T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜSTEL FONKSİYON AÇILIM METODUNUN BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE UYGULAMALARI

EMİN ÜMİT KOBAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Fırat EVİRGEN (Tez Danışmanı)**

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR

Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

BALIKESİR, TEMMUZ - 2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Üstel Fonksiyon Açılım Metodunun Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler Üzerine Uygulamaları**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

EMİN ÜMİT KOBAK

(imza)

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından (BAP 2018/14) nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

ÜSTEL FONKSİYON AÇILIM METODUNUN BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE UYGULAMALARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
EMİN ÜMİT KOBAK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FIRAT EVİRGEN)
BALIKESİR, TEMMUZ - 2021

Bu tezde matematik ve çeşitli bilim alanlarında karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü üstel fonksiyon açılım metodu ile modellenmiş ve analitik hesaplamalar yapılmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde insan yaşamına yön veren kısmi diferansiyel denklemlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde diferansiyel denklemin tanım ve özellikleri açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde dalga denklemleri yapısı ve çeşitleri ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde kısmi diferansiyel denklem modellemelerinin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan üstel fonksiyon açılım metodunun literatür özetine ve analizine yer verilmiştir.

Beşinci bölümde üstel fonksiyon açılım metodu çeşitli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ve sonuçlarının 2 ve 3 boyutlu grafikler ile yorumlanmıştır.

Altıncı bölümde tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Üstel fonksiyon açılım metodu, kısmi diferansiyel denklemler, yürüyen dalga çözümleri.

Bilim Kod / Kodları : 20406 Sayfa Sayısı : 34

ABSTRACT

APPLICATIONS OF THE EXPONENTIAL FUNCTION EXPANSION METHOD TO SOME NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
MSC THESIS
EMİN ÜMİT KOBAK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC.PROF. DR. FIRAT EVİRGEN)
BALIKESİR, JULY - 2021

In this thesis, the solutions of partial differential equations encountered in the fields of mathematics and science are modeled by exponential function expansion method and analytical calculations are made.

This thesis consists of six chapters.

In the first part, partial differential equations that direct human life are given.

In the second part, the definition and properties of the differential equation are explained.

In the third part, the structure and types of wave equations are expressed.

In the fourth part, the literature summary and analysis of the exponential function expansion method used in obtaining partial differential equation models are given.

In the fifth part, the exponential expansion method is implemented various partial differential equations and the results are interpreted with 2D and 3D graphics.

In the sixth part, the results obtained in the thesis are summarized.

KEYWORDS: Exponential function expansion method, partial differential equations, traveling wave solutions.

Science Code / Codes : 20406 Page Number : 34

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar
N	: Doğal Sayılar
$u(x,t)$	: İki Değişkenli Dalga Denklemi
u_x	: u fonksiyonun x ’e bağlı birinci kısmi türevi
u_{xx}	: u fonksiyonun x ‘e bağlı ikinci kısmi türevi
c	: Dalga Hızı
Exp	: Üstel
KdV	: Korteweg de Vries
mKdV	: Modified Korteweg de Vries
∇	: Laplace operatörü
∂	: Kısmi türev

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamda bana yol gösteren, hiçbir zaman desteğini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Fırat EVİRGEN' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca herzaman yanımda olan aileme, eşim Fatma SERİN KOBAK ve oğlum Çınar KOBAK'a destek ve anlayışlarından dolayı teşekkür ederim.

Balıkesir, 2021 **Emin Ümit KOBAK**

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler, matematik, fizik, biyoloji gibi temel bilimler ile mühendislik bilimlerinin birçok alanında kullanılan önemli kavramlardan bir tanesidir. Kısmi diferansiyel denklemler teorisinin ilk oluşması ve gelişmesi fizik biliminde yer alan bazı proseslerin matematik dili ile daha anlaşılabilir hale getirilmeye çalışılmasıyla başlamıştır. Sonrasında araştırmacılar kısmi diferansiyel denklemler yardımı ile insan yaşamını etkileyen ve değişime uğratan birçok olayı modelleyebilmiştir. Karmaşık gibi gözüken problemler diferansiyel denklemler ile oluşturulan matematiksel modeller sayesinde sadeleştirilerek daha anlaşılır hale getirilip olayların kaynağına inilerek kavramlar arasındaki sebep sonuç ilişkileri oluşturulmuştur.

İnsan yaşamına yön veren bazı önemli kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,\ \psi = \psi\left(x, y, z\right),$$

∇^2 Laplace operatörü olmak üzere 3 boyutlu Laplace denklemi elektrostatik, yer çekimi ve akışkanlar dinamiği gibi birçok zamandan bağımsız problemin modellemesinde kullanılmaktadır.

Benzer şekilde Poisson denklemi;

$$\nabla^2\psi = f\left(x, y, z\right),$$

formunda Laplace denkleminin homojen olmayan halidir ve çözümleri belirli bir elektrik yükü veya kütle yoğunluğu dağılımının neden olduğu potansiyel alanları vermektedir.

Newton'un klasik mekanikteki ikinci yasasının kuantum mekaniğindeki karşılığı olarak bilinen Schrödinger's denklemi;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\left(x, y, z\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

formunda tanımlanmaktadır.

Matematiksel finansta önemli bir yere sahip olan Black-Scholes denklemi;

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2+\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0\,,$$

opsiyon fiyatlarının belirlenmesinde kullanılmaktadır.

İkinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel formunda olan dalga denklemi de

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\nabla^2\psi=0\,,$$

su dalgaları, sismik dalgalar ve ses dalgaları gibi mekanik dalgalar ile ışık dalgalarının modellemesinde kullanılmaktadır.

Bununla beraber sığ su yüzeylerindeki dalgaların matematiksel modeli;

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial^3\phi}{dx^3}-6\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=0\,,$$

literatürde Korteweg–De Vries (KdV) denklemi olarak bilinen denklem ile gösterilmektedir[1].

Kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak yapılan çalışmaların bir kısmı ele alınan problemin verilecek başlangıç ve sınır değerler altında çözümlerinin varlığı ve tekliği gibi teorik çalışmalar olmakla birlikte, bu tipteki denklemlerin analitik veya nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılacak yöntemlerin araştırılması ve geliştirilmesi de önemli bir araştırma konusu olarak yer almaktadır.

Literatürde yer alan ve hala aktif olarak kullanılan bazı metotları şöyle sıralayabiliriz; Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM) [2-3], Sumudu Dönüşüm Metodu (SDM) [4], Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) [5], Homotopi Ayrışım Metodu [6], Backlund dönüşüm metodu [7,8], G’/G, 1/G açılım metodu [9], Hirota`nın bilinear dönüşüm metodu

[10], üstel fonksiyon açılım metodu [11-30], deneme (trial) denklem metodu [31], tanh metodu [32,33] gibi metotlar farklı araştırmacılar tarafından formüle edilmiştir.

Bu tez kapsamında bazı kısmi diferansiyel denklemlerin $\exp(-\Omega(\xi))$ açılım metodu veya literatürde üstel fonksiyon açılım metodu [11-30] olarak bilinen yöntem yardımı ile çözümleri incelenmiştir. Bu amaçla ilk olarak 2. Bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar verildikten sonra 3. Bölümde, dalga teorisinin genel tanım ve çesitleri incelenmiş ve daha sonra 4. Bölümde, $\exp(-\Omega(\xi))$ açılım metodunun teorik alt yapısı oluşturulmuştur. Son olarak 5. Bölümde, bilgisayar ortamında kodları yazılan $\exp(-\Omega(\xi))$ açılım metodunun çeşitli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ve sonuçların 2 ve 3 boyutlu grafikler ile yorumlanması verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 Adi Türevli Diferansiyel Denklemler

2.1.1 Tanım [34] $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ kümesini F ile gösterelim. F^m üzerindeki Euclid normu olmak üzere

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \ x \ (F^m)^{n+1} \to F^m \quad ,m \geq 1 \ \ ,n \geq 1 \ \ (m,n \in \mathbb{N}),$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$f(x, \ y(x), \ y'(x), \ y''(x), \ y'''(x),..., y^n(x)) = 0 ,$$

denklemine adi (bayağı veya basit) diferansiyel denklem denir.

