T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SABİT NOKTALARIN GEOMETRİSİ VE SABİT NOKTALARDAKİ SÜREKSİZLİK

UFUK ÇELİK

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR
Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN
Dr. Öğr. Üyesi Beyza Billur İSKENDER EROĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, OCAK-2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Sabit Noktaların Geometrisi ve Sabit Noktalardaki Süreksizlik**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ufuk ÇELIK

ÖZET

SABİT NOKTALARIN GEOMETRİSİ VE SABİT NOKTALARDAKİ SÜREKSİZLİK
DOKTORA TEZİ
UFUK ÇELİK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL ÖZGÜR)

BALIKESİR, OCAK - 2021

Sabit nokta teorisinde daralma şartlarının çeşitli genellemelerinin ortaya çıkardığı ilgi çekici bazı geometrik yapılar mevcuttur. Bu çalışmanın amacı, dönüşümlerin sabit noktası birden fazla olduğunda sabit nokta kümesinin geometrik özelliklerini, Rhoades'in sabit noktadaki süreksizlik kavramı ile ilgili açık problemini ve dönüşümlerin sabit nokta kümesinin elemanları üzerindeki süreklilik-süreksizlik durumunu incelemektir.

Bu tezde, ilk olarak sabit nokta teorisinin bir genellemesi olan sabit çember ve sabit disk problemleri ele alındı.

İkinci bölümde metrik uzayların bir genellemesi olan $S-$metrik uzayların temel özellikleri, metrik ve $S-$metrik arasındaki ilişki ve metrik ile $S-$metrik uzaylarda çember, disk ve sabit çember tanımları ele alındı.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde metrik ve $S-$metrik uzaylarda sırasıyla sabit çember ve sabit disk problemlerine ve Rhoades'in açık problemine yeni çözümler verildi.

Beşinci bölümde metrik ve $S-$metrik uzaylarda ortak sabit nokta ve ortak sabit çember sonuçları verildi.

Altıncı bölümde metrik uzaylarda dönüşümlerin sabit nokta kümesinin elemanları üzerindeki sabit noktadaki süreksizlik kavramı ile ilgili durumunun bir uygulaması verildi ve Rhoades'in açık probleminin bir genellemesi tanıtıldı.

Son bölümde ise kapalı bağıntı kullanılarak metrik uzaylarda yeni sabit nokta sonuçları verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Metrik uzay, $S-$metrik uzay, sabit nokta, sabit çember, sabit disk, süreksizlik, aktivasyon fonksiyonu.

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 116

ABSTRACT

GEOMETRY OF FIXED POINTS AND DISCONTINUITY AT FIXED POINTS
PH.D THESIS
UFUK ÇELİK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL ÖZGÜR)

BALIKESİR, JANUARY - 2021

There are some interesting geometric constructions in the fixed point theory that arise from various generalizations of the contraction conditions. The purpose of this study is to examine the geometry of the set of fixed points when the number of the fixed points of self-mappings is more than one, along with the Rhoades' Open Problem on the discontinuity at fixed point and the continuity-discontinuity case on the elements of the fixed point set of self-mappings.

In this thesis, the fixed circle and the fixed disc problems, as the generalization of the fixed point theory, are first recalled.

In the second chapter, the basic properties of $S-$metric spaces, which are new generalizations of metric spaces, the relationship between a metric and an $S-$metric, and the definitions of the notions of a circle, disc and fixed circle on metric and $S-$metric spaces are recalled.

In the third and fourth chapters, new solutions are given to the fixed circle and fixed disc problems, Rhoades's Open Problem in metric and $S-$metric spaces, respectively.

In the fifth chapter, common fixed point and common fixed circle results are examined in metric and $S-$metric spaces.

In the sixth chapter, an application of the state of self-mappings in metric spaces related to the concept of discontinuity at fixed point on elements of the fixed point set is given and a generalization of Rhoades' Open Problem is introduced.

Finally, new fixed point results are given in metric spaces using implicit relation.

KEYWORDS: Metric space, $S-$metric space, fixed point, fixed circle, fixed disc, discontinuity, activation function.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 116

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}\cup\{0\}$	: Sıfır dahil edilmiş doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{+}$	: Sıfır dahil edilmiş pozitif reel sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, sabit nokta teorisinde dönüşümlerin sabit noktalarının sayısı birden fazla olduğunda bu sabit nokta kümesinin geometrik özellikleri ve dönüşümlerin sabit nokta ya da sabit nokta kümesinin elemanları üzerindeki süreklilik-süreksizlik durumu incelenmiştir.

Tez çalışmam boyunca bilgisinden ve tecrübesinden faydalandığım danışman hocam sayın Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR'e ve bu süreçte bana her türlü desteği gösteren aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Balıkesir, 2021 **Ufuk ÇELİK**

1. GİRİŞ

Bir sabit nokta teoremi, T fonksiyonu $T: X \to X$ şeklinde bir fonksiyon olmak üzere belirli şartlar altında $Tx - x = 0$ denkleminin çözüm kümesinin boştan farklı bir küme olduğunu ileri sürer. Burada X herhangi bir küme (metrik uzay, normlu uzay, genelleştirilmiş metrik uzay v.b.) olabilir. Sahip olduğu yapısal özelliklerle birlikte $Tx - x = 0$ denkleminin çözüm kümesinin matematiğin çeşitli alanlarında birçok uygulaması mevcuttur.

Sabit noktaları olan bazı dönüşümler sinir ağlarında aktivasyon fonksiyonları olarak kullanılabilmektedir. Möbius dönüşümleri bu tür dönüşümlere örnektir. Bir Möbius dönüşümü, a, b, c, d kompleks sayılar ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

formundadır ve en fazla iki sabit noktası vardır.

Diğer taraftan literatürde sabit noktası ikiden fazla olan fonksiyon örnekleri mevcuttur. $\mathbb{C}$ kümesi her $z, w \in \mathbb{C}$ için

$$d(z, w) = |z - w|$$

biçiminde tanımlanan alışılmış metrik ile bir metrik uzaydır. T dönüşümü her $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $Tz = \frac{1}{\bar{z}}$ olarak tanımlansın. Buradan açıkça görülür ki T dönüşümünün sabit nokta kümesinin eleman sayısı ikiden fazladır. Ek olarak bu sabit nokta kümesi geometrik olarak bir çemberdir. Bu çember $C_{0,1}$ çemberidir. Burada $\mathbb{C}$ kümesi üzerinde bir metrik yerine genelleştirilmiş bir metrik olan $S-$metrik alınabilir. Yani $\mathbb{C}$ kümesi her $z, w, t \in \mathbb{C}$ için

$$S(z,w,t)=\frac{|z-t|+|w-t|}{2}$$

biçiminde tanımlanan $S-$metrik ile bir $S-$metrik uzay olur. Buradan da açıkça görülür ki $Tz=\frac{1}{z}$ dönüşümünün sabit nokta kümesi geometrik olarak bir çemberdir. Bu çember $C_{0,1}^{S}=\{z\in\mathbb{C}:S(z,z,0)=1\}$ çemberidir.

Yukarıdaki bilgiler bağlamında $T:X\to X$ şeklindeki dönüşümlerin sabit nokta kümesinin geometrisi oldukça ilgi çekicidir ve büyük öneme sahiptir. Bir T dönüşümünün sabit nokta kümesini $Fix(T)=\{x\in X:Tx=x\}$ şeklinde göstereceğiz.

$T:X\to X$ şeklindeki dönüşümlerin sabit noktalarının sayısının birden fazla olması durumunda bu sabit nokta kümesinin geometrisi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Sabit nokta kümesinin elemanlarının çember oluşturma durumu ilk olarak [1] numaralı makalede N. ÖZGÜR ve N. TAŞ tarafından çalışılmıştır.

Stefan Banach'tan beri yapılan sabit nokta çalışmalarında daralma koşulunun ve metrik uzayın genellemesi büyük öneme sahip olmuştur. Sabit nokta üreten daralma koşullarının varlığı metrik ve genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde oldukça çalışılmıştır. Sabit nokta teorisinin genellemelerinden biri de geometrik olarak bir çember ya da disk oluşturan veya bir çember ya da disk kapsayan bir sabit nokta kümesinin varlığını garanti eden daralma şartlarının varlığı problemidir. Bu problem literatüre sabit çember ya da sabit disk problemi olarak geçmiştir.

Son yıllarda birçok teknik kullanılarak metrik ve genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerindeki dönüşümler için sabit çember problemine çözümler getirilmiştir [1-13]. Bu çalışmanın 3. bölümünün birinci kısmında metrik uzaylarda sabit çember sonuçları verilecektir. Özel bir fonksiyon sınıfına ait artan bir fonksiyon yardımıyla ve özel tanımlanan bazı sayıların daralma koşullarında kullanılmasıyla sabit çember problemine çeşitli çözümler verilecektir.

Sabit nokta teorisinde daralma koşulunun genelleştirilmesinin yanında metrik uzaylar da genelleştirilmiş ve genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde de çeşitli sabit nokta sonuçları çalışılmıştır. Genelleştirilmiş metrik uzaylardan biri Sedghi, Shobe ve Aliouce tarafından [14] numaralı kaynakta tanıtılan $S-$metrik uzay kavramıdır. Bu çalışmanın 3. bölümünün ikinci kısmında $S-$metrik uzaylarda sabit çember sonuçları verilecektir.

Rhoades, [15] numaralı kaynakta 250 tane daralma şartı verip daralma şartlarının çoğunluğunun kümenin tamamında dönüşümün sürekli olmasını gerektirmediğini göstermiştir. Ancak daralma şartlarını sağlayan bütün dönüşümler sabit noktada sürekli çıkmıştır. Ayrıca Rhoades daralma şartlarının dönüşümleri sabit noktada sürekliliğe zorladığını göstermiştir. Rhoades [16] numaralı kaynakta sabit nokta üreten fakat dönüşümleri sabit noktada sürekliliğe zorlamayan daralma şartlarının varlığını açık problem olarak sunmuştur. Açık problem için [1-2,11-12,17-28] numaralı kaynaklarda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. 4. bölümde metrik ve $S-$metrik uzaylarda Rhoades'in bu açık problemine yeni çözümler verilecektir.

Sabit nokta teorisinin yapısal elemanları düşünüldüğünde bu elemanlardan birisi dönüşümlerin sayısıdır. Dönüşüm birden fazla olduğunda bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının araştırılması büyük önem arz etmektedir. [9] numaralı kaynakta herhangi bir çemberi iki ya da daha fazla $T : X \to X$ şeklindeki dönüşümler için ortak sabit çember yapan daralma şartının ya da şartlarının ne olduğu açık problem olarak verilmiştir. Bu açık probleme çözüm olarak [5] numaralı kaynakta ortak sabit nokta ve ortak sabit çember sonuçları verilmiştir. 5. bölümde metrik ve $S-$metrik uzaylarda yeni ortak sabit nokta ve ortak sabit çember sonuçları araştırılacaktır.

Aktivasyon fonksiyonlarının yapay sinir ağları içindeki önemi son yıllardaki çalışmalarla giderek artmaktadır. Son yıllarda [29-34] numaralı kaynaklarda yapay sinir ağları için süreksiz fonksiyonlar ve dönüşümlerin sabit noktaları önemli yer tutmuştur. Bu çalışmanın altıncı bölümünde yapay sinir ağlarında kullanılan bir fonksiyon sınıfının bir üyesinin sabit nokta kümesinin geometrisi ve fonksiyonun sabit nokta kümesinin elemanları üzerindeki sürekliliği-süreksizliği araştırılacaktır. Ayrıca Rhoades'in açık probleminin bir genellemesi verilecektir.

Son yıllarda bir çok teknik kullanılarak çeşitli sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bu tekniklerden birisi kapalı bağıntı yardımıyla dönüşümlerin sabit noktalarının araştırılmasıdır. Son bölümde kapalı bağıntı yardımıyla bazı sabit nokta sonuçları verilecektir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer kısımlarında kullanılan temel kavramlara yer verilecektir.

(X,d) bir metrik uzay olsun. X metrik uzayında bir çember ve bir disk sırasıyla $C_{x_0,r}=\{x\in X : d(x,x_0)=r\}$ ve $D_{x_0,r}=\{x\in X : d(x,x_0)\leq r\}$ olarak tanımlanır.

$(\mathbb{R},d)$ bir metrik uzay olmak üzere, literatürde $\mathbb{R}$ 'de verilen çember örnekleri genellikle bir ya da iki elemanlıdır. Bu noktadan bakıldığında $\mathbb{R}$ 'de $n>2$ olmak üzere n elemanlı bir çemberin varlığı ya da $r_1,r_2,...,r_n\in\mathbb{R}$ olmak üzere bu n tane noktadan geçen bir çemberin varlığı ve n sayısının maksimum değeri açık bir problem olarak bulunmaktadır [11].

Şimdi aşağıda $\mathbb{R}$ 'de sonsuz elemanlı bir çember örneği vereceğiz. $X=\mathbb{R}$ ve $d : X\times X\to[0,\infty)$ dönüşümü her $x\in\mathbb{R}$ için $d(x,y)=|x-y|+||x|-|y||$ olarak tanımlansın. Burada açıkça görülür ki d dönüşümü $\mathbb{R}$ 'de bir metriktir. Şimdi $x_0>0$ ve $r>0$ olmak üzere $C_{x_0,r}$ çemberini belirleyelim. Burada 4 farklı durum söz konusudur.

1. $x>x_0$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& d(x,x_0)=|x-x_0|+||x|-|x_0||=r \\
& \Rightarrow x-x_0+x-x_0=r \\
& \Rightarrow 2x=2x_0+r \\
& \Rightarrow x=x_0+\frac{r}{2}
\end{aligned}
$$

bulunur. $x_0+\frac{r}{2}>x_0$ olduğu için burada açıkça görülür ki r ne olursa olsun $x=x_0+\frac{r}{2}$ noktası $C_{x_0,r}$ çemberinin elemanıdır.

2. $0<x<x_0$ olsun. Bu durumda

$$d(x,x_0)=|x-x_0|+||x|-|x_0||=r$$
$$\Rightarrow x_0-x+x_0-x=r$$
$$\Rightarrow 2x_0-2x=r$$
$$\Rightarrow x=x_0-\frac{r}{2}$$

bulunur. Burada eğer $r<2x_0$ ise $x=x_0-\frac{r}{2}$ noktası $C_{x_0,r}$ çemberinin elemanı olur.

3. $-x_0\leq x\leq 0$ olsun. Bu durumda

$$d(x,x_0)=|x-x_0|+||x|-|x_0||=r$$
$$\Rightarrow x_0-x+x+x_0=r$$
$$\Rightarrow 2x_0=r$$

bulunur. Burada eğer $r=2x_0$ ise $[-x_0,0]$ kapalı aralığındaki her bir reel sayı $C_{x_0,r}$ çemberinin elemanı olur.

4. $x<-x_0$ olsun. Bu durumda

$$d(x,x_0)=|x-x_0|+||x|-|x_0||=r$$
$$\Rightarrow x_0-x-x-x_0=r$$
$$\Rightarrow -2x=r$$
$$\Rightarrow x=-\frac{r}{2}$$

bulunur. Burada eğer $r>2x_0$ ise $x=-\frac{r}{2}$ noktası $C_{x_0,r}$ çemberinin elemanı olur.

Bu noktada yukarıdaki dört durum göz önünde bulundurularak $C_{2,4}$ çemberi hesaplanırsa $C_{2,4}=[-2,0]\cup\{4\}$ elde edilir ki $C_{2,4}$ çemberinin sonsuz elemanlı olduğu görülür.

Bu örnek bize bir küme üzerinde farklı metrikler kullanmanın önemini göstermektedir.

Sabit çember kavramı ilk olarak [1] numaralı kaynakta sabit nokta teorisinin bir genellemesi olarak verildi.

2.1 Tanım (X,d) bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $C_{x_0,r}=\{x\in X: d(x,x_0)=r\}$ bir çember olsun. Eğer her $x\in C_{x_0,r}$ için $Tx=x$ ise $C_{x_0,r}$ çemberine T dönüşümünün sabit çemberi denir [1].

Sabit çember problemine son zamanlarda birçok teknik kullanılarak çeşitli çözümler getirilmiştir. Bu tekniklerden bazılarında Wardowski tarafından [35] numaralı kaynakta tanıtılan aşağıdaki fonksiyon ailesi kullanıldı.

2.2 Tanım $\mathbb{F}$, aşağıdaki şartları sağlayan $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ şeklindeki bütün fonksiyonların ailesi olsun [35].

1. F fonksiyonu kesinlikle artandır.
2. $(0,\infty)$ aralığındaki her bir $\{a_n\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n)=-\infty$ olmasıdır.
3. $\lim\limits_{a\to 0^+} a^k F(a)=0$ eşitliğini sağlayan bir $k\in(0,1)$ sayısı vardır.

Aşağıdaki örnekte verilen fonksiyonlar [35] numaralı kaynakta Tanım 2.2'nin şartlarını sağlayan fonksiyon örnekleri olarak verildi.

2.3 Örnek F fonksiyonu $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $F(x)=\ln x$, $F(x)=\ln x+x$, $F(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ve $F(x)=\ln(x^2+x)$ fonksiyonları Tanım 2.2'deki koşulları sağlar [35].

Aşağıdaki daralma yapısı Wardowski tarafından [35] numaralı kaynakta Tanım 2.2'deki fonksiyon ailesi kullanılarak verildi.

2.4 Tanım Eğer her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$ olacak şekilde $\tau > 0$ ve $F \in \mathbb{F}$ varsa $T : X \to X$ dönüşümüne bir $F-$daralma denir [35].

[35] numaralı kaynakta Tanım 2.4'deki daralma tanımı kullanılarak bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Aşağıdaki tanım [9] numaralı kaynakta $F-$daralmanın bir başka çeşidi olarak verildi.

2.5 Tanım Eğer her $x \in X$ için $d(x, Tx) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(x, Tx)) \leq F(d(x_0, x))$ olacak şekilde $\tau > 0$, $F \in \mathbb{F}$ ve $x_0 \in X$ varsa $T : X \to X$ dönüşümüne X üzerinde bir F_c-daralma denir [9].

Aşağıdaki teoremde Tanım 2.5'deki F_c-daralma tanımı kullanılarak sabit çember problemine bir çözüm getirilmiştir [9].

2.6 Teorem T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası için bir F_c-daralma dönüşümü ve $\rho_d = \inf\{d(x, Tx) : x \neq Tx, x \in X\}$ olsun. Bu taktirde C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberidir. Özellikle $\rho < \rho_d$ olmak üzere T dönüşümü $C_{x_0,\rho}$ çemberini de sabit bırakır [9].

Bu çalışmada metrik uzaylarda sabit çember problemine çözümler verirken

$$\rho_d = \inf\{d(x, Tx) : x \neq Tx, x \in X\} \tag{2.1}$$

sayısı kullanılacaktır.

Şimdi aşağıda diğer bölümlerde kullanılacak olan $N_d(x,y)$ ve $M_d(x,y)$ sayılarını verelim. Bu sayılar [28] numaralı kaynakta Rhoades'in açık problemine bir çözüm sunmak için verildi.

$$\begin{aligned}N_d(x,y) &= \alpha \max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\} \\ &+\beta \max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\theta\frac{[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{2}\right\} \\ &+\mu \max\left\{d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(x,Tx)},\frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_d(x,y) &= \alpha \max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\} \\ &+\beta \max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{2}\right\} \\ &+\mu \max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(y,Ty)[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{1+d(x,Tx)+d(y,Ty)}\right\}\end{aligned}$$

$0\le\theta<1, \alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}_+$ ve $\alpha+\beta+\mu>0$.

[14] numaralı kaynakta bir metrik uzayın genellemesi olarak $S-$metrik uzay kavramı tanıtıldı.

2.7 Tanım X boştan farklı bir küme ve $S: X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z,a\in X$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $S(x,y,z)=0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x=y=z$ olmasıdır.
2. $S(x,y,z)\le S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)$.

Bu takdirde S dönüşümüne X üzerinde bir $S-$metrik ve (X,S) ikilisine de bir $S-$metrik uzay denir [14].

2.8 Örnek $X=\mathbb{R}$ ya da $X=\mathbb{C}$ olsun ve $S: X\times X\times X\to[0,\infty)$ dönüşümü her $x,y,z\in X$ için $S(x,y,z)=|x-z|+|y-z|$ olarak tanımlansın. Bu takdirde S dönüşümü X üzerinde bir $S-$metriktir. $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$'deki bu $S-$metriğe alışılmış $S-$metrik denir [36].

2.9 Önerme (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $x,y\in X$ olsun. Bu takdirde $S(x,x,y)=S(y,y,x)$ eşitliği geçerlidir [14].

Bir metrik ve bir $S-$metrik arasındaki ilişki [37] numaralı kaynakta sonuç olarak verildi.

2.10 Önerme (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlanır [37]:

1. Her $x,y,z\in X$ için $S_d(x,y,z)=d(x,z)+d(y,z)$ fonksiyonu X üzerinde bir $S-$metriktir.
2. (X,d) uzayında $x_n\to x$ olması için gerekli ve yeterli koşul (X,S_d) uzayında $x_n\to x$ olmasıdır.
3. (X,d) uzayında $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul (X,S_d) uzayında $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmasıdır.
4. (X,d) uzayının tam olması için gerekli ve yeterli koşul (X,S_d) uzayının tam olmasıdır.

Önerme 2.10'daki birinci maddedeki S_d metriğine d metriği tarafından üretilen $S-$metrik denir. Önerme 2.10'daki birinci madde her bir metrikten bir $S-$metrik üretilebilir sonucunu verir. Fakat her bir $S-$metrik bir metrik tarafından üretilemez. Aşağıda verilen Örnek 2.11, [38] numaralı kaynakta bir metrik tarafından üretilemeyen $S-$metrik örneği olarak verilmiştir. [39] numaralı kaynakta (X,S) herhangi bir $S-$metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için $d_s(x, y) = S(x, x, y) + S(y, y, x)$ biçiminde tanımlanan $d_s : X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümünün X üzerinde bir metrik tanımlayacağı belirtilmiş fakat [38] numaralı kaynakta $d_s : X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümünün X üzerinde her zaman bir metrik tanımlamayacağı bir örnekle gösterilmiştir. $d_s : X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümünün X üzerinde bir metrik tanımlamamasının sebebi üçgen eşitsizliğini sağlamamasıdır. Yani, X üzerinde tanımlı her bir $S-$metrik X üzerinde bir metrik tanımlamamaktadır.

2.11 Örnek $X = \mathbb{R}$ ve $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için $S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$ olarak tanımlansın. Bu takdirde S dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$metrik ve (X, S) bir $S-$metrik uzaydır [38].

Şimdi bazı $S-$metrik uzay örneklerini dikkate alalım.

2.12 Örnek X boştan farklı bir küme, $d : X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik ve $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$S(x, y, z) = \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(y, z)\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde S dönüşümü X üzerinde bir $S-$metrik ve (X, S) ikilisi $S-$metrik uzay olur [13]. Bu $S-$metrik $m(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ olarak tanımlanan m metriği tarafından üretilir. Gerçekten her $x, y, z \in X$ için

$$S(x, x, z) = 2\min\{1, d(x, z)\} = 2m(x, z) \Rightarrow m(x, z) = \min\{1, d(x, z)\}$$

ve

$$S(y,y,z)=2\min\{1,d(y,z)\}=2m(y,z)\Rightarrow m(y,z)=\min\{1,d(y,z)\}$$

olur. Dolayısyla $S(x,y,z)=\min\{1,d(x,z)\}+\min\{1,d(y,z)\}=m(x,z)+m(y,z)$ elde edilir ki bu $S-$metriğin, $m(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ olarak tanımlanan m metriği tarafından üretildiğini gösterir.

2.13 Örnek $X=\mathbb{R}$, $d:X\times X\to[0,\infty)$ dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik ve $S:X\times X\times X\to[0,\infty)$ dönüşümü her $x,y,z\in X$ için

$$S(x,y,z)=\min\{1,d(x,z)\}+|y-z|$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde S dönüşümü X üzerinde bir $S-$metrik ve (X,S) ikilisi $S-$metrik uzay olur [13]. Bu $S-$metrik herhangi bir metrik tarafından üretilemez. Tersine her $x,y,z\in X$ için

$$S(x,y,z)=d_1(x,z)+d_1(y,z)$$

olacak şekilde bir d_1 metriğinin bulunduğu kabul edilirse her $x,y,z\in X$ için

$$S(x,x,z)=2d_1(x,z)\Rightarrow d_1(x,z)=\frac{1}{2}\left[\min\{1,d(x,z)\}+|x-z|\right]$$

ve

$$S(y,y,z)=2d_1(y,z)\Rightarrow d_1(y,z)=\frac{1}{2}\left[\min\{1,d(y,z)\}+|y-z|\right]$$

olur. Dolayısıyla

$$\min\{1, d(x,z)\} + |y-z| \neq \frac{1}{2}\left[\min\{1, d(x,z)\} + |x-z|\right] + \frac{1}{2}\left[\min\{1, d(y,z)\} + |y-z|\right]$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak buradaki $S-$metrik herhangi bir metrik tarafından üretilemez.

[4] ve [14] numaralı kaynaklarda bir (X,S) $S-$metrik uzayında bir çember ve bir disk sırasıyla $C^S_{x_0,r} = \{x \in X : S(x,x,x_0) = r\}$ ve $D^S_{x_0,r} = \{x \in X : S(x,x,x_0) \leq r\}$ olarak tanımlandı.

2.14 Örnek X boştan farklı bir küme, $d : X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik ve (X,S) $S-$metrik uzayı Örnek 2.12'de verilen $S-$metrik uzay olsun. $C^S_{x_0,r}$ çemberi hesaplandığında

$$C^S_{x_0,r} = \{x \in X : S(x,x,x_0) = 2\min\{1, d(x,x_0)\} = r\}$$

bulunur. Burada üç farklı durum ortaya çıkar.

1. Eğer $r = 2$ olursa $C^S_{x_0,r} = \{x \in X : d(x,x_0) \geq 1\}$ olur.
2. Eğer $r > 2$ olursa $C^S_{x_0,r} = \emptyset$ olur.
3. Eğer $r < 2$ olursa $C_{x_0,\frac{r}{2}} = \left\{x \in X : d(x,x_0) = \frac{r}{2}\right\}$ iken $C^S_{x_0,r} = C_{x_0,\frac{r}{2}}$ olur.

2.15 Örnek X boştan farklı bir küme, $d : X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik ve (X,S) $S-$metrik uzayı Örnek 2.13'de verilen $S-$metrik uzay olsun. $C^S_{x_0,r}$ çemberi hesaplandığında

$$C^S_{x_0,r} = \left\{ x \in X : S(x,x,x_0) = \min\{1, d(x,x_0)\} + |x - x_0| = r \right\}$$

bulunur. Burada iki farklı durum ortaya çıkar.

1. Eğer $x \in \left(X - D_{x_0,1}\right) \cup C_{x_0,1}$ ise $C^S_{x_0,r} = \left\{ x \in \left(X - D_{x_0,1}\right) \cup C_{x_0,1} : |x - x_0| = r - 1 \right\}$ olur.
2. Eğer $x \in D_{x_0,1} - C_{x_0,1}$ ise $C^S_{x_0,r} = \left\{ x \in D_{x_0,1} - C_{x_0,1} : d(x,x_0) + |x - x_0| = r \right\}$ olur.

Aşağıda verilen $S-$metrik herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen $S-$metriktir fakat bu $S-$metrik uzaydaki herhangi bir çember $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan alışılmış metrik uzaydaki çember ile aynıdır.

2.16 Örnek $X = \mathbb{R}$ ya da $X = \mathbb{C}$ ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$S(x,y,z) = \max\{|x-y|, |y-z|, |z-x|\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde S dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik tarafından üretilmeyen $S-$metriktir [13]. Bu $S-$metrik uzaydaki herhangi bir çember $C^S_{x_0,r} = \{x_0 - r, x_0 + r\}$ olur. Bu çember $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriğe göre $C_{x_0,r} = \left\{ x \in X : |x - x_0| = r \right\}$ çemberiyle aynıdır.

Aşağıdaki daralma tanımı $S-$metrik uzaylar üzerindeki dönüşümler için [6] numaralı kaynakta verildi.

2.17 Tanım (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$S(Tx,Tx,x) > 0 \Rightarrow t + F(S(Tx,Tx,x)) \leq F(S(x,x,x_0))$$

şartını sağlayan $F \in \mathbb{F}$, $\tau > 0$ ve $x_0 \in X$ varsa $T : X \to X$ dönüşümüne X üzerinde F_c^S- daralma denir [6].

