T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

HÜLYA AYTİMUR

DOKTORA

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR(Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Bayram ŞAHİN
Prof. Dr. Bengü BAYRAM
Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN
Dr. Öğr. Üyesi Fatma KARACA

BALIKESİR, HAZİRAN - 2020

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Hülya AYTİMUR

(imza)

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2018/018 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ
DOKTORA TEZİ
HÜLYA AYTİMUR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2020

Bu tezde istatistiksel manifoldlar üzerinde çalışılmıştır. Bilinen bazı istatistiksel manifoldlar üzerinde skaler eğrilik için bazı eşitsizlikler elde edilmiş ve bu manifoldlar üzerinde Chen- Ricci ve genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin eşitlik durumları gözönüne alınmıştır. Ayrıca farklı bir istatistiksel manifoldun submersiyonları incelenmiş, bu submersiyonların temel ve baz manifoldlarının bazı şartlar altında özellikleri araştırılmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde tez süresince bize yardımcı olacak bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde istatistiksel manifoldlar ile ilgili tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel bazı kavramlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold tanımı verilip; ardından bir örnek verilmiştir. Bu manifoldun altmanifodlarının skaler eğriliği için eşitsizlik verilmiş olup, yine bu tip altmanifoldlar için Chen-Ricci ve genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği elde edilmiştir.

Beşinci bölümde Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldların istatistiksel altmanifold kavramı verilmiş olup; ardından çeşitli örnekler elde edilmiştir. Ayrıca bu tip altmanifodların skaler eğriliği için bir eşitsizlik bulunmuş olup yine bu tip altmanifoldlar için Chen-Ricci eşitsizliği ifade edilmiştir.

Altıncı bölümde ise kosimplektik-benzeri istatistiksel manifoldların submersiyonları elde edilmiş olup; bazı şartlar altında temel ve baz manifoldlarının özellikleri incelenmiştir. Bu tip manifoldların eğrilik tensörlerinin sağlaması gereken bir eşitlik tanımlanmış olup yine bu eşitlik altında temel ve baz manifoldlarının bazı özellikleri araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: İstatistiksel manifold, Chen-Ricci eşitsizliği, genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği, istatistiksel submersiyon, skaler eğrilik, eğrilik tensörü, altmanifold

Bilim Kod / Kodları : 20402 Sayfa Sayısı : 98

ABSTRACT

GEOMETRY OF STATISTICAL MANIFOLDS
PH.D THESIS
HÜLYA AYTİMUR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, JUNE - 2020

In this thesis, statistical manifolds are studied. Some inequalities for scalar curvature on some known statistical manifolds have been obtained and Chen Ricci, generalized Wintgen inequalities on these manifolds have been found. Equality cases of these inequalities are examined. In addition, submersions of a different statistical manifold and the properties of the total and base spaces of these submersions are examined under some conditions.
This thesis consists of six chapters.
The first part is the introduction.
In the second part, some basic concepts are given to help us during the thesis.
In the third part, some basic concepts related to statistical manifolds which are used in the other chapters of the thesis are given.
In the fourth part, the definition of the statistical manifolds of quasi-constant curvature and then an example of these manifolds are given. For the scalar curvature of the statistical submanifold of the these statistical manifolds, an inequlity is found. Chen-Ricci and generalized Wintgen inequality are obtained for the scalar curvature of the submanifolds of these manifolds.
In the fifth part, the concept of statistical submanifold of Sasaki-like statistical manifolds is given and then various examples are obtained. In addition, an inequality is obtained for the scalar curvature of such submanifolds and Chen-Ricci inequality is given for these submanifolds.
In the sixth part, submersions of cosymplectic-like statistical manifolds are obtained and properties of total and base spaces are examined under some conditions. The equality that the curvature tensors of these types of manifolds should provide is defined and some properties of the total and base space are investigated under this equality.

KEYWORDS: Statistical manifolds, Chen-Ricci inequlity, generalized Wintgen inequality, statistical submersion, scaler curvature, curvature tensör, submanifold
Science Code / Codes : 20402 Page Number : 98

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

F	:	İstatistiksel submersiyon
h, h^*	:	Simetrik, 2-lineer fonksiyonlar
H	:	Ortalama eğrilik vektör alanı
H^*	:	Dual konneksiyona göre ortalama eğrilik vektör alanı
M	:	Manifold
R	:	Eğrilik tensör alanı
R^*	:	Dual konneksiyona göre eğrilik tensor alanı
$Ric(X)$	:	Ricci eğrilik tensör alanı
$Ric^*(X)$	:	Dual konneksiyona göre Ricci eğrilik tensör alanı
T, A	:	O’Neill tensörleri
T^*, A^*	:	Dual konneksiyona göre O’Neill tensörleri
(M, ∇, g)	:	İstatistiksel manifold
(∇, ∇^*)	:	Dual afin konneksiyon çifti
∇^0	:	Levi-Civita konneksiyonu
τ	:	Skaler eğrilik
φ, φ^*	:	$(1,1)$ tipinde tensör alanı
ξ	:	vektör alanı
η	:	1- form
$\mathcal{H}(M)$	:	yatay vektör alanları uzayı
$\mathcal{V}(M)$	:	dikey vektör alanları uzayı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada çeşitli istatistiksel manifoldlar üzerinde Chen-Ricci eşitsizliği elde edilmiş ve çeşitli istatistiksel manifoldlarda istatistiksel submersiyonlar için bazı sonuçlar elde edilmiş, bazı örnekler verilmiştir.

Bu tezi hazırlarken bana her konuda destek olan, yol gösteren ve her daim yanımda olan sevgisini, yardımlarını, anlayışını, bilgisini ve deneyimlerini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR'e, tecrübelerinden ve yardımlarından çokça faydalandığım hocam Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu süreçte tezin şekillenmesinde yardımcı olan tez izleme komitesindeki hocalarıma çok teşekkür ediyorum.

Her türlü desteğini benden esirgemeyen canım arkadaşım Araş. Gör. Dr. Nihal TAŞ'a yürekten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca hep yanımda olan varlığı ile beni güçlendiren canım oğlum Ömer'ime varlığı ile bana anlam kattığı için çok teşekkür ediyorum.

Yanımda olan ve bana desteğini esirgemeyen canım aileme ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, doktora eğitimim boyunca maddi desteğinden dolayı "2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı" na kayıtlı bursiyer olduğum TÜBİTAK – BİDEB'e saygılarımla teşekkürü bir borç bilirim.

Balıkesir, 2020 **Hülya AYTİMUR**

1. GİRİŞ

İstatistiksel manifold kavramı, istatistiksel dağılımın çalışılmasıyla ortaya çıkmıştır. İstatistiksel manifold, her noktasında bir olasılık dağılımını temsil eden bir diferensiyellenebilir manifolddur. Tüm olasılık ölçümlerinin kümesi sonsuz boyutlu bir istatistiksel manifold içerir. Kesikli olasılık dağılımının istatistiksel modeli için farklı bir geometrik yaklaşım Amari [1] tarafından 1985 yılında ortaya atılmıştır.

İstatistiksel manifoldların afin diferensiyel geometri, Hessian geometri ve bilgi geometrisinde birçok uygulamaları vardır. Afin geometride eğer bir düzlemsel afin konneksiyon ile birlikte bir Hessian metrik var ise bu durumda bu manifold bir Hessian manifold olarak adlandırılır. Hessian manifoldlar istatistiksel manifoldların önemli bir sınıfıdır [2].

İstatistiksel manifoldların bilgi geometrisinde istatistiksel sonuç, lineer sistemler ve zaman serileri, sinir ağları ve lineer olmayan sistemler, lineer programlama, konveks analiz ve tamamen integrallenebilir dinamik sistemler, kuantum bilgi geometrisi ve geometrik modelleme gibi çeşitli uygulama alanları vardır [3].

Reel uzay formların altmanifoldlarının iç ve dış değişmezleri arasındaki eşitsizlikler ilk olarak 1993 yılında B.-Y. Chen tarafından ifade edilmiştir [4]. Bu eşitsizlik bugün Chen eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Temel dış değişmez olarak ortalama eğrilik vektörü ve iç değişmez olarak da skaler eğrilik ve Ricci eğriliği verilebilir. Bir reel uzay formunda bir altmanifold için Ricci eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü arasındaki ilişki Chen tarafından [5] çalışmasında verilmiştir. Bu eşitsizlik bugün Chen-Ricci eşitsizliği olarak adlandırılmaktadır.

[6] çalışmasında I. Mihai ve [7] çalışmasında K. Matsumoto ve I. Mihai Sasakian uzay formlarda altmanifoldların ortalama eğrilik vektörü ve Ricci eğriliği arasındaki ilişkileri elde etmişlerdir. Bundan sonra birçok geometrici çeşitli uzaylarda farklı altmanifoldlar için benzer problemleri çalışmışlardır ([8-12]).

Ayrıca [13] çalışmasında M. E. Aydın, A. Mihai ve I. Mihai sabit eğrilikli istatistiksel manifoldların altmanifoldları için iç ve dış değişmezler arasındaki ilişkiyi elde etmişlerdir. [14] de A. Mihai ve I. Mihai sabit Hessian eğrilikli Hessian manifoldların istatistiksel altmanifoldlarını çalışmışlardır.

Bir Riemann submersiyonu uzaklıkları koruyan ve maksimal ranka sahip bir dönüşümdür ([15-19]). [20] çalışmasında, Abe ve Hasegawa, temel uzay bir istatistiksel manifold olduğunda yatay distribüsyonları ile birlikte bir afin submersiyon çalışmışlardır.

Takano [21] çalışmasında, kompleks yapıların istatistiksel submersiyonlarını, [22] çalışmasında, çok değişkenli normal dağılımların uzayında istatistiksel submersiyonlarını, [23] çalışmasında da, hemen hemen kontakt yapılar ile birlikte istatistiksel manifoldlar ve bunların submersiyonlarını çalışmıştır.

Yukarıdaki çalışmalar doğrultusunda, bu çalışmada yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifoldların altmanifoldları, Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldların altmanifodları ve kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonlar ele alınacaktır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, bu çalışmanın temel konusunu oluşturan istatistiksel manifold kavramı, tanımı ve bu manifoldlar ile ilgi bazı özellikler ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold kavramı tanıtılmış ve bu tip bir istatistiksel manifold örneği verilmiştir. Bir yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifoldun bir altmanifoldunun skaler eğriliği için bir eşitsizlik elde edilmiştir. Ayrıca Chen-Ricci eşitsizliği ve genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği de bu tip altmanifoldlar için ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde, Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldların istatistiksel altmanifoldları tanıtılmış ve örnekler verilmiştir. Bu tip bir manifoldun eğrilik tensörünün sağladığı özel bir eşitlik için altmanifoldun skaler eğriliği ile ilgili eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca devamında da bu tip istatistiksel manifoldların alt manifoldları için Chen-Ricci eşitsizliği bulunmuştur.

Son bölümünde, kosimplektik-benzeri istatistiksel manifoldlar üzerinde durulmuştur. Bu tip bir manifoldun eğrilik tensörünün sağladığı özel bir eşitlik için örnekler verilmiştir. Kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonların temel ve baz manifoldlarının bazı şartlar altında sağladığı özellikler incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları ve Levi-Civita Konneksiyonu

Tanım 2.1.1. [24] M bir diferensiyellenebilir manifold ve üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanları kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

(a) $g(X,Y)=g(Y,X)$,

(b) $g(X,X)\geq 0$ ve $\forall X\in\chi(M)$ için $g(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$

şartları sağlanıyorsa, g bilineer formuna *Riemann metriği* veya *metrik tensör* adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine *Riemann manifoldu* denir.

Tanım 2.1.2. [25] M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda $X,Y,Z\in\chi(M)$, $\forall f,g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için

$$\nabla:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

dönüşümü

i) $\nabla_X(\alpha Y+\beta Z)=\alpha\nabla_X Y+\beta\nabla_X Z$

ii) $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$

iii) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya bir *afin konneksiyon* denir.

Tanım 2.1.3. [19] M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇ M üzerinde afin konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

$$(X,Y)\to T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

ile tanımlı T tensör alanına ∇ afin konneksiyonunun *torsion tensör alanı* denir. Burada [,] Lie operaörünü göstermektedir.

Tanım 2.1.4. [25] (M,g) bir Riemann manifoldu ve

$$\nabla:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

afin konneksiyon olsun. $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ (torsiyonsuzluk özelliği)

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (paralellik aksiyomu)

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya *Riemann konneksiyonu* veya *Levi-Civita konneksiyon* adı verilir.

Tanım 2.1.5. [25] M bir C^∞ manifold ve ∇ M de bir afin konneksiyon olsun. M nin eğrilik tensör alanı *R*,

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlanır, burada $X,Y,Z \in \chi(M)$ dir.

Önerme 2.1.6. [25] Eğer ∇ afin konneksiyonu torsiyonsuz ise R eğrilik tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

ii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (1. Bianchi özdeşliği)

iii) $(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$ (2. Bianchi özdeşliği)

iv) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$.

Tanım 2.1.7. [26] M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M nin eğrilik tensör alanı için

$$R \equiv 0$$

ise manifolda *flatdir* denir.

Tanım 2.1.8. [25] (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $X_p, Y_p \in T_pM$ ve $p \in M$ için

$$K(X_p \wedge Y_p) = \frac{g(R(X_p,Y_p)Y_p, X_p)}{g(X_p,X_p)g(Y_p,Y_p) - g(X_p,Y_p)^2}$$

biçiminde tanımlanan

$$K(\prod) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X_p ve Y_p tarafından gerilen $\prod$ düzlem kesitinin *eğriliği* adı verilir.

Tanım 2.1.9. [26] (M,g) n-boyutlu Riemann manifoldu ve M üzerindeki lokal ortonormal vektör alanları $\{E_1,...,E_n\}$ olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$Ric : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

$$(X,Y) \to Ric(X,Y) = izR(.,X)Y$$

dönüşümü ile tanımlı $(0,2)$-tipinden

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X)Y, E_i)$$

tensör alanına (M,g) manifoldunun *Ricci tensör alanı* adı verilir.

Tanım 2.1.10. [26] (M,g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun *skaler eğriliği* denir ve τ ile gösterilir. Buna göre T_pM uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olmak üzere

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i)$$

dir.

Tanım 2.1.11. [10] M ve $\bar{M}$ birer C^{∞} manifold ve

$$f : M \to \bar{M}$$

bir C^{∞} fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* Jakobian dönüşümü $\forall p \in M$ için regüler ise f ye M den $\bar{M}$ ye bir *immersiyon* denir. Bir başka deyişle $rankf_* = boyM$ ise f bir immersiyondur.

Tanım 2.1.12. [10] $f : (M,g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ bir immersiyon olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(f_*(X), f_*(Y)) = g(X,Y)$$

ise f ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir.

$(\bar{M}, \bar{g})$ ve M sırası ile m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve n-boyutlu bir keyfi manifold olsun. Bu durumda $i : M \to \bar{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. i immersiyonu M üzerine i^*g ile tanımlı simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı form, yani bir Riemann metriği indirger. Bu form g ile gösterilsin. Bu durumda (M,g) bir Riemann manifoldu ve i de izometrik immersiyon olur. $p \in M$ noktasında altmanifoldun tanjant uzayı T_pM olsun. Bu durumda T_pM, $T_p\bar{M}$ tanjant uzayının alt vektör uzayıdır [26].

$\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerinde Riemann konneksiyonu ve ∇ M üzerinde indirgenmiş konneksiyon olmak üzere, $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$, $\overline{\nabla}_X Y$ nin sırası ile tanjant ve normal bileşenleridir. (2.1) formülü *Gauss formülü* olarak bilinir. $h(X,Y)$ simetrik iki lineer normal vektör alanına, M altmanifoldunun *ikinci temel formu* denir [26].

ξ, M için bir normal vektör alanı ve X de tanjant vektör alanı olsun. $\overline{\nabla}_X \xi$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $-A_\xi X$ ve $D_X \xi$ sırası ile $\overline{\nabla}_X \xi$ nin tanjant ve normal bileşenleridir ve D $T^\perp M$ normal demetinde bir metrik konneksiyondur. (2.2) formülü *Weingarten formülü* olarak bilinir ve A_ξ ye ξ yönündeki *şekil operatörü* adı verilir [26].

Önerme 2.1.13. [26]

i) $A_\xi X$, ξ ve X e göre iki lineerdir.

ii) M de herhangi bir ξ normal vektör alanı ve X,Y tanjant vektör alanları için

$$g\left(A_\xi X, Y\right) = \overline{g}\left(h(X,Y), \xi\right)$$

dir.

M, m-boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. R ve $\overline{R}$ sırası ile M ve $\overline{M}$ nin eğrilik tensör alanları olmak üzere; $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri sırası ile

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + \overline{g}\left(h(X,Z), h(Y,W)\right) \\ &\quad - \overline{g}\left(h(X,W), h(Y,Z)\right),\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^\perp = \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z), \tag{2.4}$$

ve

$$R^D(X,Y,\xi,\eta) = \overline{R}(X,Y,\xi,\eta) + g\left(\left[A_\xi, A_\eta\right]X, Y\right) \tag{2.5}$$

ile verilir. Burada R^D normal konneksiyonun eğrilik tensör alanıdır ve $\left[A_\xi, A_\eta\right] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$ dir [26].

Tanım 2.1.14. [26] M, m-boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu, $\{e_1, .., e_n\}$, $\{e_{n+1}, ..., e_m\}$ M üzerinde sırası ile T_pM ve $T_p^\perp M$ nin ortonormal çatıları olsunlar. Bu takdirde ∇ ve ∇^* afin konneksiyonlarına göre ortalama eğrilik vektörleri sırası ile

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h\left(e_i,e_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{m-n}\left(\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^{\alpha}\right)e_{n+\alpha},\ h_{ij}^{\alpha}=\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_i\right),e_{n+\alpha}\right)$$

ve

$$H^{*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h^{*}\left(e_i,e_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{m-n}\left(\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^{*\alpha}\right)e_{n+\alpha},\ h_{ij}^{*\alpha}=\tilde{g}\left(h^{*}\left(e_i,e_i\right),e_{n+\alpha}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2 Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen kontakt metrik manifoldlar ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.2.1. [27] (M,g) $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\varphi^{2}=-I+\eta\otimes\xi\ ,\ \eta(\xi)=1\ ,\ \eta\circ\varphi=0$$

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\ ,\ \eta(X)=g(X,\xi)$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir (1,1)-tipinde bir φ tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-formu ve g Riemann metriği varsa, (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne *hemen hemen kontakt metrik yapı*, (M,φ,ξ,η,g) beşlisine de *hemen hemen kontakt metrik manifold* denir. Eğer $d\eta=\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ koşulu da sağlanıyorsa (M,φ,ξ,η,g) bir *kontakt metrik manifold* olarak adlandırılır. Buradaki Φ dönüşümüne M nin *temel* 2-*formu* adı verilir.

Tanım 2.2.2. [27] (M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold üzerindeki her X,Y,Z vektör alanları için

$$[\varphi,\varphi](X,Y)=\varphi^{2}[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]$$

ile tanımlı $[\varphi,\varphi]$ dönüşümüne φ nin *Nijenhuis torsiyon tensörü* denir. Eğer (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik yapısı için

$$[\varphi,\varphi]+2d\eta\otimes\xi=0$$

ise bu yapıya *normaldir* denir. Bir normal kontakt metrik manifolda bir *Sasakian manifold* adı verilir.

Teorem 2.2.3. [27] Bir hemen hemen kontakt metrik manifoldun Sasakian olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.4. [27] $(\nabla_X \varphi)Y = 0$ ve $\nabla_X \xi = 0$ şartlarını sağlayan bir hemen hemen kontakt metrik manifolda bir *kosimplektik manifold* denir.

2.3 Riemann Submersiyonları

Bu kısımda Riemann submersiyonları ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1. [28] M *m*-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : M &\to T_p M \\ p &\to \mathcal{V}_p \subset T_p M \end{aligned}$$

ile tanımlı $\mathcal{V}$ dönüşümüne bir *distribüsyon* denir.

Tanım 2.3.2. [28] M bir C^∞ manifold; $\mathcal{V}$, M manifoldu üzerinde C^∞ distribüsyon ve B M nin bir altmanifoldu olsun. Eğer B nin her p noktasında B nin tanjant uzayı ile $\mathcal{V}_p$ aynı ise B ye $\mathcal{V}$ nin *integral manifoldu* denir.

Tanım 2.3.3. [28] M bir C^∞ manifold ve B, M nin bir altmanifoldu olsun. Eğer B nin her p noktası için $\mathcal{V}$ nin p yi kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{V}$ ye *integrallenebilirdir* denir.

Tanım 2.3.4. [29] (M, g) ve (B, g') sırasıyla *m*-boyutlu ve *n*-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi : (M, g) \to (B, g')$$

bir örten C^∞ dönüşümü için

$$rank d\pi_* = boy B$$

ise π ye $p \in M$ noktasında bir *submersiyon* denir.

Herhangi bir $p \in B$ için $F_p = \pi^{-1}(p)$ üzerindeki lif (M, g) manifoldunun *r=(m-n)*-boyutlu bir altmanifoldudur. $\pi^{-1}(p)$ altmanifoldlarına submersiyonun *lifleri* denir [17].

Herhangi bir $q \in M$ için (M, g) deki $\mathcal{V}$ integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathcal{V}_q = çek \pi_{*q}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{V}_q$ ye submersiyonun *dikey distribüsyonu* denir [29].

$$\mathcal{H}_q = (\mathcal{V}_q)^\perp$$

şeklinde tanımlı distribüsyona ise submersiyonun *yatay distribüsyonu* denir [29].

Teorem 2.3.5. [29] $\pi : M \to B$ bir submersiyon ve M nin dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ olsun. Bu durumda $\pi(q) = p$ ve $q \in M$ için her $\mathcal{V}_q$ dikey distribüsyonu $\pi^{-1}(p)$ in tanjant uzayı ile çakışır.

Tanım 2.3.6. [29] M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise *yatay vektör alanı* olarak adlandırılır ve yatay vektör alanların kümesi $\chi^h(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.7. [29] M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise *dikey vektör alanı* olarak adlandırılır ve dikey vektör alanların kümesi $\chi^v(M)$ ile gösterilir.

Herhangi bir $E \in \chi(M)$ için E nin dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir.

Tanım 2.3.8. [29] M ve B Riemann manifoldları olsunlar. Eğer bir X yatay vektör alanı ve B üzerindeki bir X' vektör alanı $\pi_*(X) = X'$ eşitliğini sağlıyor ise X ve X' vektör alanlarına π-bağlıdırlar denir. Bu durumda da X vektör alanına *temel vektör alanı* denir.

