T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR VE YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

MERVE NUR BAĞCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ramazan AKGÜN (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, MART-2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Yaklaşım Problemleri**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Merve Nur BAĞCI

ÖZET

ÇOK DEĞIŞKENLI FONKSIYONLAR VE YAKLAŞIM PROBLEMLERI
YÜKSEK LISANS TEZI
MERVE NUR BAĞCI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI (TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN) BALIKESIR, MART - 2021

Bu tezde çok değişkenli fonksiyonlar ve yaklaşım problemleri incelenmiştir.
Tez dört ana bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş bölümüdür. Yaklaşım problemlerinin tarihi gelişimi yer almaktadır.
İkinci bölümde tezde kullanılan tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilmiştir.
Üçüncü bölüm ise yedi alt bölümden oluşmaktadır. İlk üç alt bölümde Çok değişkenli fonksiyonların fark operatörleri, düzgünlük modülleri ve yönlü türevlerinden bahsedilmiş sonraki bölümlerde integral metrik tanımlanmış trigonometrik polinomlarda yaklaşımın düz ve ters teoremleri verilip son olarak da L_p uzaylarında bazı yaklaşım teoremleri incelenmiştir.
Son bölüm sonuç bölümüdür.

ANAHTAR KELİMELER: Fark operatörleri, en iyi yaklaşım sayısı, çok değişkenli fonksiyonlar, yaklaşım problemleri**.**

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 60

ABSTRACT

MULTIVARIBLE FUNCTIONS AND APPROXIMATION PROBLEMS
MSC THESIS
MERVE NUR BAĞCI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)
BALIKESIR, MARCH - 2021

In this thesis multi-variable functions and approximation problems are examined. The thesis consists of four main parts.
First part is the introduction in which historial development of the approximation problems takes places.
In the second part there are the non-prover definitions and theorems.
The third part consist of seven sub-parts .In the first three of the sub-parts the variation operators, difference operator, directional derivates are explanied, straight and inverse theorems of appraximation in trigonometric polynomials is given and last of all, in L^p spaces some approximation theorem is discussed.
The last part is the conlusion part.

KEYWORDS: Difference operatör, approximation problems, multi-variable functions, best approximation.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 60

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

:=	: Tanım olarak eşittir
N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$	: n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$	: Öyle $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ vardır ki $c_1 x \le y \le c_2 x$
$\mathbf{L_q}$	: q boyutlu Lebesgue uzayı
$\mathbf{S_k(f;x)}$	: Fourier serilerinin kısmi toplamı
$\mathbf{w(f;u,v)_{L_q}}$	: Düzgünlük modülü
$\mathbf{\Delta^r_{(i),u} f(x_1,...,x_n)}$	: Kısmi fark operatörü
$\mathbf{\Delta^{r_1,...,r_n}_{u_1,...,u_n} f(x_1,...,x_n)}$	: Karışık fark operatörü
$\mathbf{\Delta^r_{u_1,...u_n} f(x_1,...,x_n)}$	: Tam fark operatörü
$\mathbf{E_n(f)_p}$	: En iyi yaklaşım sayısı
$\mathbf{\Delta^\alpha_h f(\times)}$	: Ölçülebilir fonksiyon
$\mathbf{P^m_n}$	: En fazla m değişkenli karmaşık dereceli polinomlar sınıfı
$\mathbf{T^m_n}$	: En fazla n dereceli m dereceli değişkenli polinomlar
$\mathbf{Lip^*(\beta,\rho)}$	: Lipschitz sınıfı

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimine başladığımdan itibaren yolumu aydınlatan desteğini ve rehberliğini esirgemeyen her daim beni yüreklendiren değerli hocam Prof. Dr. Ramazan AKGÜN' e çok teşekkür ederim.

Tez yazım sürecinde çalışmalarımızı beraber yürüttüğümüz zorlukları birlikte atlattığımız arkadaşım Uğur YİĞİTASLAN'a ve yardımlarını bizden esirgemeyen Ahmet Hamdi AVŞAR'a teşekkür ederim.

Her daim bana inanan canım annem ve babam'a, lisansüstü eğitime başlamam için beni cesaretlendiren sevgili kardeşim Ayşenur YETER'e, en yakın arkadaşım Merve SAGİT'e ve sıkıntılı zamanlarımda da hayatı güzel kılan nişanlım Ali GEYİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2021 **Merve Nur BAĞCI**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, ortaya çıkışı 19. yüzyıla kadar dayanan ve bu yüzyıldan günümüze kadar dünyadaki birçok matematikçi tarafından çalışılan matematiksel analizin önemli araştırma alanlarından biridir. Sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur.

Yaklaşım probleminin inşa edilmesinde öncelikle yoğun alt uzayın varlığının gösterildiği nitelik problemleri araştırılmaktadır. Sonrasında yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemi ve yaklaşım teorisinin düz-ters teoremleri yer almaktadır. Bu alanda daha kolay hesaplanabilen fonksiyonlarla yaklaşım durumları incelenmektedir.

Kesirli düzgünlük modülleri ile yaklaşım problemleri yakın zamanda 2π periyodik fonksiyonunun çeşitli uzaylarında çeşitli değişkenlerin fonksiyonları için birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu sonuçların bazılarına bu tez çalışmasında yer verilmiştir. Tüm bu çalışmalarda matematikçiler tamsayı dereceli düzgünlük modüllerini dikkate almışlardır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Tanım (Öklid uzayı)

$\mathbb{R}^n$ üzerinde iç çarpım ile norm arasındaki bağıntı $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ şeklindedir. Buna göre

$$\|.\| = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

olarak tanımlanan norm fonksiyonu ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir. $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ normuna göre iç-çarpım uzayları normlu uzaylardır. Ancak tersi doğru değildir [1].

2.2 Tanım (En İyi Yaklaşım Hatası)

Değişkenlerin her birine göre 2π periyodu olan $f(t_1,...,t_m)$ fonksiyonunu düşünürsek $t_1,...,t_m$ değişkenlerine göre $n_1,...,n_m$ dereceli trigonometrik polinomlarca en iyi yaklaşım hatası olan $E^*_{n_1,...n_m}(f)_{L_q}$

$$E^*_{n_1,...n_m}(f)_{L_q} =$$

$$= \inf_{T_{n_1,...,n_m}} \left[\int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} \left| f(t_1,...,t_m) - T_{n_1,...,n_m}(t_1,...,t_m) \right|^{\frac{1}{q}} dt_1...dt_m \right]^{\frac{1}{q}} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır [2].

2.3 Tanım (Bernstein Eşitsizliği)

Eğer $T_{mn}(x,y)$ x'e göre derecesi $\leq m$ ve y ye göre derecesi $\leq n$ olan iki değişkenli trigonometrik polinomu ise, herhangi bir $q(1 \leq q \leq \infty)$ ve $0 < h < \dfrac{\pi}{m}, 0 < \delta < \dfrac{\pi}{n}$ için

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^{k+1} T_{mn}(x,y)}{\partial x^k \partial x^l} \right|^q dxdy \right\}^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{2\sin mh} \right)^k \left\{ \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^l \Delta_n^k T_{mn}(x,y)}{\partial y^l} \right| dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{m}{2\sin mh} \right)^k \left(\frac{m}{2\sin n\delta} \right)^l \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Delta_h^{(k)} \Delta_\delta^{(l)} T_{mn}(x,y) \right|^q dxdy \right\}^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Özel halde ise

$$\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{k+1}T_{mn}(x,y)}{\partial x^k \partial x^l}\right|^q dxdy\right\} \le m^k n^l \left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|T_{mn}(x,y)\right|^q dxdy\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{2.2}$$

Berntein eşitsizliği elde edilir [3].

2.4 Tanım (Nikolski Eşitsizliği)

Herhangi bir $q(1 \le q \le \infty)$ için

$$\left\|T_{n_1,\dots,n_m}\right\|_q \le \left(T_{n_1,\dots,n_m}\right)_q \le \prod_{k=1}^{m} 1+\left(\frac{2n_k\pi}{N_k}\right)\left\|T_{n_1,\dots,n_m}\right\|_q \tag{2.3}$$

Eğer $1 \le q \le q' \le \infty$ ise

$$\left\|T_{n_1,\dots,n_m}\right\|_{q'} \le C^m \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{n_k q_0 + 1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}\left\|T_{n_1,\dots,n_m}\right\|_q . \tag{2.4}$$

2.5 Tanım (Parseval Özdeşliği)

2π periyotlu $f(x)$ periyodik fonksiyonu Lebesgueye göre $[0,2\pi]$ aralığında integrallenebilir ve L_2 uzayına ait ise yani

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

ise bu durumda,eğer $a_0, a_k, b_k (k = 1,\dots,\infty)$ f nin Fourier serilerinin katsayıları ise,

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx .$$

Benzer bir eşitlik çok değişkenli periyodik fonksiyonlar içinde geçerlidir [2].

2.6 Tanım (Marcinkiewicz Çarpan Teoremi)

$1 < p < \infty$, $f \in L_p^0\left(\mathrm{T}^2\right)$ nin Fourier serisi:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\Big(a_{n_1,n_2} c\text{os}\, n_1 x \cos n_2 y + b_{n_1,n_2} \sin n_1 x \cos n_2 y + c_{n_1,n_2} +$$

$$+\cos n_1 x \sin n_2 y + d_{n_1,n_2} \sin n_1 x \sin n_2 y) \qquad (2.5)$$

$$=: \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1,n_2}(x,y).$$

$\left(\vartheta_{n_1,n_2}\right)_{n_1,n_2=1}^{\infty}$ sayı dizisi sonlu bir M ve her $n_i \in \square, i=1,2$ için

$$\left|\vartheta_{n_1,n_2}\right| \le M \,,$$

$$\sum_{m_1=2^{n_1-1}+1}^{2^{n_1}} \left|\vartheta_{m_1,n_2} - \vartheta_{m_1+1,n_2}\right| \le M \,,$$

$$\sum_{m_2=2^{n_2-1}+1}^{2^{n_2}} \left|\vartheta_{n_1,m_2} - \vartheta_{n_1,m_2+1}\right| \le M \,,$$

$$\sum_{m_1=2^{n_1-1}+1}^{2^{n_1}} \sum_{m_2=2^{n_2-1}+1}^{2^{n_2}} \left|\vartheta_{m_1,m_2} - \vartheta_{m_1+1,n_2} - \vartheta_{m_1,n_2+1} + \vartheta_{n_1+1,n_2+1}\right| \le M$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda

$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2}(x,y)$ trigonometrik serisi bir $\phi \in L_p^0\left(\mathrm{T}^2\right)$ fonksiyonunun Fourier serisidir ve

$$\|\phi\|_{L_p\left(\mathrm{T}^2\right)} \,\square\, \|f\|_{L_p\left(\mathrm{T}^2\right)} \,.$$

elde edilebilir [3].

2.7 Tanım(Düzgünlük Modülü)

W , $f(x,y)$ fonksiyonlarının düzgün yakınsaklık anlamında kompakt kümesi olsun. Burada $f(x,y)$ fonksiyonu x ve y değişkenlerinin kapalı sınırlı dikdörtgensel $\bar{G}$ bölgesinde sürekli fonksiyon olsun. Eğer kompakt kümeler için sonlu ε-net üzerinde Hausdorff'un teoreminden elde edilen

$$w(f;u,v) = \sup_{\substack{|x_1-x_2|\le u, |y_1-y_2|\le v \\ (x_1,y_1)\in\bar{g}, (x_2,y_2)\in\bar{g}}} \left| f(x_1-y_1) - f(x_2-y_2) \right| \tag{2.6}$$

biçiminde verilen süreklilik modülünü düşünürsek bu durumda

$$u,v \to 0, \ \sup_{f\in W} w(f;u,v) \to 0 \tag{2.8}$$

elde edilir. Eğer

$$w(f;u,v)_{L_q} = \sup_{|h|\le u, |\eta|\le v} \left\{ \iint_{\bar{G}} \left| f(x+h, y+\eta) - f(x,y) \right|^q dxdy \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{2.7}$$

biçiminde verilen süreklilik modülünü kullanırsak $\bar{G}$ dikdörtgensel periyotları üzerinde L_q sınıfına ait olan ve değişkenlerin her biri için periyodik olan $f(x,y)$ fonksiyonu W kümesinin kompaktlığını benzer şekilde formüle etmek mümkündür [3].

2.8 Tanım (Vallee-Poussin Toplamı)

Vallee-Poussin fonksiyonlar toplamı:

$$V_{n-p}^{n}(f;x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f;x)$$

şeklinde ifade edilir [4].

2.9 Tanım (M.Riesz Teoremi)

Varsayalım ki $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ ve bu fonksiyonun Fourier serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \ A_0(x) = \frac{a_0}{2},$$
$$A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \ (n = 1,2,...)$$

olsun. Bu durumda eşlenik fonksiyonu

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_h^{\pi} \left\{ f(x-t) - f(x+t) \right\} \left(2ctg\,\frac{t}{2} \right)^{-1} dt$$

ve eşlenik Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n(x) = -a_n \sin nx + b_n \cos nx \ (n = 1,2,...)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca eşlenik Fourier serisi L_p uzayındadır ve

$$\left\| \tilde{f}(x) \right\|_{L_p} \leq M_p \left\| f(x) \right\|_{L_p}$$

eşitsizliği doğrudur [5].

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 n-Değişkenli Fonksiyonlarda Fark Operatörleri

Varsayalım ki $\mathbb{R}^n$ n boyutlu Öklid uzayındaki bir G bölgesinin her $M(x_1,...,x_n)$ noktasında tanımlı bir $f(x_1,...,x_n)$ fonksiyonu olsun. Burada

$$M_u(x_1+vu_1,...,x_n+vu_n),$$
$$M_u^{(i)}(x_1,...,x_{i-1},x_i+vu,x_{i+1},...x_n), \quad i=1,2,...,n \quad v=1,2,...n$$

noktaları G kümesinin elemanı olmak üzere aşağıdaki diferansiyel formları göz önüne alalım:

$$\Delta_{(i),u}^{r} f(x_1,...,x_n)=\sum_{v=o}^{r}(-1)^{r-v}\binom{r}{v} f(x_{1,...,}x_{i-1},x_i+vu,x_{i+1},...,x_n) \tag{3.1}$$

$$\Delta_{u_1,...,u_n}^{r_1,...,r_n} f(x_1,...,x_n)=\Delta_{(1),u_1}^{r_1}...\Delta_{(n),u_n}^{r_n} f(x_1,...,x_n) \tag{3.2}$$

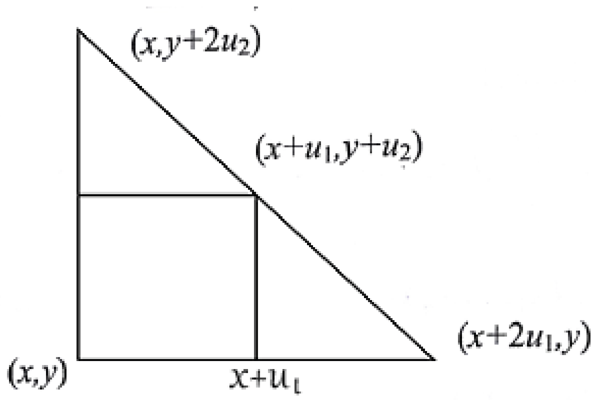
$$\Delta_{u_1,...u_n}^{r} f(x_1,...,x_n)=\sum_{v=0}^{r}(-1)^{r-v}\binom{r}{v} f(x_1+vu_1,...,x_n+vu_n) \tag{3.3}$$

(3.1) de tanımlanan kısmi fark $f(x_1,...,x_n)$ nin (davranışın karakteristik özellikleri için diğer sabit değişken ile) x_i nci değişkenine göre farktır ve farklar sabit olarak düşünülür.

$\mathbb{R}^n$ uzayında her yöne göre fark alınması (3.3) deki tam fark yardımı ile olur. Değişkenlerin tümü için ayrı ayrı adımlar alınarak $f(x_1,...,x_n)$ nin özellikleri (3.2)deki karışık fark alınarak oluşturulur.

$n=2$ durumu için birkaç özdeşlik verelim. Bu özdeşlikler r' ye göre karışık farkın kısmı fark ve tam farka göre çeşitli ifadelerinden oluşur [6].

1) Varsayalım $r=2$ olsun. Bu durumda Şekil 3.1 de görüldüğü gibi,

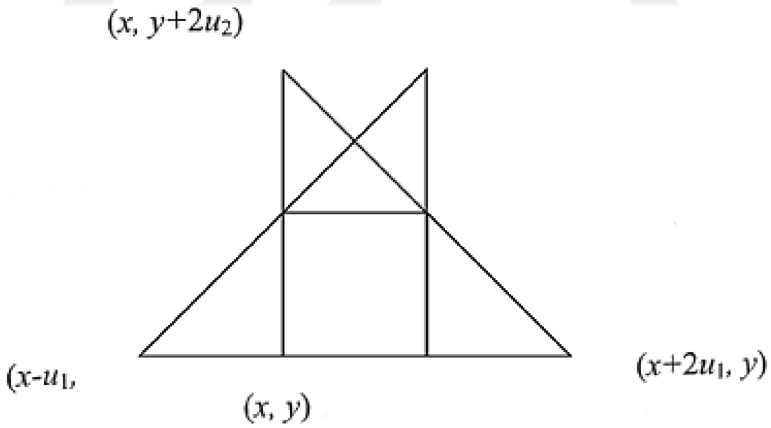


Şekil 3.1: r = 2 durumu için karışık farkın kısmi ve tam farka göre ifadesini gösterir.