[6] numaralı kaynakta Tanım 2.17'deki daralma tanımı kullanılarak sabit çember problemine çözümler verilmiştir.

Bu çalışmada $S-$metrik uzaylarda sabit çember problemine çözümler verirken

$$\rho_s = \inf\{S(x,x,Tx) : x \neq Tx, x \in X\} \tag{2.2}$$

sayısı kullanılacaktır.

Aşağıdaki sonuç [17] numaralı kaynakta Rhoades'in açık problemi için verilen bir çözümdür.

2.18 Teorem Eğer bir tam (X, d) metrik uzayının bir $T : X \to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa T'nin tek z sabit noktası vardır. Ek olarak T'nin z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{x \to z} \max\{d(x,Tx), d(z,Tz)\} = 0$ olmasıdır [17].

1. $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ olacak şekilde bir dönüşüm olduğunda $d(Tx,Ty) \leq \psi(\max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\})$ olur.

2. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\varepsilon < \max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\} < \varepsilon + \delta$ olduğunda $d(Tx,Ty) \le \varepsilon$ olur.

Aşağıdaki bir diğer sonuç [19] numaralı kaynakta Rhoades'in açık probleminin bir başka çözümü olarak verilmiştir.

2.19 Teorem Eğer bir tam (X,d) metrik uzayının bir $T: X \to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa T'nin tek z sabit noktası vardır. Ek olarak T'nin z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{x\to z} M(x,z) = 0$ olmasıdır [19].

1. $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ olacak şekilde bir dönüşüm olduğunda $d(Tx,Ty) \le \psi(N(x,y))$ olur. Burada $0 \le a < 1$ olmak üzere $N(x,y)$ fonksiyonu
$$N(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), a\frac{[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{2}\right\}$$
biçiminde tanımlanır.
2. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\varepsilon < M(x,y) < \varepsilon + \delta$ olduğunda $d(Tx,Ty) \le \varepsilon$ olur. Burada $M(x,y)$ fonksiyonu
$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{2}\right\}$$
biçiminde tanımlanır.

5. bölümde dönüşümlerin metrik ve $S-$metrik uzaylarda ortak sabit noktaları ve ortak sabit nokta birden fazla ise ortak sabit noktaların çember oluşturma durumu araştırılacaktır. Şimdi aşağıda ortak sabit nokta, çakışma noktası ile metrik ve $S-$metrik uzaylarda ortak sabit çember tanımlarını verelim.

2.20 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $x\in X$ noktası için $Tx=Sx=x$ oluyorsa $x\in X$ noktasına T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir [40].

2.21 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $x\in X$ noktası için $Tx=Sx$ oluyorsa $x\in X$ noktasına T ve S dönüşümlerinin çakışma noktası denir [40].

2.22 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $C_{x_0,r}=\{x\in X:d(x,x_0)=r\}$ bir çember olsun. Eğer $T,S:X\to X$ dönüşümleri için her $x\in C_{x_0,r}$ için $Tx=Sx=x$ ise $C_{x_0,r}$ çemberine T ve S dönüşümlerinin ortak sabit çemberi denir [9].

2.23 Tanım (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $C^S_{x_0,r}=\{x\in X:S(x,x,x_0)=r\}$ bir çember olsun. Eğer $T,U:X\to X$ dönüşümleri için her $x\in C^S_{x_0,r}$ için $Tx=Ux=x$ ise $C^S_{x_0,r}$ çemberine T ve U dönüşümlerinin ortak sabit çemberi denir [9].

Tezin diğer bölümlerinde bir T dönüşümü denildiğinde aksi belirtilmedikçe $T:X\to X$ şeklindeki dönüşüm anlaşılacaktır.

3. METRİK VE $S-$METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBER PROBLEMİ

Bu bölümde metrik ve $S-$metrik uzaylarda $T:X\to X$ şeklindeki dönüşümlerin sabit noktalarının birden fazla olması durumunda sabit noktaların geometrik özellikleri sabit çember ve sabit disk problemleri çerçevesinde araştırılacaktır. Elde edilen sonuçlar Wardowski tarafından tanıtılan fonksiyonlar ailesi kullanılarak oluşturulacaktır. Sabit çember problemi ilk olarak metrik uzaylarda incelenecektir. Bunun için Bölüm 2'de verilen $N_d(x,y)$ sayısı ve $N_d(x,y)$ sayısının aşağıda verilen değiştirilmiş hali kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} N_d^1(x,y) &= \alpha \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\right\} \\ &+\beta \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \theta\frac{\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]}{2}\right\} \\ &+\mu \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(x,Tx)}, \frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\} \\ &\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}^+, \alpha+\beta+\mu=1, 0\le\theta<1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1 Metrik Uzaylarda Sabit Çember Problemi

Bu bölümde sabit çember problemi metrik uzaylarda ele alınacaktır. Bölüm 2'de (2.1)'de tanımlanan ρ_d sayısı kullanılarak sabit çember problemine yeni çözümler üretilecektir. Yeni sabit çember sonuçları elde etmek için $F-$daralmanın yeni tipleri tanıtılacaktır. Şimdi Wardowski tarafından tanıtılan fonksiyonlar ailesi kullanılarak yeni bir daralma şartı verilecektir.

3.1.1 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Bölüm 2'de verilen $N_d(x,y)$ sayısının katsayıları özel olarak $\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}^+, \alpha+\beta+\mu=1$ ve $0\le\theta<1$ olacak şekilde seçilsin. Eğer her $x\in X$ için $d(Tx,x)>0 \Rightarrow \tau+F\left(d(Tx,x)\right)\le F\left(N_d(x,x_0)\right)$

şartını sağlayan $F \in \mathbb{F}$, $\tau > 0$ ve $x_0 \in X$ noktası varsa T dönüşümüne X üzerinde $F_c^N -$ daralma denir.

Tanım 3.1.1'in doğal bir sonucu aşağıda önerme olarak verilmiştir.

3.1.2 Önerme (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası ile bir $F_c^N -$daralma ise $Tx_0 = x_0$ olur.

İspat: Tersine $Tx_0 \neq x_0$ olduğu kabul edilsin. $F_c^N -$daralma tanımından

$$d(Tx_0,x_0) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx_0,x_0)) \leq F(N_d(x_0,x_0))$$

$$= F\left(\begin{array}{l} \alpha \max\{d(x_0,Tx_0), d(x_0,Tx_0)\} \\ +\beta \max\left\{d(x_0,x_0), d(x_0,Tx_0), d(x_0,Tx_0), \theta \dfrac{[d(x_0,Tx_0)+d(x_0,Tx_0)]}{2}\right\} \\ +\mu \max\left\{d(x_0,Tx_0), d(x_0,Tx_0), \dfrac{d(x_0,x_0)d(x_0,Tx_0)}{1+d(x_0,Tx_0)}, \dfrac{d(x_0,x_0)d(x_0,Tx_0)}{1+d(Tx_0,Tx_0)}\right\} \end{array}\right)$$

$$= F((\alpha+\beta+\mu)d(x_0,Tx_0)) = F(d(x_0,Tx_0))$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx_0 = x_0$ olur.

Tanım 3.1.1'deki daralma şartı kullanılarak aşağıdaki sabit çember teoremi elde edilmiştir.

3.1.3 Teorem (X,d) bir metrik uzay ve T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası ile bir $F_c^N -$ daralma olsun. ρ_d sayısı (2.1)'deki gibi tanımlansın. Eğer her $x \in C_{x_0,\rho_d}$ için $d(x_0,Tx) = \rho_d$ ise C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. Üstelik $\rho < \rho_d$ olmak üzere eğer her $x \in C_{x_0,\rho}$ için $d(Tx, x_0) = \rho$ ise T dönüşümü her bir $C_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakır.

İspat: $x \in C_{x_0,\rho_d}$ olsun. $d(Tx, x_0) = \rho_d$ olduğu için T dönüşümü C_{x_0,ρ_d} çemberini C_{x_0,ρ_d} çemberine resmeder. Eğer $Tx \neq x$ ise ρ_d 'nin tanımından $d(x,Tx) \geq \rho_d$ elde edilir. Böylece $F_c^N -$ daralma tanımı, Önerme 3.1.2 ve F fonksiyonunun artanlığı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
F(\rho_d) &\leq F(d(x,Tx)) \leq F(N_d(x,x_0)) - \tau < F(N_d(x,x_0)) \\
&= F\left(\begin{array}{l}
\alpha \max\{d(x,Tx), d(x_0,Tx_0)\} \\
+\beta \max\left\{d(x,x_0), d(x,Tx), d(x_0,Tx_0), \theta\dfrac{[d(x,Tx_0)+d(x_0,Tx)]}{2}\right\} \\
+\mu \max\left\{d(x,Tx), d(x_0,Tx_0), \dfrac{d(x,x_0)d(x_0,Tx_0)}{1+d(x,Tx)}, \dfrac{d(x,x_0)d(x_0,Tx_0)}{1+d(Tx,Tx_0)}\right\}
\end{array}\right) \\
&= F\left(\alpha \max\{d(x,Tx),0\} + \beta \max\left\{\rho_d, d(x,Tx), 0, \theta\frac{[\rho_d+\rho_d]}{2}\right\} + \mu \max\{d(x,Tx),0,0,0\}\right) \\
&= F((\alpha+\beta+\mu)d(x,Tx)) \\
&= F(d(x,Tx))
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $d(x,Tx) = 0$ ve dolayısıyla $Tx = x$ elde edilir. Neticeten C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. Başka bir ifade ile $C_{x_0,\rho_d} \subset Fix(T)$ elde edilir.

$\rho < \rho_d$ olmak üzere eğer her $x \in C_{x_0,\rho}$ için $d(Tx, x_0) = \rho$ ise T dönüşümünün $C_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bıraktığını gösterelim. Kabul edelim ki $x \in C_{x_0,\rho}$ için $d(x,Tx) > 0$ olsun. $F_c^N -$ daralma tanımından

$$F(d(x,Tx)) \leq F(N_d(x,x_0)) - \tau < F(N_d(x,x_0)) = F((\alpha+\beta+\mu)d(x,Tx)) = F(d(x,Tx))$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $d\left(x,Tx\right)=0$ ve dolayısıyla $Tx=x$ bulunur. Böylece $C_{x_0,\rho}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir.

3.1.4 Sonuç T dönüşümü $x_0\in X$ noktası için bir F_c^N-daralma olsun ve ρ_d sayısı (2.1) 'deki gibi tanımlansın. Eğer her bir $\rho<\rho_d$ ve her $x\in C_{x_0,\rho}$ için $d\left(x_0,Tx\right)=\rho$ ise T dönüşümü D_{x_0,ρ_d} diskini sabit bırakır, yani $D_{x_0,\rho_d}\subset Fix(T)$ elde edilir.

Teorem 3.1.3 için noktasal bir örnek verilecektir.

3.1.5 Örnek X kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın ve d metriği X üzerinde alışılmış metrik olsun:

$$X=\left\{0,4,e,e^2,e^4,e^8,e^8-4,e^8+4,e^{16},e^{16}-4,e^{16}+4,e^{16}-e^8+4,e^{16}+e^8+4\right\}.$$

$T:X\to X$ dönüşümü her $x\in X$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Tx=\begin{cases} e^8+4 & , \quad x=4 \\ x & , \quad x\neq 4 \end{cases}.$$

Böylece α,β ve μ katsayıları herhangi pozitif reel sayılar ve $\alpha+\beta+\mu=1$ olmak üzere, T dönüşümü $F=\ln x+x$, $\tau=\beta$ ve $x_0=e^{16}+4$ ile bir F_c^N-daralmadır. Gerçekten $x=4$ için $d\left(Tx,x\right)=e^8$ ve $d\left(x,x_0\right)=e^{16}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\tau+F\left(d\left(Tx,x\right)\right)=\beta+8+e^{8}$$
$$\Rightarrow \beta+8+e^{8}<\beta\left(e^{16}-e^{8}\right)+\left(\alpha+\beta+\mu\right)e^{8}+\ln\left(\alpha e^{8}+\beta e^{8}+\mu e^{8}\right)$$
$$<\alpha e^{8}+\beta e^{16}+\mu e^{8}+\ln\left(\alpha e^{8}+\beta e^{16}+\mu e^{8}\right)=F\left(\alpha e^{8}+\beta e^{16}+\mu e^{8}\right)$$
$$=F\left(\begin{array}{l}\alpha\max\left\{e^{8},0\right\}+\beta\max\left\{e^{16},e^{8},0,\theta\dfrac{\left[e^{16}+e^{16}-e^{8}\right]}{2}\right\}\\ \mu\max\left\{e^{8},0,\dfrac{e^{16}.0}{1+e^{8}},\dfrac{e^{16}.0}{1+e^{16}-e^{8}}\right\}\end{array}\right)=F\left(N_{d}\left(x,x_{0}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \tau+F\left(d\left(Tx,x\right)\right)\leq F\left(N_{d}\left(x,x_{0}\right)\right)$$

bulunur. ρ_d 'nin tanımından $\rho_d=\min\left\{d\left(Tx,x\right):Tx\neq x\right\}=e^{8}$ olur. Sonuç olarak T dönüşümü sırasıyla $C_{e^{16}+4,e^{8}}=\left\{e^{16}-e^{8}+4,e^{16}+e^{8}+4\right\}$ çemberini ve $D_{e^{16}+4,e^{8}}=\left\{e^{16},e^{16}-4,e^{16}+4,e^{16}-e^{8}+4,e^{16}+e^{8}+4\right\}$ diskini sabit bırakır.

Aşağıda Teorem 3.1.3'ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösteren örnek verilmiştir.

3.1.6 Örnek $X=\mathbb{C}$ alışılmış metrik uzay olsun ve $T:X\to X$ dönüşümü her $z\in\mathbb{C}$ ve $\zeta>0$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Tz=\begin{cases} z & , \quad |z-1|\leq\zeta \\ 1 & , \quad |z-1|>\zeta \end{cases}.$$

T dönüşümünün F_c^N – daralma dönüşümü olmadığını göstereceğiz. Eğer $z\in\mathbb{C}$ için $|z-1|>\zeta$ ise F_c^N – daralma tanımından

$$d(z,Tz)=d(z,1)>0\Rightarrow \tau+F(d(z,1))\leq F(N_d(z,1))$$

$$=F\left(\begin{array}{l}\alpha\max\{d(z,Tz),d(1,T1)\}\\ +\beta\max\left\{d(z,1),d(z,Tz),d(1,T1),\theta\frac{[d(z,T1)+d(1,Tz)]}{2}\right\}\\ +\mu\max\left\{d(z,Tz),d(1,T1),\frac{d(z,1)d(1,T1)}{1+d(z,Tz)},\frac{d(z,1)d(1,T1)}{1+d(Tz,T1)}\right\}\end{array}\right)$$

$$=F((\alpha+\beta+\mu)d(z,1))=F(d(z,1))$$

bulunur ki $\tau>0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T dönüşümü F_c^N-daralma dönüşümü değildir fakat $\rho\leq\zeta$ iken her bir $C_{1,\rho}$ çemberini sabit bırakır.

(3.1)'de verilen değiştirilmiş $N_d^1(x,y)$ sayısı kullanılarak bir diğer sabit çember teoremi verilecektir.

3.1.7 Teorem (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. ρ_d sayısı Bölüm 2'de (2.1)'deki gibi ve $N_d^1(x,y)$ sayısı (3.1)'deki gibi tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir $x_0\in X$ noktası varsa C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir ve $Tx_0=x_0$ olur.

1. Her $x\in C_{x_0,\rho_d}$ için bir $\delta(\rho_d)>0$ sayısı vardır öyle ki $\rho_d\leq N_d^1(x,x_0)<\rho_d+\delta(\rho_d)\Rightarrow d(Tx,x_0)\leq\rho_d$ olur.
2. Her $x\in X$ için $d(Tx,x)>0\Rightarrow d(Tx,x)\leq\psi(N_d^1(x,x_0))$ olur. Burada $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $t>0$ için $\psi(t)<t$ olarak tanımlıdır.

İspat: $x\in C_{x_0,\rho_d}$ olsun. Şimdi her $x\in C_{x_0,\rho_d}$ için $Tx=x$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $Tx\neq x$ olsun. Hipotezin 2. şartından

$$
\begin{aligned}
d\left(x,Tx\right) &\leq \psi\left(N_d^1\left(x,x_0\right)\right) < N_d^1\left(x,x_0\right) \\
&= \alpha \max\left\{d\left(x,x_0\right), d\left(x,Tx\right), d\left(x_0,Tx_0\right)\right\} \\
&+ \beta \max\left\{d\left(x,x_0\right), d\left(x,Tx\right), d\left(x_0,Tx_0\right), \theta\frac{\left[d\left(x,Tx_0\right)+d\left(x_0,Tx\right)\right]}{2}\right\} \\
&+ \mu \max\left\{d\left(x,x_0\right), d\left(x,Tx\right), d\left(x_0,Tx_0\right), \frac{d\left(x,x_0\right)d\left(x_0,Tx_0\right)}{1+d\left(x,Tx\right)}, \frac{d\left(x,x_0\right)d\left(x_0,Tx_0\right)}{1+d\left(Tx,Tx_0\right)}\right\}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

elde edilir. Öncelikle (3.2) 'den $Tx_0 = x_0$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $Tx_0 \neq x_0$ olsun. Böylece

$$
d\left(Tx_0,x_0\right) \leq \psi\left(N_d^1\left(x_0,x_0\right)\right) < N_d^1\left(x_0,x_0\right) = \left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(x_0,Tx_0\right) = d\left(x_0,Tx_0\right)
$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx_0 = x_0$ olur. Böylece (3.2) eşitsizliği ve $Tx_0 = x_0$ eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
d\left(Tx,x\right) &< \alpha \max\left\{d\left(x,x_0\right), d\left(x,Tx\right), d\left(x_0,Tx_0\right)\right\} \\
&+ \beta \max\left\{d\left(x,x_0\right), d\left(x,Tx\right), d\left(x_0,Tx_0\right), \theta\frac{\left[d\left(x,Tx_0\right)+d\left(x_0,Tx\right)\right]}{2}\right\} \\
&+ \mu \max\left\{d\left(x,x_0\right), d\left(x,Tx\right), d\left(x_0,Tx_0\right), \frac{d\left(x,x_0\right)d\left(x_0,Tx_0\right)}{1+d\left(x,Tx\right)}, \frac{d\left(x,x_0\right)d\left(x_0,Tx_0\right)}{1+d\left(Tx,Tx_0\right)}\right\} \\
&= \alpha \max\left\{\rho_d, d\left(x,Tx\right)\right\} + \beta \max\left\{\rho_d, d\left(x,Tx\right), \theta\frac{\left[\rho_d + d\left(x_0,Tx\right)\right]}{2}\right\} + \mu \max\left\{\rho_d, d\left(x,Tx\right)\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Hipotezin 1. şartı kullanılarak $0 \leq \theta < 1$ olduğu için $\theta\frac{\left[\rho_d + d\left(x_0,Tx\right)\right]}{2} < \rho_d$ bulunduğundan $d\left(x,Tx\right) < \left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(x,Tx\right)$ elde edilir ki $\alpha+\beta+\mu = 1$ olduğu için bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $Tx = x$ olur ve C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. Diğer bir ifade ile $C_{x_0,\rho_d} \subset Fix\left(T\right)$ elde edilir.

Teorem 3.1.7 için aşağıdaki örnek verilecektir.

3.1.8 Örnek $\mathrm{P}=\{x\in\mathbb{C}:|x|=2\}$ kümesi alışılmış metrik ile elde edilen metrik uzay olsun. $T:\mathrm{P}\to\mathrm{P}$ dönüşümünü her $x\in P$ için $\arg(k_x)=\arg(x)+\frac{5\pi}{3}$ ve $|k_x|=2$ olacak şekilde bir k_x kompleks sayısı seçerek aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Tx=\begin{cases} k_x & , \quad 0\le\arg(x)<\frac{\pi}{3} \\ x & , \quad \frac{\pi}{3}\le\arg(x)<2\pi \end{cases}.$$

Bu takdirde T dönüşümü $\psi(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $\delta(\rho_d)=\rho_d$, $x_0=-2$ ve $\rho_d=2$ ile Teorem 3.1.7'nin şartlarını sağlar. Gerçekten, öncelikle $Tx\neq x$ şartını sağlayan herhangi bir x için $\arg(x)=\alpha$ ve $\arg(k_x)=2\pi-\beta$ olsun. Bu durumda $0\le\alpha<\frac{\pi}{3}$ ve $2\pi-\beta=\alpha+\frac{5\pi}{3}$ olur. $2\pi-\beta-\frac{5\pi}{3}=\alpha$ ve buradan $0\le 2\pi-\beta-\frac{5\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$ ve $\frac{5\pi}{3}\le 2\pi-\beta<2\pi$ bulunur. Üstelik $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ olur. Bunun geometrik anlamı argümenti $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ aralığında olan her bir $x\in P$ için bu noktanın T dönüşümü altındaki resmi ile arasındaki yayın ölçüsü radyan cinsinden $\frac{\pi}{3}$ derecedir. Bu durumda $Tx\neq x$ özelliğindeki her x için $d(x,Tx)$ ifadesinin değeri hesaplanırsa $x=2e^{i\alpha}$ ve $k_x=2e^{i(2\pi-\beta)}$ olduğu için

$$\begin{aligned}
\left|x-k_x\right| &= \sqrt{\left(2\cos\alpha-2\cos\beta\right)^2+\left(2\sin\alpha+2\sin\beta\right)^2} \\
&= \sqrt{4\cos^2\alpha-8\cos\alpha\cos\beta+4\cos^2\beta+4\sin^2\alpha+8\sin\alpha\sin\beta+4\sin^2\beta} \\
&= \sqrt{8-8\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right)} \\
&= \sqrt{8-8\cos\left(\alpha+\beta\right)} = \sqrt{8-8.\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu değer aslında ρ_d sayısının değeridir. Şimdi $C_{-2,2}=\left\{x\in \mathrm{P} : d\left(x,-2\right)=2\right\}$ çemberinin elemanlarını belirleyelim. $x=2e^{i\theta}$ olduğundan

$$d\left(x,-2\right)=\left|x+2\right|=\sqrt{\left(2\cos\theta+2\right)^2+\left(2\sin\theta\right)^2}=2$$

olur. Buradan $4\cos^2\theta+8\cos\theta+4+4\sin^2\theta=4$ olduğundan $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ bulunur. Buradan $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$ ve $\theta_2=\frac{4\pi}{3}$ elde edilir. Yani $C_{-2,2}=\left\{2e^{i\frac{2\pi}{3}},2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$ olur. Her $x\in C_{-2,2}$ için $N_d^1\left(x,-2\right)$ sayısı hesaplandığında

$$\begin{aligned}
N_d^1\left(x,-2\right) &= \alpha\max\left\{d\left(x,-2\right),d\left(Tx,x\right)\right\} \\
&+\beta\max\left\{d\left(x,-2\right),d\left(Tx,x\right),\theta\frac{\left[d\left(x,-2\right)+d\left(Tx,-2\right)\right]}{2}\right\} \\
&+\mu\max\left\{d\left(x,-2\right),d\left(Tx,x\right)\right\} \\
&=\left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(x,-2\right) \\
&=2
\end{aligned}$$

ve

$$2\le N_d^1\left(x,-2\right)\le 4\Rightarrow d\left(Tx,-2\right)\le 2$$

olduğundan Teorem 3.1.7’nin 1. şartı sağlanır. Her $x \in X$ için $0 \leq \arg(x) < \frac{\pi}{3}$ iken $d(Tx,x) > 0$ olduğundan

$$d(Tx,x) = |Tx - x| = \sqrt{(2\cos\alpha - 2\cos\beta)^2 + (2\sin\alpha + 2\sin\beta)^2}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha\cos\beta + 4\cos^2\beta + 4\sin^2\alpha + 8\sin\alpha\sin\beta + 4\sin^2\beta}$$
$$= \sqrt{8 - 8(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}$$
$$= \sqrt{8 - 8\cos(\alpha+\beta)}$$

bulunur. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ olduğundan $d(Tx,x) = 2$ elde edilir. Şimdi $0 \leq \arg(x) < \frac{\pi}{3}$ iken x ’in argümentinin 0 ’a yaklaşması durumunda $d(x,-2)$ ’nin artan olduğunu gösterelim.

$$d(x,-2) = |x+2| = \sqrt{(2\cos\alpha + 2)^2 + (2\sin\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\alpha + 8\cos\alpha + 4 + 4\sin^2\alpha}$$
$$= \sqrt{8\cos\alpha + 8}$$

ve $\alpha \to 0$ iken kosinüs fonksiyonu artan olduğundan $d(x,-2)$ infimum değerini $\alpha = \frac{\pi}{3}$ olduğunda alır. Buradan $0 \leq \arg(x) < \frac{\pi}{3}$ için $d(x,-2) > 2\sqrt{3}$ bulunur.

$$2 = d(Tx,x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} N_d^1(x,-2) = \alpha \max\{d(x,-2), d(x,Tx)\}$$
$$+\beta \max\left\{d(x,-2), d(x,Tx), \theta\frac{[d(x,-2) + d(Tx,-2)]}{2}\right\}$$
$$+\mu \max\{d(x,-2), d(x,Tx)\}$$

$0 \le \arg(x) < \frac{\pi}{3}$ için $d(x,-2) > 2\sqrt{3}$ olduğundan $d(x,Tx)$ ve $\theta \frac{[d(x,-2)+d(Tx,-2)]}{2}$ ifadelerine bakmaksızın $N_d^1(x,-2) > 2\sqrt{3}$ bulunur ki buradan Teorem 3.1.7'nin 2. şartı sağlanır.

3.1.9 Uyarı Teorem 3.1.7'nin tersi her zaman doğru değildir. Örnek 3.1.6'da tanımlanan T dönüşümünü alalım. Bu örnekte $|z-1| > \zeta$ için $d(z,Tz) > 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
d(Tz,z) &= d(1,z) \le \psi\left(N_d^u(z,1)\right) \\
&= \psi\left(\begin{array}{l}
\alpha \max\left\{d(z,1), d(z,Tz), d(1,T1)\right\} \\
+\beta \max\left\{d(z,1), d(z,Tz), d(1,T1), \theta \frac{[d(z,T1)+d(1,Tz)]}{2}\right\} \\
+\mu \max\left\{d(z,1), d(z,Tz), d(1,T1), \frac{d(z,1)d(1,T1)}{1+d(z,Tz)}, \frac{d(z,1)d(1,T1)}{1+d(Tz,T1)}\right\}
\end{array}\right) \\
&= \psi\left(d(z,1)\right) < d(z,1)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T dönüşümü Teorem 3.1.7'nin 2. şartını sağlamaz fakat T dönüşümü $C_{1,\zeta}$ çemberini sabit bırakır. Dahası T dönüşümü $D_{1,\zeta}$ diskini de sabit bırakır.

3.1.10 Uyarı 1) Teorem 3.1.3'ün bir sonucu olarak sabit bir çemberin varlığı artan bir fonksiyonun varlığına bağlıdır. Teorem 3.1.3'deki hipotezde diğer koşullar gerçekleştiğinde eğer T dönüşümü C_{x_0,ρ_d} çemberini C_{x_0,ρ_d} çemberine resmederse C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit bir çemberi olmaktadır. Hipotezdeki T dönüşümü farklı x_0 noktaları ile bir $F_c^N -$daralma olabilir yani T dönüşümü, farklı x_0 noktaları için her bir C_{x_0,ρ_d} çemberini kendisine resmederse T dönüşümünün merkezleri farklı birden fazla sabit çemberi olabilir. Ek olarak $Fix(T)\setminus C_{x_0,\rho_d}$ kümesinin elemanları geometrik olarak çember teşkil etmeyebilir.

2) Teorem 3.1.7'nin bir sonucu olarak sabit bir çemberin varlığı hipotezdeki koşulları gerçekleyen bir x_0 noktasının bulunmasına bağlıdır. Burada x_0 noktası birden fazla olabilir yani ρ_d sayısı hipotezdeki gibi seçildiğinde T dönüşümünün merkezleri farklı birden fazla sabit çemberi bulunabilir. Ek olarak $Fix(T)\backslash C_{x_0,\rho_d}$ kümesinin elemanları geometrik olarak çember teşkil etmeyebilir.

