T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEKTERİMLİ EĞRİLERİN TEĞET KONİLERİNİN MİNİMAL SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİ

ESRA EMİNE ZENGİN

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE (Tez Danışmanı)**
Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ
Doç. Dr. Seher TUTDERE KAVUT
Doç. Dr. Mesut ŞAHİN
Dr. Öğr. Üyesi Celal Cem SARIOĞLU

BALIKESİR, OCAK - 2022

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Tekterimli Eğrilerin Teğet Konilerinin Minimal Serbest Çözülümleri**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Esra Emine Zengin

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi tarafından BAP 2017/108 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

TEKTERİMLİ EĞRİLERİN TEĞET KONİLERİNİN MİNİMAL SERBEST ÇÖZÜLÜMLERİ
DOKTORA TEZİ
ESRA EMİNE ZENGİN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ PINAR METE)
BALIKESİR, OCAK-2022

Bu tezde, Gorenstein tekterimli eğriler durumunda, 4-boyutlu afin uzayda, teğet koninin minimal serbest çözülümünü çalışıyoruz. Tam kesişim olmayan Gorenstein tekterimli eğriler için 5 minimal üreteçli teğet koninin, açık minimal serbest çözülümü verilmektedir. Yine, Betti sayılarının (1, 5, 5, 1) ve (1, 5, 6, 2) olduğunu belirledik. Bunu ispatlamak için teğet koninin tanımlayan idealinin bazı durumlarda bilinen minimal üreteçlerini ve literatürdeki Buchsbaum-Eisenbud teoremini kullanıyoruz. Daha sonra, bu eğri aileleri için teğet koninin Hilbert fonksiyonunu veriyoruz. Ayrıca, teğet konisi Cohen-Macaulay olmayan bazı Gorenstein tekterimli eğri ailelerinin tanımlayan ideallerinin standart bazlarını bazı koşullar altında hesaplıyoruz. Bu bazları kullanarak, bu eğri ailelerinin indirgenmiş Hilbert serilerini veriyoruz.

ANAHTAR KELİMELER: Gorenstein tekterimli eğriler, teğet koniler, minimal serbest çözülümler

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 64

ABSTRACT

MINIMAL FREE RESOLUTIONS OF THE TANGENT CONES OF MONOMIAL CURVES
PH.D THESIS
ESRA EMİNE ZENGİN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, JANUARY - 2022

In this thesis, we study the minimal free resolution of the tangent cone in 4-dimensional affine space, in the case of Gorenstein monomial curves. The explicit minimal free resolution of the tangent cone with five minimal generators is given for the non complete intersection Gorenstein monomial curves. Also, we determine the possible Betti sequences are (1, 5, 5, 1) and (1, 5, 6, 2). In order to prove this result, we use known minimal generators of the defining ideal of the tangent cone in some cases and the Buchsbaum-Eisenbud theorem in the literature. Then, we give the Hilbert function of the tangent cone for these families of curves. Moreover, under some conditions, we compute the standard bases of defining ideas of some families of Gorenstein monomial curves whose tangent cones are not Cohen-Macaulay. Using these standard bases, we give the reduced Hilbert series of these families of curves.

KEYWORDS:

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 64

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

C	:	Tekterimli eğri
Çek(f)	:	f dönüşümünün çekirdeği
der(f)	:	f'nin derecesi
ds	:	Negatif derecelendirilmiş alfabetik sıralama
derinlik(I)	:	I'nın derinliği
ebob	:	En büyük ortak bölen
ekok	:	En küçük ortak kat
e(S)	:	S sayısal yarı grubunun gömme boyutu
F	:	Serbest çözülüm
$\mathbf{gr_I(R)}$	:	I idealine göre ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halka
$\mathbf{H_R(n)}$	:	Hilbert fonksiyon
I(C)	:	C tekterimli eğrisinin tanımlayan ideali
$\mathbf{I(C)_*}$	:	C tekterimli eğrisinin teğet konisinin tanımlayan ideali
$\mathbf{I_r(A)}$	:	A matrisinin r×r minörleri ile üretilen ideal
k	:	Cisim
boy(M)	:	M'nin boyutu
M(*d*)	:	M'nin *d* kadar kaydırılmışı
M	:	Maksimal ideal
m(S)	:	S yarı grubunun katlılığı
m(I)	:	I'nın minimal üreteç sayısı
P	:	Asal ideal
rank(F)	:	F'in rankı
$\mathbf{P_k^3}$	:	k cismi üzerinde 3 boyutlu projektif uzay
R	:	Halka
S	:	Sayısal yarı grup
S(f,g)	:	f ve g polinomlarının S polinomu
V(I)	:	I idealinin varyetesi
yükseklik(I)	:	I'nın yüksekliği

ÖNSÖZ

Bu zorlu yolculukta, yoluma ışık tutan, sorularımı daima sabır ve ilgiyle cevaplayan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anına tanıklık edip, beni destekleyen ilgi ve sevgilerini eksik etmeyen biricik annem, babam ve kardeşime teşekkür ederim.

Balıkesir, 2022 **Esra Emine Zengin**

1. GİRİŞ

Minimal serbest çözülüm $\mathbb{N}$ doğal sayıları veya $\mathbb{N}^n$ ile derecelendirilen bir halka üzerindeki bir derecelendirilmiş modül ile ilişkili bir invaryanttır. Değişmeli cebir ve cebirsel geometrideki pek çok invaryant (değişmez), serbest çözülümler ile tanımlanabilmektedir. Bu sebeple, serbest çözülümler ana çalışma konularından birisidir. Kullanışlı bir araç olmasından dolayı, cebirsel geometri, hesapsal cebir, invaryant teori, sayılar teorisi gibi bir çok alanda uygulamaları vardır.

Bir modülün bazı, halka üzerinde lineer bağımsız olan bir üreteç kümesidir. Maalesef, böyle kümeler çok nadirdirler. Bu nedenle, bazlar yerine minimal üreteç sistemlerini düşünmek zorunda kalırız. Ancak, üreteçler bir modülün yapısı hakkında bize çok az bilgi verebilmektedir.

Temel soru: Bir modülün yapısını nasıl tarif edebiliriz?

İnvaryant teorideki uygulamalardan motive olarak, Hilbert, 1890 yılındaki ünlü makalesinde [1] bir sonlu üretilmiş modülle, bir serbest çözülümü ilişkilendirme fikrini ortaya atmıştır. Hilbert'in temel fikri, F_i'ler sonlu üretilmiş serbest modüller olmak üzere,

$$\ldots \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1\text{'deki bağıntılar} \\ \text{üzerindeki bağıntılar} \end{pmatrix}} F_1 \xrightarrow{\varphi_1 = \begin{pmatrix} \text{M'nin üreteçlerinin} \\ \text{bağıntıları} \end{pmatrix}} F_0 \xrightarrow{\varphi_0 = \left(\text{M'nin üreteçleri}\right)} M \to 0$$

formunda ve bunun M modülünün yapısının tasviri olduğudur.

R bir halka olmak üzere, her R-modül bir serbest çözülüme sahiptir. Eğer R halkası derecelendirilmiş ise, her derecelendirilmiş modülün, bir derecelendirilmiş serbest çözülümü vardır. Mümkün olan en etkili serbest çözülümü oluşturmak, bir başka deyişle, her adımda bağıntıların bir minimal sistemini seçmek isteyebiliriz. Bu, bizi minimal serbest çözülüm kavramına götürür.

Bir standart k-cebirinin, minimal serbest çözülümünü açık bir şekilde bulmak, değişmeli cebirdeki temel amaçlardan birisidir. Biz, bu problemi tekterimli eğriler için çalışmak istiyoruz. Bu tezde asıl amaç, $\mathbb{A}_k^4$ afin uzayındaki Gorenstein tekterimli eğrilerin teğet konilerinin minimal serbest çözülümünü açık bir şekilde yazmaktır.

$\mathbb{A}_k^d$ uzayındaki bir tekterimli afin C eğrisi, $n_1, n_2, \ldots n_d$ sayıları ebob$(n_1, n_2, \ldots, n_d) = 1$ olan pozitif tamsayılar iken $x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, \ldots, x_d = t^{n_d}$ parametrizasyonuna sahiptir. Bu eğrinin tek tekil noktası orijindedir ve bu tekil noktayı incelemek uzun zamandır açık bir problemdir. Yine, burada, $\{n_1, n_2, \ldots n_d\}$

$$S =< n_1, n_2, \ldots, n_d >= \{n \mid n = \sum_{i=1}^{d} a_i n_i,\ a_i \in \mathbb{Z}_{\geq} 0\}$$

sayısal yarı grubunun üreteç kümesi olarak alalım. S'nin $k[t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}]$ yarı grup halkası, $I(C)$, C eğrisinin tanımlayan ideali olmak üzere $k[x_1, x_2, \ldots, x_d]/I(C)$ koordinat halkasına izomorfiktir. C tekterimli eğirisinin orijindeki teğet konisinin $gr_{\mathcal{M}} = (k[[x_1, x_2, \ldots, x_d]])$ koordinat halkası $k[x_1, x_2, \ldots, x_d]/I(C)_*$ halkasına izomorfiktir. Burada, f_*, $f \in I(C)$ polinomunun en küçük dereceli homojen toplamı olmak üzere, $I(C)_*$, f_*'lar tarafından üretilmektedir. Problemimizi çalışırken, Gröbner teori kullanarak $I(C)_*$'ın üreteçlerini bulmak için teknikler olmasından dolayı, $k[x_1, x_2, \ldots, x_d]/I(C)_*$ halkasını kullanacağız.

Bu tezde elde ettiğimiz sonuçlardan birisi, teğet konisi Cohen-Macaulay olan 5 üreteçli tam kesişim olmayan Gorenstein tekterimli eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümünü açık bir şekilde vermek ve Betti dizilerinin $(1, 5, 6, 2)$ ve $(1, 5, 5, 1)$ olduğunu belirlemektir. Ayrıca bu eğri ailelerinin Hilbert fonksiyonlarını hesaplamaktayız. Yine, teğet konisi Cohen-Macaulay olmayan Gorenstein tekterimli eğri ailelerini de çalışıyoruz.

Tezin 2. bölümünde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, notasyonlar ve önemli teoremler verilmektedir. İlk olarak tekterimli eğriler ve bu eğriler ile ilgili literatür tanıtılarak sonrasında bir tekterimli eğri ile sayısal yarı grup arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Yine bu bölümde, bir varyetenin teğet konisi tanımlanarak bilinen bazı sonuçlar verilmektedir. Son olarak, polinom halkası üzerindeki, modüllerin minimal serbest çözülümleri ve Hilbert fonksiyonlarının tanımları ve özellikleri ile Gröbner teorinin temel bilgileri hatırlatılmaktadır.

Tezin 3. bölümünde, 4-boyutlu afin uzayda teğet konisi Cohen-Macaulay olan 5 üreteçli tam kesişim olmayan Gorenstein tekterimli eğrilerin teğet konisinin minimal serbest çözülümü çalışılmaktadır.

Tezin 4. bölümünde, tekterimli eğrilerin teğet konilerinin üreteçlerini bulmak sorusundan motive olarak, C tekterimli eğrisinin Cohen-Macaulay olmayan teğet konisinin tanımlayan ideallerinin üreteçleri belirlenmektedir. Yine, bu bazları kullanarak, bu eğri ailelerinin teğet konilerinin Hilbert serileri yazılmaktadır.

2. TEKTERİMLİ EĞRİLER

Bu bölümde, tekterimli eğriler, sayısal yarı gruplar ve bunlar arasındaki ilişki, Cohen-Macaulay halkalar ve serbest çözülümler ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Burada gerekli olan temel tanım ve kavramlar için [2] kaynak olarak verilebilir.

2.1 Tekterimli Eğriler ve Sayısal Yarı Gruplar

Eğrilerin önemli bir sınıfını oluşturan tekterimli eğriler, tamsayılarla üretilen yarı gruplarla olan ilişkilerinin sonucu olarak cebir, geometri ve kombinatorik arasında bir ilişki verirler.

2.1.1 Tanım. k bir cisim ve d pozitif bir tamsayı olsun. d boyutlu afin uzay,

$$\mathbb{A}_k^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_1, a_2, \ldots, a_d \in k\}$$

olarak tanımlanır.

2.1.2 Tanım. $\mathbb{A}_k^d$, k cismi üzerinde bir afin uzay olsun. $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ve ebob$(n_1, n_2, \ldots, n_d) = 1$ olmak üzere, C tekterimli eğrisi $x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, ..., x_d = t^{n_d}$ parametrik notasyonu ile verilir. Bir başka söylemle,

$$C = \{(t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_d}) \in A_k^d \mid t \in k\}.$$

2.1.3 Tanım. C, $\mathbb{A}_k^d$ afin uzayında bir tekterimli eğri olsun. C eğrisinin $I(C)$tanımlayan ideali

$$I(C) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in k[x_1, x_2, \ldots, x_d] \mid f(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}) = 0\}.$$

Burada, t parametrizasyonu k cismi üzerinde transandantaldır.

Tekterimli eğrilerin tanımlayan ideali n boyutlu afin uzayında torik ideallerin ilginç örnekleri olarak karşımıza çıkar. Herzog [3] makalesinde sonlu üretilmiş Abelyan yarı gruplarının ilişkilerini çalışmış ve $I(C)$ tanımlayan idealinin üreteç kümesini belirlemiştir. Bresinsky, Herzog'un elde ettiği sonuçları kullanarak verilen bir $\{f_1, \ldots, f_n\}$ polinomlar kümesinin $I(C)$ idealini üretip üretmediğini kontrol eden bir metod vermiştir [4].

2.1.4 Tanım. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi ve $S \subset \mathbb{N}$ olsun. $\mathbb{N}$'nin toplamaya göre kapalı, $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu bir küme olan S alt kümesine bir sayısal yarı grup veya monoid denir.

2.1.5 Tanım. $n_1, n_2, \ldots, n_d$, ebob$(n_1, n_2, \ldots, n_d) = 1$ olan pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$S =< n_1, n_2, \ldots, n_d >= \{n \mid n = \sum_{i=1}^{d} a_i n_i,\ a_i \in \mathbb{N}\}$$

kümesi bir sayısal yarı gruptur ve tüm sayısal yarı gruplar bu şekilde ifade edilir. $\{n_1, n_2, \ldots, n_d\}$ kümesi, S sayısal yarı grubunun üreteç kümesidir.

S bir sayısal yarı grup ve $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_d\}$ minimal üreteç kümesi olsun. $m(S) = n_1$ sayısına S'nin katlılığı, $e(S)$ ile gösterilen minimal üreteç kümesinin eleman sayısına da gömme boyutu denir.

Simetrik sayısal yarı gruplar, sayısal yarıgrupların literatürde en çok çalışılan ailelerindendir. $S =< n_1, n_2, \ldots, n_d >$ sayısal yarı grubunun simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul boşlukların sayısının ile boşluk olmayanların sayısınına eşit olmasıdır. Burada,

$$n \notin < n_1, n_2, \ldots, n_d >,\ 0 < n \leq F(S)$$

boşluklar iken,

$$n \in < n_1, n_2, \ldots, n_d >,\ 0 \leq n < F(S)$$

boşluk olmayan sayılardır. $F(S)$ sayısı ise, yarı grupta olmayan en büyük sayıdır. Bu sayı, S'nin Frobenius sayısı olarak bilinir.

2.1.6 Örnek. $S =< 4, 6, 7 >$ yarı grubunu alalım. $S = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, \rightarrow\}$ dır. Burada, "$\rightarrow$" 10'dan büyük tüm sayılar S kümesindedir anlamına gelir. Boşlukların kümesi $\{1, 2, 3, 5, 9\}$ ve boşluk olmayan sayıların kümesi $\{0, 4, 6, 7, 8\}$. Boşlukların sayısı boşluk olmayanların sayısına eşit olduğu için S yarı grubu simetriktir.

