T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

STERN-BROCOT SAYI DİZİSİ VE MODÜLER GRUP

HALİD MESTANOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Özden KORUOĞLU (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Musa DEMİRCİ
Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Stern-Brocot Sayı Dizisi Ve Modüler Grup**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Halid MESTANOĞLU

(imza)

ÖZET

STERN-BROCOT SAYI DİZİSİ VE MODÜLER GRUP

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HALİD MESTANOĞLU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:PROF.DR.ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2021

Stern-Brocot sayı dizisi pay ve paydası tam sayılardan oluşan ve tamamı indirgenmiş kesirlerden oluşan, pozitif rasyonel sayıları temsil etmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu tezde Stern-Brocot sayı dizisi ile sürekli kesirler, modüler grup ve Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi arasındaki ilişkiler çalışılmıştır.

Bu tez toplam yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma tanıtılmış, konunun tarihsel süreci ve yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan tanımlar, teoremler, örnekler ve yöntemler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Stern-Brocot sayı dizisi tanıtılmış, konuyla ilgili teorem ve örnekler verilmiştir. Ayrıca dizinin farklı formatlarda gösterimi ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde Stern-Brocot sayı dizisi ile sürekli kesirler arasındaki ilişki verilmiştir ve örnekler sunulmuştur.

Beşinci bölümde özgün bir kısım olarak Stern-Brocot sayı dizisindeki her elemanın modüler grupta blok formlar yardımıyla ifade edilebildiği gösterilmiştir. Stern-Brocot sayı dizisi ile modüler grup arasındaki yakın ilişki verilmiştir.

Altıncı bölümde Stern-Brocot sayı dizisine negatif rasyonel sayıların eklenmesiyle elde edilen Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi verilmiştir ve daha sonra yeni oluşturulan dizi ile modüler grup arasındaki ilişki özgün bir şekilde sunulmuştur.

Yedinci bölümde tezden elde edilen sonuçlar verilmiş ve kısaca özetlenmiştir. Ayrıca ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Stern-Brocot dizisi, sürekli kesirler, modüler grup, Genişletilmiş Stern-Brocot dizisi

BilimKod / Kodları : 20401 SayfaSayısı: 84

ABSTRACT

STERN-BROCOT SEQUENCE AND MODULAR GROUP
MSC THESIS
HALİD MESTANOĞLU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:PROF.DR.ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, AUGUST - 2021

The Stern-Brocot sequence of numbers is a method used to represent positive rational numbers whose numerator and denominator are integers and all are reduced fractions. In this thesis, the relationships between Stern-Brocot and continuous fractions, modular group and expanded Stern-Brocot number sequence are studied.
This thesis consists of seven chapters in total. In the first part, the study is introduced, the historical process of the subject and the studies carried out are briefly mentioned.
In the second chapter, definitions, theorems, examples and methods that will be used in other chapters are given.
In the third chapter, Stern-Brocot number sequence is introduced, related theorems and examples are given. In addition, the display of the series in different formats is expressed.
In the fourth chapter, the relationship between Stern-Brocot number sequence and continuous fractions is given and examples are presented.
In the fifth chapter, it has been shown as a unique part that each element in the Stern-Brocot number sequence can be expressed in the modular group with the help of block forms. The close relationship between the Stern-Brocot number sequence and the modular group is given.
In the sixth chapter, the Expanded Stern-Brocot number sequence obtained by adding negative rational numbers to the Stern-Brocot number sequence is given and then, the relationship between the newly created series and the modular group is presented in a unique way.
In the seventh chapter, the results obtained from the thesis are given and briefly summarized. Also, open problems are given for future studies.

KEYWORDS: Stern-Brocot sequence, continuous fractions, modular group, Extended Stern-Brocot sequence

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 84

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{Z}^{+}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\boldsymbol{SB}$	: Stern-Brocot sayı dizisi
$\boldsymbol{SB_n}$	: Stern-Brocot sayı dizisinin n-inci satırı
$\boldsymbol{-SB}$	: Negatif Stern-Brocot sayı dizisi
$\boldsymbol{-SB_n}$	: Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin n-inci satırı
$\boldsymbol{GSB}$	: Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi
$\boldsymbol{GSB_n}$	: Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisinin n-inci satırı
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Modüler grup
$\boldsymbol{\overline{\Gamma}}$	: Genişletilmiş modüler grup
$\boldsymbol{H_{2,q}}$	: Hecke grup
$\boldsymbol{PSL(2,\mathbb{Z})}$	: Modüler grup

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda üzeimde büyük emeği olan, öğrencisi olmaktan daima gurur ve onur duyduğum, değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof.Dr. Özden KORUOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ufkumu açan, yolumu aydınlatan Matematik Bölüm Başkanımız ve Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof.Dr. Recep ŞAHİN hocama teşekkürü borç bilirim.

Tez yazım sürecinde desteğini eksik etmeyen ve eserimi yazım aşamasında tecrübesinsen istifade ettiğim Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR'e de katkılarından dolayı teşekkür ederim.

İlkokul döneminden itibaren bugüne kadar öğrenim hayatım boyunca üzerimde pek çok emeği olan ve bugünlere gelmeme vesile olan bütün hocalarıma da ayrı ayrı teşekkürler.

Son olarak beni yetiştiren ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman varlıklarını hissettiğim aileme şükranlarımı sunarım.

Araştırmalarımın sonucu ve emeklerimin neticesi olan bu çalışmayı bilim camiasına kazandırmaktan dolayı gurur ve mutluluk duyuyorum.

Eserimin matematik dünyasına faydalı olmasını ve gelecek çalışmalara ışık tutmasını temenni ederim.

Balıkesir, 2021 **Halid MESTANOĞLU**

1. GİRİŞ

Moritz Abraham Stern (1807–1894) Frankurt doğumlu Alman matematikçidir. Carl Friedrich Gauss'un doktora öğrencisi olan Stern 1858'de Göttingen Üniversitesi'nde Ordinaryüs Profesör oldu. Ayrıca aynı yıl yayınlanan [1] "Ueber eine zahlentheoretische Funktion" isimli eserinde kendi adını verdiği Stern-Brocot sayı dizisi ile bilinir.

Achille Brocot (1817–1878) Fransız saatçi ve amatör matematikçidir. Saatlerin çarkları arasındaki matematiksel ilişkiler ve sarkaçların periyotları ile ilgili araştırmalar yaparken amatör olarak matematikle uğraştı. "Brocot süspansiyonu" gibi saatler ile ilgili birçok yeniliğin yanı sıra 1861 yılında Moritz Abraham Stern'den bağımsız olarak bulduğu ve kendi ismini verdiği Stern-Brocot sayı dizisi ile [2] "Calcul des rouages par approximation, nouvelle methode" isimli çalışmasında adını tarihe yazdırdı.

λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere ,

$T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $U(z) = z + \lambda$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir [3] ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

$H_{2,q}$ Hecke gruplarında, $q = 3$ değerine karşılık gelen $H_{2,3}$ Hecke grubu kaynaklarda modüler grup olarak isimlendirilir ve $PSL(2,\mathbb{Z})$ ile gösterilir.

Modüler grubun sunuşu,

$H_{2,3} = \langle \mathrm{T}, \mathrm{S} | \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^3 = \mathrm{I} \rangle$

şeklindedir.

Sürekli kesirlerde; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reel sayılar, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denir.Knott [4] numaralı çalışmasında sonlu sürekli kesirlere karşılık gelen $SB_n = R^{m_0} L^{n_0} \ldots R^{m_k} L^{n_k}$ Stern-Brocot sayı dizisi kelimelerini vermiştir.

Fıne [5] modüler grupta blok kavramını açıklamış ve bu sayede modüler grup elemanlarını TS ve TS^2 blokları sayesinde farklı bir türde ifade etmiştir. Buna göre modüler gruptaki her kelime

$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

şeklinde ifade edilebilir. Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Biz de tezimizde TS ve TS^2 blokları sayesinde yazılabilen $W(T,S)$ modüler grup kelimeleri ile $SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$ şeklinde yazılabilen Stern-Brocot sayı dizisi kelimeleri arasındaki bağıntıyı inceledik ve

$$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

eşitliğini teorem olarak ifade edip, ispatıyla birlikte verdik.

Tezin ilk bölümünü çalışmanın tanıtıldığı, tezin gelişiminin ve bölümlerinin açıklandığı giriş kısmıdır.

İkinci bölümde tezin diğer kısımlarında kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler, yöntemler ve örnekler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Stern-Brocot sayı dizisi ile ilgili temel tanımlar, teoremler ve örnekler verdik. Bu kısımda dizinin rasyonel, matris ve $SB = \{LR\}$ blokları ile gösterimi ifade edildi, ayrıca Stern-Brocot sayı dizisinin herhangi bir satırındaki elemanları bulmaya yarayan ve herhangi bir terimin $SB = \{LR\}$ blok gösteriminde karşılığını hesaplayan program tanıtıldı.

Dördüncü bölümde sürekli kesirler ile Stern-Brocot sayı dizisi arasındaki ilişki incelendi. $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ şeklindeki basit sürekli kesir açılımına karşılık gelen $SB = \{LR\}$ blok kelimeler ifade edildi ve teorem olarak verildi.

Beşinci bölümde, modüler grupta her elemanın blok formlar yardımıyla yazılmasından yola çıkarak, $W(T,S)$ blok kelimeleri ile Stern-Brocot sayı dizisinde yer alan SB_n formatındaki kelimeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu ilişki genelleştirilerek bu kısımda özgün teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

Altıncı bölümde, Negatif Stern-Brocot sayı dizisi tanımı verilmiş ve Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisinin oluşumu açıklanmıştır. Daha sonra Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisinin modüler grupla olan yakından ilişkisi incelenmiştir ve $W(T,S)$ blok kelimeleri ile Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde yer alan $-SB_n$ blok kelimeleri arasındaki ilişki ifade edilmiştir. Buna göre;

$$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca;

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde $n \geq 2$ ve $-SB_n = x$ negatif rasyonel sayısı için,

$-\infty < x < -1$ olduğu durumda;

$$W(T,S) = S^2(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}$$

$-1 < x < 0$ olduğu durumda;

$W(T,S) = S(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}$

ile temsil edilir ve burada blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir. Çalışmamız neticesinde ortaya çıkan sonuçlar neticesinde bu kısımda bazı özgün teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Son olarak yedinci bölümde ise tezde yapılan çalışmalar özetlenmiş, elde edilen teorem ve sonuçlar verilerek gelecekte yapılabilecek çalışmalarla ilgili olarak açık uçlu problemler ve önerilerden bahsedilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan teoremler, kavramlar ve yöntemler verilmiştir.

2.1 Möbiüs Dönüşümleri

Çalıştığımız Stern-Brocot sayı dizisinin elemanları birer möbiüs dönüşümüdür. Ayrıntılı bilgi için [10] numaralı kaynak incelenebilir. Bu alt bölümde bu dönüşümleri tanıyalım ve bu dönüşümler ile $2x2$ lik matrisler arasındaki ilişkileri verelim.

2.1.1 Tanım

$V(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ ($a,b,c,d\in$C, $ad-bc\neq 0$) şeklindeki dönüşümlere möbiüs dönüşümleri (kesirli doğrusal dönüşüm) denir.

2.1.2 Tanım

Stern-Brocot sayı dizisinde ilk terimler $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ olmak üzere medyanı olan $\frac{a+c}{b+d}$ kesirini $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şeklinde 2×2 lik matris olarak yazalım.

$$\frac{a+c}{b+d}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu dönüşüm özel olarak Stern-Brocot sayı dizisinin matris dönüşümüdür. Bu dönüşüm bir kesirli doğrusal dönüşümdür. İlerleyen bölümlerde matris formu olarak bu dönüşüm kullanılacaktır.

2.2 Sürekli Kesirler

Sürekli kesirler ile ilgili bazı tanım ve teoremler bu kısımda incelenmiştir. Öte yandan [5] numaralı kaynakta Fıne basit sürekli kesirleri ve blokları kullanarak modüler grup ve genişletilmiş modüler gruptaki elemanların arasındaki ilişkileri incelemiştir.

2.2.1 Tanım

[8] $a_0, a_1, \dots, a_n$ reel sayılar, $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denir. $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarına kısmi bölümler ya da kısmi paydalar adı verilir. Eğer $a_0, a_1, \dots, a_n$ reel sayılarının hepsi tamsayı ise sürekli kesre sonlu basit sürekli kesir denir. Yukarıdaki gösterim daha sade olarak $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ şeklinde,basit sürekli kesir ise $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_s$ şeklinde gösterilir.

Her rasyonel sayı, sonlu basit sürekli kesir şeklinde gösterilebileceği gibi, her sonlu basit sürekli kesir de bir rasyonel sayıyı temsil eder. Bu durum aşağıdaki teoremler ile ifade edilecektir.

2.2.2 Teorem

[8] Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı temsil eder.

İspat

Tümevarım yöntemiyle ispatı yapalım, $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_s$ basit sürekli kesrini göz önüne alalım. $n = 1$ için

$$[a_0; a_1]_s = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

olup bu ifade rasyonel olduğundan iddia doğrudur.

Pozitif k tamsayısı için $[a_0; a_1, \dots, a_k]_s$ basit sürekli kesri rasyonel olsun. Burada $a_0, a_1, \dots, a_k$ tamsayılar olup $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitiftir. Şimdi $a_0, a_1, \dots, a_{k+1}$ tamsayılar ve $a_1, \dots, a_{k+1}$ pozitif olsun. Açık olarak;

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k+1}]_s = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]_s}$$

olacağından tümevarım hipotezinden $[a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]_s$ rasyoneldir, dolayısıyla $s \neq 0$ olmak üzere $\frac{r}{s}$ şeklinde bir rasyonel sayıya eşittir. Yani,

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}]_s = a_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} = \frac{a_0 r + s}{r}$$

olur ki bu da bir rasyonel sayıdır.□

Şimdi de Euclid algoritması yardımıyla her rasyonel sayının sonlu basit sürekli kesir şeklinde ifade edilebileceğini görelim.

2.2.3 Teorem

[8] Her rasyonel sayı, sonlu basit sürekli kesir şeklinde ifade edilebilir.

İspat

a, b tamsayı $b > 0$ olmaküzere $x = \frac{a}{b}$ olsun. $r_0 = a,\ r_1 = b$ alarak Euclid algoritmasını uygularsak;

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4, 0 < r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1}, 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n$$

olur. Bu eşitliklerde $q_2, q_3, \dots, q_n$ ifadesi pozitif tamsayılardır. Bunlar kesir şeklinde yazılırsa;

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$$

elde edilir. $\frac{r_i}{r_j}$ lerin değerleri sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \cdots + q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}$$

olur, o halde

$$\frac{a}{b} = [q_1; q_2, \dots, q_n]_s$$

dir. Bu da gösterir ki her rasyonel sayı sonlu basit sürekli kesir şeklinde yazılabilir.□

Rasyonel sayıların bu sürekli kesir şeklinde yazılışı tek türlü değildir.

$$a_n = (a_{n-1}) + \frac{1}{1}$$

Eşitliği dikkate alınırsa, $a_n > 1$ olan sürekli kesri,

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

olarak yazılabilir.

2.3 Hecke Grupları

Bu çalışmada incelenen bölümlerden bir tanesi olan modüler grup, özel bir Hecke grubu olduğundan, Hecke gruplarını kısaca tanıyalım. Hecke grupları, Erich Hecke'nin 1936 yılında yaptığı [3] "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışması ile literatürdeki yerini almıştır.

2.3.1 Tanım

[3] λ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere ,

$T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $U(z) = z+\lambda$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanımlanan $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri yardımıyla S=$T.U$ alınırsa

$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$

elde edilir.

Hecke grubunun sunuşu,

$H_{2,q} = \langle \mathrm{T}, \mathrm{S} | \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^{\mathrm{q}} = \mathrm{I} \rangle$

şeklindedir. [3,10] numaralı kaynaklarda Hecke grupları ile ilgili bilgilere ulaşılabilir.

2.4 Modüler Grup Ve Genişletilmiş Modüler Grup

$H_{2,q}$ Hecke gruplarında, q=3 değerine karşılık gelen $H_{2,3}$ Hecke grubu literatürde daha çok modüler grup olarak isimlendirilir ve $PSL(2,\mathbb{Z})$ ile gösterilir. Modüler grup, katsayılarının tamsayı olması sebebiyle sayılar teorisinde büyük öneme sahiptir.

2.4.1 Tanım

$PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun

$\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z}) = \{V(z) |\ V(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ ; a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1\}$

alt grubuna modüler grup ismi verilir.

Bu grup, şu şekilde $2x2$ lik tam sayı katsayılı matrislerle de temsil edilebilir.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $detA$=1

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır. Ayrıca,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$, $k \neq 0$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden, matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisler birbirinin yerine yazılabilir.

Modüler grubun sunuşu,

$\Gamma = \langle \mathrm{T}, \mathrm{S} | \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^3 = \mathrm{I} \rangle$

şeklindedir.

2.4.2 Tanım

Modüler gruba $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ antiotomorfizmasının eklenmesiyle ortaya çıkan yeni gruba genişletilmiş modüler grup denir. Genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ sembolü ile gösterilir.

Modüler grup ve Genişletilmiş modüler grubun elemanları blok formlar halinde yazılabilir. Bu şekilde gösterim Modüler grup ve Genişletilmiş modüler grubun elemanlarını gruplandırmamızı sağlar ve gösterimde büyük kolaylık sunar.