3.2 $S-$Metrik Uzaylarda Sabit Çember Problemi

Bu bölümde sabit çember problemi $S-$metrik uzaylar için ele alınacaktır. Bölüm 2'de (2.2)'de tanıtılan ρ_s sayısı kullanılarak sabit çember problemine yeni çözümler üretilecektir. $S-$metrik uzaylarda yeni sabit çember sonuçları elde etmek için F_c^S-daralmanın yeni tipleri tanıtılacaktır. Bunun için Ćirić tip, değiştirilmiş Hardy-Rogers tip ve Khan tip daralma şartları gibi klasik daralma şartları kullanılacaktır. İlk olarak Ćirić tip F_c^S-daralma tanımı verilip bu tanım yardımıyla bir sabit çember teoremi elde edilecektir.

3.2.1 Tanım (X,S) bir $S-$metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun ve $m(x,x,y)$ sayısı $m(x,x,y)=\max\left\{S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\frac{1}{2}\left[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)\right]\right\}$ olarak tanımlansın. Eğer her $x\in X$ için

$$S(Tx,Tx,x)>0\Rightarrow \tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\leq F\left(m(x,x,x_0)\right)$$

şartını sağlayan $F\in\mathbb{F}$, $\tau>0$ ve $x_0\in X$ noktası varsa T dönüşümüne X üzerinde Ćirić tip F_c^S-daralma denir.

Aşağıdaki önerme Tanım 3.2.1'in doğal bir sonucudur.

3.2.2 Önerme (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. Eğer bir T dönüşümü X üzerinde $x_0 \in X$ noktası ile bir Ćirić tip F_c^S-daralma ise $Tx_0 = x_0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki $Tx_0 \neq x_0$ olsun. Ćirić tip F_c^S-daralma tanımından

$$S(Tx_0,Tx_0,x_0) > 0 \Rightarrow \tau + F(S(Tx_0,Tx_0,x_0)) \leq F(m(x_0,x_0,x_0))$$
$$= F\left(\max\begin{Bmatrix} S(x_0,x_0,x_0), S(x_0,x_0,Tx_0), S(x_0,x_0,Tx_0) \\ \frac{1}{2}\left[S(x_0,x_0,Tx_0)+S(x_0,x_0,Tx_0)\right] \end{Bmatrix}\right)$$
$$= F(S(x_0,x_0,Tx_0))$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx_0 = x_0$ bulunur.

Şimdi Ćirić tip F_c^S-daralma kullanılarak sabit çember teoremi elde edilecektir.

3.2.3 Teorem (X,S) bir $S-$metrik uzay, T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası için bir Ćirić tip F_c^S-daralma dönüşümü olsun ve ρ_s sayısı (2.2)'deki gibi tanımlansın. Eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho_s}$ için $S(Tx,Tx,x_0) = \rho_s$ ise $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. Üstelik $\rho < \rho_s$ olmak üzere eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S(Tx,Tx,x_0) = \rho$ ise T dönüşümü her bir $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakır.

İspat: $S(Tx,Tx,x_0) = \rho_s$ olduğundan T dönüşümü $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberini $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberine resmeder. Eğer $\rho_s = 0$ ise $C^S_{x_0,\rho_s} = \{x_0\}$ elde edilir ve $C^S_{x_0,\rho_s} = \{x_0\}$ Önerme 3.2.2'den T dönüşümünün sabit çemberidir. Kabul edelim ki $\rho_s > 0$, $x \in C^S_{x_0,\rho_s}$ ve $Tx \neq x$ olsun. Ćirić tip daralma tanımı, Önerme 3.2.2 ve F fonksiyonunun artanlığı kullanılarak

$$F\left(\rho_s\right) \leq F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right) \leq F\left(m\left(x,x,x_0\right)\right) - \tau < F\left(m\left(x,x,x_0\right)\right)$$
$$= F\left(\max\left\{\begin{array}{l} S\left(x,x,x_0\right), S\left(x,x,Tx\right), S\left(x_0,x_0,Tx_0\right) \\ \frac{1}{2}\left[S\left(x,x,Tx_0\right) + S\left(x_0,x_0,Tx\right)\right] \end{array}\right\}\right)$$
$$= F\left(\max\left\{\rho_s, S\left(x,x,Tx\right), 0, \rho_s\right\}\right) = F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Buradan $S\left(Tx,Tx,x\right)=0$ ve dolayısıyla $Tx = x$ bulunur. Sonuç olarak $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir, yani $C^S_{x_0,\rho_s} \subset Fix\left(T\right)$ olur.

$\rho < \rho_s$ olmak üzere eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S\left(Tx,Tx,x_0\right) = \rho$ ise T dönüşümünün her bir $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakacağını gösterelim. Kabul edelim ki $x \in C^S_{x_0,\rho}$ ve $S\left(Tx,Tx,x\right) > 0$ olsun. Ćirić tip daralma tanımı kullanılarak

$$F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right) \leq F\left(m\left(x,x,x_0\right)\right) - \tau < F\left(m\left(x,x,x_0\right)\right) = F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $S\left(Tx,Tx,x\right)=0$ ve dolayısıyla $Tx = x$ bulunur. $C^S_{x_0,\rho}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir.

3.2.4 Sonuç T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası ile bir Ćirić tip daralma dönüşümü olsun ve ρ_s sayısı (2.2)'deki gibi tanımlansın. Eğer her bir $\rho < \rho_s$ ve her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S\left(x_0,x_0,Tx\right) = \rho$ ise T dönüşümü x_0 merkezli ρ_s yarıçaplı diski sabit bırakır.

Aşağıda Teorem 3.2.3'ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösteren bir örnek verilecektir.

3.2.5 Örnek $X=\mathbb{C}$ alışılmış $S-$metrik ile bir $S-$metrik uzay ve $z_0\in\mathbb{C}$ herhangi bir nokta olsun. $T:X\to X$ dönüşümü her $z\in\mathbb{C}$ ve $\mu>0$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Tz=\begin{cases} z & , \quad |z-z_0|\le\dfrac{\mu}{2} \\ z_0 & , \quad |z-z_0|>\dfrac{\mu}{2} \end{cases}.$$

T dönüşümünün Ćirić tip daralma dönüşümü olmadığını göstereceğiz. Eğer $z\in\mathbb{C}$ için $|z-z_0|>\dfrac{\mu}{2}$ ise Ćirić tip daralma tanımı ve Önerme 2.9 gereğince

$$\begin{aligned}
S(Tz,Tz,z)&=S(z_0,z_0,z)>0\Rightarrow\tau+F\left(S(z_0,z_0,z)\right)\le F\left(m(z,z,z_0)\right)\\
&=F\left(\max\left\{S(z,z,z_0),S(z,z,Tz),S(z_0,z_0,Tz_0),\frac{1}{2}\left[S(z,z,Tz_0)+S(z_0,z_0,Tz)\right]\right\}\right)\\
&=F\left(\max\left\{S(z,z,z_0),S(z,z,z_0),0,\frac{S(z,z,z_0)}{2}\right\}\right)\\
&=F\left(S(z,z,z_0)\right)
\end{aligned}$$

ve böylece $\tau+F(\rho_s)\le F(\rho_s)\Rightarrow\tau\le0$ olması gerekir ki bu durum $\tau>0$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak T dönüşümü herhangi bir $z_0\in\mathbb{C}$ için Ćirić tip F_c^S-daralma dönüşümü değildir. Fakat her $\rho\le\mu$ için T dönüşümü $C_{x_0,\rho}^S$ çemberini sabit bırakır.

Teorem 3.2.3'ün koşullarını sağlayan aşağıdaki örneği verelim.

3.2.6 Örnek $X=\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ kümesi Örnek 2.13'de tanımlanan $S-$metrik ile bir $S-$metrik uzay olsun. T dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$Tz = \begin{cases} -2 \quad , \quad \arg(z) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \\ z \quad , \quad \arg(z) \notin [0, 2\pi] \backslash \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Bu takdirde T dönüşümü $F = \ln x$, $t = \ln\left(\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\right)$ ve $z_0 = -2i$ noktası ile bir Ćirić tip $F_c^S -$daralmadır. Gerçekten $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki z 'ler için ρ_s sayısı hesaplanırsa $z = 2e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ olduğundan

$$S(z, z, -2) = |z+2| = \sqrt{(2\cos\theta + 2)^2 + (2\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\theta + 8\cos\theta + 4 + 4\sin^2\theta} = \sqrt{8\cos\theta + 8}$$

bulunur ki $\inf\left\{\cos\theta : \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = 0$ olduğu için

$$\rho_s = \inf\{S(z, z, Tz) : z \in X, z \neq Tz\} = 2\sqrt{2}$$

bulunur. Şimdi $S(z, z, Tz) > 0$ olduğunda $m(z, z, z_0)$ sayısı yazılırsa

$$m(z, z, -2i) = \max\left\{\begin{array}{l} S(z, z, -2i), S(z, z, Tz), S(-2i, -2i, T-2i), \\ \frac{1}{2}\left[S(z, z, T-2i) + S(-2i, -2i, Tz)\right] \end{array}\right\}$$
$$= \max\left\{\begin{array}{l} S(z, z, -2i), S(z, z, -2), S(-2i, -2i, -2i) \\ \frac{1}{2}\left[S(z, z, -2i) + S(-2i, -2i, -2)\right] \end{array}\right\}$$
$$= \max\left\{|z+2i|, |z+2|, 0, \frac{1}{2}\left[|z+2i| + |2i-2|\right]\right\}.$$

elde edilir. Burada argümenti $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki z'ler için maksimum ifadesinin içindeki değerler hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&|z+2i|=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+2)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta+8\sin\theta+4}=\sqrt{8\sin\theta+8}\\
&|z+2|=\sqrt{(2\cos\theta+2)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta+8\cos\theta+4+4\sin^2\theta}=\sqrt{8\cos\theta+8}\\
&|2i-2|=2\sqrt{2}\\
&\frac{|z+2i|+|2i-2|}{2}=\frac{\sqrt{8\sin\theta+8}+2\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8+4\sqrt{3}}\leq|z+2i|\leq 4\\
&2\sqrt{2}\leq|z+2|\leq 2\sqrt{3}\\
&\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}+2\sqrt{2}}{2}\leq\frac{|z+2i|+|2i-2|}{2}\leq\frac{4+2\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. $|z+2i|$ ifadesinin en küçük değeri diğer ifadelerin en büyük değerlerinden büyük olduğu için $\sqrt{8+4\sqrt{3}}\leq m(z,z,-2i)\leq 4$ olur. Sonuç olarak $S(z,z,-2)=|z+2|$ ifadesinin maksimumunda

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\right)+\ln\left(2\sqrt{3}\right)\leq\ln\left(\sqrt{8+4\sqrt{3}}\right)\leq F\left(m(z,z,-2i)\right)\\
&\Rightarrow \tau+\ln\left(|z+2|\right)\leq\ln\left(m(z,z,-2i)\right)\\
&\Rightarrow \tau+F\left(S(z,z,-2)\right)\leq F\left(m(z,z,-2i)\right)
\end{aligned}$$

olduğu için $S(z,z,-2)=|z+2|$ ifadesinin diğer değerlerinde $\tau+F\left(S(z,z,-2)\right)\leq F\left(m(z,z,-2i)\right)$ eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca $C^{S}_{-2i,2\sqrt{2}}$ çemberinin elemanları belirlenirse

$$|z+2i|=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+2)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta+8\sin\theta+4}=\sqrt{8\sin\theta+8}=2\sqrt{2}$$

olur. Buradan $\sin\theta=0$ olduğu için $\theta_1=0$ ve $\theta_2=\pi$ ve dolayısıyla $z_1=2e^{i0}=2$ ve $z_2=2e^{i\pi}=-2$ olur. Açık olarak T dönüşümü $C^{S}_{-2i,2\sqrt{2}}=\{-2,2\}$ çemberini ve $D^{S}_{-2i,2\sqrt{2}}=\left\{z\in X : S(z,z,-2i)\leq 2\sqrt{2}\right\}$ diskini sabit bırakır.

Aşağıda değiştirilmiş Hardy-Rogers tip $F^{S}_{c}-$daralma tanımı verilecektir.

3.2.7 Tanım (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x\in X$ için $\alpha+\beta+\gamma+\eta+\lambda+\mu<\dfrac{1}{2}$, $\alpha,\beta,\gamma,\eta,\lambda,\mu\geq 0$ ve $\alpha\neq 0$ olmak üzere

$$S(Tx,Tx,x)>0\Rightarrow \tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\leq$$
$$F\left(\begin{array}{l}\alpha S(x,x,x_0)+\beta S(Tx_0,Tx_0,x)+\gamma S(Tx,Tx,x_0)\\ +\eta\dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)\left[1+S(Tx,Tx,x)\right]}{1+S(Tx_0,Tx_0,x)}\\ +\lambda\dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Tx,Tx,x_0)}{1+S(Tx_0,Tx_0,x_0)S(x_0,x_0,x)}\\ +\mu\dfrac{S(Tx,Tx,x)\left[1+S(Tx,Tx,x_0)\right]}{1+S(x,x,x_0)+S(Tx_0,Tx_0,x_0)}\end{array}\right)$$

şartını sağlayan $F \in \mathbb{F}$, $\tau > 0$ ve $x_0 \in X$ noktası varsa T dönüşümüne X üzerinde değiştirilmiş Hardy-Rogers tip $F_c^S -$daralma denir.

Aşağıdaki önerme Tanım 3.2.7'nin doğal bir sonucudur.

3.2.8 Önerme (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. Eğer bir T dönüşümü X üzerinde $x_0 \in X$ noktası ile değiştirilmiş Hardy-Rogers tip $F_c^S -$daralma ise $Tx_0 = x_0$ olur.

İspat: Tersine $Tx_0 \neq x_0$ olduğu kabul edilsin. Değiştirilmiş Hardy-Rogers tip $F_c^S -$daralma tanımından

$$S(Tx_0,Tx_0,x_0) > 0 \Rightarrow \tau + F\left(S(Tx_0,Tx_0,x_0)\right) \leq$$
$$F\begin{pmatrix} \alpha S(x_0,x_0,x_0) + \beta S(Tx_0,Tx_0,x_0) + \gamma S(Tx_0,Tx_0,x_0) \\ +\eta \dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)\left[1+S(Tx_0,Tx_0,x_0)\right]}{1+S(Tx_0,Tx_0,x_0)} + \lambda \dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Tx_0,Tx_0,x_0)}{1+S(Tx_0,Tx_0,x_0)S(x_0,x_0,x_0)} \\ +\mu \dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)\left[1+S(Tx_0,Tx_0,x_0)\right]}{1+S(x_0,x_0,x_0)+S(Tx_0,Tx_0,x_0)} \end{pmatrix}$$
$$= F\left[(\beta+\gamma+\eta+2\lambda+\mu)S(Tx_0,Tx_0,x_0)\right] < F\left[S(Tx_0,Tx_0,x_0)\right]$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $Tx_0 = x_0$ bulunur.

Değiştirilmiş Hardy-Rogers tip $F_c^S -$daralma şartı kullanılarak bir sabit çember teoremi verilecektir.

3.2.9 Teorem (X,S) bir $S-$metrik uzay, T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası ile bir değiştirilmiş Hardy-Rogers tip $F_c^S -$daralma dönüşümü olsun ve ρ_s sayısı (2.2)'deki gibi tanımlansın. Eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho_s}$ için $S(Tx,Tx,x_0)=\rho_s$ ise $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. Üstelik $\rho<\rho_s$ olmak üzere eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S(Tx,Tx,x_0)=\rho$ ise T dönüşümü her bir $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakır.

İspat: $x \in C^S_{x_0,\rho_s}$ olsun. Eğer $\rho_s=0$ ise $C^S_{x_0,\rho_s}=\{x_0\}$ elde edilir ve $C^S_{x_0,\rho_s}=\{x_0\}$ Önerme 3.2.8'den T dönüşümünün sabit çemberidir. Kabul edelim ki $\rho_s>0$ ve $Tx \neq x$ olsun. Değiştirilmiş Hardy-Rogers tip F^S_c-daralma yapısı, Önerme 3.2.8 ve F fonksiyonunun artanlığı dikkate alınırsa

$$F(\rho_s) \le F(S(Tx,Tx,x)) \le F\begin{pmatrix} \alpha S(x,x,x_0)+\beta S(Tx_0,Tx_0,x)+\gamma S(Tx,Tx,x_0) \\ +\eta \dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)\left[1+S(Tx,Tx,x)\right]}{1+S(Tx_0,Tx_0,x)} \\ +\lambda \dfrac{S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Tx,Tx,x_0)}{1+S(Tx_0,Tx_0,x_0)S(x_0,x_0,x)} \\ +\mu \dfrac{S(Tx,Tx,x)\left[1+S(Tx,Tx,x_0)\right]}{1+S(x,x,x_0)+S(Tx_0,Tx_0,x_0)} \end{pmatrix}-\tau$$

$$\le F\left[\alpha\rho_s+\beta\rho_s+\gamma\rho_s+\lambda\rho_s+\mu S(Tx,Tx,x)\right]$$
$$\le F\left[(\alpha+\beta+\gamma+\lambda+\mu)S(Tx,Tx,x)\right]$$
$$\le F\left[S(Tx,Tx,x)\right]$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $S(Tx,Tx,x)=0$ ve $Tx=x$ bulunur. Sonuç olarak $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T dönüşümünün sabit bir çemberidir, yani $C^S_{x_0,\rho_s} \subset Fix(T)$ olur.

$\rho<\rho_s$ olmak üzere eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S(Tx,Tx,x_0)=\rho$ ise T dönüşümünün her bir $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakacağını gösterelim. Kabul edelim ki $x \in C^S_{x_0,\rho}$ ve $S(Tx,Tx,x)>0$ olsun. Değiştirilmiş Hardy-Rogers tip F^S_c-daralma tanımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right)\\
&\leq F\left(\begin{array}{l}
\alpha S\left(x,x,x_0\right)+\beta S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+\gamma S\left(Tx,Tx,x_0\right)\\
+\eta \dfrac{S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)\left[1+S\left(Tx,Tx,x\right)\right]}{1+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)}\\
+\lambda \dfrac{S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{1+S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)S\left(x_0,x_0,x\right)}\\
+\mu \dfrac{S\left(Tx,Tx,x\right)\left[1+S\left(Tx,Tx,x_0\right)\right]}{1+S\left(x,x,x_0\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)}
\end{array}\right)-\tau\\
&< F\left(\begin{array}{l}
\alpha S\left(x,x,x_0\right)+\beta S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+\gamma S\left(Tx,Tx,x_0\right)\\
+\eta \dfrac{S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)\left[1+S\left(Tx,Tx,x\right)\right]}{1+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)}\\
+\lambda \dfrac{S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{1+S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)S\left(x_0,x_0,x\right)}\\
+\mu \dfrac{S\left(Tx,Tx,x\right)\left[1+S\left(Tx,Tx,x_0\right)\right]}{1+S\left(x,x,x_0\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x_0\right)}
\end{array}\right)\\
&\leq F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right)
\end{aligned}
$$

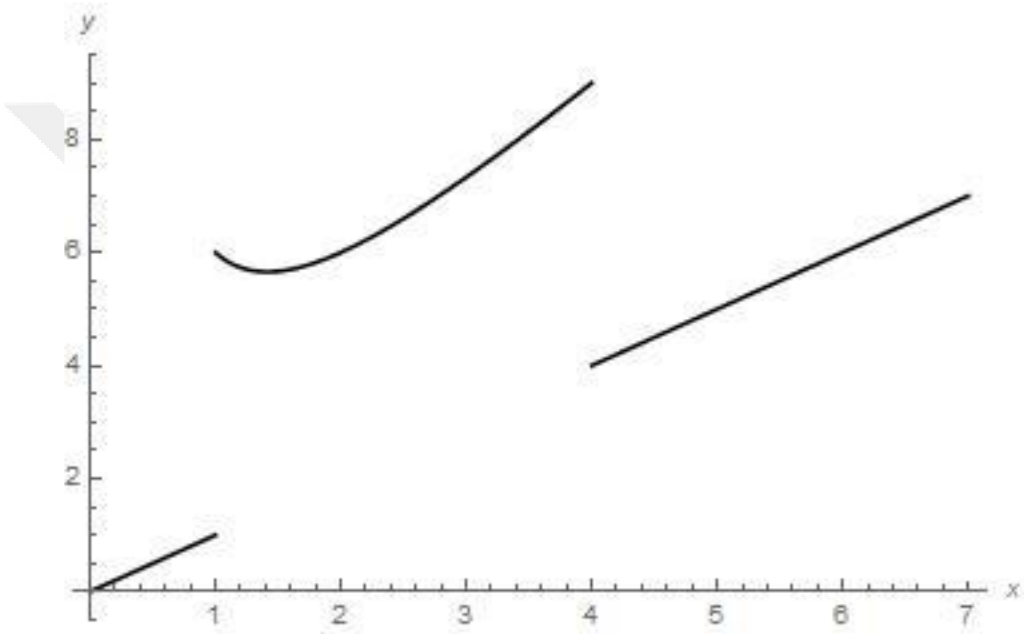
elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $S\left(Tx,Tx,x\right)=0$ ve dolayısıyla $Tx=x$ bulunur. $C_{x_0,\rho}^{S}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir.

3.2.10 Sonuç $\left(X,S\right)$ bir $S-$metrik uzay, T dönüşümü $x_0\in X$ noktası ile bir değiştirilmiş Hardy-Rogers tip F_c^S-daralma dönüşümü ve ρ_s sayısı $\left(2.2\right)$'deki gibi tanımlansın. Eğer her bir $\rho<\rho_s$ ve her $x\in C_{x_0,\rho}^{S}$ için $S\left(x_0,x_0,Tx\right)=\rho$ ise T dönüşümü x_0 merkezli ρ_s yarıçaplı diski sabit bırakır.

3.2.11 Uyarı Örnek 3.2.5'de verilen T dönüşümünü ele alırsak T dönüşümünün değiştirilmiş Hardy-Rogers tip F_c^S-daralma dönüşümü olmadığı görülür. Fakat $\rho\leq\rho_s$ iken T dönüşümü $C_{x_0,\rho}^{S}$ çemberini sabit bırakır. Sonuç olarak Teorem 3.2.9'un tersi her zaman doğru değildir.

3.2.12 Örnek $X=\mathbb{R}^{+}$ kümesi üzerinde alışılmış $S-$metriği alalım. T dönüşümünü her $x\in X$ için aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Tx=\begin{cases} 2x+\dfrac{4}{x} & , \quad x\in[1,4) \\ x & , \quad x\notin[1,4) \end{cases}.$$



Şekil 3.1: T dönüşümünün grafiği.

Bu takdirde T dönüşümü $\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{1}{25}$, $\gamma=\dfrac{1}{25}$, $\lambda=\dfrac{1}{25}$, $\mu=\dfrac{1}{25}$, $F=\ln x$, $\tau=\ln\dfrac{9}{8}$ ve $x_0=35$ ile bir değiştirilmiş Hardy-Rogers tip daralma dönüşümüdür. Gerçekten $S(Tx,Tx,x)>0$ olduğunda $S(Tx,Tx,x)=2\left|x+\dfrac{4}{x}\right|$ ifadesini hesaplamak için $x+\dfrac{4}{x}$ ifadesinin türevini sıfır yapan değer bulunur. Bu değer $x=2$ olur. Dolayısıyla buradan $4\le\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\le 5$ ve $8\le S(Tx,Tx,x)\le 10$ olur. Üstelik

$$1 \le x < 4$$
$$-34 \le x - 35 < -31$$
$$31 < |x - 35| \le 34$$
$$62 < 2|x - 35| \le 68$$

buradan $\frac{62}{4} < 2\alpha|x-35| \le \frac{68}{4}$ olur ve aynı zamanda $62 \le S(x, x, x_0) \le 68$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\ln 9 \le \tau + F\left(2\left|x + \frac{4}{x}\right|\right) \le \ln\left(\frac{90}{8}\right)$ olduğundan

$$\tau + F\left(2\left|x + \frac{4}{x}\right|\right) \le F\left(2\alpha|x-35|\right)$$
$$\le F\left(\begin{array}{l} 2\alpha|x-35| + 2\beta|x-35| + 2\gamma|Tx-35| \\ +\eta.0 + 2\lambda|Tx-35| + \mu\dfrac{2\left|x+\frac{4}{x}\right|\left[1+2|Tx-35|\right]}{1+2|x-35|} \end{array}\right)$$

elde edilir ve aynı zamanda $\rho_s = \inf\left\{S(Tx, Tx, x) : Tx \ne x\right\} = 8$ bulunur. Dolayısıyla T dönüşümü $C_{35,8}^S = \{31, 39\}$ çemberini ve $D_{35,8}^S = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : 31 \le x \le 39\right\}$ diskini sabit bırakır.

Aşağıda Khan-tip F_c^S-daralma tanımı verilecektir.

3.2.13 Tanım (X, S) bir $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $h \in [0,1)$ ve $S(Tx_0, Tx_0, x) + S(Tx, Tx, x_0) \ne 0$ olmak üzere

$$S(Tx, Tx, x) > 0 \Rightarrow \tau + F\left(S(Tx, Tx, x)\right)$$
$$\le F\left(h\frac{S(Tx, Tx, x)S(Tx_0, Tx_0, x) + S(Tx_0, Tx_0, x)S(Tx, Tx, x_0)}{S(Tx_0, Tx_0, x) + S(Tx, Tx, x_0)}\right)$$

şartını sağlayan $F \in \mathbb{F}$, $\tau > 0$ ve $x_0 \in X$ noktası varsa T dönüşümüne X üzerinde Khan-tip $F_c^S -$daralma denir.

3.2.14 Önerme (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Eğer bir T dönüşümü X üzerinde $x_0 \in X$ noktası ile Khan-tip $F_c^S -$ daralma ise $Tx_0 = x_0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki $Tx_0 \neq x_0$ olsun. Hipotezden

$$\begin{aligned}
& S(Tx_0, Tx_0, x_0) > 0 \Rightarrow \tau + F\left(S(Tx_0, Tx_0, x_0)\right) \\
& \leq F\left(h \frac{S(Tx_0, Tx_0, x_0) S(Tx_0, Tx_0, x_0) + S(Tx_0, Tx_0, x_0) S(Tx_0, Tx_0, x_0)}{S(Tx_0, Tx_0, x_0) + S(Tx_0, Tx_0, x_0)}\right) \\
& = F\left(h \frac{S^2(Tx_0, Tx_0, x_0) + S^2(Tx_0, Tx_0, x_0)}{2S(Tx_0, Tx_0, x_0)}\right) \\
& = F\left(h \frac{2S^2(Tx_0, Tx_0, x_0)}{2S(Tx_0, Tx_0, x_0)}\right) \\
& < F\left(S(Tx_0, Tx_0, x_0)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx_0 = x_0$ olur.

Khan-tip $F_c^S -$daralma tanımı kullanılarak bir sabit çember teoremi verilecektir.

3.2.15 Teorem (X, S) bir $S-$metrik uzay, T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası ile bir Khan-tip $F_c^S -$daralma dönüşümü olsun ve ρ_s sayısı (2.2)'deki gibi tanımlansın. Eğer her $x \in C_{x_0,\rho_s}^S$ için $S(Tx, Tx, x_0) = \rho_s$ ise C_{x_0,ρ_s}^S çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. Üstelik $\rho < \rho_s$ olmak üzere eğer her $x \in C_{x_0,\rho}^S$ için $S(Tx, Tx, x_0) = \rho$ ise T dönüşümü her bir $C_{x_0,\rho}^S$ çemberini sabit bırakır.

İspat: $x \in C^S_{x_0,\rho_s}$ olsun. Eğer $\rho_s = 0$ ise $C^S_{x_0,\rho_s} = \{x_0\}$ elde edilir ki Önerme 3.2.14'ten $C^S_{x_0,\rho_s} = \{x_0\}$ T dönüşümünün sabit çemberidir. Kabul edelim ki $\rho_s > 0$ ve $Tx \neq x$ olsun. Khan-tip $F_c^S -$daralma tanımı, Önerme 3.2.14 ve F fonksiyonu artan olduğundan

$$
\begin{aligned}
F(\rho_s) &\leq F(S(Tx,Tx,x)) \leq F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)-\tau \\
&< F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)\rho_s+\rho_s^{\,2}}{2\rho_s}\right) = F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)+\rho_s}{2}\right) \\
&\leq F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)+S(Tx,Tx,x)}{2}\right) = F(hS(Tx,Tx,x)) < F(S(Tx,Tx,x))
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $S(Tx,Tx,x)=0$ ve $Tx = x$ bulunur. Sonuç olarak $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir, yani $C^S_{x_0,\rho_s} \subset Fix(T)$ olur.