Aşağıdaki özdeşlik doğrudur:

$$2\Delta_{u_1,u_2}^{r_1,r_2} f(x,y) = \Delta_{(1),u_1}^{2} f(x,y) + \Delta_{(2),u_2}^{2} f(x,y) - \Delta_{-u_1,u_2}^{2} f(x,y)\,. \tag{3.4}$$

Özdeşlik (3.4) ve Şekil 3.2 yardımıyla

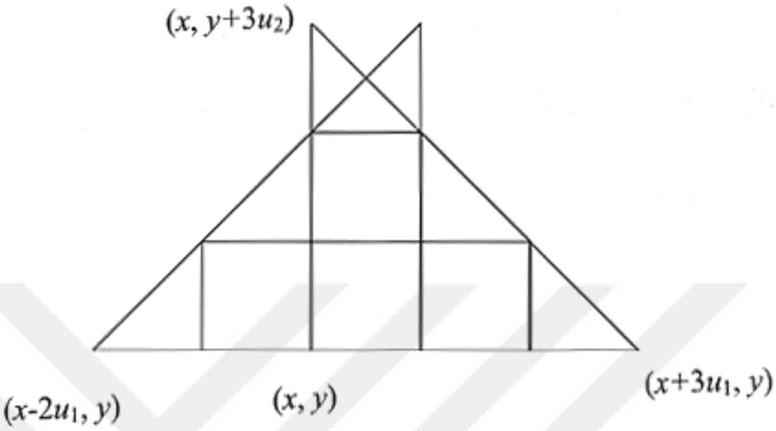


Şekil 3.2: r = 2 durumu için karışık farkın kısmi ve tam farka göre ifadesinin doğruluğunu gösterir**.**

Aşağıdaki özdeşliğin doğruluğu görülebilir:

$$
\begin{aligned}
&4\Delta^{1,1}_{u_1 u_2} f(x,y) = \Delta^2_{-u_1,u_2} f(x+2u_1,y) - \Delta^2_{u_1,u_2} f(x-u_1,y) + \\
&+\Delta^2_{(1),u_1} f(x-u_1,y) - \Delta^2_{(1),u_1} f(x,y) - \\
&-\Delta^2_{(2),u_2} f(x,y) + \Delta^2_{(2),u_2} f(x+u_1,y).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

2)Varsayalım $r=3$ olsun. Şekil 3.3 ü kullanırsak



Şekil 3.3: r=3 durumu için karışık farkın kısmi ve tam farka göre ifadesini gösterir.

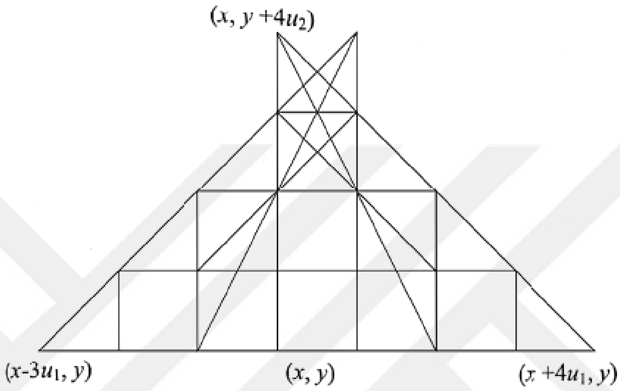
$$
\begin{aligned}
&6\Delta^{1,2}_{u_1,u_2} f(x,y) = \Delta^3_{-u_1,u_2} f(x+3u_1,y) - \Delta^3_{u_1,u_2} f(x-2u_1,y) + \\
&+\Delta^3_{(1),u_1} f(x-2u_1,y) + 3\Delta^3_{(1),u_1} f(x-u_1,y) + \Delta^3_{(1),u_1} f(x,y) - \\
&-3\Delta^3_{(1),u_1} f(x-u_1,y+u_2) - \Delta^3_{(2),u_2} f(x,y) + \Delta^3_{(2),u_2} f(x+u_1,y).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

3)Varsayalım $r=4$ olsun. Şekil 3.4 ü kullanarak,

$$
\begin{aligned}
&42\Delta^{1,3}_{u_1,u_2} f(x,y) = \Delta^4_{u_1,u_2} f(x-3u_1,y) - \Delta^4_{u_1,u_2} f(x+4u_1,y) - \\
&-4\Delta^4_{(1),u_1} f(x-u_1,y) - 4\Delta^4_{(1),u_1} f(x-2u_1,y) - \Delta^4_{(1),u_1} f(x-3u_1,y) + \\
&+4\Delta^4_{(1),u_1} f(x,y) - \Delta^4_{(1),u_1} f(x-u_1,y+u_2) + \\
&+4\Delta^4_{(1),u_1} f(x-2u_1,y+u_2) + \\
&+\Delta^4_{(2),u_2} f(x,y) - \Delta^4_{(2),u_2} f(x+u_1,y) + 14\Delta^4_{-\frac{u_1}{2},u_2} f(x+2u_1,y) - \\
&-14\Delta^4_{\frac{u_1}{2},u_2} f(x-u_1,y) + 6\Delta^4_{\frac{u_1}{2},\frac{u_2}{2}} f(x-u_1,y+u_2) -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-6\Delta^4_{-\frac{u_1}{2},\frac{u_2}{2}} f(x+2u_1, y+u_2)+\\
&+6\Delta^4_{\frac{u_1}{2},\frac{u_2}{2}} f(x,y)-6\Delta^4_{-\frac{u_1}{2},\frac{u_2}{2}} f(x+u_1,y)-14\Delta^4_{(2),u_2} f(x,y)+\\
&+14\Delta^4_{(2),u_2} f(x+u_1,y)+14\Delta^4_{(1),\frac{u_1}{2}} f(x-u_1,y+u_2)-\\
&-14\Delta^4_{(1),\frac{u_1}{u_2}} f(x,y+u_2)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

özdeşliği doğru olur.

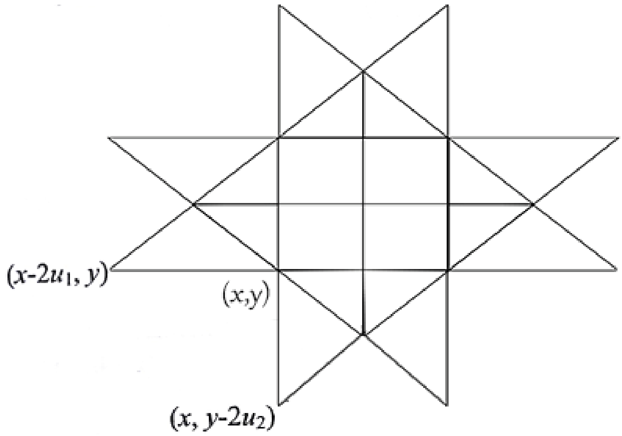


Şekil 3.4: r=4 durumu için karışık farkın kısmi ve tam farka göre ifadesini gösterir.

$r = 4$ için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir.

$$
\begin{aligned}
&24\Delta^4_{u_1,u_2} f(x,y) = -\Delta^4_{u_1,u_2} f(x-2u_1,y)-\Delta^4_{u_1,u_2} f(x,y-2u_2)-\\
&-\Delta^4_{-u_1,u_2} f(x+2u_1,y-2u_2)-\\
&-\Delta^4_{-u_1,u_2} f(x+4u_1,y)+\Delta^4_{(1),u_1} f(x,y+2u_2)+\\
&+\Delta^4_{(1),u_1} f(x-2u_1,y+2u_2)+\Delta^4_{(1),u_1} f(x-2u_1,y)+\\
&+\Delta^4_{(1),u_1} f(x,y)+\Delta^4_{(2),u_2} f(x,y-2u_2)+\\
&+\Delta^4_{(2),u_2} f(x+2u_1,y-2u_2)+\Delta^4_{(2),u_2} f(x+2u_1,y)+\\
&+\Delta^4_{(2),u_2} f(x,y)+4\Delta^4_{(1),u_1} f(x-u_1,y+u_2)+\\
&+4\Delta^4_{(1),u_1} f(x-u_1,y)+4\Delta^4_{(2),u_2} f(x,y-2u_2)+\\
&+4\Delta^4_{(2),u_2} f(x+2u_1,y-u_2)-\\
&-8\Delta^4_{(2),u_2} f(x+u_1,y-u_2)-8\Delta^4_{(1),u_1} f(x-u_1,y+u_2)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Şekil 3.5 bu özdeşliği kontrol etmek için kullanılabilir.



Şekil 3.5: r=4 durumu için karışık farkın kısmi ve tam farka göre ifadesinin doğruluğunu gösterir.

$r = 2,3,4$ için yukarıda gözlemlediğimiz bu özdeşlikler genel durumda da geçerlidir [7-8]. $f(x_1,...,x_n)$ in tam, karışık ve kısmi farkları arasındaki özdeşlik için genel kural aşağıdaki özdeşlikte verilmiştir.

Herhangi sabit l için ($l = 0,1,2,...$)

$$\sum_{v_{n-1}=0}^{r}\sum_{v_{n-2}=0}^{v_{n-1}}\cdots\sum_{v_1=0}^{v_2}(-1)^{v_1+\ldots+v_{n-1}}2^{v_1 l}\times\frac{r!\Delta^{v_1,v_2-v_1,\ldots r-v_{n-1}}_{u_1,\ldots,u_n}f(x_1,\ldots,x_n)}{(r-v_{n-1})!\left(v_{n-1}-v_{n-2}\right)!\ldots(v_2-v_1)!v_1!}= \\ =\Delta^{4}_{\frac{u_1}{2^l},-u_2,\ldots,u_{n-1},u_n}f(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}+ru_{n-1},x_n)+A_{r+1,l}(f). \tag{3.9}$$

Burada:

$A_{r+1,0}(f)=0$ ve $l \geq 1$,

$$A_{r+1,l}(f)=\sum_{v_{n-1}=l}^{r}\sum_{v_{n-2}=l}^{v_{n-1}}\cdots\sum_{v_1=l}^{v_2}(-1)^{v_1+\ldots+v_{n-1}}\sum_{\mu=1}^{v_1}\sum_{p=0}^{l-1}\frac{2^{(p-1)v_1}r!S_{\mu,r+1,p}(f)}{(r-v_{n-1})!\left(v_{n-1}-v_{n-2}\right)!\ldots(v_2-v_1)!v_1!},$$

$$S_{\mu,r+1,p}(f)=\sum_{i=}^{\mu-1}\Delta^{v_1+1,v_2-v_1,\ldots,v_{n-1}-v_{n-2},r-v_{n-1}}_{\frac{u_1}{2^{p+1}},u_2,\ldots u_n}f(x_1+\frac{iu_1}{2^{p+1}},x_2,\ldots,x_n).$$

İki değişkenli fonksiyonlar için (3.9) daki özdeşlik:

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v.2^{-vl}\frac{r!}{(r-v)!v!}\Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)=$$
$$=\Delta^r_{-\frac{u_1}{2^l},u_2}f(x_1+\frac{ru_1}{2^l},x_2)+A_{r+1,l}(f) \tag{3.10}$$

(3.10) a dönüşür. Burada:

$A_{r+1,0}(f)=0$ ve $l\geq 1$,

$$A_{r+1,l}(f)=\sum_{v=1}^{r}(-1)^v\sum_{\mu=1}^{v}...\sum_{p=0}^{l-1}\frac{2^{(p-1)v}r!}{(r-v)!(v-\mu)!\mu!}\sum_{i=0}^{\mu-1}\Delta^{v+1,r-v}_{\frac{u_1}{2^{p+1}},u_2}f(x_1+\frac{iu_1}{2^{p+1}},x_2).$$

(3.9) un ispatını yapmak için önce (3.10) u $l=0$ için ispatlayalım, yani:

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\binom{r}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)=\Delta^r_{-u_1,u_2}f(x_1+ru_1,x_2). \tag{3.11}$$

$r=1$ için (3.11) özelliği aşikardır. Tümevarım yöntemi ile farzedelim ki $r=k$ için (3.11) doğru olsun. Bu durumda $r=k+1$ için (3.11) in doğru olduğunu ispatlayalım.

$$\varphi_k=\varphi_k(x_1,x_2)=\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\binom{k}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)=\Delta^k_{-u_1,u_2}f(x_1+ku_1,x_2) \text{ olsun.}$$

Öte yandan

$$\varphi_{k+1}=\varphi_{k+1}(x_1,x_2)=\Delta^{k+1}_{-u_1,u_2}f(x_1+(k+1)u_1,x_2)=$$
$$\Delta^l_{-u_1,u_2}f(x_1+u_1,x_2)=$$
$$=\Delta^l_{(2),u_2}\varphi_k f(x_1,x_2)-\Delta^l_{(1),u_2}\varphi_k f(x_1,x_2).$$

Bu nedenle, (3.11) $r=k$ için geçerli olduğundan

$$\varphi_{k+1}=\Delta^l_{(2),u_2}\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{k}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,k-v}f(x_1,x_2)-$$
$$-\Delta^l_{(1),u_1}\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{k}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,k-v}f(x_1,x_2)=$$
$$=\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{k}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,k+1-v}f(x_1,x_2)-\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{k}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v+1,k-v}f(x_1,x_2)=$$

$$=\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{k}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,k+1-v}f(x_1,x_2)+\Delta_{(2),u_2}^{k+1}f(x_1,x_2)+$$
$$+\sum_{v=0}^{k}(-1)^v\binom{k}{v-1}\Delta_{u_1,u_2}^{v,k+1-v}f(x_1,x_2)+(-1)^{k+1}\Delta_{(1),u_1}^{k+1}f(x_1,x_2)=$$
$$=\sum_{v=0}^{k+1}(-1)^v\binom{k+1}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,k+1-v}f(x_1,x_2)$$

bulunur.

Yani $r=k+1$ için özdeşlik (3.11) elde edilir. Böylece özdeşlik (3.11) her doğal sayı için ispatlanmış olur.

x_2 değişkenini sabit alıp x_1 e göre $f(x_1,x_2)$ ye

$$\Delta_{(1),u_1}^{v}f(x_1,x_2)=2^v\Delta_{(1),u_1}^{v}f(x_1,x_2)+\sum_{\mu=1}^{v}\binom{v}{\mu}\sum_{i=0}^{\mu-1}\Delta_{(1),u_1}^{v+1}f(x_1+\frac{iu_1}{2},x_2)$$

özdeşliğini l kez uygulayarak

$$\Delta_{(1),u_1}^{v}f(x_1,x_2)=2^{vl}\Delta_{(1),\frac{u_1}{2^l}}^{v}f(x_1,x_2)+\sum_{p=0}^{l-1}2^{pv}\sum_{\mu=1}^{v}\binom{v}{\mu}\sum_{i=0}^{\mu-1}\Delta_{(1),\frac{u_1}{2^{p+1}}}^{v+1}f(x_1+\frac{iu_1}{2^{p+1}},x_2)$$

elde edilir.

x_2 ye göre u_2 adımlı $(r-v)$. dereceden fark uygulanırsa

$$\Delta_{(2),u_2}^{r-v}\Delta_{(1),u_1}^{v}f(x_1,x_2)=2^{vl}\Delta_{(2),u_2}^{r-v}\Delta_{(1),\frac{u_1}{2^l}}^{v}f(x_1,x_2)+\sum_{p=0}^{l-1}2^{pv}\sum_{\mu=1}^{v}\binom{v}{\mu}\sum_{i=0}^{\mu-1}\Delta_{(2),u_2}^{r-v}\Delta_{(1),\frac{u_1}{2^{p+1}}}^{v+1}f(x_1+\frac{iu_1}{2^{p+1}},x_2)$$

çıkar.

Son özdeşliğin her iki tarafını $(-1)^v2^{-vl}\binom{r}{v}$ ile çarparsak:

$$(-1)^v2^{-vl}\binom{r}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)=(-1)^v\binom{r}{v}\Delta_{\frac{u_1}{2^l},u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)+$$
$$+\sum_{p=0}^{l-1}(-1)^v2^{(p-1)v}\binom{r}{v}\sum_{\mu=1}^{v}\binom{v}{\mu}\sum_{i=0}^{\mu-1}\Delta_{\frac{u_1}{2^{p+1}},u_2}^{v+1,r-v}\Delta_{(1),\frac{u_1}{2^{p+1}}}^{v+1}f(x_1+\frac{iu_1}{2^{p+1}},x_2).$$

Böylece (3.11) den

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^{v}2^{-vl}\binom{r}{v}\Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)=\sum_{v=0}^{r}(-1)^{v}\binom{r}{v}\Delta_{\frac{u_1}{2^l},u_2}^{v,r-v}f(x_1,x_2)+$$

$$+\sum_{v=0}^{r}(-1)^{v}2^{(p-1)v}\binom{r}{v}\sum_{\mu=1}^{v}\binom{v}{\mu}\sum_{p=0}^{l-1}\sum_{i=0}^{\mu-1}\Delta_{\frac{u_1}{2^{p+1}},u_2}^{v+1,r-v}f(x_1+\frac{iu_1}{2^{p+1}},x_2)=$$

$$=\Delta_{\frac{u_1}{2^l},u_2}^{r}f(x_1+\frac{ru_1}{2^l},x_2)+A_{r+1,l}(f)$$

bulunur. Böylece (3.10) ispatlanmış olur.

Şimdi tümevarımla herhangi $n>2$ için (3.9) özdeşliği kolayca elde edilebilir. Gerçekten de belirli bir $n=k$ doğal sayısı için (3.9) geçerli olsun.