Buna göre adi diferansiyel denklem bir bağımlı değişken, bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevini içeren bir denklemdir.

Aşağıdaki diferansiyel denklemler birer adi diferansiyel denklemlerdir.

$$y''' + 5y'' + 2y' + y = e^x, \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \cdot \tag{2.2}$$

2.2 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda kısmi diferansiyel denklemler için bazı tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

2.2.1 Tanım [34] $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ olsun.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_k + h, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h},$$

limiti mevcutsa bu limite f fonksiyonun x_k değişkenine göre $(a_1, a_2, ..., a_n)$ noktasındaki kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial x_k} \text{ veya } f_{x_k}(a_1, a_2, ..., a_n)$$

şeklinde gösterilir.

2.2.2 Tanım [34] Birden çok bağımsız değişken ile en az bir bağımlı değişkeni ve bu bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini barındıran denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

2.2.3 Tanım [34] $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümesini F ile gösterelim. F^m üzerindeki norm Euclid normu olmak üzere

$$f:\Omega \subseteq (F^m)^{N^k} \times (F^m)^{N^{k-1}} \times ... \times (F^m)^N \times F^m \times \mathbb{R}^n \to F^m \quad m \geq 1,\ n \geq 2,\ (m, n \in \mathbb{N}),$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$f(D^k u(x),\ D^{k-1}u(x), ..., Du(x),\ u(x),\ x) = 0$$

denklemi m tane bağımlı değişken ve n tane bağımsız değişken içeren k -ncı mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu

$$u: K \subseteq \mathbb{R}^n \to F^m, \quad u(x) = (u_1(x),\ u_2(x), ..., u_m(x)),$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve k pozitif bir tamsayıdır.

Örneğin; $f:\Omega \subseteq F^{\mathbb{N}^2} \times F^{\mathbb{N}} \times F \times \mathbb{R}^2 \to F$ fonksiyonu yardımıyla bir bağımlı değişken ve iki bağımsız içeren kısmi türevli denklem genel olarak

$$f(D^2u(x),\ Du(x),\ u(x),\ x,\ y)=0$$

veya

$$f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy})=0,$$

şeklinde gösterilir.

u ve v bağımlı değişken ve x ile y bağımsız değişken olmak üzere

$$v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}=x+y,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=x-y,$$

sistemi iki bağımlı değişkenin iki bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren bir kismi türevli denklem örneğidir.

2.2.4 Tanım [35] Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin barındırdığı en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına kısmi diferansiyel denklemin mertebesi denir.

2.2.5 Tanım [35]. Verilen kısmi türevli diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi türevli diferansiyel denklemin özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli diferansiyel denklemin basamağı kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü denir.

2.2.6 Tanım [35] Verilen kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenleri içeren bir fonksiyon oluyorsa bu denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir. Aksi halde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

En genel formda bir bağımlı değişkene ve iki bağımsız değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = D(x,y)\,, \tag{2.3}$$

$$K(x,y)z_{xx} + L(x,y)z_{xy} + M(x,y)z_{yy} + N(x,y)z_x + P(x,y)z_y + R(x,y)z = 0\,, \tag{2.4}$$

(2.3) ve (2.4) denklemlerinde x, y bağımsız; z bağımlı değişkendir.

2.2.7 Tanım [35] Verilen bir kısmi türevli diferansiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem yarı-lineer (kuasi-lineer) kısmi diferansiyel denklem adı verilir.

En genel formda bir bağımlı ve iki bağımsız değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı- lineer kısmi diferansiyel denklemler sırasıyla aşağıdaki gösterilebilir:

$$A(x,y)z_x + B(x,y,z)z_y = C(x,y,z)\,, \tag{2.5}$$

$$K(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx} + L(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy} + M(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy} + N(x,y,z,z_x,z_y) = 0\,. \tag{2.6}$$

Bağımsız değişkenlerin ikiden fazla olması halinde (2.5) ve (2.6)'ya benzer şekilde yarı-lineer denklemler yazabiliriz.

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında her lineer kısmi diferansiyel denklem aynı zamanda yarı-lineer özelliğine sahiptir. Fakat yarı lineer bir kısmi diferansiyel denklem lineer olmayabilir.

2.2.8 Tanım [35] Verilen bir kısmi türevli diferansiyel denklem yarı-lineer özelliklerine sahip ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenleri barındıran fonksiyonlardan oluşuyor ise bu denkleme hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklem denir.

En genel formda bir bağımlı ve iki bağımsız değişken içeren ikinci mertebeden hemen hemen lineer bir kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki formda tanımlanabilir:

$$P(x,y)z_{xx} + Q(x,y)z_{xy} + R(x,y)z_{yy} + S(x,y,z,z_x,z_y) = 0\,. \tag{2.7}$$

3. DALGALAR TEORİSİ

Dalga kavramına ait en genel tanım dalgaların ileri ve geri ya da aşağı ve yukarı hareketleridir. Bir diğer tanım ise enerjinin yer değiştirmesidir. Titreşimler tekrarlı olabileceği gibi tekrarlı olmayabilirler de. Bir dalganın salınımının şiddetine genlik, salınımının tekrarına frekans, dalganın ardışık iki tepe ya da çukur noktası arasındaki uzaklığına da dalga boyu denir. Ses dalgaları, ışık dalgaları, su dalgaları, manyetik dalgalar gibi birçok çeşidi vardır. Dalga denkleminde $u(x,t)$ dalganın genliğini ve c 'de dalganın hızını göstermek üzere şekildeki gibidir:

$$u_{xx} = c^2 u_{tt}$$

f ve g keyfi fonksiyonlar olmak üzere D'Alembert çözümü olarak da bilinen çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct),$$

Bu farklı f ve g dalgaları görünümlerini değiştirmeksizin yayılım gösterirler. Bu fonksiyonlar genellikle problemde verilen $u(x,0)$ ve $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri kullanılarak çözülür. Dalga denklemi lineer olduğu için süper pozisyon prensibine göre bu iki çözüm toplanabilir. $g=0$ olarak alırsak bu durumda $u_t + u_x = 0$ denkleminin $c=1$ hızına sahip çözümü olan $u(x,t) = f(x-t)$ denkleminde olduğu gibi dalga sadece sağa doğru yayılır. Yürüyen dalga (travelling wave), dalganın yayılımı yönünde hareket eden dalgadır. Yürüyen dalga, dalganın $u(x,t) = f(x-t)$ olarak ifade edildiği ve yönünün c'nin pozitif ve negatif değerlerine göre belirlendiği lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalarda yer alır. Eğer çözüm kısmi türevli denklemin sadece iki koordinatı farkına bağlı ise çözüm şeklini tam olarak korur ve bu sebeple soliter dalga olarak isimlendirilir. Soliter bir dalga, $\xi = -\infty$ 'daki asimtotik durumdan $\xi = \infty$'daki duruma yürüyen dalganın geçişini $\xi = x - ct$ ve c dalganın hızı olmak üzere ξ 'de sınırlandıran yürüyen bir dalgadır.

Dalgalar, görünümlerine ve hareketlerine göre aşağıdaki gibi çeşitleri mevcuttur [36].

- Soliter dalgalar ve solitonlar,
- Periyodik dalgalar,
- Kink dalgalar,
- Peakon dalgalar,
- Cuspon dalgalar,
- Kompakton dalgalar.

