$

$$+B_1(\psi') \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^k F_w^{(m)}(\tau, w) d\tau$$

sonucu elde edilir. □

Şimdi (4.2) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimi olan $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}$ ifadesinin ileride kullanacağımız bir eşitini verelim.

Lemma 4.1.6’ya göre

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)...(k+1-m)\varphi^{k-m}(z) A_1(\varphi')}{t^{k+1}}$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)...(k+2-m)\varphi^{k+1-m}(z) A_2(\varphi', \varphi'')}{t^{k+1}}$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)...(k+3-m)\varphi^{k+2-m}(z) A_3(\varphi', \varphi'', \varphi'')}{t^{k+1}} + ... + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k\varphi^{k-1}(z) A_m(\varphi^{(m)})}{t^{k+1}}$$

$$+c_m \left| \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t} \int_{|\tau|=1} F_w^{(m)}(\tau, w) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{t}\right)^k \right| |d\tau| \Bigg] .$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}} = \frac{A_1(\varphi')}{t^{m+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)...(k+1-m)\varphi^{k-m}(z)}{t^{k-m}}$$

$$+\frac{A_2(\varphi',\varphi'')}{t^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)...(k+2-m)\varphi^{k+1-m}(z)}{t^{k+1-m}}$$

$$+\frac{A_3(\varphi',\varphi'',\varphi''')}{t^{m-1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)...(k+3-m)\varphi^{k+2-m}(z)}{t^{k+2-m}}+\ldots$$

$$+\frac{A_m\left(\varphi^{(m)}\right)}{t^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k\varphi^{k-1}(z)}{t^{k-1}} \tag{4.3}$$

Diğer yandan, $|u|<1$ olmak üzere Lemma 3.1.5 den sırasıyla aşağıdaki bağıntıların doğruluğu görülür.

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}u^k\right)^{(m)}=\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)^{(m)}=\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)u^{n+j-m}\left(\frac{(j-1)!n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right)$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}u^k\right)^{(m-1)}=\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)^{(m-1)}=\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-2}{j-1}P(n,m-1-j)u^{n+j+1-m}\left(\frac{(j-1)!n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right)$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}u^k\right)^{(m-2)}=\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)^{(m-2)}=\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-3}{j-1}P(n,m-2-j)u^{n+j+2-m}\left(\frac{(j-1)!n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right)$$

$$....\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}u^k\right)'=\left(\frac{u^{n+1}}{1-u}\right)'=\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)u^{n+j-1}\left(\frac{(j-1)!n}{(1-u)^j}+\frac{j!}{(1-u)^{j+1}}\right).$$

Bu ifadelerde, $\varphi(z)=w$ *ve* $\psi(w)=z$ olduğu düşünülür ve $u=\dfrac{w}{t}$ yazılırsa, (4.3) eşitliği,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}=\frac{A_1(\varphi')}{t^{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\left(\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)$$

$$+\frac{A_2(\varphi',\varphi'')}{t^m}\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-2}{j-1}P(n,m-1-j)\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\left(\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)$$

$$+\frac{A_3(\varphi',\varphi'',\varphi''')}{t^{m-1}}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-3}{j-1}P(n,m-2-j)\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\left(\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)+...$$

$$+\frac{A_m\left(\varphi^{(m)}\right)}{t^2}\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\left(\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right) \tag{4.4}$$

olarak elde edilir.

4.1.8 Teorem $\Gamma := \partial G$ ve $0 < \alpha < 1$, $\Gamma \in C(m+2, \alpha)$ olsun. $R > 1$ ve $f \in C(\overline{G}_R)$ için her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m \le n$ olmak üzere,

$$\left| R_n\left(z; f^{(m)}\right) \right| \le \frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n-m+1)!R^n(R-1)} E_n\left(f; \overline{G}_R\right)_{C(\overline{G}_R)}, \qquad z \in \overline{G}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $\Phi_n(z)$, K kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere,

$$f^{(m)}(z) = \sum_{K=0}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z), \qquad z \in G_R$$

ve

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = f^{(m)}(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k^{(m)}(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z)$$

eşitlikleri yazılır.

$f \in C(\overline{G}_R)$ olduğundan

$$|f(z)| \le M, \qquad z \in G_R$$

olacak şekilde bir M sabiti vardır.

Bu şart altında Faber katsayıları için aşağıdaki formül yazılır.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)\varphi'(\zeta)}{\varphi^{k+1}(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt \ .$$

Buna göre

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} f(\psi(t)) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} dt$$

olduğu görülür.

$p_n(z)$ ile f fonksiyonuna $C(\overline{G}_R)$ uzayında derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t| = R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığında;

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \left(f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} dt \qquad (4.5)$$

şeklinde yazılır.

Buna göre (4.2) ve (4.5) ifadelerinin yardımıyla

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n\left(f;\bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le E_n\left(f;\bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left[\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|\right]|dt| \qquad (4.6)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.1.5 den,

$$\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)=k(k-1)(k-2)...(k-(m-1))\varphi^{k-m}(z)(\varphi')^m(z)+...+k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(m)}(z), \quad (4.7)$$

olduğu biliniyor. $\Gamma\in C(m+2,\alpha)$ olduğu dikkate alındığında $0<m_1\le\left|\varphi^{(m)}(w)\right|\le m_2<\infty$ eşitsizliği yazılabileceğinden (4.4) göz önünde bulundurularak (4.6) eşitsizliğinde köşeli parantezin içindeki birinci toplam aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\frac{c_1}{2\pi}\left[\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m+1}}\left|\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}\right||dt|+\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m+1}}\left|\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right||dt|\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-2}{j-1}P(n,m-1-j)\frac{c_2}{2\pi}\left[\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m}}\left|\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}\right||dt|+\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m}}\left|\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right||dt|\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-3}{j-1}P(n,m-2-j)\frac{c_3}{2\pi}\left[\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m-1}}\left|\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}\right||dt|+\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{m-1}}\left|\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right||dt|\right]+$$

$$....+\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)\frac{c_m}{2\pi}\left[\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{2}}\left|\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}\right||dt|+\int\limits_{|t|=R}\frac{1}{|t|^{2}}\left|\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right||dt|\right],$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)c_1\left[\frac{(j-1)!n}{R^{n+1}2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^j}+\frac{j!}{R^n2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^{j+1}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-2}{j-1}P(n,m-1-j)c_2\left[\frac{(j-1)!n}{R^{n+1}2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^j}+\frac{j!}{R^n2\pi}\int\limits_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^{j+1}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-3}{j-1}P(n,m-2-j)c_3\left[\frac{(j-1)!n}{R^{n+1}2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^j}+\frac{j!}{R^n 2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^{j+1}}\right]+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)c_m\left[\frac{(j-1)!n}{R^{n+1}2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^j}+\frac{j!}{R^n 2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-w|^{j+1}}\right].$$

Buradan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}c_1\left[\frac{n(j-1)!}{R^n(R-1)^j}+\frac{j!}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}c_2\left[\frac{n(j-1)!}{R^n(R-1)^j}+\frac{j!}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}c_3\left[\frac{n(j-1)!}{R^n(R-1)^j}+\frac{j!}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}\right]+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}c_m\left[\frac{n(j-1)!}{R^n(R-1)^j}+\frac{j!}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}\right]$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{nc_1}{R^n(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{jc_1}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}\frac{nc_2}{R^n(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}\frac{jc_2}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}\frac{nc_3}{R^n(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}\frac{jc_3}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}\frac{nc_m}{R^n(R-1)^j}+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}\frac{jc_m}{R^{n-1}(R-1)^{j+1}}$$

$$\le\left[\frac{nn!c}{(n+1-m)!R^n}\left(m!+(m-1)!+(m-2)!+..+1!\right)+\frac{n!c}{(n+1-m)!R^{n-1}}\left(mm!+(m-1)(m-1)!+..+1.1!\right)\right]\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}}, 1<R<2\\ \dfrac{1}{R-1},\ 2<R\end{cases}$$

$$\le\left[\frac{nn!c}{(n+1-m)!R^n}mm!+\frac{n!c}{(n+1-m)!R^{n-1}}(m+1)!\right]\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}}, 1<R<2\\ \dfrac{1}{R-1},\ 2<R\end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^{k}\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|\leq\frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n-m+1)!R^{n}(R-1)} \tag{4.8}$$

olduğu görülür.