$x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, \ldots, x_d = t^{n_d}$ olacak şekilde parametrik olarak verilen C tekterimli afin eğrisi ve $\{n_1, n_2, \ldots, n_d\}$ minimal üreteçleri tarafından üretilen $< n_1, n_2, \ldots, n_d >$ yarı grubu için tanımlayan ideal,

$$I(C) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in k[x_1, x_2, \ldots, x_d] \mid f(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}) = 0\}$$

idi. Burada,

$$\phi : k[x_1, ..., x_d] \rightarrow k[t]$$

$$x_i \to t^{n_i}$$

homomorfizması

$$k[x_1, x_2, \ldots, x_d]/I(C) \cong k[t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}]$$

tekterimli eğri ve yarı grup arasındaki ilişkiyi gösterir. Lokal halkalarda ise bu izomorfizma,

$$(k[x_1, x_2, \ldots, x_d]/I(C))_{(x_1, x_2, \ldots, x_d)} \cong k[t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}]_{(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d})}$$

şeklindedir ve lokal halkanın tamlaması,

$$k[[x_1, x_2, \ldots, x_d]]/I(C) \cong k[[t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}]]$$

izomorfizmasını verir.

2.2 Bir Tekterimli Eğrinin Teğet Konisi

Bir afin varyetenin bir noktadaki teğet konisi, bu noktada varyeteye yaklaşan ve özellikle nokta, tekil nokta olduğunda varyete hakkında lokal bilgiler veren, bir geometrik objedir. Nokta tekil değilken teğet konisi klasik teğet uzayı olacağından tekilliğe sahip eğrilere odaklanılmaktadır. C eğrisinin, eğer $1 \leq i \leq d$ için $n_i > 1$ ise, sadece bir tekil noktası vardır o da orijindedir. Bu nedenle, bir tekterimli eğrinin orijindeki teğet konisi, tekterimli eğrileri anlamak açısından önemlidir.

2.2.1 Tanım. f_* polinomları, $f \in I$ için f polinomlarının en düşük dereceli homojen toplamı ve I_*, f_* polinomları tarafından üretilen ideal olsun. p noktasındaki $C_p(V)$ geometrik teğet konisi, $V(I_*)$ varyetesidir ve teğet koni, $(V(I_*), k[x_1, ..., x_d]/I_*)$ ikilisidir.

2.2.2 Örnek. C tekterimli afin eğrisi $x = t^2$, $y = t^3$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu durumda,

$$I(C) = \{f(x, y) \in k[x, y] \mid f(t^2, t^3) = 0\} =< x^3 - y^2 >$$

$$I(C)_* =< y^2 >$$

olarak elde edilir.

Varyetelerin, tekil noktalarının çalışılmasında ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkalar oldukça önemlidir.

2.2.3 Tanım. Her $i, j \geq 0$ için, R_i'ler değişmeli gruplar olmak üzere

$$R_i R_j \subset R_{i+j}$$

şartını sağlayan ve

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots$$

direkt toplam ayrışımına sahip olan R halkasına derecelendirilmiş halka denir.

2.2.4 Tanım. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. I idealine göre ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halka

$$gr_I(R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty}(I^i/I^{i+1}) = (R/I) \oplus (I/I^2) \oplus \ldots$$

olarak tanımlanır.

2.2.5 Tanım. R bir lokal halka ve $\mathcal{M}$, R'nin bir maksimal ideali olsun.

$$gr_{\mathcal{M}}(R) = R/\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \oplus \ldots$$

ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasına R halkasının teğet konisi denir.

C, bir tekterimli eğri ve $\mathcal{M} = (t^{n_1}, \ldots, t^{n_d})$ iken,

$$gr_{\mathcal{M}}(k[[t^{n_1}, ..., t^{n_d}]]) \cong k[x_1, \ldots, x_d]/I(C)_*$$

olduğu bilinmektedir [27]. Bu sebeple, bir tekterimli eğrinin orijindeki teğet konisini $gr_{\mathcal{M}}(k[[t^{n_1}, \ldots, t^{n_d}]])$ halkasını veya $k[x_1, \ldots, x_d]/I(C)_*$ halkasını kullanarak çalışabiliriz.

2.2.6 Örnek. $I =< f_1 = x^4 - yz, f_2 = y^3 - xz, f_3 = z^2 - x^3y^2 >$ ve $R = k[[x, y, z]]/I$ koordinat halkasını alalım. Bu durumda, R halkasının teğet konisi,

$$I_* =< yz, xz, z^2 >$$

olmak üzere

$$gr_{\mathcal{M}}(R) = k[x, y, z]/I_*.$$

R bir lokal halka ve $\mathcal{M}$ maksimal ideali olsun. $(R, \mathcal{M})$ lokal halkasının Hilbert fonksiyonu, $(R, \mathcal{M})$'nin $\mathcal{M}$'deki tekilliği için iyi bir ölçüdür ve davranışının belirlenmesi hala güncel ve önemli bir problemdir.

2.2.7 Tanım. R bir lokal halka ve $\mathcal{M}$, R'nin bir maksimal ideali olsun.

$$gr_{\mathcal{M}}(R) = R/\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \oplus \ldots$$

ilişkilendirilimiş derecelendirilmiş halkasının n. bileşeninin $R/\mathcal{M}$ cismi üzerindeki boyutuna $(R, \mathcal{M})$'nin Hilbert fonksiyonu denir. Böylece, her $n \geq 0$ için

$$H_R(n) = boy_{R/\mathcal{M}} \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}.$$

2.3 Serbest Çözülümler

Serbest çözülümler, lineer denklem sistemlerinin bir halka üzerinde çalışılması sırasında karşımıza çıkar. Cebirsel geometri, hesapsal cebir, invaryant teori, matematiksel fizik, sayılar teorisi ve diğer alanlarda pek çok uygulaması vardır. Bir tekterimli eğrinin minimal serbest çözülümü, idealin yapısına cebirsel ve geometrik bakış açısı veren bazı invaryantları bulmayı sağlar. Serbest çözülümler kullanılarak Hilbert fonksiyon ve Hilbert serileri yazılabilir. Ayrıca boyut, Betti sayıları, eşboyut gibi invaryantlar da elde edilir.

2.3.1 Tanım. R değişmeli Noether halka ve M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. $\forall i \geq 0$ için F_i sonlu üretilmiş serbest R-modüller olmak üzere,

$$\mathcal{F} : \ldots \to F_{t+1} \xrightarrow{\varphi_{t+1}} F_t \xrightarrow{\varphi_t} \ldots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

tam dizisine M'nin bir serbest çözülümü denir. Eğer her $t > n$ için, $F_t = 0$ ve n bu özellikteki en küçük pozitif tamsayı ise, serbest çözülüm sonludur ve n-uzunluktadır denir.

Serbest çözülümün oluşturulmasının her aşamasında minimal üreteç kümesi seçildiğinde, M modülünün, minimal serbest çözülümü elde edilir.

$\mathcal{F}$'deki her serbest modülün bir rankı vardır ve bu rank sadece serbest modülün yapısını belirlemez aynı zamanda M modülünün yapısını anlamak için de önemli bilgiler verir.

2.3.2 Tanım. (R, M) lokal Noether halkası ve $\mathcal{F}$, M modülünün minimal serbest çözülümü olsun. $i \geq 0$ için rank$F_i = b_i$ sayısına M'nin i. Betti sayısı denir.

Polinom halkaları için Hilbert'in önemli bir sonucu olan Hilbert Syzygy Teoremi'ni verelim.

2.3.3 Teorem. $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_d]$ bir polinom halkası olsun. Her sonlu üretilmiş R-modülünün, en fazla d-uzunlukta bir minimal serbest çözülümü vardır.

İspat: Bakınız [6].

Bir minimal serbest çözülümün tamlığını kontrol etmek için kullanacağımız Buchsbaum-Eisenbud kriterini verelim.

2.3.4 Teorem. R bir Noether halkası ve,

$$\mathcal{F} : 0 \to F_{t-1} \xrightarrow{\varphi_{t-1}} \ldots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

sonlu üretilmiş serbest R-modüllerinin bir kompleksi olsun. rank(φ_i) φ_i'yi tanımlayan matrisin sıfırdan farklı en büyük minörünün uzunluğu ve $I(\varphi_i)$ maksimal ranklı minörlerin ürettiği ideal olmak üzere, $\mathcal{F}$ dizisinin tam olması için gerekli ve yeterli koşul

• rank(φ_{i+1}) + rank(φ_i) = rank(F_i)

• $I(\varphi_i)$, $1 \leq i \leq t-1$ için i uzunluklu bir R-dizisi içerir.

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat: Bakınız [7].

2.4 Cohen-Macaulay Halkalar

Cohen-Macaulay halkaların tanımı, cebirsel geometri, invaryant teori ve kombinatorik için zengin örnekler içerir. Cohen-Macaulay halkalar, regüler halkalar ve diğer tekil noktalar arasında bir köprü görevi görür. Yine bu halkalar kullanılarak tekil noktalar hakkında pek çok bilgi elde edilebilir. Burada gerekli olan temel tanım ve kavramlar için [2] kaynak olarak verilebilir.

2.4.1 Tanım. R bir halka ve $\{a_1, \ldots, a_n\}$, R'nin elemanlarının bir kümesi olsun.

• $R \neq (a_1, \ldots, a_n)R$

• $j = 1$ için $(a_1, \ldots, a_n)$ sıfır ideali ve $j = 1, ..., n$ için, a_j. eleman $R/(a_1, ..., a_{j-1})R$ halkasında sıfır bölensiz

şartlarını sağlayan $\{a_1, \ldots, a_n\}$ kümesine R-dizisi (veya R üzerinde bir regüler dizi) denir.

2.4.2 Örnek. $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_d]$, $I = (0)$ ve $M = R/I$ olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dizisini alalım. $1 \notin (x_1, \ldots, x_r)M$ olduğundan $(x_1, \ldots, x_r)M \neq M$ dir. $y \in M$ olsun. $x_1.y \in I$ iken $y = 0 \in I$ olduğundan x_1, R/I-regülerdir. $x_2.y \in (x_1)$ iken $y \in (x_1)$ olduğundan x_2, M/x_1M-regülerdir. Benzer şekilde devam edilirse, $x_d.y \in (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})$ iken $y \in (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})$ olduğundan x_n, $M/(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})M$-regülerdir. Böylece $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ dizisi M üzerinde regülerdir.

2.4.3 Tanım. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. I idealinin derinliği I'daki herhangi bir maksimal R-dizisinin uzunluğudur.

2.4.4 Tanım. R değişmeli halka ve $\mathcal{P}$, R'nin bir asal ideali olsun. $\mathcal{P}$ idealinin yüksekliği, $i = 1, \ldots, l$ için $\mathcal{P}_i$ asal ideallerin l uzunluğundaki

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \supset \mathcal{P}_1 \supset \ldots \mathcal{P}_l$$

azalan zincirinin supremumudur.

Genel olarak,

$$\text{derinlik}(I) \leq \text{yükseklik}(I) \leq \mu(I)$$

eşitsizliği vardır [8]. Burada, $\mu(I)$, I idealinin minimal üreteç sayısıdır.

Şimdi, Cohen-Macaulay halkasının tanımını verelim.

2.4.5 Tanım. R Noether halkasının her I ideali için derinlik(I) $=$ yükseklik(I) ise, R halkasına Cohen-Macaulay halka denir.

2.4.6 Önerme. R bir Noether halkası olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- R bir Cohen-Macaulay halkadır.
- R halkasının her maksimal $\mathcal{M}$ ideali için derinlik$(\mathcal{M})$ = yükseklik$(\mathcal{M})$ dir.
- R halkasının her $\mathcal{P}$ asal ideali için derinlik$(\mathcal{P})$ = yükseklik$(\mathcal{P})$ dir.
- R halkasının her I ideali için derinlik(I) = yükseklik(I) dir.

İspat: Bakınız [8].

Bu önermeden R bir lokal halka olduğunda R'nin $\mathcal{M}$ maksimal ideali için

$$\text{derinlik}(\mathcal{M}) = \text{yükseklik}(\mathcal{M})$$

eşitliğini göstermek, halkanın Cohen-Macaulay olduğunu göstermek için yeterli olacaktır.

2.4.7 Tanım. Minimal serbest çözülümdeki son Betti sayısı 1 olan Cohen-Macaulay halkaya Gorenstein halka denir.

Değişmeli cebirdeki pek çok problemin çözümünde araç olarak kullanılan simetrik sayısal yarı gruplar ile halka teori arasındaki ilişkiyi verelim.

2.4.8 Teorem. $S =< n_1, n_2, \ldots, n_d >$ yarı grubu simetriktir ancak ve ancak $k[[t^{n_1}, ..., t^{n_d}]]$ halkası bir Gorenstein halkadır.

İspat: Bakınız [5].

$k[[t^{n_1}, \ldots, t^{n_d}]]$ halkası Gorenstein ya da denk olarak $S =< n_1, n_2, \ldots, n_d >$ yarı grubu simetrik ise tekterimli afin eğriye Gorenstein tekterimli eğri denir.

Şimdi, bir tekterimli eğrinin teğet konisinin Cohen-Macaulay olup olmadığını, $I(C)_*$ idealini göz önüne alarak test etmek için kullanışlı bir kriter verelim.

2.4.9 Teorem. C, $\mathbb{A}_k^d$ afin uzayında bir tekterimli eğri ve $g_1, g_2, \ldots, g_s$, $I(C)_*$ için x_1 değişkenini en küçük değişken yapan ters alfabetik sıralamaya göre bir minimal Gröbner baz olsun. $gr_{\mathcal{M}}(k[[t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_d}]])$ halkasının Cohen-Macaulay olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq i \leq s$ ve $in(g_i)$'ler g_i polinomlarının en yüksek dereceli terimi olmak üzere $x_1 \nmid in(g_i)$ olmasıdır.

İspat: Bakınız [9].

3. TEĞET KONİNİN MİNİMAL SERBEST ÇÖZÜLÜMÜ

Herhangi bir tekterimli eğri için minimal serbest çözülümü tam olarak yazmak hala açık bir problemdir. Koszul komplekslerinin genelleştirilmesiyle, minimal olmayan serbets çözülümler Taylor tarafından yapılmıştır. Daha sonra tekterimli ideallerin serbest çözülümü ile ilgili çalışmalar Bayer [11], Eliahou ve Kevaire [12], Lyubeznik [13] tarafından yapılmıştır. Bresinsky [14], ilk olarak P_k^3 uzayındaki tekterimli eğriler için minimal serbest çözülümleri çalışmıştır. Peeva ve Sturmfels [15] eşboyut 2 için latis ideallerini çalışıp Bresinsky'nin sonucunu genelleştirmişlerdir. Gimenez, Sengupta ve Srinivasan [16] tekterimli eğrilerin 2 determinantsal idealin toplamı şeklinde yazılabildiğini göstermişlerdir. Bazı durumlarda koordinat halkaları için minimal serbest çözülümünü elde etmişlerdir. Oneto ve Tamone [17], aritmetik diziler ile üretilen sayısal yarıgruplar ile ilişkili tekterimli eğrilerin koordinat halkası için minimal serbest çözülüm oluşturmuşlardır. Patil, Molinelli ve Tamone [18], aynı eğri ailelerinin $gr_{\mathcal{M}}A$ halkasının Cohen-Macaulay olmasını ve Hilbert fonksiyonlarını çalışmışlardır. Barucci, Fröberg ve Şahin [19], gömme boyutu 3 olan simetrik ya da sözde simetrik yarı grup halkaları için derecelendirilmiş minimal serbest çözülümü tam olarak vermişlerdir. Sengupta [20], A^4 afin uzayında kesin tekterimli eğrilerin koordinat halkası için minimal serbest çözülümü açık bir şekilde vermiştir.

Bu bölümde, 4-boyutlu afin uzayda, teğet konisinin minimal üreteç sayısı 5 olan Gorenstein tam kesişim olmayan tekterimli eğrinin teğet konisinin minimal serbest çözülümünü çalışacağız. Homojen tipten yarı grupların Cohen-Macaulay teğet konileri olmasından ve bu eğri ailelerinin teğet konilerinin Cohen-Macaulay olduğu bilinmesinden dolayı 5 üreteçli teğet konilerini göz önüne alıyoruz.

3.1 Bresinsky Teoremi

Bresinsky [14], 4-boyutlu afin uzaydaki tam kesişim olmayan Gorenstein tekterimli eğrilerin tanımlayan idealini aşağıdaki teoremle tam olarak vermiştir.