2.4.3 Tanım

[5] Modüler ve genişletilmiş modüler grupta,

$TS(z) = z + 1$ ve $TS^2(z) = \frac{z}{z+1}$

dönüşümlerine bloklar denir.

Modüler grup ve genişletilmiş modüler gruptaki herhangi bir indirgenmiş kelimenin bu bloklar ile ifadesine o kelimenin indirgenmiş blok formu denir ve BRF ile gösterilir.

2.4.4 Teorem

[5] m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$(TS)^m(z) = z + m$ ve $(TS^2)^n(z) = \frac{z}{nz+1}$ dir.

Modüler gruptaki bir indirgenmiş $W(T,S)$ kelimesi blok formda yazılabilir.Modüler gruptaki herhangi bir kelime blokları kullanarak

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

şeklinde ifade edilebilir. Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_ksıfır olabilir. Bu gösterim, modüler grup için genel bir gösterimdir.

2.4.5 Örnek

Modüler grupta

$W(T,S) = STSTS^2TS^2TSTS^2$

kelimesi için bu kelimenin blok formu

$W(T,S) = S(TS)(TS^2)^2(TS)(TS^2)$

biçimindedir.

2.5 Parabolik Nokta

Modüler grup ve Genişletilmiş modüler grubun parabolik noktalarını Koruoğlu [7] numaralı kaynakta basit sürekli kesirler ve blok formda yazılan kelimeler yardımıyla hesapla yöntemini vermiştir.

Tanım 2.2.1 ve Tanım 2.4.3' de verilen basit sürekli kesir ve blok form tanımlarından yararlanarak modüler grubun parabolik noktalarını hesaplamaya yarayan teoremleri verelim.

2.5.1 Tanım

Bir grubun herhangi bir elemanı altında sonsuzun görüntüsüne o elemana ait parabolik nokta denir.

2.5.2 Teorem

[7] Modüler grupta TS ile başlayıp TS ile biten bir

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}(TS)^{m_{k+1}}T^j$

kelimesi için

$W^*(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}(TS)^{m_{k+1}}$

kelimesinin parabolik noktası

$[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k]$

şeklindedir.

2.5.3 Teorem

[7] Modüler grupta TS^2 ile başlayıp TS^2 ile biten bir

$W(T,S) = S^i(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k}(TS^2)^{n_k}(TS^2)^{m_{k+1}}T^j$

kelimesi için

$W^*(T,S) = (TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k}(TS^2)^{n_k}(TS^2)^{m_{k+1}}$

kelimesinin parabolik noktası

$\frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k, m_{k+1}]}$

şeklindedir.

2.5.4 Teorem

[7] Modüler grupta TS^2 ile başlayıp TS ile biten bir

$W(T,S) = S^i(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$

kelimesi için

$W^*(T,S) = (TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k}(TS^2)^{n_k}$

kelimesinin parabolik noktası

$\frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,\ldots,m_k]}$

şeklindedir.

2.5.5 Teorem

[7] Modüler grupta TS ile başlayıp TS^2 ile biten bir

$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$

kelimesi için parabolik noktalar

$i = 0, j = 0$ ise $[m_0; n_0, m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k]$

$i = 0, j = 1$ ise $[m_0; n_0, m_1, n_1, \ldots, m_k]$

$i = 1, j = 0$ ise $-\frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,\ldots,m_k,n_k]+1}$

$i = 1, j = 1$ ise $-\frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,\ldots,m_k]+1}$

$i = 2, j = 0$ ise $-1 - \frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,\ldots,m_k,n_k]}$

$i = 2, j = 1$ ise $-1 - \frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,\ldots,m_k]}$

şeklindedir.

2.5.6 Örnek

Modüler grupta $W(T,S) = STSTS^2TSTS^2$ kelimesi için bu kelimenin blok formu $W(T,S) = S(TS)(TS^2)(TS)(TS^2)$ biçimindedir. Bu kelime için Teorem 2.5.5 uygulanırsa, kelimenin parabolik noktası:

$i = 1, j = 0$ olduğundan dolayı

$$-\frac{1}{[1;1,1,1]+1} = -\frac{3}{8}$$

olarak bulunur.

Konuyla ilgili teoremlerin ispatı ve daha detaylı bilgi için [7] numaralı kaynak incelenebilir.

3. STERN-BROCOT SAYI DİZİSİ

Stern-Brocot sayı dizisi Moritz Abraham Stern'in 1858 tarihli [1] "Ueber eine zahlentheoretische Funktion" isimli çalışması ile Achill Brocot'un 1861 tarihli [2] "Calcul des rouages par approximation, nouvelle methode" isimli çalışmasıyla literatürde yerini almıştır.

Bu eserlerde yer alan açıklamalara göre Stern-Brocot sayı dizisinin tanımı şu şekilde verilmiştir.

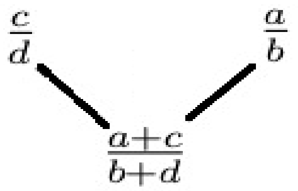
3.1 Tanım

Stern-Brocot ağacı, ilk elemanı $\frac{0}{1}$, son elemanı $\frac{1}{0}$ olan bir sayı dizisidir. Sayılar teorisinde, negatif olmayan rasyonel sayıları listelemek için kullanılan bir metodtur.

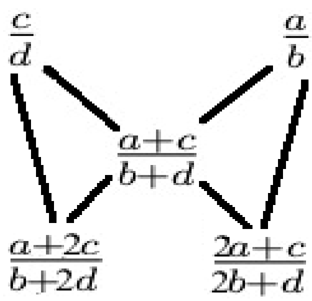
Stern-Brocot ağacı oluşturulurken ilk sıraya $\frac{0}{1}$ ve $\frac{1}{0}$ yazılır. İkinci sıraya birinci sıradaki elemanlar aynen yazılır ve $\frac{0}{1}$ ve $\frac{1}{0}$ kesirleri arasına bunların medyanı olan $\frac{1}{1}$ eklenir.

Stern-Brocot ağacının n-inci sıradaki elemanları bulunurken $(n-1)$-inci sıradaki elemanlar aynen yazılır, $(n-1)$-inci sıradaki her $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ ardışık kesirlerinin arasına n-inci sırada $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirlerinin medyanı olan $\frac{a+c}{b+d}$ kesiri eklenir.

Stern-Brocot ağacında elemanları bulmak için yapılan işlemleri şu şekilde gösterebiliriz.

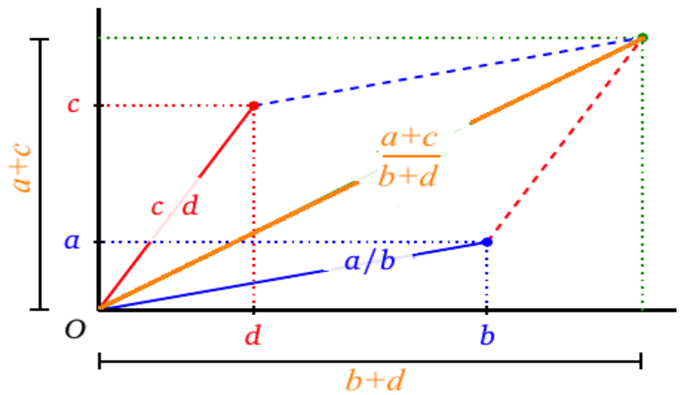


Şekil 3.1: Stern-Brcot sayı dizisinin ilk adımı



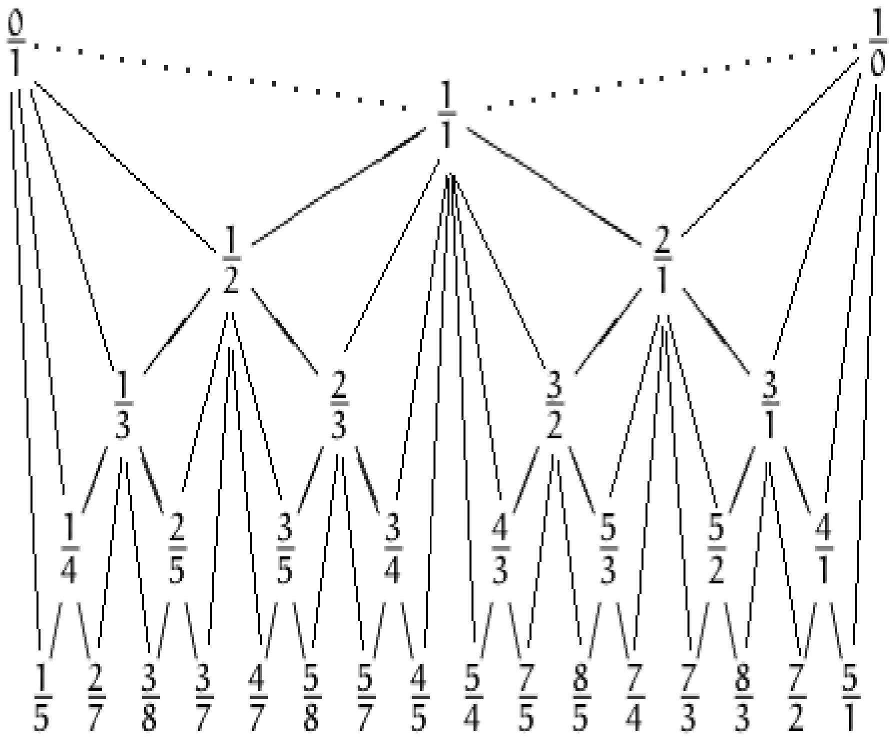
Şekil 3.2: Stern-Brocot sayı dizisinin ikinci adımı

Burada yapılan işlemi $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirleri için kartezyen koordinat sistemi üzerinde gösterelim. Payları y ekseninden ve paydaları x ekseninden aldığımızda ortaya çıkan grafik şu şekilde olur.



Şekil 3.3: Stern-Brocot sayı ağacındaki bir terimin koordinat sistemi üzerinde gösterimi

Yapılan bu işlemler neticesinde ortaya çıkan Stern-Brocot ağacının görünümü şu şekilde olur.



Şekil 3.4: Stern-Brocot sayı ağacının ilk birkaç dalı

3.2 Örnek

Stern-Brocot sayı dizisinin ilk birkaç satırındaki elemanları şu şekilde gösterebiliriz.

$$SB_0 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$$

$$SB_1 = \left\{\frac{1}{1}\right\}$$

$$SB_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\}$$

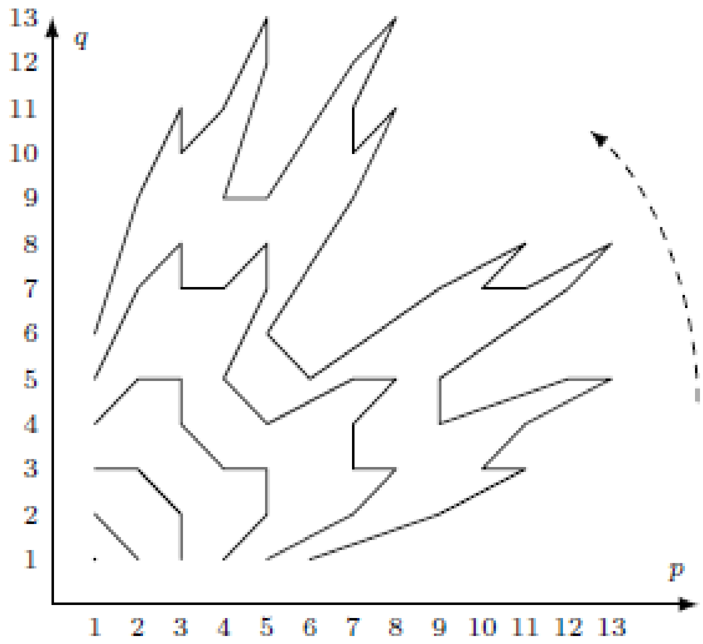
$$SB_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}\right\}$$

$$SB_4 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{4}{1}\right\}$$

$$SB_5 = \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{2}, \frac{5}{1}\right\}$$

3.3 Tanım

$\frac{p}{q}$ Stern-Brocot sayı sizisinin elemanları olmak üzere, dizinin her bir terimi kartezyen koordinat sistemi üzerinde işaretlenip aynı satırlardaki elemanlar kendi arasında ardışık ve doğrusal olarak birbirlerine bağlandığında ortaya şu şekilde bir grafik çıkar.



Şekil 3.5: Stern-Brocot sayı dizisinin koordinat düzleminde temsili

Konuyla ilgili detaylı bilgi için [1,2,25,26] numaralı kaynaklar incelenebilir.

Şimdi Stern-Brocot sayı dizisi ile ilgili bazı ilginç özellikleri ispatını vermeden teorem olarak verelim.

3.4 Teorem

$\frac{p_1}{q_1}$ ve $\frac{p_2}{q_2}$ Stern-Brocot sayı dizisinde komşu iki eleman olsun. Bu durumda her zaman şu eşitlik elde edilir.

$p_1 q_2 - p_2 q_1 = \pm 1$

3.5 Teorem

n Stern-Brocot sayı dizisinin satır numarası, $r = \frac{p}{q}$, $S(r) = \frac{1}{pq}$ olmak üzere ağacın herhangi bir satırındaki S(r)'lerin toplamı 1'e eşit olur.

SB_n için $\sum_r S(r) = 1$

3.6 Örnek

SB_4 için $S(r)$ değerlerini hesaplayalım.

$$SB_4 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{4}{1}\right\}$$

$$S(r) = \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}$$

$$\sum_r S(r) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = 1$$

3.7 Teorem

n Stern-Brocot sayı dizisinin satır numarası, $r = \frac{p}{q}$, $M(r) = p + q$

olmak üzere ağacın herhangi bir satırındaki $M(r)$'lerin toplamı $2 \cdot 3^{n-1}$ 'e eşit olur.

SB_n için $\sum_r M(r) = 2 \cdot 3^{n-1}$

3.8 Örnek

SB_3 için $M(r)$ değerlerini hesaplayalım.

$$SB_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}\right\}$$

$$M(r) = 1 + 3\,, 2 + 3\,, 3 + 2\,, 3 + 1$$

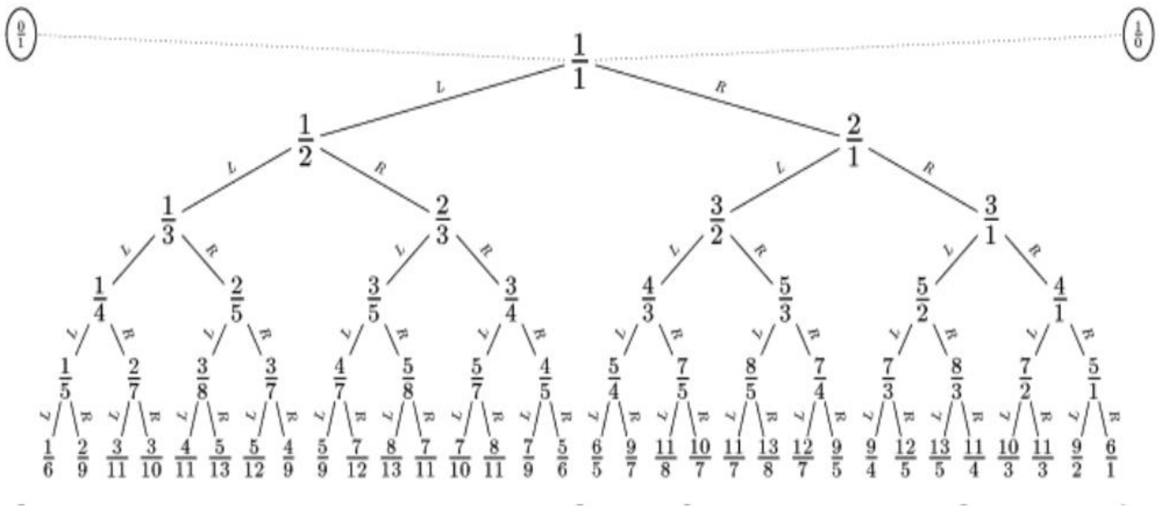
$$\sum_r M(r) = 4 + 5 + 5 + 4 = 18 = 2 \cdot 3^2$$

3.9 Uyarı

Stern-Brocot sayı dizisinin her elemanı ağaç grafiği üzerinde $L(sol)$ ve $R(sağ)$ imgelerinin uygun bir kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

Böylece Stern-Brocot sayı dizisinin elemanlarının negatif olmayan rasyonel sayılardan oluşmasından dolayı, pozitif rasyonel sayıları bu yeni gösterim ile ifade etme imkanı bulmuş oluruz.

Stern-Brocot sayı dizisindeki her elemanı ağaç üzerinde $L(sol)$ ve $R(sağ)$ şeklinde imgeleyerek aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



Şekil 3.6: Stern-Brocot sayı ağacı

Bu durumda $L(sol)$ ve $R(sağ)$ imgeleri ile elde edilen yeni Stern-Brocot ağacının formatı şu şekilde gösterilebilir.