Tanım 2.3.9. [29] (M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları olsunlar. Bir

$$\pi:(M,g) \to (B,g')$$

C^∞ submersiyonu eğer

i) π dönüşümü maksimal ranka sahiptir,
ii) $\forall q \in M$ noktasında π_{*_q} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_q(u,v) = g'_{\pi(q)}\left(\pi_{*_q}u, \pi_{*_q}v\right),\ u,v \in \mathcal{H}_q$$

şartlarını sağlıyor ise π ye bir *Riemann submersiyonu* denir. Bu ise bir $q \in M$ noktasında π_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_q$ yatay uzayından $T_{\pi(q)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler.

Tanım 2.3.10. [29] (M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları ve $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. (1,2)-tipinden T *temel tensör alanı*

$$T(E,F) = T_E F = h\nabla_{vE}vF + v\nabla_{vE}hF,\quad E,F \in \chi(M)$$

şeklinde tanımlıdır.

T temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar [17]:

i) $E \in \chi(M)$ için T_E ters-simetrik ve lineer bir operatördür.

ii) $E \in \chi(M)$ için T_E yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.

iii) T dikey tensör alanıdır yani $E \in \chi(M)$ için $T_E = T_{vE}$ dir.

iv) T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $U,W \in \chi^v(M)$ için

$$T_U W = T_W U$$

dir.

Tanım 2.3.11. [29] (M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları ve $\pi:(M,g)\rightarrow(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. (1,2)-tipinden A *temel tensör alanı*

$$A(E,F)=A_E F=v\nabla_{hE}hF+h\nabla_{hE}vF\,,\quad E,F\in\chi(M)$$

şeklinde tanımlıdır.

A temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar [17]:

i) $E\in\chi(M)$ için A_E ters-simetrik ve lineer bir operatördür.

ii) $E\in\chi(M)$ için A_E yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.

iii) A yatay tensör alanıdır yani $E\in\chi(M)$ için $A_E=A_{hE}$ dir.

iv) A yatay tensör alanı ters-simetriktir. Yani $X,Y\in\chi^h(M)$ için

$$A_X Y=-A_Y X$$

dir.

3. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

Olasılık dağılımların üzerinde çalışılan bilgi geometrisi ilk olarak 1985 de ortaya çıkmıştır. Matematikte; istatistiksel sonuç çıkarma, lineer ve lineer olmayan sistemler, lineer programlama, konveks analiz, zaman serileri, sinir ağları, integrallenebilir sinir ağları, geometrik modelleme gibi çok geniş uygulama alanlarına sahiptir. İstatistiksel manifoldlar dokuların renk ve parlaklığıyla ilgili olarak görüntü analizinde kullanılır [30].

Tanım 3.1. [31] (Lauritzen) (M,g) *n*-boyutlu bir diferensiyellenebilir Riemann manifoldu olsun. $X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$D:\chi(M)\times\chi(M)\xrightarrow[2-lineer]{simetrik}\chi(M)$$

$$g\big(D(X,Y),Z\big)=C(X,Y,Z)$$

dönüşümü yardımıyla tanımlanan

$$C:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\xrightarrow{simetrik}C^{\infty}(M,D)$$

$$C(X,Y,Z)=C(Y,X,Z)=C(Y,Z,X)$$

$$\big(C(X,Z,Y)=C(Z,Y,X)=C(Z,X,Y)\big)$$

üçüncü mertebeden simetrik kovaryant C tensörünün oluşturduğu (M,g,C) yapısına bir *istatistiksel manifold* denir. C'ye de manifoldun *çarpıklığı* yada *kübik formu* adı verilir. Şimdi istatistiksel manifoldun Kurose tarafından verilen tanımı verilecektir. Kurose tanımı [30] ile Lauritzen' in tanımının denk olmasından Önerme 3.5 de bahsedilecektir.

Tanım 3.2. [30] (M,g) Riemann manifoldu ∇ torsiyonsuz afin konneksiyon olsun. Eğer ∇g tamamen simetrik ise yani $X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z)=(\nabla_Y g)(X,Z)$$

oluyorsa, (M,∇,g) üçlüsüne *Kurose anlamında istatistiksel manifold* denir.

Tanım 3.3. [31] (M,g,D) istatistiksel manifold ve ∇ M nin bir afin konneksiyonu olmak üzere $\alpha-konneksiyon$

$$\overset{\alpha}{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{\alpha}{2}D(X,Y),\qquad \alpha\in D$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 3.4. [1] $\overset{\alpha}{\nabla}$ konneksiyonu, $\alpha=1$ için üstel konneksiyon, $\alpha=-1$ için *karma konneksiyon* adını alır.

Önerme 3.5. [31] $\overset{\alpha}{\nabla}$ torsiyonsuz konneksiyondur ve Tanım 3.3 deki şartları sağlayacak şekilde var ve tektir. Daha fazlası

$$\left(\overset{\alpha}{\nabla}_X g\right)(Y,Z)=\alpha C(X,Y,Z)$$

dir.

Tanım 3.6. [32] Eğer (∇, g) çifti

$$(\nabla_X g)(Y,Z)-(\nabla_Y g)(X,Z)=0$$

şartını sağlıyorsa *istatistiksel yapı* adını alır.

Tanım 3.7. [31] (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. ∇ ve ∇^* M üzerinde iki torsiyonsuz afin konneksiyon olmak üzere $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$Zg(X,Y)=g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla^*{}_Z Y) \tag{3.1}$$

ve

$$2\nabla^0=\nabla+\nabla^* \tag{3.2}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, M ye bir *istatistiksel manifold* denir. Burada ∇ ve ∇^* konneksiyon çiftine *dual konneksiyon çifti* veya *dualistik yapı* denir ve ∇^0 Levi-Civita konneksiyonunu göstermektedir.

R ve R^* sırası ile ∇ ve ∇^*ın eğrilik tensör alanları olsun. Bu durumda

$$g(R^*(X,Y)Z,W)=-g(Z,R(X,Y)W) \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır [32].

∇^0 g metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olsun. (3.2) eşitliğinden (∇^0, g) çifti *aşikar istatistiksel yapı* veya *Riemann istatistiksel yapı* olarak adlandırılır. Bu durumda M, (∇^0, g) aşikar istatistiksel yapısı ile birlikte *aşikar istatistiksel manifold* adını alır [32].

Tanım 3.8. [32] (M,g,∇) ve $(\bar{M},\bar{g},\bar{\nabla})$ iki istatistiksel manifold ve $f:\bar{M}\to M$ bir immersiyon olsun. Eğer (∇, g) çifti Tanım 3.6 daki eşitliği sağlayacak şekilde bir istatistiksel yapı ise, $f:\bar{M}\to M$ immersiyonuna *istatistiksel immersiyon* denir. Böyle bir immersiyon tanımlı ise $\bar{M}$ ye M nin bir *istatistiksel altmanifoldu* adı verilir.

Tanım 3.9. [33] M, $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. M nin normal vektör alanlarının uzayı $\chi^{\perp}M$ ile gösterilsin. h ve h^* simetrik ve bilineer fonksiyonlar olmak üzere $X,Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^{\perp}M$ için aşağıdaki denklemler geçerlidir:

$$g(A_\xi X,Y)=\bar{g}(h(X,Y),\xi),$$

$$g(A^*{}_\xi X,Y)=\bar{g}(h^*(X,Y),\xi).$$

Önerme 3.10. [33] $\bar{\nabla}$ $\bar{M}$ üzerinde afin konneksiyon ve ∇ M üzerinde $\bar{\nabla}$ den indirgenmiş konneksiyon, $\bar{R}$ ve R sırası ile $\bar{\nabla}$ ve ∇ nın eğrilik tensör alanları olsun. Bu durumda $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ ve $\xi,\eta \in \chi^{\perp}(M)$ için Gauss ve Ricci denklemleri sırası ile

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)+\bar{g}(h(X,Z),h^*(Y,W))-\bar{g}(h^*(X,W),h(Y,Z)),$$

$$\bar{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta)=\bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi,\eta)+g([A^*_\xi,A_\eta]X,Y)$$

şeklinde verilir. Burada $[A^*_\xi,A_\eta]=A^*_\xi A_\eta - A_\eta A^*_\xi$ dir.

Önerme 3.11. [33] $\bar{\nabla}^*$ $\bar{M}$ üzerinde dual konneksiyon ve ∇^* M üzerinde $\bar{\nabla}^*$ den indirgenmiş konneksiyon, $\bar{R}^*$ ve R^* sırası ile $\bar{\nabla}^*$ ve ∇^*ın eğrilik tensör alanları olsun. Bu durumda Gauss ve Ricci denklemleri sırası ile

$$\bar{g}\left(\bar{R}^{*}(X,Y)Z,W\right)=g\left(R^{*}(X,Y)Z,W\right)+\bar{g}\left(h^{*}(X,Z),h(Y,W)\right)-\bar{g}\left(h(X,W),h^{*}(Y,Z)\right),$$
$$\bar{g}\left(R^{*\perp}(X,Y)\xi,\eta\right)=\bar{g}\left(\bar{R}^{*}(X,Y)\xi,\eta\right)+g\left(\left[A_{\xi},A_{\eta}^{*}\right]X,Y\right)$$
dir. Burada $\left[A_{\xi},A_{\eta}^{*}\right]=A_{\xi}A_{\eta}^{*}-A_{\eta}^{*}A_{\xi}$ dir.

Örnek 3.12. [1] x, X uzayının rasgele değişkeni ve $p(x,\theta)$, θ ile parametrelenmiş, X üzerindeki yaygın ölçüm P ye göre x in olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, $S=\{p(x,\theta)\}$ bir istatistiksel model olsun. Burada $\mathbb{R}^{n}$ n-boyutlu reel uzayın Θ açık alt kümesine ait n-boyutlu $\theta=\left(\theta^{1},...,\theta^{n}\right)$ şeklinde bir parametredir.

Şimdi istatistiksel yapı örneği verelim. x, $X=\{1,2,...,n+1\}$ kümesi üzerinde rastgele değişken, $x=i$ için p_i,

$$\sum p_i=1,\quad 1>p_i>0,\quad i=1,...,n+1$$

şeklinde verilen bir olasılık olsun. Bu durumda p_i bir çok terimli dağılım tanımlar. Eğer $\theta^{1}=p_1$, $\theta^{2}=p_2,...,\theta^{n}=p_n$ denirse, çok terimli dağılımın olasılık fonksiyonu

$$p(x,\theta)=\sum\delta(x-i)\theta^{i}+\delta(x-n-1)\left(1-\sum\theta^{i}\right)$$

olarak yazılabilir. Burada δ kroneker deltasıdır. S üzerinde yukarıda tanımlanan çok terimli dağılım bir çok terimli istatistiksel yapı oluşturur. S ye istatistiksel manifold denir.

Örnek 3.13. [44] $a>0$ yarıçaplı S^4 küresi

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=a^2$$

denklemi ile tanımlanabilir. Eğer $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ S^4 küresi üzerinde ortonormal baz vektörleri olmak üzere

$$x_1=a\cos u_1\cos u_2\cos u_3\cos u_4,$$

$$x_2=a\cos u_1\cos u_2\cos u_3\sin u_4,$$

$$x_3=a\cos u_1\cos u_2\sin u_3,$$

$$x_4=a\cos u_1\sin u_2,$$

$$x_5=a\sin u_1$$

denirse S^4 küresi üzerindeki metrik

$$g=\left(g_{ij}\right)=a^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos^2 u_1&0&0\\0&0&\cos^2 u_1\cos^2 u_2&0\\0&0&0&\cos^2 u_1\cos^2 u_2\cos^2 u_3\end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir α reel sayısı için α konneksiyon $\nabla^{(\alpha)}$ ve $\partial_i=\partial/\partial u_i$ $\left(i=1,2,3,4\right)$ olmak üzere

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_1}\partial_1=\alpha\left(\tan u_1-\cot u_1\right)\partial_1,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_1}\partial_2=\nabla^{(\alpha)}_{\partial_2}\partial_1=-\left(1-\alpha\right)\tan u_1\partial_2,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_1}\partial_3=\nabla^{(\alpha)}_{\partial_3}\partial_1=-\left(1-\alpha\right)\tan u_1\partial_3,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_1}\partial_4=\nabla^{(\alpha)}_{\partial_4}\partial_1=-\left(1-\alpha\right)\tan u_1\partial_4,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_2}\partial_2=\left(1+\alpha\right)\sin u_1\cos u_1\partial_1+\alpha\left(\tan u_2-\cot u_2\right)\partial_2,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_2}\partial_3=\nabla^{(\alpha)}_{\partial_3}\partial_2=-\left(1-\alpha\right)\tan u_2\partial_3,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_2}\partial_4=\nabla^{(\alpha)}_{\partial_4}\partial_2=-\left(1-\alpha\right)\tan u_2\partial_4,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_3}\partial_3=\left(1+\alpha\right)\left(\sin u_1\cos u_1\cos^2 u_2\partial_1+\sin u_2\cos u_2\partial_2\right)+\alpha\left(\tan u_3-\cot u_3\right)\partial_3,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_3}\partial_4=\nabla^{(\alpha)}_{\partial_4}\partial_3=-\left(1-\alpha\right)\tan u_3\partial_4,$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\partial_4}\partial_4=\left(1+\alpha\right)\left(\sin u_1\cos u_1\cos^2 u_2\cos^2 u_3\partial_1+\sin u_2\cos u_2\cos^2 u_3\partial_2+\sin u_3\cos u_3\partial_3\right)$$
$$+\alpha\left(\tan u_4-\cot u_4\right)\partial_4,$$

şeklinde tanımlanabilir. O halde $\left(S^4,g,\nabla^{(\alpha)}\right)$ üçlüsü bir istatistiksel manifolddur.

3.1 Katlı Çarpım Manifoldlarında Dualistik Yapılar

Tanım 3.1.1. [15] $\left(M,g\right)$ ve $\left(N,h\right)$ sırası ile *m*-boyutlu ve *n*-boyutlu iki Riemann manifoldu, $f:M\to\mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $\forall X,Y\in\chi\left(B\right)$ için $B=M\times N$ üzerinde,

$$g_f=\pi^* g+\left(f\circ\pi\right)^2 h$$

şeklinde tanımlı g_f Riemann metriği ile belirli $\left(B,g_f\right)$ ikilisine $\left(M,g\right)$ ve $\left(N,h\right)$ manifoldlarının *katlı çarpımı* denir, $B=M\times_f N$ şeklinde gösterilir ve f fonksiyonu da *katlı çarpım fonksiyonu* olarak adlandırılır, g_f metriğine ise B nin *katlı metriği* denir. f bir sabit ise $M\times N$ çarpım manifoldu elde edilir.

$L_H(M)$ (veya $L_V(N)$) $M \times N$ üzerinde yatay liflerin (veya dikey liflerin) vektör alanları kümesi olsun. Bu durumda

$$T(M \times N) = L_H(M) \oplus L_V(N)$$

yazılabilir.

(g_f, D, D^*) $M \times N$ üzerinde bir dualistik yapı olsun. $X, Y \in L_H(M)$ ve $U, V \in L_V(N)$ için

$$\pi_*(D_X Y) = {}^M\nabla_{\bar{X}}\bar{Y} \text{ ve } \pi_*(D_X^* Y) = {}^M\nabla'_{\bar{X}}\bar{Y}$$

ve

$$\sigma_*(D_U V) = {}^N\nabla_{\tilde{U}}\tilde{V} \text{ ve } \sigma_*(D_U^* V) = {}^N\nabla'_{\tilde{U}}\tilde{V}$$

dir. D ve D^* $M \times N$ üzerinde birer afin konneksiyonlar, π ve σ sırası ile M ve N üzerinde $M \times N$ nin izdüşüm fonksiyonları olduğu için ${}^M\nabla$ ve ${}^M\nabla'$ M üzerinde, ${}^N\nabla$ ve ${}^N\nabla'$ N üzerinde afin konneksiyonlardır [38].

Önerme 3.1.2. [34] $(g, {}^M\nabla, {}^M\nabla')$ üçlüsü M üzerinde ve $(h, {}^N\nabla, {}^N\nabla')$ üçlüsü N üzerinde dualistik yapılardır, yani

$${}^M\nabla' = \left({}^M\nabla\right)^* \quad g \text{ metriğine göre}$$

ve

$${}^N\nabla' = \left({}^N\nabla\right)^* \quad h \text{ metriğine göre}$$

yazılabilir.

(g, ∇, ∇^*) ve $(h, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*)$ sırası ile M ve N üzerinde dualistik yapılar olsun. $X, Y \in L_H(M)$ ve $U, V \in L_V(N)$ için

(i) $D_X Y = \left(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}\right)^H$

(ii) $D_X U = D_U X = \dfrac{X.f}{f} U$

(iii) $D_U V = -\dfrac{<U,V>}{f} gradf + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}\tilde{V}\right)^V$

ve

(a) $D'_X Y = \left(\nabla^*_{\bar{X}}\bar{Y}\right)^H$

(b) $D'_X U = D'_U X = \dfrac{X.f}{f} U$

(c) $D'_U V = -\dfrac{<U,V>}{f} gradf + \left(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{U}} \tilde{V}\right)^V$

dir [38].

Yardımcı Teorem 3.1.3. [34] $X, Y, Z \in L_H(M)$ ve $U, V, W \in L_V(N)$ için

(i) $R(X,Y)Z = \left({}^M R\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)\bar{Z}\right),$

(ii) $R(V,Y)Z = -\dfrac{1}{f} H_D^f(Y,Z)V,$

(iii) $R(X,Y)V = R(V,W)X = 0,$

(iv) $R(X,V)W = -\dfrac{1}{f} g(V,W) D_X(gradf),$

(v) $R(V,W)U = \left({}^N R\left(\tilde{V}, \tilde{W}\right)\tilde{U}\right)$

dir.

4. YARI SABİT EĞRİLİLİKLİ İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN BAZI ALTMANİFODLARI İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde yarı sabit eğrilikli istatistiksel bir manifoldun istatistiksel altmanifoldları incelenecektir. Bu tip altmanifoldlar için bazı eşitsizlikler elde edilecektir ve bir örnek verilecektir.

4.1 Yarı Sabit Eğrilikli İstatistiksel Manifoldlar ve Bunların Bazı Altmanifoldları

Tanım 4.1.1. [35] Bir $\left(\tilde{\nabla},\tilde{g}\right)$ istatistiksel yapısı için $\tilde{\nabla}$ nın eğrilik tensör alanı $\tilde{R}$ $X,Y,Z\in\chi(M)$ için eğer

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(X,Y)Z=a\left\{\tilde{g}(Y,Z)X-\tilde{g}(X,Z)Y\right\}\\&+b\left[T(Y)T(Z)X-\tilde{g}(X,Z)T(Y)P\right.\\&\left.+\tilde{g}(Y,Z)T(X)P-T(X)T(Z)Y\right]\end{aligned}\tag{4.1}$$

eşitliğini sağlıyor ise, $\left(\tilde{\nabla},\tilde{g}\right)$ istatistiksel yapısına *yarı sabit eğriliklidir* denir. Burada a ve b skaler fonksiyonlar; P birim vektör alanı olmak üzere, T $g\left(X,P\right)=T\left(X\right)$ şeklinde tanımlı bir 1-formdur. Eğer bir $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldu $\left(\tilde{\nabla},\tilde{g}\right)$ istatistiksel yapısı ile birlikte (4.1) eşitliğini sağlayan bir $\tilde{R}$ eğrilik tensör alanına sahip ise, bir *yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold* adını alır [35]. Eğer (4.1) eşitliğinde $b=0$ alınırsa, $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldu bir sabit eğrilikli istatistiksel manifolda dönüşür [13]. (3.3) eşitliğinden, eğer $\left(\tilde{\nabla},\tilde{g}\right)$ bir yarı sabit eğrilikli istatistiksel yapı ise, $\left(\tilde{\nabla}^{*},\tilde{g}\right)$ dual yapısı da bir yarı sabit eğrilikli istatistiksel yapıdır. Böylece (4.1) eşitliği $\left(\tilde{\nabla}^{*},\tilde{g}\right)$ yapısı içinde geçerlidir.