3.1 Soliter Dalgalar ve Solitonlar

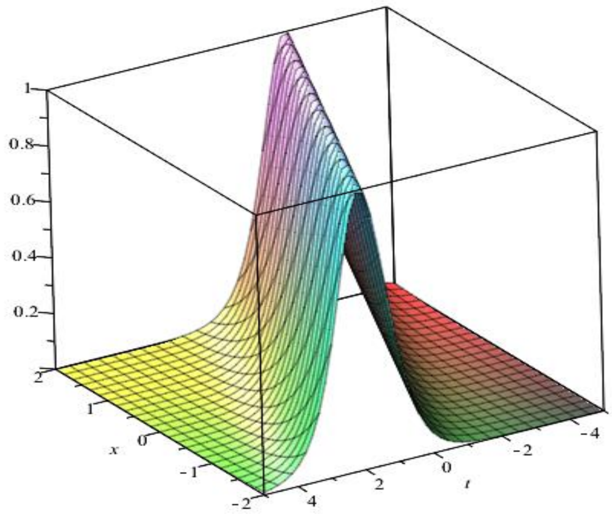
Soliter dalgalar ilk kez 1834 yılında John Scott Russel tarafından Edinburg-Glasgov kanalı boyunca şekil değiştirmeksizin yavaşça hareket eden su dalgalarının gözlemlenmesiyle ortaya çıkmıştır. Russel daha sonra gözlemlediği bu olayı tekrar elde edebilmek için 1844 yılında bir su tankı inşa ederek yaptığı deneyler sonucunda soliter dalgaların hareketleri için a maksimum genlik, h sonlu su derinliği, g yerçekimi ivmesi ve c dalga hızı olmak üzere $c^2 = g\left(h+a\right)$ eşitliği ile göstermiştir. Sonrasında bu gözlemler ve çalışmalar birçok araştırmacıya ilham vermiştir.

1895 yılında, iki Hollandalı Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries, lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem ile soliter dalga varlığında sığ su yüzeyinin yüksekliğini modellemişlerdir. Literatürde bu denklem KdV denklemi olarak adlandırılmıştır [37].

1965 yılında Norman J. Zabusky ve Martin D. Kruskal bu alanda nümerik çalışmalar yaparak soliter dalgaların etkileşimlerini incelediler. Bu etkileşimden dalgaların şeklini ve genliğini koruyarak çıktığını gördüler ve bu dalgalara soliton adını verdiler. Soliter dalgaların özel bir hali olan solitonların genel bir tanımı olmamakla birlikte lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki özellikleri sergiler ise soliton olarak tanımlanabilir:

- Çözüm kalıcı formda bir dalga oluşturmalıdır,
- Çözüm sonsuzda ya üstel olarak zayıflayarak sıfıra gitmeli ya da bir sabite yaklaşmalıdır,
- Dalgalar diğer dalgalar ile etkileşiminde karakterlerini korumalıdır [38].

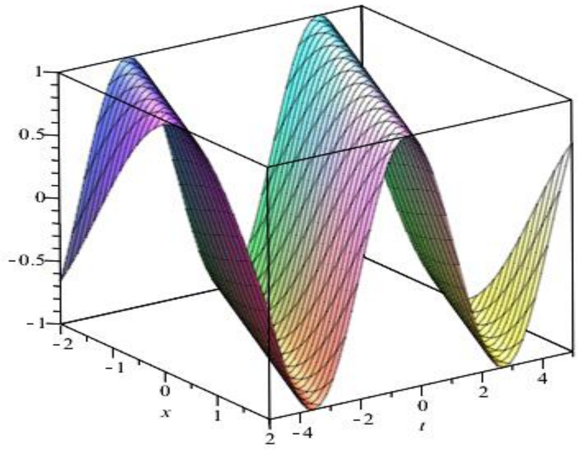
Yukarıdaki tanım dikkate alındığında solitonlar yürüyen dalgaların özel bir halidir. Soliton dalgalara örnek olarak KdV denklemi örnek verilebilir. Bu tipteki denklemlerin $\phi(x,t) = \operatorname{sech}^2(x,t)$ formunda soliton çözümleri mevcuttur.



Şekil 3.1: $\phi(x,t) = \operatorname{sech}^2(x,t)$ fonksiyonunun $-2 \le x \le 2,\ -5 \le t \le 5$ için grafiği.

3.2 Periyodik Dalgalar

Periyodik dalgalar, bir boyutlu uzayda sabit hızla hareket eden periyodik fonksiyonlardır. $\frac{\partial^2 \phi}{dt^2} - v^2 \frac{\partial^2 \phi}{dx^2} = 0$ formundaki klasik bir boyutlu dalga denklemi $\phi(x,t) = A\cos(kx \pm wt)$ veya $\phi(x,t) = A\sin(kx \pm wt)$ periyodik dalga çözümleri üretirler. Burada w açısal frekans, k dalga sayısını göstermektedir [35].

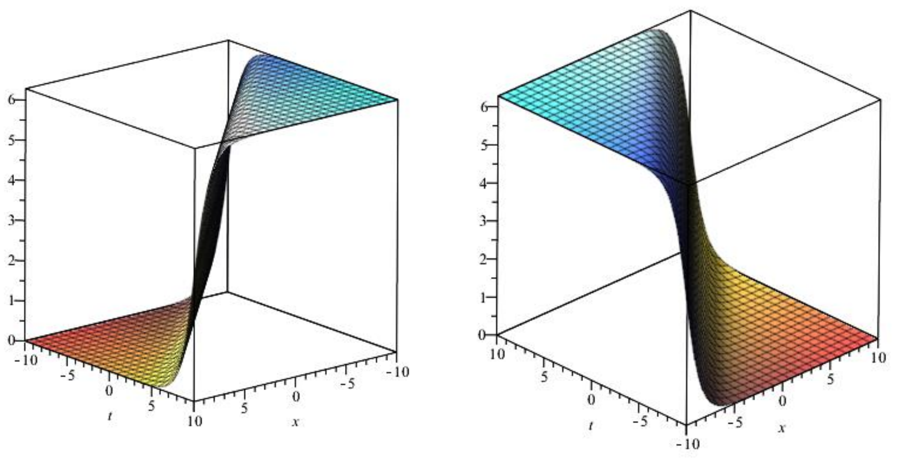


Şekil 3.2: $\phi(x,t) = A\sin(kx \pm wt)$ fonksiyonunun $k=1,\ w=-1$ ve $-2 \le x \le 2,\ -5 \le t \le 5$ için grafiği.

,

3.3 Kink ve Antikink Dalgalar

Bir asimptotik durumdan diğerine geçerken azalan veya artan hareketli dalga türlerine denir. Kink ve antikink çözümleri sonsuzda bir sabite yakınsarlar [37]. $\phi_{tt} - \phi_{xx} + m^2 \sin(\phi)$ formunda tanımlanan Sine-Gordan denkleminin $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-v^2}$ olmak üzere $\phi(x,t) = 4\arctan(e^{m\gamma(x-vt)+\delta})$ çözümü γ nın pozitif kökleri için kink, negatif kökleri için antikink çözümlerini üretir.

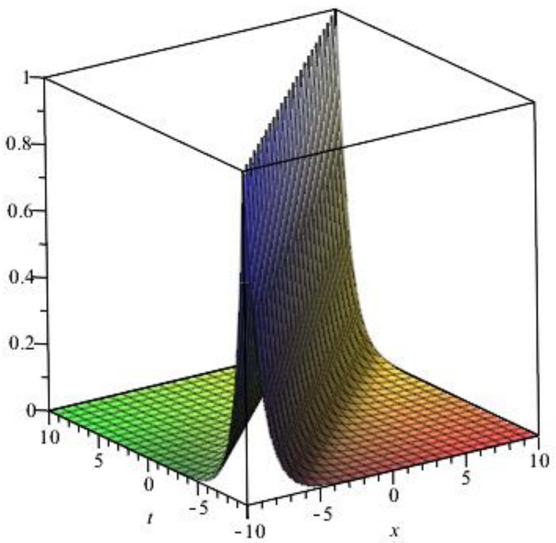


(a) (b)

Şekil 3.3: Sine-Gordon denkleminin sırasıyla $\phi(x,t) = 4\arctan(e^{(x-t)})$ $\phi(x,t) = 4\arctan(e^{(t-x)})$ çözümlerinin $-10 \le t, x \le 10$ için grafikleri.