ϵ

L R

LL LR RL RR

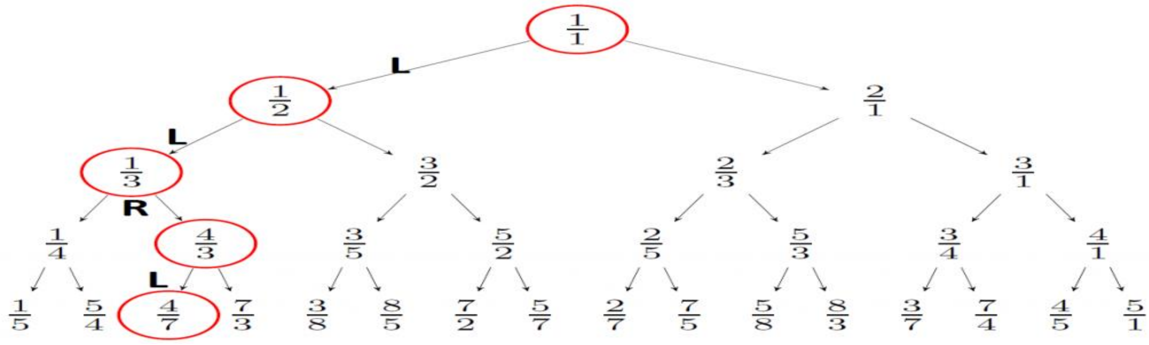
LLL LLR LRL LRR RLL RLR RRL RRR

Şekil 3.7: Stern-Brocot L(sol) ve R(sağ) gösterimi

Şimdi pozitif rasyonel sayıların $L(sol)$ ve $R(sağ)$ şeklinde ifade edilmesine birkaç örnek verelim.

3.10 Örnek

$\frac{4}{7}$ kesrini Stern-Brocot ağacı üzerinde görelim.



Şekil 3.8: kesrin L(sol) ve R(sağ) formatında Stern-Brocot ağacı üzerinde gösterilmesi

3.11 Tanım

Stern-Brocot sayı dizisindeki her eleman $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında imgelendiğinde SB_n , Stern-Brocot sayı dizisinin n-inci satırı olmak üzere

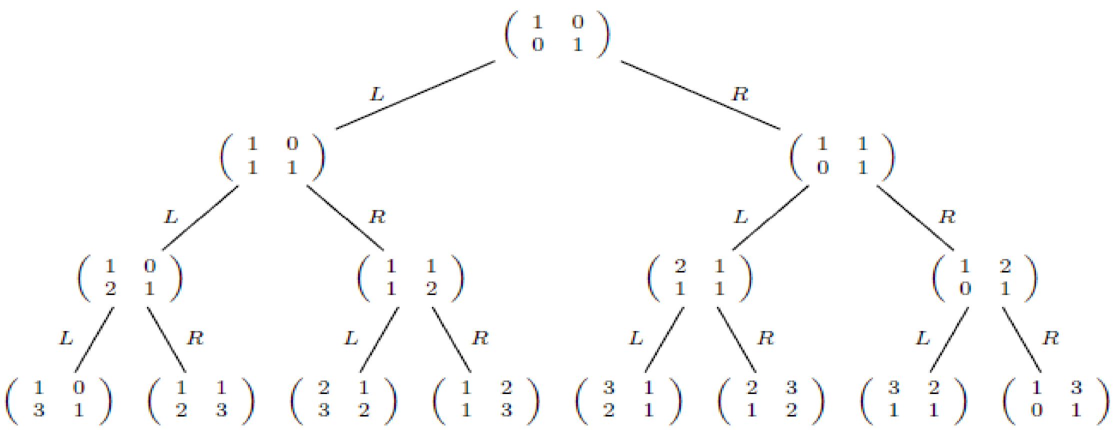
$$SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

ifadesine Stern-Brocot sayı dizisinin blok formu denir ve $SBBF$ ile gösterilir.
Burada Stern-Brocot sayı dizisindeki terimlerin kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir, ayrıca ifadede yer alan n sayısı kuvvetler toplamının 1 fazlasına eşittir.

$$n = m_0 + n_0 + \cdots + m_k + n_k + 1$$

3.12 Tanım

Stern-Brocot dizisinde ilk terimler $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ olmak üzere medyanı olan $\frac{a+c}{b+d}$ kesirini $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şeklinde $2x2$ lik matris olarak yazalım.



Şekil 3.9: Stern-Brocot sayı ağacının matris formu

Burada $*$ işlemi Stern-Brocot sayı dizisinin matris formunda geçerli bir işlem olmak üzere, L ve R işlemleri;

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

ve $k \in \mathbb{Z}^{+}$ için

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^{k} = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^{k} = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

şeklinde işleme Stern-Brocot çarpımı denir.

3.13 Sonuç

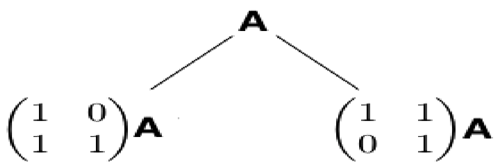
Bir önceki tanımda dikkat edilirse Stern-Brocot sayı dizisinin matris formunda gösteriminde her elemanın determinantı 1 dir.

Yukarıda $2x2$ tipinde matrislerden oluşanStern-Brocot ağacını gösterdik. Bu ağacın sol ve sağ dalları arasında bir bağıntı olup olmadığını inceleyelim.

Buradan sol ve sağ matrisleri şu şekilde genelleyebiliriz.

$L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bu şekilde Stern-Brocot ağacına eşdeğer olan matris ağacını şu şekilde özetleyebilir ve genelleyebiliriz.



Şekil 3.10: Stern-Brocot matris ağacının L(sol) ve R(sağ) formatında genel gösterimi

Bu yöntem $A = I$ birim matristen başlayarak devam eder ve Stern-Brocot ağacının görünümünü önemli ölçüde basitleştirir.

Burada başlangıçta $A = I$ birim matrisi kabul ettik. Daha sonra alt dallarda birim matris ile çarpmak sonucu değiştirmeyeceği için, bundan böyle ağacın dallarını sadece

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

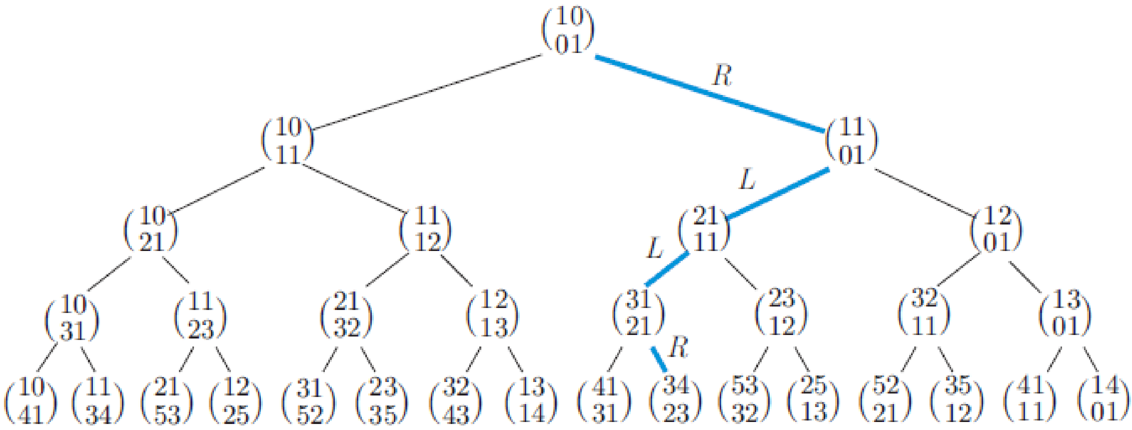
şeklinde ifade edeceğiz.

3.14 Not:

Stern-Brocot sayı dizisinde L(sol) ve R(sağ) yöntemi rasyonel formda gösterim ile matris formdaki gösterim için aynıdır.

3.15 Örnek

RL^2R kelimesinin matris formunda karşılığını ifade edelim ve ağaç üzerinde gösterelim.



Şekil 3.11: Matris ağacı üzerinde L(sol) ve R(sağ) gösterimi

3.16 Örnek

$\frac{4}{7}$ kesrini L(sol) ve R(sağ) formatında yazalım ve yapılan işlemi şekil üzerinde görelim

$\frac{4}{7} = LLRL = L^2RL$

3.17 Örnek

$\frac{13}{18}$ ve $\frac{17}{5}$ kesirlerini L(sol) ve R(sağ) formatında ifade edip karşılık gelen L(sol) ve R(sağ) kombinasyonlarını yazalım.

$\frac{13}{18} = LRRLRL = LR^2LRL$, $\frac{17}{5} = RRRLLR = R^3L^2R$

Konu hakkında daha detaylı bilgi için [1,2,11,12,13,25,26] numaralı kaynaklar incelenebilir.

3.18 Not

Kesirleri L(sol) ve R(sağ) formatında yazmak için Stern-Brocot ağacı hesaplayıcı uygulaması kullanılabilir.

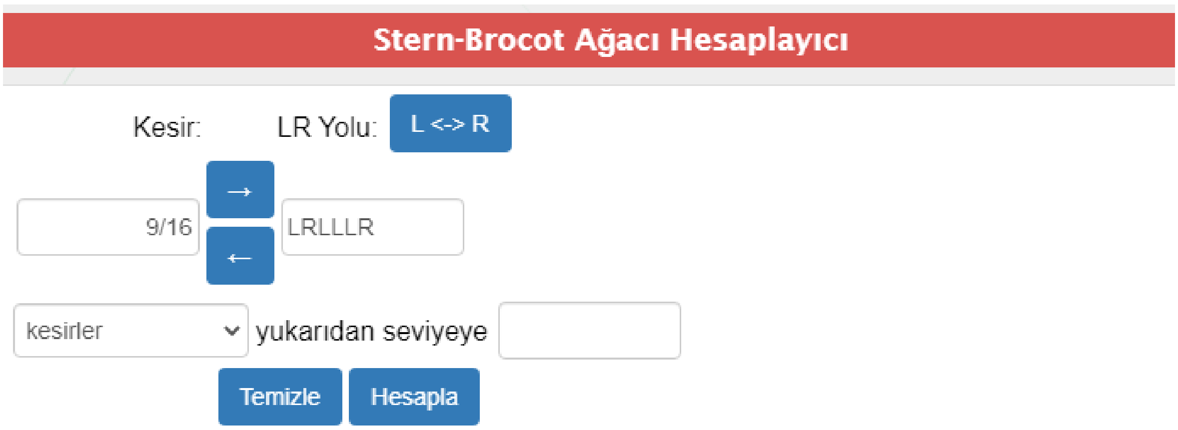
Bu programda Stern-Brocot sayı dizisinin herhangi bir elemanının kelime formu yazıldığında karşılık gelen kesir veya herhangi bir elemanın rasyonel formu yazıldığında karşılık gelen blok kelime gösterimi bulunabilir.Bu yöntem özellikle ağacın alt dallarındaki kesirlerin yerini bulmada büyük kolaylık sağlar.

Ayrıca Stern-Brocot ağacındaki herhangi bir satırda yer alan tüm elemanları bulmamıza olanak tanır. "Stern-Brocot ağacı hesaplayıcı" uygulamasına aşağıdaki adresten ulaşılabilir.

" https://www.thinkcalculator.com/numbers/stern-brocot.php"

3.19 Örnek

Stern-Brocot ağacı hesaplayıcı uygulaması yardımıyla $\frac{9}{16}$ kesrinin karşılığını bulalım.



Şekil 3.12: [9] Stern-Brocot ağacı hesaplama programı

4. STERN-BROCOT SAYI DİZİSİ VE SÜREKLİ KESİRLER

Sürekli kesirler ile ilgili 1963 yılında Khovanskii, [18] numaralı çalışmasında kesirlerin sürekli kesir açılımlarına yer vermiştir. Rockett 1992 yılında [17] numaralı eserinde sürekli kesirlerden bahsetmiştir. Ayrıca 2018 yılına geldiğimizde Wall, [16] numaralı kitabında sürekli kesirler ile ilgili detaylı bilgiler vermiştir. Konuyla ilgili daha detaylı bilgi edinmek için bu kaynaklar incelenebilir.

Bölüm 2'de her rasyonel sayının bir sürekli kesir açılımı olduğunu ifade etmiştik. Henndger [15] numaralı 1997 yılında yayınlanan Lineer Algebra and its Applications isimli çalışmasında bir kesrin basit sürekli kesir açılımına karşılık gelen matris dönüşümünü ifade ve ispat etmiştir. Buna göre her basit sürekli kesir açılımının bir matris dönüşümü vardır.

Stern-Brocot sayı dizisindeki rasyonel sayılardan oluşan bütün terimlerin sürekli kesir şeklinde açılımları vardır. Bu yüzden bu kısımda sürekli kesirler ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Stern-Brocot sayı dizisinin her elemanı bir rasyonel sayı olduğu için, dizinin terimlerinin sürekli kesir açılımları vardır. Dolayısıyla matris açılımı da vardır. Ayrıca Knott [4] numaralı çalışmasında $SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$ formunda yazılabilen Stern-Brocot kelimelerine karşılık gelen basit sürekli kesir açılımını vermiştir.

4.1 Teorem

[4] Bir rasyonel sayının sonlu sürekli kesir gösterimi $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ olmak üzere her rasyonel sayı Stern-Brocot sayı dizisindeki blok formda $L(sol)$ ve $R(sağ)$ gösterimi ile temsil edilebilir. Her bir basit sürekli kesir açılımına karşılık gelen $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatı;

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2} \dots R^{a_n-1}$, n çift ise

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2} \dots L^{a_n-1}$, n tek ise

şeklinde olur.

İspat

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 0$ için:

$[a_0] = a_0$

ve

$R^{a_0-1} = a_0$

olduğundan dolayı $n = 0$ için doğru olduğu görülür.

n çift ise;

$n + 1$ için:

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1}$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 2$ için doğru olduğunu gösterelim

Basit sürekli kesir açılımı;

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{\vdots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

olmak üzere,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{\vdots}{\cfrac{1}{a_n}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{\vdots}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{1}}}}$$

yazabiliriz. Bundan dolayı;

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1,1]$

elde edilir.

$$[\underbrace{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n+1}] = [\underbrace{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1,1}_{n+2}]$$

olduğundan dolayı;

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1}$

ve

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1,1] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1} L^{1-1}$

yazabiliriz. Buradan:

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1,1] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1} L^{1-1}$

$= R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1} L^0$

$= R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1} I$

$= R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1}$

elde edilir. Kabul gereği;

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \ldots R^{a_n-1}$

ifadesi doğru olduğundan $n + 2$ değeri için doğru olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde;

n tek ise;

$n + 1$ için:

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1}$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 2$ için doğru olduğunu gösterelim.

Basit sürekli kesir açılımı;

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{\vdots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

olmak üzere,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{\vdots}{\cfrac{1}{a_n}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{\vdots}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{1}}}}$$

yazabiliriz. Bundan dolayı;

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$

elde edilir.

$[\underbrace{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n}_{n+1}] = [\underbrace{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1}_{n+2}]$

olduğundan dolayı;

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1}$

ve

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1} R^{1-1}$

yazabiliriz. Buradan:

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1} R^{1-1}$

$= R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1} R^0$

$= R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1} I$

$= R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1}$

elde edilir. Kabul gereği;

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} \dots L^{a_n - 1}$

ifadesi doğru olduğundan $n + 2$ değeri için doğru olduğu gösterilmiş olur.

Konuyla ilgili detaylı bilgi için [11,12,14,15,16,17,18,19,24] numaralı kaynaklar incelenebilir.

Şimdi bu teoremle ilgili birkaç örnek verelim ve konuyu pekiştirelim.

4.2 Örnek

$\frac{7}{3}$ kesrinin sürekli kesir açılımını inceleyelim ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında karşılığını bulalım

$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

$= [2; 3]$

Teorem 4.1 'den dolayı;

$[2; 3] = R^2 L^2$

elde edilir.

Ayrıca Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde incelendiğinde de $\frac{7}{3} = R^2 L^2$ olduğu görülür.

4.3 Örnek

$\frac{47}{21}$ kesrinin sürekli kesir açılımını inceleyelim ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında karşılığını bulalım.

$\frac{47}{21} = 2 + \frac{5}{21}$

$= 2 + \frac{1}{\frac{21}{5}}$

$= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}$

$= [2; 4,5]$

benzer şekilde Teorem 4.1 'den dolayı;

$[2; 4,5] = R^2 L^4 R^4$

sonucu elde edilir.

Burada ortaya çıkan sonuç Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde de incelendiğinde yine $\frac{47}{21} = R^2 L^4 R^4$ olduğu görülür.

4.4 Örnek

$\frac{18}{63}$ kesrinin sürekli kesir açılımını inceleyelim ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında karşılığını bulalım.

$\frac{18}{63} = 0 + \frac{18}{63}$

$= 0 + \frac{1}{\frac{63}{18}}$

$0 + \frac{1}{3 + \frac{9}{18}}$

$$0+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}$$

$= [0; 3,2]$

benzer şekilde Teorem 4.1 'den dolayı;

$[0; 3,2] = R^0L^3R^1 = L^3R^1$

sonucu elde edilir.

Burada ortaya çıkan sonuç Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde de incelendiğinde yine $\frac{18}{63} = R^0L^3R^1$ olduğu görülür.

4.5 Örnek

$\frac{13}{9}$ kesrinin sürekli kesir açılımını inceleyelim ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında karşılığını bulalım.

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}$$

$= [1; 2,4]$

benzer şekilde Teorem 4.1 'den dolayı;

$[1; 2,4] = R^1L^2R^3$

sonucu elde edilir.