Örnek 4.2.2. [35] I 1-boyutlu istatistiksel manifold, $M^{n}\left(c\right)$ c sabit eğriliğine sahip istatistiksel manifold ve D, D^{*} dualistik yapılar, $\pi:\tilde{M}=I\times M^{n}\left(c\right)\to M^{n}\left(c\right)$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere; $\left(\tilde{M}=I\times M^{n}\left(c\right),D,D^{*}\right)$ dualistik çarpım olsun. I üzerindeki metrik dt^{2} ile gösterilsin. g_{M} , $M^{n}\left(c\right)$ üzerindeki metrik olmak üzere,

$$\tilde{g} = dt^2 + g_M$$

yazılabilir. $\frac{\partial}{\partial t} \in \chi(I)$ olmak üzere, $\chi(\tilde{M})$ üzerindeki bir X vektör alanı

$$X = \pi_*(X) + \tilde{g}\left(X, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.2}$$

şeklindedir. $\left(\tilde{M} = I \times M^n(c), D, \tilde{g}\right)$ manifoldunun bir istatistiksel manifold olması için gerek ve yeter şart $\left(I, \nabla, dt^2\right)$ ve $\left(M^n(c), \overline{\nabla}, g_M\right)$ manifoldlarının birer istatistiksel manifold olmasıdır [36]. Bu yüzden $\left(\tilde{M} = I \times M^n(c), D, \tilde{g}\right)$ bir istatistiksel manifolddur. $\left(\tilde{M} = I \times M^n(c), D, \tilde{g}\right)$ istatistiksel manifoldunun yarı sabit eğirilikli istatistiksel manifold olduğunu göstermek için eğrilik tensörünün (4.1) eşitliğini sağladığı gösterilmelidir. O halde (4.2) den

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W\right) = \tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X) + \tilde{g}\left(X, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, Y\right)Z,W\right)$$

$$= \tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),Y\right)Z,W\right) + \tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},Y\right)Z,W\right)$$

$$= \tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X), \pi_*(Y) + \tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)Z,W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t}, \pi_*(Y) + \tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)Z,W\right)$$

$$= \tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)Z,W\right) + \tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)Z,W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)Z,W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)Z,W\right)$$

dır. $\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)Z = 0$ olduğu bilindiğinden, son eşitlik

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W\right)=\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)Z,W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)Z,W\right)+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)Z,W\right)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W\right)=\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)\left(\pi_*(Z)+g\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right),W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\pi_*(Z)+\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right),W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)\left(\pi_*(Z)+\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right),W\right)$$

$$=\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)\pi_*(Z),W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},W\right)+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_*(Z),W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},W\right)+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)\pi_*(Z),W\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},W\right)$$

$$=\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)\pi_*(Z),\pi_*(W)+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\pi_*(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(W)+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_*(Z),\pi_*(W)+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(W)+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)\pi_*(Z),\pi_*(W)+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^*\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(W)+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$= \tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)$$
$$+\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)$$
$$+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)$$
$$+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad (4.3)$$

bulunur. Yardımcı Teorem 3.1.3 gereği, *f* fonksiyonunun sabit olduğu gözönüne alınırsa ve $\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y),\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\in\chi\left(M^{n}(c)\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial t}\in\chi(I)$ olduğu için

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)=0,$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)=0,$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,$$

ve

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)=0$$

dır. Elde edilen değerler (4.3) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}(X,Y)Z,W\right) &= \tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)\\
&+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&+\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)\\
&+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&+\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. Ayrıca Yardımcı Teorem 3.1.3 gereği $f = sabit$ alınırsa, $M^{n}(c)$ sabit eğrilikli olduğu için

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right) &= c\Big(g\left(\pi_{*}(Y),\pi_{*}(Z)\right)g\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(W)\right)\\
&-g\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Z)\right)g\left(\pi_{*}(Y),\pi_{*}(W)\right)\Big),
\end{aligned}$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(X)\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)=-\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(X)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)=0,$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(Y)\right)\frac{\partial}{\partial t},\pi_{*}(W)\right)=0$$

elde edilir. Bulunan değerler (4.4) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}(X,Y)Z,W\right)&=\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)\\&=c\Big(g\left(\pi_{*}(Y),\pi_{*}(Z)\right)g\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(W)\right)\\&\quad-g\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Z)\right)g\left(\pi_{*}(Y),\pi_{*}(W)\right)\Big)\end{aligned}\tag{4.5}$$

bulunur. Ayrıca (4.2) den

$$\pi_{*}(X)=X-\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}$$

dir. Buradan

$$g\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Z)\right)=\tilde{g}(X,Z)-\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

yazılabilir. Benzer şekilde (4.2) uygulanılıp (4.5) kullanıldığında

$$\begin{aligned}&\tilde{g}\left(\tilde{R}^{*}\left(\pi_{*}(X),\pi_{*}(Y)\right)\pi_{*}(Z),\pi_{*}(W)\right)=c\left(\tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,W)-\tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,W)\right)\\&+c\left\{\tilde{g}(X,Z)\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)+\tilde{g}(Y,W)\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right.\\&\left.-\tilde{g}(X,W)\tilde{g}\left(Y,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(Z,\frac{\partial}{\partial t}\right)-\tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}\left(X,\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{g}\left(W,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\},\end{aligned}$$

bulunur. Buda $\tilde{R}^{*}$ ın (4.1) eşitliğini sağladığını gösterir.

4.2 Yarı Sabit Eğrilikli İstatistiksel Manifodların Bazı Altmanifoldları için Bazı Eşitsizlikler

Bu bölümde yarı sabit eğrililikli istatistiksel manifoldların bazı altmanifodları için, $P\in\chi(M)$ olması durumunda, bazı eşitsizlikler elde edilecektir. $P\in\chi^{\perp}(M)$ durumunda [13] makalesindeki sonuçlar elde edilmektedir.

Önerme 4.2.1. [35] $\tilde{M}$ bir (n+k)-boyutlu yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold ve $M \subset \tilde{M}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Kabul edelim ki h ve h^* tensör alanları $X,Y \in \chi(M)$ için

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \quad \text{ve} \quad h^*(X,Y) = g(X,Y)H^* \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda M yarı-sabit eğrilikli bir istatistiksel manifolddur. Burada H ve H^* ortalama eğrilik vektör alanlarıdır.

İspat. (4.6) eşitliğinin Önerme 3.10 da verilen Gauss denkleminde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}&\tilde{g}\left(\tilde{R}(X,Y)Z,W\right) = \tilde{g}\left(R(X,Y)Z,W\right)\\&+\left\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\right\}\tilde{g}\left(H,H^*\right)\end{aligned}$$

olup; $\tilde{M}$ yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold olduğu için (4.1) eşitliğini sağlar. Bu durumda

$$\begin{aligned}&a\left\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right\}\\&+b\left[T(Y)T(Z)g(X,W) - g(X,Z)T(Y)T(W)\right.\\&\left.+g(Y,Z)T(X)T(W) - T(X)T(Z)g(Y,W)\right] = g\left(R(X,Y)Z,W\right)\\&+\left\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\right\}\tilde{g}\left(H,H^*\right),\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}&g\left(R(X,Y)Z,W\right) = a\left\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right\}\\&+b\left[T(Y)T(Z)g(X,W) - g(X,Z)T(Y)T(W)\right.\\&\left.+g(Y,Z)T(X)T(W) - T(X)T(Z)g(Y,W)\right]\\&+\left\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right\}\tilde{g}\left(H,H^*\right)\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}&g\left(R(X,Y)Z,W\right) = \left(a + \tilde{g}\left(H,H^*\right)\right)\left\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right\}\\&+b\left[T(Y)T(Z)g(X,W) - g(X,Z)T(Y)T(W)\right.\\&\left.+g(Y,Z)T(X)T(W) - T(X)T(Z)g(Y,W)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da M nin yarı sabit eğrilikli bir istatistiksel manifold olduğunu gösterir. □

Önerme 4.2.2. [35] $\tilde{M}$ bir (n+k)-boyutlu yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold, $M \subset \tilde{M}$ n-boyutlu bir altmanifold ve $\{E_{n+1},...,E_{n+k}\}$ $\chi^{\perp}(M)$ nin bir ortonormal bazı olsun. Ric ve Ric^* sırasıyla indirgenmiş ∇ ve ∇^* konneksiyonlarının Ricci tensör alanları olmak üzere Ric ve Ric^* sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$Ric(X,Y) = (a(n+1)+b)g(X,Y) + b(n-2)T(X)T(Y)$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)trA^{*}_{E_{n+i}}-g\left(A^{*}_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\} \tag{4.7}$$

ve

$$Ric^{*}\left(X,Y\right)=(a(n+1)+b)g\left(X,Y\right)+b(n-2)T(X)T(Y)$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\left\{g\left(A^{*}_{E_{n+i}}X,Y\right)trA_{E_{n+i}}-g\left(A^{*}_{E_{n+i}}Y,A_{E_{n+i}}X\right)\right\}. \tag{4.8}$$

İspat. M, $\tilde{M}$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. O halde $\chi(M)$ nin bir $\{E_1,...,E_n\}$ ortonormal bazı için Tanım 2.1.9 gereği Ricci tensör alanı $Ric(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}g(R(E_j,X)Y,E_j)$ olup; (4.1) ve Gauss denklemi gereği

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) \;=\; &\sum_{j=1}^{n}\Big(a\left\{g(X,Y)g(E_j,E_j)-g(E_j,Y)g(X,E_j)\right\}\\ &+b\{g(E_j,E_j)T(X)T(Y)-g(E_j,Y)T(X)T(E_j)\\ &+g(X,Y)T(E_j)T(E_j)-g(X,E_j)T(Y)T(E_j)\}\\ &+\tilde{g}(h^{*}(E_j,E_j),h(X,Y))-\tilde{g}(h^{*}(X,E_j),h(E_j,Y))\Big)\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir. Diğer taraftan

$$\sum_{j=1}^{n}a\left\{g(X,Y)g(E_j,E_j)-g(E_j,Y)g(X,E_j)\right\}$$
$$=a\sum_{j=1}^{n}\left\{g(X,Y)g(E_j,E_j)-g(X,g(E_j,Y)E_j)\right\}$$
$$=a\left\{g(X,Y)n-g(X,Y)\right\}$$
$$=a(n-1)g(X,Y), \tag{4.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g(E_j,E_j)T(X)T(Y)=nT(X)T(Y), \tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g(E_j,Y)T(X)T(E_j)=\sum_{j=1}^{n}T(X)g(g(E_j,Y)E_j,P)$$
$$=T(X)g(Y,P)=T(X)T(Y), \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g(X,Y)T(E_j)T(E_j)=g(X,Y)\sum_{j=1}^{n}g(E_j,P)g(E_j,P)$$
$$=g(X,Y)\sum_{j=1}^{n}g(g(E_j,P)E_j,P)=g(X,Y) \tag{4.13}$$

olup; Tanım 3.9 gereği

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}(h^*(X,E_j),h(E_j,Y))=g(A^*_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y),\quad i=1,...,k \tag{4.14}$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}(h^*(E_j,E_j),h(X,Y))=g(A_{E_{n+i}}X,Y)trA^*_{E_{n+i}},\quad i=1,...,k \tag{4.15}$$

yazılabilir. Böylece (4.10)-(4.15) eşitlikleri (4.9) da yerine yazılırsa (4.7) elde edilir. Benzer şekilde dual Ricci tensör alanı Ric^* hesaplanarak (4.8) bulunur. □

Önerme 4.2.3. [35] $\tilde{M}$ $(n+k)$-boyutlu bir yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ n-boyutlu bir istatistiksel altmanifold olsun. Bu durumda (M,∇,g) istatistiksel manifoldunun skaler eğrilik fonksiyonu τ olmak üzere

$$2\tau\geq a\left(n^2-n\right)+2b\left(n-1\right)+n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right)-\|h\|\|h^*\|$$

dır. Eşitsizliğin eşitlik durumu $h\,\|\,h^*$ olması durumunda sağlanır.

İspat. Gauss denklemi ve (4.1) den

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) \;\; = \;\; & a\left[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\right]\\
&+b[g(X,W)T(Y)T(Z)-g(X,Z)T(Y)T(W)\\
&+g(Y,Z)T(X)T(W)-g(Y,W)T(X)T(Z)]\\
&+\tilde{g}\left(h^*(X,W),h(Y,Z)\right)-\tilde{g}\left(h(X,Z),h^*(Y,W)\right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

yazılabilir.

$$\|h\|^2=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2$$

ve benzer şekilde

$$\|h^*\|^2=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{*\alpha}\right)^2$$

tanımlansın.

$\{e_1,...,e_n\}\subset T_pM$ bir ortonormal çatı olsun. (4.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}R\left(e_i,e_j,e_j,e_i\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[&a\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,e_j\right)g\left(e_i,e_j\right)\right\}\\
&+b\left\{T\left(e_j\right)T\left(e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)\right.\\
&\left.+g\left(e_j,e_j\right)T(e_i)T(e_i)-g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)\right\}
\end{aligned}$$

$$+\tilde{g}\left(h^*(e_i,e_i),h\left(e_j,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\Big] \tag{4.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{i,j=1}^{n} a\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,e_j\right)g\left(e_i,e_j\right)\right\}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} a\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(g\left(e_i,e_j\right)e_i,e_j\right)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a\left\{g\left(e_j,e_j\right)n-g\left(e_j,e_j\right)\right\}=a(n^2-n), \tag{4.18}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} T\left(e_j\right)T\left(e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)=\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_j,P\right)g\left(e_j,P\right)g\left(e_i,e_i\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} g\left(g\left(e_j,P\right)e_j,P\right)g\left(e_i,e_i\right)=n, \tag{4.19}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)=\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,e_j\right)g\left(e_j,P\right)g\left(e_i,P\right)=\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,g\left(e_j,P\right)e_j\right)g\left(e_i,P\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} g\left(e_i,P\right)g\left(e_i,P\right)=\sum_{i=1}^{n} g\left(g\left(e_i,P\right)e_i,P\right)=g\left(P,P\right)=1 \tag{4.20}$$

dir. Benzer şekilde $\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_j,e_j\right)T(e_i)T(e_i)=n$ ve $\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)=1$ olarak bulunur. Buradan ve (4.19) ile (4.20) toplanırsa

$$\sum_{i,j=1}^{n} b\left\{T\left(e_j\right)T\left(e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)\right.$$

$$\left.+g\left(e_j,e_j\right)T(e_i)T(e_i)-g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)\right\}=2b(n-1), \tag{4.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{1\le i,j\le n} \tilde{g}\left(h^*(e_i,e_i),h\left(e_j,e_j\right)\right)=n^2\tilde{g}\left(H^*,H\right), \tag{4.22}$$

$$\sum_{1\le i,j\le n} \tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)$$

$$=\sum_{1\le i,j\le n} \tilde{g}\left(\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),e_{n+\alpha}\right)e_{n+\alpha},\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),e_{e_{n+\alpha}}\right)e_{n+\alpha}\right),\quad \alpha=1,\dots,k$$

$$=\sum_{1\le i,j\le n} \tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),e_{n+\alpha}\right)\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),e_{e_{n+\alpha}}\right)\tilde{g}\left(e_{n+\alpha},e_{n+\alpha}\right),\quad \alpha=1,\dots,k$$

$$=\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\ ,\alpha=1,\dots,k \tag{4.23}$$

dir. (4.18), (4.21), (4.22) ve (4.23) değerleri (4.17) de yerlerine yazılırsa

$$2\tau \quad = \quad a(n^2-n)+2b(n-1)+n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right)-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha} \qquad (4.24)$$

elde edilir. $\|h\|^2$ ve $\|h^*\|^2$ nin tanımından

$$2\tau \ge \quad a(n^2-n)+2b(n-1)+n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right)-\|h\|\|h^*\| \qquad (4.25)$$

eşitsizliği bulunur. Eşitlik durumu için (4.24) ve (4.25) karşılaştırılırsa

$$\|h\|\|h^*\|=\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}=g\left(h,h^*\right)$$

dir. Ayrıca $g\left(h,h^*\right)=\|h\|\|h^*\|\cos\theta$ olduğundan $\cos\theta=1$ olup; buradan $h \,\|\, h^*$ olduğu görülür. Burada θ, h ve h^* arasındaki açıdır.□

Diğer taraftan, yarı sabit eğrilikli $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldunun istatistiksel hiperyüzeyleri için $X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ olmak üzere; ∇ ve ∇^* konnekiyonlarına göre Gauss denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}&R\left(X,Y\right)Z=a\left\{g\left(Y,Z\right)X-g\left(X,Z\right)Y\right\}\\&+b[T\left(Y\right)T\left(Z\right)X-\tilde{g}\left(X,Z\right)T\left(Y\right)P+\tilde{g}\left(Y,Z\right)T\left(X\right)P-T\left(X\right)T\left(Z\right)Y]\\&+\left\{h\left(Y,Z\right)A^*X-h\left(X,Z\right)A^*Y\right\}\end{aligned} \qquad (4.26)$$

ve

$$\begin{aligned}&R^*\left(X,Y\right)Z=a\left\{g\left(Y,Z\right)X-g\left(X,Z\right)Y\right\}\\&+b[T\left(Y\right)T\left(Z\right)X-\tilde{g}\left(X,Z\right)T\left(Y\right)P+\tilde{g}\left(Y,Z\right)T\left(X\right)P-T\left(X\right)T\left(Z\right)Y]\\&+\left\{h^*\left(Y,Z\right)AX-h^*\left(X,Z\right)AY\right\},\end{aligned}$$

dir [35].

Önerme 4.2.4. [35] $M\subset\tilde{M}$ (n+1)-boyutlu $\tilde{M}$ yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifoldunun bir istatistiksel hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$2\tau\ge a(n^2-n)+2b(n-1)+n^2\|H\|\|H^*\|-\|h\|\|h^*\|$$

dır. Burada τ, $\left(M,\nabla,g\right)$ istatistiksel hiperyüzeyinin skaler eğriliğidir.

İspat. $\left\{e_1,...,e_n\right\}\subset T_pM$ bir ortonormal çatı ve e_{n+1} M nin birim normal vektörü olsun. (4.26) dan

$$\sum_{1\le i,j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=\sum_{1\le i,j\le n} a\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,e_j\right)g\left(e_i,e_j\right)\right\}$$

$$+b\left\{T\left(e_j\right)T\left(e_j\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)\right.$$

$$\left.+g\left(e_j,e_j\right)T(e_i)T(e_i)-g\left(e_i,e_j\right)T(e_j)T(e_i)\right\}$$

$$+h(e_j,e_j)h^*(e_i,e_i)-h(e_i,e_j)h^*(e_j,e_i)$$

yazılabilir. M bir hiperyüzey olduğu için normal vektör uzayının boyutu 1 dir. Bu durumda

$$H=\|H\|e_{n+1}$$

ve

$$H^*=\|H^*\|e_{n+1}$$

olup

$$\sum_{1\le i,j\le n} h(e_j,e_j)h^*(e_i,e_i)=n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right)$$
$$=n^2\|H\|\|H^*\|$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}2\tau &= a(n^2-n)+2b(n-1)+n^2\|H\|\|H^*\|-\sum_{1\le i,j\le n}h_{ij}h^*_{ij}\\ &\ge a(n^2-n)+2b(n-1)+n^2\|H\|\|H^*\|-\|h\|\|h^*\|.\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 4.2.5. [35] $M\subset\tilde{M}$ $(n+1)$-boyutlu yarı sabit eğrilikli $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldunun bir istatistiksel hiperyüzeyi olsun. Her $X\in\chi\left(M\right)$ için

$$Ric(X,X)=a(n-1)+b+b(n-2)T(X)T(X)$$
$$+n\tilde{g}(h(X,X),H^*)-\sum_{1\le i\le n}h_{i1}h^*_{i1} \tag{4.27}$$

ve

$$Ric^*(X,X)=a(n-1)+b+b(n-2)T(X)T(X)$$
$$+n\tilde{g}(h^*(X,X),H)-\sum_{1\le i\le n}h^*_{i1}h_{i1}, \tag{4.28}$$

dir. Burada Ric ve Ric^* $\left(M,\nabla,g\right)$ istatistiksel hiperyüzeyinin sırasıyla ∇ ve ∇^* konneksiyonlarına göre Ricci tensör alanı ve dual Ricci tensör alanıdır.

İspat. $\left\{E_1,\ldots,E_n\right\}$ $\chi\left(M\right)$ nin bir ortonormal çatısı olsun. Böylece Tanım 2.1.9 ve (4.1) den

$$Ric(X,X) = \sum_{1\le i\le n} (a\{g(X,X)g(E_i,E_i) - g(X,E_i)g(X,E_i)\}$$

$$+b\{T(X)T(X)g(E_i,E_i) - g(E_i,X)T(X)T(E_i)$$

$$+g(X,X)T(E_i)T(E_i) - g(X,E_i)T(E_i)T(X)\}$$

$$+h(X,X)h^*(E_i,E_i) - h(E_i,X)h^*(X,E_i)) \qquad (4.29)$$

dir. Diğer taraftan

$$\sum_{1\le i\le n} a\{g(X,X)g(E_i,E_i) - g(E_i,X)g(X,E_i)\} = \sum_{1\le i\le n} a\{g(X,X)n - g(X,g(E_i,X)E_i)\}$$

$$= a\{g(X,X)n - g(X,X)\} = a\{n-1\}g(X,X), \qquad (4.30)$$

$$\sum_{1\le i\le n} \{T(X)T(X)g(E_i,E_i) - g(E_i,X)T(X)T(E_i)\}$$

$$= nT(X)T(X) - \sum_{1\le i\le n} g(E_i,X)T(X)g(E_i,P)$$

$$= nT(X)T(X) - \sum_{1\le i\le n} T(X)g(g(E_i,X)E_i,P)$$

$$= nT(X)T(X) - T(X)T(X) \qquad (4.31)$$

$$= (n-1)T(X)T(X)$$

$$\sum_{1\le i\le n} \{g(X,X)T(E_i)T(E_i) - g(X,E_i)T(E_i)T(X)\}$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \{g(X,X)g(E_i,P)g(E_i,P) - g(X,E_i)g(E_i,P)T(X)\}$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \{g(X,X)g(E_i,g(E_i,P)P) - g(g(X,E_i)E_i,P)T(X)\}$$

$$= g(X,X)g(P,P) - T(X)T(X) \qquad (4.32)$$

bulunur. M bir istatistiksel hiperyüzey olduğu için

$$\sum_{1\le i\le n} h(E_i,X)h^*(X,E_i) = \sum_{1\le i\le n} h_{i1}h^*_{i1} \qquad (4.33)$$

$$\sum_{1\le i\le n} h(X,X)h^*(E_i,E_i) = ng(h(X,X),H^*)$$

(4.34)

dir. $X = E_1$ için (4.30)-(4.34) değerleri (4.29) de yerine yazılırsa (4.27) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.28) eşitliği de elde edilir. □

4.3 Chen-Ricci Eşitsizliği

Bu bölümde bir yarı sabit eğrilikli istatistiksel manifoldun altmanifoldları için Chen-Ricci eşitsizliği elde edilecektir.

Bölüm boyunca R^0, Ric^0 ve H^0, M istatistiksel altmanifoldunun indirgenmiş ∇^0 Levi-Civita konneksiyonuna göre sırasıyla Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve ortalama eğrilik vektörünü gösterecektir. h^0 ∇^0 Levi-Civita konneksiyonuna göre ikinci temel form olsun.