(4.6) eşitsizliğinde köşeli parantezin içindeki ikinci terim için,

$F(\tau,w):=\dfrac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)}-\dfrac{1}{\tau-w},\quad |\tau|\geq 1,\quad |w|\geq 1$ olmak üzere,

$E_{k}(\psi(w))=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F(\tau,w)d\tau,\qquad |w|\geq 1$ [12, sayfa:202] ifadesinden m. türev alınırsa,

Lemma 4.1.6 dan,

$$E_{k}^{(m)}(\psi(w))=B_{m}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F_{w}'(\tau,w)d\tau+B_{m-1}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m-1)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F_{w}''(\tau,w)d\tau+$$

$$...+B_{1}(\psi')\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F_{w}^{(m)}(\tau,w)d\tau \tag{4.9}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_{k}^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[B_{m}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F_{w}'(\tau,w)d\tau\right.$$

$$\left.+B_{m-1}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m-1)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F_{w}''(\tau,w)d\tau+...+B_{1}(\psi')\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^{k}F_{w}^{(m)}(\tau,w)d\tau\right]\frac{1}{t^{k+1}}dt$$

yazılabilir ve buradan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_{k}^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|B_{m}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}F_{w}'(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^{k}}{t^{k+1}}\right||d\tau||dt|$$

$$...+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|B_{1}(\psi')\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}F_{w}^{(m)}(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^{k}}{t^{k+1}}\right||d\tau||dt|$$

olduğu görülür.

$\Gamma\in C(m+2,\alpha)$ olduğunda $0<m_{1}\leq\left|\psi^{(m)}\right|\leq m_{2}<\infty$ olacağından

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_{k}^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|\leq\frac{c_{1}}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_{w}'(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{k}\right||d\tau||dt|$$

$$...+\frac{c_{m}}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_{w}^{(m)}(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{k}\right||d\tau||dt| \tag{4.10}$$

elde edilir.

(4.10) eşitsizliğinde $\frac{\tau}{t}=u$ işaretlersek,

$\sum_{k=n+1}^{\infty} u^k = \frac{u^{n+1}}{1-u}$ olur. Buradan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt| \le \frac{c_1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F'_w(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt|$$

$$\ldots+\frac{c_m}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt|$$

eşitsizliği elde edilir.

$\Gamma\in C(m+2,\alpha)$ koşulu altında, $\int_{|\tau|=1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right||dt|<\infty, \qquad |w|\ge 1$ [12, sayfa:162]

olduğu biliniyor. Bu bilgiye göre,

$A_1 := \sup_{|w|\ge 1}\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=1}\left|F'_w(\tau,w)\right||d\tau|<\infty$, $\qquad A_2 := \sup_{|w|\ge 1}\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=1}\left|F''_w(\tau,w)\right||d\tau|<\infty,\ldots$

$$A_m := \sup_{|w|\ge 1}\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right||d\tau|<\infty \text{ olsun.} \tag{4.11}$$

Bu durumda,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt| \le \frac{A_1c_1}{2\pi R^{n+1}}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|}+\ldots+\frac{A_mc_m}{2\pi R^{n+1}}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|}$$

$$\le \frac{Ac}{R^n(R-1)} \tag{4.12}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right| \le E_n\left(f;\bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left[\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|\right]|dt|$$

eşitsizliğinde (4.8) ve (4.12) bağıntıları dikkate alınırsa,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right| \le E_n\left(f;\bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}\left(\frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n-m+1)!R^n(R-1)}+\frac{Ac}{R^n(R-1)}\right)$$

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right| \le \frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n-m+1)!R^n(R-1)}E_n\left(f;\bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}, \qquad z\in\bar{G} \tag{4.13}$$

eşitsizliği elde edilir. □

(4.13) eşitsizliğinde $m=1$ alınırsa,

$$\left|R_n\left(z; f'\right)\right| \leq \frac{nc(R)}{R^n(R-1)} E_n\left(f; \bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}$$

sonucu elde edilir.

(4.13) eşitsizliğinde $m=2$ için ise,

$$\left|R_n\left(z; f''\right)\right| \leq \frac{n^2 c(R)}{R^n(R-1)} E_n\left(f; \bar{G}_R\right)_{C(\bar{G}_R)}$$

yazılabilir.

4.2 Faber Serilerinin Smirnov Uzaylarında Eş Zamanlı Maksimal Yakınsaklığı

4.2.1 Tanım G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve f, G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. G içinde G'nin kompakt alt kümelerini sınırlayan ve Γ eğrisine yaklaşan, $\left\{\Gamma_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sonlu uzunluklu Jordan eğrilerinin bir dizisi için,

$$\int_{\Gamma_n} \left|f(z)\right|^p |dz| \leq M(f) < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

koşullunu sağlayan n'den bağımsız bir $M = M(f)$ sabiti varsa f fonksiyonu **Smirnov sınıfındandır** denir. Smirnov sınıfı $E_p(G)$ ile gösterilir [14].

$f \in E_p(G)$ ise $f\,'in$ Γ üzerinde hemen her yerde açısal yollar üzerinden sınır değerlerinin olduğu ve sınır değerlerinin oluşturduğu fonksiyonun Γ üzerinde L^p Lebesgue uzayına ait olduğu, yani $f \in L^p(\Gamma)$ olduğu bilinmektedir.

4.2.2 Tanım $p \geq 1$ ve $R > 1$ için $f \in E_p(G_R)$ olmak üzere,

$$E_n^{(p)}\left(f; G_R\right)_{E_p(G_R)} = \left[\inf_{p_n \in W_n} \int_{\Gamma_R} \left|f(t) - p_n(t)\right|^p |dt|\right]^{1/p} \tag{4.14}$$

sayısına, f fonksiyonuna, $E_p(G_R)$ uzayında derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar ile **en iyi yaklaşım sayısı** denir**.** Burada W_n, derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar kümesidir. Yukarıdaki infimumu gerçekleştiren bir p_n cebirsel polinomunun varlığı gösterilmiştir.

Bu p_n polinomuna, f fonksiyonuna $E_p(G_R)$ uzayında, derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfından en iyi yaklaşan cebirsel polinom denir.