Burada elde edilen sonuç Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde de incelendiğinde yine $\frac{13}{9} = R1L2R3$ olduğu görülür.

4.6 Örnek

$\frac{19}{26}$ kesrinin sürekli kesir açılımını inceleyelim ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında karşılığını bulalım.

$$\frac{19}{26} = 0 + \frac{19}{26}$$

$$= 0 + \cfrac{1}{\frac{26}{19}} = 0 + \cfrac{1}{1+\frac{7}{19}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{19}{7}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{7}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{5}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$$

$= [0; 1,2,1,2,2]$

benzer şekilde Teorem 4.1 'den dolayı;

$[0; 1,2,1,2,2] = R^0 L^1 R^2 L^1 R^2 L^1 = L^1 R^2 L^1 R^2 L^1$

sonucu elde edilir.

Burada elde ettiğimiz sonuç Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde de incelendiğinde yine $\frac{19}{26} = L^1 R^2 L^1 R^2 L^1$ olduğu görülür.

4.7 Örnek

$\frac{25}{61}$ kesrinin sürekli kesir açılımını inceleyelim ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatındaki Stern-Brocot kelimesi karşılığını bulalım

$$\frac{25}{61} = 0 + \frac{25}{61}$$

$$= 0 + \frac{1}{\frac{61}{25}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{11}{25}}$$

$$= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{25}{11}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{3}{11}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{11}{3}}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

$= [0; 2,2,3,1,2]$

Teorem 4.1 'den dolayı;

$[0; 2,2,3,1,2] = R^0 L^2 R^2 L^3 R^1 L^1 = L^2 R^2 L^3 R^1 L^1$

sonucu elde edilir.

Burada ortaya çıkan sonuç Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde de incelendiğinde yine $\frac{25}{16} = L^2R^2L^3R^1L^1$ olduğu görülür.

Koruoğlu [7] numaralı kaynakta sürekli kesirler yardımıyla modüler grupta blok formda yazılabilen $W(T,S)$ kelimelerinin parabolik noktalarını hesaplamaya yönelik teoremler vermiştir.

Biz ise bu bölümde sürekli kesirler ile Stern-Brocot dizisinin $SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \ldots R^{m_k}L^{n_k}$ şeklindeki blok kelimeleri arasındaki ilişkiyi inceledik.

Sürekli kesirler ile modüler gruptaki blok formda yazılabilen kelimeler arasındaki ilişki [7] ve sürekli kesirlerin Stern-Brocot dizisinin $SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \ldots R^{m_k}L^{n_k}$ blok kelimeleri arasındaki ilişki [4] bizleri modüler grubun blok kelimeleri ile Stern-Brocot sayı dizisinin blok kelimeleri arasında bir eşitlik olup olmayacağı konusunda düşünmeye sevk etti.

Bunun üzerine yaptığımız çalışmalar neticesinde orijinal sonuçlar elde ettik ve literatüre yeni teoremler kazandırdık.

Sonraki bölümde modüler grubun blok formda yazılabilen kelimeleri ile Stern-Brocot sayı dizisinin blok formda yazılan kelimeleri arasındaki yakından ilişki incelenmiştir, Konuyla ilgili özgün teorem ve örnekleri verilmiştir.

5. STERN-BROCOT SAYI DİZİSİ VE MODÜLER GRUP

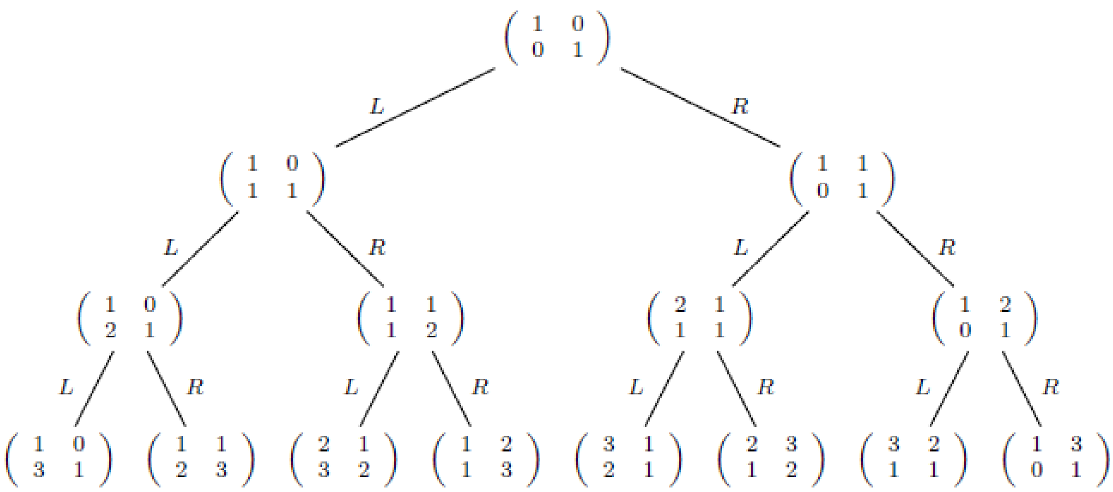
Stern-Brocot sayı dizisi literatüre girdiği yüz yılı aşkın süre boyunca dikkatleri üzerine çeken bir konu olmuştur. İkinci bölümde Stern-Brocot sayı dizisinin bir möbiüs dönüşümü (kesirli doğrusal dönüşüm) olduğunu ifade etmiştik. Ayrıca [5] modüler grup ve genişletilmiş modüler grubun her elemanının blok formlar yardımıyla ifade edilebildiğini belirtmiştik.

Bu konuyla alakalı daha detaylı bilgi için [5,11,12] numaralı kaynaklar incelenebilir.

Bu bölümde ise Stern-Brocot sayı dizisinin elemanları ile modüler gruptaki blok formlar arasında yer alan bağıntıyı özgün sonuçlarımız ile açıklayacağız. Bu bölümün tamamı özgün bir çalışmadır. Şimdi blok dönüşümler ile Stern-Brocot sayı dizisinin blok formda yazılan kelime şeklindeki elemanları arasındaki ilişkiyi verelim.

5.1 Tanım

Stern-Brocot sayı dizisinde $\frac{1}{1}$ kesrine karşılık $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim matrisini yazalım ve her adımda son matristeki sütunlardan birini diğerine (sola giderken sağdaki sütunun soldaki sütuna ve sağa giderken soldaki sütunun sağdaki sütuna eklenmesi şeklinde) ekleyelim. Bu şekilde elde edilen matrislere Stern-Brocot sayı dizisinin matris formu denir.



Şekil 5.1: Stern-Brocot sayı ağacının matris formu

Hatırlayacak olursak blok formu "modüler grupta herhangi bir indirgenmiş kelimenin bloklar ile ifadesine o kelimenin indirgenmiş blok formu denir ve BRF ile gösterilir." şeklinde ifade etmiştik.

Modüler gruptaki bir indirgenmiş $W(T,S)$ kelimesi blok formda yazılabilir.Modüler gruptaki herhangi bir kelime blokları kullanarak

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

şeklinde ifade edilebilir. Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Burada (TS) ve (TS^2) blokları ile bu blokların bazı kuvvetlerinin matris formlarını inceleyerek genel bir sonuca varmaya çalışalım.

$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

olmak üzere;

$TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R$

$TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = L$

olduğu görülür.

Burada dikkatimizi çeken Stern-Brocot ağacında $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ile ifade ettiğimiz matrisin modüler grupta $TS^2 = \frac{z}{z+1}$ bloğunun matris formatına eşit olması ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile ifade ettiğimiz matrisin modüler grupta $TS = z + 1$ bloğunun matris formatına eşit olmasıdır.

Genelleme yapabilmek için (TS) ve (TS^2) blok formlarının bazı kuvvetlerine ve birbirleriyle çarpımlarına bakalım.

$(TS)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R^2$

$(TS)(TS^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = RL$

$(TS^2)(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = LR$

$(TS^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = L^2$

Bu sonuçları incelediğimizde Stern-Brocot sayı ağacında 3.satırda yer alan elemanları elde ettiğimizi görürüz. Bu şekilde yapmış olduğumuz işlemlere devam edecek olursak modüler grup blok kelimeleri ile Stern-Brocot blok kelimeleri arasındaki ilişkiyi görmemiz mümkün olur.

$(TS)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R^3$

$(TS)^2(TS^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R^2L$

$(TS)(TS^2)(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = RLR$

$$(TS)(TS^2)^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix} = RL^2$$

$$(TS^2)(TS)^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix} = LR^2$$

$$(TS^2)(TS)(TS^2) = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} = LRL$$

$$(TS^2)^2(TS) = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix} = L^2R$$

$$(TS^2)^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} = L^3$$

Yukarıda yer alan işlemleri incelediğimizde ise Stern-Brocot sayı ağacında 4.satırda yer alan elemanları elde etiğimizi görürüz.

Bu işlemlere devam ettiğimizde modüler grubun blok formdaki kelimeleri ile Stern-Brocot sayı dizisinin blok formdaki kelimeleri arasında yakından bir ilişki olduğunu görürüz.

5.2 Sonuç

Stern-Brocot sayı ağacında her terim $L(sol)$ ve $R(sağ)$ nin uygun bir çarpımı şeklinde yazılabildiği için $L = TS^2$ ve $R = TS$ yazarak terimleri bloklar yardımıyla ifade edebiliriz.

Ayrıca $(TS)^m(z) = z + m$ ve $(TS^2)^n(z) = \frac{z}{nz+1}$ olduğundan dolayı Stern-Brocot sayı dizisinin her elemanı modüler grupta bir kelimeye karşılık gelir.

Hatırlayacak olursak Teorem 2.4.4'e göre modüler gruptaki bir indirgenmiş $W(T,S)$ kelimesi blok formda şu şekilde yazılabilir.

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Burada özel bir durum olarak (i=0; j=0) aldığımızda her kelime Stern-Brocot sayı dizisinin bir terimine karşılık gelir. Öyleyse blok formdaki her bir modüler grup elemanı blok formdaki Stern-Brocot kelimeleri ile ifade edilebilir.

Şimdi sözel olarak ifade ettiğimiz bu özgün sonucun teoremini ve ardından ispatını verelim.

5.3 Teorem

Stern-Brocot sayı dizisinde,

$x \in SB_n$ rasyonel sayısı için,

$n = 1$ için:

$W(T, S) = T^2 = S^3 = SB_1 = I$

$n \geq 2$ için:
$0 < x < \infty$ olduğu durumda;
$W(T, S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

şeklindedir. Yani $W(T, S)$ modüler grup kelimesi ile $SBBF$ Stern-Brocot kelimesinin matris formları birbirine eşittir.

Burada blokların kuvvetleri ve Stern-Brocot dizisindeki terimlerin kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

İspat

Tümevarım yöntemiyle ispat yapalım.

$x \in SB_n$ rasyonel sayısı için,
$n = 1$ için:

$$T^2 = S^3 = SB_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu açıkça görülür.

$n \geq 2$ için:
$0 < x < \infty$ olduğu durumda;
$m_0 = 1$ için:

$$(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$(TS) = R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ için:

$(TS)^k = R^k$

doğru olsun.

$m_0 = k + 1$ için:

$(TS)^{k+1} = R^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ için:

Teorem 2.3.3'e göre

$$(TS)^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 3.12'ye göre;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k \cdot a + c \\ b & k \cdot b + d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a + c}{(k+1)b + d}$$

olmak üzere

$$R^k = I * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 + 0 \\ 0 & k \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$(TS)^{k+1} = (TS)^k (TS)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$R^{k+1} = I * R^k * R$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R$

$= \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 + 0 \\ 0 & k \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * R$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 + k \\ 0 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$(TS)^{k+1} = R^{k+1}$

olduğu görülür. (I)

Benzer şekilde;

$n_0 = 1$ için:

$(TS^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ve

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$(TS^2) = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ifadesi doğrudur.

$n_0 = k$ için:

$(TS^2)^k = L^k$

doğru olsun.

$n_0 = k + 1$ için:

$(TS^2)^{k+1} = L^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$n_0 = k$ için:

Teorem 2.3.3'e göre

$$(TS^2)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 3.12'ye göre;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a + k \cdot c & c \\ b + k \cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a + (k+1)c}{b + (k+1)d}$$

olmak üzere

$$L^k = I * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot 0 + 1 & 0 \\ k \cdot 1 + 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$(TS^2)^{k+1} = (TS^2)^k (TS^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$L^{k+1} = I * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot 0 + 1 & 0 \\ k \cdot 1 + 0 & 1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} * L$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 0 & 0 \\ k + 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$(TS^2)^{k+1} = L^{k+1}$$

olduğu görülür. (II)

Daha sonra blokların çarpımını inceleyecek olursak;

$m_0 = 1$ ve $n_0 = 1$ için:

$$(TS)(TS^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$R * L = I * R * L$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * R * L$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+0 \\ 0 & 0+1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 1+0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$(TS)(TS^2) = R * L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

$$(TS)^k(TS^2)^k = R^k L^k$$

doğru olsun.

$m_0 = k + 1$ ve $n_0 = k + 1$ için:

$$(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = R^{k+1}L^{k+1}$$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

Teorem 2.3.3'e göre

$$(TS)^k(TS^2)^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 3.12'ye göre;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a + k \cdot c & c \\ b + k \cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a + (k+1)c}{b + (k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k \cdot a + c \\ b & k \cdot b + d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a + c}{(k+1)b + d}$$

olmak üzere

$$R^k L^k = I * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 + 0 \\ 0 & k \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot k + 1 & k \\ k \cdot 1 + 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + k^2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = (TS)^k(TS)(TS^2)^k(TS^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 + k + 1 & k+1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 + 2k + 2 & k+1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$R^{k+1}L^{k+1} = I * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k\cdot 1+0 \\ 0 & k\cdot 0+1 \end{pmatrix} * R * L^k * L = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k \\ 0 & 0+1 \end{pmatrix} * L^k * L = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} k(k+1)+1 & k+1 \\ k\cdot 1+0 & 1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} k^2+k+1 & k+1 \\ k & 1 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} k^2+k+1+k+1 & k+1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2+2k+2 & k+1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = R^{k+1}L^{k+1}$$

olduğu görülür. (III)

Benzer şekilde;

$m_0 = 1$ ve $n_0 = 1$ için:

$$(TS^2)(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ve

$$L * R = I * L * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0 \\ 0+1 & 1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+0 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$(TS^2)(TS) = L * R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

$$(TS^2)^k(TS)^k = L^k R^k$$

doğru olsun.

$m_0 = k + 1$ ve $n_0 = k + 1$ için:

$(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = L^{k+1}R^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

Teorem 2.3.3'e göre

$$(TS^2)^k(TS)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 3.12'ye göre;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a + k \cdot c & c \\ b + k \cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a + (k+1)c}{b + (k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k \cdot a + c \\ b & k \cdot b + d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a + c}{(k+1)b + d}$$

olmak üzere

$$L^kR^k = I * L^kR^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L^kR^k$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot 0 + 1 & 0 \\ k \cdot 1 + 0 & 1 \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 + 0 \\ k & k \cdot k + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = (TS^2)^k(TS^2)(TS)^k(TS)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k + 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \\ k+1 & k^2+k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & k^2+2k+2 \end{pmatrix}$$

ve

$$L^{k+1}R^{k+1} = I * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot 0 + 1 & 0 \\ k \cdot 1 + 0 & 1 \end{pmatrix} * L * R^k * R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 + 0 \\ k+1 & k(k+1)+1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k+1 & k^2+k+1 \end{pmatrix} * R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & k^2+k+1+k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & k^2+2k+2 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = L^{k+1}R^{k+1}$$

olduğu görülür. (IV)

Sonuç olarak;

(I), (II), (III) ve (IV) den dolayı

$x \in SB_n$ rasyonel sayısı için,
$n = 1$ için:

$$T^2 = S^3 = SB_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:
$0 < x < \infty$ olduğu durumda;
$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

elde edilir. İspat biter. Burada $m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için ispatı gösterdik. Farklı $m_0 = t$ ve $n_0 = z$ değerleri için eşitliğin olduğu benzer şekilde görülebilir.

5.4 Sonuç

Stern-Brocot sayı dizisi terimleri ile modüler grup blok form kelimeleri arasında şöyle bir ilişki vardır.

$x \in SB_n$ rasyonel sayısı için,

$n = 1$ için:

$$T^2 = S^3 = SB_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:

$0 < x < \infty$ olduğu durumda;

$$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

5.5 Teorem

Teorem 5.3 de

$$SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

ifadesinde yer alan n sayısı Stern-Brocot sayı ağacında n. satırı temsil eder ve bu ifade kuvvetler toplamının 1 fazlasına eşittir.

$$n = m_0 + n_0 + \cdots + m_k + n_k + 1$$

İspat

$n = 1$ için I olduğu ve sonraki $L(sol)$ veya $R(sağ)$ her adım için bir satır ilerleme olduğu Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde açıkça görülür.