3.4 Peakon Dalgalar

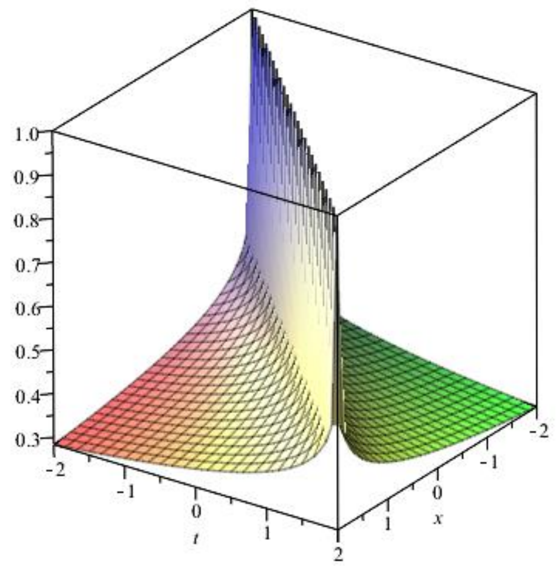
Birinci türevi süreksiz olan dalgalara Peakon dalgaları ya da solitonları adı verilir. Dalganın yapısı $e^{-|x|}$ fonksiyonunun grafiğine benzemektedir. Tepe noktası dışında pürüzsüzdürler. Bu noktalarda konuma göre türevi işaret değiştirir ve birinci türevde sonlu bir zıplamaya neden olur. Peakon dalgalarıda solitonlar gibi etkileşimlerde şekillerini ve hızlarını korurlar [37]. Camassa–Holm sığ su dalga denklemi, Degasperis–Procesi denklemi ve Fornberg–Whitham denkleminin çözümlerinde görülür. Örneğin $b=2$ için $\phi_t - \phi_{xxt} + (b+1)\phi\phi_x = b\phi_x\phi_{xx} + \phi_{xxx}$ formunda verilen Camassa-Holm denkleminin $\phi(x,t) = ce^{-|x-vt|}$, c genlik ve v dalga hızı olmak üzere peakon çözümlerine sahiptir.



Şekil 3.4: Camassa-Holm denkleminin $\phi(x,t) = e^{-|x-t|}$ çözümünün $-10 \le t, x \le 10$ için grafiği.

3.5 Cuspon Dalgalar

Solitonların farklı bir formu olan cusponlar tepelerinde zirveler (cusp) mevcuttur. Peakon dalgalarından farklı olarak, zirvedeki türevler sadece işaret olarak farklıdır ve bu noktalarda türev ıraksaktır. Camassa Holm denkleminin bazı özel durumları cuspon çözümlerini vermektedir. Aşağıda grafikte bir cuspon çözümünün genel şekli ve karaterizasyonu incelenebilir [37].



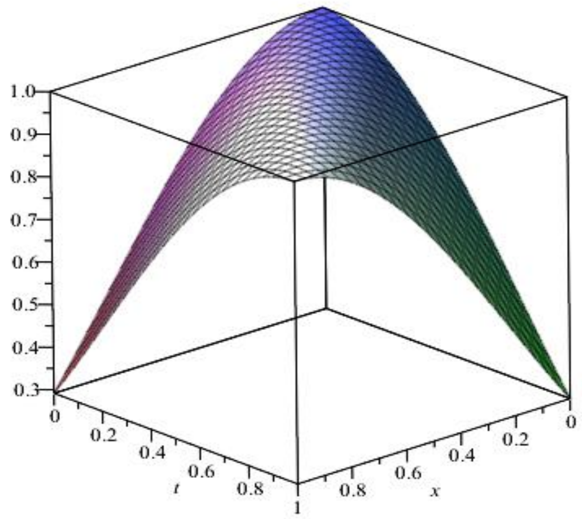
Şekil 3.5: $\phi(x,t)=e^{-|x-t|^{1/6}}$ cuspon çözümünün $-2\le t,x\le 2$ için grafiği.

3.6 Kompakton Dalgalar

Kompaktonlar ilk olarak 1993 yılında Rosenau ve Hyman [39] tarafından karakterize edilmiştir. Kompaktonlar, karakteristik soliton özelliklerini taşıyan ve kompakt destekli dalgalardır. Burada, X topolojik uzayında kompakt destekli fonksiyonlar, kapalı desteği X 'in kompakt bir alt kümesi olan fonksiyonlardır. Kompaktonları, solitonlardan ayıran en önemli özellik üstel kuyruklarının veya kanatlarının sonsuzda sıfıra yaklaşmamasıdır. KdV denkleminin $m,n>1$ için genelleştirilmiş versiyonu $K(m,n)$, $\phi_t+(\phi^m)_x+(\phi^n)_{xxx}=0$'ın kompakton dalga çözümleri mevcuttur. Örneğin $K(2,2)$ için

$$\phi(x,t)=\begin{cases}\dfrac{4v}{3}\cos^2\left(\dfrac{x-vt}{4}\right), & |x-vt|<2\pi\\ 0, & |x-vt|\ge 2\pi\end{cases},$$

bir kompakton çözümdür.



Şekil 3.6: $\phi(x,t)=\cos^2(x-t)$ çözümünün $0 \le t, x \le 1$ için grafiği.

4. ÜSTEL FONKSİYON AÇILIM METODU

Üstel fonksiyon açılım metodu literatürdeki diğer ismiyle $\exp(-\Omega(\xi))$ açılım metodu olarak He ve Wu [11] tarafından 2006 yılında literatüre kazandırılmıştır. Yazarlar bu çalışmalarında doğrusal olmayan dalga denklemlerinin çözümlerini rasyonel formda üstel fonksiyonların bir açılımı şeklinde karakterize etmişlerdir.

2008 yılında Zhao ve Li [12], çalışmalarında He ve Wu [11]'nun üstel açılım metodunu rasyonel olmayan formda uygulamışlardır.

Khan ve Akbar [13], 2013 yılında üstel fonksiyon açılım metodunu modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemine uygulamışlar ve hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel tam çözümlerini elde etmişlerdir.

Islam ve arkadaşları [14], yine 2013 yılında Benjamin-Ono denkleminin yürüyen dalga çözümlerini üstel fonksiyon açılım metodu ile incelenmiştir.

2014 yılında Uddin ve arkadaşları [15], (3+1) boyutlu Zakharov-Kuznetsov denklemi ile Burger denkleminin farklı yürüyen dalga çözümlerini göstermişlerdir.

Roshid ve Rahman [16], 2014 yılındaki çalışmalarında, (1+1) boyutlu klasik Boussinesq denkleminin periyodik ve soliton çözümlerini irdelemişlerdir.

Hafez, Alam ve Akbar [17], üstel fonksiyon açılım metodunu manyetize edilmemiş tozlu bir plazma modelinin yeni soliter çözümlerini göstermişlerdir.

Abdelrahman ve arkadaşları [18], güç yasasına bağlı lineer olmayan terim içeren Burgers denklemi ile Kerr yasasına bağlı lineer olmayan terim içeren ötelenmiş lineer olmayan Schrodinger denkleminin üstel fonksiyon açılım metodu altındaki çözümlerini incelenmiştir. Aynı ekip 2015 yılındaki çalışmalarında [19], yaşamın temel yapı taşı olan DNA'nın çift zincir modelinin yeni analitik çözümleri üstel fonksiyon açılım metofu ile araştırılmıştır.

Roshid ve arkadaşları [20] 2014 yılında, Vakhnenko-Parkes denkleminin soliter dalga çözümlerini araştırmışlardır.

Alam ve diğerleri [21], matematiksel fizikte önemli bir yer tutan (2+1) boyutlu Boussinesq denkleminin üstel, hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel yeni analitik çözümlerini literatüre kazandırmışlardır.

Başkonuş ve Bulut [22] 2015 yılında, sismik deniz dalgalarının matematiksel modeli olarak bilinen modifiye edilmiş Benjamin Bona Mahony denkleminin yürüyen dalga çözümlerini irdelemişlerdir.

Mikro yapılı katılarda gerinim dalga denklemlerinin soliton çözümleri Hafez ve Akbar [23] tarafından incelenmiştir.