3.1.1 Teorem. C, $x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, x_3 = t^{n_3}, x_4 = t^{n_4}$ parametrizasyonuna sahip bir tekterimli eğri ve $S =< n_1, n_2, n_3, n_4 >$, $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ tarafından minimal olarak üretilen bir sayısal yarı grup olsun. $S =< n_1, n_2, n_3, n_4 >$ yarı grubu simetrik ve C tam kesişim olmayan bir tekterimli eğridir ancak ve ancak $I(C)$ ideali

$$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}, f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}},$$

$$f_5 = x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}\}$$

kümesi ile üretilir. Burada, f_i, $1 \leq i \leq 4$ polinomları,

$$\alpha_i n_i \in < n_1, \ldots, \widehat{n_i}, \ldots, n_4 >$$

öyleki α_i'ler $1 \leq i \leq 4$ için minimal olacak şekilde $0 < \alpha_{ij} < \alpha_j$ ile bir izomorfizmaya göre tek türlüdür. Burada, $\widehat{n_i}$, $n_i \notin < n_1, \ldots, n_4 >$ anlamına gelir.

Bu teoreme göre, 3 durumda yazılabilen 6 izomorfik permütasyon vardır:
•Durum 1: $f_1 = (1, (3, 4))$
(a) $f_2 = (2, (1, 4)), f_3 = (3, (1, 2)), f_4 = (4, (2, 3)), f_5 = ((1, 3), (2, 4))$
(b) $f_2 = (2, (1, 3)), f_3 = (3, (2, 4)), f_4 = (4, (1, 2)), f_5 = ((1, 4), (2, 3))$

•Durum 2: $f_1 = (1, (2, 3))$
(a) $f_2 = (2, (3, 4)), f_3 = (3, (1, 4)), f_4 = (4, (1, 2)), f_5 = ((2, 4), (1, 3))$
(b) $f_2 = (2, (1, 4)), f_3 = (3, (2, 4)), f_4 = (4, (1, 3)), f_5 = ((1, 3), (4, 2))$

•Durum 3: $f_1 = (1, (2, 4))$
(a) $f_2 = (2, (1, 3)), f_3 = (3, (1, 4)), f_4 = (4, (2, 3)), f_5 = ((1, 2), (3, 4))$
(b) $f_2 = (2, (3, 4)), f_3 = (3, (1, 2)), f_4 = (4, (1, 3)), f_5 = ((2, 3), (1, 4))$

Burada, $f_i = (i, (j, k))$ ve $f_5 = ((i, j), (k, l))$ olup,

$$f_i = x_i^{\alpha_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq 4 \quad \text{ve} \quad f_5 = x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{lj}} - x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{il}}$$

üreteçlerini gösterir.

Arslan ve Mete [23],
1(a) durumunda $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{24}$
1(b) durumunda $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{23}, \alpha_3 \leq \alpha_{32} + \alpha_{34}$
2(b) durumunda $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{24}, \alpha_3 \leq \alpha_{32} + \alpha_{34}$
3(a) durumunda $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{23}, \alpha_3 \leq \alpha_{32} + \alpha_{34}$

kısıtlamaları altında, negatif dereceli ters alfabetik tekterimli sıralamasına göre $I(C)$ idealinin minimal üreteç kümesinin $I(C)$ idealinin standart bazı olduğunu göstermişlerdir.

3.2 Minimal Serbest Çözülümler

Bu bölümde, 4-boyutlu afin uzayda tam kesişim olmayan Gorenstein tekterimli eğrilerin, 5 üreteçli ve Cohen-Macaulay olan teğet konisinin minimal serbest çözülümünü vereceğiz.

- 1(a) Durumu: $I(C)$ idealinin üreteçleri,

$f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}, f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}},$
$f_5 = x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}$

dir. Burada, $\alpha_1 = \alpha_{21} + \alpha_{31},\ \alpha_2 = \alpha_{32} + \alpha_{42},\ \alpha_3 = \alpha_{13} + \alpha_{43},\ \alpha_4 = \alpha_{14} + \alpha_{24}.$

$n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ şartından dolayı,

$$\alpha_1 > \alpha_{13} + \alpha_{14},\ \alpha_4 < \alpha_{42} + \alpha_{43} \text{ ve } \alpha_3 < \alpha_{31} + \alpha_{32}$$

olur. Bu $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{24}$ kısıtlaması altında ve [2]'deki Yardımcı Teorem 5.5.11. kullanılarak teğet koninin $I(C)_*$ idealinin üreteçleri

- 1(a1) durumu: $I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}} >$
- 1(a2) durumu: $I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}} >$

olarak elde edilir.

3.2.1 Teorem. 1(a1) ve 1(a2) durumlarında, C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

olur. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{43}} & 0 & x_4^{\alpha_{24}} & x_2^{\alpha_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & x_3^{\alpha_3} & 0 & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{14}} \\ -x_4^{\alpha_{14}} & -x_2^{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & x_2^{\alpha_{32}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & -x_4^{\alpha_{24}} & -x_2^{\alpha_{42}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} & 0 \\ -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ 0 & x_2^{\alpha_{32}} \\ -x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}} & -x_4^{\alpha_{24}} \\ 0 & x_3^{\alpha_{13}} \\ x_3^{\alpha_3} & 0 \end{pmatrix}$$

ya da

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_4^{\alpha_{42}} & x_2^{\alpha_{32}} & x_3^{\alpha_{43}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{14}} & 0 & x_3^{\alpha_3} \\ 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 & 0 & -x_2^{\alpha_2} + x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\ -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & 0 & x_1^{\alpha_{21}} & x_2^{\alpha_{32}} & 0 \\ 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & -x_2^{\alpha_{42}} & -x_4^{\alpha_{24}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{32}} & x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} \\ -x_4^{\alpha_{24}} & -x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}} \\ 0 & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\ 0 & x_3^{\alpha_3} \\ x_3^{\alpha_{13}} & 0 \\ 0 & -x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

İspat: 1(a1) Durumu:

• $I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 1. ve 3. sütunları ve 2. satırı silerek elde edilen matrisin determinantı $-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}$ olur. Benzer şekilde, 1. satır ve 5. ve 6. sütunları silerek elde edilen matrisin determinantı $x_3^{\alpha_3+\alpha_{13}}$ olur. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir. Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}, x_3^{\alpha_3+\alpha_{13}}$ ve $x_4^{\alpha_4}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

1(a2) Durumu:

• $I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} >$ olsun.

Benzer şekilde, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir ve $rank(\phi_1) = 1$ dir. ϕ_2 matrisinde,1. satır ve 5. ve 6. sütunları silerek elde edilen matrisin determinantı $-x_3^{2\alpha_{13}} x_4^{2\alpha_{14}}$ olur. Benzer şekilde, 1. ve 3. sütunlar ve 2. satırı silerek elde edilen matrisin determinantı $-(f_2)^2 x_2^{2\alpha_{32}}$ olur. Bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.
Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_2} f_2,\ x_3^{\alpha_3+\alpha_{13}}$ ve $x_4^{\alpha_4}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.
Burada, $I(C)_*$ teğet konisinin Betti dizisi (1,5,6,2) dir. □

- 1(b) Durumu: $I(C)$ idealinin üreteçleri

$f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}},\ f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}},\ f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}},\ f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_1^{\alpha_{41}} x_2^{\alpha_{42}},$
$f_5 = x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{34}}$
dür. Burada, $\alpha_1 = \alpha_{21} + \alpha_{41},\ \alpha_2 = \alpha_{32} + \alpha_{42},\ \alpha_3 = \alpha_{13} + \alpha_{24},\ \alpha_4 = \alpha_{14} + \alpha_{34}$
dür. $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ şartı gereğince;

$$\alpha_1 > \alpha_{13} + \alpha_{14},\quad \alpha_4 < \alpha_{41} + \alpha_{42}$$

olur. $\alpha_2 \le \alpha_{32} + \alpha_{42}$, $\alpha_3 \ge \alpha_{13} + \alpha_{24}$ kısıtlamaları altında ve [2]'deki Yardımcı Teorem 5.5.11. kullanılarak teğet koninin $I(C)_*$ idealinin üreteçleri,

- $1(b1)\ durumu : I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$
- $1(b2)\ durumu : I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$
- $1(b3)\ durumu : I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$
- $1(b4) durumu\ :\ I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{34}} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$

olarak elde edilir.

3.2.2 Teorem. 1(b1) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -x_4^{\alpha_{34}} & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} & 0 & x_2^{\alpha_{42}} & 0 \\ 0 & -x_4^{\alpha_4} & 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} \\ 0 & 0 & x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_{42}} & 0 & 0 \\ x_3^{\alpha_{13}} & x_2^{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} & -x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_{32}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} & 0 \\ -x_3^{\alpha_{13}} & 0 \\ 0 & x_2^{\alpha_{42}} \\ 0 & -x_4^{\alpha_{14}} \\ x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}} & x_3^{\alpha_{23}} \\ x_4^{\alpha_4} & 0 \end{pmatrix}.$$

1(b2) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{23}} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{13}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -x_4^{\alpha_{34}} & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} & 0 & 0 & x_2^{\alpha_{42}} \\ 0 & -x_4^{\alpha_4} & 0 & 0 & x_3^{\alpha_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_{42}} & x_1^{\alpha_{21}} & -x_4^{\alpha_{14}} \\ x_3^{\alpha_{13}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} & -x_2^{\alpha_{32}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{23}} & 0 \\ -x_3^{\alpha_{13}} & 0 \\ x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{34}} & x_2^{\alpha_{42}} \\ 0 & -x_4^{\alpha_{14}} \\ -x_4^{\alpha_4} & 0 \\ x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}} & x_3^{\alpha_{23}} \end{pmatrix}.$$

1(b3) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\phi_3} R^5 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to G \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}} & x_4^{\alpha_4} & x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{13}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -x_3^{\alpha_{23}} & 0 & x_4^{\alpha_{34}} & x_2^{\alpha_{42}} & 0 \\ 0 & x_4^{\alpha_{34}} & 0 & 0 & x_3^{\alpha_{13}} \\ x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_{42}} & 0 & 0 & 0 \\ x_2^{\alpha_{32}} & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & -x_3^{\alpha_{23}} & 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & -x_2^{\alpha_{32}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} \\ -x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} \\ x_2^{\alpha_2} \\ x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} \\ x_4^{\alpha_4} \end{pmatrix}.$$

1(b1) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\phi_3} R^5 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to G \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} & x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} & x_4^{\alpha_4} & x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{34}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -x_4^{\alpha_{34}} & x_3^{\alpha_{23}} & -x_2^{\alpha_{42}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{34}} & -x_3^{\alpha_{13}} \\ 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 & x_2^{\alpha_{42}} & -x_1^{\alpha_{21}} \\ x_3^{\alpha_{13}} & -x_2^{\alpha_{32}} & x_1^{\alpha_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4^{\alpha_{14}} & -x_3^{\alpha_{23}} & x_2^{\alpha_{32}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} \\ x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{34}} \\ x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} \\ x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} \\ x_4^{\alpha_4} \end{pmatrix}.$$

İspat: • 1(b1) Durumu:

$I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 2. ve 5. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_3^{2\alpha_3}$ dür. Benzer şekilde, 1. ve 3. sütunları ve 2. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_2^{2\alpha_2+\alpha_{42}}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}, -x_3^{\alpha_3}$ ve $x_4^{\alpha_4+\alpha_{14}}$

determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

- 1(b2) Durumu:

$I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 2. ve 6. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_3^{2\alpha_3}$ dür. Benzer şekilde, 4. ve 6. sütunları ve 4. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_{42}} f_2, -x_3^{\alpha_3}$ ve $x_4^{\alpha_4+\alpha_{14}}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Burada, 1(b1) ve 1(b2) durumlarının $I(C)_*$ teğet konilerinin Betti dizisi (1,5,6,2) dir.

- 1(b3) Durumu:

$I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{13}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 1 = 5$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = rank(\phi_3) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 2.satır ve 3. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_2^{2\alpha_2}$ dür. Benzer şekilde, 4. satır ve 5. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

• 1(b4) Durumu:

$I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{34}} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{13}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 1 = 5$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = rank(\phi_3) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 2.satır ve 1. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı f_2^2 dir. Benzer şekilde, 4. satır ve 5. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Burada, 1(b3) ve 1(b4) durumlarının $I(C)_*$ teğet konilerinin Betti dizisi (1,5,5,1) dir. Ayrıca minimal serbest çözülüm simetriktir. $\square$

• 2(b) Durumu: $I(C)$ idealinin üreteçleri,

$f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}},\ f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}},\ f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}},\ f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_1^{\alpha_{41}}x_3^{\alpha_{43}},$

$f_5 = x_1^{\alpha_{41}}x_2^{\alpha_{32}} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}}$

dür. Burada,

$\alpha_1 = \alpha_{21} + \alpha_{41},\ \alpha_2 = \alpha_{12} + \alpha_{32},\ \alpha_3 = \alpha_{13} + \alpha_{43},\ \alpha_4 = \alpha_{24} + \alpha_{34}$

dür. $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ şartından dolayı,

$$\alpha_1 > \alpha_{12} + \alpha_{13},\ \alpha_4 < \alpha_{41} + \alpha_{43}$$

olur. $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{24}$, $\alpha_3 \geq \alpha_{32} + \alpha_{34}$ kısıtlamaları altında ve [2]'deki Yardımcı Teorem 5.5.11. kullanılarak teğet koninin $I(C)_*$ idealinin üreteçleri

• $2(b1)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}} >$

• $2(b2)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}} >$

• $2(b3)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}} >$

• $2(b4)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}} >$

olarak elde edilir.

3.2.3 Teorem. 2(b1) durumunda, C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_4^{\alpha_{24}} & x_3^{\alpha_{43}} & x_2^{\alpha_{32}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_4} \\ 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{24}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & x_2^{\alpha_2} \\ -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{34}} & x_3^{\alpha_{43}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{43}} & x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} \\ -x_4^{\alpha_{24}} & 0 \\ 0 & -x_4^{\alpha_4} \\ 0 & x_2^{\alpha_2} \\ x_2^{\alpha_{12}} & 0 \\ 0 & x_3^{\alpha_{13}} \end{pmatrix}$$

dır.

2(b2) durumunda, C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dır. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_4^{\alpha_{24}} & x_3^{\alpha_{43}} & x_2^{\alpha_{32}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_4} \\ 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{24}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\ -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & -x_1^{\alpha_{21}} & x_4^{\alpha_{34}} & x_3^{\alpha_{43}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{43}} & x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} \\ -x_4^{\alpha_{24}} & 0 \\ 0 & -x_4^{\alpha_4} \\ 0 & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\ x_2^{\alpha_{12}} & 0 \\ 0 & x_3^{\alpha_{13}} \end{pmatrix}, .$$

2(b3) durumunda, C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\phi_3} R^5 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -x_4^{\alpha_{24}} & 0 & 0 & -x_2^{\alpha_{32}} & -x_3^{\alpha_{43}} \\ 0 & 0 & 0 & x_3^{\alpha_{13}} & x_4^{\alpha_{34}} \\ 0 & -x_4^{\alpha_{24}} & 0 & 0 & x_2^{\alpha_{12}} \\ 0 & -x_2^{\alpha_{32}} & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & 0 \\ x_2^{\alpha_{12}} & x_3^{\alpha_{43}} & x_4^{\alpha_{34}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} \\ -x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} \\ x_2^{\alpha_2} \\ x_4^{\alpha_4} \\ -x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \end{pmatrix}.$$

2(b4) durumunda, C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\phi_3} R^5 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} & x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_4^{\alpha_{24}} & x_2^{\alpha_{32}} & x_3^{\alpha_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & -x_4^{\alpha_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & -x_4^{\alpha_{24}} \\ 0 & 0 & -x_1^{\alpha_{21}} & -x_3^{\alpha_{13}} & -x_2^{\alpha_{32}} \\ -x_2^{\alpha_{12}} & -x_1^{\alpha_{21}} & 0 & x_4^{\alpha_{34}} & x_3^{\alpha_{43}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}} \\ x_4^{\alpha_4} \\ -x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \\ -x_2^{\alpha_2} + x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\ x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}} \end{pmatrix}.$$

olarak elde edilir.