5.6 Uyarı

Stern-Brocot sayı dizisinin kelime formu olan;

$$SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

ifadesindeki SB_n için yazım tek türlü değildir.

$$n = m_0 + n_0 + \cdots + m_k + n_k + 1$$

ifadesine göre toplamı $n+1$ olan farklı kuvvetler söz konusu olabilir. Bu durumda

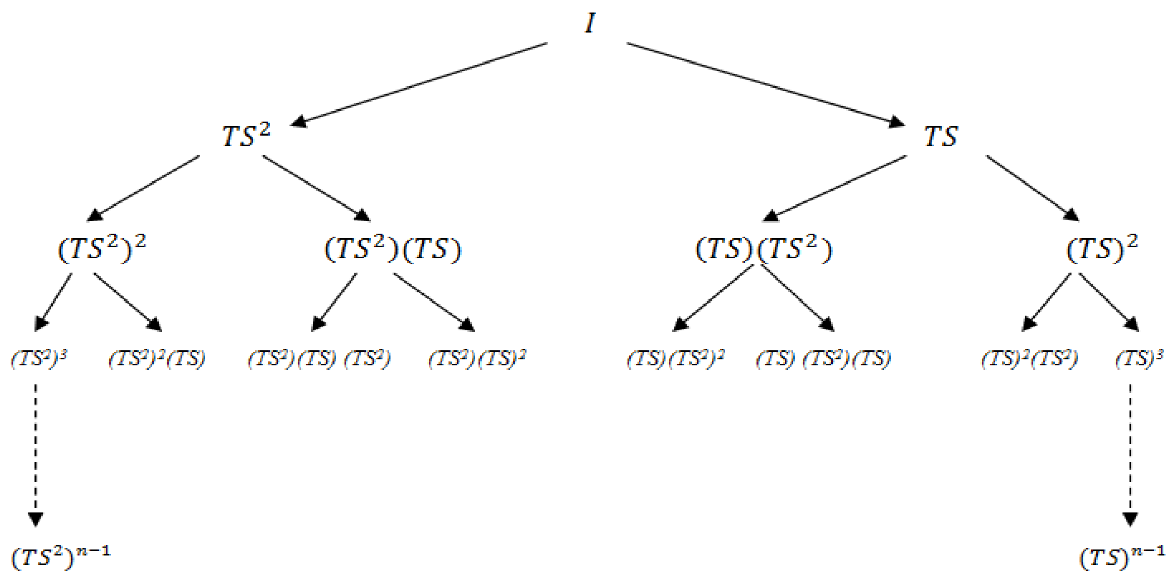
$$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

eşitliğindeki kuvvetler toplamı $n+1$ olan farklı $W(T,S) = SB_n$ kelimeleri yazılabilir. Bu durum bizlere Stern-Brocot sayı ağacında aynı satır içerisinde yer alan farklı kelimelerin olabileceğini gösterir.

Şimdi blok formlar yardımıyla terimlerini elde ettiğimiz yeni Stern-Brocot ağacının tanımını verelim.

5.7 Tanım

n harfi Stern-Brocot sayı dizisindeki satır numarasını belirtsin. $L = TS^2$ ve $R = TS$ olmak üzere dizinin elemanları yerine modüler gruptaki blok formların yazılmasıyla elde edilen ağaca yeni Stern-Brocot ağacı denir. Bu ağacın görüntüsü aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.2: Stern-Brocot ağacının blok formlar ile gösterimi

Şimdi Stern-Brocot ağacındaki elemanlara karşılık gelen modüler gruptaki blok form ile yazılabilen kelimelere birkaç örnek verelim.

5.8 Örnek

Stern-Brocot ağacından $\frac{4}{7}$ kesrini inceleyelim.

$\frac{4}{7} = LRLL$: $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında gösterimi

$\frac{4}{7} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$: karşılık gelen matris gösterimi

$\frac{4}{7} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = W(T,S) = (TS^2)(TS)(TS^2)^2$: karşılık gelen blok formdaki kelime

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = TS^2TSTS^2TS^2$: karşılık gelen modüler grup elemanı

Sonuç olarak;

$$\frac{4}{7} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = W(T,S) = (TS^2)(TS)(TS^2)^2 = SB_5 = LRL^2$$

5.9 Örnek

$\frac{3}{5}$ rasyonel sayısına karşılık gelen blok formu ve kelimeyi bulalım.

$$\frac{3}{5} = LRL = W(T,S) = (TS^2)(TS)(TS^2) = TS^2TSTS^2$$

5.10 Örnek

$\frac{9}{7}$ rasyonel sayısına karşılık gelen blok formu ve kelimeyi bulalım.

$$\frac{9}{7} = RL^3R = W(T,S) = (TS)(TS^2)^3(TS) = TSTS^2TS^2TS^2TS$$

Bu bölümde Stern-Brocot sayı dizisi ile modüler grupta blok formlar yardımıyla yazılabilen kelimeler arasındaki bağıntıyı inceledik. Burada dikkatimizi çeken nokta, modüler grupta blok formda yazılan kelimelerin genel gösterimi

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

olmasına karşın bu kelimelerden Stern-Brocot sayı dizisi içerisinde yer alanların sadece (i=0; j=0) olduğu özel durumlar olmasıdır.

Bu durum ise bizleri yeni bir araştırma konusuna sevk etti ve Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi konusu karşımıza çıktı. Bu yeni sayı dizisi içerisinde modüler gruptaki $W(T,S)$ için (i≠0; j≠0) olduğu durumları inceledik ve özgün sonuçlar elde ettik. Bulduğumuz sonuçlar bizleri Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisine yönlendirdi.

6. GENİŞLETİLMİŞ STERN-BROCOT SAYI DİZİSİ

Daha önceki bölümlerde Stern-Brocot sayı dizisi yardımıyla bütün pozitif rasyonel sayıları elde edebileceğimizi göstermiştik. Zamanla Stern-Brocot sayı dizisi içerisinde başka sayı kümeleri olup olmadığı araştırılmaya başlandı. 2011 yılında Demmer [24] Stern-Brocot-Brüche, Graphen und die Modulgruppe" isimli çalışmasında Genişletilmiş Stern-Brocot dizisinin bir grafiğini gösterdi. 2018 yılına gelindiğinde ise Morales [23] "Fenomenolog´ıa did´actica del ´arbol de Stern-Brocot" isimli çalışmasında negatif rasyonel sayıları Stern-Brocot sayı dizisine dahil ederek Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisini ifade etti.
Her geçen gün zenginleşen literatüre ileride irrasyonel sayılar ile ilgili çalışmalar yapılarak bu küme daha da genişletilebilir ancak biz burada rasyonel sayılar kümesi ile yetineceğiz.
Bir önceki bölümde, Stern-Brocot sayı ağacındaki herhangi bir elemanın modüler grupta bir blok forma karşılık geldiğini gösterdik. Bu noktada dikkatimizi çeken, Stern-Brocot sayı ağacındaki her elemanın, modüler grupta bir blok forma karşılık gelmesine rağmen, modüler gruptaki her blok formun Stern-Brocot sayı ağacında bir karşılığı olmamasıdır. Bu durum bizleri Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisini incelemeye ve modüler gruptaki diğer elemanların, bu küme içerisinde yer alıp almadığını araştırmaya yöneltti.

Bu bölümdeki teorem, ispat ve örneklerin tamamı özgün bir çalışmanın sonucunda elde edilen orijinal ürünlerdir.

Şimdi Negatif Stern-Brocot sayı dizisi ve Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi hakkında bilgi verelim ardından bu dizilerin modüler grup ile olan yakından ilişkisini teorem, ispat ve örnekler ile gösterelim.

Bu bölümde, Stern-Brocot sayı dizisinin başlangıç değerlerinden bir tanesini negatif alarak, negatif rasyonel sayılar kümesinin elemanlarından oluşan Negatif Stern-Brocot sayı dizisini elde edeceğiz ve daha sonra Stern-Brocot sayı dizisi ile Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin elemanlarından oluşan Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisinin tanımını vereceğiz.

6.1 Tanım

İlk elemanı $\frac{-1}{0}$, son elemanı $\frac{0}{1}$ olan ve içerisinde bütün negatif rasyonel sayıları bulunduran diziye Negatif Stern-Brocot sayı dizisi denir. Literatürde, pozitif olmayan rasyonel sayıları listelemek için kullanılan bir yöntemdir. Negatif Stern-Brocot sayı dizisi, Stern-Brocot sayı dizisinin $y-$ eksenine göre yansıtılmasıyla elde edilir.

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin ağaç formu oluşturulurken, Stern-Brocot sayı dizisinin ağacına benzer işlemler tekrar edilir. ilk sıraya $\frac{-1}{0}$ ve $\frac{0}{1}$ yazılır. İkinci sıraya, birinci sıradaki elemanlar aynen yazılır, daha sonra $\frac{-1}{0}$ ve $\frac{0}{1}$ kesirleri arasına bunların medyanı olan $\frac{-1}{1}$ eklenir.

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin ağacının n-inci satırındaki elemanlar bulunurken $(n-1)$-inci sıradaki elemanlar aynen yazılır, $(n-1)$-inci sıradaki her $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ ardışık kesirlerinin arasına n-inci sırada $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirlerinin medyanı olan $\frac{a+c}{b+d}$ kesiri eklenir.

6.2 Uyarı

$-SB$ Negatif Stern-Brocot sayı dizisi ve n bir doğal sayı olmak üzere Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin n-inci satırı $-SB_n$ ile temsil edilir.

Şimdi Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin ilk birkaç satırına ait elemanları örnek olarak verelim.

6.3 Örnek

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin ilk 5 satırına ait olan elemanları bulalım.

$$-SB_0=\left\{\frac{-1}{0},\frac{0}{1}\right\}$$

$$-SB_1=\left\{\frac{-1}{1}\right\}$$

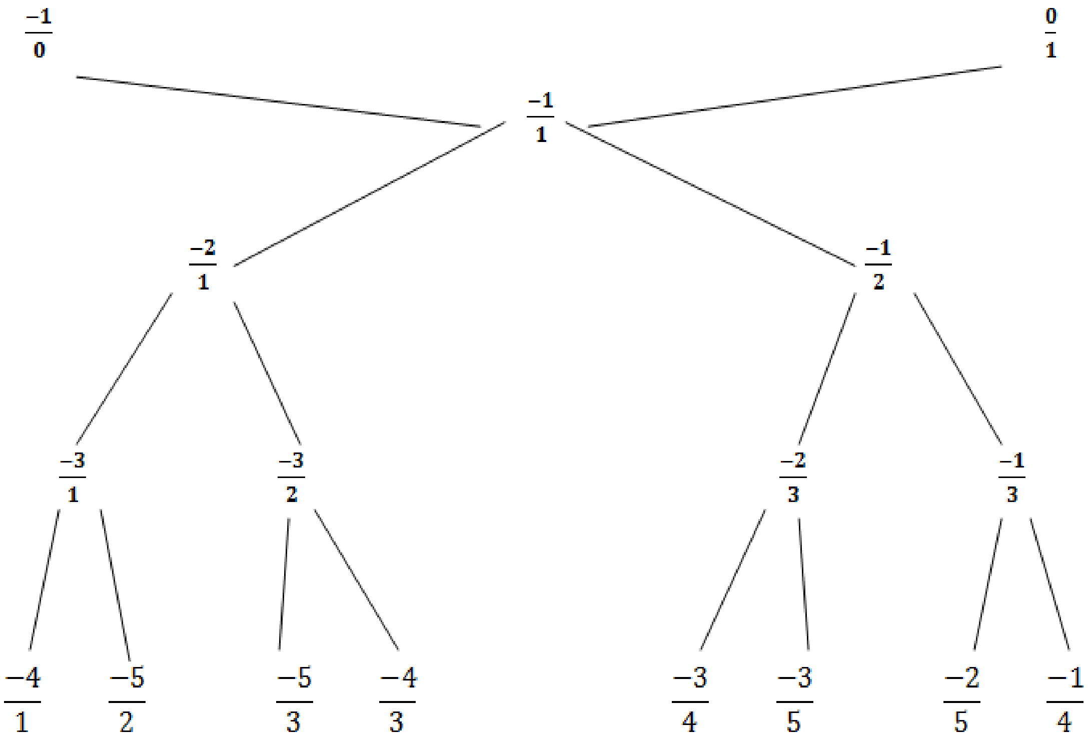
$$-SB_2=\left\{\frac{-2}{1},\frac{-1}{2}\right\}$$

$$-SB_3=\left\{\frac{-3}{1},\frac{-3}{2},\frac{-2}{3},\frac{-1}{3}\right\}$$

$$-SB_4=\left\{\frac{-4}{1},\frac{-5}{2},\frac{-5}{3},\frac{-4}{3},\frac{-3}{4},\frac{-3}{5},\frac{-2}{5},\frac{-1}{4}\right\}$$

$$-SB_5=\left\{\frac{-5}{1},\frac{-7}{2},\frac{-8}{3},\frac{-7}{3},\frac{-7}{4},\frac{-8}{5},\frac{-7}{5},\frac{-5}{4},\frac{-4}{5},\frac{-5}{7},\frac{-5}{8},\frac{-4}{7},\frac{-3}{7},\frac{-3}{8},\frac{-2}{7},\frac{-1}{5}\right\}$$

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin terimleri, Stern-Brocot sayı dizisinin ağaç formuna benzer şekilde ağaç grafiği üzerinde gösterilebilir. Buna göre Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin elemanları ağaç formu üzerine yerleştirilip gösterildiğinde aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 6.1: Negatif Stern-Brocot Sayı Ağacı

6.4 Tanım

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ negatif birim matris ve $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şeklinde $2x2$ lik matris Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin herhangi bir terimine karşılık gelsin. Ayrıca $*$ işlemi Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin matris formunda geçerli bir işlem olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

şeklinde işleme Stern-Brocot çarpımı denir.

6.5 Tanım

Negatif Stern-Brocot Sayı dizisi ile Stern-Brocot sayı dizisinin birleşiminden elde edilen yeni diziye Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi denir. Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi başlangıç değerleri $\left\{\frac{-1}{0},\frac{0}{1},\frac{1}{0}\right\}$ olan ve bu aralıklarda yer alan rasyonel sayılardan oluşur. Burada dizinin elemanları olan rasyonel sayıların pay ve paydası tamsayılardan oluşmaktadır.

6.6 Uyarı

GSB Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi ve n bir doğal sayı olmak üzere GSB_n Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisinin n-inci satırındaki elemanları temsil eder.
Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisine ait ilk birkaç satırı ve bu satırlarda yer alan dizinin elemanlarını örnekte görelim.

6.7 Örnek

Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisindeki 4. satıra kadar olan elemanları bulalım.

$$GSB_0=\left\{\frac{-1}{0},\frac{0}{1},\frac{1}{0}\right\}$$

$$GSB_1=\left\{\frac{-1}{1},\frac{1}{1}\right\}$$

$$GSB_2=\left\{\frac{-2}{1},\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right\}$$

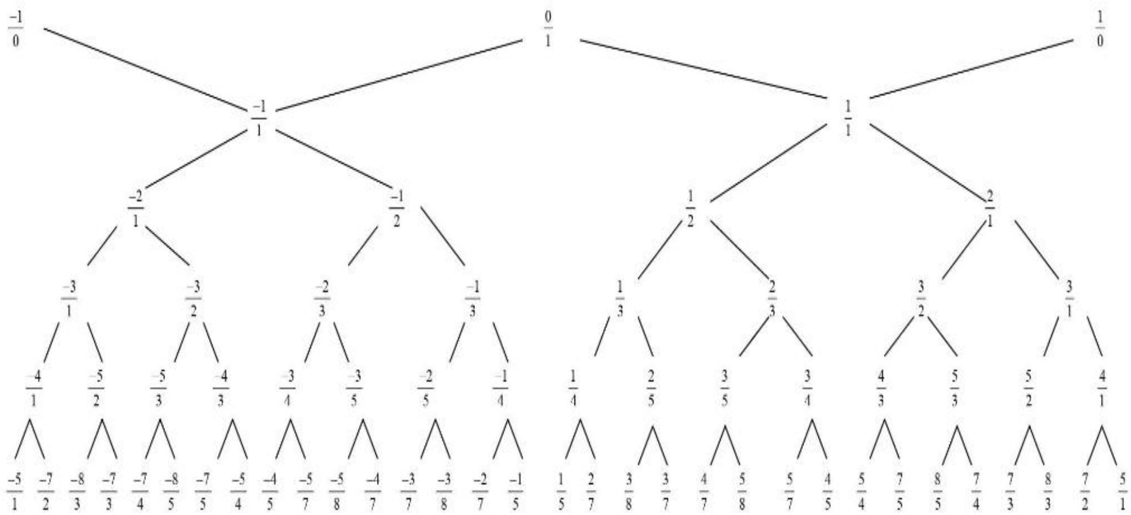
$$GSB_3=\left\{\frac{-3}{1},\frac{-3}{2},\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{3}{1}\right\}$$

$$GSB_4=\left\{\frac{-4}{1},\frac{-5}{2},\frac{-5}{3},\frac{-4}{3},\frac{-3}{4},\frac{-3}{5},\frac{-2}{5},\frac{-1}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{2},\frac{4}{1}\right\}$$

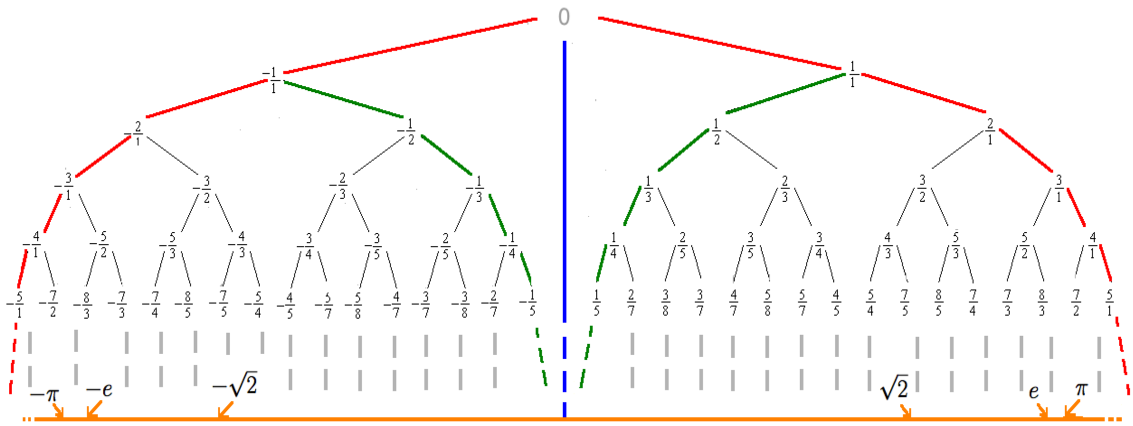
Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisindeki elemanları, Stern-Brocot sayı dizisi ve Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde olduğu gibi ağaç formunda gösterebiliriz. Bu işlemi yaparken sıfırdan aşağıya doğru bir yansıma ekseni çizdiğimizi ve Stern-Brocot sayı ağacını bu eksene göre yansıttığımızı düşünebiliriz. Burada yansıma sonrası oluşan görüntü dizinin negatif kanadını temsil eder. Yansıma eksenine göre, karşılıklı elemanların konumları aynıdır ancak aralarındaki tek fark, yansıyan elemanların görüntülerinin negatif olmasıdır.

Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi içerisinde indirgenmiş bütün rasyonel sayıları içeren bir sayı dizisidir. Bu dizinin elemanlarını Stern-Brocot sayı dizisi ve Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde olduğu gibi ağaç formu üzerinde temsil edebiliriz.

Genişletilmiş Stern-Brocot sayı ağacının sağ kanadı Stern-Brocot ağacı ve sol kanadı Negatif Stern-Brocot sayı ağacı olmak üzere ortaya yeni bir sayı ağacı çıkar. Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisinin ağacı şu şekilde oluşur.



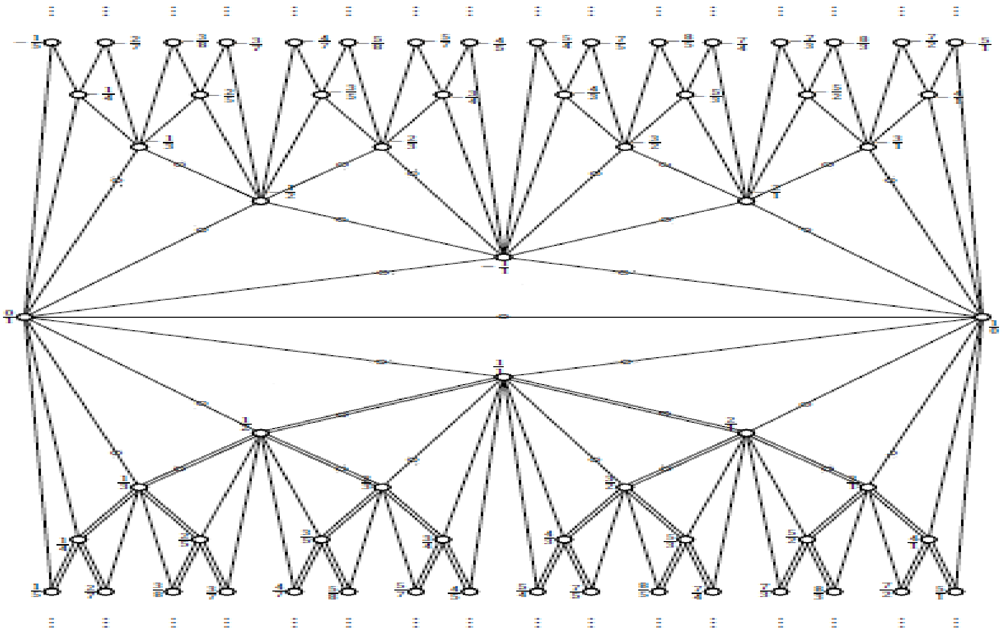
Şekil 6.2: Genişletilmiş Stern-Brocot sayı ağacı



Şekil 6.3: [23] Morales'e göre Genişletilmiş Stern-Brocot sayı ağacı

Stern-Brocot sayı ağacının dallarını incelediğimizde bazı irrasyonel sayılara yakınsadığını görüyoruz. Hatta e, π gibi özel sayıların da bu dalların arasında gizlenmiş olduğu dikkatimizi çekiyor ancak bu çalışmada rasyonel kısım ile ilgilendiğimiz için Stern-Brocot sayı ağacının irrasyonel sayılar ile olan ilişkisine yer vermeyi uygun görmedik.

Dammer [24] ise eserinde Genişletilmiş Stern-Brocot ağacını $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ eksenine göre yansımasını alarak şu şekilde göstermiştir.



Şekil 6.4: [24] Dammer'e göre Genişletilmiş Stern-Brocot sayı ağacı

Bir önceki bölümde

$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

şeklinde blok formda yazılan kelimelerin sadece (i=0; j=0) değerleri için Stern-Brocot ağacında yer aldığını görmüştük. Burada (i≠0; j≠0) olduğu durumlarda sonuç negatif çıkıyordu bu ise bizi Genişletilmiş Stern-Brocot sayı dizisi üzerinde çalışmaya yöneltti. Şimdi (i≠0; j≠0) değerleri için bazı $W(T,S)$ değerlerini hesaplayalım ve sonuçlara göre Genişletilmiş Stern-Brocot ağacı üzerinde yer alıp almadığına bakalım.

$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

$TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R \, , TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = L$

olmak üzere;

$S(TS) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}$

$S^2(TS) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2}$

$(TS)T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{0}{1}$

$S(TS)T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{1}$

$S^2(TS)T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{0}$

$S(TS^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-2}{3}$

$S^2(TS^2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-3}{1}$

$(TS^2)T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{0}$

$S(TS^2)T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{0}{-1}$

$S^2(TS^2)T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}$

$S(TS^2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-3}{4}$

$S^2(TS^2)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-4}{1}$

$(TS^2)^2T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{-1}$

$S(TS^2)^2T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}$

$S^2(TS^2)^2T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{-1}$

$S(TS)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}$

$S^2(TS)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-4}{3}$

$(TS)^2T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}$

$S(TS)^2T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}$

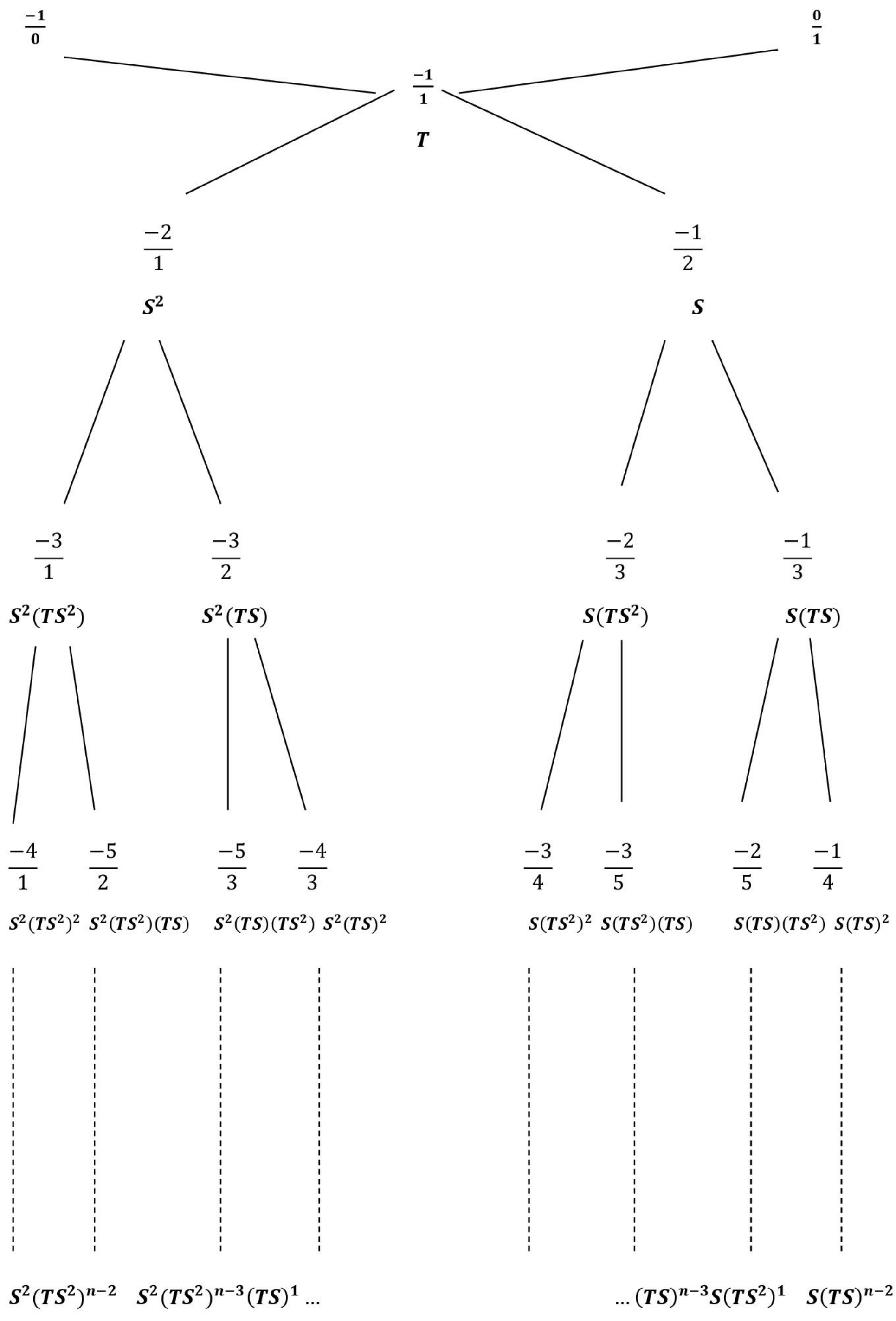
$S^2(TS)^2T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-2}{1}$

.

.

.

Şimdi yaptığımız işlemlerden elde ettiğimiz sonuçlarla blok formdaki hangi kelimenin, Negatif Stern-Brocot ağacında hangi terime karşılık geldiğini gösterelim.



Şekil 6.5: Negatif Stern-Brocot ağacının modüler grup kelimeleri ile temsili

Burada $\frac{-1}{1}$ den aşağıya doğru dikey bir eksen indiğini düşünecek olursak, Negatif Stern-Brocot ağacının sol tarafında kalan dallar;

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=2; j=0)

Negatif Stern-Brocot ağacının sağ tarafında kalan dallar;

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=1; j=0)

ile temsil edilebilir. Burada blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır ayrıca m_0 ve n_k sıfır olabilir.

İkinci bölümde verdiğimiz Teorem 2.4.4'e göre modüler gruptaki bir indirgenmiş $W(T,S)$ kelimesinin blok formda yazılabildiğini biliyoruz.

Burada özel bir durum olarak (i=1,2; j=0) ve $n \geq 2$ aldığımızda her kelime, Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin bir terimine karşılık gelir. Öyleyse blok formdaki her bir modüler grup elemanı şu gösterim ile temsil edilebilir.

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

Burada, blokların kuvvetleri ve Negatif Stern-Brocot dizisindeki terimlerin kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Yukarıdaki gösterimde

$-SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

ifadesinde yer alan n sayısı Stern-Brocot sayı ağacında n. satırı temsil eder ve bu ifade kuvvetler toplamının 1 fazlasına eşittir.

$n = m_0 + n_0 + \cdots + m_k + n_k + 1 \, , n \geq 2$

6.8 Uyarı

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin kelime formu olan;

$-SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

ifadesindeki $-SB_n$ için yazım tek türlü değildir.

$n = m_0 + n_0 + \cdots + m_k + n_k + 1$

ifadesine göre toplamı $n+1$ olan farklı kuvvetler söz konusu olabilir. Bu durumda

$$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} = -SB_n = R^{m_0} L^{n_0} \dots R^{m_k} L^{n_k}$$

eşitliğindeki kuvvetler toplamı $n+1$ olan farklı $W(T,S) = -SB_n$ kelimeleri yazılabilir. Bu durum, bizlere Negatif Stern-Brocot ağacında aynı satır içerisinde yer alan farklı bir kelimenin yer alabileceğini gösterir.

6.9 Teorem

Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde;

$x \in -SB_n$ negatif rasyonel sayısı için,

$n = 1$ için:

$W(T,S) = T = -SB_1 = -I$

$n \geq 2$ için:

$-\infty < x < -1$ olduğu durumda;

$W(T,S) = S^2 (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} = -SB_n = LR^{m_0} L^{n_0} \dots R^{m_k} L^{n_k}$

$-1 < x < 0$ olduğu durumda;

$W(T,S) = S (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} = -SB_n = RR^{m_0} L^{n_0} \dots R^{m_k} L^{n_k}$

şeklindedir. Yani $W(T,S)$ modüler grup kelimesi ile $SBBF$ Stern-Brocot kelimesinin matris formları birbirine eşittir.

İspat

Tümevarım yöntemiyle ispatı yapalım.

$x \in -SB_n$ negatif rasyonel sayısı için,

$n = 1$ için:

$$T = -SB_1 = -I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu açıktır.

$n \geq 2$ için:

$-\infty < x < -1$ olduğu durumda;

$m_0 = 1$ için:

$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

için

$S^2(TS) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ve

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

için

$-SB_n = LR = -I * L * R$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R$

$= \begin{pmatrix} -1+0 & -1 \\ 0+1 & 0 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R$

$= \begin{pmatrix} -1 & (-1)+(-1) \\ 1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$S^2(TS) = (-SB_n = LR)$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ için:

$S^2(TS)^k = LR^k$

doğru olsun.

$m_0 = k+1$ için:

$S^2(TS)^{k+1} = LR^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $(TS)^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

için

$$S^2(TS)^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

ve Tanım 6.4'e göre;

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

olmak üzere

$$-SB_n = LR^k = -I * L * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & k\cdot(-1)+(-1) \\ 1 & k\cdot 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S^2(TS)^{k+1} = S^2(TS)^k(TS)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k-2 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

ve

$-SB_n = LR^{k+1} = -I * L * R^k * R$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R^k * R$

$= \begin{pmatrix} 0 + (-1) & -1 \\ 1 + 0 & 0 \end{pmatrix} * R^k * R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R^k * R$

$= \begin{pmatrix} -1 & k \cdot (-1) + (-1) \\ 1 & k \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} -1 & -k - 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} * R$

$= \begin{pmatrix} -1 & -k - 1 + (-1) \\ 1 & k + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -k - 2 \\ 1 & k + 1 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$S^2(TS)^{k+1} = (-SB_n = LR^{k+1})$

olduğu görülür. (I)

Benzer şekilde;

$n_0 = 1$ için:

$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $(TS^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

için

$S^2(TS^2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ve Tanım 6.4'e göre;

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a + c & c \\ b + d & d \end{pmatrix} = \dfrac{a + 2c}{b + 2d}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a + c \\ b & b + d \end{pmatrix} = \dfrac{2a + c}{2b + d}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a + k \cdot c & c \\ b + k \cdot d & d \end{pmatrix} = \dfrac{a + (k+1)c}{b + (k+1)d}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k \cdot a + c \\ b & k \cdot b + d \end{pmatrix} = \dfrac{(k+1)a + c}{(k+1)b + d}$

olmak üzere

$-SB_n = LL = -I * L * L$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + (-1) & -1 \\ 1 + 0 & 0 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + (-1) & -1 \\ 1 + 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S^2(TS^2)$=($-SB_n = LL$)

ifadesi doğrudur.

$n_0 = k$ için:

$S^2(TS^2)^k = LL^k$

doğru olsun.

$n_0 = k + 1$ için:

$S^2(TS^2)^{k+1} = LL^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$n_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $(TS^2)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

için

$$S^2(TS^2)^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k - 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 6.4'e göre;

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a + c & c \\ b + d & d \end{pmatrix} = \frac{a + 2c}{b + 2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a + c \\ b & b + d \end{pmatrix} = \frac{2a + c}{2b + d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

olmak üzere

$$-SB_n = LL^k = -I * L * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot(-1)+(-1) & -1 \\ k\cdot 0+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S^2(TS^2)^{k+1} = S^2(TS^2)^k(TS^2)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$-SB_n = LL^{k+1} = -I * L * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0 & -1 \\ 0+1 & 0 \end{pmatrix} * L^k * L = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot(-1)+(-1) & -1 \\ k\cdot 0+1 & 0 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S^2(TS^2)^{k+1} = (-SB_n = LL^{k+1})$

olduğu görülür. (II)

Daha sonra blokların çarpımını inceleyecek olursak;

$m_0 = 1$ ve $n_0 = 1$ için:

$S^2(TS)(TS^2)$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$-SB_n = LRL = -I * L * R * L$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + (-1) & -1 \\ 1 + 0 & 0 \end{pmatrix} * R * L = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & (-1) + (-1) \\ 1 & 1 + 0 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} (-1) + (-2) & -2 \\ 1 + 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S^2(TS)(TS^2) = (-SB_n = L * R * L)$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

$S^2(TS)^k(TS^2)^k = LR^kL^k$

doğru olsun.