Üstel fonksiyon açılım metodunun farklı bir genişlemesi KdV ile birleştirilmiş genelleştirilmiş Hirota-Satsuma denklem sistemine 2015 yılında Khater [24] tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Son yıllarda ise, Ekici ve arkadaşları [25], Kerr yasasına bağlı lineer olmayan terim içeren çift kırılımlı optik liflerin matematiksel modelinin tekil soliton çözümlerini araştırmışlardır.

2018 yılında Biswas ve arkadaşları [26], Kerr yasasına bağlı lineer olmayan terim içeren Lakshmanan–Porsezian–Daniel denkleminin karanlık ve tekil optik soliton çözümlerini Jacobi eliptik fonksiyon metodu ve üstel fonksiyon metodu altında irdelenmişlerdir.

Yine 2019 yılında Biswas ve arkadaşları [27], anti-kübik doğrusalsızlığa sahip çift kırılımlı optik liflerin soliton çözümlerinin varlığı için kriterler tanımlamışlardır.

Chen, Xin ve Liu [28], 2019 yılında yeni bir yardımcı adi diferansiyel denklem oluşturarak üstel açılım metodunun iyileştirilmiş versiyonunu oluşturmuşlardır.

Alharbi ve Almatrafi [29], 2020 yılındaki çalışmalarında ise varyant Boussinesq sistemine Chen ve arkadaşlarının [28] yöntemini kullanarak tam ve nümerik çözümlerini ortaya atmışlardır.

Son olarak 2021 yılında Mohammed ve arkadaşları [30], Stratonovich duyarlılığında çarpımsal gürültü içeren stokhastik Burger denkleminin yeni trigonometrik ve hiperbolik stokhastik çözümlerini bulmuşlardır.

4.1 Üstel Fonksiyon Açılım Metodunun Analizi

Bu metodun çözüm basamaklarını açıklayabilmek için aşağıdaki gibi tanımlanan en genel formda bir lineer olmayan diferansiyel denklem alınır;

$$P(u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{tx}, \dots). \tag{4.1}$$

Verilen denklem için $u=(x,y,t)$ bilinmeyen fonksiyondur. P polinomu $u=(x,y,t)$ 'ye bağlı adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile lineer olmayan terimler içermektedir.

Adım 1: Değişken ξ dikkate alarak gerçek değişken olarak x, y ve t alınır.

$$u(x,y,t)=u(\xi), \quad \xi = x+y-ct, \tag{4.2}$$

$$\frac{du}{dx} = u'(\xi), \; \frac{du}{dy} = u'(\xi), \; \frac{du}{dt} = -cu'(\xi), \tag{4.3}$$

c hareket eden dalganın hızıdır. Bu hareketli dalga denklemini denklem (4.1)'de düzenlersek, bize lineer olmayan diferansiyel denklemini verir;

$$N(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \tag{4.4}$$

burada $u=u(\xi)$ ve N, u 'nun polinomlarıdır ve u 'nun türevleri ve indisleri , ξ 'ye göre adi türevlerini göstermektedir.

Adım 2: (4.4)' ün hareketli dalga çözümlerinin aşağıdaki formda olduğu kabul edilir:

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{N} A_i[\exp(-\Omega(\xi))]^i. \tag{4.5}$$

Burada $A_i,\ A_N \neq 0,\ (0 \leq i \leq N)$ birer katsayıdır. Pozitif tamsayı $N,$ denklem (4.4) 'te denge prensibi yapılarak belirlenebilir. $u=u(\xi)$ aşağıda verilen diferansiyel denklemi sağlamaktadır:

$$\Omega' = exp(-\Omega)+\mu \exp(\Omega)+\lambda. \tag{4.6}$$

Denge prensibi dikkate alındığında N katsayısı en yüksek derecedeki türev ile en yüksek dereceye sahip lineer olmayan terimler eşitlenerek aşağıdaki gibi bulunmaktadır.
Örneğin;

$$U'' \approx U^2$$
$$u \approx e^{(N-M)(-\Omega)},$$
$$u' \approx ...e^{(N-M+1)(-\Omega)},$$
$$u'' \approx ...e^{(N-M+2)(-\Omega)},$$
$$U'' \approx U^2$$
$$e^{(N-M+2)(-\Omega)} \approx e^{(2N-2M)(-\Omega)}$$
$$N-M+2=2N-2M$$
$$N=M+2$$

olarak elde edilir.

Denklem (4.6)'ya göre verilen çözüm aileleri aşağıdaki gibidir:

1. Çözüm Ailesi $\mu \neq 0,\ \ \lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda,

$$\Omega(\xi) = \ln\left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + E)\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\right), \tag{4.7}$$

2. Çözüm Ailesi $\mu \neq 0,\ \ \lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda,

$$\Omega(\xi) = \ln\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}(\xi + E)\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\right), \tag{4.8}$$

3. Çözüm Ailesi $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda,

$$\Omega(\xi) = -\ln\left(\frac{\lambda}{exp(\lambda(\xi + E) - 1)}\right), \tag{4.9}$$

4. Çözüm Ailesi $\mu \neq 0,\ \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda,

$$\Omega(\xi) = \ln\left(-\frac{2\lambda(\xi + E) + 4}{\lambda^2(\xi + E)}\right), \tag{4.10}$$

5. Çözüm Ailesi $\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda,

$$\Omega(\xi) = \ln(\xi + E), \tag{4.11}$$

$A_N, ..., E,\ \lambda,\ \mu$ ve $A_N \neq 0$ birer katsayı olmak üzere N pozitif tamsayısı denklem (4.4)'te denge prensibini uygulayarak elde edilir.

Adım 3: Denklem (4.2) ve (4.3), denklem (4.1)'de yerine yazılarak sonunda $\exp(-\Omega(\xi))$ formunda terimler içeren bir polinom oluşturulur. Bu polinomda aynı kuvvete sahip $\exp(-\Omega(\xi))$'li terimler sıfıra eşitlenir. Yapılan bu işlemler ile $A_0,\ A_1,\ A_2,\ ...E,\ \lambda,\ \mu$ katsayılarını içerisinde barındıran bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel sistem çözülerek ilgili katsayılar tespit edilir. Bulunan $A_0,\ A_1,\ A_2,...,E,\ \lambda,\ \mu$ katsayıları denklem (4.5)’te yerine yerleştirerek (4.4) denklemi ile dolaylı olarak (4.5) kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri bulunur.

5. ÜSTEL FONKSİYON AÇILIM METODU UYGULAMALARI

Bu bölümde, (1 + 1) boyutlu lineer olmayan değiştirilmiş Burgers KdV denklemine ve birleştirilmiş KdV-mKdV denklemine üstel fonksiyon açılım metodu ile bazı yeni analitik çözümler elde edilmektedir.

5.1 Değiştirilmiş Burgers KdV Denkleminin Çözümleri

Birçok fiziksel olay değiştirilmiş Burgers KdV ile tanımlanabileceği iyi bilinmektedir. Bilinen örnekler, sığ suda uzun dalgaların ve plazmada dalgaların davranışıdır. Bu çalışmada yürüyen dalgalar (travelling wave) detaylı şekilde incelenmiştir. Bu çalışmada kullandığımız değiştirilmiş Burgers KdV denklemi aşağıdaki gibi tanımlanır [40]:

$$u_t + pu^2u_x + qu_{xx} - ru_{xxx} = 0\,, \tag{5.1}$$

burada $p,\ q$ ve r sıfırdan farklı birer sabittir.