İspat: • 2(b1) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 1. ve 6. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_3^{2\alpha_3}$ dür. Benzer şekilde, 4. ve 5. sütunları ve 2. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_2^{2\alpha_2+\alpha_{12}}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $-x_2^{\alpha_2+\alpha_{12}}$, $x_3^{\alpha_3}$ ve $x_4^{\alpha_4+\alpha_{24}}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

- 2(b2) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 1. ve 6. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_3^{2\alpha_3}$ dür. Benzer şekilde, 2. ve 3. sütunları ve 4. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_4^{\alpha_4+\alpha_{24}}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $-x_2^{\alpha_{12}}f_2$, $x_3^{\alpha_3}$ ve $x_4^{\alpha_4+\alpha_{24}}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Burada, 2(b1) ve 2(b2) durumlarının $I(C)_*$ teğet konilerinin Betti dizisi (1,5,6,2) dir.

- 2(b3) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 1 = 5$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = rank(\phi_3) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 2.satır ve 3. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_2^{\alpha_2}$ dir. Benzer şekilde, 4. satır ve 4. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2 uzunluklu bir regüler dizi içerir.

- 2(b4) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 1 = 5$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = rank(\phi_3) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 1.satır ve 5. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_2^{2\alpha_{12}} x_3^{2\alpha_{13}}$ dür. Benzer şekilde, 4. satır ve 2. sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_4^{2\alpha_4}$ dür. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Burada, 2(b3) ve 2(b4) durumlarının $I(C)_*$ teğet konilerinin Betti dizisi (1,5,5,1) dir. Ayrıca minimal serbest çözülüm simetriktir. $\square$

- 3(a) Durumu: $I(C)$ idealinin üreteçleri,

$f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}},\ f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}},\ f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}},\ f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}},$

$f_5 = x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{42}} - x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}}$

dir. Burada, $\alpha_1 = \alpha_{21} + \alpha_{31},\ \alpha_2 = \alpha_{12} + \alpha_{42},\ \alpha_3 = \alpha_{23} + \alpha_{43},\ \alpha_4 = \alpha_{14} + \alpha_{34}$

dır. $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ şartından dolayı,

$$\alpha_1 > \alpha_{12} + \alpha_{14} \ ve\ \alpha_4 < \alpha_{42} + \alpha_{43}$$

elde edilir. $\alpha_2 \leq \alpha_{21} + \alpha_{23},\ \alpha_3 \leq \alpha_{31} + \alpha_{34}$ kısıtlamaları ve [2]'deki Yardımcı Teorem 5.5.11.

kullanılarak teğet koninin $I(C)_*$ idealinin üreteçleri

- $3(a1)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} >$
- $3(a2)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_3^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} >$
- $3(a3)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} >$
- $3(a4)\ Durumu : I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} >$

dür.

3.2.4 Teorem. 3(a1) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \rightarrow R/I(C)_* \rightarrow 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3^{\alpha_{23}} & x_4^{\alpha_{34}} & x_2^{\alpha_{42}} & 0 \\ 0 & -x_3^{\alpha_3} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} \\ -x_3^{\alpha_{43}} & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{34}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} & 0 \\ -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ -x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}} & x_4^{\alpha_{34}} \\ 0 & -x_3^{\alpha_{23}} \\ x_3^{\alpha_3} & 0 \\ 0 & x_2^{\alpha_{12}} \end{pmatrix}.$$

3(a2) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \rightarrow R/I(C)_* \rightarrow 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} & x_3^{\alpha_3} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3^{\alpha_{23}} & x_4^{\alpha_{34}} & x_2^{\alpha_{42}} & 0 \\ 0 & -x_3^{\alpha_3} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} \\ -x_3^{\alpha_{43}} & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & -x_1^{\alpha_{21}} & x_4^{\alpha_{34}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} & 0 \\ -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ -x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}} & x_4^{\alpha_{34}} \\ 0 & -x_3^{\alpha_{23}} \\ x_3^{\alpha_3} & 0 \\ 0 & x_2^{\alpha_{12}} \end{pmatrix}.$$

3(a3) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3^{\alpha_{23}} & x_4^{\alpha_{34}} & x_2^{\alpha_{42}} & 0 \\ 0 & -x_3^{\alpha_3} + x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}} & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^{\alpha_{31}} & 0 & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & -x_3^{\alpha_{23}} \\ -x_3^{\alpha_{43}} & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{34}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} & 0 \\ -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ -x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}} & x_4^{\alpha_{34}} \\ x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{42}} & -x_3^{\alpha_{23}} \\ x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}} & 0 \\ 0 & x_2^{\alpha_{12}} \end{pmatrix}.$$

3(a4) durumunda C eğrisinin teğet konisinin minimal serbest çözülümü,

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\phi_3} R^6 \xrightarrow{\phi_2} R^5 \xrightarrow{\phi_1} R^1 \to R/I(C)_* \to 0$$

dizisidir. Burada,

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}} & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} & x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}} & x_4^{\alpha_4} & x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{23}} & x_2^{\alpha_{42}} & x_4^{\alpha_{34}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 & 0 & 0 & x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & -x_4^{\alpha_{14}} & 0 & -x_2^{\alpha_2} + x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}} \\ 0 & 0 & -x_2^{\alpha_{12}} & -x_1^{\alpha_{31}} & -x_3^{\alpha_{23}} & 0 \\ -x_2^{\alpha_{12}} & -x_1^{\alpha_{21}} & 0 & x_3^{\alpha_{43}} & x_4^{\alpha_{34}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_4^{\alpha_{34}} & x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}} \\ 0 & -x_3^{\alpha_3} + x_1^{\alpha_{31}}x_4^{\alpha_{34}} \\ -x_3^{\alpha_{23}} & -x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{42}} \\ 0 & x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{23}} \\ x_2^{\alpha_{12}} & x_1^{\alpha_1} \\ 0 & -x_4^{\alpha_{14}} \end{pmatrix}.$$

olarak elde edilir.

İspat: • 3(a1) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}}x_4^{\alpha_{14}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 4. ve 5. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_3^{2\alpha_3+\alpha_{23}}$ dür. Benzer şekilde, 2. ve 3. sütunları ve 4. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_2+\alpha_{12}}$, $x_3^{\alpha_3+\alpha_{23}}$ ve $x_4^{\alpha_4}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

• 3(a2) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}}x_3^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}}x_4^{\alpha_{14}} >$ olsun.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.

$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$

$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$

olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 4. ve 5. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_3^{2\alpha_3+\alpha_{23}}$ dür. Benzer şekilde, 2. ve 3. sütunları ve

4. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.
Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_{12}} f_2$, $x_3^{\alpha_3+\alpha_{23}}$ ve $-x_4^{\alpha_4}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

- 3(a3) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} >$ olsun.
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.
$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$
$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$
olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 1. ve 6. sütunları ve 2. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_2^{2\alpha_2+\alpha_{12}}$ dür. Benzer şekilde, 2. ve 3. sütunları ve 4. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_4^{2\alpha_4}$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin 4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir.
Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $x_2^{\alpha_2+\alpha_{12}}$, $x_3^{\alpha_{23}} f_3$ ve $-x_4^{\alpha_4}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.

- 3(a4) Durumu:

$I(C)_* =< x_2^{\alpha_{12}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{23}}, x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{34}}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{14}} >$ olsun.
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 matrisleri için $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_3 = 0$ olduğundan yukarıdaki dizi bir kompleksdir. Bu dizinin tam olduğunu göstermek için Buchsbaum-Eisenbud kriterini [7] kullanacağız. İlk önce matrislerin rank koşulunu sağladığını gösterelim.
$rank(\phi_1) + rank(\phi_2) = 1 + 4 = 5$
$rank(\phi_2) + rank(\phi_3) = 4 + 2 = 6$
olmalıdır. $rank(\phi_1) = 1$ olduğu açıktır. ϕ_2 matrisinin her 5×5'lik minörü 0 olduğundan McCoy Teoremi [21] gereğince $rank(\phi_2) \leq 4$ olur. ϕ_2 matrisinde 5. ve 6. sütunları ve 1. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $x_2^{2\alpha_{12}} x_4^{2\alpha_{14}}$ dür. Benzer şekilde, 2. ve 3. sütunları ve 3. satır silinerek elde edilen matrisin determinantı $-x_3^{\alpha_{23}} f_3^2$ dir. Böylece ϕ_2 matrisinin

4×4'lük minörleri sıfırdan farklı olduğundan $rank(\phi_2) = 4$ dür. Ayrıca, bu iki determinant aralarında asal olduğundan $I(\phi_2)$ ideali 2-uzunluklu bir regüler dizi içerir. Benzer şekilde, ϕ_3 matrisinin 2×2'lik minörleri arasında $-x_2^{\alpha_{12}} f_2$, $-x_3^{\alpha_{23}} f_3$ ve $-x_4^{\alpha_4}$ determinantları aralarında asaldır. Böylece $I(\phi_3)$, 3-uzunluklu bir regüler dizi içerir.
Burada, $I(C)_*$ teğet konilerinin Betti dizisi (1,5,6,2) dir. □

3.3 Teğet Koninin Hilbert Fonksiyonu

Bir Cohen-Macaulay lokal halkanın Hilbert fonksiyonunun davranışı hakkında genel olarak çok az şey bilinmektedir. M. E. Rossi [22]'ye ait olan bir problem "Bir boyutlu bir Gorenstein lokal halkanın Hilbert fonksiyonu azalmayandır." şeklindedir ve bu, $3 < d < 10$ olmak üzere d-boyutlu afin uzaydaki bir tekterimli ile ilişkilendirilmiş Gorenstein lokal halkalar için hala açık bir problemdir. Arslan ve Mete [23], 4-boyutlu afin uzayda önceki bölümdeki tüm durumlar için tam kesişim olmayan tekterimli C eğrisi ile ilişkilendirilmiş lokal Gorenstein halkaların Hilbert fonksiyonunun azalmayan olduğunu göstermiştirler.

Bu bölümde, bu eğri ailelerinin teğet konilerinin Hilbert fonksiyonlarını hesaplıyoruz. Bu hesaplamalar için gerekli tanım ve teoremler için kaynak olarak [6] verilebilir.

3.3.1 Teorem. 3.2.1 Teoremi gereğince $F_1 = \bigoplus_{i=1}^{5} R(-b_i)$, $F_2 = \bigoplus_{i=1}^{6} R(-c_i)$ ve $F_3 = \bigoplus_{i=1}^{2} R(-d_i)$ olmak üzere,

$$0 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} R \to R/I(C)_* \to 0$$

C eğrisinin teğet konisinin derecelendirilmiş serbest çözülümüdür. Burada, b_i'ler 1. dereceden Betti sayıları, c_i'ler 2. dereceden Betti sayıları, d_i'ler 3. dereceden Betti sayılarıdır.

3.3.2 Sonuç. 3.2.1 teoremi hipotezleri altında, C eğrisinin teğet konisinin derecelendirilmiş serbest çözülümünün Betti sayıları,

$$b_1 = \alpha_{13} + \alpha_{14}, b_2 = \alpha_2, b_3 = \alpha_3, b_4 = \alpha_4, b_5 = \alpha_{32} + \alpha_{14}$$

$$c_1 = \alpha_3 + \alpha_{14}, c_2 = \alpha_2 + \alpha_3, c_3 = \alpha_4 + \alpha_{13}, c_4 = \alpha_{32} + \alpha_{13} + \alpha_{14}, c_5 = \alpha_{32} + \alpha_4,$$
$$c_6 = \alpha_{14} + \alpha_2$$

$$d_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_{14}, d_2 = \alpha_4 + \alpha_{13} + \alpha_{32}$$

olmak üzere $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, $B_2 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ ve $B_3 = \{d_1, d_2\}$ olur.

1(a1) Durumu için Hilbert fonksiyonunu hesaplayalım. Bunun için

$$H_G(i) = H_R(i) - H_{F_1}(i) + H_{F_2}(i) - H_{F_3}(i)$$

eşitliğini kullanacağız. $I(C)_*$ ideali için derecelendirilmiş minimal serbest çözülümü oluşturalım.

$$I(C)_* =< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} >$$

idealindeki f_i polinomlarının dereceleri sırasıyla;

$$b_1 = \alpha_{13} + \alpha_{14}, b_2 = \alpha_2, b_3 = \alpha_3, b_4 = \alpha_4, b_5 = \alpha_{32} + \alpha_{14}$$

olur. Böylece,

$$\phi : R(-b_1) \oplus R(-b_2) \oplus R(-b_3) \oplus R(-b_4) \oplus R(-b_5) \to R/I(C)_*$$

homomorfizması elde edilir.

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_3^{\alpha_{43}} & 0 & x_4^{\alpha_{24}} & x_2^{\alpha_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & x_3^{\alpha_3} & 0 & 0 & 0 & x_4^{\alpha_{14}} \\ -x_4^{\alpha_{14}} & -x_2^{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & 0 & x_2^{\alpha_{32}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3^{\alpha_{13}} & -x_4^{\alpha_{24}} & -x_2^{\alpha_{42}} \end{pmatrix},$$

matrisini ele alalım ve

$$F_2 \to R(-b_1) \oplus R(-b_2) \oplus R(-b_3) \oplus R(-b_4) \oplus R(-b_5)$$

homomorfizmasında F_2 modülünü derecelendirilmiş olarak elde edelim. ϕ_2 matrisinde, 1. sütundan bir eleman alalım. a_{11} elemanı için,

$a_{11} = x_3^{\alpha_{43}}$

$c_1 - b_1 = \alpha_{43}$

dır. $b_1 = \alpha_{13} + \alpha_{14}$ olduğundan,

$c_1 - \alpha_{13} - \alpha_{14} = \alpha_{43}$

$c_1 = \alpha_{14} + \alpha_3$

elde edilir. c_2'yi bulmak için 2. sütundan bir eleman alalım.

a_{22} elemanı için,

$a_{22} = x_3^{\alpha_3}$

$c_2 - b_2 = \alpha_3$

dır. $b_2 = \alpha_2$ olduğundan,

$c_2 - \alpha_2 = \alpha_3$

$c_2 = \alpha_2 + \alpha_3$

elde edilir. c_3'ü bulmak için 3. sütundan bir eleman alalım. a_{13} elemanı için,

$a_{13} = x_4^{\alpha_{24}}$

$c_3 - b_1 = \alpha_{24}$

dır. $b_1 = \alpha_{13} + \alpha_{14}$ olduğundan,

$c_3 - \alpha_{13} - \alpha_{14} = \alpha_{24}$

$c_3 = \alpha_{13} + \alpha_4$

elde edilir. c_4'ü bulmak için 4. sütundan bir eleman alalım. a_{14} elemanı için,

$a_{14} = x_2^{\alpha_{32}}$

$c_4 - b_1 = \alpha_{32}$

dir. $b_1 = \alpha_{13} + \alpha_{14}$ olduğundan,

$c_4 - \alpha_{13} - \alpha_{14} = \alpha_{32}$

$c_4 = \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{32}$

elde edilir. c_5'i bulmak için 5. sütundan bir eleman alalım. a_{45} elemanı için,

$a_{45} = x_2^{\alpha_{32}}$

$c_5 - b_4 = \alpha_{32}$

dır. $b_4 = \alpha_4$ olduğundan,

$c_5 - \alpha_4 = \alpha_{32}$

$c_5 = \alpha_4 + \alpha_{32}$

elde edilir. c_6'yı bulmak için 6. sütundan bir eleman alalım. a_{26} elemanı için,

$a_{26} = x_4^{\alpha_{14}}$

$c_6 - b_2 = \alpha_{14}$

dır. $b_2 = \alpha_2$ olduğundan,

$c_6 - \alpha_2 = \alpha_{14}$

$c_6 = \alpha_2 + \alpha_{14}$

elde edilir. Böylece,

$$c_1 = \alpha_3 + \alpha_{14},\ c_2 = \alpha_2 + \alpha_3,\ c_3 = \alpha_4 + \alpha_{13},\ c_4 = \alpha_{32} + \alpha_{13} + \alpha_{14},\ c_5 = \alpha_{32} + \alpha_4,$$
$$c_6 = \alpha_{14} + \alpha_2$$

elde edilir. O halde,

$$F_2 = R(-c_1) \oplus R(-c_2) \oplus R(-c_3) \oplus R(-c_4) \oplus R(-c_5) \oplus R(-c_6)$$

dır. Buradan,

$R(-c_1) \oplus R(-c_2) \oplus R(-c_3) \oplus R(-c_4) \oplus R(-c_5) \oplus R(-c_6) \to R(-b_1) \oplus R(-b_2) \oplus R(-b_3) \oplus R(-b_4) \oplus R(-b_5)$

homomorfizması elde edilir.