$m_0 = k + 1$ ve $n_0 = k + 1$ için:

$S^2(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = LR^{k+1}L^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S^2(TS)^k(TS^2)^k$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k^2-k-1 & -k-1 \\ k^2+1 & k \end{pmatrix}$$

ve Tanım 6.4'e göre;

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

olmak üzere

$-SB_n = LR^kL^k = -I * L * R^k * L^k$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * R^k * L^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & k\cdot(-1)+(-1) \\ 1 & k\cdot 1+0 \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix} * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot(-k-1)+(-1) & -k-1 \\ k\cdot k+1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2-k-1 & -k-1 \\ k^2+1 & k \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S^2(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = S^2(TS)^k(TS)(TS^2)^k(TS^2)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k-2 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k^2-2k-1 & -k-2 \\ k^2+k+1 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k^2-3k-3 & -k-2 \\ k^2+2k+2 & k+1 \end{pmatrix}$$

ve

$$-SB_n = LR^{k+1}L^{k+1} = -I * L * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * R^k * R * L^k * L = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & k\cdot(-1)+(-1) \\ 1 & k\cdot 1+0 \end{pmatrix} * R * L^k * L = \begin{pmatrix} -1 & -k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix} * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k-1+(-1) \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} * L^k * L = \begin{pmatrix} -1 & -k-2 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot(-k-2)-1 & -k-2 \\ k\cdot(k+1)+1 & k+1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} -k^2-2k-1 & -k-2 \\ k^2+k+1 & k+1 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} (-k^2-2k-1)+(-k-2) & -k-2 \\ (k^2+k+1)+(k+1) & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2-3k-3 & -k-2 \\ k^2+2k+2 & k+1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$S^2(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = (-SB_n = LR^{k+1}L^{k+1})$$

olduğu görülür. (III)

Benzer şekilde;

$m_0 = 1$ ve $n_0 = 1$ için:

$S^2(TS^2)(TS)$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ve

$-SB_n = LLR = -I * L * L * R$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * L * R$

$= \begin{pmatrix} 0 + (-1) & -1 \\ 1 + 0 & 0 \end{pmatrix} * L * R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R$

$= \begin{pmatrix} -1 + (-1) & -1 \\ 1 + 0 & 0 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 + (-2) \\ 1 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$S^2(TS^2)(TS) = (-SB_n = LLR)$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

$S^2(TS^2)^k(TS)^k = LL^kR^k$

doğru olsun.

$m_0 = k + 1$ ve $n_0 = k + 1$ için:

$S^2(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = LL^{k+1}R^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S^2(TS^2)^k(TS)^k$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1 & -k^2-k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

ve Tanım 6.4'e göre;

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

olmak üzere

$$-SB_n = LL^kR^k = -I * L * L^k * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * L^k * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & 1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * L^k * R^k = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L^k * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot 1+(-1) & 1 \\ k\cdot 0+1 & 0 \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} k-1 & k\cdot(k-1)+1 \\ 1 & k\cdot 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-1 & -k^2-k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S^2(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = S^2(TS^2)^k(TS^2)(TS)^k(TS)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-2 & -k^2-2k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-2 & -k^2-3k-3 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

ve

$$-SB_n = LL^{k+1}R^{k+1} = -I * L * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * L^k * L * R^k * R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot (-1) + (-1) & -1 \\ k \cdot 0 + 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R^k * R = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1+(-1) & -1 \\ 1+0 & 0 \end{pmatrix} * R^k * R = \begin{pmatrix} -k-2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} -k-2 & k \cdot (-k-2) + (-1) \\ 1 & k \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} -k-2 & -k^2-2k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix} * R$$

$$= \begin{pmatrix} -k-2 & (-k^2-2k-1)+(-k-2) \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-2 & -k^2-3k-3 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$S^2(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = (-SB_n = LL^{k+1}R^{k+1})$$

olduğu görülür. (IV)

$-1 < x < 0$ olduğu durumda;

$m_0 = 1$ için:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } (TS) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

için

$$S(TS) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ve

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

için

$-SB_n = RR = -I * R * R$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * R$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R$

$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)+0 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$S(TS) = (-SB_n = RR)$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ için:

$S(TS)^k = RR^k$

doğru olsun.

$m_0 = k+1$ için:

$S(TS)^{k+1} = RR^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $(TS)^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

için

$S(TS)^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$

ve Tanım 6.4'e göre;

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

olmak üzere

$$-SB_n = LR = -I * R * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & k\cdot 0+(-1) \\ 1 & k\cdot 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S(TS)^{k+1} = S(TS)^k(TS)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

ve

$$-SB_n = RR^{k+1} = -I * R * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * R^k * R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & k\cdot 0+(-1) \\ 1 & k\cdot 1+1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & k+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S(TS)^{k+1} = (-SB_n = RR^{k+1})$

olduğu görülür. (V)

Benzer şekilde;

$n_0 = 1$ için:

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $(TS^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

için

$$S(TS^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

için

$-SB_n = RL = -I * R * L$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S(TS^2)$=($-SB_n = RL$)

ifadesi doğrudur.

$n_0 = k$ için:

$S(TS^2)^k = RL^k$

doğru olsun.

$n_0 = k+1$ için:

$S(TS^2)^{k+1} = RL^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$n_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $(TS^2)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

için

$S(TS^2)^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$

ve Tanım 6.4'e göre;

$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \dfrac{a+2c}{b+2d}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \dfrac{2a+c}{2b+d}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \dfrac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \dfrac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$

olmak üzere

$-SB_n = RL^k = -I * R * L^k$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L^k$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L^k$

$= \begin{pmatrix} k\cdot(-1)+0 & -1 \\ k\cdot 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$

olur.

Ayrıca

$S(TS^2)^{k+1} = S(TS^2)^k(TS^2)$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ k+2 & 1 \end{pmatrix}$

ve

$-SB_n = RL^{k+1} = -I * R * L^k * L$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L^k * L$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * L^k * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L^k * L$

$= \begin{pmatrix} k \cdot (-1) + 0 & -1 \\ k \cdot 1 + 1 & 1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} * L$

$= \begin{pmatrix} -k + (-1) & -1 \\ k+1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ k+2 & 1 \end{pmatrix}$

olduğundan dolayı

$S(TS^2)^{k+1} = (-SB_n = RL^{k+1})$

olduğu görülür. (VI)

Daha sonra blokların çarpımını inceleyecek olursak;

$m_0 = 1$ ve $n_0 = 1$ için:

$S(TS)(TS^2)$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ve

$-SB_n = RRL = -I * R * R * L$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * R * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * R * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0+(-1) & -1 \\ 1+2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$S(TS)(TS^2) = (-SB_n = R * R * L)$$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

$$S(TS)^k (TS^2)^k = RR^k L^k$$

doğru olsun.

$m_0 = k + 1$ ve $n_0 = k + 1$ için:

$$S(TS)^{k+1} (TS^2)^{k+1} = RR^{k+1} L^{k+1}$$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$$S(TS)^k (TS^2)^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k^2 + k + 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 6.4'e göre;

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k\cdot a+c \\ b & k\cdot b+d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a+c}{(k+1)b+d}$$

olmak üzere

$$-SB_n = RR^kL^k = -I * R * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * R^k * L^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & k\cdot 0+(-1) \\ 1 & k\cdot 1+1 \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} * L^k$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot(-1)+0 & -1 \\ k\cdot(k+1)+1 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k^2+k+1 & k+1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = S(TS)^k(TS)(TS^2)^k(TS^2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k^2+2k+1 & k+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ k^2+3k+3 & k+2 \end{pmatrix}$$

ve

$$-SB_n = RR^{k+1}L^{k+1} = -I * R * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * R^k * R * L^k * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & k \cdot 0 + (-1) \\ 1 & k \cdot 1 + 1 \end{pmatrix} * R * L^k * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} * R * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & k+1+1 \end{pmatrix} * L^k * L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix} * L^k * L$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot (-1) + 0 & -1 \\ k \cdot (k+2) + 1 & k+2 \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k^2 + 2k + 1 & k+2 \end{pmatrix} * L$$

$$= \begin{pmatrix} -k + (-1) & -1 \\ (k^2 + 2k + 1) + (k+2) & k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ k^2 + 3k + 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S(TS)^{k+1}(TS^2)^{k+1} = (-SB_n = RR^{k+1}L^{k+1})$

olduğu görülür. (VII)

Benzer şekilde;

$m_0 = 1$ ve $n_0 = 1$ için:

$S(TS^2)(TS)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ve

$-SB_n = RLR = -I * R * L * R$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} * L * R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + (-1) & -1 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * R$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1+(-1) \\ 2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$S(TS^2)(TS) = (-SB_n = RLR)$

ifadesi doğrudur.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

$S(TS^2)^k(TS)^k = RL^kR^k$

doğru olsun.

$m_0 = k+1$ ve $n_0 = k+1$ için:

$S(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = RL^{k+1}R^{k+1}$

olduğunu gösterelim.

$m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için:

Teorem 2.4.4'e göre

$S(TS^2)^k(TS)^k$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k & -k^2-1 \\ k+1 & k^2+k+1 \end{pmatrix}$$

ve Tanım 6.4'e göre;

$$-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \frac{a+2c}{b+2d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \frac{2a+c}{2b+d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * L^k = \begin{pmatrix} a+k\cdot c & c \\ b+k\cdot d & d \end{pmatrix} = \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} a & k \cdot a + c \\ b & k \cdot b + d \end{pmatrix} = \frac{(k+1)a + c}{(k+1)b + d}$$

olmak üzere

$$-SB_n = RL^k R^k = -I * R * L^k * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L^k * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 + 0 \\ 1 & 0 + 1 \end{pmatrix} * L^k * R^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L^k * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot (-1) + 0 & -1 \\ k \cdot 1 + 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k + 1 & 1 \end{pmatrix} * R^k$$

$$= \begin{pmatrix} -k & k \cdot (-k) + (-1) \\ k + 1 & k \cdot (k+1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -k^2 - 1 \\ k + 1 & k^2 + k + 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Ayrıca

$$S(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = S(TS^2)^k (TS^2)(TS)^k (TS)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k + 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k - 1 & -1 \\ k + 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k - 1 & -k^2 - k - 1 \\ k + 2 & k^2 + 2k + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k - 1 & -k^2 - 2k - 2 \\ k + 2 & k^2 + 3k + 3 \end{pmatrix}$$

ve

$$-SB_n = RL^{k+1} R^{k+1} = -I * R * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * R * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 + 0 \\ 1 & 0 + 1 \end{pmatrix} * L^k * L * R^k * R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * L^k * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} k\cdot(-1)+0 & -1 \\ k\cdot 1+1 & 1 \end{pmatrix} * L * R^k * R = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} * L * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} -k+(-1) & -1 \\ k+1+1 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R = \begin{pmatrix} -k-1 & -1 \\ k+2 & 1 \end{pmatrix} * R^k * R$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1 & k\cdot(-k-1)+(-1) \\ k+2 & k\cdot(k+2)+1 \end{pmatrix} * R = \begin{pmatrix} -k-1 & -k^2-k-1 \\ k+2 & k^2+2k+1 \end{pmatrix} * R$$

$$= \begin{pmatrix} -k-1 & (-k^2-k-1)+(-k-1) \\ k+2 & (k^2+2k+1)+(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-1 & -k^2-2k-2 \\ k+2 & k^2+3k+3 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$S(TS^2)^{k+1}(TS)^{k+1} = (-SB_n = RL^{k+1}R^{k+1})$$

olduğu görülür. (VIII)

Sonuç olarak;
(I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII) ve (VIII) den dolayı
$x \in -SB_n$ negatif rasyonel sayısı için,
$n = 1$ için:

$$T = -SB_1 = -I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:
$-\infty < x < -1$ olduğu durumda;
$W(T,S) = S^2(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = LR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

$-1 < x < 0$ olduğu durumda;
$W(T,S) = S(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = RR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

sonucu elde edilir ve burada blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir. □ Burada $m_0 = k$ ve $n_0 = k$ için ispatı gösterdik. Farklı $m_0 = t$ ve $n_0 = z$ değerleri için eşitliğin olduğu benzer şekilde görülebilir.

Beşinci ve altıncı bölümlerde elde ettiğimiz sonuçları genelleyecek ve özetleyecek olursak şunu diyebiliriz ki Stern-Brocot sayı dizisinde ve Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde yer alan her elemana karşılık modüler grupta blok formda yazılan bir $W(T,S)$ kelimesi vardır.

Şimdi beşinci ve altıncı bölümlerde elde ettiğimiz tüm özgün sonuçları toplu olarak verelim.

6.10 Sonuç

Pozitif ve Negatif Stern-Brocot sayı dizilerine göre:

$x \in SB_n$ rasyonel sayısı için,

$n = 1$ için:

$$T^2 = S^3 = SB_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:

$0 < x < \infty$ olduğu durumda;

$$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

$x \in -SB_n$ negatif rasyonel sayısı için,

$n = 1$ için:

$$T = -SB_1 = -I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:

$-\infty < x < -1$ olduğu durumda;

$$W(T,S) = S^2(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = LR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

$-1 < x < 0$ olduğu durumda;

$$W(T,S) = S(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = RR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$$

burada blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Elde ettiğimiz sonuçları tablo üzerinde verelim.

$i = 3$	$j = 2$	$m_0, n_0 \dots m_k, n_k = 0$	$W(T,S) = T^2 = S^3 = SB_n = I$
$i = 0$	$j = 0$	$m_0, n_0 \dots m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$	$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}$ $= SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$
$i = 0$	$j = 1$	$m_0, n_0 \dots m_k, n_k = 0$	$W(T,S) = T = -SB_n = -I$
$i = 1$	$j = 0$	$m_0, n_0 \dots m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$	$W(T,S) = S(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}$ $= -SB_n = RR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$
$i = 2$	$j = 0$	$m_0, n_0 \dots m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$	$W(T,S) = S^2(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}$ $-SB_n = LR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

Tablo 6.1: Modüler grup kelimeleri ile Stern-Brocot kelimeleri arasındaki ilişki

6.11 Örnek

$-SB_n = \frac{-9}{4}$ kesri için karşılık gelen Stern-Brocot kelimesini ve blok formda yazılan modüler grup kelimesini bulalım.

$-SB_n = \frac{-9}{4}$ kesrine karşılık gelen Stern-Brocot kelimesi sürekli kesir dönüşümü ile, matris dönüşümü ile veya Stern-Brocot ağacındaki kollar takip edilerek bulunabilir. Bu yöntemlerden herhangi bir tanesine göre karşılığını bulduğumuzda;

$$-SB_n = \frac{-9}{4} = LLRRR = L^2R^3$$

Şimdi modüler grup kelimesine bakalım;

Teorem 6.9'a göre $-\infty < \frac{-9}{4} < -1$ olduğundan dolayı

$$W(T,S) = S^2(TS^2)^2(TS)^3$$

olduğu görülür. Sonuç olarak:

$$-SB_n = \frac{-9}{4} = L^2R^3 = W(T,S) = S^2(TS^2)^2(TS)^3$$

elde edilir.

6.12 Örnek

$-SB_n = \frac{-7}{11}$ kesri için karşılık gelen Negatif Stern-Brocot sayı dizisinin kelimesini ve blok formda yazılan modüler grup kelimesini bulalım.