Denklem (5.1) 'in yürüyen dalga dönüşümü ele alınır ve c sıfırdan farklı bir sabit olduğunda $u = u(\xi)$ ve $\xi = x - ct$ dönüşümleri gerçekleştirilir. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi, lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürmek söz konusu olduğunda aşağıdaki dönüşümler yapılır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu'\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x} = u'\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'' \text{ ve } \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u'''\,.$$

Denklem (5.1) 'e göre u_t, u_x, u_{xx} ve u_{xxx} dönüşümleri dikkate alınarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-cu' + pu^2u' + qu'' - ru'''\,.$$

ξ 'ye göre integral alınıp, integral sabiti sıfıra eşitlenir. Denklem (5.1) için lineer olmayan diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir:

$$-3cu + pu^3 + 3qu' - 3u'' = 0. \tag{5.2}$$

Denklem (5.2)’nin en yüksek türev ve lineer olmayan terimle düzenlediğimizde, denge prensibi yardımıyla uygunluk için N terimi elde edilir:

$$\begin{aligned} &3N = N + 2 \\ &N = 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sonra, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \exp(-\Omega(\xi)), \tag{5.4}$$

$$u'(\xi) = A_1 \exp(-\Omega(\xi))\Omega', \tag{5.5}$$

ve

$$u''(\xi) = A_1 \exp(-\Omega(\xi))(\Omega')^2 + A_1 \exp(-\Omega(\xi))(-\exp(-\Omega)\Omega' + \mu \exp(\Omega)\Omega'). \tag{5.6}$$

Burada $A_1 \neq 0.$ Denklem (5.2)’de denklem (5.4), (5.5) ve (5.6)’yı yerine yazılarak sonunda $exp(-\Omega(\xi))$ formunda terimler içeren bir polinom oluşturulur. Bu polinomda aynı kuvvete sahip $exp(-\Omega(\xi))$’ li terimler sıfıra eşitlenerek polinomun katsayılarını içeren bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel sistem çözülerek ilgili katsayılar tespit edilir.

Durum 1: 1. çözüm ailesi (4.7)’ ye göre incelediğimizde;

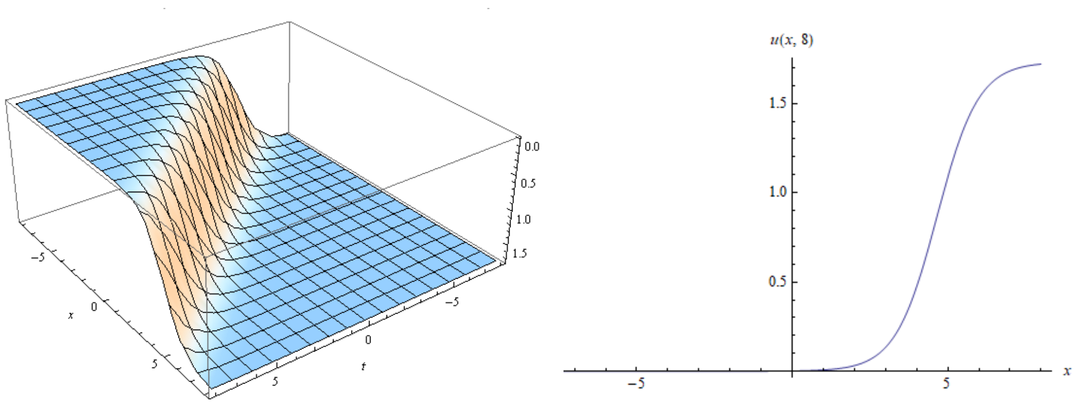
$\mu \neq 0,\ \lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda,

$$c = c;\ \ \mu = \mu;\ \ p = p;\ \ q = q;\ \ A_1 = \frac{2q}{\sqrt{3cp}};\ \ A_0 = \frac{(3c + \sqrt{9c^2 + 16q^2\mu})A_1}{4q};$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{9c^2 + 16q^2\mu}}{2q};\quad r = \frac{2q^2}{9c}; \tag{5.7}$$

katsayıları elde edilir. Denklem (5.7)'ye göre çözüldüğünde bu katsayılara karşılık verilen çözüm;

$$u_1(x,t) = \frac{\sqrt{3}c(3c+\sqrt{9c^2+16q^2\mu})(1+Tanh[\frac{3c(EE-ct+x)}{4q}])}{2\sqrt{cp}(\sqrt{9c^2+16q^2\mu}+3cTanh[\frac{3c(EE-ct+x)}{4q})}, \tag{5.8}$$



Şekil 5.1: Hiperbolik fonksiyon olan denklem (5.8)' in $\mu=8$; $EE=3$; $p=1$; $q=1$; $c=1$; $-8<x<8$; $-8<t<8$; değerleri ile 3 boyutlu uzayda belirttiği yüzey grafiği ve $t=8$ için belirttiği 2 boyutlu eğri grafiği.

Durum 2: 3.çözüm ailesi (4.9)' a göre incelediğimizde;

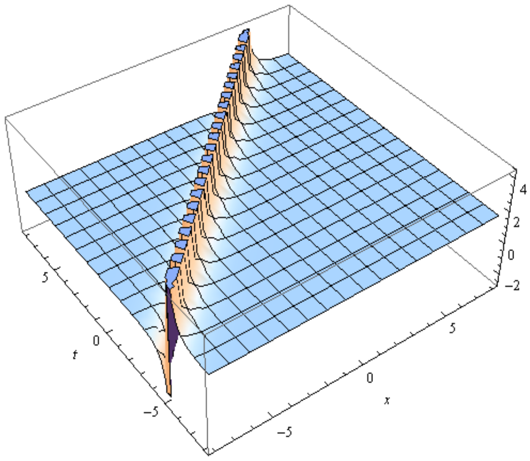
$\mu=0, \lambda\neq 0$ ve $\lambda^2-4\mu>0$ olduğunda,

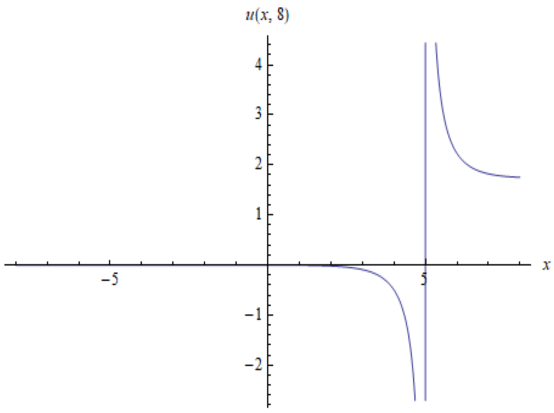
$$c=c;\ \mu=0;\ p=p;\ q=q;\ A_1=\frac{2q}{\sqrt{3cp}};\ A_0=\frac{(3c+\sqrt{9c^2+16q^2\mu})A_1}{4q};$$

$$\lambda=\frac{\sqrt{9c^2+16q^2\mu}}{2q};\ r=\frac{2q^2}{9c}; \tag{5.9}$$

katsayıları elde edilir. Denklem (5.9)'a göre çözüldüğünde bu katsayılara karşılık verilen çözüm;

$$u_2(x,t) = \frac{\sqrt{3}c(1+Coth[\frac{3c(EE-ct+x)}{4p}])}{2\sqrt{cp}}, \tag{5.10}$$





Şekil 5.2: Hiperbolik fonksiyon olan denklem (5.10)'un $EE=3;\ \ p=1;\ \ q=1;\ \ c=1;$ $-8<x<8;\ -8<t<8;$ değerleri ile 3 boyutlu uzayda belirttiği yüzey grafiği ve $t=8$ için belirttiği 2 boyutlu eğri grafiği.

5.2 Birleştirilmiş KdV-mKdV Denkleminin Çözümleri

Bu çalışmada kullandığımız birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi aşağıdaki gibi tanımlanır [40]:

$$u_t + puu_x + qu^2u_x + ru_{xxx} = 0, \tag{5.11}$$

burada p, q ve r sıfırdan farklı birer sabittir.