Yani;

$$\sum_{v_{k-1}}^{v_k}\cdots\sum_{v_1=0}^{v_2}(-1)^{v_1+\ldots v_{k-1}}2^{-v_1 l}\frac{v_k!\Delta_{u_1,\ldots,u_n}^{v_1,v_2-v_1,\ldots v_k-v_{k-1}}f(x_1,\ldots x_k,\ldots,x_n)}{(v_k-v_{k-1})!\ldots(v_2-v_1)!v_1!}=$$

$$=\Delta_{-\frac{u_1}{2^l},u_2,-u_3,\ldots,-u_{k-1},u_k}^{v_k}f(x_1,\ldots x_{k-2},x_{k-1}+v_k u_{k-1},x_k,\ldots,x_n)+A_{v_{k+1},l}(f)$$

sağlansın. Eşitliğin her iki tarafını $(-1)^{v}\binom{v_k}{v_{k+1}}$,$(v_{k+1}>v_k)$ ile çarpıp $v_k=0$ dan v_{k+1} e kadar toplamı alınıp , x_{k+1} e göre u_{k+1} adımla $(v_{k+1}-v_k)$. mertebeli fark hesaplanırsa

$$\sum_{v_k=0}^{v_{k+1}}\sum_{v_{k-1=0}}^{v_k}\cdots\sum_{v_1=0}^{v_2}(-1)^{v_1+\ldots+v_k}2^{-v_1 l}\frac{v_{k+1}!\Delta_{u_1,\ldots,u_n}^{v_1,v_2-v_1,\ldots v_k-v_{k-1},v_{k+1}-v_k}f(x_1,..,x_n)}{(v_{k+1}-v_k)(v_k-v_{k-1})!\ldots(v_2-v_1)!v_1!}=$$

$$=\sum_{v_k=0}^{v_{k+1}}(-1)^{v_k}\binom{v_{k+1}}{v_k}\Delta_{(k+1),u_{k+1}}^{v_{k+1}-v_k}\Delta_{-\frac{u_1}{2^l},u_2,-u_3,\ldots,-u_{k-1},u_k}^{v_k}f(x_1,\ldots x_{k-2},x_{k-1}+v_k u_{k-1},x_k,\ldots,x_n)+$$

$$+A_{v_{k+1}+1,l}(f)=\Delta_{-\frac{u_1}{2^l},-u_2,,\ldots,-u_k,u_{k+1}}^{v_k}f(x_1,..,x_{k-1},x_k+v_{k+1}u_k,x_{k+1},\ldots,x_n)+A_{v_{k+1}+1,l}(f)$$

elde edilir. Böylece özdeşlik (3.9) $n=k+1$ için de elde edilir. Her n için (3.9) doğru olur.

(3.10) özdeşlikleri determinantı aşağıdaki özellikte olan bir denklem sistemi oluşturur:

$$\delta=\prod_{v=0}^{r}(-1)^{v}\binom{r}{v}\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1/2 & \ldots & 1/2^{r}\\ 1 & 1/2^{2} & \ldots & 1/2^{2r}\\ . & . & \ldots & .\\ 1 & 1/2^{r} & \ldots & 1/2^{r^2}\end{vmatrix}\neq 0\ .$$

(3.10) denklem sistemi $\Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v} f(x_1,x_2)$ karışık farkını r dereceli tam ve kısmi farkların ve r+1 mertebeli karışık farkların lineer kombinasyonu olarak elde edebilmemizi sağlar [9].

3.1.1 Teorem

Eğer n değişkenli $\mathbb{R}^n$ öklid uzayında bir G kümesinin her $M(x_1,...,x_n)$ noktasında tanımlı bir $f(x_1,...,x_n)$ fonksiyonu var ise bu taktirde $M(x_1,...,x_n)$ nın belli bir komşuluğunda karışık fark,tam ve kısmi farklarının lineer birleşimi olarak verilebilir [5].

3.2 n-değişkenli Fonksiyonlarda Düzgünlük Modülleri

3.2.1 Teorem

Eğer $f(x_1,x_2,...,x_k)$ fonksiyonu belli bir $G \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde sürekli ise $\bar{Q} \subset G$ koşulunu sağlayan sınırlı herhangi Q bölgesi ve yeterince küçük $u_1,...,u_n$ için aşağıdaki geçerlidir ve tamdır.

$$\omega_r(f;|u_1|,...,|u_n|) \approx \max_{\substack{r_1,...,r_n \\ (r_1+r_2+...+r_n=r)}} \left\{\omega_{r_1,...,r_n}(f;|u_1|,...,|u_n|)\right\}. \tag{3.12}$$

Burada:

$$\omega_r(f;|u_1|,...,|u_n|) = \sup_{M\in\mathbb{Q}} \sup_{\substack{|t_i|\le|u_i| \\ i=1,2,...,n}} \left|\Delta_{t_1,...,t_n}^{r} f(x_1,...,x_n)\right| \tag{3.13}$$

kısmi düzgünlük modülü,

$$\omega_{r_1,...,r_n}(f;|u_1|,...,|u_n|) = \sup_{M\in\mathbb{Q}} \sup_{\substack{|t_i|\le|u_i| \\ i=1,2,...,n}} \left|\Delta_{u_1,...,u_n}^{r_1,...,r_n} f(x_1,...,x_n)\right| \tag{3.14}$$

karma düzgünlük modülüdür.

Gerçektende eğer;

$$\omega_r^{(v)}(f;|u_v|) = \sup_{M\in\mathbb{Q}} \sup_{|t_v|\le|u_v|} \left|\Delta_{(v),t_v}^{r} f(x_1,...,x_n)\right| \tag{3.15}$$

ise

$$\omega_r^{(v)}(f;|u_v|) \le \omega_r(f;|u_1|,...,|u_n|)\,. \tag{3.16}$$

Böylece 3.1.1 Teorem ile herhangi $r_1,...,r_n (r = r_1 + r_2 + ... + r_n)$ doğal sayıları ve yeteri kadar küçük $u_1,...,u_n$ için

$$\omega_{r_1,\dots,r_n}(f;|u_1|,\dots,|u_n|) \le C_r \omega_r(f;|u_1|,\dots,|u_n|) \tag{3.17}$$

özelliği geçerlidir.

Buradaki $C_r > 0$ pozitif sabiti sadece r ye bağlıdır. Öte yandan $l = 0$ için (3.9) kullanılırsa

$$\omega_r(f;|u_1|,\dots,|u_n|) \le M_r \max_{\substack{r_1,\dots,r_n \\ (r_1+r_2+\dots+r_n=r)}} \left\{ \omega_{r_1,\dots,r_n}(f;|u_1|,\dots,|u_n|) \right\} \tag{3.18}$$

sağlanır. Burada:

$$M_r = \sum_{v_{n-1}=0}^{r} \sum_{v_{n-2}=0}^{v_{n-1}} \dots \sum_{v_1=0}^{v_2} \frac{r!}{(r-v_{n-1})!\dots(v_{n-1}-v_{n-2})\dots(v_2-v_1)v_1!} .$$

(3.17) ve (3.18) eşitsizlikleri (3.12) nin denkliğini ve tamlığını verir. $n = 2$ durumunda (3.18) eşitsizliği [12] numaralı kaynakta verilmiştir.

3.2.2 Not

Yukarıda elde edilen (3.17) eşitsizliğindeki C_r sabiti r nin belli değerlerinde bilinmektedir. Örneğin iki değişkenli durumda $C_2 = \frac{3}{2}, C_3 = \frac{3}{2}, C_4 = \frac{22}{7}$ $(r_1 = 1, r_2 = 3)$ dir. Eğer $r_1 = r_2 = 2$ ise $C_4 = \frac{11}{6}$ olur. Öte yandan $n = r = 2$ iken (3.17) eşitsizliği $C_2 = 2$ sabiti ile de elde edilmiştir [12].

3.3 n-Değişkenli Fonksiyonların Yönlü Türevleri

$y = \lambda x$ yönü boyunca bir $f(x, y)$ fonksiyonunun r. türevini $f_\lambda^{(r)}(x, y)$ şeklinde gösterelim. Sırasıyla özdeşlik (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) in sonucu olarak türevlerinin varlığı ve sürekliliği varsayımı altında

$$f_{xy}^2(x,y) = \frac{1}{2} f_{\lambda_1}^{(2)}(x,y) - \frac{1}{2} f_{\lambda_2}^{(2)}(x,y) \qquad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1) ,$$

$$f_{xy^2}^{(3)}(x,y)=\frac{1}{3}f_{\lambda_1}^{(3)}(x,y)-\frac{\sqrt{2}}{3}f_{\lambda_2}^{(3)}(x,y)-\frac{\sqrt{2}}{3}f_{\lambda_3}^{(3)}(x,y)$$
$$(\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-1),$$
$$f_{xy^3}^{4}(x,y)=\frac{1}{6}f_{\lambda_1}^{(4)}(x,y)-\frac{1}{6}f_{\lambda_2}^{(4)}(x,y)+\frac{25}{18}f_{\lambda_3}^{(4)}(x,y)-\frac{25}{18}f_{\lambda_4}^{(4)}(x,y)$$
$$(\lambda_1=0,\lambda_2=\infty,\lambda_3=1,\lambda_4=-1),$$
$$f_{xy^2}^{(4)}(x,y)=\frac{1}{6}f_{\lambda_1}^{(4)}(x,y)+\frac{1}{6}f_{\lambda_2}^{(4)}(x,y)-\frac{1}{3}f_{\lambda_3}^{(4)}(x,y)$$
$$(\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2,\lambda_4=-2).$$

sağlanır.

(3.10) özdeşliği yönlü türevler ve iki değişkenli fonksiyonun herhangi bir r dereceli karışık türevleri arasındaki ilişkiyi ifade eden aşağıdaki teoremi verelim.

3.3.1 Teorem

Bir $M(x_1,x_2)$ noktasının belirli bir komşuluğundaki r dereceli $f_{x_1^v x_2^{v-r}}^{(r)}(x_1,x_2)$, $v=0,1,2,3,...,r$ türevlerine sahip bir $f(x_1,x_2)$ fonksiyonu ele alalım ve bu türevler $M(x_1,x_2)$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda herhangi r-1 tane ikişerli eş doğrusal olmayan $x_1=\lambda_l x_1$ $(0<\lambda_l<\infty, l=1,2,...,r-1)$ yönleri için:

$$f_{x_1^v x_2^{v-r}}^{(r)}(x_1,x_2)=\sum_{l=0}^{r}\mu_1(v,\lambda,r)\,f_{\lambda_1}^{(r)}(x_1,x_2)\ (\lambda_0=\infty,\lambda_r=0)\,. \tag{3.19}$$

Burada $\mu_1(\mu,\lambda,r)$ katsayıları

$$\sum_{v=0}^{r-1}(-1)^v\lambda_1^{-v}\binom{r}{v}f_{x_1^y x_2^{r-v}}^{(r)}(x_1,x_2)=(1+\lambda_1^{-2})^{\frac{r}{2}}f_{\lambda_1}^{(r)}(x,y)-$$
$$-f_{\lambda_0}^{(r)}(x,y)-f_{\lambda_r}^{(r)}(x,y)(-1)^r\lambda_1^{-r}. \tag{3.20}$$
$$(l=1,2,...,r-1)$$

denklem sisteminden elde edilmiştir.

3.3.1 Teoremi her bir $f_{x_1^v x_2^{v-r}}^{(r)}(x_1,x_2)$, $v=0,1,2,3,...,r$ karışık türevin ikisi verilen(koordinat ekseninde) ve diğerleri keyfi ve ikişerli eş doğrusal olmayan r+1 yönü boyunca r dereceli türevlerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebileceğini gösterir.

İspat

$\lambda(0<\lambda<\infty)$ keyfi pozitif sayısı için $u_2=\lambda u_1$ ve $l=0$ için (3.10) kullanılırsa

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\binom{r}{v}\Delta^{v,r-v}_{u_1,\lambda u_1}f(x_1,x_2)=\Delta^{r}_{-u_1,\lambda u_2}f(x_1+ru_1,x_2),$$

ya da

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\binom{r}{v}\Delta^{v,r-v}_{u_1,\lambda u_1}f(x_1-ru_1,x_2)=\Delta^{r}_{-u_1,\lambda u_2}f(x_1,x_2)\ .$$

Ortalama değer teoremini karışık türevlere uygulayarak;

$c_1^{(v)}\to x_1$, $c_2^{(v)}\to x_2$ ve $u_1\to 0$ iken

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\lambda_1^{-v}\binom{r}{v}\lambda u_1^{r}f^{(r)}_{x_1^{v}x_2^{r-v}}(C_1^{(v)},C_2^{(v)})=\Delta^{r}_{-u_1,\lambda u_1}f(x_1,x_2)$$

elde ederiz.

$u_1\to 0$ iken

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\binom{r}{v}f^{(r)}_{x_1^{v}x_2^{r-v}}(C_1^{(v)},C_2^{(v)})\lambda^{-v}=\lambda^{-r}(1+\lambda^2)^{\frac{r}{2}}\frac{\Delta^{r}_{-u_1,\lambda u_1}f(x_1,x_2)}{\left[u_1(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\right]^r}$$

eşitliğinden

$$\sum_{v=0}^{r}(-1)^v\binom{r}{v}\lambda^{-v}f^{(r)}_{x_1^{v}x_2^{r-v}}(x_1,x_2)=(1+\lambda^2)^{\frac{r}{2}}f^{r}_{\lambda}(x_1,x_2). \qquad (3.21)$$

(3.21) eşitliğinde sırasıyla art arda $\lambda=\lambda_l$ $(l=1,2,...,r-1)$ alındığında (3.20) denklem sistemini elde ederiz. λ_1 in seçimine göre (3.20) ile oluşan denklem sisteminin determinantı;

$$\begin{vmatrix}\lambda_1^{-1} & \lambda_1^{-2} & \dots & \lambda_1^{-r+1}\\ \lambda_2^{-1} & \lambda_2^{-2} & \dots & \lambda_2^{-r+1}\\ . & . & \dots & .\\ \lambda_{r-1}^{-1} & \lambda_{r-1}^{-2} & \dots & \lambda_{r-1}^{-r+1}\end{vmatrix}.\prod_{v=0}^{r-1}(-1)^v\binom{r}{v}\neq 0.$$

Bundan dolayı her $v(v=0,1,...,r-1)$ için (3.19) bulunur.

3.3.1 Teoremini kullanarak aşağıdaki 3.3.2 Teoremi elde edebiliriz.

3.3.2 Teorem

3.3.1 Teoremin ifadesi altında $f^{(r)}_{x_1^{y} x_2^{r-v}}(x_1,x_2)$ türevleri ve herhangi bir $v(v=0,1,2,...,r)$ ve verilen $x_2=\pm\lambda_l x_1(l=1,2,...,r)$ $\lambda_1(l=1,2,...,r-1)$ yönleri için öyle r tane $x_2=\lambda_l(v)x_1(l=1,2,...,r)$ yönleri seçilebilir ki

$$f^{(r)}_{x_1^{y} x_2^{r-v}}(x_1,x_2)=\sum_{l=1}^{r}\mu_1^{*}(v,\lambda,r)\, f^{(r)}_{\lambda_1(v)}(x_1,x_2) \tag{3.22}$$

elde edilir.

İspat

Denklem (3.20) de λ_l yerine $(-\lambda_l)(l=0,1,...,r-1)$ yazarak

$$\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{r-1}\lambda^{-v}\binom{r}{v} f^{(r)}_{x_1^{v} x_2^{r-v}}(x_1,x_2)=(1+\lambda^{-2})\, f^{(r)}_{-\lambda_1}(x_1,x_2)-\\ &-f^{(r)}_{\lambda_0}(x_1,x_2)-\lambda_l^{-r} f^{(r)}_{\lambda_r}(x_1,x_2).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Öncelikle r tek $(r=2j+1\,,\, j\geq 1)$ olsun. (3.20) ve(3.23) eşitliklerini toplayarak her sabit $l=1,2,...,j$ için aşağıdaki bağıntılar sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}&2\sum_{v=1}^{j}\lambda_1^{-2v}\binom{r}{2v} f^{(r)}_{x_1^{2v} x_2^{r-2v}}(x_1,x_2)=-2\, f^{(r)}_{-\lambda_0}(x_1,x_2)+\\ &+(1+\lambda^{-2})^{\frac{r}{2}}\left\{ f^{(r)}_{\lambda_1}(x_1,x_2)+f^{(r)}_{-\lambda_v}(x_1,x_2)\right\}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Her $l=1,2,...,j$ için (3.20) eşitliğini (3.23) den çıkararak

$$\begin{aligned}&2\sum_{v=1}^{j}\lambda_1^{-(2v-1)}\binom{r}{2v-1} f^{(r)}_{x_1^{2v-1} x_2^{r-2v+1}}(x_1,x_2)=-2\lambda_1^{-r} f^{(r)}_{-\lambda_r}(x_1,x_2)+\\ &+(1+\lambda^{-2})^{\frac{r}{2}}\left\{ f^{(r)}_{\lambda_1}(x_1,x_2)-f^{(r)}_{-\lambda_v}(x_1,x_2)\right\}\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde ederiz.

$\lambda_l(l=1,2,...,j)$ seçimi nedeniyle (3.24) ve (3.25) sistemleri her karışık $f^{(r)}_{x_1^{v} x_2^{r-v}}(x_1,x_2), v=1,2,...,r-1$ türevi için (3.22) eşitliğinin geçerliliğini verir.

Şimdi varsayalım ki r *çift* $(r=2j\ ,\ j\geq 2)$ (3.20) ve (3.23) eşitlikleri ile aşağıdaki bağıntılar sistemine ulaşılsın.

$$2\sum_{\nu=1}^{j-1}\lambda_1^{-2\nu}\binom{r}{2\nu} f^{(r)}_{x_1^{2\nu}x_2^{r-2\nu}}(x_1,x_2) = -2 f^{(r)}_{\lambda_0}(x_1,x_2) - 2\lambda_l^{-r} f^{(r)}_{\lambda_r}(x_1,x_2) +$$
$$+(1+\lambda_l^{-2})^{\frac{r}{2}}\left\{ f^{(r)}_{\lambda_1}(x_1,x_2) + f^{(r)}_{-\lambda_l}(x_1,x_2)\right\}. \tag{3.24}$$

$$2\sum_{\nu=1}^{j}\lambda_1^{-(2\nu-1)}\binom{r}{2\nu-1} f^{(r)}_{x_1^{2\nu-1}x_2^{r-2\nu+1}}(x_1,x_2) =$$
$$+(1+\lambda_1^{-2})^{\frac{r}{2}}\left\{ f^{(r)}_{\lambda_1}(x_1,x_2) - f^{(r)}_{-\lambda_l}(x_1,x_2)\right\} \tag{3.25}$$

Karışık $f^{(r)}_{x_1^{\nu}x_2^{r-\nu}}(x_1,x_2)$ türevlerine göre (3.26) ve (3.27) denklem sistemleri çözülürse r çift durumunda 3.3.2 Teorem doğruluğu elde edilir.