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} x_2^{\alpha_2} & 0 \\ -x_4^{\alpha_{14}} & 0 \\ 0 & x_2^{\alpha_{32}} \\ -x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}} & -x_4^{\alpha_{24}} \\ 0 & x_3^{\alpha_{13}} \\ x_3^{\alpha_3} & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım ve

$$F_3 \to R(-c_1) \oplus R(-c_2) \oplus R(-c_3) \oplus R(-c_4) \oplus R(-c_5) \oplus R(-c_6)$$

F_3 modülünü derecelendirilmiş olarak elde edelim. ϕ_3 matrisinde, 1. sütundan bir eleman alalım.

a_{11} elemanı için,

$a_{11} = x_2^{\alpha_2}$

$d_1 - c_1 = \alpha_2$

dır. $c_1 = \alpha_3 + \alpha_{14}$ olduğundan,

$d_1 - \alpha_3 - \alpha_{14} = \alpha_2$

$d_1 = \alpha_3 + \alpha_{14} + \alpha_2$

elde edilir. d_2'yi bulmak için 2. sütundan bir eleman alalım. a_{32} elemanı için,

$a_{32} = x_2^{\alpha_{32}}$

$d_2 - c_3 = \alpha_{32}$

dir. $c_3 = \alpha_4 + \alpha_{13}$ olduğundan,

$d_2 - \alpha_4 - \alpha_{13} = \alpha_{32}$

$d_2 = \alpha_4 + \alpha_{13} + \alpha_{32}$

elde edilir. Böylece,

$$d_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_{14}, d_2 = \alpha_4 + \alpha_{13} + \alpha_{32}.$$

elde edilir. O halde,

$$F_3 = R(-d_1) \oplus R(-d_2)$$

dir. Buradan,

$$R(-d_1) \oplus R(-d_2) \to R(-c_1) \oplus R(-c_2) \oplus R(-c_3) \oplus R(-c_4) \oplus R(-c_5) \oplus R(-c_6)$$

homomorfizması elde edilir. 1(a1) durumu için Hilbert fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H_G(i) = & \binom{i+3}{3} - \binom{i-b_1+3}{3} - \binom{i-b_2+3}{3} - \binom{i-b_3+3}{3} \\ & - \binom{i-b_4+3}{3} - \binom{i-b_5+3}{3} + \binom{i-c_1+3}{3} \\ & + \binom{i-c_2+3}{3} + \binom{i-c_3+3}{3} + \binom{i-c_4+3}{3} \\ & + \binom{i-c_5+3}{3} + \binom{i-c_6+3}{3} - \binom{i-d_1+3}{3} \\ & - \binom{i-d_2+3}{3}, \end{aligned}$$

$i \geq 0$ olarak elde edilir. 1(a2) durumunun Betti sayıları 1(a1) durumu ile aynı olduğu için Hilbert fonksiyonu da aynıdır.

Benzer şekilde tüm durumlar için Hilbert fonksiyonu elde edilir. $\square$

4. COHEN-MACAULAY OLMAYAN TEĞET KONİ

C, 4-boyutlu afin uzayda Gorenstein tam kesişim olmayan bir tekterimli eğri olsun. C eğrisinin teğet konisinin üreteçlerini bulmak doğal bir sorudur ve tüm durumlar için hala açık bir problemdir [24]. Bresinsky'nin parametrizasyonunu kullanarak, Arslan, Katsabekis, Nalbandiyan, C eğrisinin teğet konisinin Cohen-Macaulay olması için gerekli ve yeterli şartları belirlemişlerdir [25].

Bu bölümde, ilk olarak 4-boyutlu afin uzaydaki C tekterimli eğrisinin Cohen-Macaulay olmayan teğet konisinin tanımlayan idealinin standart bazını elde etmeye ve sonrasında Hilbert serisini yazmaya çalışacağız.

4.1 Teğet Koninin Üreteçleri

$I(C)_*$ idealinin üreteçleri "teğet koni algoritması " olarak bilinen [26] algoritmayla, $I(C)$ idealinin tanımından yola çıkılarak bulunabilir. Bu algoritma global terim sıralamasında hesaplamaya olanak sağlarken lokal terim sıralamasında etkili değildir. Bu yüzden, standart baz teorisini ve lokal terim sıralaması için Mora'nın teğet koni algoritmasını kullanacağız.

Bir idealin ya da modülün, standart bazı, idealin çeşitli invaryantlarını sadece en yüksek dereceli tekterimlileri aracılığıyla olanaklı kılan özel bir üreteç kümesidir. Global sıralamalar kullanılarak elde edilen standart baza Gröbner baz denilmektedir. Ancak biz lokal sıralamaları kullanmaktayız. Bu sebeple, standart baz teorisini ve bu teoriye dayanan Mora'nın teğet koni algoritmasını kullanacağız. Lokal sıralama, normal form (NF), standart baz ve Mora teğet koni algoritması gibi detaylı bilgiler için [2] referansına bakılmalıdır. Şimdi negatif dereceli ters alfabetik sıralama, normal form, S polinom ve ecart tanımlarını verelim.

4.1.1 Tanım. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ ve $\mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\mid \beta \mid = \sum_{i=1}^n \beta_i$ olmak üzere $\mid \alpha \mid < \mid \beta \mid$ veya $\mid \alpha \mid = \mid \beta \mid$ iken $\alpha - \beta$ farkında en sağdaki sıfırdan farklı değer negatif ise $x^\alpha >_{ds} x^\beta$ olur. Burada, (ds)'ye negatif derecelendirilmiş alfabetik sıralama denir.

4.1.2 Tanım. $R = k[x_1, \ldots, x_n]_>$, $k[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasının bir tekterimli sıralamasına göre lokalizasyonu olmak üzere $G \subset R$ ve $\mathcal{G}$, G'nin tüm sonlu listelerinin kümesi olsun.

$$NF : R \times \mathcal{G} \to R$$

$$(f, G) \mapsto NF(f \mid G)$$

dönüşümü, her $\mathcal{G} \in G$ için

- $NF(0 \mid G) = 0$,

her $f \in R$ ve $\mathcal{G} \in G$ için

- $NF(f \mid G) \neq 0$ ise $LM(NF(f \mid G)) \notin L(G)$

şartlarını sağlıyor ise NF dönüşümüne R üzerinde bir normal form denir.

$G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ ise $f - NF(f \mid G)$, $NF(- \mid G)$'ye göre bir standart gösterime sahiptir. Bir başka deyişle,

$$f - NF(f \mid G) = \sum_{i=1}^{s} a_i.g_i \; a_i \in R_{s \geq 0}.$$

Burada, $a_i.g_i \neq 0$ olan $\forall i$ için, $LM(\sum_{i=1}^{s} a_i.g_i) \geq LM(a_i.g_i)$ şartını sağlar.

4.1.3 Tanım. $f, g \in R \backslash \{0\}$ ve $LM(f) = x^{\alpha}$, $LM(g) = x^{\beta}$ olsun. $\gamma :=$ ekok$(x^{\alpha}, x^{\beta}) = x^{\gamma}$

$$S(f, g) = \frac{x^{\gamma}}{LT(f)}.f - \frac{x^{\gamma}}{LT(g)}.g$$

polinomuna, f ve g'nin S polinomu denir.

4.1.4 Tanım. f, $k[x_1, x_2, \dots, x_d]$ halkasında sıfırdan farklı bir polinom olsun.

$$ecart(f) := der(f) - der(LM(f))$$

f polinomunun ecartı olarak tanımlanır. f homojen polinom ise $ecart(f) = 0$ dır.

4.1.5 Uyarı. $f, g \in k[x_1, x_2, \dots, x_d]$ polinomları için

$$ekok(LM(f), LM(g)) = LM(f).LM(g) \text{ ise } NF(S(f, g) \mid \{f, g\}) = 0.$$

Bresinsky Teoreminden, C eğrisinin $I(C)$ tanımlayan idealinin $\{f_1 = -x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{\alpha_1}, f_2 = -x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}, f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}},$
$f_5 = -x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}}\}$
tarafından üretildiğini biliyoruz. $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$ koşulunda, [28]'deki Yardımcı Teorem 4.2.1'den teğet koni Cohen-Macaulay değildir.

4.1.6 Yardımcı Önerme. C eğrisinin $I(C)$ tanımlayan idealinin Durum 1(a)'daki gibi olduğunu varsayalım. Ek olarak,

- $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$
- $\alpha_{32} + \alpha_{14} < \alpha_{43} + \alpha_{21}$
- $\alpha_{14} < \alpha_{24}$
- $\alpha_2 + \alpha_{13} < \alpha_1 + \alpha_{21} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$
- $\alpha_2 + \alpha_{32} < 2\alpha_{21} + \alpha_{43} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$

olsun. Bu durumda,

$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}, f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}},$
$f_5 = x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, f_6 = -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}},$
$f_7 = -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}\}$
kümesi $I(C)$ idealinin standart bazıdır.

İspat: $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ kümesine standart baz algoritmasını uygulayalım.
$LM(f_1) = x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}$, $LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}$, $LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}$, $LM(f_4) = x_4^{\alpha_4}$,
$LM(f_5) = x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}$, $LM(f_6) = x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}$, $LM(f_7) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$ dir.
$(i,j) \in \{(1,7),(2,3),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,7),(4,6),(4,7)\}$ iken
$(LM(f_i), LM(f_j)) = 1$ olduğundan $NF(S(f_i,f_j) \mid G) = 0$ olur.

- $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_2)) = x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned} S(f_1,f_2) &= \tfrac{x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} - x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} \\ &= f_6 \end{aligned}$$

Böylece, $NF(S(f_1,f_2) \ \mid \ G) = 0$ dır.

- $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_3)) = x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned} S(f_1,f_3) &= \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) \\ &= -x_1^{\alpha_1} x_3^{\alpha_{43}} + x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}} - x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}} + x_4^{\alpha_{14}} x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}} \\ &= -x_1^{\alpha_{31}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) \\ &= -x_1^{\alpha_{31}} f_5 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_3) \ \mid \ G) = 0$ dır.

- $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_4)) = x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4}$

$$
\begin{aligned}
S(f_1,f_4) &= \tfrac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1}-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4}-x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}})\\
&= -x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4} + x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}\\
&= -x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}
\end{aligned}
$$

$S(f_1,f_4)$ polinomunun en yüksek dereceli tekterimlisini bulalım. Burada, $\alpha_1+\alpha_{24} \geq \alpha_3+\alpha_{42}$ veya $\alpha_1+\alpha_{24} < \alpha_3+\alpha_{42}$ dir.

$\alpha_1+\alpha_{24} < \alpha_3+\alpha_{42}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_1,f_4)) = x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}$ dir. $LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}$, $LM(S(f_1,f_4)) = x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}$ 'ü böler ve

$$
\begin{aligned}
ecart(S(f_1,f_4)) &= \alpha_3+\alpha_{42}-\alpha_1-\alpha_{24}\\
&< \alpha_{31}+\alpha_{32}-\alpha_{42}-\alpha_1-\alpha_{24}\\
&= \alpha_2+\alpha_{31}-\alpha_1-\alpha_{24}\\
&= \alpha_2-\alpha_{21}+\alpha_1-\alpha_1-\alpha_{24}\\
&= \alpha_2-\alpha_{21}-\alpha_{24}\\
&= ecart(f_2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= ekok(LM(S(f_1,f_4)),LM(f_2)) = x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}\\
S(S(f_1,f_4),f_2) &= \tfrac{x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}+x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}) - \tfrac{x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})\\
&= x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}} - x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}\\
&= -x_2^{\alpha_{42}}(x_3^{\alpha_3}-x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}})\\
&= -x_2^{\alpha_{42}}f_3
\end{aligned}
$$

olduğundan $NF(S(f_1,f_4)\ \mid\ G)=0$.

$\alpha_1+\alpha_{24} \geq \alpha_3+\alpha_{42}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_1,f_4)) = x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}$ dür. $LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}$, $LM(S(f_1,f_4)) = x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}$'yi böler ve

$$
\begin{aligned}
ecart(S(f_1,f_4)) &= \alpha_1+\alpha_{24}-\alpha_3-\alpha_{42}\\
&= \alpha_{21}+\alpha_{31}-\alpha_3-\alpha_{42}\\
&< \alpha_2+\alpha_{31}-\alpha_3-\alpha_{42}\\
&= \alpha_{32}+\alpha_{42}+\alpha_{31}-\alpha_3-\alpha_{42}\\
&= \alpha_{32}+\alpha_{31}-\alpha_3\\
&= ecart(f_3).
\end{aligned}
$$

$$
\gamma = ekok(LM(S(f_1,f_4)),LM(f_3)) = x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}
$$

$$
\begin{aligned}
S(S(f_1,f_4),f_3) &= \frac{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}}{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}}(-x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}+x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}) - \frac{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3}-x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}})\\
&= -x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}}+x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}-x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}+x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_2}\\
&= x_1^{\alpha_{31}}(x_2^{\alpha_2}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})\\
&= x_1^{\alpha_{31}}f_2
\end{aligned}
$$

olduğundan $NF(S(f_1,f_4)\ \mid\ G)=0$ olur.

• $\gamma = ekok(LM(f_1),LM(f_5)) = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}$

$$
\begin{aligned}
S(f_1,f_5) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1}-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})\\
&= -x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_{32}}+x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}+x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}\\
&= x_1^{\alpha_{21}}(x_3^{\alpha_3}-x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}})\\
&= x_1^{\alpha_{21}}f_3
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_5)\ \mid\ G)=0.$

• $\gamma = ekok(LM(f_1),LM(f_6)) = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}$

$$
\begin{aligned}
S(f_1,f_6) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1}-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}+x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}})\\
&= -x_1^{\alpha_1}(x_2^{\alpha_2}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})\\
&= -x_1^{\alpha_1}f_2
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_6)\ \mid\ G)=0.$

• $\gamma = ekok(LM(f_2),LM(f_4)) = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_4}$

$$
\begin{aligned}
S(f_2,f_4) &= \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_4}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4}-x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}})\\
&= -x_2^{\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}}+x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}+x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}}\\
&= x_2^{\alpha_{42}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})\\
&= x_2^{\alpha_{42}}f_5
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_2,f_4)\ \mid\ G)=0.$

• $\gamma = ekok(LM(f_2),LM(f_5)) = x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{24}}$

$$
\begin{aligned}
S(f_2,f_5) &= \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{24}}}{x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})\\
&= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}+x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{24}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{24}}-x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{24}}\\
&= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}\\
&= f_7
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_2,f_5)\ \mid\ G)=0.$

• $\gamma = ekok(LM(f_3), LM(f_6)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2}$

$$
\begin{aligned}
S(f_3, f_6) &= \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}) \\
&= x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_1^{\alpha_{31}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} x_3^{\alpha_{43}} - x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} \\
&= x_1^{\alpha_{31}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{24}}) \\
&= x_1^{\alpha_{31}} f_7
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_3, f_6) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_4), LM(f_5)) = x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}$

$$
\begin{aligned}
S(f_4, f_5) &= \tfrac{x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}) - \tfrac{x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) \\
&= x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}} - x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}} + x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}} x_1^{\alpha_{21}} - x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}} \\
&= -x_3^{\alpha_{43}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) \\
&= -x_3^{\alpha_{43}} f_2
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_4, f_5) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_5), LM(f_6)) = x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}$

$$
\begin{aligned}
S(f_5, f_6) &= \tfrac{x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}}{-x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}) \\
&= -x_3^{\alpha_3} x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{42}} + x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} - x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} \\
&= -x_3^{\alpha_3} x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\
&= x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{13}} f_4 + x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} f_1
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_5, f_6) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_5), LM(f_7)) = x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$

$$
\begin{aligned}
S(f_5, f_7) &= \tfrac{x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\
&= -x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} + x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} - x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}} \\
&= -x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) \\
&= -x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} f_2
\end{aligned}
$$

Buradan, $NF(S(f_5, f_7) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_6), LM(f_7)) = x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$

$$
\begin{aligned}
S(f_6, f_7) = {} & \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2}}(x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} \\
& + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\
= {} & -x_2^{\alpha_{32}} x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} - x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}
\end{aligned}
$$

$$= x_1^{2\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} (x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}})$$
$$= x_1^{2\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} f_3$$

Buradan, $NF(S(f_6, f_7) \mid G) = 0$.