Denklem (5.11) 'in yürüyen dalga dönüşümlerini ele alınır ve c sıfırdan farklı bir sabit olduğunda kısmi diferansiyel denklem için $u=u(\xi)$ ve $\xi = x-ct$ yürüyen dalga dönüşümü gerçekleştirilir. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürmek söz konusu olduğunda aşağıdaki dönüşümler uygulanır;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu', \ \frac{\partial u}{\partial x} = u', \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u'''.$$

Denklem (5.11) 'e göre u_t , u_x ve u_{xxx} dönüşümleri dikkate alınarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-cu' + puu' + u^2 u' + ru''' = 0.$$

Yukarıdaki denklem ξ 'ye göre integral alınıp ve integral sabiti sıfıra eşitlenir. Denklem (5.11) için lineer olmayan diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir:

$$-6cu + 3pu^2 + 2u^3 + ru'' = 0. \tag{5.12}$$

Denklem (5.12)’nin en yüksek türev ve lineer olmayan terimle düzenlendiğinde, denge prensibi yardımıyla, uygunluk için N terimini elde edilir

$$3N = N + 2,$$
$$N = 1. \tag{5.13}$$

Sonra aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \exp(-\Omega(\xi)), \tag{5.14}$$

$$u'(\xi) = A_1 \exp(-\Omega(\xi))\Omega', \tag{5.15}$$

ve

$$u''(\xi) = A_1 \exp(-\Omega(\xi))(\Omega')^2 + A_1 \exp(-\Omega(\xi))(-\exp(-\Omega)\Omega' + \mu \exp(\Omega)\Omega'). \tag{5.16}$$

Burada $A_1 \neq 0$. Denklem (5.12)’de denklem (5.14), (5.15) ve (5.16) yerine yazıldığında $exp(-\Omega(\xi))$ formunda terimler içeren bir polinom oluşturulur. Bu polinomda aynı kuvvete sahip $exp(-\Omega(\xi))$'li terimler sıfıra eşitlenerek polinomun katsayılarını içeren bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel sistem çözülerek ilgili katsayılar tespit edilir.

Durum 1: 1. Çözüm ailesi (4.7)' ye göre incelendiğinde;

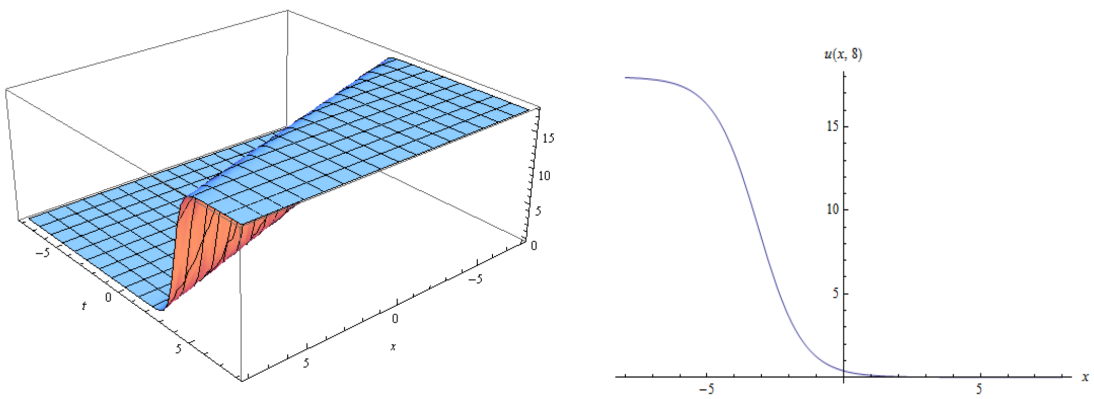
$\mu \neq 0,\ \lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $c > 1$ olduğunda,

$$A_1 = -\frac{6\sqrt{c}\sqrt{r}}{p};\ \ A_0 = \frac{3c - 3\sqrt{c}\sqrt{r}\lambda}{p};$$

$$\lambda = \frac{3c - pA_0}{3\sqrt{c}\sqrt{r}};\quad \mu = \frac{pA_0(-6c + pA_0)}{36cr};\quad q = -\frac{q^2}{6c}; \tag{5.17}$$

katsayıları elde edilir. Denklem (5.17)'ye göre çözüldüğünde bu katsayılara karşılık verilen çözüm;

$$u_1(x,t) = \frac{3c(\sqrt{c} - \sqrt{r}\lambda)(-1 + Tanh[\frac{\sqrt{c}(EE - ct + x)}{2\sqrt{r}}])}{p(\sqrt{r}\lambda + \sqrt{c}Tanh[\frac{\sqrt{c}(EE - ct + x)}{2\sqrt{r}}])}, \tag{5.18}$$



Şekil 5.3: Hiperbolik fonksiyon olan denklem (5.18)'in $\lambda = 15;\ \ EE = 3;\ \ p = 1;\ \ r = 2;$ $c = 1;\ -8 < x < 8;\ -8 < t < 8;$ değerleri ile 3 boyutlu uzayda belirttiği yüzey grafiği ve $t = 0$ için belirttiği 2 boyutlu eğri grafiği.

Durum 2: 2. Çözüm ailesi (4.8)' e göre incelendiğinde;

$\mu \neq 0,\ \lambda^2 - 4\mu < 0$ ve $c > 1$ olduğunda,

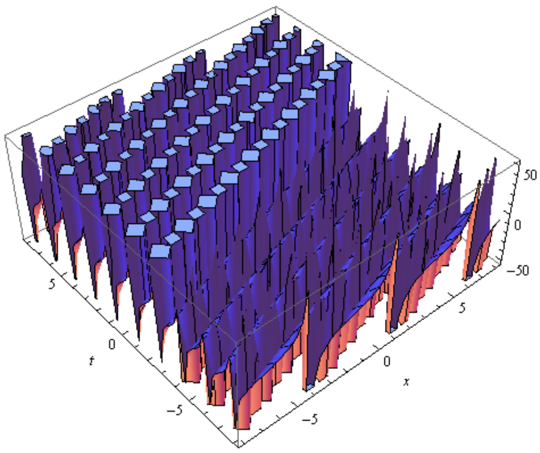
$c = c;\ r = r;\ p = p;\ \lambda = \lambda;$

$$A_1 = -\frac{6\sqrt{c}\sqrt{r}}{p};\ A_0 = \frac{3c - 3\sqrt{c}\sqrt{r}\lambda}{p};$$

$$\mu = \frac{pA_0(-6c + pA_0)}{36cr}; \quad q = -\frac{q^2}{6c}; \tag{5.19}$$

Katsayıları elde edilir. $c = 3;\ r = -2;$ alınırsa 2.çözüm ailesi ile çözüldüğünde bu katsayılara karşılık verilen çözüm;

$$u_1(x,t) = \frac{9(\sqrt{6} - 2i\lambda)(-i + Tanh[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(EE - 3t + x)])}{p(-2\lambda + \sqrt{6}Tanh[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(EE - 3t + x)])}, \tag{5.20}$$



Şekil 5.4: Denklem (5.20)'nin $\lambda = 15;\ \ EE = 3;\ \ p = 1;\ \ r = 2;\ \ c = 1;\ -8 < x < 8;\ -8 < t < 8;$ değerleri ile 3 boyutlu uzayda belirttiği yüzey grafiği.

6. SONUÇ

Üstel fonksiyon açılım metodu yaklaşık 15 yıldan fazla bir süredir lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Bu tezde (1+1) boyutlu lineer olmayan değiştirilmiş Burgers KdV denklemi ve birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi çözümlerini elde etmek için üstel fonksiyon açılım metodu kullanılmıştır. Bilgisayar ortamında kodları yazılan üstel açılım metodunun denklemlere uygulanması ve sonuçların 2 ve 3 boyutlu grafikler ile yorumlanmasına yer verilmiştir.

Bu bilgiler ışığında, üstel fonksiyon açılım metodu değiştirilmiş Burgers KdV ve birleştirilmiş KdV-mKdV kısmi diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için güçlü bir araç olduğu görülmüştür.

Ayrıca elde edilen sonuçlar neticesinde üstel fonksiyon açılım metodu, insan yaşamına yön veren dalga denklemlerinin çözümündeki uygunluğu ve kalitesi ile yeni analitik sonuçları literatüre kazandıracaktır.

7. KAYNAKLAR

[1] Wikipedia,https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_partial_differential_equation_topics, (Erişim Tarihi: 10.05.2019).

[2] S. Islam, K. Khan, A.H. Arnous, “Generalized Kudryashov method for solving some (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations”, *New Trends Math. Sci.,* 3(3), 46–57, 2015.