4.2.3 Tanım $p \geq 1$ ve $R > 1$ için $f \in E_p(G_R)$ olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m \leq n$ olmak üzere, $f^{(m)}$ türevine Faber türev serisi ile **eş zamanlı maksimal yaklaşım hatası,**

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| = \left|f^{(m)}(z) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z)\right|, \quad z \in \bar{G}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2.4 Teorem G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma \in C(m+2, \alpha)$ olsun. $R > 1$ için $f \in E_1(G_R)$ ve her $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ olmak üzere, $\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \leq \dfrac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n-m+1)!R^{n+1}(R-1)} E_n^{(1)}(f; G_R)_{E_1(G_R)}, \quad z \in \bar{G}$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $\Phi_n(z)$, $\bar{G}$ bölgesinin Faber polinomları olmak üzere

$$f^{(m)}(z) = \sum_{K=0}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z), \qquad z \in G_R$$

ve

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = f^{(m)}(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k^{(m)}(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k^{(m)}(z) \tag{4.15}$$

eşitlikleri yazılır.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)\varphi'(\zeta)}{\varphi^{k+1}(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt$$

olmak üzere, (4.15) eşitliği,

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} f(\psi(t)) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} dt$$

şeklinde elde edilir.

$p_n(t)$ ile f fonksiyonuna $E_1(G_R)$ uzayında derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t| = R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığında;

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \left(f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} dt$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\left(f\left(\psi(t)\right) - p_n\left(\psi(t)\right)\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}dt\right|$$

ve (4.14) göz önünde bulundurularak

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \le E_n^{(1)}\left(f; G_R\right)_{E_1(G_R)} \max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|, \quad z \in \bar{G} \tag{4.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

$G^- := \bar{\mathbb{C}} - K$ olmak üzere,

$$\Phi_k^{(m)}(z) = \left(\varphi^k\right)^{(m)}(z) + E_k^{(m)}(z), \qquad \left(z \in G^-\right)$$

olduğundan, (4.16) eşitsizliği yerine

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \le E_n^{(1)}\left(f; G_R\right)_{E_1(G_R)} \max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}} + \frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right]\right| \tag{4.17}$$

eşitsizliği ve buradan da

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \le E_n^{(1)}\left(f; G_R\right)_{E_1(G_R)} \max_{|t|=R}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|\right] \tag{4.18}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.5. den,

$$\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z) = k(k-1)(k-2)\ldots\left(k-(m-1)\right)\varphi^{k-m}(z)\left(\varphi'\right)^m(z) + \ldots + k\varphi^{k-1}(z)\varphi^{(m)}(z)$$

olduğu biliniyor. (4.18) eşitsizliğinin sağ tarafında köşeli parantezin içindeki birinci toplamı, yani

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|$$

ifadesini değerlendirelim. $z \in \Gamma, |w| = 1$ için $\varphi(z) = w$ *ve* $\psi(w) = z$ olmak üzere, $\Gamma \in C(m+2, \alpha)$ olduğunda, $0 < m_1 \le \left|\varphi^{(m)}(w)\right| \le m_2 < \infty$ olur. $|t| > 1$ için $\left|\frac{w}{t}\right| < 1$ olduğundan (4.3) ve (4.4) den

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|$$

$$\le \max_{|t|=R}\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)c_1\left|\frac{1}{|t|^{m+1}}\left(\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right|$$

$$+\max_{|t|=R}\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-2}{j-1}P(n,m-1-j)c_2\left|\frac{1}{|t|^{m}}\left(\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right|$$

$$+\max_{|t|=R}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-3}{j-1}P(n,m-2-j)c_3\left|\frac{1}{|t|^{m-1}}\left(\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right|+\dots$$

$$+\max_{|t|=R}\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)c_m\left|\frac{1}{|t|^{2}}\left(\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right| \qquad (4.19)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki gereken işlemleri gerçekleştirirsek

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}c_1\left[\frac{n(j-1)!}{R^{n+1}(R-1)^j}+\frac{j!}{R^n(R-1)^{j+1}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}c_2\left[\frac{n(j-1)!}{R^{n+1}(R-1)^j}+\frac{j!}{R^n(R-1)^{j+1}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}c_3\left[\frac{n(j-1)!}{R^{n+1}(R-1)^j}+\frac{j!}{R^n(R-1)^{j+1}}\right]+\dots$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}c_m\left[\frac{n(j-1)!}{R^{n+1}(R-1)^j}+\frac{j!}{R^n(R-1)^{j+1}}\right]$$

$$\le\frac{nn!c_1}{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(n-m+j)!(R-1)^j}+\frac{n!c_1}{R^n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!\,j}{(m-j)!(n-m+j)!(R-1)^{j+1}}$$

$$+\frac{nn!c_2}{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!(n+1-m+j)!(R-1)^j}+\frac{n!c_2}{R^n}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!\,j}{(m-1-j)!(n+1-m+j)!(R-1)^{j+1}}$$

$$\dots+\frac{nn!c_m}{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!(n-1+j)!(R-1)^j}+\frac{n!c_m}{R^n}\sum_{j=1}^{1}\frac{0!\,j}{(1-j)!(n-1+j)!(R-1)^{j+1}}$$

$$\le\left[\frac{nn!c}{(n+1-m)!R^{n+1}}\left(m!+(m-1)!+(m-2)!+..+1!\right)+\frac{n!c}{(n+1-m)!R^n}\left(mm!+(m-1)(m-1)!+..+1.1!\right)\right]\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}}, & 1<R<2\\ \dfrac{1}{R-1}, & 2<R\end{cases}$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right|\le\frac{(2m+1)m!nn!c_1(R)}{(n-m+1)!R^{n+1}(R-1)} \qquad (4.20)$$

olduğu görülür.

(4.18) eşitsizliğinde köşeli parantezin içindeki 2. terim için (4.9) dan,

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right| = \max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| \le \max_{|t|=R}\left[\left|B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||d\tau|+...\right.$$

$$\left.+\left|B_1(\psi')\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||d\tau|\right]$$

eşitsizliği yazılır.

Buradan, $0<m_1\le\left|\psi^{(m)}\right|\le m_2<\infty$ olduğundan,

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right| \le \max_{|t|=R}\left[c_1\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\right||d\tau|+...\right.$$

$$\left.+c_m\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\right||d\tau|\right] \tag{4.21}$$

(4.21) eşitsizliğinde $\dfrac{\tau}{t}=u$ olarak işaretlersek,

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}u^k=\frac{u^{n+1}}{1-u}$ olur. Böylece,

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| \le \max_{|t|=R}\left[c_1\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau|+...\right.$$

$$\left.+c_m\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau|\right]$$

$$+c_m\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau|\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.11) den,

$$\max_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| \le \frac{A_1c_1}{R^{n+1}(R-1)}+...+\frac{A_mc_m}{R^{n+1}(R-1)} \le \frac{Ac}{R^{n+1}(R-1)} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.20) ve (4.22) beraber düşünüldüğünde, (4.16) eşitsizliği

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right| \le E_n^{(1)}(f;G_R)_{E_1(G_R)}\left[\frac{(2m+1)m!nn!c_1(R)}{(n-m+1)!R^{n+1}(R-1)}+\frac{Ac}{R^{n+1}(R-1)}\right]$$

şeklinde yazılabilir ve buradan

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le E_n^{(1)}\left(f;G_R\right)_{E_1(G_R)}\left[\frac{(2m+1)m!nn!c_1(R)}{(n-m+1)!R^{n+1}(R-1)}+\frac{Ac}{R^{n+1}(R-1)}\right]$$

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le \frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n-m+1)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(1)}\left(f;G_R\right)_{E_1(G_R)} \tag{4.23}$$

sonucu elde edilir. □

(4.23) eşitsizliğinde $m=1$ alınırsa,

$$\left|R_n\left(z;f'\right)\right|\le E_n^{(1)}\left(f;G_R\right)_{E_1(G_R)}\frac{nc(R)}{R^{n+1}(R-1)}$$

elde edilir. (4.23) eşitsizliğinde $m=2$ alınırsa,

$$\left|R_n\left(z;f''\right)\right|\le E_n^{(1)}\left(f;G_R\right)_{E_1(G_R)}\frac{n^2c(R)}{R^{n+1}(R-1)}$$

elde edilir.