$\rho < \rho_s$ olmak üzere eğer her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S(Tx,Tx,x_0) = \rho$ ise T dönüşümünün her bir $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakacağını gösterelim. Kabul edelim ki $x \in C^S_{x_0,\rho}$ ve $S(Tx,Tx,x) > 0$ olsun. Khan-tip $F_c^S -$daralma tanımından

$$
\begin{aligned}
&F(S(Tx,Tx,x)) \\
&\leq F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)-\tau \\
&< F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right) \\
&\leq F(S(Tx,Tx,x))
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $S(Tx,Tx,x)=0$ ve $Tx = x$ bulunur. Böylece $C^S_{x_0,\rho}$ çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir.

3.2.16 Sonuç (X,S) bir $S-$metrik uzay, T dönüşümü $x_0 \in X$ ile bir Khan-tip F_c^S- daralma dönüşümü ve ρ_s sayısı (2.2)'deki gibi tanımlansın. Eğer her bir $\rho < \rho_s$ ve her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S(x_0,x_0,Tx)=\rho$ ise T dönüşümü x_0 merkezli ρ_s yarıçaplı diski sabit bırakır.

3.2.17 Uyarı Örnek 3.2.5'de verilen T dönüşümünü ele alırsak T dönüşümünün Khan-tip F_c^S-daralma dönüşümü olmadığı görülür fakat $\rho \le \rho_s$ iken T dönüşümü $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini sabit bırakır. Sonuç olarak Teorem 3.2.15'ün tersi her zaman doğru değildir.

3.2.18 Örnek $X=\{e^k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesini ve her $x,y,z \in X$ için [3] numaralı kaynakta tanımlanan aşağıdaki $S-$metriği ele alalım:

$$S(x,y,z)=\left|\ln\frac{x}{y}\right|+\left|\ln\frac{xy}{z^2}\right|.$$

T dönüşümünü her $x \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Tx=\begin{cases} ex^2 & , \quad x \in \{e^1,e^2,e^3,e^4,e^5,e^6,e^7\} \\ x & , \quad x \notin \{e^1,e^2,e^3,e^4,e^5,e^6,e^7\} \end{cases}.$$

T dönüşümü $F=-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\tau=\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}$ ve $x_0=e^{23}$ noktası ile bir Khan-tip F_c^S- daralmadır. Gerçekten $S(Tx,Tx,x)>0$ durumunda $S(Tx,Tx,x)\in\{4,6,8,10,12,14,16\}$ olur. Buradan $h=\frac{20}{21}$ ve $S(Tx,Tx,x)\neq 0$ ifadesini gerçekleyen her bir $x \in X$ için hipotezdeki daralma şartının sağlandığı gösterilmelidir. $S(Tx,Tx,x)\neq 0$ ifadesini gerçekleyen yedi farklı $x \in X$ noktası vardır. $S(Tx,Tx,x) \neq 0$ koşulunu gerçekleyen her bir $x \in X$ için

$$h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}$$

sayısını hesaplayalım.

1. $S(Tx,Tx,x)=4$ ifadesini sağlayan $x=e^1$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{[4.44+44.40]}{44+40}=h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$
$$\Rightarrow \tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\leq F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

2. $S(Tx,Tx,x)=6$ ifadesini sağlayan $x=e^2$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{[6.42+42.36]}{42+36}=h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S\left(Tx,Tx,x\right)S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}\right)$$

$$\Rightarrow\tau+F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right)\leq F\left(h\frac{S\left(Tx,Tx,x\right)S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

3. $S\left(Tx,Tx,x\right)=8$ ifadesini sağlayan $x=e^3$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{\left[8.40+40.32\right]}{40+32}=h\frac{S\left(Tx,Tx,x\right)S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{8}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{8}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S\left(Tx,Tx,x\right)S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}\right)$$

$$\Rightarrow\tau+F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right)\leq F\left(h\frac{S\left(Tx,Tx,x\right)S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

4. $S\left(Tx,Tx,x\right)=10$ ifadesini sağlayan $x=e^4$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{\left[10.38+38.28\right]}{38+28}=h\frac{S\left(Tx,Tx,x\right)S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)S\left(Tx,Tx,x_0\right)}{S\left(Tx_0,Tx_0,x\right)+S\left(Tx,Tx,x_0\right)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\le-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

$$\Rightarrow\tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\le F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

5. $S(Tx,Tx,x)=12$ ifadesini sağlayan $x=e^5$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{[12.36+36.24]}{36+24}=h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\le-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\le-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

$$\Rightarrow\tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\le F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

6. $S(Tx,Tx,x)=14$ ifadesini sağlayan $x=e^6$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{[14.34+34.20]}{34+20}=h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\le-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$
$$\Rightarrow\tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\leq F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

7. $S(Tx,Tx,x)=16$ ifadesini sağlayan $x=e^7$ değeri için

$$20<\frac{20}{21}\frac{[16.32+32.16]}{32+16}=h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}$$

bulunur ve dolayısıyla $\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{16}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}$ olduğundan

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{4\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{16}}\leq-\frac{1}{\sqrt{20}}<F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$
$$\Rightarrow\tau+F\left(S(Tx,Tx,x)\right)\leq F\left(h\frac{S(Tx,Tx,x)S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx_0,Tx_0,x)S(Tx,Tx,x_0)}{S(Tx_0,Tx_0,x)+S(Tx,Tx,x_0)}\right)$$

elde edilir ki daralma koşulunun sağlandığı görülür.

Ek olarak $\rho_s=\inf\{S(Tx,Tx,x):Tx\neq x\}=4$ bulunur. Sonuç olarak T dönüşümü $C^S_{e^{23},4}=\{e^{21},e^{25}\}$ çemberini ve $D^S_{e^{23},4}=\{e^{21},e^{22},e^{23},e^{24},e^{25}\}$ diskini sabit bırakır.

3.2.19 Uyarı Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.9 ve Teorem 3.2.15'in bir sonucu olarak sabit bir çemberin varlığı artan bir fonksiyonun varlığına bağlıdır. Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.9 ya da Teorem 3.2.15'deki hipotezde diğer koşullar gerçekleştiğinde eğer T dönüşümü $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberini $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberine resmederse $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T dönüşümünün sabit bir çemberi olmaktadır. Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.9 ya da Teorem 3.2.15'de hipotezdeki bir T dönüşümü farklı x_0 noktaları ile bir Ćirić tip, değiştirilmiş Hardy-Rogers tip ya da Khan tip daralma olabilir yani T dönüşümü, farklı x_0 noktaları için $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberini kendisine resmederse T dönüşümünün merkezleri farklı birden fazla sabit çemberi olabilir. Ek olarak $Fix(T)\setminus C_{x_0,\rho_s}^{S}$ kümesinin elemanları geometrik olarak çember teşkil etmeyebilir.

4. METRİK VE $S-$METRİK UZAYLARDA RHOADES'İN AÇIK PROBLEMİNİN YENİ ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Rhoades tarafından ortaya konulan açık problemin çözümü metrik ve $S-$ metrik uzaylarda ele alınacaktır. Açık probleme metrik uzaylarda çözüm verirken Bölüm 2'de tanımlanmış olan $N_d\left(x,y\right)$ ve $M_d\left(x,y\right)$ sayıları kullanılacaktır.

4.1 Rhoades'in Açık Probleminin Metrik Uzaylarda Bir Çözümü

Bu bölümde Rhoades'in açık problemi için metrik uzaylarda bir çözüm verilecektir. Aksi belirtilmedikçe Bölüm 2'de tanıtılmış olan $N_d\left(x,y\right)$ ve $M_d\left(x,y\right)$ sayılarındaki katsayılar $0\leq\theta<1$, $\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}_+$ ve $\gamma=\alpha+\beta+\mu>0$ olarak alınacaktır. Şimdi ilk olarak açık problemin bir çözümü için aşağıdaki teoremi verelim.

4.1.1 Teorem $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay olsun. Eğer bir $T:X\rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek sabit $z\in X$ noktası vardır ve her bir $x\in X$ için $T^n x\rightarrow z$ olur. Üstelik T dönüşümünün z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{x\rightarrow z}M_d\left(x,z\right)=0$ olmasıdır.

1. Her $t>0$ için $\psi\left(t\right)<t$ olacak şekilde $\gamma d\left(Tx,Ty\right)\leq\psi\left(N_d\left(x,y\right)\right)$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.
2. Verilen bir $\varepsilon>0$ için bir $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$ sayısı vardır öyle ki $\varepsilon<\frac{1}{\gamma}M_d\left(x,y\right)<\varepsilon+\delta$ olduğunda $d\left(Tx,Ty\right)\leq\varepsilon$ olur.

İspat: $x_0\in X$, $Tx_0\neq x_0$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun ve X 'deki $\left\{x_n\right\}$ dizisi $n=0,1,2,3,...$ için $Tx_n=x_{n+1}$ olarak tanımlansın. Teoremin 1. şartı ve $N_d\left(x,y\right)$ sayısı kullanılarak

$$\gamma d\left(x_n,x_{n+1}\right)=\gamma d\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)\le\psi\left(N_d\left(x_{n-1},x_n\right)\right)<N_d\left(x_{n-1},x_n\right) \tag{4.1}$$

$$=\alpha\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}$$

$$+\beta\max\left\{\begin{array}{l}d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right),\\ \theta\dfrac{\left[d\left(x_{n-1},x_{n+1}\right),d\left(x_n,x_n\right)\right]}{2}\end{array}\right\}$$

$$+\mu\max\left\{\begin{array}{l}d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right),\\ \dfrac{d\left(x_{n-1},x_n\right)d\left(x_n,x_{n+1}\right)}{1+d\left(x_{n-1},x_n\right)},\dfrac{d\left(x_{n-1},x_n\right)d\left(x_n,x_{n+1}\right)}{1+d\left(x_n,x_{n+1}\right)}\end{array}\right\}$$

$$=\alpha\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}+\beta\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}$$

$$+\mu\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}$$

$$=\left(\alpha+\beta+\mu\right)\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}$$

bulunur. Şimdi $d\left(x_{n-1},x_n\right)\le d\left(x_n,x_{n+1}\right)$ olduğunu kabul edelim. (4.1) eşitsizliği kullanılarak $d\left(x_n,x_{n+1}\right)<d\left(x_n,x_{n+1}\right)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $d\left(x_n,x_{n+1}\right)<d\left(x_{n-1},x_n\right)$ ve $N_d\left(x_{n-1},x_n\right)=\left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(x_{n-1},x_n\right)=\gamma d\left(x_{n-1},x_n\right)$ olur. Eğer $d\left(x_n,x_{n+1}\right)=s_n$ olarak alınırsa (4.1) eşitsizliğinden

$$s_n<s_{n-1} \tag{4.2}$$

ve böylece $\{s_n\}$ dizisinin pozitif reel sayıların kesinlikle azalan bir dizisi olduğu elde edilir. $\{s_n\}$ dizisi bir $s\ge 0$ limitine yaklaşır. $s>0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $n\ge k$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı vardır öyle ki

$$s<s_n<s+\delta\left(s\right) \tag{4.3}$$

olur. Teoremin 2. şartı ve (4.2) eşitsizliğinden $n\ge k$ için

$$d\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)=d\left(x_n,x_{n+1}\right)=s_n<s \tag{4.4}$$

elde edilir. Fakat (4.4) ve (4.3) eşitsizliklerinden çelişki elde edilir ve dolayısıyla $s=0$ olur.

Bir $\varepsilon>0$ için $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Genelliği bozmadan $\delta=\delta(\varepsilon)<\varepsilon$ olduğunu kabul edelim. $s_n \to 0$ olduğundan $n \geq k$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir pozitif k tamsayısı vardır.

$$d(x_n, x_{n+1}) = s_n < \frac{\delta}{2}, (0<\delta<1).$$

Jachymski'nin tekniğini [41-42] kullanarak matematiksel tümevarımla herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_k, x_{k+n}) < \varepsilon + \frac{\delta}{2} \tag{4.5}$$

olduğunu gösterelim. $n=1$ için $d(x_k, x_{k+1}) = s_k < \frac{\delta}{2} < \varepsilon + \frac{\delta}{2}$ olur. Buradan (4.5) eşitsizliği sağlanır. Şimdi (4.5) eşitsizliğinin bir n için doğru olduğunu kabul edelim. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_k, x_{k+n+1}) \leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+n+1})$$

bulunur. Eğer $d(x_{k+1}, x_{k+n+1}) \leq \varepsilon$ olduğu gösterilirse (4.5) eşitsizliğinin $n+1$ için doğruluğu kanıtlanmış olur. Şimdi

$$M_d(x_k,x_{k+n})=\alpha\max\{d(x_k,Tx_k),d(x_{k+n},Tx_{k+n})\}$$
$$+\beta\max\left\{\begin{array}{l}d(x_k,x_{k+n}),d(x_k,Tx_k),d(x_{k+n},Tx_{k+n}),\\ \dfrac{[d(x_k,Tx_{k+n})+d(x_{k+n},Tx_k)]}{2}\end{array}\right\}$$
$$+\mu\max\left\{\begin{array}{l}d(x_k,x_{k+n}),d(x_k,Tx_k),d(x_{k+n},Tx_{k+n}),\\ \dfrac{d(x_{k+n},Tx_{k+n})[d(x_k,Tx_{k+n})+d(x_{k+n},Tx_k)]}{1+d(x_k,Tx_k)+d(x_{k+n},Tx_{k+n})}\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

olmak üzere $M_d(x_k,x_{k+n})\leq\varepsilon+\delta$ olduğunu gösterelim. Matematiksel tümevarım hipotezi ile

$$\begin{gathered}d(x_k,x_{k+n})<\varepsilon+\frac{\delta}{2},\\ d(x_k,x_{k+1})<\frac{\delta}{2},\\ d(x_{k+n},x_{k+n+1})<\frac{\delta}{2},\\ \frac{(d(x_k,x_{k+n+1})+d(x_{k+n},x_{k+1}))}{2}<\varepsilon+\delta,\\ \frac{d(x_{k+n},x_{k+n+1})[d(x_k,x_{k+n+1})+d(x_{k+n},x_{k+1})]}{1+d(x_k,x_{k+1})+d(x_{k+n},x_{k+n+1})}<\varepsilon+\delta\end{gathered} \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) eşitsizlikleri kullanılarak $M_d(x_k,x_{k+n})<\varepsilon+\delta$ elde edilir. Teoremin 2. şartından

$$d(Tx_k,Tx_{k+n})=d(x_{k+1},x_{k+n+1})\leq\varepsilon$$

bulunur. Sonuç olarak (4.5) eşitsizliği gösterir ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Bu takdirde X metrik uzayının tamlığından bir $z\in X$ noktası vardır öyle ki $n\to\infty$ için $x_n\to z$ olur. Üstelik $Tx_n\to z$ olur.

$Tz \neq z$ olduğunu kabul edelim yani z noktası T dönüşümünün sabit noktası olmasın. Teoremin 1. şartından

$$\begin{aligned}
&\gamma d\left(Tz,Tx_n\right) \leq \psi\left(N_d\left(z,x_n\right)\right) < N_d\left(z,x_n\right) \\
&= \alpha \max\left\{d\left(z,Tz\right), d\left(x_n,Tx_n\right)\right\} \\
&+\beta \max\left\{d\left(z,x_n\right), d\left(z,Tz\right), d\left(x_n,Tx_n\right), \theta \frac{\left[d\left(z,Tx_n\right)+d\left(x_n,Tz\right)\right]}{2}\right\} \\
&+\mu \max\left\{d\left(z,Tz\right), d\left(x_n,Tx_n\right), \frac{d\left(z,x_n\right)d\left(x_n,Tx_n\right)}{1+d\left(z,Tz\right)}, \frac{d\left(z,x_n\right)d\left(x_n,Tx_n\right)}{1+d\left(Tz,Tx_n\right)}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $n \to \infty$ limit alınırsa $\gamma d\left(Tz,z\right) < \left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(z,Tz\right) = \gamma d\left(Tz,z\right)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tz = z$ olur yani z noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi kabul edelim ki w noktası $w \neq z$ olacak şekilde T dönüşümünün diğer sabit noktası olsun. Teoremin 1. şartından

$$\begin{aligned}
&\gamma d\left(Tz,Tw\right) = \gamma d\left(z,w\right) \leq \psi\left(N_d\left(z,w\right)\right) < N_d\left(z,w\right) \\
&= \alpha \max\left\{d\left(z,Tz\right), d\left(w,Tw\right)\right\} \\
&+\beta \max\left\{d\left(z,w\right), d\left(z,Tz\right), d\left(w,Tw\right), \theta \frac{\left[d\left(z,Tw\right)+d\left(w,Tz\right)\right]}{2}\right\} \\
&+\mu \max\left\{d\left(z,Tz\right), d\left(w,Tw\right), \frac{d\left(z,w\right)d\left(w,Tw\right)}{1+d\left(z,Tz\right)}, \frac{d\left(z,w\right)d\left(w,Tw\right)}{1+d\left(Tz,Tw\right)}\right\} \\
&< \left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(z,w\right) = \gamma d\left(z,w\right)
\end{aligned}$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla z noktası T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

İspatın son bölümünde T dönüşümünün z sabit noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Eğer $x_n \to z$ ise $Tx_n \to Tz = z$ ve $d\left(x_n,Tx_n\right) \leq d\left(x_n,z\right) + d\left(Tx_n,z\right) \to 0$ olur. Sonuç olarak

$\lim_{x_n \to z} M_d(x_n, z) = 0$ elde edilir. Tersine eğer $\lim_{x_n \to z} M_d(x_n, z) = 0$ ise $x_n \to z$ için $d(x_n, Tx_n) \to 0$ olur. Bu durum $Tx_n \to z = Tz$ yani, T dönüşümünün z noktasında sürekli olduğunu gösterir.

4.1.2 Sonuç (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek sabit $z \in X$ noktası vardır ve $T^n x \to z$ olur. Ayrıca T dönüşümünün z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{x \to z} M_d(x, z) = 0$ olmasıdır.

1. Herhangi $x, y \in X$ ve $N_d(x, y) > 0$ için $\gamma d(Tx, Ty) < N_d(x, y)$ olur.
2. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki $\varepsilon < \frac{M_d(x, y)}{\gamma} < \varepsilon + \delta$ olduğunda $d(Tx, Ty) \le \varepsilon$ olur.

4.1.3 Sonuç (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer bir $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek sabit $z \in X$ noktası vardır ve $T^n x \to z$ olur.

1. Her $d(x, y) > 0$ için $\psi(d(x, y)) < d(x, y)$ olacak şekilde $d(Tx, Ty) \le \psi(d(x, y))$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.
2. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki herhangi bir $t > 0$ için $\varepsilon < t < \varepsilon + \delta$ olduğunda $\psi(t) \le \varepsilon$ olur.

$\alpha = \beta = 0$ ve $\mu = 1$ iken Teorem 4.1.1 için aşağıdaki örnek verilecektir.

4.1.4 Örnek $X = [0, 2\lambda]$ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ ve d metriği X üzerinde alışılmış metrik olsun. T dönüşümünü

$$Tx=\begin{cases}\lambda & , \quad x\le\lambda\\ 0 & , \quad x>\lambda\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. T dönüşümü

$$\psi(t)=\begin{cases}\lambda & , \quad t>\lambda\\ \dfrac{t}{3} & , \quad t\le\lambda\end{cases}$$

ve

$$\delta(\varepsilon)=\begin{cases}2\lambda & , \quad \varepsilon\ge\lambda\\ 2\lambda-\varepsilon & , \quad \varepsilon<\lambda\end{cases}$$

fonksiyonları ile Teorem 4.1.1'in şartlarını sağlar. Teorem 4.1.1'in 1. şartının sağlandığını göstermek için 4 farklı durum göz önüne alınır:

1. $x\le\lambda$ ve $y\le\lambda$ alındığında sırasıyla $Tx=\lambda$ ve $Ty=\lambda$ olur. Buradan $d(Tx,Ty)=0$ bulunur ki $d(Tx,Ty)\le\psi(N_d(x,y))$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür.
2. $x>\lambda$ ve $y>\lambda$ alındığında sırasıyla $Tx=0$ ve $Ty=0$ olur. Buradan $d(Tx,Ty)=0$ bulunur ki $d(Tx,Ty)\le\psi(N_d(x,y))$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür.
3. $x\le\lambda$ ve $y>\lambda$ alındığında sırasıyla $Tx=\lambda$ ve $Ty=0$ olur. Buradan $d(Tx,Ty)=\lambda$ bulunur. $N_d(x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$N_d(x,y)=\max\left\{d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(x,Tx)},\frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\}$$
$$=\max\left\{|x-\lambda|,|y|,\frac{|x-y||y|}{1+|x-\lambda|},\frac{|x-y||y|}{1+\lambda}\right\}$$

elde edilir. $|y| > \lambda$ olduğu için $N_d(x,y) > \lambda$ bulunur. Dolayısıyla buradan $\lambda = d(Tx,Ty) \le \psi(N_d(x,y)) = \lambda$ eşitsizliği sağlanır.

4. $x > \lambda$ ve $y \le \lambda$ alındığında sırasıyla $Tx = 0$ ve $Ty = \lambda$ olur. Buradan $d(Tx,Ty) = \lambda$ bulunur. $N_d(x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$N_d(x,y) = \max\left\{d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(x,Tx)}, \frac{d(x,y)d(y,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\}$$
$$= \max\left\{|x|, |y-\lambda|, \frac{|x-y||y-\lambda|}{1+|x|}, \frac{|x-y||y-\lambda|}{1+\lambda}\right\}$$

elde edilir. $|x| > \lambda$ olduğu için $N_d(x,y) > \lambda$ bulunur. Dolayısıyla buradan $\lambda = d(Tx,Ty) \le \psi(N_d(x,y)) = \lambda$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1.1'in 2. şartının sağlandığını gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumlar dikkate alınır:

1. $x \le \lambda$ ve $y \le \lambda$ alındığında sırasıyla $Tx = \lambda$ ve $Ty = \lambda$ olur. Buradan $d(Tx,Ty) = 0$ bulunur. $M_d(x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_d(x,y) = \max\left\{\begin{array}{c} d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ \dfrac{d(y,Ty)\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]}{1+d(x,Tx)+d(y,Ty)} \end{array}\right\}$$
$$= \max\left\{\begin{array}{c} |x-y|, |x-\lambda|, |y-\lambda|, \\ \dfrac{|y-\lambda|\left[|x-\lambda|+|y-\lambda|\right]}{1+|x-\lambda|+|y-\lambda|} \end{array}\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$0 \le |x-\lambda| \le \lambda,$$
$$0 \le |y-\lambda| \le \lambda,$$
$$0 \le |x-y| \le \lambda,$$
$$0 < M_d(x,y) \le \lambda$$

bulunur ki $\delta = \delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon < M_d(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx,Ty) = 0 \le \varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

2. $x > \lambda$ ve $y > \lambda$ alındığında sırasıyla $Tx = 0$ ve $Ty = 0$ olur. Buradan $d(Tx,Ty) = 0$ bulunur. $M_d(x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_d(x,y) = \max\left\{\begin{array}{c} d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ \dfrac{d(y,Ty)\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right]}{1 + d(x,Tx) + d(y,Ty)} \end{array}\right\}$$
$$= \max\left\{|x-y|, |x|, |y|, \frac{|y|\left[|x| + |y|\right]}{1 + |x| + |y|}\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &0 \le |x-y| < \lambda, \\ &\lambda < |x| \le 2\lambda, \\ &\lambda < |y| \le 2\lambda, \\ &\lambda < M_d(x,y) \le 2\lambda \end{aligned}$$

bulunur ki $\delta = \delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon < M_d(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx,Ty) = 0 \le \varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

3. $x \le \lambda$ ve $y > \lambda$ alındığında sırasıyla $Tx = \lambda$ ve $Ty = 0$ olur. Buradan $d(Tx,Ty) = \lambda$ bulunur. $M_d(x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_d(x,y) = \max\left\{ \begin{array}{l} d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ \dfrac{d(y,Ty)\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]}{1+d(x,Tx)+d(y,Ty)} \end{array} \right\}$$
$$= \max\left\{ |x-y|, |x-\lambda|, |y|, \frac{|y|\left[|x|+|y-\lambda|\right]}{1+|x-\lambda|+|y|} \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$0 < |x-y| \le 2\lambda,$$
$$0 \le |x-\lambda| \le \lambda,$$
$$\lambda < |y| \le 2\lambda,$$
$$0 \le |x| \le \lambda,$$
$$0 < |y-\lambda| \le \lambda,$$
$$0 < |x|+|y-\lambda| \le 2\lambda,$$
$$\frac{|y|\left[|x|+|y-\lambda|\right]}{1+|x-\lambda|+|y|} < 2\lambda,$$
$$\lambda < M_d(x,y) \le 2\lambda$$

bulunur ki $\delta = \delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon < M_d(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx,Ty) = \lambda \le \varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

4. $x > \lambda$ ve $y \le \lambda$ alındığında sırasıyla $Tx = 0$ ve $Ty = \lambda$ olur. Buradan $d(Tx,Ty) = \lambda$ bulunur. $M_d(x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_d(x,y) = \max\left\{ \begin{array}{l} d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ \dfrac{d(y,Ty)\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]}{1+d(x,Tx)+d(y,Ty)} \end{array} \right\}$$
$$= \max\left\{ |x-y|, |x|, |y-\lambda|, \frac{|y-\lambda|\left[|x-\lambda|+|y|\right]}{1+|x|+|y-\lambda|} \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$0<|x-y|\leq 2\lambda,$$
$$\lambda<|x|\leq 2\lambda,$$
$$0\leq|y-\lambda|\leq\lambda,$$
$$0<|x-\lambda|\leq\lambda,$$
$$0\leq|y|\leq\lambda,$$
$$0<|x-\lambda|+|y|\leq 2\lambda,$$
$$\frac{|y-\lambda|\left[|x-\lambda|+|y|\right]}{1+|x|+|y-\lambda|}<2\lambda,$$
$$\lambda<M_d(x,y)\leq 2\lambda$$

bulunur ki $\delta=\delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon<M_d(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Tx,Ty)=\lambda\leq\varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

4.1.5 Uyarı 1) Teorem 4.1.1'de $N_d(x,y)$ ve $M_d(x,y)$ sayıları için $\alpha=1$ ve $\beta=\mu=0$ alınırsa Teorem 2.18; $\beta=1$ ve $\alpha=\mu=0$ alınırsa Teorem 2.19 elde edilir.

2) Teorem 4.1.1'in hipotezleri altında T^m dönüşümünün de sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Örnek olarak Örnek 4.1.4'de verilen T dönüşümünü alırsak her $x\in X$ ve $m\geq 2$ için $T^m x=\lambda$ buluruz. Dolayısıyla T^m dönüşümünün tek sabit noktası $x=\lambda$ noktasıdır.

4.1.6 Teorem (X,d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer bir $T:X\to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek sabit $z\in X$ noktası vardır. Ayrıca T dönüşümünün z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{x\to z}M_d^*(x,z)=0$ olmasıdır:

1. Her $t>0$ için $\psi(t)<t$ olacak şekilde $\gamma d(Tx,Ty)\leq\psi\left(N_d^*(x,y)\right)$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır. Burada $N_d^*(x,y)$ sayısı

$$N_d^*(x,y)=\alpha\max\left\{d\left(x,T^mx\right),d\left(y,T^my\right)\right\}$$
$$+\beta\max\left\{d(x,y),d\left(x,T^mx\right),d\left(y,T^my\right),\theta\frac{\left[d\left(x,T^my\right)+d\left(y,T^mx\right)\right]}{2}\right\}$$
$$+\mu\max\left\{d\left(x,T^mx\right),d\left(y,T^my\right),\frac{d(x,y)d\left(y,T^my\right)}{1+d\left(x,T^mx\right)},\frac{d(x,y)d\left(y,T^my\right)}{1+d\left(T^mx,T^my\right)}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

2. Verilen bir $\varepsilon>0$ için bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır öyle ki $\varepsilon<\frac{1}{\gamma}M_d^*(x,y)<\varepsilon+\delta$ olduğunda $d\left(T^mx,T^my\right)\leq\varepsilon$ olur. Burada $M_d^*(x,y)$ sayısı

$$M_d^*(x,y)=\alpha\max\left\{d\left(x,T^mx\right),d\left(y,T^my\right)\right\}$$
$$+\beta\max\left\{d(x,y),d\left(x,T^mx\right),d\left(y,T^my\right),\frac{\left[d\left(x,T^my\right)+d\left(y,T^mx\right)\right]}{2}\right\}$$
$$+\mu\max\left\{d(x,y),d\left(x,T^mx\right),d\left(y,T^my\right),\frac{d\left(y,T^my\right)\left[d\left(x,T^my\right)+d\left(y,T^mx\right)\right]}{1+d\left(x,T^mx\right)+d\left(y,T^my\right)}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: Teorem 4.1.1'den T^m dönüşümünün tek sabit z noktası vardır. $T^mz=z$ bulunur. Sonuç olarak $Tz=TT^mz=T^mTz$ elde edilir ve bu yüzden Tz noktası T^m dönüşümünün sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğinden $Tz=z$ bulunur. Dolayısıyla T^m'nin tek sabit noktası vardır.