3.4 İntegral Metrik Durumu

$f(x_1,...,.x_k)$ fonksiyonunun her bir değişkenine göre 2π periyodik, ölçülebilir ve

$$\left\| f(x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} = \left\{ \int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} |f(x_1,...,x_k)|^p \, dx_1...dx_k \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \ (1 \le p < \infty) \tag{3.26}$$

sağlayan $f(x_1,...,.x_k)$ fonksiyonlarının kümesi $L_p^{(k)}$ ile gösterilir ve $p=\infty$ için

$$\left\| f(x_1,...,x_k)\right\|_{L_\infty^{(k)}} = ess\sup_{x_1,x_2..,x_k}\left| f(x_1,...,x_k)\right| < \infty \,.$$

Bir $f(x_1,...,.x_k) \in L_p^{(k)} (1 \le p < \infty)$ fonksiyonunun yapısal özelliklerini aşağıda verilen yapılarla araştırırız.

1) Kısmi integral düzgünlük modülü:

$$\omega_r(f;u)_{L_p^{(k)}} = \sup_{|t|\le u}\left\|\Delta^r_{(\nu),t} f(x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}}$$
$$(u>0, \nu=1,2,...,k). \tag{3.27}$$

2) Karışık integral düzgünlük modülü:

$$\omega_{r_1,...,r_k}(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} = \sup_{\substack{|t_\nu|\le u_\nu \\ (\nu=1,2,...,k)}}\left\|\Delta^{r_1,...,r_k}_{t_1,...,t_k} f(x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}}$$
$$u_\nu > 0, \nu=1,2,...,k. \tag{3.28}$$

3) Tam integral düzgünlük modülü:

$$\omega_r(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} = \sup_{\substack{|t_v|\le u_v \\ (v=1,2,...,k)}} \left\| \Delta^r_{t_1,...,t_k} f(x_1,...,x_k) \right\|_{L_p^{(k)}} \tag{3.29}$$

$u_v > 0, v = 1,2,...,k.$

3.4.1 Teorem

Eğer $f(x_1,...,x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \le p \le \infty)$ ise

$$\omega_r(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} \approx \sum_{r_1+...+r_k=r} \omega_{r_1,...,r_k}(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} \tag{3.30}$$

elde edilir.

$r = 2$ ve (3.32) kullanılarak iki değişkenli fonksiyon için

$$\begin{aligned} &\omega_2(f;u_1,u_2)_{L_p^{(2)}} \approx \omega_2^{(1)}(f;u_1)_{L_p^{(2)}} + \\ &+\omega_2^{(2)}(f;u_1)_{L_p^{(2)}} + \omega_{1,1}(f;u_1,u_2)_{L_p^{(2)}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir.

3.4.2 Örnek

$$f_0(x,y) = \begin{cases} xy\left(In\left(In(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\right), & x^2+y^2 \ne 0 \\ 0 \qquad , & x^2+y^2 \ne 0 \end{cases}$$

fonkiyonunu alalım. Bu durumda:

$$\begin{aligned} &\Delta^2_{(1),h} f_0(0,0) = O(h^2), \\ &\Delta^2_{(2),h} f_0(0,0) = O(h^2), \\ &\Delta^2_{h,h} f_0(0,0) \ge 2h^2 InIn\frac{1}{h} \end{aligned}$$

bulunur bu bize gösterir ki $p = \infty$ için $\omega_2(f;u_1,u_2)_{L_\infty^{(2)}}$ tam modülünün davranışı ile kısmı modüllerinin toplamının $\omega_2^{(1)}(f;u_1)_{L_\infty^{(2)}} + \omega_2^{(2)}(f;u_2)_{L_\infty^{(2)}}$ davranışı aynı değildir. Fakat $1 < p < \infty$ için $L_p^{(k)}$ integral metriği durumunda (3.32) nin sağ tarafı $\omega_r^{(v)}(f;u_v)_{L_p^{(k)}} (v = 1,2,...,k)$ kısmi dügünlük modüllerinin toplamı ile değerlendirilebilir [8].

3.4.3 Teorem

Eğer $f(x_1,...,x_k)\in L_P^{(k)}$ $(1<p<\infty)$ ise o zaman

$$\omega_r(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} \approx \sum_{v=1}^{k}\omega_r^{(v)}(f;u)_{L_p^{(k)}} \tag{3.32}$$

elde edilir.

İki değişkenli bir fonksiyon $(k=2)$ durumu için bu teoremi ispatlayalım. Karışık düzgünlük modülünün $1<p<\infty$ durumu için

$$\omega_{v,r-v}(f;u_1,u_2)_{L_p^{(2)}} \le C_{p,r}\left\{\omega_r^{(1)}(f;u_1)_{L_p^{(2)}}+\omega_r^{(2)}(f;u_2)_{L_p^{(2)}}\right\} \tag{3.33}$$

eşitliğini sağladığını gösterelim. Genelliği bozmadan farz edelim ki $f(x_1,x_2)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$\sum_{v_1=1}^{\infty}\sum_{v_2=1}^{\infty}A_{v_1,v_2}(x_1,x_2) \tag{3.34}$$

olsun. Burada

$$A_{v_1,v_2}(x_1,x_2)=\cos v_1x_1(a_{v_1v_2}\cos v_2x_2+b_{v_1v_2}\sin v_2x_2)+$$
$$+\sin v_1x_1(c_{v_1v_2}\cos v_2x_2+d_{v_1v_2}\sin v_2x_2).$$

(3.36) serisinin m_1,m_2 dereceli kısmi toplamı $S_{m_1,m_2}(f;x_1,x_2)$ olsun. Ayrıca

$$A_{v_1,v_2}^{(r)}(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}\left\{A_{v_1,v_2}\left[x_1-(2i-r)\frac{u_1}{2},x_2\right]+A_{v_1,v_2}\left[x_1,x_2-(2i-r)\frac{u_1}{2}\right]\right\}$$

diyelim.

$1<p<\infty$ olduğu için

$$\varphi(v_1,v_2;u_1,u_2)=\frac{\left(\sin\frac{v_1u_1}{2}\right)^{v}\left(\sin\frac{v_2u_2}{2}\right)^{r-v}}{\left(\sin\frac{v_1u_1}{2}\right)^{v}+\left(\sin\frac{v_2u_2}{2}\right)^{r}}$$

olmak üzere Riesz teoreminin çok değişkenli versiyonu kullanılırsa

$$g_r = \left\| \sum_{i_1=0}^{v} \sum_{i_2=0}^{r-v} (-1)^{r-i_1-i_2} \binom{v}{i_1} \binom{v}{i_2} S_{m_1,m_2} \left\{ f; x_1 - (2i_1 - v)\frac{u_1}{2}, x_2 - (2i_2 - r + v)\frac{u_2}{2} \right\} \right\| \leq$$
$$\leq M_{p,r} \left\| \sum_{v_1=1}^{m_1} \sum_{v_2=1}^{m_2} \varphi(v_1, v_2; u_1, u_2) A_{v_1,v_2}^{(r)}(x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}}$$

elde edilir.

$0 < u_1 \leq \frac{1}{m_1},\ 0 < u_2 \leq \frac{1}{m_2}$ olmak üzere iki değişkenli Fourier serileri için çarpan teoremi olan Marcinkiewicz teoremi kullanılırsa

$$g_r \leq M'_{p,r} \left\| \sum_{v_1=1}^{m_1} \sum_{v_2=1}^{m_2} A_{v_1,v_2}^{(r)}(x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}}$$

elde edilir[10].

$1 < p < \infty$ ve iki değişkenli Fourier serileri için

$$g_r \leq M''_{p,r} \left\| \Delta_{(1),u_1}^{r} f(x_1, x_2) + \Delta_{(2),u_2}^{r} f(x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}} \leq$$
$$\leq M''_{p,r} \left\{ \omega_r^{(1)} f; \frac{1}{m_1})_{L_p^{(2)}} + \omega_r^{(2)} f; \frac{1}{m_2})_{L_p^{(2)}} \right\} \tag{3.35}$$

elde edilir.

Ek olarak Riesz teoreminin çok değişkenli versiyonu ve Bernstein eşitsizliği bize aşağıdaki çıkarımı verir :

$$\left\| f(x_1, x_2) - S_{m_1,m_2}(f; x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}} \leq$$
$$\leq B_{p,r} \left\{ \omega_r^{(1)} f; \frac{1}{m_1})_{L_p^{(2)}} + \omega_r^{(2)} f; \frac{1}{m_2})_{L_p^{(2)}} \right\}. \tag{3.36}$$

(3.37) ile (3.38) kullanılarak ve

$$\left\| \Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v} f(x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}} \leq 2^r \left\| f(x_1, x_2) - S_{m_1,m_2}(f; x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}} +$$
$$+ \left\| \Delta_{u_1,u_2}^{v,r-v} S_{m_1,m_2}(f; x_1, x_2) \right\|_{L_p^{(2)}}$$

eşitsizliği bize (3.35) in doğruluğunu verir.

$k = 2$ iken (3.34) bağıntısını ispatlamak için önce (3.35) ve (3.32) eşitsizlikleri ve sonra

$$\omega_r^{(v)}(f;u_v)_{L_p^{(2)}} \le \omega_r(f;u_1,u_2)_{L_p^{(2)}}\ ,\ \ v=1,2 \tag{3.37}$$

eşitsizliği kullanılır.

3.4.3Teoreminin ispatı $k>2$ değişkenli fonksiyonlar için benzer şekilde yapılabilir [5].

$L_p^{(k)}$ $(p=1\ ,\ p=\infty)$ uzaylarındaki tam düzgünlük modülünün üstten kısmi düzgünlük modülleri ile değerlendirilmesi problemini şimdi inceleyelim.

3.4.4. Teorem

Eğer $f(x_1,...,x_k)\in L_p^{(k)}$ $(p=1\ ,\ p=\infty)$ ise

$$\omega_r(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} \le \frac{C_{r,k}}{\rho^{-r}}\int_\rho^1 t^{-r-k}\sum_{v=1}^{k}\omega_m^{(v)}(f;t)_{L_p^{(k)}}$$
$$(\rho=\sqrt{u_1^{\,2}+...+u_k^{\,2}}\le\frac{1}{2}\ ,\ m\ge r). \tag{3.38}$$

(3.40) eşitsizliği bize aşağıdaki sonucu verir.

3.4.5 Sonuç

$$f(x_1,...,x_k)\in L_p^{(k)}\ (p=1\ ,\ p=\infty)\ \text{ ve }\ \omega_r^{(v)}(f;h)_{L_p^{(k)}}=O(h^{r-1})\quad (h>0, v=1,2,...,k)$$
$$\Rightarrow \omega_r(f;u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}}=O(\rho^{r-1}).$$
$$(\rho=\sqrt{u_1^{\,2}+...+u_k^{\,2}})$$

3.5 Tam ve Kısmi Yaklaşım Problemleri

Bir $f(x_1,...,x_k)\in L_p^{(k)}$ $(1\le p\le\infty)$ fonksiyonu için

$$E_{n_1,...,n_k}(f)_{L_p^{(k)}}=\inf_T\left\| f(x_1,...,x_k)-T_{n_1,...,n_k}\ f(x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}}$$

olmak üzere $E_{n_1,...,n_k}(f)_{L_p^{(k)}}$, $f(x_1,...,x_k)$ nın $x_v(v=1,2,...,k)$ değişkenine göre derecesi $\le n_v$ olan $T_{n_1,...,n_k}(x_1,...,x_k)$ trigonometrik polinomlarıyla en iyi tam yaklaşım sayısını göstersin.

Ayrıca aşağıdaki değerleri tanımlayalım:

$L_p^{(k-r)}$ uzayından $\varphi_{v_1,...,v_r}(x_{r+1},...,x_k)$ katsayılı x_v değişkenine göre derecesi$\le n_v$ olan bütün trigonometrik polinomlar üzerinden infimum alınarak;

$E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} = \inf\limits_{T} \left\| f(x_1,\dots,x_k) - T_{n_1,\dots,n_r} f(x_1,\dots,x_r;x_{r+1},\dots,x_k) \right\|_{L_p^{(k)}}$ $(r \le k)$ tanımlayalım. Bu değere $f(x_1,\dots,x_k)$ nın $L_p^{(k)}$ metriğindeki $x_1,\dots,x_r$ ye göre $n_1,\dots,n_r$ dereceli en iyi kısmi yaklaşımı sayısı denir.

(İki değişkenli fonksiyonlar için en iyi kısmi yaklaşım kavramı ilk defa [11] numaralı kaynakta 540. sayfada incelenmiştir.)

$E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}}$ değişkeni $E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} = \left\| E_{n_1,\dots,n_r}(f;x_{r+1},\dots,x_k)_{L_p^{(r)}} \right\|_{L_p^{(k-r)}}$ formülü biçiminde de yazılabilir. $f \in L_p^{(r)}$ fonksiyonun $L_p^{(r)}$ metriğinde $x_1,\dots,x_r$ e göre $n_1,\dots,n_r$ dereceli en iyi yaklaşım sayısı $E_{n_1,\dots,n_r}(f;x_{r+1},\dots,x_k)_{L_p^{(r)}}$ dir. Fubini teoremine göre hemen her $x_{r+1},\dots,x_k$ için $E_{n_1,\dots,n_r}(f;x_{r+1},\dots,x_k)_{L_p^{(r)}}$ sonludur ve $L_p^{(k-r)}$ ye aittir.

Bir sonraki ifade değişkenlerin farklı kümelerine göre $f(x_1,\dots,x_k) \in L_p^{(k)}$ fonksiyonunun en iyi sayısının özelliklerini verir [13-15].

3.5.1 Teorem

$1 \le p \le \infty$ iken $f(x_1,\dots,x_k) \in L_p^{(k)}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_r,n_{r+1},\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \ , \ (1 \le r \le m \le k)\,. \tag{3.39}$$

$$\lim_{\substack{n_\nu \to \infty \\ \nu = r+1,\dots,m}} E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_r,n_{r+1},\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} = E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \cdot \tag{3.40}$$

$$\begin{gathered} E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le C_p \left\{ E^{(\nu_1,\dots\nu_i)}_{n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_i},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} + E^{(\nu_{i+1},\dots\nu_m)}_{n_{\nu_{i+1}},\dots,n_{\nu_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \right\} \\ (1 \le m \le k; \quad \nu_r = 1,2,\dots,m; \quad r = 1,2,\dots,i; \ \ 1 < p < \infty). \end{gathered} \tag{3.41}$$

$$\begin{gathered} E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le \\ \le C \left\{ \left[E^{\nu_1,\dots,\nu_j}_{\mu_{\nu_1},\dots,\mu_{\nu_j},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} + E^{(\nu_{i+1},\dots,\nu_m}_{n_{\nu_{i+1}},\dots,n_{\nu_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} L_p^{(k)} \right] \prod_{r=1}^{i} 1 + \ln \frac{n_{\nu_r}}{n_{\nu_r} - \mu_{\nu_r} + 1} \right\} \\ (1 \le m \le k; \quad \nu_r = 1,2,\dots,i; \quad i \le \left[\frac{m}{2} \right]; \\ \mu_\nu \le n_\nu; \quad \nu = 1,2,\dots,i; \quad p = 1, \quad p = \infty). \end{gathered} \tag{3.42}$$

Burada $C > 0$ ve $C_p > 0$ mutlak sabitlerdir.