[3] P. Sanchez, G. Ebadi, A. Mojaver, M. Mirzazadeh, M. Eslami, A. Biswas, “Solitons and other solutions to perturbed Rosenau–KdV–RLW equation with power law nonlinearity”, *Acta Phys. Pol. A*, 127(6), 1577–1586, 2015.

[4] S. Weerakoon, “Application of Sumudu transform to partial differential equations”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(2), 277-283, 1994.

[5] J.H. He, “Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique: some examples”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4), 699-708, 1999.

[6] J. H. He, “Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique”, *Applied Mathematics and Computation*, 135(1), 73-79, 2003.

[7] H. A. Zedan, “Exact solutions for the generalized KdV equation by using Backlund transformations”, *J. Frankl. Inst.* 348, 1751–1768, 2011.

[8] X. Lü, B. Tian, H.-Q. Zhang, T. Xu, H. Li, “Generalized (2 + 1)-dimensional Gardner model: bilinear equations. Bäcklund transformation, Lax representation and interaction mechanisms”, *Nonlinear Dyn.*, 67, 2279–2290, 2012.

[9] X.L. Li, E.Q. Li, M.L. Wang, “The G’/G, 1/G -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations”, *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, 25 454-462, 2010.

[10] A.M. Wazwaz, “Multiple-soliton solutions for the KP Equation by Hirota’s bilinear method and by the tanh–coth method”, *Appl. Math. Comput.*, 190, 1, 633-640, 2007.

[11] J.H. He, X.H. Wu, Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30, 700-708, 2006.

[12] M. M. Zhao, C. Li, “The-expansion method applied to nonlinear evolution equations”, *Sciencepaper Online*, 21789, 2008.

[13] K. Khan, M.A. Akbar, “Application of exp-expansion method to find the exact solutions of modified Benjamin-Bona-Mahony equation”. *World Applied Sciences Journal*, 24(10), 1373-1377, 2013.

[14] R. Islam, M.N. Alam, A.K.M.K S. Hossain, H. O. Roshid, M. A. Akbar, “Traveling wave solutions of nonlinear evolution equations via Exp ($-\Phi(\eta)$)-expansion method”. *Global Journal of Science Frontier Research*, 13(11), 63-71, 2013.

[15] S. Uddin, M.N. Alam, S.S. Hossain, H. Samiu, M.A. Akbar, “Some new exact traveling wave solutions to the (3+ 1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation and the burgers equations via Exp-Expansion method”, *Frontiers of Mathematics and Its Applications*, 1(1), 1-8, 2014.

[16] H.O. Roshid, Md. A. Rahman, “The $\exp(-\Phi(\eta))$-expansion method with application in the (1+1)-dimensional classical Boussinesq equations”, *Results in Physics*, 4, 150–155, 2014.

[17] M.G. Hafez, N. Alam, M.A. Akbar, “Application of the $\exp(-\Phi(\eta))$-expansion Method to Find Exact Solutions for the Solitary Wave Equation in an Unmagnatized Dusty Plasma”, *World Applied Sciences Journal*, 32 (10), 2150-2155, 2014.

[18] M.A.E. Abdelrahman, E.H.M. Zahran, M.A.M. Khater, “Exact Traveling Wave Solutions for Power law and Kerr law non Linearity Using the Exp ($\Phi(\xi)$)-expansion Method”, *Global Journal of Science Frontier Research*, 14(4), 2014.

[19] M.A.E Abdelrahman, E.H.M. Zahran, M.A.M. Khater, “The $\exp(-\phi(\xi))$-Expansion Method and Its Application for Solving Nonlinear Evolution Equations”, *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, 4, 37-47, 2015.

[20] H.O. Roshid, M.R. Kabir, R.C. Bhowmik, B.K. Datta, “Investigation of Solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and Exp ($-\phi(\xi)$)-expansion method”, *SpringerPlus*, 3(1), 1-10, 2014.

[21] M.N. Alam, M.G. Hafez, M.A. Akbar, H.O. Roshid, “Exact Solutions to the (2+1)-Dimensional Boussinesq Equation via $\exp(\Phi(\eta))$-Expansion Method”, *Journal of Scientific Research*, 7(3), 1-10, 2015.

[22] H.M. Baskonus, H. Bulut, “Analytical studies on the (1+ 1)-dimensional nonlinear dispersive modified Benjamin–Bona–Mahony equation defined by seismic sea waves”, *Waves in Random and Complex Media*, 25(4), 576-586, 2015.

[23] M.G. Hafez, M.A. Akbar, “An exponential expansion method and its application to the strain wave equation in microstructured solids”, *Ain Shams Engineering Journal*, 6(2), 683-690, 2015.

[24] M.M. Khater, “Extended exp Expansion method for Solving the Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV System”, *Journal of ;Applied Mathematics and Decision Sciences*, 15(7), 23-32, 2015.

[25] M. Ekici, M. Mirzazadeh, A. Sonmezoglu, Q. Zhou, H. Triki, M. Z. Ullah, ... & A. Biswas, “Optical solitons in birefringent fibers with Kerr nonlinearity by exp-function method”, *Optik*, 131, 964-976, 2017.

[26] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, H. Triki, F.B. Majid, Q. Zhou, A.P. Moshokoa, M. Mirzazadeh, M. Belic, “Optical solitons with Lakshmanan–Porsezian–Daniel model using a couple of integration schemes”, *Optik*, 158, 705-711, 2018.

[27] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, M.R. Belic, “Optical solitons in birefringent fibers having anti-cubic nonlinearity with exp-function”, *Optik*, 186, 363-368, 2019.

[28] G. Chen, X. Xin, H. Liu, “The Improved-Expansion Method and New Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics”, *Advances in Mathematical Physics*, 2019.

[29] A. Alharbi, M.B. Almatrafi, “Exact and numerical solitary wave structures to the variant Boussinesq system”, *Symmetry*, 12(9), 1473, 2020.

[30] W.W. Mohammed, S. Albosaily, N. Iqbal, M. El-Morshedy, “The effect of multiplicative noise on the exact solutions of the stochastic Burgers' equation”, *Waves in Random and Complex Media*, 1-13, 2021.

[31] C.S. Liu, “Trial equation method to nonlinear evolution equations with rank inhomogeneous: mathematical discussions and its applications”, *Communications in Theoretical Physics*, 45(2), 219-223, 2006.

[32] W. Malfliet, W. Hereman, “The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations”, *Physica Scripta*, 54(6), 563 1996.

[33] A.M. Wazwaz, “The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations”, *Appl. Math. Comput.*, 154(3), 713–723, 2004.

[34] M. Kandemir, *Diferansiyel Denklemler*, Pegem Akademi, Ankara, 2015.

[35] K. Koca, *Kısmi Türevli Denklemler*, Gazi Kitapevi, Ankara, 2013

[36] T. Aydemir, “Tanh yöntemi ile (G’/G) açılım yönteminin karşılaştırılması ve birleştirilmiş yöntemin geliştirilmesi”, Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2016.

[37] A.M. Wazwaz, *Partial differential equations and solitary waves theory*, Springer Science & Business Media, 2010.

[38] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, “Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states”, *Physical Review Letters*, 15(6), 240, 1965.

[39] P. Rosenau, J.M. Hyman, “Compactons: solitons with finite wavelength,”, *Physical Review Letters*, 70(5), 564, 1993.

[40] A. Bekir, “On traveling wave solutions to combined KdV–mKdV equation and modified Burgers–KdV equation”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1038-1042, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Emin Ümit KOBAK

Doğum tarihi ve yeri : 14/08/1992 BALIKESİR

e-posta : eminkobak@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı	2021
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi / Matematik Amasya Üniversitesi / İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2016 2019
Lise	Balıkesir Lisesi	2010

Yayın Listesi

[1] F. Evirgen, E.Ü. Kobak, “Applications of Exp (-φ (ξ)) Expansion Method to Some Partial Differential Equations for Finding Exact Solutions”, The First International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME'18), June 27-29, 2018, Balıkesir, p.29.