4.2 Rhoades'in Açık Probleminin $S-$Metrik Uzaylarda Bir Çözümü

Bu bölümde Rhoades'in açık problemi için $S-$metrik uzayların teorisi kullanılarak bir çözüm verilecektir. Bunun için aşağıda tanımlanan $M_S(x,x,y)$ sayısı kullanılacaktır:

$$M_S(x,x,y)=\max\left\{\begin{array}{l} S(x,x,y), S(x,x,Tx), S(y,y,Ty), \\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)}, \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)} \end{array}\right\}$$

4.2.1 Teorem (X,S) bir tam $S-$metrik uzay olsun. Eğer $T:X\to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek sabit $z\in X$ noktası vardır ve her bir $x\in X$ için $T^n x\to z$ olur. Ayrıca T dönüşümünün z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{x\to z} M_S(x,x,z)=0$ olmasıdır.

1. Her $t>0$ için $\psi(t)<t$ olacak şekilde $S(Tx,Tx,Ty)\le\psi(M_S(x,x,y))$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.
2. Verilen bir $\varepsilon>0$ için $\varepsilon<M_S(x,x,y)<\varepsilon+\delta$ olduğunda $S(Tx,Tx,Ty)\le\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır.

İspat: $x_0\in X$, $Tx_0\ne x_0$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun ve X 'deki $\{x_n\}$ dizisi $n=0,1,2,3,...$ için $Tx_n=x_{n+1}$ olarak tanımlansın. Teorem 4.2.1'in 1. şartını ve $M_S(x,x,y)$ sayısını kullanarak

$$S(x_n,x_n,x_{n+1})=S(Tx_{n-1},Tx_{n-1},Tx_n)\le\psi(M_S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)) \tag{4.8}$$

$$<M_S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)=\max\left\{\begin{array}{l} S(x_{n-1},x_{n-1},x_n), S(x_{n-1},x_{n-1},x_n), \\ S(x_n,x_n,x_{n+1}), \\ \dfrac{S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)S(x_n,x_n,x_{n+1})}{1+S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)}, \\ \dfrac{S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)S(x_n,x_n,x_{n+1})}{1+S(x_n,x_n,x_{n+1})} \end{array}\right\}$$

$$=\max\{S(x_{n-1},x_{n-1},x_n), S(x_n,x_n,x_{n+1})\}$$

bulunur. Kabul edelim ki $S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)\le S(x_n,x_n,x_{n+1})$ olsun. (4.8) eşitsizliği kullanılarak $S(x_n,x_n,x_{n+1})<S(x_n,x_n,x_{n+1})$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden

$S\left(x_n, x_n, x_{n+1}\right) < S\left(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n\right)$ olur. Eğer $S\left(x_n, x_n, x_{n+1}\right) = s_n$ olarak alınırsa (4.8) eşitsizliğinden

$$s_n < s_{n-1} \tag{4.9}$$

ve böylece $\{s_n\}$ dizisinin pozitif reel sayıların kesinlikle azalan bir dizisi olduğu elde edilir. $\{s_n\}$ dizisi bir $s \geq 0$ limitine yaklaşır. Kabul edelim ki $s > 0$ olsun. Bu takdirde $n \geq k$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı vardır öyle ki

$$s < s_n < s + \delta(s) \tag{4.10}$$

olur. Teoremin 2. şartı ve (4.9) eşitsizliğinden $n \geq k$ için

$$S\left(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_n\right) = S\left(x_n, x_n, x_{n+1}\right) = s_n < s \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) eşitsizliklerinden çelişki elde edilir ve dolayısıyla $s = 0$ olur.

Bir $\varepsilon > 0$ için $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Genelliği bozmadan $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ kabul edelim. $s_n \to 0$ olduğundan $n \geq k$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir pozitif k tamsayısı vardır.

$$S\left(x_n, x_n, x_{n+1}\right) = s_n < \frac{\delta}{2}, (0 < \delta < 1)$$

Jachymski'nin tekniğini [41-42] kullanarak matematiksel tümevarımla herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right) < \varepsilon + \delta \tag{4.12}$$

olduğunu gösterelim. $n=1$ için $S\left(x_k, x_k, x_{k+1}\right) = s_k < \dfrac{\delta}{2} < \varepsilon + \delta$ olur ve (4.12) eşitsizliği sağlanır. Şimdi kabul edelim ki (4.12) eşitsizliği bir n için doğru olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$S\left(x_k, x_k, x_{k+n+1}\right) \leq S\left(x_k, x_k, x_{k+1}\right) + S\left(x_k, x_k, x_{k+1}\right) + S\left(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+n+1}\right)$$

bulunur. Eğer $S\left(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+n+1}\right) \leq \varepsilon$ olduğu gösterilirse (4.12) eşitsizliğinin $n+1$ için doğruluğu kanıtlanmış olur. Şimdi

$$M_S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right) = \max\left\{\begin{array}{l} S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right), S\left(x_k, x_k, Tx_k\right), \\ S\left(x_{k+n}, x_{k+n}, Tx_{k+n}\right), \\ \dfrac{S\left(x_k, x_k, Tx_k\right) S\left(x_{k+n}, x_{k+n}, Tx_{k+n}\right)}{1 + S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right)}, \\ \dfrac{S\left(x_k, x_k, Tx_k\right) S\left(x_{k+n}, x_{k+n}, Tx_{k+n}\right)}{1 + S\left(Tx_k, Tx_k, Tx_{k+n}\right)} \end{array}\right\} \tag{4.13}$$

iken $M_S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right) < \varepsilon + \delta$ olduğunu gösterelim. Matematiksel tümevarım hipotezi ile

$$\begin{aligned} & S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right) < \varepsilon + \delta, \\ & S\left(x_k, x_k, x_{k+1}\right) < \frac{\delta}{2}, \\ & S\left(x_{k+n}, x_{k+n}, x_{k+n+1}\right) < \frac{\delta}{2}, \\ & \frac{S\left(x_k, x_k, Tx_k\right) S\left(x_{k+n}, x_{k+n}, Tx_{k+n}\right)}{1 + S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right)} < \frac{\delta^2}{4\left(1 + S\left(x_k, x_k, x_{k+n}\right)\right)} < \delta, \\ & \frac{S\left(x_k, x_k, Tx_k\right) S\left(x_{k+n}, x_{k+n}, Tx_{k+n}\right)}{1 + S\left(Tx_k, Tx_k, Tx_{k+n}\right)} < \frac{\delta^2}{4\left(1 + S\left(Tx_k, Tx_k, Tx_{k+n}\right)\right)} < \delta \end{aligned} \tag{4.14}$$

bulunur. (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri kullanılarak $M_S(x_k, x_k, x_{k+n}) < \varepsilon + \delta$ elde edilir. Teoremin 2. şartından $S(Tx_k, Tx_k, Tx_{k+n}) = S(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+n+1}) \le \varepsilon$ bulunur. Sonuç olarak (4.12) eşitsizliği gösterir ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Bu takdirde (X, S) $S-$metrik uzayının tamlığından bir $z \in X$ noktası vardır öyle ki $n \to \infty$ için $x_n \to z$ olur. Üstelik $Tx_n \to z$ olur. Şimdi kabul edelim ki $Tz \ne z$ yani, z noktası T dönüşümünün sabit noktası olmasın. Teoremin 1. şartından

$$
\begin{aligned}
S(Tz, Tz, Tx_n) &\le \psi(M_S(z, z, x_n)) < M_S(z, z, x_n) \\
&= \max\left\{\begin{array}{l} S(z, z, x_n), S(z, z, Tz), S(x_n, x_n, Tx_n), \\ \dfrac{S(z, z, Tz) S(x_n, x_n, Tx_n)}{1 + S(z, z, x_n)}, \dfrac{S(z, z, Tz) S(x_n, x_n, Tx_n)}{1 + S(Tz, Tz, Tx_n)} \end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve $n \to \infty$ için limit alınırsa $S(Tz, Tz, z) < S(Tz, Tz, z)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tz = z$ olur ve z noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi kabul edelim ki w noktası $w \ne z$ olacak şekilde T dönüşümünün diğer sabit noktası olsun. Teoremin 1. şartından

$$
\begin{aligned}
S(Tz, Tz, Tw) &= S(z, z, w) \le \psi(M_S(z, z, w)) < M_S(z, z, w) \\
&= \max\left\{\begin{array}{l} S(z, z, w), S(z, z, Tz), S(w, w, Tw), \\ \dfrac{S(z, z, Tz) S(w, w, Tw)}{1 + S(z, z, w)}, \dfrac{S(z, z, Tz) S(w, w, Tw)}{1 + S(Tz, Tz, Tw)} \end{array}\right\} \\
&= S(z, z, w)
\end{aligned}
$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla z noktası T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

İspatın son bölümünde T dönüşümünün z sabit noktasında sürekli olduğunu varsayalım. Eğer $x_n \to z$ ise $Tx_n \to Tz = z$ olur ve $S(x_n, x_n, Tx_n) \le 2S(x_n, x_n, z) + S(Tx_n, Tx_n, z) \to 0$

bulunur. Sonuç olarak $\lim_{x_n \to z} M_S(x_n, x_n, z) = 0$ elde edilir. Tersine eğer $\lim_{x_n \to z} M_S(x_n, x_n, z) = 0$ ise $x_n \to z$ için $S(x_n, x_n, Tx_n) \to 0$ olur. Bu $Tx_n \to z = Tz$ yani, T dönüşümünün z noktasında sürekli olduğunu gösterir.

4.2.2 Sonuç (X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x \in X$ için aşağıdaki şartları sağlarsa tek sabit $z \in X$ noktası vardır ve $T^n x \to z$ olur. Ayrıca T dönüşümünün z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{x \to z} M_S(x, x, z) = 0$ olmasıdır.

1. Herhangi $x, y \in X$ ve $M_S(x, x, y) > 0$ için $S(Tx, Tx, Ty) < M_S(x, x, y)$.
2. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki $\varepsilon < M_S(x, x, y) < \varepsilon + \delta$ olduğunda $S(Tx, Tx, Ty) \le \varepsilon$ olur.

4.2.3 Sonuç (X, S) bir tam $S-$metrik uzay olsun. Eğer $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek sabit $z \in X$ noktası vardır ve $T^n x \to z$ olur.

1. Her $S(x, x, y) > 0$ için $\psi(S(x, x, y)) < S(x, x, y)$ olacak şekilde $S(Tx, Tx, Ty) \le \psi(S(x, x, y))$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.
2. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki herhangi bir $t > 0$ için $\varepsilon < t < \varepsilon + \delta$ olduğunda $\psi(t) \le \varepsilon$ olur.

4.2.4 Örnek $X = [0, 6]$ kümesi Örnek 2.14'te verilen $S-$metrik ile $S-$metrik uzay olsun. T dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 3 & , \quad x \le 3 \\ 0 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. T dönüşümü

$$\psi(t)=\begin{cases} 3 & , \quad t>3 \\ \dfrac{t}{3} & , \quad t\leq 3 \end{cases}$$

ve

$$\delta(\varepsilon)=\begin{cases} 35 & , \quad \varepsilon\geq 3 \\ 10-\varepsilon & , \quad \varepsilon<3 \end{cases}$$

fonksiyonları ile Teorem 4.2.1'in şartlarını sağlar. Teorem 4.2.1'in 1. şartının sağlandığını göstermek için aşağıdaki 4 farklı durumu dikkate alacağız:

1. $x\leq 3$ ve $y\leq 3$ alındığında sırasıyla $Tx=3$ ve $Ty=3$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty)=0$ bulunur ki $S(Tx,Tx,Ty)\leq\psi(M_S(x,x,y))$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür.
2. $x>3$ ve $y>3$ alındığında sırasıyla $Tx=0$ ve $Ty=0$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty)=0$ bulunur ki $S(Tx,Tx,Ty)\leq\psi(M_S(x,x,y))$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür.
3. $x\leq 3$ ve $y>3$ alındığında sırasıyla $Tx=3$ ve $Ty=0$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty)=3$ bulunur. $M_S(x,x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_S(x,x,y)=\max\left\{\begin{array}{c} S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty), \\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)},\dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)} \end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{|x-y|,|x-3|,|y|,\frac{|x-3||y|}{1+|x-y|},\frac{|x-3||y|}{4}\right\}$$

elde edilir. $|y|>3$ olduğu için $M_S(x,x,y)>3$ bulunur. Dolayısıyla buradan $3=S(Tx,Tx,Ty)\leq \psi(M_S(x,x,y))=3$ eşitsizliği sağlanır.

4. $x>3$ ve $y\leq 3$ alındığında sırasıyla $Tx=0$ ve $Ty=3$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty)=3$ bulunur. $M_S(x,x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_S(x,x,y)=\max\left\{\begin{array}{l} S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)},\dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)}\end{array}\right\}$$
$$=\max\left\{|x-y|,|x|,|y-3|,\frac{|x||y-3|}{1+|x-y|},\frac{|x||y-3|}{4}\right\}$$

elde edilir. $|x|>3$ olduğu için $M_S(x,x,y)>3$ bulunur. Dolayısıyla buradan $3=S(Tx,Tx,Ty)\leq \psi(M_S(x,x,y))=3$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.1'in 2. şartının sağlandığını gösterelim. Aşağıdaki dört farklı durumu inceleyeceğiz:

1. $x\leq 3$ ve $y\leq 3$ alındığında sırasıyla $Tx=3$ ve $Ty=3$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty)=0$ bulunur. $M_S(x,x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_S(x,x,y)=\max\left\{\begin{array}{l} S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)},\dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)}\end{array}\right\}$$
$$=\max\left\{|x-y|,|x-3|,|y-3|,\frac{|x-3||y-3|}{1+|x-y|},\frac{|x-3||y-3|}{1}\right\}$$

elde edilir.

$$0 \le |x-y| \le 3,$$
$$0 \le |x-3| \le 3,$$
$$0 \le |y-3| \le 3,$$
$$0 \le \frac{|x-3||y-3|}{1+|x-y|} \le 9,$$
$$0 \le \frac{|x-3||y-3|}{1} \le 9,$$
$$0 \le M_S(x,x,y) \le 9$$

bulunur ki $\delta = \delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon < M_S(x,x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow S(Tx,Tx,Ty) = 0 \le \varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

2. $x > 3$ ve $y > 3$ alındığında sırasıyla $Tx = 0$ ve $Ty = 0$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty) = 0$ bulunur. $M_S(x,x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_S(x,x,y) = \max\left\{\begin{matrix} S(x,x,y), S(x,x,Tx), S(y,y,Ty), \\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)}, \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)} \end{matrix}\right\}$$
$$= \max\left\{|x-y|, |x|, |y|, \frac{|x||y|}{1+|x-y|}, \frac{|x||y|}{1}\right\}$$

elde edilir.

$$0 \le |x-y| < 3,$$
$$3 < |x| \le 6,$$
$$3 < |y| \le 6,$$
$$\frac{9}{2} < \frac{|x||y|}{1+|x-y|} \le 36,$$
$$9 < \frac{|x||y|}{1} \le 36,$$
$$9 < M_S(x,x,y) \le 36$$

bulunur ki $\delta = \delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon < M_S(x,x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow S(Tx,Tx,Ty) = 0 \le \varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

3. $x \le 3$ ve $y > 3$ alındığında sırasıyla $Tx = 3$ ve $Ty = 0$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty) = 3$ bulunur. $M_S(x,x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_S(x,x,y) = \max\left\{\begin{array}{l} S(x,x,y), S(x,x,Tx), S(y,y,Ty), \\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)}, \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)} \end{array}\right\}$$
$$= \max\left\{|x-y|, |x-3|, |y|, \frac{|x-3||y|}{1+|x-y|}, \frac{|x-3||y|}{4}\right\}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&0 < |x-y| \le 6 \\
&0 \le |x-3| \le 3 \\
&3 < |y| \le 6 \\
&0 \le |x-3||y| \le 18 \\
&1 < 1+|x-y| \le 7 \\
&0 \le \frac{|x-3||y|}{1+|x-y|} < 3 \\
&0 \le \frac{|x-3||y|}{4} \le \frac{9}{2} \\
&3 < M_S(x,x,y) \le 6
\end{aligned}$$

bulunur ki $\delta = \delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon < M_S(x,x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow S(Tx,Tx,Ty) = 3 \le \varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

4. $x > 3$ ve $y \le 3$ alındığında sırasıyla $Tx = 0$ ve $Ty = 3$ olur. Buradan $S(Tx,Tx,Ty) = 3$ bulunur. $M_S(x,x,y)$ sayısı hesaplandığında

$$M_S(x,x,y)=\max\left\{\begin{array}{c}S(x,x,y),S(x,x,Tx),S(y,y,Ty),\\ \dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(x,x,y)},\dfrac{S(x,x,Tx)S(y,y,Ty)}{1+S(Tx,Tx,Ty)}\end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{|x-y|,|x|,|y-3|,\frac{|x||y-3|}{1+|x-y|},\frac{|x||y-3|}{4}\right\}$$

elde edilir.

$$0<|x-y|\le 6$$
$$3<|x|\le 6$$
$$0\le|y-3|\le 3$$
$$0\le|x||y-3|\le 18$$
$$1<1+|x-y|\le 7$$
$$0\le\frac{|x||y-3|}{1+|x-y|}<3$$
$$0\le\frac{|x||y-3|}{4}\le\frac{9}{2}$$
$$3<M_S(x,x,y)\le 6$$

bulunur ki $\delta=\delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun tanımından

$$\varepsilon<M_S(x,x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow S(Tx,Tx,Ty)=3\le\varepsilon$$

ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

4.2.5 Uyarı Teorem 4.2.1'in hipotezleri altında T^m dönüşümünün de sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Örnek olarak Örnek 4.2.4'de verilen T dönüşümünü alırsak her $x\in X$ ve $m\ge 2$ için $T^m x=3$ buluruz. Dolayısıyla T^m dönüşümünün tek sabit $x=3$ noktası vardır.

Şimdi

$$M_S^*(x,x,y)=\max\left\{\begin{array}{l} S(x,x,y),S(x,x,T^m x),S(y,y,T^m y), \\ \dfrac{S(x,x,T^m x)S(y,y,T^m y)}{1+S(x,x,y)},\dfrac{S(x,x,T^m x)S(y,y,T^m y)}{1+S(T^m x,T^m x,T^m y)} \end{array}\right\}$$

sayısını kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

4.2.6 Teorem (X,S) bir tam $S-$metrik uzay olsun. Eğer bir $T:X\to X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa T dönüşümünün tek $z\in X$ sabit noktası vardır:

1. Her $t>0$ için $\psi(t)<t$ olacak şekilde $S(T^m x,T^m x,T^m y)\le\psi(M_S^*(x,x,y))$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır.
2. Verilen bir $\varepsilon>0$ için bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır öyle ki $\varepsilon<M_S^*(x,x,y)<\varepsilon+\delta$ olduğunda $S(T^m x,T^m x,T^m y)\le\varepsilon$ olur.

Ayrıca T dönüşümünün z noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{x\to z}M_S^*(x,x,z)=0$ olmasıdır.

İspat: Teorem 4.2.1'den T^m dönüşümünün tek sabit z noktası vardır. $T^m z=z$ bulunur. Sonuç olarak $Tz=TT^m z=T^m Tz$ elde edilir ve bu yüzden Tz noktası T^m dönüşümünün sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğinden $Tz=z$ bulunur. Dolayısıyla T^m'nin tek sabit noktası vardır.

5. METRİK VE $S-$METRİK UZAYLARDA ORTAK SABİT ÇEMBER PROBLEMİ

Bu bölümde Wardowski'nin tekniği yardımıyla metrik ve $S-$metrik uzaylarda [9] numaralı kaynakta verilen açık probleme çözümler verilecektir. Bunun için Bölüm 2'de tanıtılan $N_d(x,y)$ ve $M_d(x,y)$ sayılarının değiştirilmiş halleri kullanılacaktır.

5.1 Metrik Uzaylarda Ortak Sabit Çember Problemi

(X,d) bir metrik uzay ve $S,T:X\to X$ olsun. Metrik uzaylarda ortak sabit çember problemi için elde edilen sonuçlarda kullanılan $N_d(x,y)$ ve $M_d(x,y)$ sayılarının aşağıda verilen değiştirilmiş halleri dikkate alınacaktır. $\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}^+,\alpha+\beta+\mu=1, 0\le\theta<1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
N_c(x,y) &= \alpha\max\left\{d(Sx,Tx),d(Sy,Ty)\right\}\\
&+\beta\max\left\{d(Sx,Sy),d(Sx,Tx),d(Sy,Ty),\theta\frac{\left[d(Sx,Ty)+d(Sy,Tx)\right]}{2}\right\}\\
&+\mu\max\left\{d(Sx,Tx),d(Sy,Ty),\frac{d(Sx,Tx)\left[d(Tx,x)+d(Sx,x)\right]}{d(Ty,y)+d(Sy,y)}\right\}
\end{aligned}
$$

ve $\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}^+,\alpha+\beta+\mu=1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
M_c(x,y) &= \alpha\max\left\{d(Sx,Ty),d(y,Ty),d(x,Sx)\right\}\\
&+\beta\max\left\{d(Sx,y),d(Sx,Ty),d(y,Ty),\frac{\left[d(Sx,Ty)+d(y,Tx)\right]}{2}\right\}\\
&+\mu\max\left\{d(Sx,Ty),d(y,Ty),d(y,Sx),\frac{d(y,Ty)\left[d(Sx,Ty)+d(y,Tx)\right]}{1+d(Sx,Ty)+d(y,Ty)}\right\}
\end{aligned}
$$

olsun. Ortak sabit çember problemine çözüm verirken ρ_d sayısı Bölüm 2'de (2.1)'deki gibi tanımlanacaktır. İlk olarak $N_c(x,y)$ sayısı yardımıyla aşağıdaki daralma tanımı verilsin.

5.1.1 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x\in X$ için $d(Tx_0,x_0)+d(Sx_0,x_0)\neq 0$ iken $\tau+F(d(Tx,Sx))\leq F(N_c(x,x_0))$ şartını sağlayan $F\in\mathbb{F}$, $\tau>0$ ve $x_0\in X$ noktası varsa ve eğer $d(Tx_0,x_0)+d(Sx_0,x_0)=0$ iken $Tx=Sx$ oluyorsa (T,S) dönüşüm çiftine F_N-daralma denir.

Tanım 5.1.1'in bir sonucu aşağıda önerme olarak verilecektir.

5.1.2 Önerme (X,d) bir metrik uzay ve $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer (T,S) dönüşüm çifti $x_0\in X$ noktası ile bir F_N-daralma ise x_0 noktası T ve S dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır yani $Tx_0=Sx_0$ olur.

İspat: Tanım 5.1.1 kullanılarak $x=x_0$ alındığında

$$\begin{aligned}
&\tau+F(d(Tx_0,Sx_0))\\
&\leq F\left(\begin{array}{l}
\alpha\max\left\{d(Sx_0,Tx_0),d(Sx_0,Tx_0)\right\}\\
+\beta\max\left\{d(Sx_0,Sx_0),d(Sx_0,Tx_0),d(Sx_0,Tx_0),\theta\dfrac{\left[d(Sx_0,Tx_0)+d(Sx_0,Tx_0)\right]}{2}\right\}\\
+\mu\max\left\{d(Sx_0,Tx_0),d(Sx_0,Tx_0),\dfrac{d(Sx_0,Tx_0)\left[d(Tx_0,x_0)+d(Sx_0,x_0)\right]}{d(Tx_0,x_0)+d(Sx_0,x_0)}\right\}
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada iki durum söz konusudur.

1. Eğer $d(Tx_0,x_0)+d(Sx_0,x_0)=0$ ise $Tx_0=Sx_0$ elde edilir.

2. Eğer $d\left(Tx_0, x_0\right)+d\left(Sx_0, x_0\right)\neq 0$ ise

$$\tau+F\left(d\left(Tx_0, Sx_0\right)\right)\leq F\left(\left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(Sx_0, Tx_0\right)\right)=F\left(d\left(Sx_0, Tx_0\right)\right)$$

elde edilir ki $\tau>0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak x_0 noktası T ve S dönüşümlerinin çakışma noktasıdır yani $Tx_0=Sx_0$ olur.

Şimdi $M_c\left(x, y\right)$ sayısı kullanılarak aşağıdaki daralma tanımı verilecektir.

5.1.3 Tanım $\left(X, d\right)$ bir metrik uzay ve $T, S: X\rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x\in X$ için $d\left(Tx, x\right)>0\Rightarrow\tau+F\left(d\left(Tx, x\right)\right)\leq F\left(M_c\left(x, x_0\right)\right)$ şartını sağlayan $F\in\mathbb{F}$, $\tau>0$ ve $x_0\in X$ noktası varsa $\left(T, S\right)$ dönüşüm çiftine F_M-daralma denir.

Şimdi Tanım 5.1.1 ve Tanım 5.1.3 yardımıyla aşağıdaki önerme verilsin.

5.1.4 Önerme $\left(X, d\right)$ bir metrik uzay ve $T, S: X\rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\left(T, S\right)$ dönüşüm çifti $x_0\in X$ noktası ile hem F_N-daralma hem de F_M-daralma ise x_0 noktası T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır yani $Tx_0=Sx_0=x_0$ olur.

İspat: F_N-daralma tanımı ve Önerme 5.1.2'den dolayı x_0 noktası T ve S dönüşümlerinin çakışma noktasıdır yani $Tx_0=Sx_0$ olur. Şimdi x_0 noktasının T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu gösterilecektir. $Tx_0\neq x_0$ olduğu kabul edilsin. F_M-daralma tanımından

$$\tau + F\left(d\left(Tx_0, x_0\right)\right) \leq F\left(M_c\left(x_0, x_0\right)\right)$$

$$= F\left(\begin{array}{l} \alpha \max\left\{d\left(Sx_0, Tx_0\right), d\left(x_0, Tx_0\right), d\left(x_0, Sx_0\right)\right\} \\ +\beta \max\left\{d\left(Sx_0, x_0\right), d\left(Sx_0, Tx_0\right), d\left(x_0, Tx_0\right), \dfrac{\left[d\left(Sx_0, Tx_0\right) + d\left(x_0, Tx_0\right)\right]}{2}\right\} \\ +\mu \max\left\{d\left(Sx_0, Tx_0\right), d\left(x_0, Tx_0\right), d\left(x_0, Sx_0\right), \dfrac{d\left(x_0, Tx_0\right)\left[d\left(Sx_0, Tx_0\right) + d\left(x_0, Tx_0\right)\right]}{1 + d\left(Sx_0, Tx_0\right) + d\left(x_0, Tx_0\right)}\right\} \end{array}\right)$$

$$= F\left(\left(\alpha + \beta + \mu\right) d\left(Tx_0, x_0\right)\right) = F\left(d\left(Tx_0, x_0\right)\right)$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx_0 = x_0$ olur. Sonuç olarak x_0 noktası T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır yani $Tx_0 = Sx_0 = x_0$ olur.

Burada $F_N -$daralma şartı ve Önerme 5.1.2 kullanılarak bir dönüşüm çifti için bir çakışma noktası elde edildi. $F_N -$daralma şartı, $F_M -$daralma şartı ve Önerme 5.1.4 kullanılarak da bir dönüşüm çifti için bir ortak sabit nokta sonucu elde edildi.

$F_N -$daralma ve $F_M -$daralma tanımları kullanılarak aşağıdaki teoremde ortak sabit çember problemine bir çözüm verilecektir.