İspat

En iyi kısmi yaklaşım sayısı tanımıyla (3.41) eşitsizliği aşikardır. (3.43) eşitsizliğini ispatlamak için $L_p^{(k)}$ metriğinde $(1 < p < \infty)$ iken $f(x_1,...,x_k) \in L_p^{(k)}$ fonksiyonunun $x_{v_1,...,v_i}$ ye göre $n_{v_1,...,v_i}$ dereceli en iyi kısmi yaklaşım polinomu olan $T_{n_{v_1},...,n_{v_i}}(x_{v_1},...,x_{v_i};x_{v_{i+1}},...,x_{v_k})$ polinomunu düşünelim. Yani

$$E^{(v_1,...,v_i)}_{n_{v_1},...,n_{v_i},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} = \left\| f(x_1,...,x_k - T_{n_{v_1},...,n_{v_i}}(x_{v_1},...,x_{v_i};x_{v_{i+1}},...,x_{v_k})\right\|_{L_p^{(k)}} .$$

Varsayalım ki ,

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{olmak üzere}$$

$$S_{n_{v_1},...,n_{v_i}}(f;x_1,...,x_k) =$$
$$= \pi^{-1}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi} f(x_1,...,x_{v_1-1},x_{v_1}+t_1,x_{v_1+1},...,x_{v_i-1},x_{v_i}+t_i,x_{v_i+1},...,x_k)\times\prod_{r=1}^{i} D_{n_{v_r}}(t_r)dt_r$$

olsun. O zaman

$$S_{n_{v_1},...,n_{v_m}}\left[T_{n_{v_1},...,n_{v_i}};x_1,...,x_k\right] = S_{n_{v_{i+1}},...,n_{v_m}}\left[T_{n_{v_1},...,n_{v_i}};x_1,...,x_k\right] \text{ olur ve}$$

$$E^{(v_1,...,v_m)}_{n_{v_1},...,n_{v_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le \left\| f(x_1,...,x_k - S_{n_{v_1},...,n_{v_m}}(T_{n_{v_1},...,n_{v_i}};x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le \left\| f(x_1,...,x_k - S_{n_{v_{i+1}},...,n_{v_m}}(T_{n_{v_1},...,n_{v_i}};x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} +$$
$$+\left\| S_{n_{v_{i+1}},...,n_{v_m}}(f - T_{n_{v_1},...,n_{v_i}};x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} = U_1 + U_2$$

elde edilir. $1 < p < \infty$ olduğundan

$$U_2 \le C_p^{'}\left\| f(x_1,...,x_k) - T_{n_{v_1},...,n_{v_i}}(x_{v_1},...,x_{v_i};x_{v_{i+1}},...,x_{v_k})\right\|_{L_p^{(k)}} =$$
$$= C_p^{'}E^{(v_1,...,v_i)}_{n_{v_1},...,n_{v_i},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} .$$

Şimdi farz edelim $T^{*}_{n_{v_{i+1}},...,n_m}(x_{v_{i+1}},...,x_{v_m};x_{v_1},...,x_{v_i})$, $x_{v_{i+1}},...,x_{v_m}$ ye göre $f(x_1,...,x_k)$ fonksiyonunun en iyi kısmi kısmi yaklaşımını veren polinom olsun. Bu durumda:

$$U_1 \le E^{(\nu_{i+1},...,\nu_m)}_{n_{\nu_{i+1}},...,n_{\nu_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} +$$
$$+\left\| S_{n_{\nu_{i+1}},...,n_{\nu_m}}(f - T^*_{n_{\nu_{i+1}},...,n_{\nu_m}}; x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le (1+M_p)E^{(\nu_1,...,\nu_m)}_{n_{\nu_{i+1}},...,n_{\nu_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}}.$$

u_1 ve u_2 değerlendirmeleri (3.43) eşitsizliğini verir. (3.44) eşitsizliğinin ispatı benzer şekilde elde edilebilir. Bu durumda Fourier toplamları Vallee-Poussin toplamlarıyla yer değiştirilirse:

$$\sigma_{n_{\nu_1},...,n_{\nu_i}}(f;\mu_{\nu_1},...,\mu_{\nu_i};x_1,...,x_k) =$$
$$= \pi^{-1}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi} f(x_1,...,x_{\nu_1-1},x_{\nu_1}+t_1,x_{\nu_1+1},...,x_{\nu_i-1},x_{\nu_i}+t_i,x_{\nu_i+1},...,x_k)\times\prod_{r=1}^{i}\frac{\sum_{\rho=\mu_{\nu_r}}^{n_{\nu_r}} D_p(t_r)}{n_{\nu_r}-\mu_{\nu_r}+1}dt\,.$$

$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=m}^{n} D_\nu(t)\right|dt$ ile verilen integral için S.M.Nikolsky değerlendirmesi ve Vallee-Poussin toplamlarının özellikleri kullanılırsa:

$$E^{(\nu_1,...,\nu_m)}_{n_{\nu_1},...,n_{\nu_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le \left\| f(x_1,...,x_k) - T_{\mu_{\nu_1},...,\mu_{\nu_i}}(x_{\nu_1},...,x_{\nu_i};x_{\nu_{i+1}},...,x_{\nu_k})\right\|_{L_p^{(k)}} +$$
$$+\left\|\sigma_{n_{\nu_1},...,n_{\nu_i}}(f - T_{\mu_{\nu_1},...,\mu_{\nu_i}};\mu_{\nu_1},...,\mu_{\nu_i};x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} +$$
$$+\left\|\sigma_{n_{\nu_1},...,n_{\nu_i}}(f - T_{\mu_{\nu_{i+1}},...,\mu_{\nu_m}};\mu_{\nu_1},...,\mu_{\nu_i};x_1,...,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le C\left\{\left[E^{\nu_1,...,\nu_l}_{\mu_{\nu_1},...,\mu_{\nu_i},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} + E^{(\nu_1,...,\nu_m)}_{n_{\nu_{i+1}},...,n_{\nu_m},\infty}(f)_{L_p^{(k)}}\right]\prod_{r=1}^{i} 1+\ln\frac{n_{\nu_r}}{n_{\nu_r}-\mu_{\nu_r}+1}\right\}.$$

Bu (3.44) eşitsizliğini verir.[3-16]

Son olarak (3.42) bağıntısının gerekliliğini ispat edelim.

Farz edelim ki $E^{(1,2,...,r)}_{n_1,...,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} = \left\| f(x_1,...,x_k) - T_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r;x_{\nu_{r+1}},...,x_r)\right\|_{L_p^{(k)}}$ ve $T^*_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m;x_{m+1},...,x_k)$ $(1 \le r \le m \le k)$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir polinom olsun:

$$E^{(1,2,...,m)}_{n_1,...,n_m,\infty}(T_{n_1,...,n_r})_{L_p^{(k)}} =$$
$$= \left\| T_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r;x_{r+1},...,x_r) + T^*_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m;x_{m+1},...,x_k)\right\|.$$

Açıkça görülür ki:

$$E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} =$$
$$= \left\| f(x_1,\dots,x_k) - T^*_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m;x_{m+1},\dots,x_k) \right\|_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} + E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_r,n_{r+1},\dots,n_m,\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}}.$$

$\mu_v = \left[\dfrac{n_v}{2}\right]$ için (3.44) eşitsizliğini $T_{n_1,\dots,n_r}(x_1,\dots,x_k)$ polinomuna uygulayarak

$$E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_m,\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le C\left\{ E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}} + E^{(1,2,\dots,m)}_{\left[\frac{n_{r+1}}{2}\right],\dots,\left[\frac{n_m}{2}\right],\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}} \right\} = C.E^{(1,2,\dots,m)}_{\frac{n_{r+1}}{2},\dots,\frac{n_m}{2},\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}}.$$

Böylece (3.41) nedeniyle

$$E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_r,n_{r+1},\dots,n_m,\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}} \le$$
$$\le E^{(1,2,\dots,r)}_{n_1,\dots,n_r,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} + C.E^{(r+1,\dots,m)}_{\left[\frac{n_{r+1}}{2}\right],\dots,\left[\frac{n_m}{2}\right],\infty}(T_{n_1,\dots,n_r})_{L_p^{(k)}}.$$

$n_{r+1},\dots,n_m$ indislerinin sonsuza giderken limitini alırsak (3.42)yi elde ederiz.

3.5.1 Teorem bize aşağıdaki sonucu gösterir.

3.5.2 Sonuç

Her $f(x_1,\dots,x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \le p \le \infty)$ için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le C_{p,m} \sum_{v=1}^{m} E^{(v)}_{n_v,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \quad (1 \le m \le k;\ 1 < p < \infty), \tag{3.43}$$

$$E^{(1,2,\dots,m)}_{n_1,\dots,n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \le C\left\{ E^{(m)}_{n_m,\infty}(f)_{L_p^{(k)}} + \sum_{v=1}^{m-1} E^{(v)}_{\frac{n_v}{2},\infty}(f)_{L_p^{(k)}} \quad (1 \le m \le k;\ \text{p=1 p=}\infty) \right\} \tag{3.44}$$

(3.45) eşitsizliği [17] numaralı kaynakta ispatlanmıştır.

$k = 2$ iken, iki değişkenli $f(x_1, x_2)$ fonksiyonu için tam ve kısmi en iyi yaklaşım sayıları arasındaki bağıntı ilk kez S. N. Berstein tarafından [18] numaralı kaynaktaki makalesinde elde edilmiştir.

$$E_{m,n}(f)_{L_\infty^{(2)}} \le$$

$$\le \text{C.}\min\left\{E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_\infty^{(2)}} + E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_\infty^{(2)}}\, In\ m; (E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_\infty^{(2)}} + E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_\infty^{(2)}}) In\ n\right\}. \tag{3.45}$$

Aynı makalede Parseval özdeşliğini kullanarak:

$$E_{m,n}(f)_{L_2^{(2)}} \le E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_2^{(2)}} + E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_2^{(2)}} \tag{3.46}$$

eşitsizliği ispatlanmıştır.

Yukarıdaki (3.46) eşitsizliği gösterir ki iki değişkenli durumunda aşağıdaki eşitsizlik (3.47)de olduğu gibi $p=1$ ve $p=\infty$ için de doğrudur:

$$E_{m,n}(f)_{L_2^{(2)}} \le$$

$$\le C.\min\left\{E_{m,\infty}^{(1)}(f)_{L_p^{(2)}} + E_{\left[\frac{n}{2}\right],\infty}^{(2)}(f)_{L_p^{(2)}}; E_{\left[\frac{m}{2}\right],\infty}^{(1)}(f)_{L_p^{(2)}} + E_{n,\infty}^{(2)}(f)_{L_p^{(2)}}\right\} \tag{3.47}$$

(3.46) eşitsizliği (3.47) özelliği ile aşağıdaki eşitsizliği verir:

3.5.3 Sonuç

Varsayalım ki $1 \le p \le \infty$ ve $f(x_1,...,x_k) \in L_p^{(k)}$ bir fonksiyon olsun. Her pozitif bir α sayısı için

$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_{n,...,n}^{(1,2,...,k)}(f)_{L_p^{(k)}}$ serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_{n,\infty}^{(v)}(f)_{L_p^{(k)}}$ $(v=1,2,...,k)$ serisinin yakınsaklığıdır**.**

Ek olarak bir sonraki eşitsizlikte geçerlidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_{n,...,n}^{(1,2,...,k)}(f)_{L_p^{(k)}} \le C \sum_{v=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha E_{n,\infty}^{(v)}(f)_{L_p^{(k)}}.$$

$k=2$ için $\mu = n_v$ $(v=1,2)$ için (3.44) gösterir ki (3.47) eşitsizliği $L_1^{(2)}$ metriği için de geçerlidir.

V.N.Temlyakov [19] numaralı kaynakta göstermiştir ki (3.47) eşitsizliği ne $L_1^{(2)}$ metriği için ne de düzgün metrik için tam değildir. Temlyakov;

$$E_{n,m}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}} \geq$$
$$\geq A.In\left[2+\min(n,m)\right]\left\{E^{(1)}_{m,\infty}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}} + E^{(2)}_{m,\infty}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}}\right\} \tag{3.48}$$

eşitsizliğini sağlayan

$$f_{n,m}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}$$

fonksiyonunu oluşturmuştur. (Burada A , n ve m den bağımsız bir sabittir.)

(3.50) yi ispatlamak için aşağıdaki polinomu ele alalım:

$$\tau_{n,m}(x,y) = -\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}.$$

O zaman

$$E^{(1)}_{n,\infty}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}} \leq \left\| f_{n,m}(x,y) - \tau_{n,m}(x,y) \right\|_{L_1^{(2)}} = \left\| g_{n,m}(x,y) \right\|_{L_1^{(2)}},$$
$$g_{n,m}(x,y) = 2e^{i[kx+(n+m+1-k)y]} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{I=1}^{n-1} \cos I(x-y) \right\}.$$

Böylece $E^{(1)}_{n,\infty}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}} \leq 4\pi^2$ olur. Kolayca görülebilir ki $E^{(2)}_{m,\infty}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}} = 0$.

Şimdi

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f_{n,m}(t,\theta) - T_{n,m}(t,\theta) \right\} g_{n,m}(x-t, y-\theta) dt d\theta =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^2 e^{i[kx+(n+m+1-k)y]} = h_{n,m}(x,y) \tag{3.49}$$

eşitsizliğini göz önüne alırsak, özel halde (3.51)

$T_{n,m}(x,y) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-m}^{m} a_{k,l} e^{i[kx+ly]}$ polinomu için de geçerli olur.

$T_{n,m}(x,y)$, $f_{n,m}(x,y)$ $L_1^{(2)}$ metriğine göre en iyi yaklaşımı veren polinomu olsun. Yani,

$$\left\| f_{n,m}(x,y) - T_{n,m}(x,y) \right\|_{L_1^{(2)}} = E_{n,m}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}}.$$

Öte yandan,

$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kt$ olmak üzere

$$\left\|h_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}} \leq \frac{1}{4\pi^2}E_{n,m}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}}.\left\|g_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}} \leq$$
$$\leq E_{n,m}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}}$$

ve

$$\left\|h_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}} = \left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 e^{ik(x-y)}\right\|_{L_1^{(2)}} \geq$$
$$\geq \left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cos k(x-y)\right\|_{L_1^{(2)}} \geq$$
$$\geq \left\|D_n(x-y)\right\|_{L_1^{(2)}} - \left\|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\cos k(x-y)\right\| = I_1 - I_2.$$

$I_1 = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(t)\right|dt = 8Inn + O(1)$, $I_2 = O(1)$ ve ayrıca

$\frac{1}{4\pi^2}\left\{E_{n,\infty}^{(1)}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}} + E_{m,\infty}^{(2)}(f_{n,m})_{L_1^{(2)}}\right\} \leq 1$ dir [20].

Bu da demek oluyor ki $\left\|h_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}}$ için üst ve alt değerlendirmeler (3.50) nin doğruluğunu verir. (3.47) eşitsizliğinin mertebe anlamında iyileştirilemez (tam) olduğunu ispatlamak için

$$\varphi_{n,m}(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)C_{k,n+m+1-k^{e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}}}$$

fonksiyonunu ele alalım [19].

Burada $C_{k,l}$ katsayıları (3.51) de verilen $signh_{n,m}(x,y)$ ve $h_{n,m}(x,y)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır.

Şimdi hesaplamaya şöyle başlayalım

$$E_{n,m}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}} \geq A.In\left[2+\min(n,m)\right]\left\{E_{n,\infty}^{(1)}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}} + E_{m,\infty}^{(2)}(\phi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}}\right\}. \quad (3.50)$$

Bu eşitsizlik (3.47) nin ters eşitsizliğidir.

Varsayalım;

$g_{n,m}(x,y)$ (3.51) deki fonksiyon olmak üzere

$\tau_{n,m}(x,y) = -\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(\frac{2n-k}{n}\right)C_{k,n+m+1-k^{e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}}}$ olsun. O zaman:

$$\left|\varphi_{n,m}(x,y)-\tau_{n,m}(x,y)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)C_{k,n+m+1-k^{e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}}} + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(\frac{2n-k}{n}\right)C_{k,n+m+1-k^{e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}}}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_{n,m}(t,\theta)Signh_{n,m}(x+t,y+\theta)dtd\theta\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2}\left\|g_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}} \le 1.$$

Böylece $E_{n,\infty}^{(1)}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}} \le 1$ dir. Ayrıca $E_{m,\infty}^{(2)}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}} = 0$ olduğu aşikardır.

$T_{n,m}^{*}(x,y)$, $\varphi_{n,m}(x,y)$ için y ye göre m dereceli ve x e göre n dereceli en iyi düzgün yaklaşımı veren bir trigonometrik polinom ise Parseval eşitsizliği yardımı ile

$$\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi_{n,m}(x,y)-T_{n,m}^{*}(x,y)\right]g_{n,m}(-x,-y)dxdy\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_{k,n+m+1-k}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_{n,m}(x,y)Signh_{n,m}(x,y)dxdy = \frac{1}{4\pi^2}\left\|h_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}}.$$

Böylece:

$$\left\|h_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}} \le E_{n,m}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}}\left\|g_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}} \le$$

$$\le 4\pi^2 E_{n,m}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}}.$$

Bu eşitsizlik $\left\|h_{n,m}(x,y)\right\|_{L_1^{(2)}}$ için alt değerlendirme kullanıldığında $E_{n,\infty}^{(1)}(\varphi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}} + E_{m,\infty}^{(2)}(\phi_{n,m})_{L_\infty^{(2)}} \le 1$ eşitsizliği (3.52)yi verir.

3.6 Çok Değişkenli Fonksiyonlar için Trigonometrik Polinomlarla Yaklaşımın Düz ve Ters Teoremleri

Bir $f(x_1,...,x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \le p \le \infty)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik tam düzgünlük modülü için en iyi tam yaklaşım sayısı cinsinden üst ve alt değerlendirmeleri verir [5].

3.6.1 Teorem

$$\omega_r(f,\rho)_{L_p^{(k)}} = \sup_{\sqrt{t_1^2+...+t_k^2} \le \rho} \left\| \sum_{v=0}^{r} (-1)^{r-v} \binom{r}{v} f(x_1+vt_1,...,vt_k) \right\|_{L_p^{(k)}} \quad \text{olsun.}$$

Eğer $f(x_1,...,x_k) \in L_p^{(k)}$ $(1 \le p \le \infty)$ ise

$$E_{n_1,...,n_k}(f)_{L_p^{(k)}} \le M_{k,r}\omega_{k,r}(f,\rho)_{L_p^{(k)}}, \rho = \sqrt{n_1^{-2}+...+n_k^{-2}}\ , \tag{3.51}$$

$$\omega_r(f,\rho)_{L_p^{(k)}} \le C_{k,r}\rho^r \sum_{v=0}^{[\rho^{-1}]} (v+1)^{r-1} E_{v,...,v}(f)_{L_p^{(k)}} . \tag{3.52}$$

İspat

$E_{n,\infty}^{(v)}(f)_{L_p^{(k)}}$ $f(x_1,...,x_k)$ için $L_p^{(k)}$ metriğinde x_v değişkenine göre en iyi kısmi yaklaşımı veren polinom ise

$$E_{n,\infty}^{(v)}(f)_{L_p^{(k)}} \le C_r\omega_r^{(v)}(f;\frac{1}{n+1})_{L_p^{(k)}} . \tag{3.53}$$

(3.46) ve $\omega_r^{(v)}(f;h)_{L_p^{(k)}}$ kısmi düzgünlük modülünün özellikleri kullanılarak

$$E_{n_1,...,n_k}(f)_{L_p^{(k)}} \le C_r \sum_{v=1}^{k} \omega_r^{(v)}(f;\frac{1}{n+1})_{L_p^{(k)}} \tag{3.54}$$

elde edilir. Herhangi bir v için $v = 1,2,...,k$

$$\omega_r^{(v)}(f;h_v)_{L_p^{(k)}} \le \omega_r(f;\rho), \ \ \rho = \sqrt{h_1^2+...+h_k^2} \tag{3.55}$$

sağlandığından (3.56) eşitsizliği (3.53) ü gerektirir.

3.6.2 Not

$p = 1$ ve $k = 2$ için (3.56) eşitsizliği S.N.Bernstein tarafından [18] nolu kaynakta sayfa 544 de ispatlanmıştır. Ayrıca herhangi bir $(1 \le p \le \infty)$ ve $k = 2$ içinde [12] nolu kaynakta $f(x,y)$ için yaklaşımını veren belirli bir polinom oluşturularak ispatlanmıştır.