$\{e_1,...,e_n\} \subset T_pM$ bir ortonormal baz olmak üzere; Gauss denkleminden

$$2\tau = a(n^2-n)+2b(n-1)+n^2\tilde{g}(H,H^*)-\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right) \tag{4.35}$$

yazılabilir. (4.35) eşitliğine $\tilde{g}(H,H)$, $\tilde{g}(H^*,H^*)$, $\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)$ ve $\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)$ terimleri eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
2\tau &= a(n^2-n)+2b(n-1)+\frac{n^2}{2}\{2\tilde{g}(H,H^*)+\tilde{g}(H,H) \\
&+\tilde{g}(H^*,H^*)-\tilde{g}(H,H)-\tilde{g}(H^*,H^*)\} \\
&-\frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}2\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)+\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right) \\
&+\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

olup; (4.36) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
2\tau &= a(n^2-n)+2b(n-1)+\frac{n^2}{2}\{\tilde{g}(H+H^*,H^*+H)-\tilde{g}(H,H)-\tilde{g}(H^*,H^*)\} \\
&-\frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right)+h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)+h\left(e_i,e_j\right)\right) \\
&-\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. $\nabla+\nabla^*=2\nabla^0$ eşitliğinden $2H^0=H+H^*$ yazılabilir. Bu durumda (4.37) denklemi

$$\begin{aligned}
2\tau &= a(n^2-n)+2b(n-1)+2n^2\tilde{g}(H^0,H^0)-\frac{n^2}{2}\tilde{g}(H,H) \\
&-\frac{n^2}{2}\tilde{g}(H^*,H^*)-2\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h^0\left(e_i,e_j\right),h^0\left(e_i,e_j\right)\right) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)+\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

şekline dönüşür. Buradan tekrar $\nabla + \nabla^* = 2\nabla^0$ olduğu gözönüne alınırsa, h ve h^* simetrik bilineer fonksiyonları içinde benzer eşitlik ifade edilebilir. Böylece (4.38) den

$$2\tau = a(n^2-n) + 2b(n-1) + 2n^2 \left\|H^0\right\|^2 - \frac{n^2}{2}\left\|H\right\|^2 - \frac{n^2}{2}\left\|H^*\right\|^2$$

$$-2\left\|h^0\right\|^2 + \frac{1}{2}(\left\|h\right\|^2 + \left\|h^*\right\|^2) \tag{4.39}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\left\|h\right\|^2 &= \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{k}\left\{(h_{11}^{\alpha})^2 + (h_{12}^{\alpha})^2 + \ldots + (h_{1n}^{\alpha})^2 + (h_{21}^{\alpha})^2 + (h_{22}^{\alpha})^2 + \right. \\
&\quad \left. \ldots + (h_{11}^{\alpha})^2 + (h_{n1}^{\alpha})^2 + \ldots + (h_{nn}^{\alpha})^2\right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{k}\left[(h_{11}^{\alpha})^2 + (h_{22}^{\alpha} + \ldots + h_{nn}^{\alpha})^2\right] \\
&\quad -\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} + 2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\{(h_{11}^{\alpha} + h_{22}^{\alpha} + \ldots + h_{nn}^{\alpha})^2 + (h_{11}^{\alpha} - h_{22}^{\alpha} - \ldots - h_{nn}^{\alpha})^2\} \\
&\quad + 2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ij}^{\alpha})^2 - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\ge \frac{1}{2}n^2\left\|H\right\|^2 - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - (h_{ij}^{\alpha})^2] \tag{4.40}$$

ve benzer şekilde

$$\left\|h^*\right\|^2 \ge \frac{1}{2}n^2\left\|H^*\right\|^2 - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}[h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{*\alpha} - (h_{ij}^{*\alpha})^2] \tag{4.41}$$

yazılabilir. (4.40) ile (4.41) eşitsizlikleri toplanırsa

$$\left\|h\right\|^2 + \left\|h^*\right\|^2 \ge \frac{1}{2}n^2\left\|H\right\|^2 + \frac{1}{2}n^2\left\|H^*\right\|^2$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - (h_{ij}^{\alpha})^2] - \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}[h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{*\alpha} - (h_{ij}^{*\alpha})^2] \tag{4.42}$$

elde edilir [13]. Ayrıca

$$[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - (h_{ij}^{\alpha})^2] + [h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{*\alpha} - (h_{ij}^{*\alpha})^2] = (h_{ii}^{\alpha} + h_{ii}^{*\alpha})(h_{jj}^{\alpha} + h_{jj}^{*\alpha}) - h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha} - h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{\alpha}$$

eşitliği (4.42) de kullanılırsa ve h, h^* simetrik bilineer fonksiyonlar olduğu için

$$\|h\|^2+\|h^*\|^2 \geq \frac{1}{2}n^2\|H\|^2+\frac{1}{2}n^2\|H^*\|^2$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}(h_{ii}^{\alpha}+h_{ii}^{*\alpha})(h_{jj}^{\alpha}+h_{jj}^{*\alpha})+2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right) \tag{4.43}$$

bulunur. (4.43) eşitsizliği (4.39) da kullanılırsa

$$a(n^2-n)+2b(n-1)\leq 2\tau-2n^2\|H^0\|^2+\frac{n^2}{2}\|H\|^2+\frac{n^2}{2}\|H^*\|^2$$

$$+2\|h^0\|^2-\frac{1}{4}n^2\|H\|^2-\frac{1}{4}n^2\|H^*\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}(h_{ii}^{\alpha}+h_{ii}^{*\alpha})(h_{jj}^{\alpha}+h_{jj}^{*\alpha})-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right)$$

olup; buradan

$$a(n^2-n)+2b(n-1)\leq 2\tau-2n^2\|H^0\|^2+\frac{n^2}{4}\|H\|^2+\frac{n^2}{4}\|H^*\|^2+2\|h^0\|^2$$

$$+2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right) \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.44) de $\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right)=(h_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{*\alpha})^2-2h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}$ olduğu kullanılırsa,

$$a(n^2-n)+2b(n-1)\leq 2\tau-2n^2\|H^0\|^2+\frac{n^2}{4}\|H\|^2$$

$$+\frac{n^2}{4}\|H^*\|^2+2\|h^0\|^2+2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}\left(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\leq i\neq j\leq n}(h_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{*\alpha})^2 \tag{4.45}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_{2\leq i\neq j\leq n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=\sum_{1\leq i,j\leq n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-\sum_{i=1,1\leq j\leq n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)$$

$$-\sum_{j=1,1\leq i\leq n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-\sum_{1\leq i=j\leq n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)$$

dir. $\sum_{1\leq i=j\leq n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=0$ olduğu için

$$\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=\sum_{1\le i,j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right) \\ -\sum_{i=1,1\le j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-\sum_{j=1,1\le i\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right) \tag{4.46}$$

değerini hesaplamak yeterlidir. (4.17) eşitliğinden

$$\sum_{i=1,1\le j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=\sum_{1\le j\le n}\Big[a\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)-g\left(e_1,e_j\right)g\left(e_1,e_j\right)\right\}$$

$$+b\left\{T\left(e_j\right)T\left(e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)-g\left(e_1,e_j\right)T(e_j)T(e_1)\right.$$

$$\left.+g\left(e_j,e_j\right)T(e_1)T(e_1)-g\left(e_1,e_j\right)T(e_j)T(e_1)\right\}$$

$$+\tilde{g}\left(h^*\left(e_1,e_1\right),h\left(e_j,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_1,e_j\right),h^*\left(e_1,e_j\right)\right)\Big]$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{i=1,1\le j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=a\left(n-1\right)+b\left(1+\left(n-2\right)\left(T\left(e_1\right)^2\right)\right) \\ +\sum_{i=1,1\le j\le n}\tilde{g}\left(h^*\left(e_1,e_1\right),h\left(e_j,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_1,e_j\right),h^*\left(e_1,e_j\right)\right)\Big] \tag{4.47}$$

bulunur. (4.47) eşitliğine benzer şekilde, $\sum_{j=1,1\le i\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)$ değeri de hesaplanabilir. O halde (4.46) den

$$\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=a\left(n^2-n\right)+2b\left(n-1\right)-2a\left(n-1\right) \\ -2b\left(1+\left(n-2\right)\left(T\left(e_1\right)^2\right)\right)+\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\right] \tag{4.48}$$

bulunur. (4.48) den

$$\sum_{2\le i\ne j\le n} R(e_i,e_j,e_j,e_i)=a(n-1)(n-2) \\ +2b(n-2)(1-T(e_1)^2)+\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\right] \tag{4.49}$$

olup; (4.49) eşitliği (4.45) de yerine yazılırsa

$$a(n^2-n)+2b(n-1)\le 2\tau-2n^2\left\|H^0\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2$$

$$+2\left\|h^0\right\|^2+2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}+a(n-1)(n-2)+2b(n-2)(1-T(e_1)^2)$$

$$-\sum_{2\le i\ne j\le n} R(e_i,e_j,e_j,e_i)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{*\alpha})^2 \tag{4.50}$$

elde edilir. $(h_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{*\alpha})=2h_{ij}^{0\alpha}$ ve

$$2\tau=\sum_{1\le i,j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

$$=2\sum_{j=2}^{n} g\left(R\left(e_1,e_j\right)e_j,e_1\right)+\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

$$=2Ric e_1+\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

olduğu (4.50) de kullanılırsa

$$a(n^2-n)+2b(n-1)\le 2Ric e_1+\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)-2n^2\left\|H^0\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2$$

$$+2\left\|h^0\right\|^2+2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}+a(n-1)(n-2)+2b(n-2)(1-T(e_1)^2)$$

$$-\sum_{2\le i\ne j\le n} R(e_i,e_j,e_j,e_i)-2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ij}^{0\alpha})^2 \tag{4.51}$$

dir. Burada $e_1=X$ ve $\sum_{1\le j\le n} R(e_1,e_j,e_j,e_1)=Ric(X)$ denirse, (4.51) den

$$Ric\left(X\right)\ge n^2\left\|H^0\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2-\left\|h^0\right\|^2$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\left(h_{ij}^{0\alpha}\right)^2\right)+a(n-1)+b+b(n-2)T(X)^2 \tag{4.52}$$

elde edilir. Levi-Civita konneksiyonuna göre Gauss denkleminden

$$\sum_{1\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)=\sum_{1\le i\ne j\le n}\{R^0(e_i,e_j,e_j,e_i)$$

$$+\tilde{g}(h^0(e_i,e_j),h^0(e_i,e_j))-\tilde{g}(h^0(e_i,e_i),h^0(e_j,e_j))\}$$

$$=2\tau^0-n^2\tilde{g}(H^0,H^0)+\left\|h^0\right\|^2 \tag{4.53}$$

ve

$$\sum_{2\le i\neq j\le n} \widetilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i) = \sum_{2\le i\neq j\le n} R^0(e_i,e_j,e_j,e_i)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{2\le i\neq j\le n}\left[h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\left(h_{ij}^{0\alpha}\right)^2\right] \tag{4.54}$$

yazılabilir. (4.53) ve (4.54) eşitlikleri (4.52) de kullanılırsa

$$Ric\left(X\right)\ge 2\tau^0+\left\|h^0\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2-\left\|h^0\right\|^2$$

$$+a(n-1)+b+b(n-2)T(X)^2$$

$$\sum_{2\le i\neq j\le n} \widetilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)-\sum_{2\le i\neq j\le n} R^0(e_i,e_j,e_j,e_i) \tag{4.55}$$

bulunur.

$$2\tau^0=\sum_{2\le i\neq j\le n} R^0(e_i,e_j,e_j,e_i)+2\sum_{1\le j\le n} R^0(e_1,e_j,e_j,e_1)$$

ve

$$\sum_{1\le i\neq j\le n} \tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)=\sum_{2\le i\neq j\le n} \tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)+2\sum_{1\le j\le n} \tilde{R}^0(e_1,e_j,e_j,e_1)$$

eşitlikleri (4.55) de kullanıldığında

$$Ric(X)\ge 2Ric^0\left(X\right)-\frac{n^2}{8}\left\|H\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2$$

$$+a(n-1)+b+b(n-2)T(X)^2-2\sum_{i=2}^{n}\tilde{K}^0\left(X\wedge e_i\right)$$

elde edilir. Burada $\tilde{K}^0\left(X\wedge .\right)=\sum_{1\le j\le n}\tilde{R}^0(X,e_j,e_j,X)$ dır. Eşitlik durumu için

$$h_{11}^{\alpha}=h_{22}^{\alpha}+\ldots+h_{nn}^{\alpha},\quad h_{1j}^{\alpha}=0,\quad 2\le j\le n \text{ ve } 1\le\alpha\le k,$$
$$h_{11}^{*\alpha}=h_{22}^{*\alpha}+\ldots+h_{nn}^{*\alpha},\quad h_{1j}^{*\alpha}=0,\quad 2\le j\le n \text{ ve } 1\le\alpha\le k$$

veya denk olarak

$$2h(X,X)=nH(p),\quad h(X,Y)=0,\quad \forall Y\in\chi\left(M\right) \text{ ve } X\perp Y,$$
$$2h^*(X,X)=nH^*(p),\quad h^*(X,Y)=0,\quad \forall Y\in\chi\left(M\right) \text{ ve } X\perp Y$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.3.1. [35] $M\subset\tilde{M}$ (n+k)-boyutlu yarı sabit eğrilikli $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldunun n-boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$Ric\left(X\right)\ge 2Ric^0(X)-\frac{n^2}{8}\left\|H\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2+a(n-1)+b+b(n-2)T(X)^2-2\sum_{i=2}^{n}\tilde{K}^0\left(X\wedge e_i\right)$$

dır. Eşitlik durumunda ise

$$2h(X,X) = nH(p), \quad h(X,Y) = 0, \quad \forall Y \in \chi(M) \text{ ve } X \perp Y,$$
$$2h^*(X,X) = nH^*(p), \quad h^*(X,Y) = 0, \quad \forall Y \in \chi(M) \text{ ve } X \perp Y$$

geçerlidir. Burada $X \in T_pM$ bir birim vektördür.

4.4 Genelleştirilmiş Wintgen Eşitsizliği

Bu bölümde yarı sabit eğrilikli istatistiksel bir manifoldun altmanifoldları için genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği ispatlanacaktır.

$M \subset \tilde{M}$ (n+k)-boyutlu yarı sabit eğrilikli $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldunun n-boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun. $e_1, e_2 \in T_pM$ ortonormal vektörler ve $\prod = sp\{e_1, e_2\}$ olmak üzere $\prod$ nin kesitsel eğriliği K ([37] ve [38])

$$K(e_1 \wedge e_2) = \frac{1}{2}[g(R(e_1,e_2)e_2,e_1) + g(R^*(e_1,e_2)e_2,e_1)] \tag{4.56}$$

ve $\{e_1,...,e_n\} \subset T_pM$ bir ortonormal baz olmak üzere M nin normalize skaler eğriliği ρ [39]

$$\rho = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} K(e_i \wedge e_j) \tag{4.57}$$

olarak tanımlanır. (4.56) den (4.57) eşitliği

$$\rho = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \left[g(R(e_i,e_j)e_j,e_i) + g(R^*(e_i,e_j)e_j,e_i) \right] \tag{4.58}$$

şeklinde yazılabilir. (4.1) den

$$\begin{aligned} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i) \quad &= \quad a\{g(e_i,e_i)g(e_j,e_j) - g(e_i,e_j)g(e_i,e_j)\} \\ &+b\{g(e_i,e_i)T(e_j)T(e_j) - g(e_i,e_j)T(e_j)T(e_i) \\ &+g(e_j,e_j)T(e_i)T(e_i) - g(e_j,e_i)T(e_i)T(e_j)\} \\ &+\tilde{g}(h^*(e_i,e_i),h(e_j,e_j)) - \tilde{g}(h^*(e_i,e_j),h(e_j,e_i)) \end{aligned}$$

dir. $1 \le i < j \le n$ için (4.58) de toplam alınırsa $i \ne j$ için $g(e_i,e_j) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le i < j \le n} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i) &= a\frac{n(n-1)}{2} + b(n-1) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n} \left\{ \tilde{g}(h^*(e_i,e_i),h(e_j,e_j)) - \tilde{g}(h^*(e_i,e_j),h(e_j,e_i)) \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le i < j \le n} g(R^*(e_i,e_j)e_j,e_i) &= a\frac{n(n-1)}{2} + b(n-1) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n} \{ \tilde{g}(h(e_i,e_i),h^*(e_j,e_j)) - \tilde{g}(h(e_i,e_j),h^*(e_j,e_i)) \} \end{aligned}$$

dir. Elde edilen iki eşitlik (4.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\rho &= a+\frac{2}{n}b-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\{2\tilde{g}\left(h(e_i,e_j),h^*(e_j,e_i)\right)\\ &\quad -\tilde{g}(h(e_i,e_i),h^*(e_j,e_j))-\tilde{g}(h^*(e_i,e_i),h(e_j,e_j))\}\end{aligned} \tag{4.59}$$

bulunur.

$$h_{ij}^r = g(h(e_i,e_j),e_{n+r}), \quad h_{ij}^{*r} = g(h^*(e_i,e_j),e_{n+r})$$
$$\forall i,j = 1,...,n \quad \text{and} \quad r=1,...,k,$$

olduğu için, (4.59) eşitliği

$$\rho = a+\frac{2}{n}b-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(2h_{ij}^r h_{ij}^{*r}-h_{ii}^{*r}h_{jj}^r-h_{ii}^r h_{jj}^{*r}\right) \tag{4.60}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$\rho^{\perp}$ normalize normal skaler eğiriliği ise

$$\rho^{\perp} = \frac{1}{n(n-1)}\{\sum_{1\le r<s\le k}\sum_{1\le i<j\le n}[g(R^{\perp}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s}) + g(R^{*\perp}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s})]^2\}^{1/2} \tag{4.61}$$

şeklinde tanımlanır [39]. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.4.1. [35] $M\subset\tilde{M}$ (n+k)-boyutlu yarı sabit eğrilikli $\tilde{M}$ istatistiksel manifoldunun n-boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\rho^{\perp} \le \frac{3}{2}\|H\|^2+\frac{3}{2}\|H^*\|^2+24\|H^0\|^2+3\rho-3a-\frac{6}{n}b+30(\tilde{\rho}^0-\rho^0) \tag{4.62}$$

dır. Burada $\tilde{\rho}^0$ ve ρ^0 sırasıyla $\tilde{\nabla}^0$ Levi-Civita konneksiyonu ve ∇^0 indirgenmiş Levi-Civita konneksiyonuna göre normalize skaler eğriliği göstermektedir ve $\rho^{\perp}\left(M,\nabla,g\right)$ istatistiksel altmanifoldunun normalize normal skaler eğriliğidir.

İspat. Önerme 3.10 ve Önerme 3.11 den ∇ ve ∇^* dual konneksiyon çifti için Ricci denklemi kullanılırsa, $e_i,e_j\in T_pM$ ve $e_{n+r},e_{n+s}\in T_p^{\perp}M$ olmak üzere;

$$g(R^{\perp}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s}) = g(\tilde{R}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s})+g\left(\left[A^*_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)$$

ve

$$g(R^{*\perp}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s})] = g(\tilde{R}^*(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s})+g\left(\left[A_{e_{n+r}},A^*_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)$$

dir. (4.1) eşitliğinden

$$g(\tilde{R}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s})=0$$

ve

$$g(\tilde{R}^{*}(e_i,e_j)e_{n+r},e_{n+s})=0$$

olup; buna göre (4.61) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\rho^{\perp}=\frac{1}{n(n-1)}\{\sum_{1\le r<s\le k}\sum_{1\le i<j\le n}[g\left(\left[A^{*}_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)$$

$$+g\left(\left[A_{e_{n+r}},A^{*}_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)]^2\}^{1/2} \tag{4.63}$$

dir. $\left[A^{*}_{\xi},A_{\eta}\right]=A^{*}_{\xi}A_{\eta}-A_{\eta}A^{*}_{\xi}$ olduğundan, Tanım 3.9 gereği

$$g\left(\left[A^{*}_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)=g\left(\left(A^{*}_{e_{n+r}}A_{e_{n+s}}-A_{e_{n+s}}A^{*}_{e_{n+r}}\right)e_i,e_j\right)$$
$$=g\left(h^{*}\left(A_{e_{n+s}}e_i,e_j\right),e_{n+r}\right)-g\left(h\left(A^{*}_{e_{n+r}}e_i,e_j\right),e_{n+s}\right)$$

yazılabilir. $A_{e_{n+s}}=g\left(A_{e_{n+s}}e_i,e_k\right)e_k$ yazılabileceğinden, Tanım 3.9 gereği

$$h^{*}\left(A_{e_{n+s}}e_i,e_j\right)=h^{*}\left(g\left(A_{e_{n+s}}e_i,e_k\right)e_k,e_j\right)$$
$$=g\left(A_{e_{n+s}}e_i,e_k\right)h^{*}\left(e_k,e_j\right)$$
$$=g\left(h(e_i,e_k),e_{n+s}\right)h^{*}\left(e_k,e_j\right)$$

bulunur. Buradan

$$g\left(h^{*}\left(A_{e_{n+s}}e_i,e_j\right),e_{n+r}\right)=g\left(g\left(h(e_i,e_k),e_{n+s}\right)h^{*}\left(e_k,e_j\right),e_{n+r}\right)$$
$$=g\left(h(e_i,e_k),e_{n+s}\right)g\left(h^{*}\left(e_k,e_j\right),e_{n+r}\right)$$

dir. Benzer şekilde

$$g\left(h\left(A^{*}_{e_{n+r}}e_i,e_j\right),e_{n+s}\right)=g\left(h^{*}\left(e_i,e_k\right),e_{n+r}\right)g\left(h\left(e_k,e_j\right),e_{n+s}\right)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$g\left(\left[A^{*}_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)=h^{s}_{ik}h^{*r}_{jk}-h^{*r}_{ik}h^{s}_{jk} \tag{4.64}$$

ve (4.64) eşitliğine benzer şekilde

$$g\left(\left[A_{e_{n+r}},A^{*}_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)=g\left(\left(A_{e_{n+r}}A^{*}_{e_{n+s}}-A^{*}_{e_{n+s}}A_{e_{n+r}}\right)e_i,e_j\right)$$
$$=g\left(h\left(A^{*}_{e_{n+s}}e_i,e_j\right),e_{n+r}\right)-g\left(h^{*}\left(A_{e_{n+r}}e_i,e_j\right),e_{n+s}\right)=h^{*s}_{ik}h^{r}_{jk}-h^{r}_{ik}h^{*s}_{jk} \tag{4.65}$$

elde edilir. (4.64) ve (4.65) eşitlikleri (4.63) de kullanılırsa

$$\rho^{\perp}=\frac{1}{n(n-1)}\left\{\sum_{1\le r<s\le k}\sum_{1\le i<j\le n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ik}^{s}h_{jk}^{*r}-h_{ik}^{*r}h_{jk}^{s}+h_{ik}^{*s}h_{jk}^{r}-h_{ik}^{r}h_{jk}^{*s}\right)\right]^{2}\right\}^{1/2}$$

veya eşiti olarak

$$\rho^{\perp}=\frac{1}{n(n-1)}\{\sum_{1\le r<s\le k}\sum_{1\le i<j\le n}[\sum_{k=1}^{n}((h_{ik}^{s}+h_{ik}^{*s})(h_{jk}^{r}+h_{jk}^{*r})-h_{ik}^{s}h_{jk}^{r}-h_{ik}^{*s}h_{jk}^{*r}$$

$$-(h_{ik}^{r}+h_{ik}^{*r})(h_{jk}^{s}+h_{jk}^{*s})+h_{ik}^{r}h_{jk}^{s}+h_{ik}^{*r}h_{jk}^{*s})]^{2}\}^{1/2} \tag{4.66}$$

dır. h^{0}, ∇^{0} Levi-Civita konneksiyonuna göre M^{n} in ikinci temel formu olmak üzere; (3.2) den $2h_{ik}^{0r}=h_{ik}^{r}+h_{ik}^{*r}$ yazılabilir. O halde, (4.66) eşitliği

$$\rho^{\perp}=\frac{1}{n(n-1)}\{\sum_{1\le r<s\le k}\sum_{1\le i<j\le n}[\sum_{k=1}^{n}(4\left(h_{ik}^{0s}h_{jk}^{0r}-h_{ik}^{0r}h_{jk}^{0s}\right)$$

$$+\left(h_{ik}^{r}h_{jk}^{s}-h_{ik}^{s}h_{jk}^{r}\right)+\left(h_{ik}^{*r}h_{jk}^{*s}-h_{ik}^{*s}h_{jk}^{*r}\right))]^{2}\}^{1/2} \tag{4.67}$$