$-SB_n = \frac{-7}{11}$ kesrine karşılık gelen Stern-Brocot kelimesi benzer şekilde sürekli kesir dönüşümü ile, matris dönüşümü ile veya Stern-Brocot ağacındaki kollar takip edilerek bulunabilir. Bu yöntemlerden herhangi bir tanesine göre karşılığını bulduğumuzda;

$$-SB_n = \frac{-7}{11} = RLRLL = RLRL^2$$

Şimdi modüler grup kelimesine bakalım;

Teorem 6.9'a göre $-1 < \frac{-7}{11} < 0$ olduğundan dolayı

$$W(T,S) = S(TS)(TS^2)(TS)(TS^2)^2$$

olduğu görülür. Sonuç olarak:

$$-SB_n = \frac{-7}{11} = RLRL^2 = W(T,S) = S(TS)(TS^2)(TS)(TS^2)^2$$

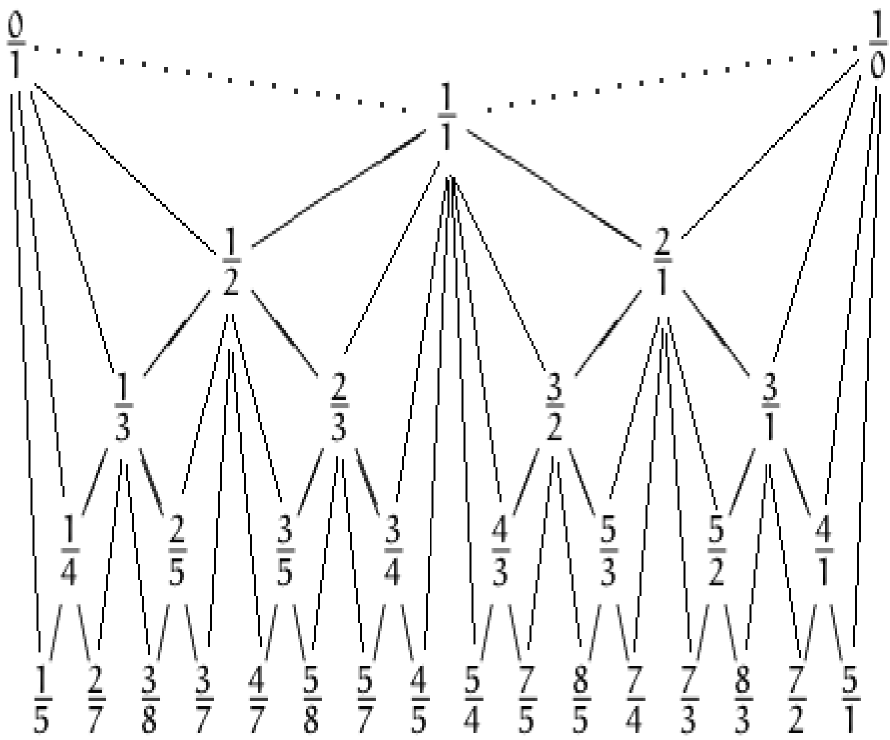
elde edilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

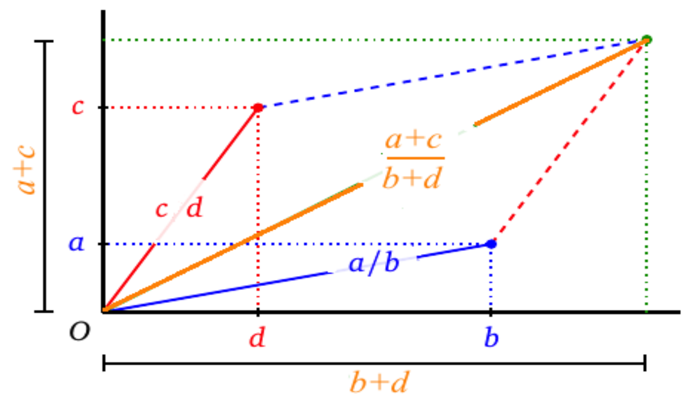
Bu çalışmamızda Stern-Brocot sayı dizisi hakkında bilgi verdik ve bu dizinin tarihsel süreci, başka diziler ile olan bağlantıları hakkında açıklamalarda bulunduk.

Üçüncü bölümde Stern-Brocot sayı dizisi hakkında genel bilgiler verilip dizinin elemanlarının rasyonel gösterimi, matris formu, kartezyen koordinat sistemi üzerinde temsili gösterimi ile ilgili bilgi verdik. Buna göre;

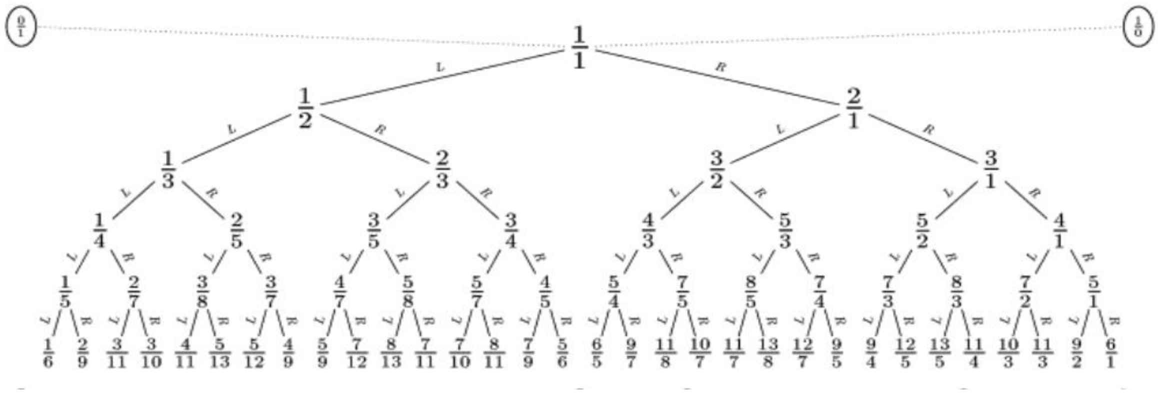
başlangıç değeri $\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{0}\right\}$ olan dizinin oluşturulması:



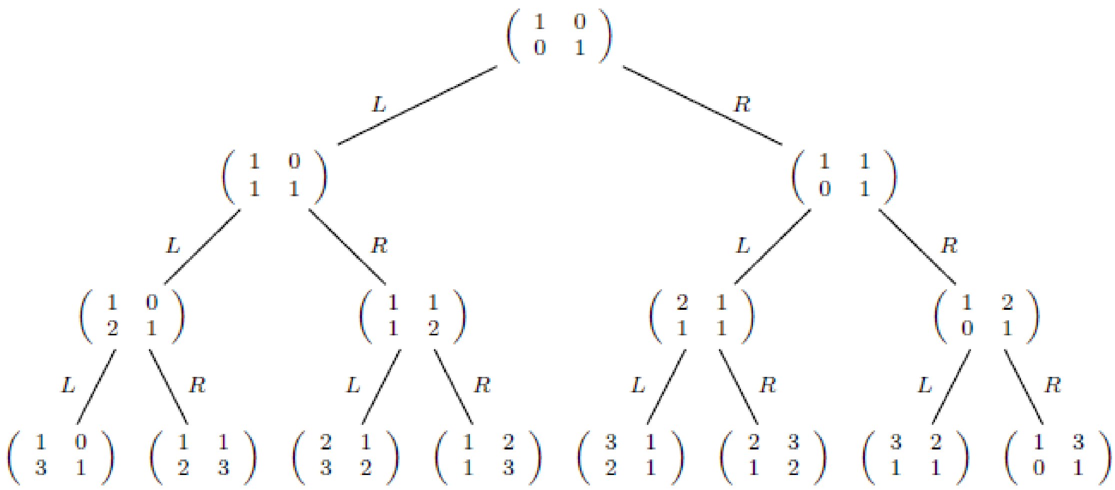
kartezyen koordinat sistemi üzerinde gösterimi:



dizinin terimlerinin $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatında gösterimi:



dizinin matris formu:



şeklinde gösterilir.

Dördüncü bölümde, sürekli kesirler ile Stern-Brocot sayı dizisi arasındaki yakın ilişkiyi verdik. Buna göre;

Sürekli sonlu basit kesir gösterimi $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ve $L(sol)$ ve $R(sağ)$ Stern-Brocot ağacındaki adımları temsil etmek üzere, her sürekli sonlu basit kesir Stern-Brocot sayı dizisindeki $L(sol)$ ve $R(sağ)$ gösterimi ile temsil edilebilir. Her bir sürekli kesir açılımına karşılık gelen $L(sol)$ ve $R(sağ)$ formatı;

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \mathrm{R}^{a_0}\mathrm{L}^{a_1}\mathrm{R}^{a_2} \ldots \mathrm{R}^{a_n - 1}$, n çift ise

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \mathrm{R}^{a_0}\mathrm{L}^{a_1}\mathrm{R}^{a_2} \ldots \mathrm{L}^{a_n - 1}$, n tek ise

şeklinde olur. Böylelikle $SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \ldots R^{m_k}L^{n_k}$ formatındaki her bir Stern-Brocot kelimesinin bir sürekli kesir karşılığı olduğunu ifade etmiş olduk.

Beşinci bölümde, tamamı özgün olan sonuçlar elde ettik. Buna göre Stern-Brocot sayı dizisi terimleri ile blok formda yazılan modüler grup kelimeleri arasındaki ilişki şu şekilde olur:

$x \in SB_n$ rasyonel sayısı için,
$n = 1$ için:

$$T^2 = S^3 = SB_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:
$0 < x < \infty$ olduğu durumda;
$W(T,S) = (TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = SB_n = R^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

burada blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Altıncı bölüme geldiğimizde literatüre kazandırdığımız tamamı özgün bir başka kısım olan Negatif Stern-Brocot sayı dizisi ile modüler grupta blok formda yer alan kelimeleri inceledik ve beşinci bölümde pozitif kısım için bulduğumuz sonuçları genişlettik. Elde ettiğimiz sonuçlara göre;

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

modüler grup kelimesine karşılık Negatif Stern-Brocot sayı dizisinde

$x \in -SB_n$ negatif rasyonel sayısı için,
$n = 1$ için:

$$T = -SB_1 = -I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ için:
$-\infty < x < -1$ olduğu durumda;
$W(T,S) = S^2(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = LR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

$-1 < x < 0$ olduğu durumda;
$W(T,S) = S(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k} = -SB_n = RR^{m_0}L^{n_0} \dots R^{m_k}L^{n_k}$

ile temsil edilir ve burada blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

eşitliğinin olduğunu özgün bir teorem olarak ifade ettik ve ispatını yine özgün olarak verdik.

Ayrıca;

$$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} = -SB_n = R^{m_0} L^{n_0} \ldots R^{m_k} L^{n_k}$$

eşitliğin var olduğunu ve $-SB_n$ terimleri için modüler grupta blok formda bir kelime karşılığı olduğunu belirttik.

Beşinci ve altıncı bölümde yer alan teoremlerimiz ile Genişletilmiş Stern-Brocot Sayı dizisinin her elemanına karşılık blok formda yazılan bir modüler grup kelimesi olduğunu ifade ve ispat ettik. Elde ettiğimiz tüm sonuçları tablo üzerinde özet olarak gösterdik.

$i = 3$	$j = 2$	$m_0, n_0 \ldots m_k, n_k = 0$	$W(T,S) = T^2 = S^3 = SB_n = I$
$i = 0$	$j = 0$	$m_0, n_0 \ldots m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$	$W(T,S) = (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k}$ $= SB_n = R^{m_0} L^{n_0} \ldots R^{m_k} L^{n_k}$
$i = 0$	$j = 1$	$m_0, n_0 \ldots m_k, n_k = 0$	$W(T,S) = T = -SB_n = -I$
$i = 1$	$j = 0$	$m_0, n_0 \ldots m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$	$W(T,S) = S(TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k}$ $= -SB_n = RR^{m_0} L^{n_0} \ldots R^{m_k} L^{n_k}$
$i = 2$	$j = 0$	$m_0, n_0 \ldots m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$	$W(T,S) = S^2 (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k}$ $-SB_n = LR^{m_0} L^{n_0} \ldots R^{m_k} L^{n_k}$

Son olarak konuyla ilgili açık uçlu problemlerden ve yapılabilecek çalışmalardan bahsedelim.

Bu çalışmamızda dördüncü bölümde, sonlu basit sürekli kesirler ile Stern-Brocot sayı dizisinin terimleri arasındaki ilişkiyi inceledik. Bu kısım genişletilip sonsuz sürekli kesir açılımları ile irrasyonel sayıların Stern-Brocot sayı dizisi ile olan ilişkileri incelenebilir, bu konuda yeni sonuçlar elde edilebilir.

Ayrıca basit sürekli kesirler yardımıyla modüler grubun blok formda yazılan kelimelerinin parabolik noktalarını, basit sürekli kesirler ile Stern-Brocot blok kelimeleri arasındaki ilişkiyi ve Stern-Brocot blok kelimeleri ile modüler grubun blok formda yazılan kelimeleri arasındaki ilişkiyi inceledik. Elde edilen bu sonuçlar arasında geçiş yapılabilir, Stern-Brocot kelimeleri ile parabolik nokta hesaplama yöntemi bulunabilir ve yeni sonuçlar elde edilebilir.

Burada modüler grup üzerine yaptığımız çalışmalar modüler grubun alt grupları olan, komütatör alt grup ve kuvvet alt grupları üzerine taşınabilir, bu grupların elemanları da

Stern-Brocot sayı ağacı üzerinde gösterilebilir ve yeni Stern-Brocot sayı ağaçları elde edilebilir.

Ayrıca, çalışmamız Genişletilmiş modüler grup üzerine taşınabilir ve modüler grup bulduğumuz sonuçlar Genişletilmiş modüler grup üzerine uyarlanıp yeni çözümler elde edilebilir ve Genişletilmiş modüler grup Stern-Brocot sayı ağacına uyarlanarak yeni bir ağaç diyagramı oluşturulabilir.

Modüler grup, Hecke gruplarının özel bir alt grubu olduğu için, buradaki sonuçlar yardımıyla Hecke grupları, Genişletilmiş Hecke grupları ve Genişletilmiş Genel Hecke grupları üzerinde çalışmalar yapılabilir ve yeni sonuçlar elde edilebilir.

Burada, Stern-Brocot sayı dizisi ile sürekli kesirler arasındaki ilişkiyi ifade ettik. e , π gibi bazı özel irrasyonel sayılar Stern-Brocot ağacı üzerinde gösterilebilir ve sonsuz sürekli kesirler ile ilişkisi bulunabilir.

Biz bu çalışmamızda, Stern-Brocot sayı dizisini ve negatif rasyonel sayıların eklenmesiyle elde edilen genişletilmiş stern-brocot sayı dizisini inceledik ve özgün sonuçlar elde ettik. Bu sayı dizisine irrasyonel sayılar eklenebilir ve Reel Stern-Brocot sayı dizisi ismiyle yeni bir sayı dizisi oluşturulabilir hatta karmaşık sayıların da dahil olmasıyla daha genel bir formda Kompleks (Karmaşık) Stern-Brocot sayı dizisi elde edilebilir.

8. KAYNAKLAR

[1] Stern, M. “Ueber eine zahlentheoretische Funktion”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *55*, 193-220. (1858).

[2] Brocot, A. “Calcul des rouages par approximations”, nouvelles méthodes (Brocot Horloger, Paris). (1892).

[3] Hecke, E., “Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen”, *Math. Ann*., 112, 664-699, (1936).

[4] Knott, G. D. “The Stern-Brocot Tree”, Civilized Software Inc. 12109 Heritage Park Circle Silver Spring MD 20906. (2019).

[5] Fine, B., “Trace classes and quadratic forms in the modular group”, *Canad. Math. Bull.*, 37 (2), 202-212, (1994).

[6] Nathanson, M. B. “Forests of complex numbers”, *International Journal of Number Theory*, *13*(01), 15-25. (2017).

[7] Koruoğlu, Ö., “The determination of parabolic points in modular and extended modular groups by continued fractions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*., 33 (2), 439445, (2010).

[8] Altındiş, H., “*Sayılar Teorisi ve Uygulamaları*”, Kayseri: Erciyes Üniversitesi Yayın Komisyonu, (1999).

[9] Stern-Brocot ağacı hesaplama programı (10 mayıs 2021) [Online] erişim adresi: https://www.thinkcalculator.com/numbers/stern-brocot.php'

[10] Kurka, P. “Expansion of rational numbers in Möbius number systems”, *Dynamical Numbers: Interplay between Dynamical Systems and Number Theory*, *532*, 67-82. (2009).

[11] Başkan, T., “*Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*”, Bursa: Vipaş, 318-324, (2001).

[12] Jones, G. A., & Singerman, D. “*Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*”, Cambridge university press. (1987).

[13] Gardner, M. “*Entertaining mathematical puzzles*”, Courier Corporation. (1986).

[14] Bates, B. “The Stern-Brocot continued fraction”, Integers: electronic journal of combinatorial number theory, 14 A39-1-A39-23. (2014).

[15] Leon, S. J., Bica, I., & Hohn, T. “*Linear algebra with applications*” (Vol. 6). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. (1998).

[16] Wall, H. S. “*Analytic theory of continued fractions*”, Courier Dover Publications. (2018).

[17] Rockett, A. M., & Szusz, P. “*Continued fractions*”, World Scientific Publishing Company. (1992).

[18] Khovanskii, A. N. “*The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*” (p. 144). Groningen: Noordhoff. (1963).

[19] Lasjaunias, A., & Yao, J. Y. “Hyperquadratic continued fractions in odd characteristic with partial quotients of degree one”, *Journal of Number Theory*, *149*, 259-284. (2015).

[20] Arora, G., De Angelis, V., & Unnithan, S. A “Natural way to write non-Natural numbers”, Series A: Mathematical Sciences, Vol. 30, 79-89. (2020).

[21] Baumgartner, J., Malitz, J., & Reinhardt, W. “Embedding trees in the rationals”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *67*(4), 1748-1753. (1970).

[22] Niqui, M. “Exact arithmetic on the Stern–Brocot tree”, *Journal of Discrete Algorithms*, *5*(2), 356-379. (2007).

[23] Morales, V. G. “Fenomenologıa didactica del arbol de Stern-Brocot”, Ph. D. dissertation, University of Valencia-Valencia, Spain. (2018).

[24] Horst, S., & Alexander, D. “Stern-Brocot-Brüche, Graphen und die Modulgruppe”, Ph. D. dissertation, University of Göttingen-Göttingen, Germany. (2011).

[25] Fractions and the Stern-Brocot tree | Real numbers and limits Math Foundations 96 | N J Wildberger (30 mayıs 2012) [Online] erişim adresi: https://www.youtube.com/watch?v=CiO8iAYC6xI

[26] The Stern-Brocot tree, matrices and wedges | Real numbers and limits Math Foundations 97 | N J Wildberger (30 mayıs 2012) [Online] erişim adresi: https://www.youtube.com/watch?v=qPeD87HJ0UA

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : HALİD MESTANOĞLU

Doğum tarihi ve yeri : 18.06.1992 / BALIKESİR

e-posta : halidmestanoglu@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik	2021
Lisans	Balıkesir Üniversitesi / İlköğretim Matematik Öğrt.	2014
Lise	Savaştepe Anadolu Öğretmen Lisesi	2010