Şimdi (3.54) eşitsizliğini ispatlayalım [21] :

$\left\{T_{n_1,\dots,n_k}(x_1,\dots,x_k)\right\}$,

$\left\| f(x_1,\dots,x_k) - T_{n_1,\dots,n_k}(x_1,\dots,x_k)\right\|_{L_p^{(k)}} \le E_{n_1,\dots,n_k}(f)_{L_p^{(k)}}$ özelliğini sağlasın.

Eğer $0 < t \le 1$ ise

$$\left\|\sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu} f(x_1+\mu th_1,\dots,x_k+\mu th_k)\right\|_{L_p^{(k)}} \le$$

$$\le \left\|\sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu} f(x_1+\mu th_1,\dots,x_k+\mu th_k) - T_{2^{m+1},\dots,2^{m+1}} f(x_1+\mu th_1,\dots,x_k+\mu th_k)\right\|_{L_p^{(k)}} +$$

$$+\left\|\sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu} T_{2^{m+1},\dots,2^{m+1}} f(x_1+\mu th_1,\dots,x_k+\mu th)\right\|_{L_p^{(k)}} = V_1 + V_2.$$

Bu göstermektedir ki $2^m \le n = \left[\rho^{-1}\right] < E_{n_1,\dots,n_k}(f)_{L_p^{(k)}}$ için

$$V_1 \le 2^r E_{2^{m+1},\dots,2^{m+1}}(f)_{L_p^{(k)}} \le 2^{r+1} n^{-r}\sum_{v=0}^{n}(v+1)^{r-1}(f)_{L_p^{(k)}}. \qquad (3.56)$$

V_2 yi değerlendirmek için

$u_i = x_i + h_i(\theta_1 + \dots + \theta_r),\ \ i = 1,2,\dots,k$ ve $A_{r,\mu_1,\dots,\mu_{k-1}}$ sayıları

$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^r = \sum\limits_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_k=0}^{r} A_{r,\mu_1,\dots,\mu_{k-1}} \alpha_1^{\mu_1}\dots\alpha_{k-1}^{\mu_{k-1}}\alpha_k^{r-\mu_1-\dots-\mu_{k-1}}$ eşitliğini sağlamak üzere

$$\sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu} T_{2^{m+1},\dots,2^{m+1}} f(x_1+\mu th_1,\dots,x_k+\mu th_k) =$$

$$= \int_0^t \dots \int_0^t \frac{\partial^r}{\partial\theta_1\dots\partial\theta_r} T_{2^{m+1},\dots,2^{m+1}}\left[x_1 + h_1(\theta_1+\dots+\theta_r),\dots,x_k + h_k(\theta_1+\dots+\theta_r)\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{r} d\theta_i = \qquad (3.57)$$

$$= \int_0^t \dots \int_0^t \sum_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{k-1}=0}^{r} A_{r,\mu_1,\dots,\mu_{k-1}} h_1^{\mu_1}\dots h_{k-1}^{\mu_{k-1}} h_k^{r-\mu_1-\dots-\mu_{k-1}} \times$$

$$\times\frac{\partial^r T_{2^{m+1},\dots,2^{m+1}}(u_1,\dots,u_k)}{\partial u_1^{\mu_1}\dots\partial u_{k-1}^{\mu_{k-1}}\partial u_k^{r-\mu_1-\dots-\mu_{k-1}}}\prod_{i=1}^{r} d\theta_i$$

(3.59) ve Minkowsky eşitsizliği yardımı ile

$$V_2 = t^r (\sum_{i=1}^{k} h_i)^r \max_{0 \le \mu_1 + ... + \mu_{k-1} \le r} \left\| \frac{\partial^r T_{2^{m+1},...,2^{m+1}}(u_1,...,u_k)}{\partial u_1^{\mu_1} ... \partial u_{k-1}^{\mu_{k-1}} \partial u_k^{r-\mu_1-...-\mu_{k-1}}} \right\|_{L_p^{(k)}}$$ elde edilir.

Minkowsky eşitsizliğini ve trigonometrik polinomların türevleri için olan eşitsizliği kullanarak

$$V_2 \le (\sum_{i=1}^{k} h_i)^r \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} \left\| T^{(r)}_{2^{\nu+1},...,2^{\nu+1}}(u_1,...,u_k) - T^{(r)}_{2^{\nu},...,2^{\nu}}(u_1,...,u_k) \right\|_{L_p^{(k)}} + \left\| T^{(r)}_{2^0,...,2^0} - T^{(r)}_{0,...,0} \right\|_{L_p^{(k)}} \right\} \le$$

$$\le (\sum_{i=1}^{k} h_i)^r \left\{ \left\| T_{1,...,1} - T_{0,...,0} \right\|_{L_p^{(k)}} + \sum_{\nu=0}^{m} 2^{r(\nu+1)} \left\| T_{2^{\nu+1},...,2^{\nu+1}} - T_{2^{\nu},...,2^{\nu}} \right\|_{L_p^{(k)}} \right\} \le$$

$$\le (\sum_{i=1}^{k} h_i)^r \left\{ 2E_{0,...,0}(f)_{L_p^{(k)}} + 2\sum_{\nu=1}^{m} 2^{r(\nu+1)} E_{2^{\nu},...,2^{\nu}}(f)_{L_p^{(k)}} \right\} \le$$

$$\le (\sum_{i=1}^{k} h_i)^r \left\{ 2E_{0,...,0}(f)_{L_p^{(k)}} + 2^{2r+1} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2} \mu^{r-1} E_{\mu,...,\mu}(f)_{L_p^{(k)}} \right\} \le$$

$$\le 2^{2r+1} (\sum_{i=1}^{k} h_i) \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^{(k)}}.$$

Sonuç olarak herhangi $h_\nu > 0 \ (\nu = 1,2,...,k)$ ve $\sqrt{h_1^2 + ... + h_k^2} \le \frac{1}{n}$ için

$$V_2 \le \frac{2^{2r+1}}{n^r} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^{(k)}} \tag{3.58}$$

elde edilir.

(3.60) ve (3.58) değerlendirmeleri (3.54) ü ispatlar. Çünkü 3.6.1 Teorem , (3.56) eşitsizliği ve düzgünlük modülünün özellikleri ile

$$\omega_r(f; u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} \le C'_{k,r} \rho^r \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^{(k)}} \le$$

$$\le C'_{k,r} \rho^r \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} \sum_{\mu=1}^{k} \omega_m^{(\mu)}(f; \frac{1}{\nu+1})_{L_p^{(k)}}, n = \left[\rho^{-1}\right], \quad m > r$$

verir. Düzgünlük modülünün bilinen özellikleri kullanılarak

$$\omega_r(f; u_1,...,u_k)_{L_p^{(k)}} \le C_{k,r} \rho^r \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} t^{-r-1} \omega_m^{(\mu)}(f;t)_{L_p^{(k)}} dt \le$$

$$\le C_{k,r} \rho^r \int_{\rho}^{1} t^{-r-1} \sum_{\mu=1}^{k} \omega_m^{(\mu)}(f;t)_{L_p^{(k)}} dt.$$

elde edilir.

3.6.1 Teorem ayrıca şu bilgiyi verir:

3.6.3 Sonuç

$1 \leq p \leq \infty$ olsun. $f(x,y) \in L_p^{(2)}$ fonksiyonunun

$E_{m,n}(f)_{L_p^{(2)}} = O(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1})$ şartını sağlaması için gerekli ve yeterli koşul

$\omega_2(f;h_1,h_2)_{L_p^{(2)}} = O(h_1 + h_2)$ değerlendirmesinin doğru olmasıdır.

Şimdi (2.54) eşitsizliğinin $p=\infty$ durumunda derece anlamında iyileştirilemez(tam) olduğunu gösterelim:

3.6.4 Teorem

$\mu(\alpha_n^{(1)},...,\alpha_n^{(k)})$,

$$E_{n,\infty}^{(v)}(f)_{L_p^{(k)}} \leq C\alpha_n^{(v)} (v = 1,2,...,k; p = \infty) \tag{3.59}$$

koşulunu sağlayan küp üzerinde sürekli bütün periyodik $f(x_1,...,x_k)$ fonksiyonlarının sınıfı olsun.

$\{\alpha_n^{(v)}\}, v = 1,2,...,k$ sıfıra doğru azalan keyfi monoton sayı dizisi olmak üzere her bir r doğal sayısı için

$$\sup_{f\in\mu} \omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \approx \frac{1}{n^r} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{v=1}^{n} v^{r-1} \alpha_{v-1}^{(\mu)}. \tag{3.60}$$

İspat

$\mu(\alpha_n^{(1)},...,\alpha_n^{(k)})$ sınıfından her bir f fonksiyonu için 3.6.1 Teorem ve (2.45) eşitsizliği ile aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \leq \frac{C_{k,r}}{n^r} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{v=1}^{n} v^{r-1} \alpha_{v-1}^{(\mu)}. \tag{3.61}$$

Diğer yandan her bir sürekli $f(x_1,...,x_k)$ fonksiyonu için

$$\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \geq \omega_r^{(v)}(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} (v=1,2,...,k)$$ ve dolayısıyla

$$\sup_{f\in\mu}\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \geq \sup_{f\in\mu}\omega_r^{(v)}(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \qquad (3.62)$$

elde edilir. Şimdi:

$$g_1(x_\mu) = \sum_{v=0}^{\infty}(\alpha_{n_v}^{(\mu)} - \alpha_{n_{v+1}}^{(\mu)})\cos n_v x_\mu$$

$$g_2(x_\mu) = \sum_{v=0}^{\infty}(\alpha_{n_v}^{(\mu)} - \alpha_{n_{v+1}}^{(\mu)})\sin n_v x_\mu$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. Burada n_v sayıları kaynak [5] de (1.10) ve (1.11) deki serilerde kullanılan sayıların aynısıdır. Böylece bir $\mu(\mu=1,2,...,k)$ için

$$\sup_{f\in\mu}\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \geq \frac{M_{k,r}^{'}}{n^r}\sum_{v=1}^{n} v^{r-1}\alpha_{v-1}^{(\mu)}.$$

Böylece

$$\sup_{f\in\mu}\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_\infty^{(k)}} \geq \frac{M_{k,r}}{n^r}\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{v=1}^{n} v^{r-1}\alpha_{v-1}^{(\mu)}. \qquad (3.63)$$

(3.65) ve (3.63) eşitsizlikleri 3.6.4 Teoremin ispatını bitirir.

Aynı mantığı tek değişkenli fonksiyonlarda da uygulayarak; (3.53)ve (3.54) eşitsizliklerini en iyi yaklaşım sayısı cinsinden tam düzgünlük modülü kullanılarak $(1 \leq p \leq \infty)$ için tam olduğu ispatlanabilir.

3.6.5 Teorem

Eğer $f(x_1,...,x_k) \in L_p^{(k)}(1 \leq p \leq \infty)$ ise

$$\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_p^{(k)}} \geq \frac{M_{p,k,r}}{n^r}\left\{\sum_{v=1}^{n} v^{\beta r-1}E_{v,...,v}^{\beta}(f)_{L_p^{(k)}}\right\}^{\frac{1}{\beta}} \qquad (3.64)$$

$$\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_p^{(k)}} \geq \frac{C_{p,k,r}}{n^r}\left\{\sum_{v=1}^{n} v^{\gamma r-1}E_{v,...,v}^{\gamma}(f)_{L_p^{(k)}}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (3.65)$$

$\gamma = \min(2,P), \beta = \max(2,p)$.

3.6.5 Teorem ile

$$\omega_r(f;\frac{1}{n})_{L_p^{(k)}} \cong \sum_{v=1}^{k}\omega_r^{(v)}(f;\frac{1}{n})_{L_p^{(k)}}$$

$$E_{n,\dots,n}(f)_{L_p^{(k)}} \cong \sum_{v=1}^{k}E_{n,\infty}^{(v)}(f)_{L_p^{(k)}}$$

değerlendirmeleri çıkar.

Özel halde 3.6.5 Teorem aşağıdaki sonucu verir:

3.6.6 Sonuç

Eğer $f(x_1,\dots,x_k)\in L_p^{(k)}(1\le p\le\infty)$ ve $E_{n,\dots,n}(f)_{L_p^{(k)}}=(n+1)^{-r}$ ise

$$\rho^r\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le C'_{p,k,r}\omega_r(f;\rho)_{L_p^{(k)}} \le C''_{p,k,r}\rho^r\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

(Burada $\gamma=\min(2,p), \beta=\max(2,p),\ 0<\rho\le\frac{1}{2},\ C'_{p,k,r}$ ve $C''_{p,k,r}$ f ve ρ dan bağımsız sabitlerdir.)

3.7 Çok Değişkenli Fonksiyonların L^P Uzaylarında Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde [22] numaralı kaynaktaki makalede elde edilen sonuçlar üzerine çalışılmıştır.

$T:=[0,2\pi]$ olmak üzere $L^P(T)$ $(1\le p\le\infty)$ 2π periyotlu Lebesgue ölçülebilir

$$\|f\|_{L^P(T)} := \begin{cases} \left(\int_T |f(x)|^p\,dx\right), & 1\le p<\infty \\ es\sup_{x\in T}|f(x)|, & p=\infty \end{cases}$$

için

$\|f\|_{L^P(T)}\le\infty$ koşulunu sağlayan $f:T\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sınıfını göstersin.

$r=1,2,\dots$ ve $f\in L^P(T)$ r-mertebeli düzgünlük modülü

$$\Delta_h^r f(x) := \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}f(x+(r-k)h)$$

olmak üzere

$$\omega_r(f,\delta)_p := \sup_{0<h\leq\delta} \left\| \Delta_h^r f(x) \right\|_{L^p(T)}, \ (\delta > 0)$$

biçiminde tanımlanır.

$T_n \ (n = 0,1,...)$ derecesi n'yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesi olmak üzere T_n nin elemanları tarafından $f \in L^p(T)$ nin en iyi yaklaşımı

$$E_n(f)_p = \inf_{t_n \in T_n} \left\| f - t_n \right\|_{L^p(T)}$$

ile tanımlanır.

$L^p(T) \ (1 \leq p \leq \infty)$ uzaylarına ait fonksiyonların trigonometrik yaklaşımı ile ilgili birçok sonuç vardır. Özellikle, klasik Jackson teorem

$$E_n(f)_p \leq c.\omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right), \ \text{n=1,2,...} \tag{3.66}$$

ve zayıf tersi olan

$$\omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{c}{n^r} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{r-1} E_k(f)_p \ , \ n = 1,2,... \tag{3.67}$$

eşitsizliği trigonometrik yaklaşım teorisi için çok önemli sonuçlarıdır. Bu teoremler ve trigonometrik yaklaşımın diğer sonuçları için kaynak [29] ve [37] ye başvurabilir.

Trigonometrik polinomlarla $L^p(T)$ uzaylarında fonksiyonların yaklaşım problemleri kesirli düzgünlük modülü adı verilen pozitif dereceli düzgünlük modülü kullanılarak incelenmiştir.

$f \in L^1(T)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisi

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \ (\text{k} \in \mathbb{Z})$$

Fourier katsayıları olmak üzere

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}. \tag{3.68}$$

biçiminde verilir. (3.70) de $c_0 = 0$ olan $L^1(T)$ ye ait fonksiyonlarının sınıfını $L_0^1(T)$ ile gösterelim. $\alpha > 0$ için α-ncı mertebeden kesirli integrali $f \in L_0^1(T)$ ve

$(ik)^{-\alpha} := |k|^{-\alpha} e^{(-1/2)\pi i \alpha \, signk}$, $\mathbb{Z}^* := \{\pm 1, \pm 2, ...\}$ için

$I_\alpha(x, f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k(f)(ik)^{-\alpha} e^{ikx}$ olarak tanımlanır.

$\alpha \in (0,1)$ ve $r = 1, 2, ...$ için sağ taraflar mevcut olduğunda,

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{d}{dx} I_{1-\alpha}(x, f)$$

$$f^{(\alpha+r)}(x) := (f^{(\alpha)}(x))^{(r)} = \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} I_{1-\alpha}(x, f)$$

elde edilir [36].

$x, t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ ve

$$\Delta_h^\alpha f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + (\alpha - k)h), \quad f \in L^1(T)$$

ölçülebilir fonksiyonunu ele alalım [37]. Binom katsayıları için

$$\left| \binom{\alpha}{k} \right| := \left| \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} \right| \le \frac{c}{k^{\alpha+1}} \quad (k \in \mathbb{N}) ,$$

eşitsizliği bize

$$c(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{k} \right| < \infty$$

sonucunu verir [36].

Ve böylece $\Delta_h^\alpha f(\cdot)$, $\mathbb{R}$ üzerinde hemen hemen her yerde tanımlandı ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left\| \Delta_h^\alpha f \right\|_{L^p(T)} \le c(\alpha) \| f \|_{L^p(T)} . \tag{3.69}$$

özelliği sağlanır. Eğer $\alpha \in \mathbb{N}$ ise o zaman $\Delta_h^\alpha f(\cdot)$ kesirli fark, normal ileri fark operatörü ile çakışır.

$\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $f \in L^p(T)$ de α-ncı kesirli düzgünlük modülü

$$\omega_\alpha(f, \delta)_p := \sup_{0 < h \le \delta} \left\| \Delta_h^\alpha f(x) \right\|_{L^p(T)}, (\delta > 0) \tag{3.70}$$

olarak tanımlanır.

$\omega_\alpha(f,\cdot)$ düzgünlük modülü $\delta \geq 0$ nın bir azalmayan fonksiyonudur,

$\omega_\alpha(f,0)=0$ ve $\delta \geq 0$ için $\omega_\alpha(f_1+f_2,\delta)_p \leq \omega_\alpha(f_1,\delta)_p + \omega_\alpha(f_2,\delta)_p$

sağlanır [37].

Kesirli düzgünlük modülü hakkında daha geniş bilgiyi [28] ve [37] de bulabiliriz.

c sabitleri farklı yerde olabilen pozitif sabitleri göstersin.