şekline dönüşür. (4.67) de

$$\left(a+b+c\right)^{2}\le 3\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right),\quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$$

cebirsel eşitsizliği kullanılırsa

$$\rho^{\perp}\le\frac{3}{n(n-1)}\{\sum_{1\le r<s\le k}\sum_{1\le i<j\le n}[16\left[\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ik}^{0s}h_{jk}^{0r}-h_{ik}^{0r}h_{jk}^{0s}\right)\right]^{2}$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ik}^{r}h_{jk}^{s}-h_{ik}^{s}h_{jk}^{r}\right)\right]^{2}+\left[\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ik}^{*r}h_{jk}^{*s}-h_{ik}^{*s}h_{jk}^{*r}\right)\right]^{2}]\}^{1/2} \tag{4.68}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{r}-h_{jj}^{r}\right)^{2}+2n\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ij}^{r}\right)^{2}$$

$$\ge 2n\left[\sum_{1\le i<j\le n}\sum_{1\le r<s\le k}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{r}h_{ik}^{s}-h_{ik}^{r}h_{jk}^{s}\right)\right)^{2}\right]^{1/2} \tag{4.69}$$

eşitsizliği benzer şekilde

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{*r}-h_{jj}^{*r}\right)^{2}+2n\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ij}^{*r}\right)^{2}$$

$$\geq 2n\left[\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq r<s\leq k}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{*r}h_{ik}^{*s}-h_{ik}^{*r}h_{jk}^{*s}\right)\right)^{2}\right]^{1/2} \tag{4.70}$$

ve

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(h_{ii}^{0r}-h_{jj}^{0r}\right)^{2}+2n\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(h_{ij}^{0r}\right)^{2}$$

$$\geq 2n\left[\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq r<s\leq k}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{0r}h_{ik}^{0s}-h_{ik}^{0r}h_{jk}^{0s}\right)\right)^{2}\right]^{1/2} \tag{4.71}$$

şeklinde yazılabilir. (4.69)-(4.71) eşitsizlikleri toplanırsa

$$\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\leq i<j\leq n}\{\left(h_{ii}^{r}-h_{jj}^{r}\right)^{2}+2n\left(h_{ij}^{r}\right)^{2}+\left(h_{ii}^{*r}-h_{jj}^{*r}\right)^{2}+2n\left(h_{ij}^{*r}\right)^{2}$$

$$+16\left(h_{ii}^{0r}-h_{jj}^{0r}\right)^{2}+32n\left(h_{ij}^{0r}\right)^{2}\}\geq\left[\sum_{1\leq i<j\leq k}\sum_{1\leq r<s\leq m}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{r}h_{ik}^{s}-h_{ik}^{r}h_{jk}^{s}\right)\right)^{2}\right]^{1/2}$$

$$+\left[\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq r<s\leq k}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{*r}h_{ik}^{*s}-h_{ik}^{*r}h_{jk}^{*s}\right)\right)^{2}\right]^{1/2}+\left[\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq r<s\leq k}16\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{0r}h_{ik}^{0s}-h_{ik}^{0r}h_{jk}^{0s}\right)\right)^{2}\right]^{1/2} \tag{4.72}$$

bulunur. Diğer traftan a_j, b_j reel sayıları için

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j-b_j\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|b_j\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

olarak verilen eşitsizlik Minkowski eşitsizliği olarak bilinir. (4.72) eşitsizliğinde Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\leq i<j\leq n}\{\left(h_{ii}^{r}-h_{jj}^{r}\right)^{2}+2n\left(h_{ij}^{r}\right)^{2}+\left(h_{ii}^{*r}-h_{jj}^{*r}\right)^{2}+2n\left(h_{ij}^{*r}\right)^{2}$$

$$+16\left(h_{ii}^{0r}-h_{jj}^{0r}\right)^{2}+32n\left(h_{ij}^{0r}\right)^{2}\}\geq\{\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq r<s\leq k}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{r}h_{ik}^{s}-h_{ik}^{r}h_{jk}^{s}\right)\right)^{2}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{*r}h_{ik}^{*s}-h_{ik}^{*r}h_{jk}^{*s}\right)\right)^{2}+16\left(\sum_{k=1}^{n}\left(h_{jk}^{0r}h_{ik}^{0s}-h_{ik}^{0r}h_{jk}^{0s}\right)\right)^{2}\}^{1/2} \tag{4.73}$$

elde edilir. (4.73) eşitsizliği (4.68) de kullanılırsa

$$\rho^{\perp}\leq\frac{3}{2n^{2}(n-1)}[\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\leq i<j\leq n}\{\left(h_{ii}^{r}-h_{jj}^{r}\right)^{2}+\left(h_{ii}^{*r}-h_{jj}^{*r}\right)^{2}+16\left(h_{ii}^{0r}-h_{jj}^{0r}\right)^{2}\}]$$

$$+\frac{3}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\{\left(h_{ij}^{*r}\right)^2+\left(h_{ij}^{r}\right)^2+16\left(h_{ij}^{0r}\right)^2\} \tag{4.74}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$n^2\left\|H\right\|^2=\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^{r}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{r}-h_{jj}^{r}\right)^2+\frac{2n}{n-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}$$

ve benzer şekilde

$$n^2\left\|H^*\right\|^2=\frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{*r}-h_{jj}^{*r}\right)^2+\frac{2n}{n-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}h_{ii}^{*r}h_{jj}^{*r}$$

ve

$$n^2\left\|H^0\right\|^2=\frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{0r}-h_{jj}^{0r}\right)^2+\frac{2n}{n-1}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}h_{ii}^{0r}h_{jj}^{0r}$$

olup; buradan

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{r}-h_{jj}^{r}\right)^2=\left(n-1\right)n^2\left\|H\right\|^2-2n\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}h_{ii}^{r}h_{jj}^{r},$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{*r}-h_{jj}^{*r}\right)^2=(n-1)n^2\left\|H^*\right\|^2-2n\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}h_{ii}^{*r}h_{jj}^{*r},$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}\left(h_{ii}^{0r}-h_{jj}^{0r}\right)^2=(n-1)n^2\left\|H^0\right\|^2-2n\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}h_{ii}^{0r}h_{jj}^{0r}$$

eşitlikleri (4.74) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\rho^{\perp}\le{}&\frac{3}{2}\left\|H\right\|^2+\frac{3}{2}\left\|H^*\right\|^2+24\left\|H^0\right\|^2\\&-\frac{3}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}+h_{ii}^{*r}h_{jj}^{*r}-h_{ii}^{*}h_{jj}^{r}+16h_{ii}^{0r}h_{jj}^{0r})\\&+\frac{3}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(\left(h_{ij}^{r}\right)^2+\left(h_{ij}^{*r}\right)^2+16(h_{ij}^{0r})^2)\end{aligned} \tag{4.75}$$

bulunur. (4.75) eşitsizliğinde $2h_{ik}^{0r}=h_{ik}^{r}+h_{ik}^{*r}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\rho^{\perp}\le{}&\frac{3}{2}\left\|H\right\|^2+\frac{3}{2}\left\|H^*\right\|^2+24\left\|H^0\right\|^2\\&-\frac{3}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(20h_{ii}^{0r}h_{jj}^{0r}-h_{ii}^{r}h_{jj}^{*r}-h_{ii}^{*}h_{jj}^{r}+2h_{ij}^{r}h_{ij}^{*r}-20(h_{ij}^{0r})^2)\end{aligned} \tag{4.76}$$

elde edilir. (4.60) dan

$$\rho - a - \frac{2}{n}b = -\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(2h_{ij}^{r}h_{ij}^{*r} - h_{ii}^{*r}h_{jj}^{r} - h_{ii}^{r}h_{jj}^{*r}\right)$$

eşitliği (4.76) da kullanılırsa

$$\rho^{\perp} \le \frac{3}{2}\|H\|^2 + \frac{3}{2}\|H^*\|^2 + 24\|H^0\|^2 + 3\rho - 3a - \frac{6}{n}b$$

$$-\frac{60}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ii}^{0r}h_{jj}^{0r} - (h_{ij}^{0r})^2) \tag{4.77}$$

dir. Normalize skaler eğrilik fonksiyonu tanımı gereği

$$\tilde{\rho}^0 = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\tilde{R}^0(e_i, e_j, e_j, e_i)$$

olduğundan, Levi-Civita konneksiyonu için Gauss denkleminden

$$\tilde{\rho}^0 - \rho^0 = -\frac{2}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{k}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ii}^{0r}h_{jj}^{0r} - (h_{ij}^{0r})^2)$$

yazılabilir. Elde edilen eşitliğin (4.77) de yerine yazılmasıyla, (4.62) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5. SASAKİ-BENZERİ İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLARIN BAZI ALTMANİFOLDLARI İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

5.1 Sasaki-Benzeri İstatistiksel Manifoldlar ve Bunların Bazı Altmanifoldları

Bu bölümde Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldların invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları incelenip, örnekler verilecektir.

[21] numaralı kaynakta (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısı ve $X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(\phi X,Y)+g(X,\phi^{*}Y)=0 \tag{5.1}$$

koşulunu sağlayan $(1,1)$ tipinde bir ϕ^{*} tensör alanının varlığı ile birlikte bir (M,g) yarı Riemann manifoldu ele alınmıştır. Bu durumda (M,g,ϕ,ξ,η) hemen hemen kontakt metrik manifoldun bir çeşidi olarak adlandırılır [23].

$$(\phi^{*})^{2}X=-X+\eta(X)\xi$$

ve

$$g(\phi X,\phi^{*}Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{5.2}$$

olduğu kolayca görülebilir. (5.1) eşitliği gereği ϕ tensör alanı g metriğine göre simetrik değildir. Bu da $\phi+\phi^{*}\neq 0$ olmasını gerektirir. $\phi\xi=0$ ve $\eta(\phi X)=0$ denklemleri bir hemen hemen kontakt manifold üzerinde sağlandığından, hemen hemen kontakt metrik manifoldun bir çeşidi üzerinde

$$\phi^{*}\xi=0 \text{ ve } \eta(\phi^{*}X)=0$$

denklemleri elde edilir.

[23] numaralı kaynakta Takano hemen hemen kontakt metrik manifoldun bir çeşidi üzerinde bir istatistiksel manifold tanımlamıştır. Eğer

$$\nabla_{X}\xi=-\phi X,\quad (\nabla_{X}\phi)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X \tag{5.3}$$

ise, $(M,\nabla,g,\phi,\xi,\eta)$ bir Sasaki-benzeri istatistiksel manifold olarak adlandırılır.

$(M,\nabla,g,\phi,\xi,\eta)$ bir Sasaki-benzeri istatistiksel manifold olsun. c bir reel sabit olmak üzere; M nin ∇ ya göre eğrilik tensör alanı R nin

$$R(X,Y)Z=\frac{c+3}{4}\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right]+\frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y$$

$$-\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi+\tilde{g}(X,\phi Z)\phi Y$$

$$-\tilde{g}(Y,\phi Z)\phi X+\left[\tilde{g}(X,\phi Y)-\tilde{g}(\phi X,Y)\right]\phi Z\}. \tag{5.4}$$

denklemini sağladığını varsayalım. (5.4) denkleminde ϕ yerine ϕ^* alınırsa R^* eğrilik tensör alanı elde edilir [23].

$X\in\chi(M)$ için PX ve FX ϕX in, P^*X ve F^*X ϕ^*X in sırası ile tanjant ve normal bileşenleri olmak üzere

$$\phi X=PX+FX$$

ve

$$\phi^*X=P^*X+F^*X$$

yazılabilir.

$$\|P\|^2=\sum_{i,j=1}^{n}g^2\left(\phi e_i,e_j\right)$$

ve

$$\lambda=izP$$

ile gösterilsin.

$\tilde{M}$ $(2m+1)$-boyutlu bir Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. $\{e_1,..,e_n\}$ ve $\{e_{n+1},...,e_{2m+1}\}$ sırası ile T_pM ve $T_p^{\perp}M$ nin birer ortonormal çatısı olsun.

Klasik anlamda bir Sasakian manifoldun invariant ve anti-invariant altmanifold tanımına benzer olarak, aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 5.1.1. [40] $\tilde{M}$ bir Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ bir altmanifold olsun. $\forall X\in\chi(M)$ için eğer $\phi X\in\chi(M)$ ise, M ye $\tilde{M}$ nın bir invaryant altmanifoldu, eğer $\phi X\in\chi^{\perp}(M)$ ise bir anti-invaryant altmanifoldu adı verilir.

Örnek 5.1.2. [23] $\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z\}$ standart koordinat sistemi olmak üzere; $\mathbb{R}_n^{2n+1}$ $(2n+1)$-boyutlu bir afin uzay olsun. $\mathbb{R}_n^{2n+1}$ üzerinde g yarı-Riemann metriğini, ∇ afin konneksiyonunu, ϕ, ξ ve η yi sırası ile

$$g=\begin{pmatrix} 2\delta_{ij}+y_iy_j & 0 & -y_i \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ -y_j & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ve $\partial x_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial y_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ ve $\partial z = \dfrac{\partial}{\partial z}$ olmak üzere

$$\nabla_{\partial x_i}\partial x_j = -y_j\partial y_i - y_i\partial y_j,$$

$$\nabla_{\partial x_i}\partial y_j = \nabla_{\partial y_j}\partial x_i = y_i\partial x_j + \left(y_iy_j - 2\delta_{ij}\right)\partial z,$$

$$\nabla_{\partial x_i}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial x_i = \partial y_i,$$

$$\nabla_{\partial y_i}\partial z = \nabla_{\partial z}\partial y_i = -\partial x_i - y_i\partial z,$$

$$\nabla_{\partial y_i}\partial y_i = \nabla_{\partial z}\partial z = 0,$$

$$\phi=\begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y_i & 0 \end{pmatrix},\ \xi=\partial z=\begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta=\left(-y_1,0,-y_2,\ldots,-y_n,0,1\right)$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $\left(\mathbb{R}_n^{2n+1},\nabla,g,\phi,\xi,\eta\right)$ bir Sasaki-benzeri istatistiksel manifold olur ve $\mathbb{R}_n^{2n+1}$ in eğrilik tensör alanı R, $c=-3$ için (5.4) denklemini sağlar. Buradan

$$\phi^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ 4\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -y_i & 0 \end{pmatrix},$$

olduğu kolayca görülebilir. □

[41] makalesindeki verilen örneklere benzer şekilde, Örnek 5.1.2 de verilen Sasaki-benzeri istatistiksel yapıyı göz önüne alarak $\mathbb{R}^5$ ve $\mathbb{R}^9$ Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldlarda aşağıdaki örnekler verilebilir:

Örnek 5.1.3. [40] M

$$x(u,v,t)=(u,0,v,0,t)$$

eşitliği ile verilen 3-boyutlu bir alt manifold olsun. Örnek 5.1.2 gereği

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

$X = x_u = (1,0,0,0,0)$,

$Y = x_v = (0,0,1,0,0)$,

$Z = x_t = (0,0,0,0,1)$,

olduğundan, $U \in \chi(M)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$U = aX + bY + cZ = (a,0,b,0,c)$,

biçiminde yazılabilir. Buradan;

$$\phi U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b & 0 & -a & 0 & bx_3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece $\phi U = bX - aY + bx_3 Z$ yazılabileceğinden $\phi U \in \chi(M)$ dir. Benzer şekilde $\phi^* U \in \chi(M)$ olduğu için, M istatistiksel manifoldu Sasaki-benzeri $(\mathbb{R}^5, \nabla, g, \phi, \xi, \eta)$ istatistiksel manifoldunun bir invaryant altmanifoldudur. □

Örnek 5.1.4. [40] M

$x(u,v,t) = (0,v,u,0,t)$

eşitliği ile verilen 3-boyutlu bir altmanifold olsun. $\mathbb{R}^5$ de koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olmak üzere; Örnek 5.1.2 den

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

$X = x_u = (0,0,1,0,0)$,

$Y = x_v = (0,1,0,0,0)$,

$Z = x_t = (0,0,0,0,1)$,

olduğundan, $U \in \chi(M)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$U = aX + bY + cZ = (0,b,a,0,c)$

biçiminde yazılabilir. Buradan;

$$\phi U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b & ax_3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Örnek 5.1.2. deki yapı göz önüne alınarak,

$$g(\phi U, U) = \phi U . g . U^T$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b & ax_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+x_3^2 & x_3x_4 & 0 & 0 & -x_3 \\ x_3x_4 & 2+x_4^2 & 0 & 0 & -x_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -x_3 & -x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = 0$$

ve benzer şekilde

$$\phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x_3}{2} & -\frac{x_4}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\phi^{*}U=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&-\frac{x_3}{2}&-\frac{x_4}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\\a\\0\\c\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{a}{2}&0&0&2b&-\frac{ax_3}{2}\end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$g\left(\phi^{*}U,U\right)=\phi^{*}U.g.U^{T}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{a}{2}&0&0&2b&-\frac{ax_3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+x_3^2&x_3x_4&0&0&-x_3\\x_3x_4&2+x_4^2&0&0&-x_4\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\-x_3&-x_4&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\\a\\0\\c\end{pmatrix}=0$$

elde edilir. Böylece M, $\left(\mathbb{R}^5,\nabla,g,\phi,\xi,\eta\right)$ Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldunun bir anti-invaryant altmanifoldu olur. Diğer taraftan,

$$\phi Z=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&x_3&x_4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

olduğundan, $Z=\xi\in\chi\left(M\right)$ dir. $U\in\chi\left(M\right)$ için, $\phi U\in\chi^{\perp}\left(M\right)$ ve $\phi^{*}U\in\chi^{\perp}\left(M\right)$ olduğundan M, $\left(\mathbb{R}^5,\nabla,g,\phi,\xi,\eta\right)$ Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldunun bir anti-invaryant altmanifoldudur ve $\xi\in\chi\left(M\right)$ dir. □

Örnek 5.1.5. [40] M

$$x\left(u,v,w,s\right)=\left(0,0,0,0,u,v,w,s,0\right)$$

eşitliği ile verilen 4 boyutlu bir altmanifold olsun. $\mathbb{R}^9$ da koordinat fonksiyonları $\left\{x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4,z\right\}$ olmak üzere; Örnek 5.1.2 den;

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

$X = x_u = (0,0,0,0,1,0,0,0,0)$,

$Y = x_v = (0,0,0,0,0,1,0,0,0)$,

$Z = x_w = (0,0,0,0,0,0,1,0,0)$,

$W = x_s = (0,0,0,0,0,0,0,1,0)$

olup, $U \in \chi(M)$ için $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$U = aX + bY + cZ + dW = (0,0,0,0,a,b,c,d,0)$

şeklinde yazılabilir. $V = (0,0,0,0,0,0,0,0,1)$ vektörünü ele alalım.

$$\phi V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= 0$

olduğundan $V = \xi$ dir. Örnek 5.1.2 deki yapıdan

$$g=\begin{pmatrix} 2+y_1^2 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_1y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 \\ y_1y_2 & 2+y_2^2 & y_3y_2 & y_4y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_2 \\ y_1y_3 & y_3y_2 & 2+y_3^2 & y_3y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_3 \\ y_1y_4 & y_4y_2 & y_3y_4 & 2+y_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$g(\xi,U)=\xi.g.U^T$$

$$\xi.g=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\delta_{ij}+y_iy_j & 0 & -y_i \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ -y_j & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\leq i,j\leq 4$$

$$=\begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(\xi,U)=\begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}=0$$

bulunduğundan, ξ bir normal vektör alanıdır. Yani, $\xi\in\chi^{\perp}(M)$ dir. Diğer taraftan

$$\phi U=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ b \\ c \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & ay_1+by_2+cy_3+dy_4 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$g\left(\phi U,U\right)=\phi U.g.U^{T}$$

$$\phi U.g=\begin{pmatrix}a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & ay_1+by_2+cy_3+dy_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\delta_{ij}+y_iy_j & 0 & -y_i\\ 0 & -\delta_{ij} & 0\\ -y_j & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$1\leq i,j\leq 4$

$$=\begin{pmatrix}2a & 2b & 2c & 2d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$g\left(\phi U,U\right)=\begin{pmatrix}2a & 2b & 2c & 2d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\a\\b\\c\\b\\0\end{pmatrix}=0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$g\left(\phi^{*}U,U\right)=\phi^{*}U.g.U^{T}=0$$

olduğu gösterilebilir. $U\in\chi\left(M\right)$ için $\phi U\in\chi^{\perp}\left(M\right)$ ve $\phi^{*}U\in\chi^{\perp}\left(M\right)$ olduğundan, M $\left(\mathbb{R}^9,\nabla,g,\phi,\xi,\eta\right)$ Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldunun bir anti-invaryant altmanifoldudur ve $\xi\in\chi^{\perp}\left(M\right)$dir. □

5.2 Sasaki-Benzeri İstatistiksel Manifoldların Bazı Altmanifoldları için Eşitsizlikler

Bu bölümde, Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldların istatistiksel altmanifoldları için bazı eşitsizlikler elde edilecektir.

Önerme 5.2.1. [40] $\tilde{M}$ eğrilik tensör alanı (5.4) eşitliğini sağlayan (2m+1)-boyutlu Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun.

(i) ξ M ’ye teğet olsun.

(a) Eğer M invaryant ise bu durumda

$$Ric\left(X,Y\right)=\frac{c+3}{4}\left(n-1\right)g\left(X,Y\right)$$
$$+\frac{c-1}{4}\left\{2g\left(PX,PY\right)-\left(n-1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-\lambda g\left(X,PY\right)\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^{*}_{E_{n+i}}-g\left(A^{*}_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\}$$

dir.

(b) Eğer M anti-invaryant ise bu takdirde

$$Ric(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)$$
$$-\frac{c-1}{4}\{(n-2)\eta(X)\eta(Y)+g(X,Y)\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^{*}_{E_{n+i}}-g\left(A^{*}_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\}$$

dir.