5.1.5 Teorem $\left(X, d\right)$ bir metrik uzay, $T, S : X \to X$ iki dönüşüm ve ρ_d sayısı Bölüm 2'de $\left(2.1\right)$'deki gibi tanımlansın. Eğer $x_0 \in X$ noktası ile $\left(T, S\right)$ dönüşüm çifti hem $F_N -$daralma hem de $F_M -$daralma ve her $x \in C_{x_0, \rho_d}$ için $d\left(Tx, x_0\right) = d\left(Sx, x_0\right) = \rho_d$ ise C_{x_0, ρ_d} çemberi T ve S dönüşümlerinin ortak sabit çemberidir yani her $x \in C_{x_0, \rho_d}$ için $Tx = Sx = x$ olur.

İspat: $x \in C_{x_0, \rho_d}$ olsun. İlk olarak x elemanının T ve S dönüşümlerinin bir çakışma noktası olduğu gösterilsin. Önerme 5.1.4'ten $Tx_0 = Sx_0 = x_0$ ve dolayısıyla $d\left(x_0, Tx_0\right) + d\left(x_0, Sx_0\right) = 0$ elde edilir. Böylece $F_N -$daralma tanımından $Tx = Sx$ olur.

$C_{x_0,r}$ çemberinin T ve S dönüşümlerinin ortak sabit çemberi olduğunu gösterelim. $Tx \neq x$ olduğunu kabul edelim. Önerme 5.1.4 ve $F_M -$daralma şartı hipotezinden

$$
\begin{aligned}
\tau + F\left(d\left(Tx,x\right)\right) &\leq F\left(M_c\left(x,x_0\right)\right) \\
&= F\left(\begin{array}{l}
\alpha \max\left\{d\left(Sx,Tx_0\right), d\left(x_0,Tx_0\right), d\left(x,Sx\right)\right\} \\
+\beta \max\left\{d\left(Sx,x_0\right), d\left(Sx,Tx_0\right), d\left(x_0,Tx_0\right), \dfrac{\left[d\left(Sx,Tx_0\right)+d\left(x_0,Tx\right)\right]}{2}\right\} \\
+\mu \max\left\{d\left(Sx,Tx_0\right), d\left(x_0,Tx_0\right), d\left(x_0,Sx\right), \dfrac{d\left(x_0,Tx_0\right)\left[d\left(Sx,Tx_0\right)+d\left(x_0,Tx\right)\right]}{1+d\left(Sx,Tx_0\right)+d\left(x_0,Tx_0\right)}\right\}
\end{array}\right) \\
&= F\left(\alpha \max\left\{\rho_d, d\left(x,Sx\right)\right\} + \left(\beta+\mu\right)\rho_d\right) \\
&= F\left(\alpha \max\left\{\rho_d, d\left(x,Tx\right)\right\} + \left(\beta+\mu\right)\rho_d\right) \\
&\leq F\left(\left(\alpha+\beta+\mu\right)d\left(x,Tx\right)\right) \\
&= F\left(d\left(x,Tx\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx = x$ ve C_{x_0,ρ_d} çemberi T ve S dönüşümlerinin ortak sabit çemberidir.

5.1.6 Sonuç $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay, $T,S : X \to X$ iki dönüşüm ve ρ_d sayısı Bölüm 2'de $\left(2.1\right)$'deki gibi tanımlansın. Eğer $\left(T,S\right)$ dönüşüm çifti $x_0 \in X$ noktası ile hem $F_N -$ daralma hem de $F_M -$daralma ve $\rho < \rho_d$ olduğunda her $x \in C_{x_0,\rho}$ için $d\left(Tx,x_0\right) = d\left(Sx,x_0\right) = \rho$ ise T ve S dönüşümleri $C_{x_0,\rho}$ çemberini dolayısıyla D_{x_0,ρ_d} diskini sabit bırakır yani her $x \in D_{x_0,\rho_d}$ için $Tx = Sx = x$ olur.

Aşağıda Teorem 5.1.5 için bir örnek verilecektir.

5.1.7 Örnek $X=[3,\infty)\cup\{0,1,2\}$ kümesi alışılmış metrik ile ele alınsın. $T:X\to X$ ve $S:X\to X$ dönüşümleri her $x\in X$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Tx=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & , \quad x\in\{0,2,4\}\\ 1 & , \quad x=1\\ x+1 & , \quad x\notin\{0,1,2,4\}\end{cases},$$

$$Sx=\begin{cases}x\sqrt{x} & , \quad x\in\{0,1,4\}\\ 2 & , \quad x=2\\ x+1 & , \quad x\notin\{0,1,2,4\}\end{cases}.$$

(T,S) dönüşüm çifti $F=\ln x+x$, $\tau=2$ ve $x_0=1$ ile hem F_N-daralma hem de F_M-daralmadır. Gerçekten $d(Tx_0,x_0)+d(Sx_0,x_0)=0$ olduğu için $Tx=Sx$ olur. Dolayısıyla (T,S) dönüşüm çifti F_N-daralmadır. $x=4$ için $d(T4,4)=4\neq 0$ ve her $x\in X\setminus\{0,1,2,4\}$ için $d(Tx,x)=1\neq 0$ bulunur. $M_c(4,1)$ ve $M_c(x,1)$ sayıları hesaplandığında

$$\begin{aligned}M_c(4,1)&=\alpha\max\{d(S4,T1),d(1,T1),d(4,S4)\}\\&+\beta\max\left\{d(S4,1),d(S4,T1),d(1,T1),\frac{d(S4,T1)+d(1,T4)}{2}\right\}\\&+\mu\max\left\{d(S4,T1),d(1,T1),d(1,S4),\frac{d(1,T1)[d(S4,T1)+d(1,T4)]}{1+d(S4,T1)+d(1,T1)}\right\}\\&=\alpha\max\{7,0,4\}+\beta\max\left\{7,7,0,\frac{7+7}{2}\right\}+\mu\max\{7,0,7,0\}\\&=(\alpha+\beta+\mu)7=7\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ln 4 \le \ln 7 \\
&\Rightarrow \ln 4 + 6 \le \ln 7 + 7 \\
&\Rightarrow 2 + \ln 4 + 4 \le \ln 7 + 7 \\
&\Rightarrow \tau + F\left(d\left(T4,4\right)\right) \le F\left(M_c\left(4,1\right)\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&M_c\left(x,1\right) = \alpha \max\left\{d\left(Sx,T1\right), d\left(1,T1\right), d\left(x,Sx\right)\right\} \\
&+\beta \max\left\{d\left(Sx,1\right), d\left(Sx,T1\right), d\left(1,T1\right), \frac{d\left(Sx,T1\right)+d\left(1,Tx\right)}{2}\right\} \\
&+\mu \max\left\{d\left(Sx,T1\right), d\left(1,T1\right), d\left(1,Sx\right), \frac{d\left(1,T1\right)\left[d\left(Sx,T1\right)+d\left(1,Tx\right)\right]}{1+d\left(Sx,T1\right)+d\left(1,T1\right)}\right\} \\
&= \alpha \max\left\{\left|x\right|,0,1\right\} + \beta \max\left\{\left|x\right|,\left|x\right|,0,\frac{\left|x\right|+\left|x\right|}{2}\right\} + \mu \max\left\{\left|x\right|,0,\left|x\right|,0\right\} \\
&= \left(\alpha+\beta+\mu\right)\left|x\right| = \left|x\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3 \le \left|x\right| \\
&\Rightarrow 2 + \ln 1 + 1 \le \left|x\right| \\
&\Rightarrow 2 + \ln 1 + 1 \le \ln\left|x\right| + \left|x\right| \\
&\Rightarrow \tau + F\left(d\left(Tx,x\right)\right) \le F\left(M_c\left(x,1\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak $\left(T,S\right)$ çifti F_M-daralmadır. Ek olarak

$$
\rho_d = \inf\left\{d\left(Tx,x\right) : x \in X, Tx \ne x\right\} = \min\left\{1,4\right\} = 1
$$

bulunur. Dolayısıyla T ve S dönüşümleri $C_{1,1} = \left\{0,2\right\}$ çemberini ve $D_{1,1}$ diskini sabit bırakır.

5.1.8 Uyarı Teorem 5.1.5'te hipotezdeki diğer şartlar sağlandığında (T,S) dönüşüm çiftinin her biri C_{x_0,ρ_d} çemberini C_{x_0,ρ_d} çemberine resmederse C_{x_0,ρ_d} çemberi T ve S dönüşümlerinin ortak sabit çemberi olur. T ve S dönüşümleri farklı x_0 noktaları ile hem F_N-daralma hem de F_M-daralma olabilir. Bu durumda ρ_d sayısı hipotezdeki gibi seçildiğinde T ve S dönüşümlerinin birden fazla ortak sabit çemberi olabilir, yani ortak sabit çember tek değildir. Ek olarak $\left(Fix(T)\cap Fix(S)\right)\setminus C_{x_0,\rho_d}$ kümesinin elemanları geometrik olarak çember teşkil etmeyebilir.

5.2 $S-$Metrik Uzaylarda Ortak Sabit Çember Problemi

(X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T,U:X\to X$ olsun. $S-$metrik uzaylarda ortak sabit çember problemi için aşağıda tanımlanan $N_s(x,x,y)$ ve $M_s(x,x,y)$ sayıları kullanılacaktır. $\alpha,\mu\in\mathbb{R}^+,\alpha+\mu=1$ olmak üzere

$$N_s(x,x,y)=\alpha\max\left\{S(Ux,Ux,Tx),S(Uy,Uy,Ty)\right\}$$
$$+\mu\max\left\{\begin{array}{l}S(Ux,Ux,Tx),S(Uy,Uy,Ty),\\ \dfrac{S(Ux,Ux,Tx)\left[S(Tx,Tx,x)+S(Ux,Ux,x)\right]}{S(Ty,Ty,y)+S(Uy,Uy,y)}\end{array}\right\}$$

ve

$$M_s(x,x,y)=\alpha\max\left\{S(Ux,Ux,Ty),S(y,y,Ty),S(x,x,Ux)\right\}$$
$$+\mu\max\left\{\begin{array}{l}S(Ux,Ux,Ty),S(y,y,Ty),S(y,y,Ux),\\ \dfrac{S(y,y,Ty)\left[S(Ux,Ux,Ty)+S(y,y,Tx)\right]}{1+S(Ux,Ux,Ty)+S(y,y,Ty)}\end{array}\right\}$$

olsun. İlk olarak $N_s(x,x,y)$ sayısı yardımıyla aşağıdaki daralma tanımını verelim.

5.2.1 Tanım (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T,U:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x\in X$ için $S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)\neq 0$ iken

$$\tau+F\left(S(Tx,Tx,Ux)\right)\leq F\left(N_s(x,x,x_0)\right)$$

olacak şekilde $F\in\mathbb{F}$, $\tau>0$ ve $x_0\in X$ varsa ve $S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)=0$ iken $Tx=Ux$ oluyorsa (T,U) dönüşüm çiftine F_N^S-daralma denir.

Tanım 5.2.1'in bir sonucu aşağıda önerme olarak verilecektir.

5.2.2 Önerme (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T,U:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer (T,U) dönüşüm çifti $x_0\in X$ ile bir F_N^S-daralma ise x_0 noktası T ve U dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır yani $Tx_0=Ux_0$ olur.

İspat: Tanım 5.1.1 kullanılarak $x=x_0$ alındığında

$$\begin{aligned}
&\tau+F\left(S(Tx_0,Tx_0,Ux_0)\right)\\
&\leq F\left(\begin{array}{l}\alpha\max\left\{S(Ux_0,Ux_0,Tx_0),S(Ux_0,Ux_0,Tx_0)\right\}\\
+\mu\max\left\{\begin{array}{c}S(Ux_0,Ux_0,Tx_0),S(Ux_0,Ux_0,Tx_0),\\
\dfrac{S(Ux_0,Ux_0,Tx_0)\left[S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)\right]}{S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)}\end{array}\right\}\end{array}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada iki durum söz konusudur.

1. Eğer $S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)=0$ ise $Tx_0=Ux_0$ elde edilir.
2. Eğer $S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)\neq 0$

   $$\tau+F\left(S(Tx_0,Tx_0,Ux_0)\right)\leq F\left((\alpha+\mu)S(Ux_0,Ux_0,Tx_0)\right)=F\left(S(Ux_0,Ux_0,Tx_0)\right)$$

   elde edilir ki $\tau>0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak x_0 noktası T ve U dönüşümlerinin çakışma noktasıdır yani $Tx_0 = Ux_0$ olur.

$M_s(x,x,y)$ sayısı kullanılarak aşağıdaki daralma tanımı verilecektir.

5.2.3 Tanım (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T,U : X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$S(Tx,Tx,x) > 0 \Rightarrow \tau + F\left(S(Tx,Tx,x)\right) \leq F\left(M_s(x,x,x_0)\right)$$

şartını sağlayan $F \in \mathbb{F}$, $\tau > 0$ ve $x_0 \in X$ varsa (T,U) dönüşüm çiftine $F_M^S -$daralma denir.

Tanım 5.2.1 ve Tanım 5.2.3 yardımıyla aşağıdaki önerme verilecektir.

5.2.4 Önerme (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T,U : X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer (T,U) dönüşüm çifti $x_0 \in X$ ile hem $F_N^S -$daralma hem de $F_M^S -$daralma ise x_0 noktası T ve U dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır yani $Tx_0 = Ux_0 = x_0$ olur.

İspat: $F_N^S -$daralma yapısı ve Önerme 5.2.2'den dolayı x_0 noktası T ve U dönüşümlerinin çakışma noktasıdır yani $Tx_0 = Ux_0$ olur. Şimdi x_0 noktasının T ve U dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu gösterilecektir. $Tx_0 \neq x_0$ olduğunu kabul edelim. $F_M^S -$daralma yapısından

$$\tau + F\left(S\left(Tx_0, Tx_0, x_0\right)\right) \leq F\left(M_s\left(x_0, x_0, x_0\right)\right)$$

$$= F\left(\begin{array}{l} \alpha \max\left\{S\left(Ux_0, Ux_0, Tx_0\right), S\left(x_0, x_0, Tx_0\right), S\left(x_0, x_0, Ux_0\right)\right\} \\ +\mu \max\left\{\begin{array}{c} S\left(Ux_0, Ux_0, Tx_0\right), S\left(x_0, x_0, Tx_0\right), S\left(x_0, x_0, Ux_0\right), \\ \dfrac{S\left(x_0, x_0, Tx_0\right)\left[S\left(Ux_0, Ux_0, Tx_0\right) + S\left(x_0, x_0, Tx_0\right)\right]}{1 + S\left(Ux_0, Ux_0, Tx_0\right) + S\left(x_0, x_0, Tx_0\right)} \end{array}\right\} \end{array}\right)$$

$$= F\left(\left(\alpha + \mu\right) S\left(x_0, x_0, Tx_0\right)\right) = F\left(S\left(Tx_0, Tx_0, x_0\right)\right)$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx_0 = x_0$ olur. Sonuç olarak x_0 noktası T ve U dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır yani $Tx_0 = Ux_0 = x_0$ olur.

Burada $F_N^S -$daralma şartı ve Önerme 5.2.2 kullanılarak bir dönüşüm çifti için bir çakışma noktası elde edildi. $F_N^S -$daralma şartı, $F_M^S -$daralma şartı ve Önerme 5.2.4 kullanılarak da bir dönüşüm çifti için bir ortak sabit nokta sonucu elde edildi.

$F_N^S -$daralma ve $F_M^S -$daralma tanımları kullanılarak aşağıdaki teoremde ortak sabit çember problemine bir çözüm verilecektir.

5.2.5 Teorem $\left(X, S\right)$ bir $S-$metrik uzay, $T, U : X \to X$ iki dönüşüm ve ρ_s sayısı Bölüm 2'de $\left(2.2\right)$'deki gibi tanımlansın. Eğer $x_0 \in X$ ile $\left(T, U\right)$ dönüşüm çifti hem $F_N^S -$daralma hem de $F_M^S -$daralma ve her $x \in C_{x_0,\rho_s}^S$ için $S\left(Tx, Tx, x_0\right) = S\left(Ux, Ux, x_0\right) = \rho_s$ ise C_{x_0,ρ_s}^S çemberi T ve U dönüşümlerinin ortak sabit çemberidir yani her $x \in C_{x_0,\rho_s}^S$ için $Tx = Ux = x$ olur.

İspat: $x \in C_{x_0,\rho_s}^S$ olsun. İlk olarak x elemanının T ve U dönüşümlerinin bir çakışma noktası olduğu gösterilecektir. Önerme 5.2.4'ten $Tx_0 = Ux_0 = x_0$ ve dolayısıyla $S\left(Tx_0, Tx_0, x_0\right) + S\left(Ux_0, Ux_0, x_0\right) = 0$ elde edilir. Böylece $F_N^S -$daralma tanımından $Tx = Ux$ olur.

$C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberinin T ve U dönüşümlerinin ortak sabit çemberi olduğunu gösterelim. $Tx \neq x$ olduğunu kabul edelim. Önerme 5.2.4 ve $F^S_M -$daralma şartı hipotezinden

$$
\begin{aligned}
\tau + F\left(S\left(Tx,Tx,x\right)\right) &\leq F\left(M_s\left(x,x,x_0\right)\right) \\
&= F\left(\begin{array}{l}\alpha \max\left\{S\left(Ux,Ux,Tx_0\right), S\left(x_0,x_0,Tx_0\right), S\left(x,x,Ux\right)\right\} \\ +\mu \max\left\{\begin{array}{c} S\left(Ux,Ux,Tx_0\right), S\left(x_0,x_0,Tx_0\right), S\left(x_0,x_0,Ux\right), \\ \dfrac{S\left(x_0,x_0,Tx_0\right)\left[S\left(Ux,Ux,Tx_0\right)+S\left(x_0,x_0,Tx\right)\right]}{1+S\left(Ux,Ux,Tx_0\right)+S\left(x_0,x_0,Tx_0\right)}\end{array}\right\}\end{array}\right) \\
&= F\left(\alpha \max\left\{\rho_s, 0, S\left(x,x,Ux\right)\right\} + \mu \max\left\{\rho_s, 0, \rho_s, 0\right\}\right) \\
&= F\left(\alpha \max\left\{\rho_s, 0, S\left(x,x,Tx\right)\right\} + \mu \max\left\{\rho_s, 0, \rho_s, 0\right\}\right) \\
&\leq F\left(\left(\alpha+\mu\right) S\left(x,x,Tx\right)\right) \\
&= F\left(S\left(x,x,Tx\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki $\tau > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tx = x$ ve $C^S_{x_0,\rho_s}$ çemberi T ve U dönüşümlerinin ortak sabit çemberidir.

5.2.6 Sonuç $\left(X,S\right)$ bir $S-$metrik uzay, $T,U : X \to X$ iki dönüşüm ve ρ_s sayısı Bölüm 2'de $\left(2.2\right)$'deki gibi tanımlansın. Eğer $\left(T,U\right)$ dönüşüm çifti $x_0 \in X$ noktası ile hem $F^S_N -$ daralma hem de $F^S_M -$daralma ve $\rho < \rho_s$ olduğunda her $x \in C^S_{x_0,\rho}$ için $S\left(Tx,Tx,x_0\right) = S\left(Ux,Ux,x_0\right) = \rho$ oluyorsa T ve U dönüşümleri $C^S_{x_0,\rho}$ çemberini dolayısıyla $D^S_{x_0,\rho_s}$ diskini sabit bırakır yani her $x \in D^S_{x_0,\rho_s}$ için $Tx = Ux = x$ olur.

Aşağıda Teorem 5.2.5 için bir örnek verilecektir.

5.2.7 Örnek $X=[3,\infty)\cup\{0,1,2\}$ kümesi Örnek 2.14'te verilen $S-$metrik ile bir $S-$metrik uzay olsun. $T:X\to X$ dönüşümü her $x\in X$ için Örnek 5.1.7'deki gibi ve $U:X\to X$ dönüşümü her $x\in X$ için Örnek 5.1.7'deki $S:X\to X$ dönüşümü gibi tanımlansın. (T,U) dönüşüm çifti $F=\ln\left(x^2+x\right)$, $\tau=\ln 2$ ve $x_0=1$ ile hem F_N^S-daralma hem de F_M^S-daralmadır. Gerçekten, $S(Tx_0,Tx_0,x_0)+S(Ux_0,Ux_0,x_0)=0$ olduğu için $Tx=Ux$ olur. Dolayısıyla (T,U) dönüşüm çifti F_N^S-daralmadır. $x=4$ için $S(T4,T4,4)=4\neq 0$ ve her $x\in X\setminus\{0,1,2,4\}$ için $S(Tx,Tx,x)=1\neq 0$ bulunur. $M_s(4,4,1)$ ve $M_s(x,x,1)$ sayıları hesaplandığında

$$\begin{aligned}
M_s(4,4,1)&=\alpha\max\left\{\begin{matrix}S(U4,U4,T1),\\ S(1,1,T1),S(4,4,U4)\end{matrix}\right\}\\
&+\mu\max\left\{\begin{matrix}S(U4,,U4,T1),S(1,1,T1),S(1,1,U4),\\ \dfrac{S(1,1,T1)\left[S(U4,U4,T1)+S0(1,1,T4)\right]}{1+S(U4,U4,T1)+S(1,1,T1)}\end{matrix}\right\}\\
&=\alpha\max\{7,0,4\}+\mu\max\{7,0,7,0\}\\
&=(\alpha+\mu)7=7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ln 40\leq\ln 56\\
&\Rightarrow \ln 2+\ln 20\leq\ln 56\\
&\Rightarrow \tau+F\left(S(T4,T4,4)\right)\leq F\left(M_s(4,4,1)\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
M_s(x,x,1)&=\alpha\max\{S(Ux,Ux,T1),S(1,1,T1),S(x,x,Ux)\}\\
&+\mu\max\left\{S(Ux,Ux,T1),S(1,1,T1),S(1,1,Ux),\frac{S(1,1,T1)\left[S(Ux,Ux,T1)+S(1,1,Tx)\right]}{1+S(Ux,Ux,T1)+S(1,1,T1)}\right\}\\
&=\alpha\max\{|x|,0,1\}+\mu\max\{|x|,0,|x|,0\}\\
&=(\alpha+\mu)|x|=|x|
\end{aligned}$$

$3 \le |x|$
$\ln 4 \le \ln 12$
$\Rightarrow \ln 2 + \ln 2 \le \ln 12 \le F(|x|)$
$\Rightarrow \tau + F(S(Tx,Tx,x)) \le F(M_s(x,x,1))$

elde edilir. Sonuç olarak (T,U) çifti F_M^S-daralmadır. Dahası

$$\rho_s = \min\{S(Tx,Tx,x) : Tx \ne x\} = \min\{1,4\} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla T ve U dönüşümleri $C_{1,1}^S = \{0,2\}$ çemberini ve $D_{1,1}^S$ diskini sabit bırakır.

5.2.8 Uyarı Teorem 5.2.5'te hipotezdeki diğer şartlar sağlandığında (T,U) dönüşüm çiftinin her biri C_{x_0,ρ_s}^S çemberini C_{x_0,ρ_s}^S çemberine resmederse C_{x_0,ρ_s}^S çemberi T ve U dönüşümlerinin ortak sabit çemberi olur. T ve U dönüşümleri farklı x_0 noktaları ile hem F_N^S-daralma hem de F_M^S-daralma olabilir. Bu durumda ρ_s sayısı hipotezdeki gibi seçildiğinde T ve U dönüşümlerinin birden fazla ortak sabit çemberi olabilir, yani ortak sabit çember tek değildir. Ek olarak $(Fix(T) \cap Fix(U)) \setminus C_{x_0,\rho_s}^S$ kümesinin elemanları geometrik olarak çember teşkil etmeyebilir.

6. METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTALARDA SÜREKSİZLİK ÜZERİNE BİR UYGULAMA VE RHOADES'İN AÇIK PROBLEMİNİN BİR GENELLEMESİ

Bu bölümde (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $T:X\to X$ dönüşümü özel bir fonksiyon sınıfına ait bir fonksiyon olarak seçildiğinde $Fix(T)$ kümesinin bazı geometrik özellikleri ve $T:X\to X$ dönüşümünün $Fix(T)$ kümesinin elemanları üzerindeki sabit noktada süreksizlik kavramı ile ilgili durumu incelenecektir. $M_d(x,y)$ sayısı, metrik uzay ve dönüşüm üzerinde herhangi bir hipotez olmadan bir $T:X\to X$ dönüşümünün sabit noktalarındaki sürekliliğini ya da süreksizliğini belirlemek için kullanılabilir. İlk olarak aşağıdaki önerme verilecektir.

6.1 Önerme (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün $z\in Fix(T)$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{x\to z} M_d(x,z)=0$ olmasıdır.

6.2 Sonuç (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\lim\limits_{x\to z} M_d(x,z)$ limiti varsa T dönüşümünün $z\in Fix(T)$ noktasında süreksiz olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{x\to z} M_d(x,z)\neq 0$ olmasıdır. Eğer $\lim\limits_{x\to z} M_d(x,z)$ limiti yoksa T dönüşümü z noktasında süreksizdir.

Yinelenen sinir ağlarının dinamik analizinde aktivasyon fonksiyonlarının yapılarının önemli olduğu bilinmektedir [29]. Son zamanlarda süreksiz fonksiyonlar ve $T:X\to X$ dönüşümlerinin sabit noktaları, çeşitli sinir ağlarının çalışılmasında önem kazanmaktadır [29-34].

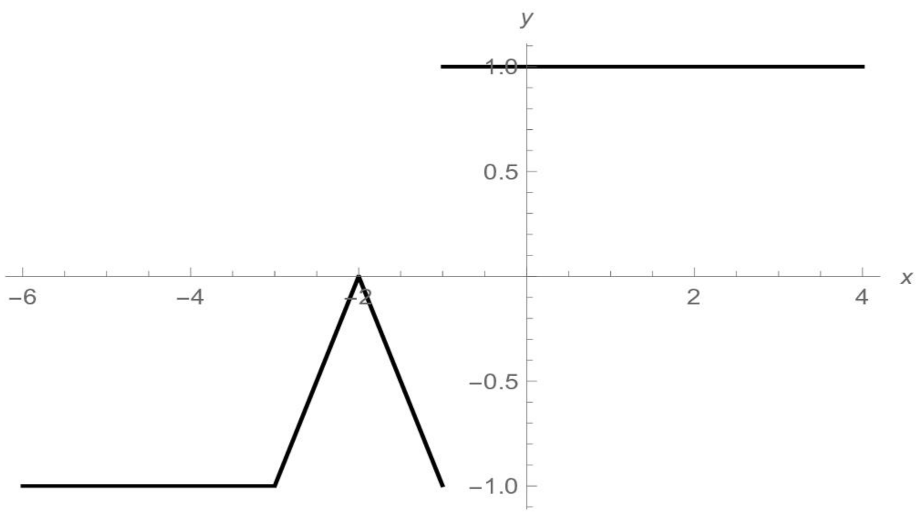
Süreksiz aktivasyon fonksiyonlarının bir genel sınıfı [32] numaralı kaynakta verildi. Bu sınıfın herhangi bir üyesi aşağıdaki yapıya sahiptir:

$$f(x)=\begin{cases} u & , \quad -\infty < x < p \\ l_1 x + c_1 & , \quad p \le x \le r \\ l_2 x + c_2 & , \quad r < x \le q \\ v & , \quad q < x < +\infty \end{cases}$$

olup burada p,r,q,u,v,l_1,l_2,c_1 ve c_2 reel sayıları $-\infty < p < r < q < +\infty$, $l_1 > 0$, $l_2 < 0$, $u = f(p) = f(q)$, $f(r) = l_2 r + c_2$ ve $v > f(r)$ koşullarını sağlayan değişkenlerdir.

Sinir ağlarının depolama kapasitesinin süreksiz aktivasyon fonksiyonları kullanılarak önemli ölçüde arttırılabileceği gösterilmiştir [32]. $u=-1$, $l_1=1$, $l_2=-1$, $c_1=2$, $c_2=-2$, $p=-3$, $r=-2$, $q=-1$ ve $v=1$ seçilerek bu sınıfa ait aşağıdaki süreksiz aktivasyon fonksiyonu elde edilir:

$$g(x)=\begin{cases} -1 & , \quad -\infty < x < -3 \\ x+2 & , \quad -3 \le x \le -2 \\ -x-2 & , \quad -2 < x \le -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < +\infty \end{cases}$$



Şekil 6.1: $g(x)$ süreksiz aktivasyon fonksiyonunun grafiği.