4.2.5 Teorem $m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$, $\Gamma\in C(m+2,\alpha)$, G, Γ eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $p>1$, $R>1$ için $f(z)\in E_p(G_R)$ olsun. Her $n,m\in\mathbb{N}$ ve $m\le n$ olmak üzere,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le \frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}\left(f;G_R\right)_{E_p(G_R)},\quad z\in\overline{G}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $\Phi_n(z)$, $\overline{G}$ bölgesinin Faber polinomları olmak üzere,

$$f^{(m)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k^{(m)}(z)$$

ve

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=f^{(m)}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k^{(m)}(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\Phi_k^{(m)}(z) \tag{4.24}$$

yazılır.

a_k Faber katsayıları,

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt, \tag{4.25}$$

olmak üzere, (4.24) ve (4.25) den

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}f(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}dt$$

eşitliği elde edilir.

$p_n(t)$ ile f fonksiyonuna $E_p(G_R)$ uzayında derecesi n 'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t| = R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığında;

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \left(f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} dt \tag{4.26}$$

olduğu görülür.

$G^- := \overline{\mathbb{C}} - K$ olmak üzere,

$$\Phi_k^{(m)}(z) = \left(\varphi^k\right)^{(m)}(z) + E_k^{(m)}(z), \qquad \left(z \in G^-\right)$$

olduğundan, (4.26) ifadesi aşağıdaki şekilde değerlendirilir:

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}} \right| |dt|. \tag{4.27}$$

Lemma 4.1.5 den,

$$\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-(m-1))\varphi^{k-m}(z) A_1(\varphi') + \ldots + k\varphi^{k-1}(z) A_m\left(\varphi^{(m)}\right)$$

olduğu biliniyor. Buna göre, (4.3) ve (4.4) eşitliklerini göz önünde bulundurarak (4.27) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim:

$z \in \Gamma, |w| = 1$ için $\varphi(z) = w$ *ve* $\psi(w) = z$ olmak üzere, $\Gamma \in C(m+2, \alpha)$ olduğunda, $0 < m_1 \le \left|\varphi^{(m)}(w)\right| \le m_2 < \infty$ olur. $|t| > 1$ için $\left|\frac{w}{t}\right| < 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| c_1 \left| \sum_{j=1}^{m} \binom{m-1}{j-1} P(n, m-j) \frac{1}{|t|^{m+1}} \left(\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}} \frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j} + \frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}} \frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}} \right) \right| |dt|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| c_2 \left| \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-2}{j-1} P(n, m-1-j) \frac{1}{|t|^{m}} \left(\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}} \frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j} + \frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}} \frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}} \right) \right| |dt|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| c_3 \left| \sum_{j=1}^{m-2} \binom{m-3}{j-1} P(n, m-2-j) \frac{1}{|t|^{m-1}} \left(\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}} \frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j} + \frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}} \frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}} \right) \right| |dt| + \ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|c_m\left|\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)\frac{1}{|t|^2}\left(\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt| \quad (4.28)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{t^{m+1}}\left(\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{t^{m}}\left(\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{t^{m-1}}\left(\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!(j-1)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{t^{2}}\left(\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt| \quad (4.29)$$

olur ve buradan,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{nn!}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|^j}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{c_1 j}{2\pi R^{n}}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|^{j+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{nn!}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|^j}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2 j}{2\pi R^{n}}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|^{j+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{nn!}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|^j}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3 j}{2\pi R^n}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\frac{|dt|}{|t-1|^{j+1}}$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{nn!}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{2\pi R^{n+1}}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\frac{|dt|}{|t-1|^{j}}$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}\frac{c_m j}{2\pi R^n}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\frac{|dt|}{|t-1|^{j+1}} \tag{4.30}$$

eşitsizliği elde edilir.

$p>1, q>1\ ve\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere, Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi^k)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{nn!}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{R^{n+1}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{jq}}\right)^{1/q}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!}{(n-m+j)!}\frac{jc_1}{R^{n}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{(j+1)q}}\right)^{1/q}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{nn!}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{R^{n+1}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{jq}}\right)^{1/q}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!}{(n+1-m+j)!}\frac{jc_2}{R^{n}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{(j+1)q}}\right)^{1/q}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{nn!}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{R^{n+1}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{jq}}\right)^{1/q}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!}{(n+2-m+j)!}\frac{jc_3}{R^{n}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{(j+1)q}}\right)^{1/q}$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{nn!}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{R^{n+1}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{jq}}\right)^{1/q}$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!}{(n-1+j)!}\frac{jc_m}{R^{n}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^{(j+1)q}}\right)^{1/q} \tag{4.31}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq E_n^{(p)}\left(f;G_R\right)_{E_p(G_R)}\left[\frac{nn!cR^{1/q}}{(n+1-m)!R^{n+1}}\left(m!+(m-1)!+(m-2)!+..+1!\right)+\frac{n!cR^{1/q}}{(n+1-m)!R^{n}}\left(mm!+(m-1)(m-1)!+..+1.1!\right)\right]\begin{cases}\frac{1}{(R-1)^{m+1}}, 1<R<2\\ \frac{1}{R-1},\ 2<R\end{cases}$$

$$\leq E_n^{(p)}\left(f;G_R\right)_{E_p(G_R)}\left[\frac{nn!cR^{1/q}}{(n+1-m)!R^{n+1}}mm!+\frac{n!cR^{1/q}}{(n+1-m)!R^{n}}(m+1)!\right]\begin{cases}\frac{1}{(R-1)^{m+1}}, 1<R<2\\ \frac{1}{R-1},\ 2<R\end{cases},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq E_n^{(p)}\left(f;G_R\right)_{E_p(G_R)}\frac{(2m+1)m!nn!c_1(R)R^{1/q}}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}\quad. \tag{4.32}$$

(4.27) eşitsizliğindeki 2. terim için, $z=\psi(w)$ alınırsa (4.9) eşitliğine göre;

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left[\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\tau^kF_w'(\tau,w)\,d\tau\right|\right.$$

$$+\left|B_{m-1}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m-1)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\tau^kF_w''(\tau,w)\,d\tau\right|+...$$

$$\left....+\left|B_1(\psi')\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\tau^kF_w^{(m)}(\tau,w)\,d\tau\right|\right]\left|\frac{1}{t^{k+1}}\right||dt| \tag{4.33}$$

olur.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||d\tau||dt|+$$

$$+\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt|$$

$$\ldots+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|B_1(\psi')\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||d\tau||dt|$$

bağıntısında $0<m_1\le\left|\psi^{(m)}\right|\le m_2<\infty$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|\le\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\right||d\tau||dt|+\ldots$$

$$+\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\right||d\tau||dt| \qquad (4.34)$$

elde edilir.