(ii) Eğer ξ, M 'ye normal ve M anti-invaryant ise

$$Ric(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^{*}_{E_{n+i}}-g\left(A^{*}_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\}$$

dir.

İspat. Gauss denklemi ve (5.4) eşitliğinden,

$$g\left(R(X,Y)Z,W\right)=\frac{c+3}{4}\left[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\right]$$
$$+\frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)$$
$$+g(X,Z)\eta(Y)\eta(W)-g(Y,Z)\eta(X)\eta(W)+g(X,\phi Z)g(\phi Y,W)$$
$$-g(Y,\phi Z)g(\phi X,W)+\left[g(X,\phi Y)-g(\phi X,Y)\right]g(\phi Z,W)\}$$
$$-\bar{g}\left(h(X,Z),h^{*}(Y,W)\right)+\bar{g}\left(h^{*}(X,W),h(Y,Z)\right) \tag{5.5}$$

yazılabilir. $\{E_1,...,E_n\}$ ve $\{E_{n+1},...,E_{2m+1}\}$ $\chi(M)$ üzerinde sırası ile teğet ve normal çatılar olsun. (5.5) den

$$g\left(R\left(E_j,X\right)Y,E_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{c+3}{4}\left[g(X,Y)g\left(E_j,E_j\right)-g\left(E_j,Y\right)g\left(X,E_j\right)\right]\right.$$
$$+\frac{c-1}{4}\{\eta\left(E_j\right)\eta(Y)g\left(X,E_j\right)-\eta(X)\eta(Y)g\left(E_j,E_j\right)$$
$$+g\left(E_j,Y\right)\eta(X)\eta\left(E_j\right)-g(X,Y)\eta\left(E_j\right)\eta\left(E_j\right)+g\left(E_j,\phi Y\right)g\left(\phi X,E_j\right)$$
$$-g(X,\phi Y)g\left(\phi E_j,E_j\right)+\left[g\left(E_j,\phi X\right)-g\left(\phi E_j,X\right)\right]g\left(\phi Y,E_j\right)\}$$

$$-\widetilde{g}\left(h\left(E_j,Y\right),h^*\left(X,E_j\right)\right)+\widetilde{g}\left(h^*\left(E_j,E_j\right),h\left(X,Y\right)\right)\Big\} \tag{5.6}$$

dir. Buradan hesaplamalar yapılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{c+3}{4}\left[g\left(X,Y\right)g\left(E_j,E_j\right)-g\left(E_j,Y\right)g\left(X,E_j\right)\right]$$
$$=\frac{c+3}{4}\sum_{j=1}^{n}\left[g\left(X,Y\right)g\left(E_j,E_j\right)-g\left(X,g\left(E_j,Y\right)E_j\right)\right]$$
$$=\frac{c+3}{4}\left(n-1\right)g\left(X,Y\right), \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\eta\left(E_j\right)\eta\left(Y\right)g\left(X,E_j\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(E_j,\xi^T\right)\eta\left(Y\right)g\left(X,E_j\right)$$
$$=\eta\left(Y\right)g\left(X,\xi^T\right)=\eta\left(Y\right)\eta\left(X\right), \tag{5.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)g\left(E_j,E_j\right)=n\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right), \tag{5.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(E_j,Y\right)\eta\left(X\right)\eta\left(E_j\right)=\eta\left(X\right)\sum_{j=1}^{n}g\left(E_j,Y\right)g\left(E_j,\xi^T\right)$$
$$=\eta\left(X\right)\sum_{j=1}^{n}g\left(g\left(E_j,Y\right)E_j,\xi^T\right)=\eta\left(X\right)g\left(\xi^T,Y\right)=\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right), \tag{5.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(X,Y\right)\eta\left(E_j\right)\eta\left(E_j\right)=g\left(X,Y\right)\sum_{j=1}^{n}g\left(g\left(E_j,\xi^T\right)E_j,\xi^T\right)$$
$$=g\left(X,Y\right)g\left(\xi^T,\xi^T\right)=g\left(X,Y\right)\left\|\xi^T\right\|^2, \tag{5.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(X,\phi Y\right)g\left(\phi E_j,E_j\right)=g\left(X,PY\right)\sum_{j=1}^{n}g\left(PE_j,E_j\right)=g\left(X,PY\right)\lambda, \tag{5.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(E_j,\phi Y\right)g\left(\phi X,E_j\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(E_j,PY\right)g\left(PX,E_j\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}g\left(PX,g\left(E_j,PY\right)E_j\right)=g\left(PX,PY\right), \tag{5.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(\phi E_j,X\right)g\left(\phi Y,E_j\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(PE_j,X\right)g\left(PY,E_j\right)$$
$$=-\sum_{j=1}^{n}g\left(E_j,P^*X\right)g\left(PY,E_j\right)=-\sum_{j=1}^{n}g\left(PY,g\left(E_j,P^*X\right)E_j\right)=-g\left(PY,P^*X\right) \tag{5.14}$$

bulunur.

Diğer taraftan h ve h^* simetrik bilineer fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$h(X,Y)=\sum_{i=1}^{2m-n+1}\tilde{g}\left(h(X,Y),E_{n+i}\right)E_{n+i}, \tag{5.15}$$

$$h^*\left(E_j,E_j\right)=\sum_{i=1}^{2m-n+1}\tilde{g}\left(h^*\left(E_j,E_j\right),E_{n+i}\right)E_{n+i}. \tag{5.16}$$

Bu durumda, yukarıdaki (5.15) ve (5.16) dan

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\tilde{g}\left(h^*\left(E_j,E_j\right),h(X,Y)\right)-\tilde{g}\left(h\left(E_j,Y\right),h^*\left(X,E_j\right)\right)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\tilde{g}\left(\sum_{i=1}^{2m-n+1}\tilde{g}\left(h(X,Y),E_{n+i}\right)E_{n+i},\sum_{i=1}^{2m-n+1}\tilde{g}\left(h^*\left(E_j,E_j\right),E_{n+i}\right)E_{n+i}\right)\right.$$
$$\left.-\tilde{g}\left(\sum_{i=1}^{2m-n+1}\tilde{g}\left(h\left(Y,E_j\right),E_{n+i}\right)E_{n+i},\sum_{i=1}^{2m-n+1}\tilde{g}\left(h^*\left(X,E_j\right),E_{n+i}\right)E_{n+i}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^*{}_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\} \tag{5.17}$$

olup; bulunan (5.7)-(5.14) eşitlikleri ile (5.17) eşitliği, (5.6) da yerine yazılırsa

$$Ric(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)+\frac{c-1}{4}\{2g(PX,PY)$$
$$\left\{-(n-2)\eta(X)\eta(Y)-\lambda g(X,PY)-g(X,Y)\left\|\xi^T\right\|^2+g\left(P^*X,PY\right)\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^*_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\} \tag{5.18}$$

elde edilir.

i) ξ, M ye teğet olsun. Bu durumda $\left\|\xi^T\right\|=1$ olup; iki durum söz konusudur:

a) M invaryant olsun. Böylece $\phi X=PX$ ve $\phi^*X=P^*X$ olup;

$$g\left(\phi^*X,\phi Y\right)=g\left(P^*X,PY\right)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

eşitliği (5.18) denkleminde kullanılırsa

$$Ric(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)$$
$$+\frac{c-1}{4}\{2g(PX,PY)-(n-1)\eta(X)\eta(Y)-\lambda g(X,PY)$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^*_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\}$$

elde edilir.

b) M anti-invaryant olsun. Bu durumda (5.18) den

$$Ric(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)+\frac{c-1}{4}\{-(n-2)\eta(X)\eta(Y)-g(X,Y)\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^*_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\}$$

elde edilir.

ii) ξ, M ye normal ve M anti-invaryant olsun. O halde (5.18) eşitliği

$$Ric(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A_{E_{n+i}}X,Y\right)izA^*_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}X,A_{E_{n+i}}Y\right)\right\}$$

şekline dönüşür. □

(3.3) eşitliği gözönüne alınarak benzer hesaplamalar $Ric^*(X,Y)$ için yapılırsa aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 5.2.2. [40] $\tilde{M}$ eğrilik tensör alanı (5.4) eşitliğini sağlayan (2*m*+1)-boyutlu Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ *n*-boyutlu bir altmanifold olsun.

(i) ξ, M 'ye teğet olsun.

(a) Eğer M invaryant ise bu durumda

$$Ric^*(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)$$
$$+\frac{c-1}{4}\left\{2g\left(P^*X,P^*Y\right)-(n-1)\eta(X)\eta(Y)-\lambda g(PX,Y)\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A^*_{E_{n+i}}X,Y\right)izA_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}Y,A_{E_{n+i}}X\right)\right\}$$

dir.

(b) Eğer M anti-invaryant ise bu takdirde

$$Ric^*(X,Y)=\frac{c+3}{4}(n-1)g(X,Y)$$
$$-\frac{c-1}{4}\{(n-2)\eta(X)\eta(Y)+g(X,Y)\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A^*_{E_{n+i}}X,Y\right)izA_{E_{n+i}}-g\left(A^*_{E_{n+i}}Y,A_{E_{n+i}}X\right)\right\}$$

dir.

(ii) Eğer ξ, M ye normal ve M anti-invaryant ise

$$Ric^{*}\left(X,Y\right)=\frac{c+3}{4}\left(n-1\right)g\left(X,Y\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{2m-n+1}\left\{g\left(A^{*}_{E_{n+i}}X,Y\right)izA_{E_{n+i}}-g\left(A^{*}_{E_{n+i}}Y,A_{E_{n+i}}X\right)\right\}$$

dir.

Teorem 5.2.3. [40] $\tilde{M}$ eğrilik tensör alanı (5.4) eşitliğini sağlayan (2*m*+1)-boyutlu Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ *n*-boyutlu bir altmanifold olsun. Bu takdirde

$$2\tau\geq\frac{c+3}{4}\left(n^{2}-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\left\|P\right\|^{2}-\left(2n-2\right)\left\|\xi^{T}\right\|^{2}\right.$$

$$\left.-\lambda^{2}+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_{i},P^{*}e_{i}\right)\right\}+n^{2}\tilde{g}\left(H,H^{*}\right)-\left\|h\right\|\left\|h^{*}\right\| \tag{5.19}$$

dir. Burada τ ile $\left(M,g,\nabla,\nabla^{*}\right)$nin skaler eğriliği gösterilmektedir. (5.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu $h\parallel h^{*}$ olması durumunda sağlanır.

İspat. $\left\{e_{1},..,e_{n}\right\}\subset T_{p}M$ bir ortonormal baz olsun. $\left\|h\right\|^{2}=\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^{2}$ olarak tanımlansın. Benzer tanım $\left\|h^{*}\right\|^{2}$ içinde yapılabilir.

(5.5) denkleminden

$$\sum_{i,j=1}^{n}g\left(R\left(e_{i},e_{j}\right)e_{j},e_{i}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}[\frac{c+3}{4}\left\{g\left(e_{j},e_{j}\right)g\left(e_{i},e_{i}\right)-g\left(e_{i},e_{j}\right)g\left(e_{i},e_{j}\right)\right\}$$

$$+\frac{c-1}{4}\left\{g\left(e_{i},e_{j}\right)\eta(e_{j})\eta(e_{i})-\eta\left(e_{j}\right)\eta\left(e_{j}\right)g\left(e_{i},e_{i}\right)\right.$$

$$+g\left(e_{i},e_{j}\right)\eta(e_{j})\eta(e_{i})-g\left(e_{j},e_{j}\right)\eta(e_{i})\eta(e_{i})$$

$$+g\left(e_{i},\phi e_{j}\right)g\left(e_{i},\phi e_{j}\right)-g\left(e_{j},\phi e_{j}\right)g\left(\phi e_{i},e_{i}\right)$$

$$\left.\left[g\left(e_{i},\phi e_{j}\right)-g\left(\phi e_{i},e_{j}\right)\right]g\left(e_{i},\phi e_{j}\right)\right\}$$

$$+\tilde{g}\left(h^{*}\left(e_{i},e_{i}\right),h\left(e_{j},e_{j}\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_{i},e_{j}\right),h^{*}\left(e_{i},e_{j}\right)\right)] \tag{5.20}$$

dir. Buradan hesaplamalar yapılırsa,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{c+3}{4}\left\{g\left(e_{j},e_{j}\right)g\left(e_{i},e_{i}\right)-g\left(e_{i},e_{j}\right)g\left(e_{i},e_{j}\right)\right\}=n^{2}-n, \tag{5.21}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}g\left(e_{i},e_{j}\right)\eta(e_{j})\eta(e_{i})=\sum_{i,j=1}^{n}g\left(e_{i},e_{j}\right)g\left(e_{i},\xi^{T}\right)g\left(e_{j},\xi^{T}\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i, g\left(e_j,\xi^T\right)e_j\right) g\left(e_i,\xi^T\right) = \sum_{i=1}^{n} g\left(e_i,\xi^T\right) g\left(e_i,\xi^T\right) = \sum_{i=1}^{n} g\left(g\left(e_i,\xi^T\right)e_i,\xi^T\right)$$

$$= g\left(\xi^T,\xi^T\right) = \left\|\xi^T\right\|^2, \tag{5.22}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \eta\left(e_j\right)\eta\left(e_j\right) g\left(e_i,e_i\right) = n\sum_{j=1}^{n} g\left(e_j,\xi^T\right) g\left(e_j,\xi^T\right)$$

$$= n\sum_{j=1}^{n} g\left(g\left(e_j,\xi^T\right)e_j,\xi^T\right) = ng\left(\xi^T,\xi^T\right) = n\left\|\xi^T\right\|^2, \tag{5.23}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_j,\phi e_j\right) g\left(\phi e_i,e_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_j,Pe_j\right) g\left(Pe_i,e_i\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} g\left(e_j,Pe_j\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,e_i\right)\right) = \lambda.\lambda = \lambda^2, \tag{5.24}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,\phi e_j\right) g\left(e_i,\phi e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,Pe_j\right) g\left(e_i,Pe_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g\left(g\left(e_i,Pe_j\right)e_i,Pe_j\right) = \sum_{j=1}^{n} g\left(Pe_j,Pe_j\right) = \left\|P\right\|^2, \tag{5.25}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_i\right),h\left(e_j,e_j\right)\right) = n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right), \tag{5.26}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right) = \sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{*\alpha} \tag{5.27}$$

bulunur. Diğer taraftan $e_i, e_j \in T_pM$ için $g\left(\phi e_i,e_j\right)+g\left(e_i,\phi^* e_j\right)=0$ olduğundan

$$g\left(Pe_i,e_j\right)+g\left(e_i,P^* e_j\right)=0$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{i,j=1}^{n} g\left(\phi e_i,e_j\right) g\left(e_i,\phi e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g\left(Pe_i,e_j\right) g\left(e_i,Pe_j\right)$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} g\left(e_i,P^* e_j\right) g\left(e_i,Pe_j\right) = -\sum_{i,j=1}^{n} g\left(g\left(e_i,P^* e_j\right)e_i,Pe_j\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} g\left(P^* e_j,Pe_j\right) \tag{5.28}$$

bulunur. Elde edilen (5.21)-(5.28) eşitlikleri (5.20) de yerine yazılırsa ve $2\tau=\sum_{i,j=1}^{n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}2\tau &= \frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2\right.\\ &\left.-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}+n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right)-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}&\geq \frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2\right.\\ &\left.+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}+n^2\tilde{g}\left(H,H^*\right)-\|h\|\left\|h^*\right\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik durumu için (5.19) eşitsizliği ile (5.29) eşitliği karşılaştırılırsa

$$\|h\|\left\|h^*\right\|=\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}=g\left(h,h^*\right)$$

dir. Diğer taraftan $g\left(h,h^*\right)=\|h\|\left\|h^*\right\|\cos\theta$ olduğundan $\cos\theta=1$ olup; buradan $h \parallel h^*$ olduğu görülür. Burada θ, h ve h^* arasındaki açıdır. □

5.3 Chen-Ricci Eşitsizliği

Bu bölümde Sasaki-benzeri istatistiksel manifoldların altmanifoldları için Chen-Ricci eşitsizliği elde edilecektir.

$\tilde{M}$, eğrilik tensör alanı (5.4) eşitliğini sağlayan (2*m*+1)-boyutlu Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M\subset\tilde{M}$ *n*-boyutlu bir altmanifold olsun. $\left\{e_1,..,e_n\right\}\subset T_pM$ bir ortonormal baz olmak üzere

$$\begin{aligned}2\tau &= \frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}\\ &+n^2\tilde{g}(H,H^*)-\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\end{aligned} \tag{5.30}$$

dir. (5.30) eşitliğinde $\tilde{g}(H,H)$, $\tilde{g}(H^*,H^*)$, $\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)$ ve $\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)$ terimleri eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}2\tau &= \frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}\\ &+\frac{n^2}{2}\{2\tilde{g}(H,H^*)+\tilde{g}(H,H)+\tilde{g}(H^*,H^*)-\tilde{g}(H,H)-\tilde{g}(H^*,H^*)\}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}2\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)+\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)$$

$$+\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\} \tag{5.31}$$

bulunur. (5.31) eşitliğinden

$$2\tau=\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}$$

$$+\frac{n^2}{2}\{\tilde{g}(H+H^*,H^*+H)-\tilde{g}(H,H)-\tilde{g}(H^*,H^*)\}$$

$$-\frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right)+h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)+h\left(e_i,e_j\right)\right)$$

$$-\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right)\} \tag{5.32}$$

elde edilir. $\nabla+\nabla^*=2\nabla^0$ eşitliğinden $2H^0=H+H^*$ yazılabileceğinden, (5.32) eşitliği

$$2\tau=\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}$$

$$+2n^2\tilde{g}(H^0,H^0)-\frac{n^2}{2}\tilde{g}(H,H)-\frac{n^2}{2}\tilde{g}(H^*,H^*)-2\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h^0\left(e_i,e_j\right),h^0\left(e_i,e_j\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)+\tilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_i,e_j\right)\right) \tag{5.33}$$

şekline dönüşür. (5.33) den

$$2\tau=\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}+2n^2\left\|H^0\right\|^2-\frac{n^2}{2}\|H\|^2-\frac{n^2}{2}\left\|H^*\right\|^2$$

$$-2\left\|h^0\right\|^2+\frac{1}{2}(\|h\|^2+\left\|h^*\right\|^2) \tag{5.34}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|h\|^2 &= \sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^{\alpha})^2\\ &= \sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\left\{(h_{11}^{\alpha})^2+(h_{12}^{\alpha})^2+\ldots+(h_{1n}^{\alpha})^2+(h_{21}^{\alpha})^2+(h_{22}^{\alpha})^2\right.\\ &\quad\left.+\ldots+(h_{11}^{\alpha})^2+(h_{n1}^{\alpha})^2+\ldots+(h_{nn}^{\alpha})^2\right\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\left[(h_{11}^{\alpha})^2+(h_{22}^{\alpha}+\ldots+h_{nn}^{\alpha})^2\right]$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ij}^{\alpha})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\{(h_{11}^{\alpha}+h_{22}^{\alpha}+\ldots+h_{nn}^{\alpha})^2+(h_{11}^{\alpha}-h_{22}^{\alpha}-\ldots-h_{nn}^{\alpha})^2\}$$

$$+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{1\le i<j\le n}(h_{ij}^{\alpha})^2-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}$$

$$\geq \frac{1}{2}n^2\|H\|^2-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2] \tag{5.35}$$

dir. Benzer şekilde

$$\|h^*\|^2\geq\frac{1}{2}n^2\|H^*\|^2-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}[h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-(h_{ij}^{*\alpha})^2] \tag{5.36}$$

yazılabilir. (5.35) ile (5.36) toplanırsa

$$\|h\|^2+\|h^*\|^2\geq\frac{1}{2}n^2\|H\|^2+\frac{1}{2}n^2\|H^*\|^2$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2]-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}[h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-(h_{ij}^{*\alpha})^2] \tag{5.37}$$

elde edilir [13]. Ayrıca

$$[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2]+[h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-(h_{ij}^{*\alpha})^2]=(h_{ii}^{\alpha}+h_{ii}^{*\alpha})(h_{jj}^{\alpha}+h_{jj}^{*\alpha})-h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-h_{ii}^{*\alpha}h_{jj}^{\alpha}$$

eşitliği (5.37) de kullanılırsa ve h,h^* simetrik bi-lineer fonksiyonlar olduğundan

$$\|h\|^2+\|h^*\|^2\geq\frac{1}{2}n^2\|H\|^2+\frac{1}{2}n^2\|H^*\|^2$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}(h_{ii}^{\alpha}+h_{ii}^{*\alpha})(h_{jj}^{\alpha}+h_{jj}^{*\alpha})+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\neq j\le n}\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right) \tag{5.38}$$

dir. (5.38) eşitsizliği (5.34) de kullanılırsa

$$\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2-(2n-2)\|\xi^T\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}$$

$$\leq 2\tau-2n^2\|H^0\|^2+\frac{n^2}{2}\|H\|^2+\frac{n^2}{2}\|H^*\|^2+2\|h^0\|^2-\frac{1}{4}n^2\|H\|^2$$

$$-\frac{1}{4}n^2\left\|H^*\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ii}^{\alpha}+h_{ii}^{*\alpha})(h_{jj}^{\alpha}+h_{jj}^{*\alpha})-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right)$$

olup; buradan

$$\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\left\|P\right\|^2-\left(2n-2\right)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}$$
$$\le 2\tau-2n^2\left\|H^0\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2+2\left\|h^0\right\|^2$$
$$+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right) \tag{5.39}$$

dir. $\left((h_{ij}^{\alpha})^2+(h_{ij}^{*\alpha})^2\right)=(h_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{*\alpha})^2-2h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}$ eşitliği (5.39) da kullanılırsa

$$\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right)+\frac{c-1}{4}\left\{2\left\|P\right\|^2-\left(2n-2\right)\left\|\xi^T\right\|^2-\lambda^2+\sum_{i=1}^{n}g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}$$
$$\le 2\tau-2n^2\left\|H^0\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2+2\left\|h^0\right\|^2+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha}-h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{*\alpha})^2 \tag{5.40}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{2\le i\ne j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=\sum_{1\le i,j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-\sum_{i=1,1\le j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)$$
$$-\sum_{j=1,1\le i\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-\sum_{1\le i=j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)$$

yazılabilir. $\sum_{1\le i=j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=0$ olduğu için

$$\sum_{2\le i\ne j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)=\sum_{1\le i,j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)$$
$$-\sum_{i=1,1\le j\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-\sum_{j=1,1\le i\le n}g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right) \tag{5.41}$$