Buradan g fonksiyonunun sabit nokta kümesinin tek elemanlı olmadığı ve $Fix(g)=\{-1,1\}$ olduğu görülür. g fonksiyonunun sabit noktalarındaki sürekliliği $M_d(x,y)$ sayısı yardımıyla belirlenebilir. $\lim\limits_{x\to -1} M_d(x,-1)$ limiti mevcut olmadığından g fonksiyonu $x=-1$ noktasında süreksizdir. $\lim\limits_{x\to 1} M_d(x,1)=0$ olduğu için g fonksiyonu $x=1$ noktasında süreklidir. Şimdi $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre $C_{0,1}$ çemberini düşünelim. Açık olarak $C_{0,1}=Fix(g)$ olduğu görülür yani, g süreksiz aktivasyon fonksiyonunun sabit noktalar kümesi bir çemberdir ve g fonksiyonu $C_{0,1}$ üzerinde sürekli değildir. Bu noktada Rhoades'in açık problemi metrik uzaylarda herhangi bir T dönüşümü için $Fix(T)$ kümesinin bir çember içermesi durumuna genişletilebilir. Yani:

Sabit çember üreten fakat dönüşümü sabit çember üzerinde sürekliliğe zorlamayan daralma şartları mevcut mudur?

$M_d(x,y)$ sayısı kullanılarak Rhoades'in açık probleminin genişletilmiş versiyonuna bir çözüm verilecektir. Bunun için $M_d(x,y)$ sayısındaki y ikinci değişkenini $y=x_0$ olarak değiştiriyoruz:

$$
\begin{aligned}
M_d(x,x_0) &= \alpha \max\{d(x,Tx), d(x_0,Tx_0)\} \\
&+\beta \max\left\{d(x,x_0), d(x,Tx), d(x_0,Tx_0), \frac{[d(x,Tx_0)+d(x_0,Tx)]}{2}\right\} \\
&+\mu \max\left\{d(x,x_0), d(x,Tx), d(x_0,Tx_0), \frac{d(x_0,Tx_0)[d(x,Tx_0)+d(x_0,Tx)]}{1+d(x,Tx)+d(x_0,Tx_0)}\right\}
\end{aligned}
$$

6.3 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x\in X$ için $\gamma=\alpha+\beta+\mu$ olmak üzere $d(x,Tx)>0\Rightarrow \gamma d(x,Tx)\le\psi(M_d(x,x_0))$ şartını sağlayan bir $x_0\in X$ ve her bir $t>0$ için $\psi(t)<t$ olacak şekilde $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa T dönüşümüne $M_{x_0}-$tip daralma denir.

X üzerinde herhangi bir varsayım olmadan $M_{x_0}-$tip daralma yapısı kullanılarak aşağıdaki sabit çember teoremi verilecektir.

6.4 Teorem (X,d) bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve ρ_d sayısı Bölüm 2'de (2.1)'deki gibi tanımlansın. Eğer T dönüşümü $x_0\in X$ noktası ile bir $M_{x_0}-$tip daralma ve her $x\in C_{x_0,\rho_d}$ için $d(x_0,Tx)=\rho_d$ ise $x_0\in Fix(T)$ olup C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir yani $Fix(T)$ kümesi C_{x_0,ρ_d} çemberini ve bu çemberin merkezini içerir. T dönüşümünün herhangi bir $z\in C_{x_0,\rho_d}$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{x\to z}M_d(x,z)=0$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak $x_0\notin Fix(T)$ olduğunu kabul edelim. $M_{x_0}-$tip daralma tanımından

$$\gamma d(x_0,Tx_0)\le\psi(M_d(x_0,x_0))<M_d(x_0,x_0)=(\alpha+\beta+\mu)d(x_0,Tx_0)$$

elde edilir ki $\gamma=\alpha+\beta+\mu$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x_0\in Fix(T)$ olur. $x\in C_{x_0,\rho_d}$, $x\ne x_0$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. $x\notin Fix(T)$ olduğunu kabul edelim ve dolayısıyla buradan $d(Tx,x)>0$ olur. $M_{x_0}-$tip daralma tanımı ve ρ_d sayısının tanımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\gamma d(x,Tx) \leq \psi\left(M_d(x,x_0)\right) < M_d(x,x_0) \\
&= \alpha \max\left\{d(x,Tx),0\right\} + \beta \max\left\{d(x,x_0), d(x,Tx), 0, \frac{\left[d(x,x_0)+d(x_0,Tx)\right]}{2}\right\} \\
&+\mu \max\left\{d(x,x_0), d(x,Tx), 0, 0\right\} \\
&= \alpha \max\left\{d(x,Tx),0\right\} + \beta \max\left\{\rho_d, d(x,Tx), 0, \rho_d\right\} + \mu \max\left\{\rho_d, d(x,Tx), 0, 0\right\} \\
&< (\alpha+\beta+\mu) d(x,Tx) = \gamma d(x,Tx)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak her $x \in C_{x_0,\rho_d}$ için $Tx = x$ olur ve dolayısıyla C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit çemberidir. İspatın son bölümü Önerme 6.1'den açıktır.

6.5 Sonuç (X,d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve ρ_d sayısı Bölüm 2'de (2.1)'deki gibi tanımlansın. Eğer T dönüşümü $x_0 \in X$ noktası ile bir $M_{x_0}-$tip daralma ve her $x \in C_{x_0,\rho_d}$ için $d(x_0,Tx) \leq \rho_d$ ise D_{x_0,ρ_d} diski T dönüşümünün sabit diskidir yani $Fix(T)$ kümesi D_{x_0,ρ_d} diskini içerir.

6.6 Sonuç (X,d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve ρ_d sayısı Bölüm 2'de (2.1)'deki gibi tanımlansın. Eğer her $x \in C_{x_0,\rho_d}$ için $d(x_0,Tx) \leq \rho_d$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa ve her $x \in X$ için $d(x,Tx) > 0$ olması durumunda $\gamma d(x,Tx) < M_d(x,x_0)$ oluyorsa $Fix(T)$ kümesi C_{x_0,ρ_d} çemberini ve D_{x_0,ρ_d} diskini içerir.

Herhangi bir $C_{x_0,r}\left(r \leq \rho_d\right)$ çemberi Teorem 6.4'deki T dönüşümü tarafından sabit bırakılır. Ayrıca Örnek 6.7'nin ikinci kısmı Teorem 6.4'ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Aşağıda Teorem 6.4'ü sağlayan bir örnek verilecektir.

6.7 Örnek $(\mathbb{C},d)$, $d(u,v)=|u-v|$ metriği ile alışılmış metrik uzay olsun. Her $z\in\mathbb{C}$ için $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü

$$Tz=\begin{cases}\dfrac{z}{2} & , \quad |z|\geq 2\\ z & , \quad |z|<2\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buradan $\rho_d=\inf\{d(z,Tz):z\in\mathbb{C},z\neq Tz\}=\inf\left\{\frac{|z|}{2}:|z|\geq 2\right\}=1$ elde edilir. T dönüşümü $z_0=0$, $\psi(t)=\frac{9t}{13}$, $\alpha=\mu=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{3}$ ve $\gamma=\frac{4}{3}$ ile Teorem 6.4'ün şartlarını sağlar. Gerçekten, gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
M_d(z,0)&=\frac{1}{2}\max\{d(z,Tz),d(0,T0)\}\\
&+\frac{1}{3}\max\left\{d(z,0),d(z,Tz),d(0,T0),\frac{[d(z,T0)+d(0,Tz)]}{2}\right\}\\
&+\frac{1}{2}\max\left\{d(z,0),d(z,Tz),d(0,T0),\frac{d(0,T0)[d(z,T0)+d(0,Tz)]}{1+d(z,Tz)+d(0,T0)}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\max\left\{\left|\frac{z}{2}\right|,0\right\}+\frac{1}{3}\max\left\{|z|,\left|\frac{z}{2}\right|,0,\frac{3|z|}{4}\right\}+\frac{1}{2}\max\left\{|z|,\left|\frac{z}{2}\right|,0,0\right\}\\
&=\frac{|z|}{4}+\frac{|z|}{3}+\frac{|z|}{2}=\frac{13|z|}{12}
\end{aligned}$$

elde edilir. $d(z,Tz)>0\Rightarrow|z|\geq 2$ olduğundan $\gamma d(z,Tz)\leq\psi(M_d(z,0))$ koşulu sağlanır. T dönüşümü $C_{0,1}$ çemberini ve $D_{0,1}$ diskini sabit bırakır. Sonuç olarak $Fix(T)$, $C_{0,1}$ çemberini ve $D_{0,1}$ diskini içerir.

Eğer bir diğer $T_r:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü $r\in(0,\infty)$ olmak üzere her $z\in\mathbb{C}$ için

$$T_r z = \begin{cases} z_0 & , \quad |z - z_0| > r \\ z & , \quad |z - z_0| \le r \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $T_r z \ne z$ için

$$\begin{aligned}
\gamma|z - z_0| &= \gamma d(z, T_r z) \le \psi\left(M_d(z, z_0)\right) < M_d(z, z_0) \\
&= \alpha \max\left\{d(z, T_r z), d(z_0, T_r z_0)\right\} \\
&+\beta \max\left\{d(z, z_0), d(z, T_r z), d(z_0, T_r z_0), \frac{\left[d(z, T_r z_0) + d(z_0, T_r z)\right]}{2}\right\} \\
&+\mu \max\left\{d(z, z_0), d(z, T_r z), d(z_0, T_r z_0), \frac{d(z_0, T_r z_0)\left[d(z, T_r z_0) + d(z_0, T_r z)\right]}{1 + d(z, T_r z) + d(z_0, T_r z_0)}\right\} \\
&= (\alpha + \beta + \mu)|z - z_0| = \gamma|z - z_0|
\end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece T_r dönüşümü $z_0 \in \mathbb{C}$ ile bir $M_{x_0} -$tip daralma değildir. Fakat T_r dönüşümü $C_{z_0,r}$ çemberini ve $D_{z_0,r}$ diskini sabit bırakır.

6.8 Örnek $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$ metriği ile alışılmış metrik uzay olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$Sx = \begin{cases} x + 1 & , \quad x > 1 \\ x & , \quad x \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Açık olarak $\rho_d = 1$ olur ve S dönüşümü $x_0 = 0$, $\psi(t) = \frac{6t}{7}$, $\alpha = 0$, $\mu = \beta = \frac{1}{2}$ ve $\gamma = 1$ ile Teorem 6.4'ün şartlarını sağlar. Gerçekten, gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$d\left(x,Sx\right)>0\Rightarrow d\left(x,Sx\right)=\left|x-Sx\right|=1$$

$$\begin{aligned}M_d\left(x,0\right)&=0\max\left\{d\left(x,Sx\right),d\left(0,S0\right)\right\}\\&+\frac{1}{2}\max\left\{d\left(x,0\right),d\left(x,Sx\right),d\left(0,S0\right),\frac{\left[d\left(x,S0\right)+d\left(0,Sx\right)\right]}{2}\right\}\\&+\frac{1}{2}\max\left\{d\left(x,0\right),d\left(x,Sx\right),d\left(0,S0\right),\frac{d\left(0,S0\right)\left[d\left(x,S0\right)+d\left(0,Sx\right)\right]}{1+d\left(x,Sx\right)+d\left(0,S0\right)}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\max\left\{\left|x\right|,1,0,\frac{\left|x\right|+\left|x+1\right|}{2}\right\}+\frac{1}{2}\max\left\{\left|x\right|,1,0,0\right\}\\&=\frac{\left|x\right|+\left|x+1\right|}{4}+\frac{\left|x\right|}{2}\\&=\frac{3\left|x\right|+\left|x+1\right|}{4}\end{aligned}$$

bulunur. $\left|x\right|>1$ olduğundan $3\left|x\right|>3$ ve $\left|x+1\right|>2$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{3\left|x\right|+\left|x+1\right|}{4}>\frac{5}{4}$$

olur ve buradan $\gamma d\left(x,Sx\right)\leq\psi\left(M_d\left(x,0\right)\right)$ bulunur. Sonuç olarak $C_{0,1}=\left\{-1,1\right\}$ çemberi S dönüşümünün sabit çemberidir. Üstelik $\lim_{x\to-1}M_d\left(x,-1\right)=0$ ve dolayısıyla S dönüşümü -1 sabit noktasında süreklidir. $\lim_{x\to1^-}M_d\left(x,1\right)=0$ ve $\lim_{x\to1^+}M_d\left(x,1\right)\neq0$ olduğu için $\lim_{x\to1}M_d\left(x,1\right)$ limiti yoktur ve dolayısıyla S dönüşümü 1 sabit noktasında süreksizdir.

S dönüşümü $x_0=-1$, $\psi\left(t\right)=\frac{3t}{4}$, $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=0$, $\mu=\frac{1}{2}$ ve $\gamma=\frac{3}{4}$ ile de $M_{x_0}-$tip daralmadır. Gerçekten, gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$M_d(x,-1)=\frac{1}{4}\max\{d(x,Sx),d(-1,S-1)\}$$
$$0\max\left\{d(x,-1),d(x,Sx),d(-1,S-1),\frac{[d(x,S-1)+d(-1,Sx)]}{2}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\max\left\{d(x,-1),d(x,Sx),d(-1,S-1),\frac{d(-1,S-1)[d(x,S-1)+d(-1,Sx)]}{1+d(x,Sx)+d(-1,S-1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\max\{1,0\}+\frac{1}{2}\max\{|x+1|,1,0,0\}$$
$$=\frac{|x+1|}{2}+\frac{1}{4}$$

ve

$$|x|>1\Rightarrow\frac{|x+1|}{2}+\frac{1}{4}>\frac{5}{4}$$

elde edilir. Böylece $\gamma d(x,Sx)\leq\psi(M_d(x,-1))$ bulunur. Açık olarak $C_{-1,1}=\{-2,0\}$ çemberi S dönüşümünün sabit çemberidir ve üstelik $D_{-1,1}\subset Fix(S)$ olur. $\lim_{x\to-2}M_d(x,-2)=0$ ve $\lim_{x\to 0}M_d(x,0)=0$ olduğundan S dönüşümü $C_{-1,1}=\{-2,0\}$ çemberi üzerinde süreklidir.

6.9 Uyarı 1) Son örnekten görülüyor ki bir sabit çemberin ya da sabit diskin ρ_d yarıçapı Teorem 6.4'deki x_0 merkezinden bağımsızdır.

2) Teorem 6.4'e göre eğer T dönüşümü $x_0\in X$ noktası ile bir $M_{x_0}-$tip daralma ve T dönüşümü C_{x_0,ρ_d} çemberini C_{x_0,ρ_d} çemberine resmederse C_{x_0,ρ_d} çemberi T dönüşümünün sabit bir çemberidir. Burada T dönüşümü farklı $x_0\in X$ noktaları ile bir $M_{x_0}-$tip daralma olabilir. Bu noktada ρ_d sayısı hipotezdeki gibi seçildiğinde T dönüşümünün birden fazla sabit çemberi bulunabilir. Ek olarak $Fix(T)\setminus C_{x_0,\rho_d}$ kümesinin elemanları geometrik olarak çember teşkil etmeyebilir.

7. KAPALI BAĞINTI YARDIMIYLA YENİ SABİT NOKTA SONUÇLARI

Bu bölümde farklı bir teknik kullanılarak metrik uzaylarda yeni sabit nokta sonuçları verilecektir. Bu tekniğin esası, bir kapalı bağıntı yardımıyla elde edilen koşullar kullanmaktır. Bu teknik [43-47] numaralı kaynaklarda metrik uzaylarda ve [36] numaralı kaynakta $S-$metrik uzaylarda bazı sabit nokta sonuçları elde etmek için kullanıldı.

7.1 Tanım M, $M:\mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}_+$ şeklindeki altı değişkenli bütün sürekli fonksiyonların ailesi olsun. $k \in [0,1)$ için aşağıdaki koşullar göz önünde bulundurulsun:

i. Her $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ için eğer $z \le x + y$ olduğunda $y \le M(x, x, 0, z, y, y)$ oluyorsa $y \le kx$ olur.

ii. Her $y \in \mathbb{R}_+$ için eğer $y \le M(y, 0, y, y, 0, y)$ oluyorsa $y = 0$ olur.

iii. Eğer $i \le 6$ olduğunda her $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}_+$ için $x_i \le y_i + z_i$ eşitsizliği sağlanırsa $M(x_1, ..., x_6) \le M(y_1, ..., y_6) + M(z_1, ..., z_6)$ olur.

Ek olarak her $y \in \mathbb{R}_+$ için $M(0, 0, 0, y, y, y) \le ky$ olur.

7.2 Uyarı i. ve iii. koşullardaki k katsayısı farklı olabilir. i. ve iii. koşullardaki katsayılara sırasıyla k_1 ve k_3 denirse $k = \max\{k_1, k_3\}$ sayısı kullanılarak her iki madde için de katsayıların eşit olduğu farz edilebilir.

Aşağıda Tanım 7.1'in koşullarını sağlayan örnekler verilecektir.

7.3 Örnek $M:\mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, $a, b, c \le 1$ ve $d > 6$ olmak üzere

$$M(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \frac{[t_1 + at_2 + b(t_3 + t_4) + c(t_5 + t_6)]}{d}$$

olarak tanımlansın. M fonksiyonunun Tanım 7.1'deki koşulları sağladığını gösterelim.

i. Her $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ için $z \le x + y$ olduğunu varsayalım.

$$y \le M(x,x,0,z,y,y) = \frac{\left[x+ax+b(0+z)+c(2y)\right]}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\left[x+ax+bz+2cy\right]}{d} \le \frac{\left[x+ax+b(x+y)+2cy\right]}{d}$$

$$\Rightarrow y \le \frac{\left[x+ax+bx+by+2cy\right]}{d}$$

$$\Rightarrow dy-by-2cy \le x+ax+bx$$

$$\Rightarrow y(d-b-2c) \le (1+a+b)x$$

$$\Rightarrow y \le \frac{(1+a+b)}{(d-b-2c)}x$$

bulunur ki $\frac{(1+a+b)}{(d-b-2c)} < 1$ olduğu için $k = \frac{(1+a+b)}{(d-b-2c)}$ olarak alınırsa $y \le kx$ olur.

ii. Her $y \in \mathbb{R}_+$ için $y \le M(y,0,y,y,0,y) = \frac{\left[y+2by+cy\right]}{d}$ olsun. Buradan $y \le \frac{(1+2b+c)}{d}y$ bulunur ki $\frac{(1+2b+c)}{d} < 1$ olduğu için $y = 0$ olur.

iii. $i \le 6$ olduğunda her $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}_+$ için $x_i \le y_i + z_i$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$M(x_1,...,x_6) = \frac{\left[x_1+ax_2+b(x_3+x_4)+c(x_5+x_6)\right]}{d}$$

$$\le \frac{\left[y_1+z_1+a(y_2+z_2)+b(y_3+z_3+y_4+z_4)+c(y_5+z_5+y_6+z_6)\right]}{d}$$

$$\le \frac{\left[y_1+ay_2+b(y_3+y_4)+c(y_5+y_6)\right]}{d} + \frac{\left[z_1+az_2+b(z_3+z_4)+c(z_5+z_6)\right]}{d}$$

$$= M(y_1,...,y_6) + M(z_1,...,z_6)$$

bulunur. Ek olarak her $y \in \mathbb{R}_+$ için $M(0,0,0,y,y,y) = \frac{by+2cy}{d} = \left(\frac{b+2c}{d}\right)y$ bulunur ki $\left(\frac{b+2c}{d}\right) < 1$ olduğundan k sayısı $\left[\frac{b+2c}{d},1\right)$ aralığından seçilirse $M(0,0,0,y,y,y) \le ky$ olur.

7.4 Örnek $M : \mathbb{R}_+^6 \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ ve $a,b,c \ge 6$ olmak üzere

$$M\left(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6\right)=\frac{t_6}{a}+\frac{t_5}{b}+\frac{\max\left\{t_1+t_2,t_3+t_4,t_5+t_6\right\}}{c}$$

olarak tanımlansın. M fonksiyonunun Tanım 7.1'deki koşulları sağladığını gösterelim.

i. Her $x,y,z\in\mathbb{R}_+$ için $z\leq x+y$ olduğunu varsayalım. $y\leq M\left(x,x,0,z,y,y\right)=\frac{y}{a}+\frac{y}{b}+\frac{\max\left\{2x,z,2y\right\}}{c}$ olsun. Eğer $\max\left\{2x,z,2y\right\}=z$ olursa $2x<z$ ve $2y<z$ olacağı için $x+y<z$ bulunur ki bu da $z\leq x+y$ kabulüne çelişki oluşturur. Eğer $\max\left\{2x,z,2y\right\}=2y$ olursa $y\leq\frac{\left(a+b\right)}{ab}y+\frac{2}{c}y=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\right)y$ elde edilir ki $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\right)<1$ olduğu için $y=0$ olur ve $y\leq kx$ eşitsizliği sağlanır. Eğer $\max\left\{2x,z,2y\right\}=2x$ olursa

$$\begin{aligned}
&y\leq\frac{\left(a+b\right)}{ab}y+\frac{2}{c}x\\
&\Rightarrow y-\frac{\left(a+b\right)}{ab}y\leq\frac{2}{c}x\\
&\Rightarrow y\left(1-\frac{\left(a+b\right)}{ab}\right)\leq\frac{2}{c}x\\
&\Rightarrow y\left(\frac{ab-\left(a+b\right)}{ab}\right)\leq\frac{2}{c}x\\
&\Rightarrow y\leq\left(\frac{2ab}{c\left(ab-\left(a+b\right)\right)}\right)x
\end{aligned}$$

bulunur ki

$$\begin{aligned}
&6\leq a\Rightarrow 6bc\leq abc\Rightarrow bc\leq\frac{abc}{6}\\
&6\leq b\Rightarrow 6ac\leq abc\Rightarrow ac\leq\frac{abc}{6}\\
&6\leq c\Rightarrow 6ab\leq abc\Rightarrow ab\leq\frac{abc}{6}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
&2ab+ac+bc\leq \frac{4}{6}abc<abc\\
&\Rightarrow 2ab<abc-ac-bc\\
&\Rightarrow \frac{2ab}{abc-ac-bc}=\frac{2ab}{c\left(ab-\left(a+b\right)\right)}<1
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $k=\dfrac{2ab}{c\left(ab-\left(a+b\right)\right)}$ olarak alınırsa $y\leq kx$ olur.

ii. Her $y\in\mathbb{R}_+$ için $y\leq M\left(y,0,y,y,0,y\right)=\dfrac{y}{a}+\dfrac{\max\{y,2y,y\}}{c}=\dfrac{y}{a}+\dfrac{2y}{c}=\left(\dfrac{c+2a}{ac}\right)y$ olsun. $\dfrac{1}{a}\leq\dfrac{1}{6}$ ve $\dfrac{2}{c}\leq\dfrac{2}{6}$ olduğundan $\dfrac{c+2a}{ac}<1$ bulunur. Dolayısıyla buradan $y=0$ elde edilir.

iii. $i\leq 6$ olduğunda her $x_i,y_i,z_i\in\mathbb{R}_+$ için $x_i\leq y_i+z_i$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&M\left(x_1,...,x_6\right)=\frac{x_6}{a}+\frac{x_5}{b}+\frac{\max\left\{x_1+x_2,x_3+x_4,x_5+x_6\right\}}{c}\\
&\leq\frac{y_6+z_6}{a}+\frac{y_5+z_5}{b}+\frac{\max\left\{y_1+y_2+z_1+z_2,y_3+y_4+z_3+z_4,y_5+y_6+z_5+z_6\right\}}{c}\\
&\leq\frac{y_6}{a}+\frac{y_5}{b}+\frac{\max\left\{y_1+y_2,y_3+y_4,y_5+y_6\right\}}{c}+\frac{z_6}{a}+\frac{z_5}{b}+\frac{\max\left\{z_1+z_2,z_3+z_4,z_5+z_6\right\}}{c}\\
&=M\left(y_1,...,y_6\right)+M\left(z_1,...,z_6\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ek olarak her $y\in\mathbb{R}_+$ için $\dfrac{y}{a}\leq\dfrac{y}{6}$, $\dfrac{y}{b}\leq\dfrac{y}{6}$ ve $\dfrac{y}{c}\leq\dfrac{y}{6}$ olduğundan $M\left(0,0,0,y,y,y\right)=\dfrac{y}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{\max\{0,y,2y\}}{c}=\dfrac{y}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{2y}{c}\leq\dfrac{4y}{6}$ bulunur. $k=\dfrac{4}{6}$ seçilirse $M\left(0,0,0,y,y,y\right)\leq ky$ olur.

Aşağıda Tanım 7.1 kullanılarak metrik uzaylar için genel bir sabit nokta teoremi verilecektir.

7.5 Teorem $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay, $T:X\rightarrow X$ bir dönüşüm ve her $x,y,z\in X$ ve bir $M\in\mathrm{M}$ için

$$d(Tx,Ty) \le M\left(d(x,y), d(x,Tx), d(y,Tx), d(x,Ty), d(y,Ty), d(Tx,Ty)\right) \tag{7.1}$$

olsun.

1. $x_0 \notin Fix(T)$ olmak üzere eğer M fonksiyonu i. şartı sağlarsa T dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Ek olarak herhangi bir $x_0 \in X$ ve x sabit noktası için $d(x,Tx_n) \le \frac{k^{n+1}}{1-k} d(x_0,Tx_0)$ olur.
2. Eğer M fonksiyonu ii. şartı sağlarsa ve T dönüşümünün bir sabit noktası varsa sabit nokta tektir.
3. Eğer M fonksiyonu iii. şartı sağlarsa ve T dönüşümünün bir x sabit noktası varsa T dönüşümü x noktasında süreklidir.

İspat: İlk olarak $d(x,Tx_n) \le \frac{k^{n+1}}{1-k} d(x_0,Tx_0)$ eşitsizliğinin doğruluğunu ve T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ olsun. (7.1) eşitsizliğinden

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) = d(Tx_n,Tx_{n+1}) \le M\begin{pmatrix} d(x_n,x_{n+1}), d(x_n,x_{n+1}), d(x_{n+1},x_{n+1}), \\ d(x_n,x_{n+2}), d(x_{n+1},x_{n+2}), d(x_{n+1},x_{n+2}) \end{pmatrix}$$

bulunur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n,x_{n+2}) \le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2})$$

olur. M fonksiyonu i. şartı sağladığı için

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \le kd(x_n,x_{n+1}) \le k^{n+1}d(x_0,x_1) \tag{7.2}$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ vardır. Sonuç olarak her $n < m$ için üçgen eşitsizliği ve (7.2) eşitsizliği kullanılarak

$$d\left(x_n,x_m\right)\le d\left(x_n,x_{n+1}\right)+d\left(x_{n+1},x_m\right)$$
$$\le\left[k^n+k^{n+1}+...+k^{m-1}\right]d\left(x_0,x_1\right)$$
$$\le\frac{k^n}{1-k}d\left(x_0,x_1\right)$$

bulunur. $n,m\to\infty$ için limit alınırsa $d\left(x_n,x_m\right)\to 0$ elde dilir. Buradan $\left\{x_n\right\}$ dizisinin $\left(X,d\right)$ tam metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu kanıtlanmış olur. Bu takdirde $x_n\to x\in X$ olur. Ek olarak $m\to\infty$ için limit alınırsa

$$d\left(x_n,x\right)\le\frac{k^n}{1-k}d\left(x_0,x_1\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$d\left(Tx_n,x\right)\le\frac{k^{n+1}}{1-k}d\left(x_0,Tx_0\right)$$

olur.

x noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu kanıtlayalım. (7.1) eşitsizliği kullanılarak

$$d\left(x_{n+1},Tx\right)=d\left(Tx_n,Tx\right)$$
$$\le M\left(d\left(x_n,x\right),d\left(x_n,Tx_n\right),d\left(x,Tx_n\right),d\left(x_n,Tx\right),d\left(x,Tx\right),d\left(Tx_n,Tx\right)\right)$$
$$=M\left(d\left(x_n,x\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right),d\left(x,x_{n+1}\right),d\left(x_n,Tx\right),d\left(x,Tx\right),d\left(x_{n+1},Tx\right)\right)$$

bulunur. $M\in\mathrm{M}$ göz önünde bulundurulup ve $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$d\left(x,Tx\right)\le M\left(0,0,0,d\left(x,Tx\right),d\left(x,Tx\right),d\left(x,Tx\right)\right)$$

olur. M fonksiyonu i. şartı sağladığından dolayı $d\left(x,Tx\right)\le k.0=0$ bulunur. Buradan $x=Tx$ elde edilir.