(3.68) ve (3.69) eşitsizliklerin benzerleri her $\alpha > 0$ için [37] de ispatlanmıştır.

3.7.1 Teorem

$1 \leq p \leq \infty$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer $f \in L^p(T)$ ise

$$E_n(f)_p \leq c.\omega_\alpha\left(f,\frac{1}{n}\right), \text{ n=1,2,...} \tag{3.71}$$

ve

$$\omega_\alpha\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{c}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k(f)_p \quad , \quad n=1,2,... \tag{3.72}$$

sağlanır.

Kesirli düzgünlük modülleri ile yaklaşım problemleri yakın zamanda 2π periyodik fonksiyonunun çeşitli uzaylarında incelenmiştir. Örneğin [23],[24],[25],[26],[38],[39]ve [40]da kesirli düzgünlük modülü kullanılmıştır.

Çeşitli değişkenlerin fonksiyonları için yaklaşım problemleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu sonuçların bazıları [30],[31],[32] ve [35]de ayrıca da özetlenmiştir. Tüm bu çalışmalarda matematikçiler tamsayı dereceli düzgünlük modüllerini dikkate aldılar.

Bu çalışmada (3.73) ve (3.74) eşitsizlikleri çok değişkenli fonksiyonlarının Lebesgue uzaylarında ele alınmıştır.

Şimdi Temel sonuçları verelim:

$T^m(m \geq 1)$ m boyutlu $[-\pi,\pi]^m$ küpünü göstersin. Her değişkene göre 2π periyodik olan ve m değişkenli tüm ölçülebilir F fonksiyonlarının

$$\|F\|_{L^p(T^m)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{T^m} |F(x_1,...,x_m)|^p \, dx_1...dx_m \right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \le p < \infty) \\ \underset{(x_1,...,x_m)\in T^m}{es\sup} |F(x_1,...,x_m)| & p = \infty \end{cases}$$

$\|F\|_{L^p(T^m)} < \infty$ koşulunu sağlayan sınıfı $L^p(T^m)(1 \le p \le \infty)$ ile gösterelim.

$\mathbb{R}^m$ deki noktalar için $\underline{x} = (x_1,...,x_m)$ notasyonunu kullanacağız ve

$\underline{dx_i} := dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_m \quad (1 \le i \le m).$

Ayrıca $\mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlanan $F(\underline{x})$ fonksiyonları için

$F_{i,\underline{x}}(t) := F(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+1},...,x_m) \ (1 \le i \le m)$

gösterimini kullanalım.

Yaklaşım araçlarımız m değişkenli polinomlardır. Bunu çok değişkenli karmaşık polinomlar yardımı ile tanımlamak uygundur:

$T_n^m := \left\{ T(\underline{x}) = \operatorname{Re} P(e^{ix_1},...,e^{ix_m}) : P \in P_n^m \right\}.$

Burada P_n^m derecesi m'yi aşmayan kompleks polinomların kümesidir. Yani

$$P_n^m := \left\{ P(Z_1,...,Z_m) = \sum_{\substack{0 \le k_i \le n \\ (i=1,...,m)}} c_{k_1,...,k_m} Z_1^{k_1}...Z_m^{k_m} : c_{k_1,...,k_m} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Böylece T_n^m derecesi en fazla n olan tüm m değişkenli trigonometrik polinomlardan oluşur[32].

T_n^m sınıfındaki $F \in L^p(T^m)$ ye en iyi yaklaşımı

$$E_n(F)_{L^p(T^m)} = \inf_{T_n \in T_n^m} \|F - T_n\|_{L^p(T^m)} \ (n \in \mathbb{N}) \tag{3.73}$$

ile tanımlanır.

Her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $F \in L^p(T^m)$ alıp kısmi farkı tanımlayalım.

$$\Delta_h^{\alpha,i} f(\underline{x}) := \Delta_h^{\alpha,i} F_{i,\underline{x}}(x_i)$$
$$:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} F(x_1,...,x_{i-1},x_i + (\alpha - k)h, x_{i+1},...,x_m).$$

Her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $F \in L^p(T^m)(1 \le p \le \infty)$ nin $\alpha-$ ncı kısmi kesirli düzgünlük modülü

$$\Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} := \sup_{0<h\le\delta} \left\| \Delta_h^{\alpha,i} F \right\|_{L^p(T^m)}, (1 \le i \le m).$$

$F \in L^p(T^m)$ nin kesirli düzgünlük modülü

$$\Omega_\alpha(F,\delta)_{L^p(T^m)} := \max_{1\le i\le m} \Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} (\delta > 0)$$

ile tanımlanır. (3.71) ve Fubini teoremi kullanılarak

$$\Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} \le c \|F\|_{L^p(T^m)} (\delta > 0) \tag{3.74}$$

elde edilir. Dolayısıyla $F \in L^p(T^m)$ için düzgünlük modülü $\Omega_{\alpha,i}(F,\cdot)_{L^p(T^m)}$ mevcuttur.

$\Omega_{\alpha,i}(F,\cdot)_{L^p(T^m)}$ tanımı kullanılarak kolayca $F,G \in L^p(T^m)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Omega_{\alpha,i}(F+G,\delta)_{L^p(T^m)} \le \Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} + \Omega_{\alpha,i}(G,\delta)_{L^p(T^m)} \tag{3.75}$$

elde edilir.

3.7.2 Teorem

$m \ge 1$, $1 \le p \le \infty$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. Her $F \in L^p(T^m)$ için

$$E_n(F)_{L^p(T^m)} \le c.\Omega_\alpha\left(F,\frac{1}{n}\right)_{L^p(T^m)}, \text{ n=1,2,...} \tag{3.76}$$

sağlanır.

3.7.3 Teorem

$1 \le p \le \infty$ ve $m \ge 1$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $F \in L^p(T^m)$

$$\Omega_\alpha\left(F,\frac{1}{n}\right)_{L^p(T^m)} \le \frac{c}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} E_k(F)_{L^p(T^m)} \tag{3.77}$$

sağlanır.

3.7.4 Sonuç

$1 \le p \le \infty$, $m \ge 1$ $\beta \in \mathbb{R}^+$ ve $F \in L^p(T^m)$ olsun. Eğer

$$E_n(F)_{L^p(T^m)} = O(n^{-\beta}), \quad n = 1, 2, ...$$

ise her $\delta > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Omega_\alpha(F,\delta)_{L^p(T^m)} = \begin{cases} O(\delta^\beta), & \alpha > \beta \\ O(\delta^\beta \log(\frac{1}{\delta})), & \alpha = \beta \\ O(\delta^\alpha), & \alpha < \beta \end{cases} .$$

$\beta > 0$ alalım. Genelleştirilmiş Lipschitz sınıfı $\alpha > \beta$ olmak üzere

$$Lip^*(\beta, p) := \left\{ F \in L^p(T^m) : \Omega_\alpha(F,\delta)_{L^p(T^m)} = O(\delta^\beta), \delta > 0 \right\}$$

ile tanımlanır.

3.7.5 Sonuç

$1 \le p \le \infty$, $m \ge 1$ $\beta > 0$ ve $F \in L^p(T^m)$ olsun. Eğer bazı $\beta > 0$ için

$$E_n(F)_{L^p(T^m)} = O(n^{-\beta}), \quad n = 1, 2, ...$$

ise $F \in Lip^*(\beta, p)$ sağlanır.

3.7.3 Teorem ve 3.7.5 Sonucu birleştirirsek $Lip^*(\beta, p)$ sınıfının aşağıdaki özelliklerini verir:

3.7.6 Teorem

$1 \le p \le \infty$, $m \ge 1$ $\beta > 0$ ve $F \in L^p(T^m)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $F \in Lip^*(\beta, p)$
(ii) $E_n(F)_{L^p(T^m)} = O(n^{-\beta}), \quad n = 1, 2, ...$

Şimdi bazı ana sonuçları verelim:

$W_\alpha^p(T)(\alpha = 1, 2, ...)$ $f^{(\alpha-1)}$ in mutlak olarak sürekli olduğu ve $f^{(\alpha)} \in L^p(T)$ özelliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfını göstersin. $W_\alpha^p(T)$ üzerindeki

$$\| f \|_{W_\alpha^p(T)} := \| f \|_{L^p(T)} + \left\| f^{(\alpha)} \right\|_{L^p(T)}$$

normuna göre Banach uzayıdır.

$(1 \leq p \leq \infty)$ olsun. $f \in L^p(T)$ ve $\delta > 0$ için K fonksiyoneli

$$K_\alpha(f,\delta) := \inf\left\{\|f-g\|_{L^p(T)} + \delta^\alpha \|g^\alpha\|_{L^p(T)} : g \in W_\alpha^p\right\} \tag{3.78}$$

olarak tanımlayalım.

(3.80)deki K fonksiyoneli ve (3.72)deki düzgünlük modülüne denktirler:

$f \in L^p(T)$ ve $\alpha = 1,2,...$ için

$$\omega_\alpha(f,\delta) \sim K_\alpha(f,\delta) \;(\delta > 0) \tag{3.79}$$

elde edilir [34].

$f \in L^p(T)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için bir başka düzgünlük modülünü aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\tilde{\omega}_\alpha(f,\delta) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^\delta \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_{L^p(T)}^p dh\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^\delta \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_{L^\infty(T)} dh, & p = \infty \end{cases}.$$

3.7.7 Önerme

$(1 \leq p \leq \infty)$ ve $f \in L^p(T)$ olsun. Bu durumda $\alpha = 1,2,...$ için

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p \sim \tilde{\omega}_\alpha(f,\delta)_p (\delta \geq 0) \tag{3.80}$$

denkliği sağlanır.

İspat

$(1 \leq p \leq \infty)$ için bu önerme kaynak [32] de kanıtlanmıştır.

Şimdi $p = 1$ ve için önermeyi kanıtlayacağız. Yeni modülün tanımından,

$$\tilde{\omega}_\alpha(f,\delta)_p \leq c.\omega_\alpha(f,\delta)_p \tag{3.81}$$

kolayca elde edilebilir.

Tersini kanıtlamak için [34] nolu kaynak sayfa 50 de verilen Steklov fonksiyonunu kullanalım:

$$f_{\alpha,h}(x) := \frac{1}{h^r}\int_0^h \ldots \int_0^h \sum_{s=0}^{\alpha-1}(-1)^{\alpha+s+1}\binom{\alpha}{s} f\left(x+\frac{\alpha-s}{\alpha}(t_1+\ldots+t_\alpha)dt_1\ldots dt_\alpha\right) .$$

$p=1$ veya $p=\infty$ olsun. Bu durumda

$$\left\| f_{\alpha,h}(x)-f(x)\right\|_{L^p(T)} \le \left\| \frac{1}{h^r}\int_0^h \ldots \int_0^h \Delta^{\alpha}_{\frac{t_1+\ldots+t_\alpha}{\alpha}} f(x)dt_1\ldots dt_\alpha \right\|_{L^p(T)} \le$$
$$\le \frac{1}{h^r}\int_0^h \ldots \int_0^h \left\| \Delta^{\alpha}_{\frac{t_1+\ldots+t_\alpha}{\alpha}} f(x) \right\|_{L^p(T)} dt_1\ldots dt_\alpha. \tag{3.82}$$

Yaklaşım teorisinde bilinen bir metot yardımı ile

$$g_\delta(x) := \frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} f_{\alpha,h}(x)dh \quad (1<\delta\le 1). \tag{3.83}$$

tanımlayalım. (3.84) ve Fubini teoremi ile kolaylıkla

$$\left\| g_\delta(x)-f(x)\right\|_{L^p(T)} \le c.\tilde{\omega}_\alpha(f,\delta)_p \tag{3.84}$$

çıkar. (3.85) den

$$g_\delta^{(\alpha)}(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} g_\delta(x) = \frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} f^{(\alpha)}_{\alpha,h}(x)dh \quad .$$

Dolayısıyla $g_\delta \in W^p_\alpha(T)$ dir.

Biliyoruz ki

$$f^{(\alpha)}_{\alpha,h}(x) = h^{-r}\sum_{s=0}^{\alpha-1}(-1)^{\alpha+s+1}\binom{\alpha}{s}\left(\frac{\alpha}{\alpha-s}\right)^{\alpha} \Delta^{\alpha}_{\frac{\alpha-s}{\alpha}h} f(x). \tag{3.85}$$

$p=1$ için (3.87) i ve Fubini teoremini kullanarak ve $\tilde{\omega}_\alpha(f,\delta)_p$ tanımını göz önüne alarak

$$\left\| g_{\delta}^{(\alpha)}(x) \right\|_{L^1(T)} \le \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \left\| f_{\alpha,h}^{(\alpha)}(x) \right\|_{L^1(T)} dh \le$$

$$\le \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \int_0^{\delta} \left(\sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{2\pi} \left| \Delta^{\alpha}_{\frac{\alpha-s}{\alpha}h} f(x) \right| dx \right) dh \le$$

$$\le \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{\delta} \left(\int_0^{2\pi} \left| \Delta^{\alpha}_{\frac{\alpha-s}{\alpha}h} f(x) \right| dx \right) dh \le$$

$$\le \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\delta} \left| \Delta^{\alpha}_{\frac{\alpha-s}{\alpha}h} f(x) \right| dh \right) dx =$$

$$= \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\alpha-s}{\alpha}\delta} \left| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right| dh \right) dx \le$$

$$\le \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \int_0^{\delta} \left(\int_0^{2\pi} \left| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right| dx \right) dt =$$

$$= \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \int_0^{\delta} \left\| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right\|_{L^1(T)} dt =$$

$$= c.\delta^{-\alpha} \tilde{\omega}_r \wedge (f,\delta)_p .$$

Ve böylece,

$$\left\| g_{\delta}^{(\alpha)}(x) \right\|_{L^1(T)} \le c.\tilde{\omega}_r (f,\delta)_p . \tag{3.86}$$

$p = \infty$ için (3.87) i ve Fubini teoremini kullanarak ve $\tilde{\omega}_{\alpha}(f,\delta)_p$ tanımını göz önüne alarak

$$\left| g_{\delta}^{(\alpha)}(x) \right|_{L^1(T)} \le \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \left| f_{\alpha,h}^{(\alpha)}(x) \right|_{L^1(T)} dh \le$$

$$\le \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{\delta} \left| \Delta^{\alpha}_{\frac{\alpha-s}{\alpha}h} f(x) \right| dh =$$

$$= \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha-s}{\alpha}\delta} \left| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right| dt \le$$

$$\le \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^{\alpha} \int_0^{\delta} \left| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right| dt =$$

$$= \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \int_0^{\delta} \left| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right| dt =$$

$$= \frac{c}{\delta^{\alpha+1}} \int_0^{\delta} \left\| \Delta^{\alpha}_{t} f(x) \right\|_{L^{\infty}(T)} dh .$$

Böylece

$$\left\| g_{\delta}^{(\alpha)}(x) \right\|_{L^{\infty}(T)} \le c.\delta^{-\alpha} \tilde{\omega}_r \wedge (f,\delta)_p \tag{3.87}$$

çıkar.

Bu nedenle $p=1$ ve $p=\infty$ için (3.86), (3.88) ve (3.89) dan

$$K_{\alpha}(f,\delta)_p \le \| f - g_{\delta} \|_{L^p(T)} + \delta^{\alpha} \left\| g_{\delta}^{(\alpha)}(x) \right\|_{L^p(T)}$$
$$\le c.\tilde{\omega}_{\alpha}(f,\delta)_p$$

elde edilir.Şimdi (3.81) den

$$\omega_{\alpha}(f,\delta)_p \le c.K_{\alpha}(f,\delta)_p \le c.\tilde{\omega}_{\alpha}(f,\delta)_p .$$

Son eşitsizlik ve (3.83) bize (3.2) verir.

3.7.8 Önerme

$1 \le p \le \infty$ ve $f \in L^p(T)$ olsun. Her $0 < \alpha < \beta$ için

$\tilde{\omega}_{\beta}(f,\delta)_p \le c.\tilde{\omega}_{\alpha}(f,\delta)_p,\ \delta > 0$ eşitsizliği

geçerlidir.

İspat

[37] deki 5.teorem ile

$$\left\| \Delta_h^{\beta} f(\cdot) \right\|_{L^p(T)} \le c \left\| \Delta_h^{\alpha} f(\cdot) \right\|_{L^p(T)}$$

buluunur. Bu eşitsizlikten $1 \le p \le \infty$ için

$$\left\| \Delta_h^{\beta} f(\cdot) \right\|^p_{L^p(T)} \le c \left\| \Delta_h^{\alpha} f(\cdot) \right\|^p_{L^p(T)}$$

bulunur. Şimdi son eşitsizliği h'a göre 0'dan δ'ya integrallersek

$$\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^{\beta} f(\cdot)\right\|_{L^p(T)}^p dh \le c\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^{\alpha} f(\cdot)\right\|_{L^p(T)}^p dh \ .$$

$\delta > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^{\beta} f(\cdot)\right\|_{L^p(T)}^p dh \le c\,\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^{\alpha} f(\cdot)\right\|_{L^p(T)}^p dh.$$

Böylece son eşitsizlikten

$$\left(\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^{\beta} f(\cdot)\right\|_{L^p(T)}^p dh\right)^{\frac{1}{p}} \le c\left(\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^{\alpha} f(\cdot)\right\|_{L^p(T)}^p dh\right)^{\frac{1}{p}}$$

ispatı $p = \infty$ durumunda benzer biçiminde gösterilebilir.

Bu önerme $w_{\alpha}(f,\cdot)_p$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere kesirli modül için [37] nolu kaynakta kanıtlanmıştır.

3.7.9 Sonuç

$1 \le p \le \infty$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ olsun. Bu durumda $f \in L^p(T)$ için

$$E_n(f)_p \le c\tilde{\omega}_{\alpha}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p ,n = 1,2,... \tag{3.88}$$

geçerlidir.