(4.34) eşitsizliğinde $\frac{\tau}{t}=u$ için,

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u^k=\frac{u^{n+1}}{1-u}$ olur. Buna göre,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt|+\ldots$$

$$+\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt|, \qquad (4.35)$$

olduğu görülür.

(4.11) dikkate alındığında (4.35) eşitsizliği,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le\frac{A_1c_1}{R^{n+1}2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|}+\ldots+\frac{A_mc_m}{R^{n+1}2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-1|}, \qquad (4.36)$$

olarak yazılır.

$p>1, q>1\, ve\, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için Hölder eşitsizliği yardımı ile

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|\leq\frac{A_1c_1}{R^{n+1}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p|dt|\right]^{1/p}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^q}\right]^{1/q}+$$

$$\ldots+\frac{A_mc_m}{R^{n+1}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|^p|dt|\right]^{1/p}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^q}\right]^{1/q}$$

$$\leq E_n^{(p)}(f;G_R)_{E_p(G_R)}\frac{1}{R^{n+1}}\left(A_1c_1\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^q}\right]^{1/q}+\ldots+A_mc_m\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^q}\right]^{1/q}\right)\tag{4.37}$$

olduğu görülür. (4.32) ve (4.37) den,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\leq E_n^{(p)}(f;G_R)_{E_p(G_R)}\left[\frac{(2m+1)m!nn!c_1(R)R^{\frac{1}{q}}}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}+\frac{A_1c_1R^{\frac{1}{q}}}{R^{n+1}.(R-1)}+\ldots+\frac{A_mc_mR^{\frac{1}{q}}}{R^{n+1}(R-1)}\right]$$

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\leq\frac{(2m+1)m!nn!c(R)}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}(f;G_R)_{E_p(G_R)},\quad z\in\overline{G}\tag{4.38}$$

sonucu elde edilir. □

(4.38) eşitsizliğinde $m=1$ alınırsa,

$$\left|R_n(z;f')\right|\leq\frac{nc(R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}(f;G_R)_{E_p(G_R)}$$

sonucu elde edilir.

(4.38) eşitsizliğinde $m=2$ alınırsa,

$$\left|R_n(z;f'')\right|\leq\frac{n^2c(R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{(p)}(f;G_R)_{E_p(G_R)}$$

sonucu elde edilir.

4.3 Faber Serilerinin Değişken Üslü Smirnov Uzaylarında Eş Zamanlı Maksimal Yakınsaklığı

4.3.1 Tanım Γ üzerinde tanımlı olup $p(z)\geq 1$ şartını sağlayan Lebesgue ölçülebilir bir $p(z)$ üs fonksiyonu için,

$$\int_{\Gamma}|f(z)|^{p(z)}|dz|<\infty$$

şartını sağlayan Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine, Γ üzerinde tanımlı **değişken üslü Lebesgue uzayı** denir ve $L^{p(.)}(\Gamma)$ ile gösterilir**.**

$L^{p(.)}(\Gamma)$ **uzayı**

$$\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} := \inf\left\{\lambda>0:\ \int_{\Gamma}\left|\frac{f(z)}{\lambda}\right|^{p(z)}|dz|\le 1\right\}<\infty$$

olarak verilen norm ile bir Banach uzayı olur.

4.3.2 Tanım $p(.):\Gamma\to[1,\infty)$ şeklinde tanımlı üs fonksiyonu Γ üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $0<p<\infty$ için $E^{p}(G)$, analitik fonksiyonların bilinen Smirnov sınıfı olmak üzere,

$$E^{p(.)}(G):=\left\{f\in E^{1}(G): f\in L^{p(.)}(\Gamma)\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye, G bölgesinde analitik fonksiyonların **değişken üslü Smirnov sınıfı** denir.

4.3.3 Tanım $R>1$ olmak üzere $p(.)\in\wp_0(\Gamma_R)$ ve $f\in E^{p(.)}(G_R)$ olsun**.** p_n**,** $f\in E^{p(.)}(G_R)$ fonksiyonuna derecesi n 'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olmak üzere,

$$E_n(f;G_R)_{E^{p(.)}(G_R)} := \|f-p_n\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}$$

olarak tanımlanan sayıya f için $E^{p(.)}(G_R)$ sınıfında cebirsel polinomlarla **en iyi yaklaşım sayısı** denir.

4.3.4 Teorem $G\subset\mathbb{C}$ sınırlı basit bağlantılı bir bölge olsun. $\Gamma:=\partial G$ ve $m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$ için $\Gamma\in C(m+2,\alpha)$ olsun. $R>1$ olmak üzere $p(.)\in\wp_0(\Gamma_R)$ ve $f\in E^{p(.)}(G_R)$ olduğunu varsayalım. $n\in\mathbb{N},\ m\le n$ için,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\le\frac{(2m+1)nn!C(p,R)}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)},\quad z\in\bar{G}$$

olur.

İspat $\Phi_n(z)$, $\bar{G}$ bölgesinin Faber polinomları olmak üzere,

$$f^{(m)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k^{(m)}(z) \text{ ve}$$

$$R_n\left(z;f^{(m)}\right)=f^{(m)}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k^{(m)}(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\Phi_k^{(m)}(z)$$

eşitliği ve

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt$$

ifadesinden

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}dt$$

elde edilir.

$p_n(t)$ ile f fonksiyonuna $E^{p(.)}(G_R)$'de, derecesi n'den büyük olmayan cebirsel polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom gösterilecek olursa, (z^k) sisteminin $|t| = R$ üzerinden ortogonalliği dikkate alındığında;

$$R_n\left(z; f^{(m)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\left(f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}dt \tag{4.39}$$

yazılabilir.

G^-, $z=\infty$ noktasını içeren $\overline{G} = G\cup\Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni olan basit bağlantılı bir bölge olmak üzere,

$$\Phi_n^{(m)}(z) = \left(\varphi^n\right)^{(m)}(z) + E_n^{(m)}(z), \qquad \left(z\in G^-\right)$$

olduğundan (4.39) ifadesi aşağıdaki gibi yazılır;

$$\left|R_n\left(z; f^{(m)}\right)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt| \quad . \tag{4.40}$$

Lemma 4.1.5 den,

$$\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-(m-1))\varphi^{k-m}(z)A_1(\varphi') + \ldots + k\varphi^{k-1}(z)A_m\left(\varphi^{(m)}\right)$$

olduğu biliniyor. Buna göre (4.39) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim. $z\in\Gamma, |w|=1,\ \varphi(z)=w$ ve $\psi(w)=z$ olmak üzere $\Gamma\in C(m+2,\alpha)$ için $0<m_1\le\left|\varphi^{(m)}(w)\right|\le m_2<\infty$ eşitsizliği ve $\left|\frac{w}{t}\right|<1$ olduğu dikkate alındığında (4.3) ve (4.4)'den;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|c_1\left|\sum_{j=1}^{m}\binom{m-1}{j-1}P(n,m-j)\frac{1}{|t|^{m+1}}\left(\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+j-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|c_2\left|\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-2}{j-1}P(n,m-1-j)\frac{1}{|t|^{m}}\left(\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+j+1-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|c_3\left|\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-3}{j-1}P(n,m-2-j)\frac{1}{|t|^{m-1}}\left(\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+j+2-m}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|c_m\left|\sum_{j=1}^{1}\binom{0}{j-1}P(n,1-j)\frac{1}{|t|^{2}}\left(\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{(j-1)!nt^j}{(t-w)^j}+\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\frac{j!t^{j+1}}{(t-w)^{j+1}}\right)\right||dt|$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j-m}}{t^{n+1}(t-w)^j}\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!j}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j-m}}{t^{n}(t-w)^{j+1}}\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{nn!}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j+1-m}}{t^{n+1}(t-w)^j}\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!j}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+1+j-m}}{t^{n}(t-w)^{j+1}}\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{nn!}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n+1}(t-w)^j}\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!j}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j+2-m}}{t^{n}(t-w)^{j+1}}\right||dt|$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{nn!}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j-1}}{t^{n+1}(t-w)^j}\right||dt|$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!j}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{w^{n+j-1}}{t^{n}(t-w)^{j+1}}\right||dt|$$

olduğu görülür.