İkinci olarak T dönüşümünün sabit noktasının tekliğini gösterelim. x, y noktaları T dönüşümünün sabit noktaları olsun. $x = y$ olduğunu gösterelim. (7.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& d(x,y) = d(Tx,Ty) \\
& \leq M\left(d(x,y), d(x,Tx), d(y,Tx), d(x,Ty), d(y,Ty), d(Tx,Ty)\right) \\
& = M\left(d(x,y), 0, d(x,y), d(x,y), 0, d(x,y)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. M fonksiyonu ii. şartı sağladığından $d(x,y) = 0$ bulunur. Buradan $x = y$ elde edilir.

Son olarak x noktası T dönüşümünün sabit noktası ve $y_n \to x \in X$ olduğunda $Ty_n \to Tx$ olduğunu kanıtlayalım. (7.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& d(x,Ty_n) = d(Tx,Ty_n) \\
& \leq M\left(d(x,y_n), d(x,Tx), d(y_n,Tx), d(x,Ty_n), d(y_n,Ty_n), d(Tx,Ty_n)\right) \\
& = M\left(d(x,y_n), 0, d(y_n,x), d(x,Ty_n), d(y_n,Ty_n), d(x,Ty_n)\right)
\end{aligned}$$

olur. M fonksiyonu iii. şartı sağladığından ve

$$d(y_n,Ty_n) \leq d(y_n,x) + d(x,Ty_n)$$

üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& d(x,Ty_n) \leq M\left(d(x,y_n), 0, d(x,y_n), 0, d(x,y_n), d(x,y_n)\right) \\
& +M\left(0,0,0, d(x,Ty_n), d(x,Ty_n), d(x,Ty_n)\right) \\
& \leq M\left(d(x,y_n), 0, d(x,y_n), 0, d(x,y_n), d(x,y_n)\right) + kd(x,Ty_n)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$d(x,Ty_n) \leq \frac{1}{1-k} M\left(d(x,y_n), 0, d(x,y_n), 0, d(x,y_n), d(x,y_n)\right)$$

olur. $M \in \mathrm{M}$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x,Ty_n) \to 0$ elde edilir ve $Ty_n \to x = Tx$ olur.

7.6 Sonuç Teorem 7.5'te T dönüşümünün sabit noktasının varlığı M fonksiyonunun Tanım 7.1'deki i. şartı sağlamasına bağlıdır. Eğer T dönüşümünün sabit noktası var ve M fonksiyonu Tanım 7.1'deki ii. şartı sağlarsa T dönüşümünün sabit noktası tektir. Eğer T dönüşümünün sabit noktası var ve M fonksiyonu Tanım 7.1'deki iii. şartı sağlarsa T dönüşümü sabit noktada süreklidir.

Aşağıda bazı sabit nokta sonuçları verilecektir. Sonuç 7.7 ve Sonuç 7.8, Örnek 7.3 ve Örnek 7.4'ten dolayı Teorem 7.5'in şartlarını sağladığı açıktır.

7.7 Sonuç (X,d) bir tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $a,b,c,d\in\mathbb{R}^+$, $a,b,c\leq 1$ ve $d>6$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\frac{d(x,y)+ad(x,Tx)+b\left[d(y,Tx)+d(x,Ty)\right]+c\left[d(y,Ty)+d(Tx,Ty)\right]}{d}$$

olsun. Bu takdirde T dönüşümünün tek $x\in X$ sabit noktası vardır. Ek olarak T dönüşümü sabit noktada süreklidir.

7.8 Sonuç (X,d) bir tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $a,b,c\geq 6$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\frac{d(Tx,Ty)}{a}+\frac{d(y,Ty)}{b}$$
$$+\frac{\max\{d(x,y)+d(x,Tx),d(y,Tx)+d(x,Ty),d(y,Ty)+d(Tx,Ty)\}}{c}$$

olsun. Bu takdirde T dönüşümünün tek $x\in X$ sabit noktası vardır. Ek olarak T dönüşümü sabit noktada süreklidir.

7.9 Sonuç (X,d) bir tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $N_{**}(x,y)$ sayısı katsayıları $\alpha+\beta+\mu\in(0,1)$, $\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}_+$ ve $\theta\in[0,1)$ olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_{**}(x,y)=\alpha\max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\}$$
$$+\beta\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\theta\frac{[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{2}\right\}\qquad .$$
$$+\mu\max\left\{d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\frac{d(y,Tx)}{1+d(y,Tx)},\frac{d(Tx,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\}$$

Her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq N_{**}(x,y)$$

olsun. Bu takdirde T dönüşümünün tek $x\in X$ sabit noktası vardır. Ek olarak T dönüşümü sabit noktada süreklidir.

İspat: Teorem 7.5'deki hipotezden

$$M(x,y,z,s,t,u)=\alpha\max\{y,t\}+\beta\max\left\{x,y,t,\theta\frac{s+z}{2}\right\}$$
$$+\mu\max\left\{y,t,\frac{x}{1+x},\frac{z}{1+z},\frac{u}{1+u}\right\}$$

bulunur. Aslında M fonksiyonu süreklidir. İlk olarak $z\leq x+y$ eşitsizliği ile

$$M(x,x,0,z,y,y)=\alpha\max\{x,y\}$$
$$+\beta\max\left\{x,x,y,\theta\frac{z+0}{2}\right\}$$
$$+\mu\max\left\{x,y,\frac{x}{1+x},\frac{0}{0+1},\frac{y}{1+y}\right\}$$
$$=\alpha\max\{x,y\}+\beta\max\left\{x,y,\theta\frac{z}{2}\right\}+\mu\max\{x,y\}$$
$$=(\alpha+\beta+\mu)\max\{x,y\}$$

bulunur. Böylece, eğer $y\leq M(x,x,0,z,y,y)$ ise $y\leq(\alpha+\beta+\mu)x$ ya da $y\leq(\alpha+\beta+\mu)y$ olur. Dolayısıyla T dönüşümü Tanım 7.1'deki i. şartı sağlar.

Eğer

$$y \le M(y,0,y,y,0,y)$$
$$= \alpha \max\{0,0\} + \beta \max\left\{y,0,0,\theta \frac{y+y}{2}\right\} + \mu \max\left\{0,0,\frac{y}{1+y},\frac{y}{1+y},\frac{y}{1+y}\right\}$$
$$= \beta y + \mu \frac{y}{1+y}$$

ise $\beta y + \mu \frac{y}{1+y} < y$ olduğundan $y = 0$ bulunur. Dolayısıyla T dönüşümü Tanım 7.1'deki ii. şartı sağlar.

Son olarak eğer $i \le 6$ için $x_i \le y_i + z_i$ olursa

$$M(x_1,...,x_6) = \alpha \max\{x_2,x_5\} + \beta \max\left\{x_1,x_2,x_5,\theta \frac{x_3+x_4}{2}\right\}$$
$$+\mu \max\left\{x_2,x_5,\frac{x_1}{1+x_1},\frac{x_3}{1+x_3},\frac{x_6}{1+x_6}\right\}$$
$$\le \alpha \max\{y_2+z_2, y_5+z_5\}$$
$$+\beta \max\left\{y_1+z_1, y_2+z_2, y_5+z_5, \theta \frac{y_3+z_3+y_4+z_4}{2}\right\}$$
$$+\mu \max\left\{y_2+z_2, y_5+z_5, \frac{y_1+z_1}{1+y_1+z_1}, \frac{y_3+z_3}{1+y_3+z_3}, \frac{y_6+z_6}{1+y_6+z_6}\right\}$$
$$\le \alpha \max\{y_2,y_5\} + \alpha \max\{z_2,z_5\}$$
$$+\beta \max\left\{y_1,y_2,y_5,\theta \frac{y_3+y_4}{2}\right\} + \beta \max\left\{z_1,z_2,z_5,\theta \frac{z_3+z_4}{2}\right\}$$
$$+\mu \max\left\{y_2,y_5,\frac{y_1}{1+y_1},\frac{y_3}{1+y_3},\frac{y_6}{1+y_6}\right\}$$
$$+\mu \max\left\{z_2,z_5,\frac{z_1}{1+z_1},\frac{z_3}{1+z_3},\frac{z_6}{1+z_6}\right\}$$
$$= M(y_1,...,y_6) + M(z_1,...,z_6)$$

olur. Ek olarak

$$M(0,0,0,y,y,y)=\alpha\max\{0,y\}$$
$$+\beta\max\left\{0,0,y,\theta\frac{y+0}{2}\right\}$$
$$+\mu\max\left\{0,y,\frac{0}{1+0},\frac{0}{1+0},\frac{y}{1+y}\right\}$$
$$=(\alpha+\beta+\mu)y$$

bulunur. Sonuç olarak $\alpha+\beta+\mu<1$ olduğu için T dönüşümü Tanım 7.1'deki iii. şartını sağlar.

7.10 Örnek $[0,1]\subset\mathbb{R}$'de alışılmış metriği göz önüne alalım. $N_{**}(x,y)$ sayısının katsayılarını $\alpha=\frac{1}{3},\beta=\mu=0$ olacak şekilde seçelim. $N_{**}(x,y)=\frac{1}{3}\max\{d(x,Tx),d(y,Ty)\}$ olur. Her $x\in[0,1]$ için $Tx=\frac{x}{4}$ olsun. Gerçekten gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right|=\frac{|x-y|}{4},$$
$$d(Tx,x)=\left|\frac{x}{4}-x\right|=\frac{3|x|}{4},$$
$$d(Ty,y)=\left|\frac{y}{4}-y\right|=\frac{3|y|}{4}$$

bulunur. Buradan $\frac{|x-y|}{4}=d(Tx,Ty)\le N_{**}(x,y)=\frac{1}{3}\max\left\{\frac{3|x|}{4},\frac{3|y|}{4}\right\}=\frac{\max\{|x|,|y|\}}{4}$ elde edilir ki $y\le x\Rightarrow x-y\le x\Rightarrow|x-y|\le|x|$ ve $x\le y\Rightarrow y-x\le y\Rightarrow|y-x|\le|y|$ olduğundan seçilen katsayılara göre Sonuç 7.9'un şartı sağlanır. T dönüşümünün tek $x=0$ sabit noktası vardır.

7.11 Örnek $[0,1]\subset\mathbb{R}$'de alışılmış metriği göz önüne alalım. $N_{**}(x,y)$ sayısının katsayılarını $\beta=\frac{1}{2},\alpha=\mu=0$ ve $\theta=\frac{1}{2}$ olacak şekilde seçelim. $N_{**}(x,y)=\frac{1}{2}\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{1}{2}\left[\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right]\right\}$ olur. Her $x\in[0,1]$ için $Tx=\frac{x}{3}$ olsun. Gerçekten gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{x}{3}-\frac{y}{3}\right|=\frac{|x-y|}{3},$$
$$d(x,y)=|x-y|,$$
$$d(Tx,x)=\left|\frac{x}{3}-x\right|=\frac{2|x|}{3},$$
$$d(Ty,y)=\left|\frac{y}{3}-y\right|=\frac{2|y|}{3},$$
$$\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}=\frac{\left|x-\frac{y}{3}\right|+\left|y-\frac{x}{3}\right|}{2}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{|x-y|}{3}=d(Tx,Ty)\leq N_{**}(x,y)=\frac{1}{2}\max\left\{|x-y|,\frac{2|x|}{3},\frac{2|y|}{3},\frac{1}{2}\left[\frac{\left|x-\frac{y}{3}\right|+\left|y-\frac{x}{3}\right|}{2}\right]\right\}$$

elde edilir ki seçilen katsayılara göre Sonuç 7.9'un şartı sağlanır. T dönüşümünün tek $x=0$ sabit noktası vardır.

7.12 Uyarı $[0,1]\subset\mathbb{R}$'de alışılmış metriği göz önüne alalım. $N_{**}(x,y)$ sayısının katsayıları Örnek 7.10'daki gibi, T dönüşümü ise Örnek 7.11'deki gibi seçilsin. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$d(Tx,Ty)=\frac{|x-y|}{3},$$
$$d(Tx,x)=\frac{2|x|}{3},$$
$$d(Ty,y)=\frac{2|y|}{3}$$

olur. Buradan

$$\frac{|x-y|}{3}=d(Tx,Ty)\leq N_{**}(x,y)=\frac{1}{3}\max\left\{\frac{2|x|}{3},\frac{2|y|}{3}\right\}$$
$$\frac{|x-y|}{3}\leq\frac{2}{9}\max\{|x|,|y|\}$$

bulunur ki $x=0$ ve $y=1$ için $\frac{1}{3}=\frac{|x-y|}{3}>\frac{2}{9}\max\{|x|,|y|\}=\frac{2}{9}$ olduğundan her $x,y\in[0,1]$ için Sonuç 7.9'un şartı sağlanmaz.

7.13 Örnek $[0,1]\subset\mathbb{R}$'de alışılmış metriği göz önüne alalım. $N_{**}(x,y)$ sayısının katsayılarını $\alpha,\beta=0,\mu=\frac{1}{6}$ olacak şekilde seçelim. $N_{**}(x,y)=\frac{1}{6}\max\left\{d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\frac{d(y,Tx)}{1+d(y,Tx)},\frac{d(Tx,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\}$ olur. Her $x\in[0,1]$ için $Tx=\frac{x}{8}$ olsun. Gerçekten gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{x}{8}-\frac{y}{8}\right|=\frac{|x-y|}{8},$$
$$d(Tx,x)=\left|\frac{x}{8}-x\right|=\frac{7|x|}{8},$$
$$d(Ty,y)=\left|\frac{y}{8}-y\right|=\frac{7|y|}{8},$$
$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$
$$\frac{d(y,Tx)}{1+d(y,Tx)}=\frac{\left|y-\frac{x}{8}\right|}{1+\left|y-\frac{x}{8}\right|}$$
$$\frac{d(Tx,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}=\frac{\frac{|x-y|}{8}}{1+\frac{|x-y|}{8}}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{|x-y|}{8}=d(Tx,Ty)\le N_{**}(x,y)=\frac{1}{6}\max\left\{\frac{7|x|}{8},\frac{7|y|}{8},\frac{|x-y|}{1+|x-y|},\frac{\left|y-\frac{x}{8}\right|}{1+\left|y-\frac{x}{8}\right|},\frac{\frac{|x-y|}{8}}{1+\frac{|x-y|}{8}}\right\}$$

elde edilir ki $y\le x\Rightarrow x-y\le x\Rightarrow |x-y|\le|x|<\frac{7|x|}{6}$ ve $x\le y\Rightarrow y-x\le y\Rightarrow |y-x|\le|y|<\frac{7|y|}{6}$ olduğundan seçilen katsayılara göre Sonuç 7.9'un şartı sağlanır. T dönüşümünün tek $x=0$ sabit noktası vardır.

7.14 Uyarı $[0,1]\subset\mathbb{R}$'de alışılmış metriği göz önüne alalım. $N_{**}(x,y)$ sayısının katsayılarını Örnek 7.11'deki gibi seçelim ve T dönüşümünü ise

$$Tx = \begin{cases} \frac{3}{4} &, \quad x \in (0,1] \\ \frac{1}{4} &, \quad x = 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

olarak tanımlayalım. $x = 0$ için $Tx = \frac{1}{4}$ ve $y = \frac{1}{8}$ için $Ty = \frac{3}{4}$ olur. Dolayısıyla buradan

$$\left|\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right| = d(Tx,Ty) \geq \frac{1}{2} \max\left\{ d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\left[\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \max\left\{ \left|0 - \frac{1}{8}\right|, \left|0 - \frac{1}{4}\right|, \left|\frac{1}{8} - \frac{3}{4}\right|, \frac{1}{2}\frac{\left|0 - \frac{3}{4}\right| + \left|\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right|}{2} \right\} = \frac{1}{2} \max\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{32}\right\} = \frac{5}{16}$$

olur. Buradan Sonuç 7.9'un şartının sağlanmadığı görülür. Benzer şekilde $N_{**}(x,y)$ sayısının katsayıları Örnek 7.13'deki gibi olsun ve (7.3)'te verilen T dönüşümünü göz önüne alalım. $x = 0$ için $Tx = \frac{1}{4}$ ve $y = \frac{1}{8}$ için $Ty = \frac{3}{4}$ olduğundan tekrar hesaplama yapılırsa

$$\left|\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right| = d(Tx,Ty) \geq \frac{1}{6} \max\left\{ \left|0 - \frac{1}{4}\right|, \left|\frac{1}{8} - \frac{3}{4}\right|, \frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}}, \frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}}, \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{6} \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{5}{48}$$

olur. Buradan Sonuç 7.9'un şartının sağlanmadığı görülür.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak sabit çember ve sabit disk problemleri metrik ve $S-$metrik uzaylar üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra $\mathbb{R}$ 'de uygun bir metrik tanımlayarak sonsuz elemanlı bir çember örneği verilmiştir. Çeşitli $S-$metrik uzay örnekleri verilip bu uzaylarda çember kavramı incelenmiştir.

Tezin daha sonraki bölümlerinde sabit çember ve sabit disk problemleri çerçevesinde metrik ve $S-$metrik uzaylarda yeni daralma tanımları verilip bu daralma tanımları kullanılarak sabit çember ve sabit disk problemlerine yeni çözümler getirilmiştir.

Metrik ve $S-$metrik uzaylarda Rhoades'in açık problemine yeni çözümler verilmiştir.

Ortak sabit çember ve ortak sabit disk problemlerine yeni çözümler verilmiştir.

Yapay sinir ağlarında kullanılan bir fonksiyon sınıfı yardımıyla Rhoades'in açık probleminin bir genellemesi verilip bir uygulaması araştırılmıştır.

Son bölümde ise kapalı bağıntı yardımıyla yeni sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

Bu çalışmadan hareketle sabit çember ve sabit disk problemleri çerçevesinde yeni daralma şartları araştırılıp bu daralma şartları yardımıyla sabit çember ve sabit disk problemlerine yeni çözümler verilebilir, $C_{x_0,r}$ ya da $C^S_{x_0,r}$ bir T dönüşümünün sabit çemberi olmak üzere $Fix(T)\setminus C_{x_0,r}$ ya da $Fix(T)\setminus C^S_{x_0,r}$ kümesinin geometrik yapısı ve bu kümeleri boş küme yapan daralma şartları çalışılabilir. Jachymski'nin tekniğinden başka teknikler araştırılarak Rhoades'in açık problemine yeni çözümler verilebilir. Sabit çember ve sabit disk problemlerinin yeni uygulamaları üzerinde çalışılabilir.

9. KAYNAKLAR

[1] N. Özgür, N. Taş, "Some fixed-circle theorems on metric spaces", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 42, no 4, pp. 1433-1449, 2019, doi.org/10.1007/s40840-017-0555-z

[2] N. Özgür, N. Taş, "Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle", *AIP Conference Proceedings*, 2018, doi.org/10.1063/1.5020497

[3] N. Özgür, N. Taş, U. Çelik, "New fixed-circle results on $S-$metrik spaces", *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 9, no 2, pp. 10-23, 2017.

[4] N. Özgür, N. Taş, "Fixed-circle problem on $S-$metric spaces with a geometric viewpoint", *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics*, vol. 34, no 3, pp. 459-472, 2019, doi.org/10.22190/FUMI1903459O

[5] N. Mlaiki, N. Taş, N. Özgür, "On the fixed-circle problem and Khan type contractions", *Axioms*, vol. 7, no 4, 2018, doi.org/10.3390/axioms7040080

[6] N. Mlaiki, U. Çelik, N. Taş, N. Özgür, A. Mukheimer, "Wardowski type contractions and the fixed-circle problem on $S-$metric spaces", *Journal of Mathematics*, vol. 2018, Art. ID 9127486, 2018, doi.org/10.1155/2018/9127486

[7] N. Taş, N. Özgür, N. Mlaiki, "New types of F_C-contractions and the fixed-circle problem", *Mathematics*, vol. 6, no 10, 2018, doi.org/10.3390/math6100188

[8] N. Taş, "Suzuki-Berinde type fixed-point and fixed-circle results on $S-$metric spaces", *Journal of Linear and Topological Algebra*, vol. 7, no 3, pp. 233-244, 2018.

[9] N. Mlaiki, N. Özgür, N. Taş, "New fixed-circle results related to F_c-contractive and F_c-expanding mappings on metric spaces", arXiv:2101.10770v1 [math.GN].

[10] N. Özgür, "Fixed-disc results via simulation functions", *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no 6, pp. 2794-2805, 2019.

[11] R.P. Pant, N. Özgür, N. Taş, "On discontinuity problem at fixed point", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 43, no 1, pp. 499-517, 2020, doi.org/10.1007/s40840-018-0698-6

[12] R.P. Pant, N. Özgür, N. Taş, "Discontinuity at fixed points with applications", *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, vol. 26, no 4, pp. 571-589, 2019, doi.org/10.36045/bbms/1576206358

[13] U. Çelik, N. Özgür, "On the fixed-circle problem", *Facta Universitatis (NIS)*, vol. 35, no 4, 2020.

[14] S. Sedghi, N. Shobe, A. Aliouche, "A generalization of fixed point theorems in $S-$

metric spaces", *Matematicki Vesnik*, vol. 64, no 3, pp. 258-266, 2012.

[15] B.E. Rhoades, "A Comparison of various definitions of contractive mappings", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 226, pp. 257-290, 1977.

[16] B.E. Rhoades, "Contractive definitions and continuity", *Contemporary Mathematics*, vol. 72, pp. 233-245, 1988, doi.org/10.1090/conm/072/956495

[17] R.P. Pant, "Discontinuity and fixed points", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 240, no 1, pp. 284-289, 1999, doi.org/10.1006/jmaa.1999.6560

[18] R.K. Bisht, R.P. Pant, "A remark on discontinuity at fixed point", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 445, no 2, pp. 1239-1242, 2017, doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.02.053

[19] R.K. Bisht, R.P. Pant, "Contractive definitions and discontinuity at fixed point", *Applied General Topology*, vol. 18, no 1, pp. 173-182, 2017, doi.org/10.4995/agt.2017.6713

[20] R.K. Bisht, V. Rakočević, "Fixed points of convex and generalized convex contractions", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, vol. 69, pp. 21-28, 2018, doi.org/10.1007/s12215-018-0386-2

[21] R.K. Bisht, V. Rakočević, "Generalized Meir-Keeler type contractions and discontinuity at fixed point", *Fixed Point Theory*, vol. 19, no 1, pp. 57-64, 2018, doi.org/10.24193/fpt-ro.2018.1.06

[22] R.K. Bisht, "$(\varepsilon-\delta)$ conditions and fixed point theorems", *Tbilisi Mathematical Journal*, vol. 12, no 3, pp. 39-49, 2019, doi.org/10.32513/tbilisi/1569463233

[23] R.K. Bisht, R.P. Pant, V. Rakočević, "Proinov contractions and discontinuity at fixed point", *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 20, no 1, pp. 131-137, 2019, doi.org/10.18514/MMN.2019.2277

[24] R.K. Bisht, N. Özgür, "Geometric properties of discontinuous fixed point set of $(\varepsilon-\delta)$ contractions and applications to neural networks", *Aequationes Mathematicae*, vol. 94, pp. 847-863, 2020, doi.org/10.1007/s00010-019-00680-7

[25] R. Kannan, "Some results on fixed points-2", *American Mathematical Monthly*, vol. 76, no 4, pp. 405-408, 1969, doi.org/10.1080/00029890.1969.12000228

[26] A. Pant, R.P. Pant, "Fixed points and continuity of contractive maps", *Filomat*, vol. 31, no 11, pp. 3501-3506, 2017, doi.org/10.2298/FIL1711501P

[27] N. Taş, N. Özgür, "A new contribution to discontinuity at fixed point", *Fixed Point Theory*, vol. 20, no 2, pp. 715-728, 2019, doi.org/10.24193/fpt-ro.2019.2.47

[28] U. Çelik, N. Özgür, “A new solution to the discontinuity problem on metric spaces” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no 4, pp. 1115-1126, 2020, doi.org/10.3906/mat-1912-80

[29] Y.J. Huang, S.J. Chen, X.H. Yang, J. Xiao, “Coexistence and local Mittag-Leffler stability of fractional-order recurrent neural networks with discontinuous activation functions”, *Chinese Physics B*, vol. 28, no 4, 2019, doi.org/10.1088/1674-1056/28/4/040701

[30] L.J. Cromme, I. Diener, “Fixed point theorems for discontinuous mapping”, *Mathematical Programming*, vol. 51, no 2, pp. 257-267, 1991, doi.org/10.1007/BF01586937

[31] L.J. Cromme, “Fixed point theorems for discontinuous functions and applications”, *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysis*, Part 3 (Athens, 1996). Nonlinear Analysis 1997, vol. 30, no 3, pp. 1527-1534, doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00058-8

[32] X. Nie, W.X. Zheng, “On Stability of Multiple Equilibria for Delayed Neural Networks with Discontinuous Activation Functions”, In: Proceeding of the 34th Chinese Control Conference; Hangzhou, China; 2015, doi.org/10.1109/ChiCC.2015.7260185

[33] N. Özdemir, B.B. Iskender, N. Özgür, “Complex valued neural network with Möbius activation function”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no 12, pp. 4698-4703, 2011, doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.03.005

[34] M.J. Todd, “The computation of fixed points and applications”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 124. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1976.

[35] D. Wardowski, “Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2012, article 94, 2012.

[36] S. Sedghi, N.V. Dung, “Fixed point theorems on $S-$metric spaces”, *Matematicki Vesnik*, vol. 66, no. 1, pp. 113-124, 2014.

[37] N.T. Hieu, N.T. Ly, N.V. Dung, “A Generalization of Ciric Quasi-Contractions for Maps on $S-$metric Spaces”, *Thai Journal of Mathematics*, vol. 13, no 2, pp. 369-380, 2015.

[38] N. Özgür, N. Taş, “Some new contractive mappings on $S-$metric spaces and their relationships with the mapping (S25)”, *Mathematical Sciences*, vol. 11, no. 1, pp. 7-

16, 2017.

[39] A. Gupta, “Cyclic contraction on $S-$metric space”, *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 3, no 2, pp. 119-130, 2013.

[40] A. Tomar, R. Sharma, “Some coincidence and common fixed point theorems concerning $F-$contraction and applications”, *Journal of the international mathematical virtual institute*, vol. 8, pp. 181-198, 2018.

[41] J. Jachymski, “Common fixed point theorems for some families of maps”, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 25, no 9, pp. 925-937, 1994.

[42] J. Jachymski, “Equivalent conditions and Meir-Keeler type theorems”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 194, no 1, pp. 293-303, 1995, doi.org/10.1006/jmaa.1995.1299

[43] H. K. Pathak, R. Rodríguez-López, R. K. Verma, “A common fixed point theorem using implicit relation and property (E.A) in metric spaces”, *Filomat*, vol. 21, no 2, pp. 211-234, 2007.

[44] V. Popa, M. Mocanu, “Altering distance and common fixed points under implicit relations”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 38, no 3, pp. 329-337, 2009.

[45] İ. Altun, D. Türkoğlu, “Some fixed point theorems for weakly compatible mappings satisfying an implicit relation”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 13, no 4, pp. 1291-1304, 2009.

[46] M. Imdad, S. Kumar, M. S. Khan, “Remarks on some fixed point theorems satisfying implicit relations”, *Radovi Matematički*, vol. 11, pp. 1-9, 2002.

[47] T. V. An, N. V. Dung, V. T. L. Hang, “General fixed point theorems on metric spaces and 2-metric spaces”, *Filomat*, vol. 28, no 10, pp. 2037-2045, 2014.

[48] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Mathematica Online Standard (Academic), Champaign, IL, 2020.

Yayın Listesi

[1] U. Çelik, N. Özgür, “A new solution to the discontinuity problem on metric spaces”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no 4, pp. 1115-1126, 2020, doi.org/10.3906/mat-1912-80 **[Tezden türetilmiştir]**
[2] U. Çelik, N. Özgür, “On the fixed-circle problem”, *Facta Universitatis (NIS)*, vol. 35, no 4, 2020. **[Tezden türetilmiştir]**
[3] U. Çelik, N. Özgür, “Fixed point sets of self-mappings with a geometric viewpoint” submitted. **[Tezden türetilmiştir]**
[4] U. Çelik, N. Özgür, “On the geometry of common fixed points of self-mappings” submitted. **[Tezden türetilmiştir]**