değerini hesaplamak yeterlidir. (5.20) eşitliğinden

$$\sum_{i=1,1\leq j\leq n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)=\sum_{j=1}^{n}[\frac{c+3}{4}\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)-g\left(e_1,e_j\right)g\left(e_1,e_j\right)\right\}$$

$$+\frac{c-1}{4}\left\{g\left(e_1,e_j\right)\eta(e_j)\eta(e_1)-\eta\left(e_j\right)\eta\left(e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)\right.$$

$$+g\left(e_1,e_j\right)\eta(e_j)\eta(e_1)-g\left(e_j,e_j\right)\eta(e_1)\eta(e_1)$$

$$\left.+g\left(e_1,\phi e_j\right)g\left(e_1,\phi e_j\right)-g\left(e_j,\phi e_j\right)g\left(\phi e_1,e_1\right)+\left[g\left(e_1,\phi e_j\right)-g\left(\phi e_1,e_j\right)\right]g\left(e_1,\phi e_j\right)\right\}$$

$$+\tilde{g}\left(h^*\left(e_1,e_1\right),h\left(e_j,e_j\right)\right)-\tilde{g}\left(h\left(e_1,e_j\right),h^*\left(e_1,e_j\right)\right)\Big], \tag{5.42}$$

olup; buradan

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)-g\left(e_1,e_j\right)g\left(e_1,e_j\right)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)-g\left(e_1,g\left(e_1,e_j\right)e_j\right)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{g\left(e_j,e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)-g\left(e_1,e_1\right)\right\}=g\left(e_1,e_1\right)\left\{\sum_{j=1}^{n}g\left(e_j,e_j\right)-1\right\}=n-1, \tag{5.43}$$

$$2\sum_{j=1}^{n}g\left(e_1,e_j\right)\eta(e_j)\eta(e_1)=2\eta(e_1)\sum_{j=1}^{n}g\left(e_1,e_j\right)g\left(e_j,\xi\right)$$

$$=2\eta(e_1)\sum_{j=1}^{n}g\left(g\left(e_1,e_j\right)e_j,\xi\right)=2\eta(e_1)\eta(e_1)=2\eta(e_1)^2, \tag{5.44}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\eta\left(e_j\right)\eta\left(e_j\right)g\left(e_1,e_1\right)=\sum_{j=1}^{n}\eta\left(e_j\right)\eta\left(e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(e_j,\xi^T\right)g\left(e_j,\xi^T\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}g\left(g\left(e_j,\xi^T\right)e_j,\xi^T\right)=\left\|\xi^T\right\|^2, \tag{5.45}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(e_j,e_j\right)\eta(e_1)\eta(e_1)=n\eta(e_1)^2, \tag{5.46}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(e_j,\phi e_j\right)g\left(\phi e_1,e_1\right)=g\left(Pe_1,e_1\right)\lambda, \tag{5.47}$$

$$\sum_{j=1}^{n}g\left(e_1,\phi e_j\right)g\left(e_1,\phi e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(e_1,Pe_j\right)g\left(e_1,Pe_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}g\left(P^*e_1,e_j\right)g\left(P^*e_1,e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(P^*e_1,g\left(P^*e_1,e_j\right)e_j\right)=g\left(P^*e_1,P^*e_1\right), \tag{5.48}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g\left(\phi e_1, e_j\right) g\left(e_1, \phi e_j\right) = -\sum_{j=1}^{n} g\left(Pe_1, e_j\right) g\left(P^* e_1, e_j\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} g\left(P^* e_1, g\left(Pe_1, e_j\right) e_j\right) = -g\left(P^* e_1, Pe_1\right) \tag{5.49}$$

bulunur. (5.43)-(5.49) değerleri (5.42) de yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1, 1\leq j\leq n} g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, e_i\right) = \frac{c+3}{4}(n-1) + \frac{c-1}{4}\left\{2\eta(e_1)^2 - \left\|\xi^T\right\|^2\right.$$
$$\left. -n\eta(e_1)^2 - \lambda g\left(Pe_1, e_1\right) + 2g\left(P^* e_1, P^* e_1\right) + g\left(Pe_1, P^* e_1\right)\right\}$$
$$+\tilde{g}\left(h^*\left(e_1, e_1\right), h\left(e_j, e_j\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_1, e_j\right), h^*\left(e_1, e_j\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=1, 1\leq j\leq n} g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, e_i\right) = \frac{c+3}{4}(n-1) + \frac{c-1}{4}\left\{\left(2-n\right)\eta(e_1)^2\right.$$
$$\left. -\left\|\xi^T\right\|^2 - \lambda g\left(Pe_1, e_1\right) + 2g\left(P^* e_1, P^* e_1\right) + g\left(Pe_1, P^* e_1\right)\right\}$$
$$+\tilde{g}\left(h^*\left(e_1, e_1\right), h\left(e_j, e_j\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_1, e_j\right), h^*\left(e_1, e_j\right)\right) \tag{5.50}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{j=1, 1\leq i\leq n} g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, e_i\right) = \frac{c+3}{4}(n-1) + \frac{c-1}{4}\left\{\left(2-n\right)\eta(e_1)^2\right.$$
$$\left. -\left\|\xi^T\right\|^2 - \lambda g\left(Pe_1, e_1\right) + 2g\left(Pe_1, Pe_1\right) + g\left(Pe_1, P^* e_1\right)\right\}$$
$$+\tilde{g}\left(h\left(e_1, e_1\right), h^*\left(e_i, e_i\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_1, e_i\right), h^*\left(e_1, e_i\right)\right) \tag{5.51}$$

hesaplanır. Son olarak

$$\sum_{1\leq i, j\leq n} \left[\tilde{g}\left(h^*\left(e_i, e_i\right), h\left(e_j, e_j\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_i, e_j\right), h^*\left(e_i, e_j\right)\right)\right]$$
$$- \sum_{i=1, 1\leq j\leq n} \left[\tilde{g}\left(h^*\left(e_1, e_1\right), h\left(e_j, e_j\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_1, e_j\right), h^*\left(e_1, e_j\right)\right)\right]$$
$$- \sum_{j=1, 1\leq i\leq n} \left[\tilde{g}\left(h\left(e_1, e_1\right), h^*\left(e_i, e_i\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_1, e_i\right), h^*\left(e_1, e_i\right)\right)\right]$$
$$= \sum_{2\leq i\neq j\leq n} \left[\tilde{g}\left(h^*\left(e_i, e_i\right), h\left(e_j, e_j\right)\right) - \tilde{g}\left(h\left(e_i, e_j\right), h^*\left(e_i, e_j\right)\right)\right] \tag{5.52}$$

dir. (5.50)-(5.52) değerleri (5.41) de yerine yazılırsa

$$\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right) = \frac{c+3}{4}(n-1)(n-2) + \frac{c-1}{4}\{2\|P\|^2$$
$$-\left(2n-4\right)\left\|\xi^T\right\|^2 - \lambda^2 + 2(n-2)\eta(e_1)^2 + 2\lambda g\left(Pe_1,e_1\right)$$
$$-2g\left(Pe_1,P^*e_1\right) - 2g\left(P^*e_1,P^*e_1\right) - 2g\left(Pe_1,Pe_1\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\} + \sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha} - h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\right)$$

bulunur. Buradan

$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{*\alpha} - h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha}\right) = \frac{c+3}{4}(n-1)(n-2) + \frac{c-1}{4}\{2\|P\|^2$$
$$-\left(2n-4\right)\left\|\xi^T\right\|^2 - \lambda^2 + 2(n-2)\eta(e_1)^2 + 2\lambda g\left(Pe_1,e_1\right)$$
$$-2g\left(Pe_1,P^*e_1\right) - 2g\left(P^*e_1,P^*e_1\right) - 2g\left(Pe_1,Pe_1\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\} - \sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right) \tag{5.53}$$

dir. (5.53) eşitliği (5.40) da yerine yazılırsa

$$\frac{c+3}{4}\left(n^2-n\right) + \frac{c-1}{4}\left\{2\|P\|^2 - \left(2n-2\right)\left\|\xi^T\right\|^2 - \lambda^2 + \sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\right\}$$
$$\le 2\tau - 2n^2\left\|H^0\right\|^2 + \frac{n^2}{4}\|H\|^2 + \frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2 + 2\left\|h^0\right\|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}$$
$$+\frac{c+3}{4}(n-1)(n-2) + \frac{c-1}{4}\{2\|P\|^2 - \left(2n-4\right)\left\|\xi^T\right\|^2 - \lambda^2 + 2(n-2)\eta(e_1)^2$$
$$+2\lambda g\left(Pe_1,e_1\right) - 2g\left(Pe_1,P^*e_1\right) - 2g\left(P^*e_1,P^*e_1\right) - 2g\left(Pe_1,Pe_1\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} g\left(Pe_i,P^*e_i\right)\} - \sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ij}^{\alpha} + h_{ij}^{*\alpha})^2 \tag{5.54}$$

elde edilir. (5.54) eşitsizliği düzenlenir ve $(h_{ij}^{\alpha} + h_{ij}^{*\alpha}) = 2h_{ij}^{0\alpha}$ olduğu (5.54) de kullanılırsa

$$\frac{c+3}{2}\left(n-1\right) - \frac{c-1}{2}\{\left\|\xi^T\right\|^2 + (n-2)\eta(e_1)^2 + \lambda g\left(Pe_1,e_1\right)$$
$$-g\left(Pe_1,P^*e_1\right) - g\left(P^*e_1,P^*e_1\right) - g\left(Pe_1,Pe_1\right)\}$$
$$\le 2\tau - 2n^2\left\|H^0\right\|^2 + \frac{n^2}{4}\|H\|^2 + \frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2 + 2\left\|h^0\right\|^2$$

$$+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ij}^{0\alpha})^2 \tag{5.55}$$

elde edilir. Ayrıca

$$2\tau=\sum_{1\le i,j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

$$=2\sum_{j=2}^{n} g\left(R\left(e_1,e_j\right)e_j,e_1\right)+\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

$$=2Rice_1+\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

değeri (5.55) de kullanılırsa

$$\frac{c+3}{2}(n-1)-\frac{c-1}{2}\{\left\|\xi^T\right\|^2+(n-2)\eta(e_1)^2+\lambda g\left(Pe_1,e_1\right)$$

$$-g\left(Pe_1,P^*e_1\right)-g\left(P^*e_1,P^*e_1\right)-g\left(Pe_1,Pe_1\right)\Big\}$$

$$\le 2Rice_1+\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)-2n^2\left\|H^0\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H\right\|^2+\frac{n^2}{4}\left\|H^*\right\|^2+2\left\|h^0\right\|^2$$

$$+2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n} h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\sum_{2\le i\ne j\le n} g\left(R(e_i,e_j)e_j,e_i\right)-2\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}(h_{ij}^{0\alpha})^2$$

elde edilir. Buradan

$$Ric(e_1)\ge\frac{c+3}{4}(n-1)-\frac{c-1}{4}\{\left\|\xi^T\right\|^2+(n-2)\eta(e_1)^2$$
$$+\lambda g\left(Pe_1,e_1\right)-g\left(Pe_1,P^*e_1\right)-g\left(P^*e_1,P^*e_1\right)$$
$$-g\left(Pe_1,Pe_1\right)\Big\}+n^2\left\|H^0\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H\right\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2-\left\|h^0\right\|^2$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left[h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\left(h_{ij}^{0\alpha}\right)^2\right] \tag{5.56}$$

bulunur. Diğer taraftan Levi-Civita konneksiyonuna göre Gauss denkleminden

$$\sum_{1\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)=\sum_{1\le i\ne j\le n}\Big\{R^0(e_i,e_j,e_j,e_i)$$
$$+\tilde{g}(h^0(e_i,e_j),h^0(e_i,e_j))-\tilde{g}(h^0(e_i,e_i),h^0(e_j,e_j))\Big\}=2\tau^0-n^2\tilde{g}(H^0,H^0)+\left\|h^0\right\|^2$$

yani

$$n^2\tilde{g}(H^0,H^0)=2\tau^0+\left\|h^0\right\|^2-\sum_{1\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i) \tag{5.57}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{2\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i) = \sum_{2\le i\ne j\le n}R^0(e_i,e_j,e_j,e_i)$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left[h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\left(h_{ij}^{0\alpha}\right)^2\right]$$

yani

$$\sum_{2\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i) - \sum_{2\le i\ne j\le n}R^0(e_i,e_j,e_j,e_i) = -\sum_{\alpha=1}^{2m-n+1}\sum_{2\le i\ne j\le n}\left[h_{ii}^{0\alpha}h_{jj}^{0\alpha}-\left(h_{ij}^{0\alpha}\right)^2\right] \tag{5.58}$$

yazılabilir. (5.57) ve (5.58) değerleri (5.56) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} Ric(e_1) \ge{} & \frac{c+3}{4}(n-1)-\frac{c-1}{4}\{\left\|\xi^T\right\|^2+(n-2)\eta(e_1)^2 \\ & +\lambda g\left(Pe_1,e_1\right)-g\left(Pe_1,P^*e_1\right)-g\left(P^*e_1,P^*e_1\right)-g\left(Pe_1,Pe_1\right)\} \\ & +2\tau^0+\left\|h^0\right\|^2-\sum_{1\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)-\frac{n^2}{8}\|H\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2-\left\|h^0\right\|^2 \\ & +\sum_{2\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i) - \sum_{2\le i\ne j\le n}R^0(e_i,e_j,e_j,e_i) \end{aligned} \tag{5.59}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$2\tau^0 = \sum_{2\le i\ne j\le n}R^0(e_i,e_j,e_j,e_i)+2\sum_{1\le j\le n}R^0(e_1,e_j,e_j,e_1) \tag{5.60}$$

ve

$$\sum_{1\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)=\sum_{2\le i\ne j\le n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_j,e_i)+2\sum_{1\le j\le n}\tilde{R}^0(e_1,e_j,e_j,e_1) \tag{5.61}$$

dir. (5.60) ile (5.61) değerleri (5.59) da yerine yazılırsa $X=e_1$ için

$$\begin{aligned} Ric(X) \ge{} & 2Ric^0(X)+\frac{c+3}{4}(n-1)-\frac{c-1}{4}\{\left\|\xi^T\right\|^2 \\ & +(n-2)\eta(X)^2+\lambda g\left(PX,X\right)-g\left(PX,P^*X\right)-g\left(P^*X,P^*X\right) \\ & -g\left(PX,PX\right)\}-\frac{n^2}{8}\|H\|^2-\frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2-2\sum_{1\le j\le n}\tilde{R}^0(X,e_j,e_j,X) \end{aligned} \tag{5.62}$$

elde edilir. Burada $\tilde{K}^0\left(X\wedge.\right)=\sum_{1\le j\le n}\tilde{R}^0(X,e_j,e_j,X)$ olduğundan, (5.62) eşitsizliği

$$Ric(X) \geq 2Ric^0(X) + \frac{c+3}{4}(n-1) - \frac{c-1}{4}\{\left\|\xi^T\right\|^2$$
$$+(n-2)\eta(X)^2 + \lambda g(PX,X) - g(PX,P^*X) - g(P^*X,P^*X)$$
$$-g(PX,PX)\} - \frac{n^2}{8}\|H\|^2 - \frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2 - 2\tilde{K}^0(X\wedge .) \tag{5.63}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik durumu için (5.63) ile (5.34) eşitliği karşılaştırılırsa $h_{11}^{\alpha} = h_{22}^{\alpha} + ... + h_{nn}^{\alpha}$, $h_{1j}^{\alpha} = 0$, $2 \leq j \leq n$ ve $1 \leq \alpha \leq 2m-n+1$,
$h_{11}^{*\alpha} = h_{22}^{*\alpha} + ... + h_{nn}^{*\alpha}$, $h_{1j}^{*\alpha} = 0$, $2 \leq j \leq n$ ve $1 \leq \alpha \leq 2m-n+1$

veya denk olarak

$$2h(X,X) = nH(p), \quad h(X,Y) = 0, \quad \forall Y \in \chi(M) \text{ ve } X \perp Y,$$
$$2h^*(X,X) = nH^*(p), \quad h^*(X,Y) = 0, \quad \forall Y \in \chi(M) \text{ ve } X \perp Y$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 5.3.1. [40] $\tilde{M}$ eğrilik tensör alanı (5.4) eşitliğini sağlayan bir (2*m*+1)-boyutlu, Sasaki-benzeri istatistiksel manifold ve $M \subset \tilde{M}$ *n*-boyutlu bir istatistiksel altmanifold olsun.

(i) ξ, M ye teğet olsun.

(a) Eğer M invaryant ise, bu durumda

$$Ric(X) \geq 2Ric^0(X) + \frac{c+3}{4}(n-1) - \frac{c-1}{4}\{\lambda g(PX,X)$$
$$+(n-1)\eta(X)^2 - g(P^*X,P^*X) - g(PX,PX)\}$$
$$-\frac{n^2}{8}\|H\|^2 - \frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\tilde{K}^0(X\wedge e_i)$$

dir.

(b) Eğer M anti-invaryant ise, bu taktirde

$$Ric(X) \geq 2Ric^0(X) + \frac{c+3}{4}(n-1) - \frac{c-1}{4}\left\{1 + (n-2)\eta(X)^2\right\}$$
$$-\frac{n^2}{8}\|H\|^2 - \frac{n^2}{8}\left\|H^*\right\|^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\widetilde{K}^0(X\wedge e_i)$$

dir.

(ii) Eğer ξ, M ye normal ve M anti-invaryant ise,

$$Ric(X) \geq 2Ric^0(X) + \frac{c+3}{4}(n-1)$$

$$-\frac{n^2}{8}\|H\|^2 - \frac{n^2}{8}\|H^*\|^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\widetilde{K}^0\left(X \wedge e_i\right)$$

dir.

Eşitlik durumunda ise,

$$2h(X,X) = nH(p), \quad h(X,Y) = 0, \quad \forall Y \in \chi(M) \text{ ve } X \perp Y,$$
$$2h^*(X,X) = nH^*(p), \quad h^*(X,Y) = 0, \quad \forall Y \in \chi(M) \text{ ve } X \perp Y$$

geçerlidir. Burada $X \in T_pM$ bir birim vektördür.

6. KOSİMPLEKTİK-BENZERİ İSTATİSTİKSEL SUBMERSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

[21] numaralı çalışmada,Takano herhangi X ve Y vektör alanları için

$$g(JX,Y)+g\left(X,J^{*}Y\right)=0 \tag{6.1}$$

eşitliğini sağlayan $(1,1)$ tipinde J ve J^{*} hemen hemen kompleks yapısı ile birlikte bir (M,g) yarı-Riemann manifoldunu ele almıştır. Bu durumda (M,g,J) bir hemen hemen Hermit-benzeri manifold adını alır.

$\left(J^{*}\right)^{*}=J$, $\left(J^{*}\right)^{2}=-I$ ve $g\left(JX,J^{*}Y\right)=g(X,Y)$ olduğunu görmek kolaydır [21]. $J^{2}=-I$ olduğu için J tensör alanı g metriğine göre simetrik değildir.

[21] numaralı makalede, hemen hemen Hermit-benzeri manifold üzerinde bir istatistiksel yapı ele alınmıştır. Eğer J, ∇ afin konneksiyonuna göre paralel ise bu durumda (M,∇,g,J) bir Kähler-benzeri istatistiksel manifolddur.

(6.1) den

$$g\left(\left(\nabla_{X}J\right)Y,Z\right)+g\left(Y,\left(\nabla_{X}^{*}J^{*}\right)Z\right)=0 \tag{6.2}$$

yazılabilir.

[21] numaralı makalede, ∇ afin konneksiyonuna göre R eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z=\frac{c}{4}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y-g(Y,JZ)JX$$

$$+g(X,JZ)JY+\left[g(X,JY)-g(Y,JX)\right]JZ\} \tag{6.3}$$

olan bir (M,∇,g,J) Kähler-benzeri istatistiksel manifoldu üzerinde çalışılmıştır.

6.1 İstatistiksel Submersiyonlar

(M,g) ve $(B,\hat{g})$ sırasıyla m ve n-boyutlu Riemann manifoldları, $F:M\rightarrow B$ bir Riemann submersiyonu olsun. $p\in B$ için $\bar{g}$ indirgenmiş metriği ile tanımlı $F^{-1}(p)$ Riemann altmanifoldu bir lif adını alır ve $\bar{M}$ ile gösterilir. Her bir lifin boyutu her zaman $(m-n)=s$ şeklindedir. M nin tanjant demeti TM de, $\mathcal{V}(M)$ ve $\mathcal{H}(M)$ distribüsyonları sırasıyla dikey ve yatay distribüsyon olarak adlandırılır. M üzerinde bir X vektör alanına eğer B üzerinde her $q\in M$ için $F_{*}\left(X_{q}\right)=X_{*F(q)}$ eşitliğini sağlayan bir X_{*} vektör alanı karşılık geliyorsa izdüşürülebilir vektör alanı denir. Bu durumda X ve X_{*}, F-bağlıdır. Eğer $\mathcal{H}(M)$ üzerinde bir X vektör alanı izdüşürülebilir ise temel vektör alanı adını alır [23].

Bir Riemann submersiyonun temel tensörleri [16] numaralı çalışmada O'Neill tarafından tanımlanmıştır. Bu tensörler bir immersiyonda ikinci temel formun oynadığı rolü oynarlar. O'Neill tensörleri olarak da bilinen bu tensörler T ve A ile gösterilmek üzere M üzerindeki E, F vektör alanları için

$$T_E F = h\nabla_{\upsilon E}\upsilon F + \upsilon\nabla_{\upsilon E}hF \tag{6.4}$$

ve

$$A_E F = h\nabla_{hE}\upsilon F + \upsilon\nabla_{hE}hF \tag{6.5}$$

şeklinde tanımlanır.

(M,∇,g) bir istatistiksel manifold, $F: M \to B$ bir Riemann submersiyon, $\overline{\nabla}$ ve $\overline{\nabla}^*$ $\overline{M}$ üzerinde birer afin konneksiyon olsun. $\overline{\nabla}_U V = \upsilon\nabla_U V$ ve $\overline{\nabla}^*_U V = \upsilon\nabla^*_U V$ olduğu açıktır. $\overline{\nabla}$ ve $\overline{\nabla}^*$ afin konneksiyonları $\overline{g}$ metriğine göre torsiyonsuz ve dual konneksiyonlardır [23].