Böylece,

$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}},$
$f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}, f_5 = x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, f_6 = -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}},$
$f_7 = -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{14}}\}$

$I(C)$ idealinin standart bazıdır. □

4.1.7 Önerme. C eğrisinin $I(C)$ tanımlayan idealinin Durum 1(a)'daki gibi olduğunu varsayalım.

- $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$
- $\alpha_{32} + \alpha_{14} < \alpha_{43} + \alpha_{21}$
- $\alpha_{14} < \alpha_{24}$
- $\alpha_2 + \alpha_{13} < \alpha_1 + \alpha_{21} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$
- $\alpha_2 + \alpha_{32} < 2\alpha_{21} + \alpha_{43} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$

koşulları altında teğet koninin $I(C)_*$ tanımlayan ideali

$$\{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}\}$$

kümesi ile üretilir.

İspat: 4.1.6 Yardımcı Önerme'den $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ kümesi $I(C)$ idealinin ds tekterimli sıralamasına göre standart bazıdır. Bu durumda, [2]'deki Önerme 5.5.11 'den

$$I(C)_* =< f_{1*}, f_{2*}, f_{3*}, f_{4*}, f_{5*}, f_{6*}, f_{7*} >$$
$$=< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$$

olur. □

4.1.8 Yardımcı Önerme. C eğrisinin $I(C)$ tanımlayan idealinin Durum 1(a)'daki gibi olduğunu varsayalım.

- $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$
- $\alpha_{43} + \alpha_{21} \leq \alpha_{32} + \alpha_{14}$

- $2\alpha_{14} < \alpha_{24}$
- $\alpha_{13} < \alpha_{43}$
- $\alpha_2 + \alpha_{13} < \alpha_1 + \alpha_{21} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$
- $\alpha_{32} + 2\alpha_{14} < \alpha_1 + \alpha_{21} + \alpha_{43} - \alpha_{13}$
- $\alpha_2 + \alpha_{32} < \alpha_1 + 2\alpha_{21} + \alpha_{43} - \alpha_{13} + \alpha_{24} - 2\alpha_{14}$

olsun. Bu durumda,

$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}, f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}},$
$f_5 = x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}, f_6 = -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}},$
$f_7 = -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_2^{\alpha_{32}}x_4^{2\alpha_{14}}, f_8 = -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}}\}$
kümesi $I(C)$ idealinin standart bazıdır.

İspat: $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ kümesine standart baz algoritmasını uygulayalım.
$LM(f_1) = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}$, $LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}$, $LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}$, $LM(f_4) = x_4^{\alpha_4}$,
$LM(f_5) = x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}$, $LM(f_6) = x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}$, $LM(f_7) = x_2^{\alpha_{32}}x_4^{2\alpha_{14}}$, $LM(f_8) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$ dir.
$(i,j) \in \{(1,8),(2,3),(2,6),(2,8),(3,4),(3,7),(3,8),(4,5),(4,6),(4,8),(5,7),(5,8)\}$ iken $(LM(f_i), LM(f_j)) = 1$ olduğundan $NF(S(f_i,f_j) \mid G) = 0$ olur.

- $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_2)) = x_3^{\alpha_{13}}x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}S(f_1,f_2) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})\\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{13}}x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}} - x_3^{\alpha_{13}}x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}\\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}\\ &= f_6\end{aligned}$$

Böylece, $NF(S(f_1,f_2) \mid G) = 0$.

- $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_3)) = x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned}S(f_1,f_3) &= \frac{x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{14}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}})\\ &= -x_1^{\alpha_1}x_3^{\alpha_{43}} + x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{14}} - x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{14}} + x_4^{\alpha_{14}}x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}\\ &= -x_1^{\alpha_{31}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})\\ &= -x_1^{\alpha_{31}}f_5\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_3) \mid G) = 0$ dır.

- $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_4)) = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4}$

$$S(f_1,f_4) = \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}})$$

$$= -x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$$
$$= -x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$$

$S(f_1, f_4)$ polinomunun en yüksek dereceli tekterimlisini bulalım. Burada, $\alpha_1 + \alpha_{24} \geq \alpha_3 + \alpha_{42}$ veya $\alpha_1 + \alpha_{24} < \alpha_3 + \alpha_{42}$ dir.

$\alpha_1 + \alpha_{24} < \alpha_3 + \alpha_{42}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_1, f_4)) = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}$ dür. $LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}$, $LM(S(f_1, f_4)) = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}$ 'ü böler ve

$$\begin{aligned}
ecart(S(f_1, f_4)) &= \alpha_3 + \alpha_{42} - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&< \alpha_{31} + \alpha_{32} - \alpha_{42} - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&= \alpha_2 + \alpha_{31} - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&= \alpha_2 - \alpha_{21} + \alpha_1 - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&= \alpha_2 - \alpha_{21} - \alpha_{24} \\
&= ecart(f_2).
\end{aligned}$$

$$\gamma = ekok(LM(S(f_1, f_4)), LM(f_2)) = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}$$
$$\begin{aligned}
S(S(f_1, f_4), f_2) &= \tfrac{x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}) - \tfrac{x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) \\
&= x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} - x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\
&= -x_2^{\alpha_{42}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) \\
&= -x_2^{\alpha_{42}} f_3
\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_1, f_4) \mid G) = 0$.

$\alpha_1 + \alpha_{24} \geq \alpha_3 + \alpha_{42}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_1, f_4)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$ dür. $LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}$, $LM(S(f_1, f_4)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$'yi böler ve

$$\begin{aligned}
ecart(S(f_1, f_4)) &= \alpha_1 + \alpha_{24} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&= \alpha_{21} + \alpha_{31} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&< \alpha_2 + \alpha_{31} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&= \alpha_{32} + \alpha_{42} + \alpha_{31} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&= \alpha_{32} + \alpha_{31} - \alpha_3 \\
&= ecart(f_3).
\end{aligned}$$

$$\gamma = ekok(LM(S(f_1, f_4)), LM(f_3)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$$
$$S(S(f_1, f_4), f_3) = \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}}{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}}(-x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}})$$

$$= -x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}} - x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_2}$$
$$= x_1^{\alpha_{31}} (x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}})$$
$$= x_1^{\alpha_{31}} f_2$$

olduğundan $NF(S(f_1, f_4) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_5)) = x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{14}} x_1^{\alpha_{21}}$

$$S(f_1, f_5) = \frac{x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{14}} x_1^{\alpha_{21}}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}} (x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{14}} x_1^{\alpha_{21}}}{x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}}} (x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}})$$
$$= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_1 4} x_1^{\alpha_{21}} - x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_1 4} x_1^{\alpha_{21}} + x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}$$
$$= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}$$
$$= f_7$$

olduğundan $NF(S(f_1, f_5) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_6)) = x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2}$

$$S(f_1, f_6) = \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}} (x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}} (-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}})$$
$$= -x_1^{\alpha_1} (x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}})$$
$$= -x_1^{\alpha_1} f_2$$

Buradan, $NF(S(f_1, f_6) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_7)) = x_3^{\alpha_{13}} x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}}$

$$S(f_1, f_7) = \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}} (x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}}}{x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}} (-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}})$$
$$= -x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{13}} x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}}$$
$$= x_1^{\alpha_1} (x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}})$$
$$= x_1^{\alpha_1} f_5$$

Buradan, $NF(S(f_1, f_7) \mid G) = 0$.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_4)) = x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4}$

$$S(f_2, f_4) = \frac{x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}} (x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}} (x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}})$$
$$= -x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}$$
$$= x_2^{\alpha_{42}} (x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}})$$
$$= x_2^{\alpha_{42}} f_5$$

Buradan, $NF(S(f_2, f_4) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_5)) = x_1^{\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}}$

$$S(f_2,f_5) = \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}}}{x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})$$
$$= -x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}} + x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_4}$$
$$= x_2^{\alpha_{32}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}})$$
$$= x_2^{\alpha_{32}}f_4$$

Buradan, $NF(S(f_2,f_5) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_7)) = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}x_2^{\alpha_{32}}$

$$S(f_2,f_7) = \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}x_2^{\alpha_{32}}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}x_2^{\alpha_{32}}}{x_2^{\alpha_{32}}x_4^{2\alpha_{14}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_2^{\alpha_{32}}x_4^{2\alpha_{14}})$$
$$= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}x_2^{\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}x_2^{\alpha_{32}}$$
$$= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}}$$
$$= f_8$$

Buradan, $NF(S(f_2,f_7) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_3), LM(f_5)) = x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}$

$$S(f_3,f_5) = \frac{x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}) - \frac{x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}}{x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})$$
$$= x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}} - x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_{32}} - x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}} + x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}$$
$$= -x_2^{\alpha_{32}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}})$$
$$= -x_2^{\alpha_{32}}f_1$$

Buradan, $NF(S(f_3,f_5) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_3), LM(f_6)) = x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_2}$

$$S(f_3,f_6) = \frac{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_2}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}) - \frac{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}})$$
$$= x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_2} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_1^{\alpha_{31}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}x_3^{\alpha_{43}} - x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_2}$$
$$= x_1^{\alpha_{31}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{24}})$$
$$= -x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}f_2 + x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}f_1 - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}f_3$$

Buradan, $NF(S(f_3,f_6) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_4), LM(f_7)) = x_4^{\alpha_4}x_2^{\alpha_{32}}$

$$S(f_4,f_7) = \frac{x_4^{\alpha_4}x_2^{\alpha_{32}}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}}) - \frac{x_4^{\alpha_4}x_2^{\alpha_{32}}}{x_2^{\alpha_{32}}x_4^{2\alpha_{14}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_2^{\alpha_{32}}x_4^{2\alpha_{14}})$$
$$= x_4^{\alpha_4}x_2^{\alpha_{32}} - x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} - x_4^{\alpha_4}x_2^{\alpha_{32}}$$
$$= -x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}})$$
$$= -x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}f_6$$

Buradan, $NF(S(f_4, f_7) \ \mid \ G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_5), LM(f_6)) = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}}$

$$\begin{aligned} S(f_5, f_6) &= \frac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}}}{x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}}} (x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}} (-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}) \\ &= x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}} - x_4^{\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} - x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{23}} \\ &= x_4^{\alpha_{14}} (-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}}) \\ &= x_4^{\alpha_{14}} f_8 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_5, f_6) \ \mid \ G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_6), LM(f_7)) = x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{2\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned} S(f_6, f_7) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{2\alpha_{14}}}{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2}} (x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{2\alpha_{14}}}{x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}} (-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} \\ &\quad + x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}) \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4} + x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{2\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{43}} x_2^{\alpha_{42}} x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} - x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{2\alpha_{14}} \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} (x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}) \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} f_4 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_6, f_7) \ \mid \ G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_6), LM(f_8)) = x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$

$$\begin{aligned} S(f_6, f_8) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}} \ (-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}) \ - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}} \ (-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} \\ &\quad + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}}) \\ &= -x_2^{\alpha_{32}} x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} - x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}} \\ &= x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}} (x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) \\ &= x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}} f_5 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_6, f_8) \ \mid \ G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_7), LM(f_8)) = x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$

$$\begin{aligned} S(f_7, f_8) &= \frac{x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}} (-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} + x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}) - \frac{x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}} (-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} \\ &\quad + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{23}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}}) \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} + x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} - x_4^{2\alpha_{14}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} (x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) \end{aligned}$$

$$= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} f_2$$

Buradan, $NF(S(f_7, f_8) \mid G) = 0$ dır.

Böylece,

$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = -x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}},$
$f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}, f_5 = x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, f_6 = x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}},$
$f_7 = x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}}, f_8 = -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}-\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}-2\alpha_{14}}\}$
$I(C)$ idealinin standart bazıdır. □

4.1.9 Önerme. C eğrisini $I(C)$ idealinin, Durum 1(a)'daki gibi olduğunu varsayalım.

- $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$
- $\alpha_{43} + \alpha_{21} \leq \alpha_{32} + \alpha_{14}$
- $2\alpha_{14} < \alpha_{24}$
- $\alpha_{13} < \alpha_{43}$
- $\alpha_2 + \alpha_{13} < \alpha_1 + \alpha_{21} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$
- $\alpha_{32} + 2\alpha_{14} < \alpha_1 + \alpha_{21} + \alpha_{43} - \alpha_{13}$
- $\alpha_2 + \alpha_{32} < \alpha_1 + 2\alpha_{21} + \alpha_{43} - \alpha_{13} + \alpha_{24} - 2\alpha_{14}$

koşulları altında teğet koninin $I(C)_*$ tanımlayan ideali

$$\{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}\}$$

kümesi ile üretilir.

İspat: 4.1.8 Yardımcı Önerme'den $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ kümesi $I(C)$ idealinin ds tekterimli sıralamasına göre standart bazıdır. Bu durumda, [2]'deki Önerme 5.5.11 'den

$$\begin{aligned} I(C)_* &= < f_{1*}, f_{2*}, f_{3*}, f_{4*}, f_{5*}, f_{6*}, f_{7*}, f_{8*} > \\ &= < x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{2\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} > \end{aligned}$$

olur. □

4.1.10 Yardımcı Önerme. C eğrisinin $I(C)$ tanımlayan idealinin Durum 1(a)'daki gibi olduğunu varsayalım.

- $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$
- $\alpha_{32} + \alpha_{14} < \alpha_{43} + \alpha_{21}$

• $2\alpha_{24} > \alpha_{14} > \alpha_{24}$

• $\alpha_2 + \alpha_{13} + \alpha_{14} - \alpha_{24} < \alpha_1 + \alpha_{21}$

• $\alpha_2 + \alpha_{32} + \alpha_{14} - \alpha_{24} < 2\alpha_{21} + \alpha_{43}$

• $2\alpha_2 + \alpha_{13} < \alpha_1 + 2\alpha_{21} + 2\alpha_{24} - \alpha_{14}$

• $2\alpha_2 + \alpha_{32} < 3\alpha_{21} + \alpha_{43} + 2\alpha_{24} - \alpha_{14}$

olsun. Bu durumda,

$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = -x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}},$

$f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}, f_5 = x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, f_6 = x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}},$

$f_7 = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}}, f_8 = -x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}},$

$f_9 = x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{3\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}\}$

kümesi, $I(C)$ idealinin standart bazıdır.

İspat: $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ kümesine standart baz algoritmasını uygulayalım.

$LM(f_1) = x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}, LM(f_4) = x_4^{\alpha_4},$

$LM(f_5) = x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, LM(f_6) = x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}, LM(f_7) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}},$

$LM(f_8) = x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, LM(f_9) = x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}$ dir.

$(i,j) \in \{(1,9), (2,3), (2,8), (2,9), (3,4), (3,5), (3,7), (3,9), (4,8), (4,9)\}$ iken

$(LM(f_i), LM(f_j)) = 1$ olduğundan $NF(S(f_i, f_j) \mid G) = 0$ olur.

• $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_2)) = x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned}
S(f_1, f_2) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{14}}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}}(-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{\alpha_1}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{14}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}) \\
&= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} + x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_3^{\alpha_{13}} x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{14}} \\
&= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} + x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} \\
&= f_6
\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1, f_2) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_3)) = x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned}
S(f_1, f_3) &= \frac{x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \frac{x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1} x_3^{\alpha_{43}} + x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}} - x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_{14}} + x_4^{\alpha_{14}} x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}} \\
&= -x_1^{\alpha_{31}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) \\
&= -x_1^{\alpha_{31}} f_5
\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1, f_3) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1), LM(f_4)) = x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4}$

$$\begin{aligned}
S(f_1, f_4) &= \tfrac{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4}}{-x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_4} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}} \\
&= -x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}
\end{aligned}$$

$S(f_1, f_4)$ polinomunun en yüksek dereceli tekterimlisini bulalım. Burada, $\alpha_1 + \alpha_{24} \geq \alpha_3 + \alpha_{42}$ veya $\alpha_1 + \alpha_{24} < \alpha_3 + \alpha_{42}$ dir.