$\psi(t)=\zeta$ dönüşümü yapılır ve $w=\varphi(z)$ olduğu düşünülürse,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+j-m}}{(\varphi(\zeta))^{n+1}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!j}{(n-m+j)!}\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+j-m}}{(\varphi(\zeta))^{n}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j+1}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!n}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+1+j-m}}{(\varphi(\zeta))^{n+1}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!j}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+j+1-m}}{(\varphi(\zeta))^{n}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j+1}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!n}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+2+j-m}}{(\varphi(\zeta))^{n+1}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!j}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+j+2-m}}{(\varphi(\zeta))^{n}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j+1}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{1!}{(1-j)!}\frac{n!n}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+j-1}}{(\varphi(\zeta))^{n+1}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!j}{(n-1+j)!}\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\frac{(\varphi(z))^{n+j-1}}{(\varphi(\zeta))^{n}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))^{j+1}}\right||\varphi'(\zeta)||d\zeta|$$

eşitsizliği elde edilir.

$\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}=1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\varphi^k\right)^{(m)}(z)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+j-m}}{|\varphi(.)|^{n+1}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!j}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+j-m}}{|\varphi(.)|^{n}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!n}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+1+j-m}}{|\varphi(.)|^{n+1}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!j}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+1+j-m}}{|\varphi(.)|^{n}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!n}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+2+j-m}}{|\varphi(.)|^{n+1}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!j}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+2+j-m}}{|\varphi(.)|^{n}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!n}{(n-1+j)!}\frac{c_m(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+j-1}}{|\varphi(.)|^{n+1}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!j}{(n-1+j)!}\frac{c_m(p)}{2\pi}\left\|f(.)-p_n(.)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|\varphi(z)|^{n+j-1}}{|\varphi(.)|^{n}|\varphi(.)-\varphi(z)|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+j-m}}{R^{n+1}|R-1|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!j}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+j-m}}{R^{n}|R-1|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!n}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+1+j-m}}{R^{n+1}|R-1|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!j}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+1+j-m}}{R^{n}|R-1|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!n}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+2+j-m}}{R^{n+1}|R-1|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!j}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+2+j-m}}{R^{n}|R-1|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!n}{(n-1+j)!}\frac{c_m(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+j-1}}{R^{n+1}|R-1|^{j}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!j}{(n-1+j)!}\frac{c_m(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left\|\frac{1^{n+j-1}}{R^{n}|R-1|^{j+1}}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!n}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n+1}(R-1)^{j}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(m-j)!}\frac{n!j}{(n-m+j)!}\frac{c_1(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n}(R-1)^{j+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!n}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n+1}(R-1)^{j}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(m-2)!}{(m-1-j)!}\frac{n!j}{(n+1-m+j)!}\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n}(R-1)^{j+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!n}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n+1}(R-1)^{j}}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\frac{(m-3)!}{(m-2-j)!}\frac{n!j}{(n+2-m+j)!}\frac{c_3(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n}(R-1)^{j+1}}$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!n}{(n-1+j)!}\frac{c_m(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n+1}(R-1)^{j}}$$

$$+\sum_{j=1}^{1}\frac{0!}{(1-j)!}\frac{n!j}{(n-1+j)!}\frac{c_m(p)}{2\pi}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R^{n}(R-1)^{j+1}}$$

$$\leq E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{n!C_1(p)}{2\pi(n+1-m)!}\left[\frac{n}{R^{n+1}}\big(m!+(m-1)!+(m-2)!+..+1!\big)+\frac{1}{R^{n}}\big(mm!+(m-1)(m-1)!+..+1.1!\big)\right]\begin{cases}\dfrac{1}{(R-1)^{m+1}},1<R<2\\[2mm]\dfrac{1}{R-1},\ 2<R\end{cases}$$

$$\leq E_n^{p(.)}\left(f,G_R\right)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{n!C_1\left(p\right)}{2\pi\left(n+1-m\right)!}\left[\frac{n}{R^{n+1}}mm!+\frac{1}{R^n}\left(m+1\right)!\right]\begin{cases}\dfrac{1}{\left(R-1\right)^{m+1}}, 1<R<2\\ \dfrac{1}{R-1}, \ 2<R\end{cases}$$

$$\leq E_n^{p(.)}\left(f,G_R\right)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{\left(2m+1\right)nn!C_1\left(p,R\right)}{2\pi\left(n+1-m\right)!R^{n+1}\left(R-1\right)} \tag{4.41}$$

değerlendirmesi elde edilir.

(4.40) eşitsizliğindeki 2. terim için (4.9) dikkate alınırsa $z=\psi\left(w\right)$ dan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(z\right)}{t^{k+1}}\right||dt|=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi\left(w\right)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left[\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^kF_w'\left(\tau,w\right)d\tau\right|\right.$$

$$+\left|B_{m-1}\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m-1)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^kF_w''\left(\tau,w\right)d\tau\right|+\dots$$

$$\left.\dots+\left|B_1\left(\psi'\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\tau^kF_w^{(m)}\left(\tau,w\right)d\tau\right|\right]\left|\frac{1}{t^{k+1}}\right||dt| \tag{4.42}$$

olduğu görülür.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi\left(w\right)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|B_m\left(\psi',\psi'',...,\psi^{(m)}\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}F_w'\left(\tau,w\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||d\tau||dt|+...$$

$$...+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|B_1\left(\psi'\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}\left(\tau,w\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||d\tau||dt|$$

Buradan, $0<m_1\leq\left|\psi^{(m)}\right|\leq m_2<\infty$ olduğundan, son eşitsizlik

$$\leq\frac{c_1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w'\left(\tau,w\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\right||d\tau||dt|+...$$

$$...+\frac{c_m}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi\left(t\right)\right)-p_n\left(\psi\left(t\right)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{|\tau|=1}F_w^{(m)}\left(\tau,w\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\right||d\tau||dt| \tag{4.43}$$

şeklinde elde edilir.

(4.43) eşitsizliğinde $\dfrac{\tau}{t}=u$ olarak alınırsa $\left(\dfrac{\tau}{t}=u<1 \quad \textit{olduğu açıktır}\right)$,

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u^k=\dfrac{u^{n+1}}{1-u}$ olur. Buna göre,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w'(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt|+\ldots$$

$$\ldots+\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|=1}F_w^{(m)}(\tau,w)\frac{t\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||d\tau||dt| \tag{4.44}$$

yazılır.