$f \in L^p(T)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ için $[\alpha]$ yı gerçek sayı α nın tam değer kısmını alarak gösterirsek,

$$E_n(f)_p \le c\omega_{[\alpha]+2}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p$$

bilinmektedir. Böylece son eşitsizlik, 3.7.7 Önerme ve 3.7.8 Önerme ile

$$E_n(f)_p \le c\omega_{[\alpha]+2}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \le c\tilde{\omega}_{[\alpha]+2}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \le c\tilde{\omega}_{\alpha+2}\left(f,\frac{1}{n}\right)_p$$

elde edilir. İspat böylelikle biter.

3.7.10 Önerme

$m \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}^{+}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $T_n \in T_n^m$, $n \geq 1$ ise yalnızca r ve p ye bağlı öyle bir $c > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha} T_n}{\partial x_i^{\alpha}} \right\|_{L^p(T^m)} \leq c.n^{\alpha} \left\| T_n \right\|_{L^p(T^m)} .$$

İspat

$[15]$ den $t_n \in T_n$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\left\| t_n^{(\alpha)} \right\|_{L^p(T)} \leq c.n^{\alpha} \left\| t_n \right\|_{L^p(T^m)}, n = 1, 2, ... \tag{3.89}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikten

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha} T_n(x)}{\partial x_i^{\alpha}} \right\|_{L^p(T^m)} \leq \left\{ \int\limits_{T^{m-1}} \left(\int\limits_{T} \left| \frac{\partial^{\alpha} T_{n,i,x}(x_i)}{\partial x_i^{\alpha}} \right| dx_i \right)^{\frac{1}{p} \cdot p} \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c.n^{\alpha} \left\{ \int\limits_{T^{m-1}} \left\| T_{n,i,x}(x_i) \right\|_{L^p(T)}^{p} \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c.n^{\alpha} \left\{ \int\limits_{T^{m-1}} \left(\int\limits_{T} \left| T_{n,i,x}(x_i) \right|^{p} dx_i \right) \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c.n^{\alpha} \left\{ \int\limits_{T} \left| T_n(\underline{x}) \right|^{p} dx_1, ..., dx_m \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c.n^{\alpha} \left\| T_n(\underline{x}) \right\|_{L^p(T^m)} .$$

elde edilir.

Aşağıdaki önerme, 3.7.10 Önerme ispatında kullanılan yöntem ve [37] nolu kaynaktaki tek değişkenli durum ile kanıtlanabilir.

3.7.11 Önerme

$m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\alpha \in \mathbb{N}^+$ olsun. Eğer $T_n \in T_n^m, n \geq 1$ ise sadece α ve p ye bağlı bir c sabiti vardır ki:

$$\Omega_{\alpha,i}(T_n,\delta)_{L^p(T^m)} \leq c.\delta^\alpha \left\| \frac{\partial^\alpha T_n}{\partial x_i^\alpha} \right\|_{L^p(T^m)} .$$

Şimdi temel sonuçların ispatlarını inceleyelim :

İspat

3.7.2 Teoreminin ispatını verelim.

$f \in L^p(T)$,Fourier serisi (3.70) ve (3.70) in kısmi toplamlar dizisi $s_n(f)$ olsun. Yani

$$s_n(f)(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e^{ikx} \ (n \in N).$$

Bu $s_n(f)$ dizisi için Valle-Poussin ortalaması

$$v_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} s_k(f)(x) \ (n \in N)$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki

$v_n \in T_{2n}(n \in \mathbb{N})$ sağlanır.

Her $f \in L^p(T)(1 \leq p \leq \infty)$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\|f - v_n(f)\|_{L^p(T)} \leq cE_n(f)_p , \tag{3.90}$$

$$\|v_n(f)\|_{L^p(T)} \leq c\|f\|_{L^p(T)} . \tag{3.91}$$

Bunlar için [33] numaralı kaynağa bakılabilir.

Her $F \in L^p(T)$ için

$$V_{n,i}F(\underline{x}) := v_n(F_{i,\underline{x}})(x_i) \quad (1 \le i \le m)$$

elde edilir.

(3.92), (3.90) ve Fubini teoremi kullanılarak her $1 \le p < \infty$ için

$$\left\| F - V_{n,i}F \right\|_{L^p(T^m)} = \left\{ \int_{T^m} \left| (F - V_{n,i}F)(\underline{x}) \right|^p dx_1 ... dx_m \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int_{T^{m-1}} \left(\int_T \left| (F_{i,\underline{x}} - v_n F_{i,\underline{x}})(x_i) \right|^p dx_i \right)^{\frac{1}{p}\cdot p} \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}=} =$$

$$= \left(\int_{T^{m-1}} \left\| (F_{i,\underline{x}} - v_n F_{i,\underline{x}})(x_i) \right\|_{L^p(T)}^p \underline{dx_i} \right)^p \le$$

$$\le c \left\{ \int_{T^{m-1}} (E_n(F_{i,\underline{x}})_p)^p \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c \left\{ \int_{T^{m-1}} (\tilde{w}_\alpha(F_{i,\underline{x}}, \frac{1}{n})_p)^p \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c \left\{ \left(\int_{T^{m-1}} \frac{1}{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \left(\left\| \Delta_h^\alpha F_{i,\underline{x}} \right\|_{L^p(T)}^p \right) dh \right) \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c \left\{ \int_{T^{m-1}} \left(\frac{1}{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \left(\int_T \left| \Delta_h^\alpha F_{i,\underline{x}}(x_i) \right|^P dx_i \right) dh \right) \underline{dx_i} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c \left\{ \underline{\frac{1}{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \left(\int_{T^m} \left| \Delta_h^{\alpha,i} F(\underline{x}) \right|^P dx_1 ... dx_m \right) dh} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c \left\{ \underline{\frac{1}{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \left(\left\| \Delta_h^{\alpha,i} F \right\|_{L^p(T^m)}^p \right) dh} \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c \left\{ \underline{\frac{1}{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \left(\Omega_{\alpha,i} \left(F, \frac{1}{n} \right)_{L^p(T^m)} \right)^p dh} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c\Omega_{\alpha,i} \left(F, \frac{1}{n} \right)$$

Dolayısıyla

$$\left\| F - V_{n,i}F \right\|_{L^p(T^m)} = c\Omega_{\alpha,i}\left(F, \frac{1}{n} \right)_{L^p(T^m)} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+) \tag{3.92}$$

eşitsizliği kısmi kesirli modüller için geçerlidir. Eşitlik (3.94) her değişkendeki yaklaşım derecesini vermez. Ancak (3.94) e dayanarak eşitsizlik (3.78) i iyi bilinen bir yaklaşım teorisi tekniği ile ispat edilebilir [30]. İspatın ikinci aşamasında çok değişkenli trigonometrik polinomlar aşağıdaki gibi oluşturacaktır.

$$V_n F(\underline{x}) := V_{n,1}V_{n,2}...V_{n,m}F(\underline{x}).$$

(3.93),(3.94) ve $\Omega_\alpha(F,.)_{L^p(T^m)}$ tanımı ile

$$\begin{aligned}
&E_n(F)_{L^p(T^m)} \leq \left\| F - V_n F \right\|_{L^p(T^m)} = \\
&= \left\| \left(F - V_{n,1}F \right) + \left(V_{n,1}F - V_{n,1}V_{n,2}F \right) + \right. \\
&\left. + ... + \left(V_{n,1}V_{n,2}...V_{n,m-1}F - V_{n,1}V_{n,2}...V_{n,m}F \right) \right\|_{L^p(T^m)} \leq \\
&\leq c\sum_{i=1}^{m} \left\| F - V_{n,i}F \right\|_{L^p(T^m)} \leq \\
&\leq c.\sum_{i=1}^{m} \Omega_{\alpha,i}\left(F, \frac{1}{n} \right)_{L^p(T^m)} \leq \Omega_\alpha\left(F, \frac{1}{n} \right)_{L^p(T^m)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$p = \infty$ için 3.7.2 Teorem, (3.92), (3.93) ve (3.90) kullanılarak da ispatlanabilir.

$1 < p < \infty$ için 3.7.2 Teorem Vallee-Poussin yerine kısmi toplamlar dizisi kullanılarak da ispatlanabilir.

İspat

3.7.3 Teoreminin ispatını verelim.

$F \in L^p(T^m)$ ve $T_n(n \in \mathbb{N})$, T_n^m sınıfında F nin en iyi yaklaşım polinomu olsun. Modülün alt toplamsallığı ile

$$\Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} \leq \Omega_{\alpha,i}(F-T_{2^{\nu+1}},\delta)_{L^p(T^m)} \leq \Omega_{\alpha,i}(T_{2^{\nu+1}},\delta)_{L^p(T^m)} \tag{3.93}$$

her $\nu = 0,1,...$ için (3.76) kullanılarak

$$\Omega_{\alpha,i}(F-T_{2^{\nu+1}},\delta)_{L^p(T^m)} \leq c\left\| F-T_{2^{\nu+1}} \right\|_{L^p(T^m)} \leq cE_{2^{\nu+1}}(F)_{L^p(T^m)} \tag{3.94}$$

elde edilir. En iyi yaklaşım dizisi 3.7.11 Önerme ile azalan olduğundan

$$\Omega_{\alpha,i}(T_{2^{\nu+1}},\delta)_{L^p(T^m)} \leq c\partial^{\alpha} \left\| \frac{\partial^{\alpha} T_{2^{\nu+1}}}{\partial x_i^{\alpha}} \right\|_{L^p(T^m)} \leq$$

$$\leq c\delta^{\alpha} \left\{ \left\| \frac{\partial^{\alpha} T_1}{\partial x_i^{\alpha}} \right\|_{L^p(T^m)} + \sum_{s=0}^{\nu} \left\| \frac{\partial^{\alpha} T_{2^{s+1}}}{\partial x_i^{\alpha}} - \frac{\partial^{\alpha} T_{2^s}}{\partial x_i^{\alpha}} \right\|_{L^p(T^m)} \right\} \leq$$

$$\leq c\delta^{\alpha} \left\{ E_0(F)_{L^p(T^m)} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)\alpha} \left\| T_{2^{s+1}} - T_{2^s} \right\| \right\}_{L^p(T^m)} \leq$$

$$\leq c\delta^{\alpha} \left\{ E_0(F)_{L^p(T^m)} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)\alpha} E_{2^s}(F)_{L^p(T^m)} \right\}$$

çıkar. Dahası $s \geq 1$ için $c^* = 2^{\alpha+1}$ olmak üzere

$$2^{(s+1)\alpha} E_{2^s}(F)_{L^p(T^m)} \leq c^* \sum_{k=2^{s-1}+1}^{2^s} k^{\alpha-1} E_k(F)_{L^p(T^m)} \tag{3.95}$$

$$\Omega_{\alpha,i}(T_{2^{\nu}},\delta)_{L^p(T^m)} \leq c\delta^{\alpha} \left\{ E_0(F)_{L_W^{p,q}} + \sum_{k=1}^{2^{\nu}} k^{\alpha-1} E_k(F)_{L^p(T^m)} \right\} \tag{3.96}$$

elde edilir.

Eğer ν yi $2^{\nu} \leq n < 2^{\nu+1}$ i sağlayacak şekilde seçersek öyle ki (3.97) ile

$$E_{2^{\nu+1}}(F)_{L^p(T^m)} \leq \frac{2^{(\nu+1)\alpha} E_{2^{\nu+1}}(F)_{L^p(T^m)}}{2^{(\nu+1)\alpha}} \leq c\delta^{\alpha} \sum_{k=1}^{2^{\nu}} k^{\alpha-1} E_k(F)_{L^p(T^m)} \quad .$$

(3.95), (3.96), (3.97) ve son eşitsizlikten;

$$\Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} \leq$$

$$\leq cE_{2^{\nu+1}}(F)_{L^p(T^m)} + c\delta^{\alpha}\left\{E_0(F)_{L^p(T^m)} + \sum_{k=1}^{2^{\nu}} k^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)}\right\} \leq$$

$$\leq c\delta^{\alpha}\sum_{k=1}^{2^{\nu}} k^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)} +$$

$$+c\delta^{\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{2^{\nu}} k^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)} + E_0(F)_{L^p(T^m)}\right\} \leq$$

$$\leq c\delta^{\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{2^{\nu}} k^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)} + E_0(F)_{L^p(T^m)}\right\} \leq$$

$$\leq c\delta^{\alpha}\left\{\sum_{m=1}^{n} k^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)} + E_0(F)_{L^p(T^m)}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{c}{n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)}.$$

Böylece

$$\Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} = \max_{1\leq i\leq m}\Omega_{\alpha,i}(F,\delta)_{L^p(T^m)} \leq c\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k(F)_{L^p(T^m)}.$$

ve 3.7.3 Teorem ispatlanmış olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çok değişkenli fonksiyonlarda fark operatörleri, düzgünlük modülleri ile ilgili elde edilen sonuçlar ve yaklaşım problemleri yeniden çalışılmış olup konuyla ilgili kaynakları tarayıp bu konuda nasıl çalışmalar yapılmış hangi metotlar kullanılmış incelenerek geniş bir özeti ve derlemesi yapılmıştır. Özellikle Türkçe kaynak konusunda sıkıntı yaşanıldığını görüp bu konuda daha sonra çalışacaklar için bir katkı sunulmak istenilmiştir.

5. KAYNAKLAR

[1] A. Tekcan, *İleri analiz*, Dora yayıncılık, 2010.

[2] L. Leindler, “Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood”, Acta Sci. Math. 31, pp. 279-285, 1970

[3] A. F. Timan, *Theory of Approximation of functions of a real variable* ,Dower publications,Inc. 1994.

[4] A. I. Stepanets, *Methods of approximation theory*, De gruyter, 2005.

[5] M. F. Timan, *Approximation and properterties of periodic functions,* Dnepropetrovsk, 2011.

[6] M. F. Timan, “*Comparison of total and mixed modulus of smoothness in two varible case*”, Conferece DSHI, Dnepropetrovsk,pp. 65-67, 1965.

[7] M. F. Timan, “Some identities for functions of several variables and their applications”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 178:1, pp.40-42, 1968.

[8] M. F. Timan, “Difference properties of functions of several variables”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.***,** 33:3, pp. 667–676, 1969.

[9] M. F. Timan, “Converse theorems in the constructive theory of functions of many variables”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 120:6, pp. 1207–1209, 1958.

[10] S. M. Nikolskii, *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Nauka, M., 1969.

[11] S. N. Bernstein, *Collected Works,* Vol. 1, Constructive theory of functions, Moscow, [in Russian], 1952.

[12] A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1960.

[13] M. F. Timan, *Main theorems of the constructive theory of functions in* L_p *and some applications*, Dr. Thesis, Tbilisi, 1962.

[14] M. F. Timan, *Main properties of functions with a given approximation order" Autoreferat Thesis*, Leningrad, 1973.

[15] M. F. Timan, “On total and partial approximations of functions of many variables”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 124, 527–528, 1959.

[16] G. I. Natanson ve M. F. Tīman, “The geometric means of the sequence of best approximations. (Russian)” *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.*, pp. 50-52, 123, 1979.

[17] M. F. Timan, “On the interrelation between the total and partial approximations in the mean for functions of many variables”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 112:1, pp.24–26, 1957.

[18] S. N. Bernstein, *Collected Works*, Vol. 2, Constructive theory of functions, (Moscow, [in Russian]), 1954.

[19] V. N. Temlyakov, “Best approximations for functions of two variables”, *Soviet Math. Dokl.*, 223, no:5, pp.1079–1082, 1975.

[20] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol:1, Mir, 1965.

[21] M. F. Timan, “On total and partial modulus of smoothness of functions of many variables”, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 12, pp.1546–1549,1961.

[22] A.Güven ve H.Yurt, “Approximation theorems ın L^p spaces of functıons of several variables”, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 45 , pp. 5–22, 2016.

[23] R. Akgün, “Sharp Jackson and converse theorems of trigonometric approximation in weighted Lebesgue spaces”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 152, pp. 1–18, 2010.

[24] R. Akgün ve D.M. Israfilov, “Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Orlicz spaces”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, pp. 13–28, 2010.

[25] R. Akgün, “Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent”, *Ukrainian Math. J.*, 63 pp. 1–26, 2011.

[26] R. Akgün, “Polynomial approximation in weighted Lebesgue spaces”, *East J. Approx.*, 17, pp. 253–266, 2011.

[27] R. Akgün, “Improved converse theorems and fractional moduli of smoothness in Orlicz spaces”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*,36,pp. 49–62, 2013.

[28] P .L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich ve Stens, R.L. ,“Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes”, *Canad. J. Math.*, 29,pp. 781–793, 1977.

[29] R.A. Devore ve G.G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[30] Z. Ditzian ve V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[31] Z. Ditzian, "Polynomial approximation and $\omega_{\varphi}^{r}(f;t)$ twenty years later, Surveys in Approx. Theory", 3 , pp. 106–151, 2007.

[32] N. X. Ky, "Approximation in several variables with Freud-Type and A_p−weights", *Studia Sci. Math. Hungar*., 49, 139–155, 2012.

[33] G. Mastroianni ve G.V. Milovanovic, *Interpolation Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[34] P. P. Petrushev ve V.A. Popov, *Rational Approximation of Real Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[35] M. K. Potapov, B.V. Simonov ve S.Y. Tikhonov, "Mixed Moduli of Smoothness in L^p, $1 < p < \infty$: A survey", *Surveys in Approx. Theory*, 8, pp. 1–57, 2007.

[36] S. G. Samko, A.A. Kilbas ve O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[37] R. Taberski, Differences, "Moduli and derivatives of fractional orders", *Comment*. Math., 19, pp. 389–400, 1977.

[38] A. F. Timan, *Theory of Approximation of functions of a real variable*, Pergamon Press, New York, 1963.

[39] Y. E. Yildirir ve D.M. Israfilov, "Approximation theorems in weighted Lorentz spaces", *Carpatian J. Math*., 26, pp.108–119, 2010.

[40] Y. E. Yildirir ve D.M. Israfilov, "Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces", *Math. Inequal. Appl*., 14, pp.359–371, 2010.