$\alpha_1 + \alpha_{24} < \alpha_3 + \alpha_{42}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_1, f_4)) = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}$ dür. $LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}$, $LM(S(f_1, f_4)) = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}$ 'ü böler ve

$$\begin{aligned}
ecart(S(f_1, f_4)) &= \alpha_3 + \alpha_{42} - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&< \alpha_{31} + \alpha_{32} - \alpha_{42} - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&= \alpha_2 + \alpha_{31} - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&= \alpha_2 - \alpha_{21} + \alpha_1 - \alpha_1 - \alpha_{24} \\
&= \alpha_2 - \alpha_{21} - \alpha_{24} \\
&= ecart(f_2).
\end{aligned}$$

$\gamma = ekok(LM(S(f_1, f_4)), LM(f_2)) = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}
S(S(f_1, f_4), f_2) &= \tfrac{x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}) - \tfrac{x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) \\
&= x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} - x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} \\
&= -x_2^{\alpha_{42}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) \\
&= -x_2^{\alpha_{42}} f_3
\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_1, f_4) \mid G) = 0$ dır.

$\alpha_1 + \alpha_{24} \geq \alpha_3 + \alpha_{42}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_1, f_4)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$ dür. $LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}$, $LM(S(f_1, f_4)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_{42}}$'yi böler ve

$$\begin{aligned}
ecart(S(f_1, f_4)) &= \alpha_1 + \alpha_{24} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&= \alpha_{21} + \alpha_{31} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&< \alpha_2 + \alpha_{31} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&= \alpha_{32} + \alpha_{42} + \alpha_{31} - \alpha_3 - \alpha_{42} \\
&= \alpha_{32} + \alpha_{31} - \alpha_3 \\
&= ecart(f_3).
\end{aligned}$$

$$\gamma = ekok(LM(S(f_1,f_4)),LM(f_3)) = x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}$$

$$\begin{aligned}
S(S(f_1,f_4),f_3) &= \tfrac{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}}{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}}(-x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1}x_4^{\alpha_{24}} + x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}} - x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_2} \\
&= x_1^{\alpha_{31}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}) \\
&= x_1^{\alpha_{31}}f_2
\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_1,f_4) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1),LM(f_5)) = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_4}x_2^{\alpha_{32}}$

$$\begin{aligned}
S(f_1,f_5) &= \tfrac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_{32}} + x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}} + x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}} \\
&= x_1^{\alpha_{21}}(-x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}} + x_3^{\alpha_3}) \\
&= x_1^{\alpha_{21}}f_3
\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_5) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1),LM(f_6)) = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}$

$$\begin{aligned}
S(f_1,f_6) &= \tfrac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}} + x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1}f_2
\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_6) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1),LM(f_7)) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned}
S(f_1,f_7) &= \tfrac{x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}) - \tfrac{x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}) \\
&= -x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{24}}x_1^{2\alpha_{21}} \\
&= -x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} + x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{24}}x_1^{2\alpha_{21}} \\
&= x_4^{\alpha_{24}}x_1^{2\alpha_{21}}f_3 - x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_{32}}f_2
\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_7) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_1),LM(f_8)) = x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned}
S(f_1,f_8) &= \tfrac{x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}(-x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{\alpha_1}) - \tfrac{x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\
&= x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} - x_1^{\alpha_1}x_2^{2\alpha_2} - x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}} \\
&= x_1^{\alpha_1}f_2(x_2^{\alpha_2} + x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})
\end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_1,f_8) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_4)) = x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4}$

$$\begin{aligned} S(f_2, f_4) &= \tfrac{x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) - \tfrac{x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}) \\ &= -x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}} \\ &= x_2^{\alpha_{42}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) \\ &= x_2^{\alpha_{42}} f_5 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_2, f_4) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_5)) = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}$

$$\begin{aligned} S(f_2, f_5) &= \tfrac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}) - \tfrac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}} - x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}) \\ &= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} - x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} \\ &= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} \\ &= f_7 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_2, f_5) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_6)) = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned} S(f_2, f_6) &= \tfrac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}) - \tfrac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}) \\ &= x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} - x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} - x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} \\ &= -x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} \\ &= f_8 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_2, f_6) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_2), LM(f_7)) = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned} S(f_2, f_7) &= \frac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}) - \frac{x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{24}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} \\ &\quad + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}}) \\ &= x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{24}} - x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} - x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{24}} + x_1^{3\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} \\ &= -x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{3\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} \\ &= f_9 \end{aligned}$$

Buradan, $NF(S(f_2, f_7) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_3), LM(f_6)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned} S(f_3, f_6) &= \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) - \tfrac{x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}) \\ &= x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_1^{\alpha_{31}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} - x_3^{\alpha_3} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} \end{aligned}$$

$= x_1^{\alpha_{31}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}})$
$= x_1^{\alpha_{31}} f_7$

Buradan, $NF(S(f_3, f_6) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_3), LM(f_8)) = x_3^{\alpha_3} x_2^{2\alpha_2}$

$$S(f_3, f_8) = \frac{x_3^{\alpha_3} x_2^{2\alpha_2}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}) - \frac{x_3^{\alpha_3} x_2^{2\alpha_2}}{-x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}}(-x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}})$$
$$= -x_1^{\alpha_{31}} x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} + x_3^{\alpha_3} x_2^{2\alpha_2} - x_3^{\alpha_3} x_2^{2\alpha_2} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} x_3^{\alpha_{43}}$$
$$= x_1^{\alpha_{31}}(-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{3\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}})$$
$$= x_1^{\alpha_{31}} f_9$$

Buradan, $NF(S(f_3, f_8) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_4), LM(f_5)) = x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}$

$$S(f_4, f_5) = \frac{x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}) - \frac{x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}}(-x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}})$$
$$= x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}} - x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{43}} + x_3^{\alpha_{43}} x_4^{\alpha_{24}} x_1^{\alpha_{21}} - x_4^{\alpha_4} x_2^{\alpha_{32}}$$
$$= -x_3^{\alpha_{43}}(x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}})$$
$$= -x_3^{\alpha_{43}} f_2$$

Buradan, $NF(S(f_4, f_5) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_4), LM(f_6)) = x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_4}$

$$S(f_4, f_6) = \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_4}}{x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}})$$
$$= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}} x_3^{\alpha_3} + x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_4} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}} - x_3^{\alpha_{13}} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_4}$$
$$= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}} x_3^{\alpha_3} + x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}}$$

$S(f_4, f_6)$ polinomunun en yüksek dereceli tekterimlisini bulalım. Burada, $\alpha_2 + \alpha_{42} + \alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_{21} + 2\alpha_{24}$ veya $\alpha_1 + \alpha_{21} + 2\alpha_{24} < \alpha_2 + \alpha_{42} + \alpha_3$ dür.

$\alpha_2 + \alpha_{42} + \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_{21} + 2\alpha_{24}$ olsun. Böylece, $LM(S(f_4, f_6)) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}} x_3^{\alpha_3}$ dür. $LM(f_3) = x_3^{\alpha_3}$, $LM(S(f_4, f_6)) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}} x_3^{\alpha_3}$'ü böler ve

$$\begin{aligned} ecart(S(f_4, f_6)) &= \alpha_1 + \alpha_{21} + 2\alpha_{24} - \alpha_2 - \alpha_{42} - \alpha_3 \\ &< \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{24} - \alpha_2 - \alpha_{42} - \alpha_3 \\ &= \alpha_{31} + \alpha_{21} + \alpha_{24} - \alpha_{42} - \alpha_3 \\ &< \alpha_2 + \alpha_{31} - \alpha_{42} - \alpha_3 \\ &= \alpha_{32} + \alpha_{31} + \alpha_{42} - \alpha_{42} - \alpha_3 \\ &= \alpha_{32} + \alpha_{31} - \alpha_3 \end{aligned}$$

$= ecart(f_3).$

$\gamma = ekok(LM(S(f_4,f_6)), LM(f_3)) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}$

$$\begin{aligned}
S(S(f_4,f_6),f_3) &= \tfrac{x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}+x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}) - \tfrac{x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}}{x_3^{\alpha_3}}(x_3^{\alpha_3}-x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}})\\
&= x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3} + x_1^{\alpha_{31}}x_2^{2\alpha_2}\\
&= x_1^{\alpha_{31}}(x_2^{2\alpha_2} - x_1^{2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}})\\
&= x_1^{\alpha_{31}}f_2(x_2^{\alpha_2}+x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})
\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(S(f_4,f_6),f_6) \mid G) = 0$ dır.

$\alpha_1+\alpha_{21}+2\alpha_{24} < \alpha_2+\alpha_{42}+\alpha_3$ olsun. Böylece, $LM(S(f_4,f_6)) = x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}$ dür. $LM(f_2) = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}$'ü böler ve

$$\begin{aligned}
ecart(S(f_4,f_6)) &= \alpha_2+\alpha_{42}+\alpha_3-\alpha_1-\alpha_{21}-2\alpha_{24}\\
&< \alpha_2+\alpha_{42}+\alpha_3-\alpha_{24}-\alpha_4-\alpha_{13}-\alpha_{21}\\
&= \alpha_2+\alpha_{42}+\alpha_{13}+\alpha_{43}-\alpha_{24}-\alpha_4-\alpha_{13}-\alpha_{21}\\
&> \alpha_2+\alpha_4-\alpha_{24}-\alpha_4-\alpha_{21}\\
&= \alpha_2-\alpha_{24}-\alpha_{21}\\
&= ecart(f_2).
\end{aligned}$$

$\gamma = ekok(LM(S(f_4,f_6)), LM(f_2)) = x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}
S(S(f_4,f_6),f_2) &= \tfrac{x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}}{x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}}(x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}) - \tfrac{x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}}{-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}+x_2^{\alpha_2})\\
&= x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_4^{\alpha_{24}}\\
&= -x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3} + x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_4^{\alpha_{24}}\\
&= -x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_2}f_2 - x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}f_3
\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(S(f_4,f_6),f_2) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_4), LM(f_7)) = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_4}$

$$\begin{aligned}
S(f_4,f_7) &= \tfrac{x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_4}}{x_4^{\alpha_4}}(x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_{43}}) - \tfrac{x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_4}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}})\\
&= x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_4} - x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}} - x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_4} + x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{2\alpha_{24}}\\
&= -x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}} + x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{2\alpha_{24}}\\
&= -x_3^{\alpha_{43}}f_2(x_2^{\alpha_2}+x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})
\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_4,f_7) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_5), LM(f_6)) = x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}$

$$S(f_5,f_6)=\frac{x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}{-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})-\frac{x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}{x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}+x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}})$$
$$=-x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{42}}+x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}+x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}-x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}$$
$$=-x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{42}}+x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}$$
$$=-x_1^{\alpha_1}f_2-x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{42}}f_3$$
olduğundan $NF(S(f_5,f_6)\mid G)=0$ dır.

• $\gamma=ekok(LM(f_5),LM(f_7))=x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}$
$$S(f_5,f_7)=\frac{x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_{32}}}(x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}})-\frac{x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}})$$
$$=-x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}+x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}-x_4^{\alpha_{14}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}}$$
$$=-x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}(x_2^{\alpha_2}-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})$$
$$=-x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}f_2$$
olduğundan $NF(S(f_5,f_7)\mid G)=0$ dır.

• $\gamma=ekok(LM(f_5),LM(f_8))=x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}}$
$$S(f_5,f_8)=\frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}(-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}+x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}})-\frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}+x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}})$$
$$=x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}}-x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}-x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}}+x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}$$
$$=-x_2^{\alpha_2+\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}+x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}$$
$$=x_1^{\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}f_6+x_2^{\alpha_{42}}x_3^{\alpha_3}x_1^{\alpha_{21}}f_2+x_1^{2\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}x_2^{\alpha_{42}}f_3+x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_2}x_4^{\alpha_{24}}f_1$$
olduğundan $NF(S(f_5,f_8)\mid G)=0$ dır.

• $\gamma=ekok(LM(f_5),LM(f_9))=x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}$
$$S(f_5,f_9)=\frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}(-x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}+x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}})-\frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}}{-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}}(-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}+x_1^{3\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}})$$
$$=-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}+x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}+x_3^{\alpha_{43}}x_1^{3\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}$$
$$=-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}+x_3^{\alpha_{43}}x_1^{3\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}}$$
$$=-x_3^{\alpha_{43}}x_1^{\alpha_{21}}f_2(x_2^{\alpha_2}+x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}})$$
olduğundan $NF(S(f_5,f_9)\mid G)=0$ dır.

• $\gamma=ekok(LM(f_6),LM(f_7))=x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}$
$$S(f_6,f_7)=\frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}-x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}})-\frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}$$
$$(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}})$$
$$=-x_2^{\alpha_{32}}x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}+x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}-x_3^{\alpha_{13}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}+x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_3}$$
$$=x_1^{2\alpha_{21}}(x_3^{\alpha_3}-x_1^{\alpha_{31}}x_2^{\alpha_{32}})$$
$$=x_1^{2\alpha_{21}}f_3$$

olduğundan $NF(S(f_6,f_7)\ \mid\ G)=0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_6),LM(f_8)) = x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}S(f_6,f_8) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}} \\ &\quad + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\ &= -x_2^{\alpha_2}x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}} + x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}} \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}(-x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}) \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}f_2\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_6,f_8)\ \mid\ G)=0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_6),LM(f_9)) = x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}S(f_6,f_9) &= \frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}) - \frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}}(-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} \\ &\quad + x_1^{3\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} + x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{3\alpha_{21}}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_{24}} \\ &= x_1^{\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{24}}f_7 - x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}f_1\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_6,f_9)\ \mid\ G)=0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_7),LM(f_8)) = x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}S(f_7,f_8) &= \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}) - \frac{x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}}(-x_2^{2\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}} \\ &\quad + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\ &= x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}} - x_3^{\alpha_{13}}x_2^{2\alpha_2}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}} \\ &= -x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_3}x_2^{\alpha_{42}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}} \\ &= -x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}}f_2 - x_3^{\alpha_{13}}x_1^{\alpha_{21}}x_2^{\alpha_{42}}f_5 + x_2^{\alpha_2}x_1^{\alpha_{21}}f_1\end{aligned}$$

olduğundan $NF(S(f_7,f_8)\ \mid\ G)=0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_7),LM(f_9)) = x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}$

$$\begin{aligned}S(f_7,f_9) &= \frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}(-x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}) - \frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}}{-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}}(-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} \\ &\quad + x_1^{3\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}) \\ &= x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_2^{\alpha_2}x_1^{2\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}} - x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} + x_1^{3\alpha_{21}}x_3^{\alpha_{43}}x_4^{\alpha_{24}}\end{aligned}$$

$$= -x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} (x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}})$$
$$= -x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} f_2$$
olduğundan $NF(S(f_7, f_9) \mid G) = 0$ dır.

• $\gamma = ekok(LM(f_8), LM(f_9)) = x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} x_3^{\alpha_{13}}$

$$S(f_8, f_9) = \frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} x_3^{\alpha_{13}}}{-x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}}(-x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}) - \frac{x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} x_3^{\alpha_{13}}}{-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}}(-x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}$$
$$+ x_1^{3\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}})$$
$$= x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} x_3^{\alpha_{13}} - x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} x_2^{\alpha_{32}} - x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{3\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} x_3^{\alpha_3}$$
$$= -x_1^{3\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} (x_3^{\alpha_3} - x_2^{\alpha_{32}} x_1^{\alpha_{31}})$$
$$= -x_1^{3\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}} f_3$$
olduğundan $NF(S(f_8, f_9) \mid G) = 0$ dır. Böylece,

$G = \{f_1 = x_1^{\alpha_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, f_2 = -x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}} + x_2^{\alpha_2}, f_3 = x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}},$
$f_4 = x_4^{\alpha_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}, f_5 = -x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}} + x_3^{\alpha_{43}} x_1^{\alpha_{21}}, f_6 = x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{\alpha_1+\alpha_{21}},$
$f_7 = x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}} - x_1^{2\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}}, f_8 = -x_2^{2\alpha} x_3^{\alpha_{13}} + x_1^{\alpha_1+2\alpha_{21}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}},$
$f_9 = x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} + x_1^{3\alpha_{21}} x_3^{\alpha_{43}} x_4^{2\alpha_{24}-\alpha_{14}}\}$
$I(C)$ idealinin standart bazıdır. □

4.1.11 Önerme. C eğrisinin $I(C)$ tanımlayan idealinin Durum 1(a)'daki gibi olduğunu varsayalım.