Fubini teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{c_1}{2\pi}\int\limits_{|\tau|=1}|\tau|^{n+1}\left|F_w'(\tau,w)\right|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{1}{|t|^{n+1}|t-\tau|}|dt|\right)|d\tau|+\ldots$$

$$\ldots+\frac{c_m}{2\pi}\int\limits_{|\tau|=1}|\tau|^{n+1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{1}{|t|^{n+1}|t-\tau|}|dt|\right)|d\tau|$$

$$\leq\frac{c_1}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|\tau|=1}\left|F_w'(\tau,w)\right|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{1}{|t-\tau|}|dt|\right)|d\tau|+\ldots$$

$$\ldots+\frac{c_m}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|\tau|=1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\frac{1}{|t-\tau|}|dt|\right)|d\tau|. \tag{4.45}$$

$\psi(t)=\zeta$ dönüşümü yapılır ve $\tau=\varphi(z)$ olduğu düşünlürse (4.45) eşitsizliği,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}\left(\psi(w)\right)}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq\frac{c_1}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|\tau|=1}\left|F_w'(\tau,w)\right|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|}|d\zeta|\right)|d\tau|+\ldots$$

$$\ldots+\frac{c_m}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{|\tau|=1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|}|d\zeta|\right)|d\tau|$$

olarak yazılabilir.

$\dfrac{1}{p(.)}+\dfrac{1}{q(.)}=1$ olmak üzere,

$$\leq \frac{c_1(p)}{4\pi^2 R^{n+1}}\int_{|\tau|=1}\left|F_w'(\tau,w)\right|\left(\left\|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{\varphi'(.)}{\varphi(.)-\varphi(z)}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}\right)|d\tau|+\dots$$

$$+\frac{c_m(p)}{4\pi^2 R^{n+1}}\int_{|\tau|=1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right|\left(\left\|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{\varphi'(.)}{\varphi(.)-\varphi(z)}\right\|_{L^{q(.)}(\Gamma_R)}\right)|d\tau|$$

$$\leq \frac{c_1(p)}{4\pi^2 R^{n+1}}\int_{|\tau|=1}\left|F_w'(\tau,w)\right|E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R-1}|d\tau|+\dots$$

$$\dots+\frac{c_m(p)}{4\pi^2 R^{n+1}}\int_{|\tau|=1}\left|F_w^{(m)}(\tau,w)\right|E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\frac{1}{R-1}|d\tau| \tag{4.46}$$

şeklinde elde edilir.

(4.11) dikkate alınarak (4.46) eşitsizliğinin devamı olarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k^{(m)}(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$\leq \frac{A_1c_1(p)}{2\pi R^{n+1}(R-1)}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}+\dots+\frac{A_mc_m(p)}{2\pi R^{n+1}(R-1)}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}$$

$$\leq \frac{Ac(p)}{2\pi R^{n+1}(R-1)}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)} \tag{4.47}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.40) eşitsizliğinin, (4.41) ve (4.47) den,

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\leq E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}\left(\frac{(2m+1)nn!C_1(p,R)}{2\pi(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}+\frac{Ac(p)}{2\pi R^{n+1}(R-1)}\right) \tag{4.48}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik

$$\left|R_n\left(z;f^{(m)}\right)\right|\leq \frac{(2m+1)nn!C(p,R)}{(n+1-m)!R^{n+1}(R-1)}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)},\quad z\in\overline{G}$$

olarak yazılabilir. □

Bu son eşitsizlikte $m=1$ alınırsa,

$$\left|R_n(z;f')\right|\leq \frac{nC(p,R)}{R^{n+1}(R-1)}E_n^{p(.)}(f,G_R)_{E^{p(.)}(G_R)}$$

sonucu, ve $m=2$ alınırsa,

$$\left|R_n\left(z;f''\right)\right| \leq \frac{n^2 C\left(p,R\right)}{R^{n+1}\left(R-1\right)} E_n^{p(.)}\left(f,G_R\right)_{E^{p(.)}\left(G_R\right)}$$

sonucu elde edilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Başkan T., *Kompleks fonksiyonlar teorisi*, Vipaş A.Ş., Bursa,126-313,2000.

[2] G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of A Complex Variable* (AMS Translation of Mathematical Monographs Volume 26), Providence: American Mathematical Sociey, 388-453, 1969.

[3] Rynne, P. B. and Youngson, M. A., *Linear Functional Analysis*, London: Springer-Verlag, 26-101, (2008).

[4] Lehto, O. And Virtanen, K., *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, (1973).

[5] Çavuş, A. and Israfilov, D. M., "Approximation byFaber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L^p(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$", *Approximation theory App.*, 11, 1, 105-118, (1987).

[6] G. Mastroianni and G. V. Milovanović, *Interpolation Processes Basic Theory and Applications*, Heidelberg, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 4-212, 2008.

[7] C. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1, 1975.

[8] M. O. Gonzalez, *Classical Complex Analysis*, Marcel Dekker Inc., 486,1992.

[9] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable III*, New york: Chelsea Publishing Company, 8-14, 1977.

[10] C. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Map*, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 43-48,1992.

[11] D. Gaier, *Lectures on Complex Approximation*, Birkhauser, Boston, (translated from Germany by Renate McLaughlin), 1987.

[12] Suetin, P. K., *Series of Faber Polynomials*, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 33-257, (1998).

[13] Cruz-Uribe, D. V. and Fiorenza, A., *Variable Lebesgue Spaes, Foundations of Harmonic Analysis*, 1-211, Birkhäsuser, (2013).

[14] Duren, P. L., *Theory of* H_p *Spaces*, New York: Academic Press, 38, (1970).

[15] Kokilashvili, V. M., "On analytic functions of Smirnov-Orlicz Classes", Studia Math., 31, 43, (1968).

[16] Devore, A. R. And Lorentz, G. G., *Constructive Approximation: polynomials and splines approximation*, Newyork: Springer-Verlag, 200-209, (1993).

[17] Israfilov, D. M. and Yirtici, E., “Convolution and best approximations in variable exponent Lebesgue space”, *Romanian Academy Mathematical Reports*, 18, 4, 497-508, (2016).

[18] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent”, (ed: S. Tikhonov), *Conference on Harmonic Analysis and Approximation Theory*, Barcelona, Abstract Book, 25, (2016).

[19] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent”, *Jouurnal of Mathematical Analysis and Applications*, 459, 112 113, (2018).

[20] Dzyadyk, V. K., Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials. Nauka, Moscow, (1977)

[21] Israfilov, D. M., “Simultaneous approximation in the variable exponent spaces”, (ed: L. Beznea) *International Conference on Complex Analysis and Related Topics The $L^{p(x)}\left(\mathbb{R}^n\right)$ Romanian-Finnish Seminar*, Bucharest, Abtract Book, 16, (2016).

[22] Israfilov, D. M. and Testici, Ahmet, “Simultaneous Approximation in Lebesgue Space with Variable Exponent”, *Proceeding of the Institute of mathematics and Mechanics, National Academy of Science of Azerbaijan*, (2017).

[23] Kokilashvili, V. M. and Paatahvili, V., “On variable Hardy and Smirnov classes of analytic functions”, *Georgian Inter. J. Sci.*, 1, 181-195, (2008).

[24] Israfilov, D., Kokilashvili, V. And Samko, S., “Approximation In weighted Lebesgue and Smirnov Spaces With Variable Exponents”, *Proceed. of A. Razmadze Math. Institute*, 143,25-35, (2007).

[25] Israfilov, D. M., Testici, A., “Approximation properties of some summation methods in the Smirnov classes with variable exponent”, (eds: A. Allaberen and A. Lucashov), *International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016), Almaty, American Institute of Physics Conference Proceedings*, 1759, 0200101 0200104, doi: 10.1063/1.4959624, (2016).

[26] Kokilashvili, V. M., Samko, N. and Samko S., “The maximal operator in weighted variable spaces $L^{p(\cdot)}$, *Journal of Function Spaces and Applications*, 5, 3, 299-317, (2007).

[27] Gonzalez, M. O., Classical Complex Analysis, Marcel Dekker Inc., 486, (1992).

[28] Israfilov, D. M., “Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials”, *Constructive Approximation*, 17, 335-351, (2001).

[29] Akhiezer, N. I., *Theory of Approximation*, New york: Frederick Ungar Publishing, 1-307, (1956).

[30] I. I. Sharapudinov, “On a topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$”, *Matem. Zametki*, 26, no 4, 613-632, 1979.

[31] G. B. Folland, *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, USA: A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[32] D. M. Israfilov, R. Akgün, “Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes” *Jornal of Mathematics of Kyoto University* 46 (4), 775-770, 2006.

[33] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation In Smirnov Classes with Variable Exponent”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 60, 9, 1243-1253, (2015).

[34] D. M. Israfilov, E. Gürsel and E. Aydın, “Maximal Convergence of Faber Series in Smirnov Classes with Variable Exponent”, *Bull. Braz. Math. Soc.*, New Series, DOI 10.1007/s00574-018-0086-8, 2018.

[35] Yildirir, Y.E. and Israfilov, D. M., “Simultaneous and Converse Approximation Theorems in Weighted Lebesgue Spaces. *Math. Inequalities & Appl.*, 14, 2, 359-371, (2011).

[36] D.M. Israfilov, E. Gürsel, “Approximation by $p(.)$-Faber polynomials in the variable Smirnov classes”, *Math Meth Appl Sci.*, 44, 7479-7490, 2021.

[37] D.M. Israfilov, E. Gürsel, “Faber-Laurent series in variable Smirnov classes”, *Turkish Jornal of Mathematics*,44, 2, 389-402, 2020.

[38] Israfilov, D. M., Testici, A., “Approximation by Matrix Transforms in Generalized Grand Lebesgue spaces with variable exponent”, *Applicable Analysis*, 100, 4, 819-834, DOI: 10.1080/00036811.2019.1622680, 2019.

[39] Israfilov, D. M., Testici, A., “Multiplier and Approximation Theorems in Smirnov Classes with variable exponent”, *Turkish Jornal of Mathematics*,42, 1442-1456, 2018.

[40] Israfilov, D. M., Testici, A., “Some Inverse and Simultaneous Approximation Theorems in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces”, *Analysis Mathematica*, 44, 4, 475-492, 2018.

[41] Israfilov, D. M., Testici, A., “Approximation by Faber- Laurent Rational Functions in the Variable Exponent Smirnov classes”, *INDIGATIONES MATHEMATİCAE-NEW SERIES*, 27, 4, 914-922, 2016.

[42] Israfilov, D. M., Testici, A., “Approximation in weighted Smirnov classes”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 60,1, 45-58, 2015.

[43] Güven, A., Israfilov, D.M., “On Approximation in weighted Orlics spaces”, *Math. Slovaca*, 62,1, 77-86, 2012.

[44] Israfilov, D.M., Oktay, B., Akgün, R., “Approximation in Smirnov Orlicz Classes”, *Glasnik Matematikçi*, 40, 87-102, 2005.

[45] Güven, A., Israfilov, D.M., “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces L_p.”, J. Math. Inequal.,4, 2, 285-299, 2010.

[46] Pommerenke, Ch., *Boundary Behaviour of Conformal Map*, New york: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 43-48, (1992).

[47] S. G. Samko, “Convolution and potential type operators in the space $L^{p(x)}\left(\mathbb{R}^n\right)$”, *Integral transforms and special functions*, vol. 7, no. 3-4, 261-284, 1998.

[48] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Michael Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Hiedelberg Dordrecht London New York, 2011.

[49] Timan, A. F., Theory of Approximation of functions of a Real Variable, Oxford: Pergamon Press, (1963).

[50] Royden H. L., *Real analysis*, New Jersey: Prentice-Hall, 220, (1988).

[51] Sharapudinov, I. I., ‘On Direct and Inverse Theorems of Approximation Theory In Variable Lebesgue Space And Sobolev Spaces’, *Azerbaijan Journal of Math.*, 4, 1, 55-72, (2014).

[52] Volosivets, S. S., “Approximation of functions and their conjugates in variable Lebesgue spaces”, *Sbornik Mathematics*, 208, 1, 44-59, (2017).

[53] Havin, V. P., “Boundary properties of integrals of Cauchy type and conjugate Harmonic functions in regions with rectifiable boundary (Russian)”, *Math. Sb. (N.S.)*, 68, 4, 499-517, (1965).

[54] David, G., “Operateurs integraux singulers sur certaines courbes du plan complexe”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17, 4, 157-189, (1984).

[55] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Multiplier Theorems in weighted Smirnov Spaces”, *J. Korean Math. Soc.*, 45, 6, 1535-1548, (2008).

[56] Akgun, R., “TrigonometricApproximation of Functions in Generalized Lebesgue Spaces With Variable Exponent”, *Ukranian Math. Journal,* 63, 1, 3-23, (2011).

[57] Akgun, R. “Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth”, *Georgian Math. Journal,* 18, 203-235, (2011).

[58] Israfilov, D. M. and Guven, A., “Approximation in Weighted Smirnov Classes”, *East Journal of Approximation*, 11, 91-102, (2005).

[59] Kokilashvili, V. M. and Samko, S. G., “Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth”, *Journal of Math. Anal. And Appl.*, 352, 1, 15-34, (2009).

[60] Diening, L., “Maximal function on generalized spaces $L^{p(.)}$”, *Math. Inequal. Appl.,* 7, 245-253, (2004).

[61] Czipszer, J. And Freud, G., “Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses Dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives”, *Acta Math.* 99, 33-51, (1958).

[62] G. Faber, *Uber polynomische Entwicklungen,* Mathem. Ann. 57, 389-408, 1903.

[63] S. Z. Jafarov, “Approximation in weighted rearrangement invariant Smirnov spaces”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 9(1), 9-21, 2016.

[64] B. T. Bilalov, T. B. Gasymov and A. A. Guliyeva, “On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes”, *Turkish Journal of Mathematics,* vol. 40, no 5, 1085-1101, 2016.

[65] B. T. Bilalov and A. A. Guliyeva, “On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces”, *International Journal of Mathematics*, vol. 25, no. 6, 1450054 (10 pages) DOI: 10.1142/S0129167X14500542, 2014.

[66] S. Z. Jafarov, “On approximation of functions by p-Faber Laurent Rattional functions”, *Complex Variales and Elliptic Equations,* 60(3), 416-428, 2015.

[67] Yildirir, Y.E. and Israfilov, D. M., “Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces”, *Mathematical Inequalities and Applications*, 14, 2, 359-371, (2011).

[68] Jackson, D., The Theory of Approximation, Newyork: Amer. Math. Soc., Coll. Publ., 13-32, (1930).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Fatih Çelik

Doğum tarihi ve yeri : 01.06.1977-Eleşkirt

e-posta : fthcelik77@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü	2012-2015
Lisans	Atatürk Üniversitesi/KKEF Matematik Öğretmenliği	1995-1999
Lise	Fatih Sultan Mehmet Lisesi	1992-1995