• $\alpha_2 > \alpha_{21} + \alpha_{24}$

• $\alpha_{32} + \alpha_{14} < \alpha_{43} + \alpha_{21}$

• $2\alpha_{24} > \alpha_{14} > \alpha_{24}$

• $\alpha_2 + \alpha_{13} + \alpha_{14} - \alpha_{24} < \alpha_1 + \alpha_{21}$

• $\alpha_2 + \alpha_{32} + \alpha_{14} - \alpha_{24} < 2\alpha_{21} + \alpha_{43}$

• $2\alpha_2 + \alpha_{13} < \alpha_1 + 2\alpha_{21} + 2\alpha_{24} - \alpha_{14}$

• $2\alpha_2 + \alpha_{32} < 3\alpha_{21} + \alpha_{43} + 2\alpha_{24} - \alpha_{14}$

koşulları altında teğet koninin $I(C)_*$ tanımlayan ideali

$$\{x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}, x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}}\}$$

kümesi ile üretilir.

İspat: 4.1.10 Yardımcı Önerme'den $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ kümesi $I(C)$ idealinin ds tekterimli sıralamasına göre standart bazıdır. Bu durumda, [2]'deki Önerme 5.5.11 'den

$$\begin{aligned} I(C)_* &=< f_{1*}, f_{2*}, f_{3*}, f_{4*}, f_{5*}, f_{6*}, f_{7*}, f_{8*}, f_{9*} > \\ &=< x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}-\alpha_{24}}, x_2^{2\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, \\ &\quad x_2^{2\alpha_2+\alpha_{32}} > . \end{aligned}$$

□

4.2 Teğet Koninin Hilbert Serisi

Bu bölümde, 4.1.7 Önermede üreteç kümesi verilen $I(C)_*$ için $R/I(C)_*$ halkasının Hilbert serisinin payını Stillman-Bayer Teoremini kullanarak hesaplayacağız. İlk olarak Stillman-Bayer Teoremini verelim.

4.2.1 Teorem. $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ polinom halkası, $I \subset R$ tekterimli ideali ve bir J tekterimli ideali, x^u tekterimlisi için $I =< J, x^u >$ olsun. $M \subset R$ ideali için $p(M)$, R/M Hilbert serisinin payını göstersin. Bu durumda,

$$p(I) = p(J) - z^{\deg(x^u)} p(J :< x^u >).$$

İspat: Bakınız [29].

4.2.2 Teorem. $I(C)$ idealinin Durum $1(a)$'daki gibi olduğunu varsayalım. $R/I(C)_*$ halkasının indirgenmiş Hilbert serisi

$$H(R/I(C)_*, z) = \frac{h(z)}{1-z}$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{i=0}^{\alpha_3-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_4-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_2+\alpha_{32}-1} z^i - z^{\alpha_{13}+\alpha_{14}} \sum_{i=0}^{\alpha_{43}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_{24}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_2+\alpha_{32}-1} z^i \\ &- z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}} \sum_{i=0}^{\alpha_{13}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_{14}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_2+\alpha_{32}-1} z^i \;\; z^{\alpha_{32}+\alpha_{14}} \sum_{i=0}^{\alpha_{13}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_{24}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} z^i + \\ & z^{\alpha_{32}+\alpha_{21}+\alpha_{24}} \sum_{i=0}^{\alpha_{13}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_{14}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_2} z^i - z^{\alpha_2+\alpha_{13}} \sum_{i=0}^{\alpha_{43}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_{14}-1} z^i \sum_{i=0}^{\alpha_{32}-1} z^i. \end{aligned}$$

İspat: 4.1.7 Önerme'den $I(C)_* = (x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}} x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_{13}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}})$ olduğunu biliyoruz.

$J_0 = I(C)_*$

$J_1 =< x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$

$J_2 =< x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$

$J_3 =< x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}, x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$

$J_4 =< x_3^{\alpha_3}, x_4^{\alpha_4}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$ ve

$q_0 = x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_{13}}$, der$(q_0) = \alpha_2 + \alpha_{13}$

$q_1 = x_2^{\alpha_{32}}x_4^{\alpha_{14}}$, der$(q_1) = \alpha_{32} + \alpha_{14}$

$q_2 = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}}$, der$(q_2) = \alpha_{21} + \alpha_{24}$

$q_3 = x_3^{\alpha_{13}}x_4^{\alpha_{14}}$, der$(q_3) = \alpha_{13} + \alpha_{14}$

olsun. 4.3.1 Teoremden, $0 \leq i \leq 3$ için,

$$p(J_i) = p(J_{i+1}) - z^{\text{deg}(q_i)}p(J_{i+1} :< q_i >)$$

olur. $J_{i+1} :< q_i >$ üreteçlerini oluşturalım.

$J_1 :< q_0 >=< x_3^{\alpha_{43}}, x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_{32}} >$

$J_2 :< q_1 >=< x_3^{\alpha_{13}}, x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}, x_4^{\alpha_{24}}, x_2^{\alpha_2} >$

$J_3 :< q_2 >=< x_3^{\alpha_{13}}, x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$

$J_4 :< q_3 >=< x_3^{\alpha_{43}}, x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2+\alpha_{32}} >$.

$J_2 :< q_1 >$ 4 üreteçli olduğundan aynı işlemi tekrar yapalım.

$q_4' = x_1^{\alpha_{21}}x_4^{\alpha_{24}-\alpha_{14}}$, der$(q_4') = \alpha_{21} + \alpha_{24} - \alpha_{14}$ ve $J_5' =< x_3^{\alpha_{13}}, x_4^{\alpha_{14}}, x_2^{\alpha_2} >$ olsun. Böylece,

$i = 3$ için,

$p(J_3) = p(J_4) - z^{\text{deg}(q_3)}p(J_4 :< q_3 >)$

$= (1 - z^{\alpha_3})(1 - z^{\alpha_4})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}}) - z^{\alpha_{13}+\alpha_{14}}(1 - z^{\alpha_{43}})(1 - z^{\alpha_{24}})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}})$ dir.

$i = 2$ için,

$p(J_2) = p(J_3) - z^{\text{deg}(q_2)}p(J_3 :< q_2 >)$

$= (1 - z^{\alpha_3})(1 - z^{\alpha_4})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}}) - z^{\alpha_{13}+\alpha_{14}}(1 - z^{\alpha_{43}})(1 - z^{\alpha_{24}})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}}) - z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}}(1 - z^{\alpha_{13}})(1 - z^{\alpha_{14}})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}})$ dir.

$i = 1$ için,

$p(J_1) = p(J_2) - z^{\text{deg}(q_1)}p(J_2 :< q_1 >)$

$= (1 - z^{\alpha_3})(1 - z^{\alpha_4})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}}) - z^{\alpha_{13}+\alpha_{14}}(1 - z^{\alpha_{43}})(1 - z^{\alpha_{24}})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}}) - z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}}(1 - z^{\alpha_{13}})(1 - z^{\alpha_{14}})(1 - z^{\alpha_2+\alpha_{32}}) - z^{\alpha_{32}+\alpha_{14}}[(1 - z^{\alpha_{13}})(1 - z^{\alpha_{24}})(1 - z^{\alpha_2}) - z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}-\alpha_{14}}(1 -$

$z^{\alpha_{14}})(1-z^{\alpha_2})]$ dir.

$i=0$ için,

$p(J_0)=p(J_1)-z^{\deg(q_0)}p(J_1:<q_0>)$

$=(1-z^{\alpha_3})(1-z^{\alpha_4})(1-z^{\alpha_2+\alpha_{32}})-z^{\alpha_{13}+\alpha_{14}}(1-z^{\alpha_{43}})(1-z^{\alpha_{24}})(1-z^{\alpha_2+\alpha_{32}})-z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}}(1-z^{\alpha_{13}})(1-z^{\alpha_{14}})(1-z^{\alpha_2+\alpha_{32}})-z^{\alpha_{32}+\alpha_{14}}[(1-z^{\alpha_{13}})(1-z^{\alpha_{24}})(1-z^{\alpha_2})-z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}-\alpha_{14}}(1-z^{\alpha_{14}})(1-z^{\alpha_2})]-z^{\alpha_2+\alpha_{13}}(1-z^{\alpha_{43}})(1-z^{\alpha_{14}})(1-z^{\alpha_{32}})$

$=(1-z)^3\sum_{i=0}^{\alpha_3-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_4-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_2+\alpha_{32}-1}z^i-(1-z)^3z^{\alpha_{13}+\alpha_{14}}\sum_{i=0}^{\alpha_{43}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_{24}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_2+\alpha_{32}-1}z^i-(1-z)^3z^{\alpha_{21}+\alpha_{24}}\sum_{i=0}^{\alpha_{13}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_{14}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_2+\alpha_{32}-1}z^i-(1-z)^3z^{\alpha_{32}+\alpha_{14}}\sum_{i=0}^{\alpha_{13}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_{24}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_2-1}z^i+(1-z)^3z^{\alpha_{32}+\alpha_{21}+\alpha_{24}}\sum_{i=0}^{\alpha_{13}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_{14}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_2}z^i-(1-z)^3z^{\alpha_2+\alpha_{13}}\sum_{i=0}^{\alpha_{43}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_{14}-1}z^i\sum_{i=0}^{\alpha_{32}-1}z^i.$

Böylece, $p(J_0)=(1-z)^3h(z)$ dir. Buradan, $H(R/I(C)_*,z)=\frac{h(z)}{1-z}$ elde edilir. $\square$

5. SONUÇ

Bu tezde, teğet konisi 5 üreteç sayısına sahip ve Cohen-Macaulay olan bir tam kesişim olmayan Gorenstein tekterimli eğrinin, teğet konisinin minimal serbest çözülümünü açık bir şekilde ifade ettik. Bu minimal serbest çözülümden teğet koninin Betti dizilerinin (1,5,6,2) ve (1,5,5,1) olduğunu söyledik. Bu sonucu elde ederken $k[x_1, x_2, \ldots, x_d]/I(C)_*$ halkasını kullandık. Teğet koninin tanımlayan idealinin belli durumlarda önceden bildiğimiz standart bazları ve Buchsbaum-Eisenbud teoremini kullanarak, teğet koninin minimal serbest çözülümünü açıkça elde ettik. Ayrıca mininmal serbest çözülüm yardımıyla Hilbert fonksiyonlarını hesapladık.

Teğet konisi, Cohen-Macaulay olmayan Gorenstein tekterimli eğrilerini de ele aldık. Bu eğri ailelerinin tanımlayan ideallerinin standart bazlarını bazı aritmetik koşullar altında belirledik. Ayrıca, yine bu eğri ailelerinin teğet konisinin indirgenmiş Hilbert serilerini verdik.

6. KAYNAKLAR

[1] D. Hilbert, "Über die Theorie der algebraichen Formen", *Mathematische Annalen*, 36, 473-534, 1890.

[2] G. M. Greuel and G. Pfister, *A Singular Introduction to Commutative Algebra*, Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[3] J. Herzog, "Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings", *Manuscripta Math*, 3, 175-193, 1970.

[4] H. Bresinsky, "On prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47, no.2, 329-322, 1975.

[5] E. Kunz, "The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 748-751, 1970.

[6] D. A. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer, 2005.

[7] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, "What Makes a Complex Exact?", *Journal of Algebra*, 25, 259-268, 1973.

[8] S. Balcerzyk and T. Josefiak, *Commutative rings, Dimensions, Multiplicity and Homological Methods*, Ellis Horwood Limited, PWN-Polish Scientific Publishers, 1989.

[9] S. F. Arslan, "Cohen-Macaulayness of tangent cones", *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 128, 8, 2243-2251, 2000.

[10] D. Taylor, "Ideals generated by monomials in an R-sequence", Ph. D. dissertation, Chiago University, USA, 1966.

[11] D. Bayer and B. Sturmfels, "Cellular resolutions of monomial modules", *J. Reine Angew. Math.*, 502:123-140, 1998.

[12] S. Eliahou and M. Kervaire, "Minimal resolution of some monomial ideal", *J. Algebra*, 129(1):163-194, 1990.

[13] G. Lyubeznik, "A new explicit finite free resolution of ideals generated by monomials in an R-sequence", *J. Pure Appl. Alg.*, 51:193-195, 1998.

[14] H. Bresinsky, “Symmetric semigroups of integers generated by 4 elements”, *manuscripta math.*, 17, 205-219, Springer-Verlag, 1975.

[15] I. Peeva and B. Sturmfels, “Syzygies of codimension 2 lattice ideals”, *Math. Zeitschrift*, 229: 163-194, 1998.

[16] P. Gimenez, I. Sengupta and H. Srinivasan, “Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences”, *Journal of Algebra*, 388, 294-310, 2013.

[17] A. Oneto and G. Tamone, “Explicit minimal resolution for certain monomial curves”, arXiv:1312.0789v1 [math.AC] 3 Dec 2013.

[18] S. Molinelli, D. P. Patil and G. Tamone, “On the Cohen-Macaulayness of the Associated Graded Ring of Certain Monomial Curves”, *Beitrage zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry*, Volume 39, No 2, 433-446, 1998.

[19] V. Barucci, R. Fröberg and M. Şahin, “On free resolutions of some semigroup rings”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 218(6), 1107-1116, 2014.

[20] I. Sengupta, “A minimal free resolution for certain monomial curves in A^4”, *Communications in Algebra*, 31(6), 2791-2809, 2003.

[21] N. H. McCoy, “ Remarks on divisors of zero”, *Amer. Math. Monthly*, 49, 286-295, 1942.

[22] M. E. Rossi, “Hilbert functions of Cohen-Macaulay local rings” *Commutative Algebra and its connections to Geometry, Contemporary Mathematics AMS*, 555, 173-200, 2011.

[23] S. F. Arslan and P. Mete, “Hilbert functions of Gorenstein monomial curves”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135 : 1993-2002, 2007.

[24] D. Stamate, “Betti numbers for numerical semigroup rings”, *Multigraded Algebra and Applications Springer Proceedings and Statistics*, 238, 133-157, 2018.

[25] S. F. Arslan, A. Katsabekis, and M. Nalbandiyan, “On the Cohen-Macaulayness of tangent cones of monomial curves in $A4(K)$”, *Turkish Journal of Mathematics*, 43: 1425-1446, 2019.

[26] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, 1992.

[27] S. F. Arslan, "Monomial curves and the Cohen-Macaulayness of their tangent cones", Ph.D. dissertation, Bilkent, Ankara, 1999.

[28] P. Mete, "Hilbert functions of Gorenstein monomial curves", Ph.D. dissertation, METU, Ankara, 2005.

[29] D. Bayer and M. Stillman, "Computations of Hilbert functions", *Journal of Symbolic Computation*, 14: 31-50, 1992.

[30] L. Sharifan and N. Z. Nahandi, "Minimal free resolution of the associated graded ring of monomial curves of generalized arithmetic sequences", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 21, 360-369, 2009.

[31] M. E. Rossi and L. Sharifan, "Minimal free resolution of a finitely generated module over a regular local ring", *Journal of Algebra*, 322, 3693-3712, 2009.

[32] P. Mete and E. E. Zengin, "Minimal free resolutions of the tangent cones for Gorenstein monomial curves", *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 6, pp. 2782-2793, Nov. 2019.

[33] E. E. Zengin, "Sonlu Serbest Çözülümlerin Cebirsel Yapıları", Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniv., Balıkesir, 2015.

[34] D. Eisenbud, *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Yayın Listesi

[1] P. Mete and E. E. Zengin "Minimal free resolutions of the tangent cones for Gorenstein monomial curves" *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 6, pp. 2782–2793, Nov. 2019. **[Tezden türetilmiştir.]**

[2] P. Mete and E. E. Zengin "On minimal free resolution of the associated graded rings of certain monomial curves New proofs in A^4," *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, vol. 68, no. 1, pp. 1019–1029, Apr. 2018.