$\widehat{\nabla}$, B üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer $q \in M$ için X,Y temel vektör alanları $F_*(\nabla_X Y)_q = \left(\widehat{\nabla}_{X_*}Y_*\right)_{F(q)}$ eşitliğini sağlıyor ise $F:(M,\nabla,g) \to \left(B,\widehat{\nabla},\hat{g}\right)$ Riemann submersiyonu bir istatistiksel submersiyon adını alır [23]. (6.4) ve (6.5) de ∇ yerine ∇^* yazılırsa T^* ve A^* tanımlanır.

$X,Y \in \mathcal{H}(M)$ ve $U,V \in \mathcal{V}(M)$ için

$$g(T_U V, X) = -g\left(V, T^*_U X\right), \; g(A_X Y, U) = -g\left(Y, A^*_X U\right) \tag{6.6}$$

dir [23].

Yardımcı Teorem 6.1.1. [23] $X,Y \in \mathcal{H}(M)$ için $A_X Y = -A^*_Y X$ dir.

Yardımcı Teorem 6.1.2. [23] $X,Y \in \mathcal{H}(M)$ ve $U,V \in \mathcal{V}(M)$ için

$$\nabla_U V = T_U V + \overline{\nabla}_U V, \qquad \nabla^*_U V = T^*_U V + \overline{\nabla}^*_U V,$$

$$\nabla_U X = h\nabla_U X + T_U X, \qquad \nabla^*_U X = h\nabla^*_U X + T^*_U X,$$

$$\nabla_X U = A_X U + \upsilon\nabla_X U, \qquad \nabla^*_X U = A^*_X U + \upsilon\nabla^*_X U,$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y, \qquad \nabla^*_X Y = h\nabla^*_X Y + A^*_X Y$$

dir. Ayrıca eğer X temel vektör alanı ise $h\nabla_U X = A_X U$ ve $h\nabla^*_U X = A^*_X U$ olur.

$\overline{R}$ her bir lifin $\overline{\nabla}$ indirgenmiş konneksiyonuna göre eğrilik tensörü olsun. Ayrıca $\widehat{R}(X,Y)Z$, $F_*\left(\widehat{R}(X,Y)Z\right) = \widehat{R}(F_*X, F_*Y)F_*Z$ ile tanımlı bir yatay vektör alanı olsun. Burada $\widehat{R}$, $\widehat{\nabla}$ afin konneksiyonuna göre B nin eğrilik tensör alanıdır [23].

Teorem 6.1.3. [23] Eğer $F:(M,\nabla,g)\to\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir istatistiksel submersiyon ise, $X,Y,Z,Z'\in\mathcal{H}(M)$ ve $U,V,W,W'\in\mathcal{V}(M)$ için

$i)\ g\left(R(U,V)W,W'\right)=g\left(\bar{R}(U,V)W,W'\right)+g\left(T_U W,T_V^* W'\right)$

$-g\left(T_V W,T_U^* W'\right),$

$ii)\ g\left(R(X,U)V,Y\right)=g\left((\nabla_X T)_U V,Y\right)-g\left((\nabla_U A)_X V,Y\right)$

$+g\left(A_X U,A_Y^* V\right)-g\left(T_U X,T_V^* Y\right),$

$iii)\ g\left(R(X,U)Y,V\right)=g\left((\nabla_X T)_U Y,V\right)-g\left((\nabla_U A)_X Y,V\right)$

$+g\left(T_U X,T_V Y\right)-g\left(A_X U,A_Y V\right),$

$iv)\ g\left(R(X,Y)Z,Z'\right)=g\left(\widehat{R}(X,Y)Z,Z'\right)-g\left(A_Y Z,A_X^* Z'\right)$

$+g\left(A_X Z,A_Y^* Z'\right)+g\left(\left(A_X+A_X^*\right)Y,A_Z^* Z'\right)$

dır. $\{E_1,...,E_m\}$, $\{X_1,..,X_n\}$ ve $\{U_1,...,U_\alpha\}$ sırasıyla $\chi(M)$, $\mathcal{H}(M)$ ve $\mathcal{V}(M)$ nin $E_i=X_i$, $(1\le i\le n)$ ve $E_{n+\alpha}=U_\alpha$, $(1\le\alpha\le s)$ olacak şekilde ortonormal bazları olsunlar.

ω_b^a ve ω_a^{*b}, $1\le a,b\le m,$ sırasıyla ∇ afin konneksiyonu ve ∇^* dual konneksiyonuna göre $\{E_1,...,E_m\}$ lokal koordinatlarının konneksiyon formu olmak üzere (3.1) den

$$\omega_a^{*b}=-\omega_b^a, \tag{6.7}$$

yazılabilir. [23] den $X,Y\in\mathcal{H}(M)$ ve $E\in\chi(M)$ için

$$g(TX,TY)=\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}X,T_{U_\alpha}Y\right)$$

dir. Bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı ∇ ve ∇^* dual konneksiyon çiftine göre sırasıyla

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}T_{U_\alpha}U_\alpha \tag{6.8}$$

ve

$$H^*=\sum_{\alpha=1}^{s}T_{U_\alpha}^*U_\alpha \tag{6.9}$$

şeklinde verilen birer yatay vektör alanlarıdır [23].

A, $\mathcal{H}(M)$ in integrallenebilirliği ile ilişkili olduğu için aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 6.1.4. $\mathcal{H}(M)$ in ∇ konneksiyonuna göre integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul A ve A^* ın sıfır olmasıdır.

İspat: İlk olarak A ve A^* ın sıfır olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\mathcal{H}(M)$nin integrallenebilir olduğunu göstermek için $X,Y \in \mathcal{H}(M)$ için $[X,Y] \in \mathcal{H}(M)$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $v[X,Y]=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Lie operatörü tanımından ve ∇ torsiyonsuz olduğundan

$$v[X,Y] = v\nabla_X Y - v\nabla_Y X$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 6.1.2 den,

$$\begin{aligned} v[X,Y] &= v\nabla_X Y - v\nabla_Y X \\ &= A_X Y - A_Y X \\ &= A_X Y + A^*{}_X Y \end{aligned}$$

olup; buradan A ve A^* sıfır olduğundan $v[X,Y]=0$ dır. Bu ispatın yeter kısmını tamamlar.

Gerek kısmın ispatı için $\mathcal{H}(M)$ nin integrallenebilir olduğu kabul edilsin. Bu durumda yukarıdaki işlemler gereği $v[X,Y]=0$ ve $A_X Y + A^*{}_X Y = 0$ dır. Buradan $A_X Y = -A^*{}_X Y$ ve Yardımcı Teorem 6.1.1 den $A_X Y = -A^*{}_X Y = A_Y X$ olur. Bu da A nın simetrik olması demektir. Böylece çelişki elde edilir. O halde $A_X Y = A^*{}_X Y = 0$ dır. Şimdi A ve A^* ın $\mathcal{V}(M)$ üzerinde de sıfır olduğunu gösterelim. ∇ ve ∇^* dual konneksiyon çifti olup, istatistiksel yapı belirttiklerinden, $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(M)$ için

$$Xg(Y,U) = g(\nabla_X Y, U) + g(Y, \nabla^*_X U)$$

ve

$$Xg(U,Y) = g(\nabla_X U, Y) + g(U, \nabla^*_X Y)$$

dir. Yardımcı Teorem 6.1.2 den

$$0 = Xg(Y,U) = g(A_X Y, U) + g(Y, A^*_X U)$$

ve

$$0 = Xg(U,Y) = g(A_X U, Y) + g(U, A^*_X Y)$$

bulunur. $A_X Y = A^*{}_X Y = 0$ olduğu için yukarıdaki denklemlerden $g(Y, A^*_X U) = 0$ ve $g(A_X U, Y) = 0$ elde edilir. Keyfi $Y \in \mathcal{H}(M)$ için $A^*_X U = 0$ ve $A_X U = 0$ dır. O halde A ve A^* sıfırdır. Böylece gerek kısmın ispatı da tamamlanmış olur. □

6.2 Belirli Koşullar Altında Kosimplektik-Benzeri İstatistiksel Submersiyonlar

(M,g,ϕ,ξ,η) hemen hemen kontakt metrik manifoldun bir çeşidi olsun. Eğer $E\in\chi(M)$ için

$$\nabla_E\xi=0,\quad \nabla_E\varphi=0, \tag{6.10}$$

ise, bu durumda $(M,\nabla,g,\varphi,\xi,\eta)$ yapısı kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold adını alır [42].

Yardımcı Teorem 6.2.1. [42] $(M,\nabla,g,\varphi,\xi,\eta)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold olması için gerek ve yeter şart $(M,\nabla^*,g,\varphi^*,\xi,\eta)$ dual yapısının bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold olmasıdır.

Bu bölümde, c bir sabit olmak üzere, ∇ konneksiyonuna göre R eğrilik tensör alanı

$$\begin{aligned}R(E,F)G=\frac{c}{4}\{&g(F,G)E-g(E,G)F+g(E,\varphi G)\varphi F\\ &-g(F,\varphi G)\varphi E+[g(E,\varphi F)-g(\varphi E,F)]\varphi G+\eta(E)\eta(G)F\\ &-\eta(F)\eta(G)E+g(E,G)\eta(F)\xi-g(F,G)\eta(E)\xi\},\end{aligned} \tag{6.11}$$

olan bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold üzerinde çalışılacaktır. (6.11) de φ yerine φ^* alınırsa R^* eğrilik tensör alanının eşitliği elde edilir [43].

Şimdi aşağıdaki örnekler verilecektir.

Örnek 6.2.2. [43] $\mathbb{R}^4$ $\{x_1,x_2,y_1,y_2\}$ lokal koordinat sistemi ile birlikte bir Öklid uzayı olsun. $\mathbb{R}^4$ üzerinde J kompleks yapısı

$$J=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

ve Riemann metriği olarak $g_{\mathbb{R}^4}=2dx_1^2+2dx_2^2-dy_1^2-dy_2^2$ alındığında; flat afin konneksiyonu $\nabla^{\mathbb{R}^4}$ ile birlikte $(\mathbb{R}^4,\nabla^{\mathbb{R}^4},g,J)$ bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olur [23]. $(\mathbb{R},\nabla^{\mathbb{R}},dt^2)$ aşikar istatistiksel manifold olmak üzere $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4,\widetilde{\nabla},\widetilde{g}=dt^2+g_{\mathbb{R}^4})$ çarpım manifoldu [42] numaralı çalışma gereği bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold olur. $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4,\widetilde{\nabla},\widetilde{g}=dt^2+g_{\mathbb{R}^4},\varphi,\xi,\eta)$ manifoldunun eğrilik tensör alanı (6.11) eşitliğini $c=0$ için sağlar [43]. Çünkü $\mathbb{R}^4$ üzerindeki afin konneksiyon flat olduğu için $R=0$ dır. Benzer şekilde $(\mathbb{R},\nabla^{\mathbb{R}},dt^2)$ aşikar istatistiksel manifoldu içinde $R=0$ dır.

φ, ξ ve η

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\eta = (1, 0, -y_1, 0, -y_2)$ şeklindedir. Bu durumda

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. □

Örnek 6.2.3. [43] $\mathbb{R}^2$ $\{x, y\}$ lokal koordinat sistemi ile verilen bir Öklid uzayı olsun. J kompleks yapısı

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve Riemann metriği olarak $g_{\mathbb{R}^2} = \frac{2}{y^2} dx^2 + \frac{1}{y^2} dy^2$ alındığında; $\nabla^{\mathbb{R}^2}$ afin konneksiyonu

$$\nabla_{\partial_x} \partial_x = -\nabla_{\partial_y} \partial y = \frac{4}{3y} \partial y,$$

ve

$$\nabla_{\partial_x} \partial_y = \nabla_{\partial_y} \partial x = -\frac{4}{3y} \partial x$$

şeklinde tanımlanır ise bu yapı ile birlikte $\left(\mathbb{R}^2, \nabla^{\mathbb{R}^2}, g, J\right)$ bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olur [22]. $\left(\mathbb{R}, \nabla^{\mathbb{R}}, dt^2\right)$ bir aşikar istatistiksel manifold olsun. Bir önceki örneğe benzer olarak [42] numaralı çalışma gereği $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^2}\right)$ yapısı bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifolddur. φ ve ξ

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

$\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^2}, \varphi, \xi, \eta\right)$ kosimplektik-benzeri istatistiksel manifoldunun eğrilik tensör alanı (6.11) eşitliğini $c = -\frac{8}{9}$ için sağlar. Gerçekten, konneksiyon tanımından $[\partial x, \partial y] = 0$ dır. (6.11) eşitliği gereği

$$R(\partial x, \partial y)\partial y = \nabla_{\partial x}\nabla_{\partial y}\partial y - \nabla_{\partial y}\nabla_{\partial x}\partial y$$

$$= \nabla_{\partial x}\left(-\frac{4}{3y}\partial y\right) - \nabla_{\partial y}\left(-\frac{4}{3y}\partial x\right)$$

$$= \frac{4}{3y}\frac{4}{3y}\partial x - \frac{4}{3y^2}\partial x - \frac{4}{3y}\frac{4}{3y}\partial x$$

$$= -\frac{4}{3y^2}\partial x$$

dir. Benzer şekilde $R(\partial x, \partial y)\partial x = \frac{4}{3y^2}\partial y$ bulunur. (6.11) eşitliğinde $X = \partial x, Y = \partial y$ ve $Z = \partial y$ alınırsa $JX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$, $JY = JZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $g(X, Z) = 0$ ve $g(Y, JZ) = 0$ olup; böylece $g(Y, Z)X = \frac{\partial x}{y^2}$, $g(X, JZ)JY = \frac{2\partial x}{y^2}$ ve $\left[g(X, JY) - g(JX, Y)\right]JZ = \frac{3\partial x}{y^2}$ bulunur. Hesaplanan değerler (6.11) de yerine yazılırsa

$$R(\partial x, \partial y)\partial y = \frac{c}{4}\left(\frac{\partial x}{y^2} + \frac{2\partial x}{y^2} + \frac{3\partial x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{c}{4}\frac{6\partial x}{y^2} = \frac{3c}{2y^2}\partial x$$

elde edilir. $R(\partial x, \partial y)\partial y$ değerleri her iki eşitlikte de karşılaştırılırsa $c = -\frac{8}{9}$ bulunur. Benzer işlemler $R(\partial x, \partial y)\partial x$ içinde yapılabilir. □

$(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer $F : M \to B$ bir Riemann submersiyonu, her bir lif M nin ξ vektör alanına teğet olan bir φ-invariant Riemann altmanifoldu ise F bir *hemen hemen kontakt metrik submersiyon* adını alır. Eğer, X M üzerinde temel vektör alanı ise, yani B üzerindeki X_* ile X F bağlantılı ise, bu durumda φX (ve $\varphi^* X$) temel vektör alanı ve JX_* (ve $J^* X_*$) e F bağlantılı demektir. Bir F istatistiksel submersiyonu için yatay ve dikey distribüsyonların φ-invaryant olması için gerek ve yeter şart φ^*-invaryant olmasıdır [23].

Eğer $(M, \nabla, g, \varphi, \xi, \eta)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold ise, $F : (M, \nabla, g) \to (B, \hat{\nabla}, \hat{g})$ istatistiksel submersiyonu bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon adını alır, her bir lif M nin φ-invariant Riemann altmanifoldudur ve ξ ye teğettir [43]. Böylece aşağıdaki yardımcı teoremler verilebilir:

Yardımcı Teorem 6.2.4. [43] $F : (M, \nabla, g) \to (B, \hat{\nabla}, \hat{g})$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda $X \in \mathcal{H}(M)$ ve $U \in \mathcal{V}(M)$ için

$$A_X \xi = 0,$$

$$T_U \xi = 0,$$

$$\upsilon \nabla_X \xi = 0$$

ve

$$\overline{\nabla}_U \xi = 0,$$

dir.

İspat. ξ dikey vektör alanı olduğu için Yardımcı Teorem 6.1.2 den

$$\nabla_X \xi = A_X \xi + v \nabla_X \xi$$

dir. M bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold olduğundan $\nabla_X \xi = 0$ dır. Buradan

$$A_X \xi + v \nabla_X \xi = 0$$

elde edilir. Son denklemde dikey ve yatay kısımlar ayrı ayrı sıfıra eşit olacağından

$$A_X \xi = 0$$
$$v \nabla_X \xi = 0$$

dır. Benzer şekilde

$$\nabla_U \xi = T_U \xi + v \nabla_U \xi = 0$$

yazılabilir. Bu denklemin de dikey ve yatay kısımları ayrı ayrı sıfıra eşit olacağından

$T_U \xi = 0$
$v\nabla_U \xi = 0$

bulunur. $v\nabla_U \xi = \overline{\nabla}_U \xi$ olduğu için buradan $\overline{\nabla}_U \xi = 0$ elde edilir. □

Yardımcı Teorem 6.2.5. [43] Eğer $F:(M,\nabla,g) \to (B,\hat{\nabla},\hat{g})$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ise $X,Y \in \mathcal{H}(M)$ ve $U,V \in \mathcal{V}(M)$ için

$$(h\nabla_X \varphi)Y = 0,$$

$$A_X \varphi Y = \overline{\varphi} A_X Y,$$

$$A_{\varphi X} U = \varphi A_X U,$$

$$T_U \varphi X = \overline{\varphi} T_U X,$$

$$A_X \overline{\varphi} U = \varphi A_X U,$$

$$(\upsilon\nabla_X \overline{\varphi})U = 0$$

ve

$$(\overline{\nabla}_U \overline{\varphi})V = 0,$$

dir.

İspat. Dikey ve yatay distribüsyonlar φ-invaryant olduğundan, $X,Y \in \mathcal{H}(M)$ için Yardımcı Teorem 6.1.2 den ve M bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold olduğundan (6.10) eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)Y = 0,$$

$$(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y = 0$$

ve

$$A_X \varphi Y + h\nabla_X \varphi Y - \overline{\varphi} A_X Y - \varphi h \nabla_X Y = 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin dikey ve yatay kısımlarının ayrı ayrı sıfıra eşit olduğu düşünüldüğünde

$$A_X \varphi Y = \overline{\varphi} A_X Y$$

ve

$$h\nabla_X \varphi Y - \varphi h \nabla_X Y = 0$$
$$(h\nabla_X \varphi)Y = 0$$

bulunur. Benzer şekilde, $U \in \mathcal{V}(M)$ ve $X \in \mathcal{H}(M)$ için Yardımcı Teorem 6.1.2 den ve (6.10) eşitliğinden

$$T_U \varphi X + h\nabla_U \varphi X - \varphi T_U X - \varphi h\nabla_U X = 0$$

dir. X temel vektör alanı ise Yardımcı Teorem 6.1.2 gereği $h\nabla_U X = A_X U$ eşitliği kullanılırsa, yatay distribüsyon φ-invaryant olduğundan, yukarıdaki eşitlikte dikey ve yatay kısımlar ayrıldığında

$$T_U \varphi X - \varphi T_U X = 0,$$
$$h\nabla_U \varphi X - \varphi h\nabla_U X = 0$$

olup, buradan

$$T_U \varphi X = \varphi T_U X,$$
$$A_{\varphi X} U = \overline{\varphi} A_X U$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 6.1.2 ve (6.10) eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)U = 0,$$

$$(\nabla_X \varphi)U = \nabla_X \overline{\varphi} U - \varphi \nabla_X U = 0,$$

$$A_X \overline{\varphi} U + v\nabla_X \overline{\varphi} U - \varphi A_X U - \overline{\varphi} v\nabla_X U = 0$$

dir. Yatay ve dikey kısımların ayrı ayrı sıfıra eşit oldukları düşünüldüğünde

$$A_X \overline{\varphi} U = \varphi A_X U,$$

$$v\nabla_X \overline{\varphi} U - \overline{\varphi} v\nabla_X U = 0,$$
$$\left(v\nabla_X \overline{\varphi}\right) U = 0$$

bulunur. Son olarak $U, V \in \mathcal{V}(M)$ için (6.10) eşitliği ve Yardımcı Teorem 6.1.2 den

$$T_U \overline{\varphi} V + \upsilon\nabla_U \overline{\varphi} V - \varphi T_U V - \overline{\varphi} \upsilon\nabla_U V = 0$$

yazılabilir. Yukarıdakine benzer şekilde yatay ve dikey kısımların ayrı ayrı sıfıra eşit oldukları düşünüldüğünde

$$\left(\overline{\nabla}_U \overline{\varphi}\right) V = 0$$

olduğu görülür. □

Yardımcı Teorem 6.2.4 ve Yardımcı Teorem 6.2.5 den aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 6.2.6. [43] $F : (M, \nabla, g) \to \left(B, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda $\left(B, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)$ bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold ve

$\left(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{g}, \overline{\varphi}, \xi, \eta\right)$ istatistiksel altmanifoldu bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifolddur.

İspat. Yardımcı Teorem 6.2.4 ve Yardımcı Teorem 6.2.5 den $\overline{\nabla}_U \xi = 0$ ve $\left(\overline{\nabla}_U \overline{\varphi}\right) V = 0$ olduğundan (6.10) eşitliği sağlanmış olur. Bu durumda $\left(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{g}, \overline{\varphi}, \xi, \eta\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifolddur.

Şimdi $\left(B, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)$ manifoldunun bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olduğu gösterilecektir.

X, Y, Z temel vektör alanı ve $X_*, Y_*, Z_* \in B$ ile F -bağlantılı olduğu kullanılırsa

$$\widehat{g}\left(\left(\widehat{\nabla}_{X_*} J\right) Y_*, Z_*\right) = \widehat{g}\left(\widehat{\nabla}_{X_*} J Y_* - J \widehat{\nabla}_{X_*} Y_*, Z_*\right)$$

yazılabilir ve F bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} \widehat{g}\left(\widehat{\nabla}_{X_*} J Y_* - J \widehat{\nabla}_{X_*} Y_*, Z_*\right) &= \widehat{g}\left(\widehat{\nabla}_{F_* X} F_*\left(\varphi Y\right) - J \widehat{\nabla}_{F_* X} F_* Y, F_* Z\right) \\ &= \widehat{g}\left(F_*\left(\nabla_X \varphi Y\right) - F_*\left(\varphi \nabla_X Y\right), F_* Z\right) \\ &= g\left(\nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y, Z\right) = g\left(\left(\nabla_X \varphi\right) Y, Z\right) \end{aligned}$$

dir. $\left(M, \nabla, g\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifold olduğundan, $\left(\nabla_X \varphi\right) Y = 0$ dır. Bu durumda yukarıdaki eşitlikten $\left(\widehat{\nabla}_{X_*} J\right) Y_* = 0$ olduğu görülür. Bu da $\left(B, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)$ nin bir Kähler-benzeri istatistiksel manifold olduğunu gösterir. □

Yardımcı Teorem 6.2.7. [43] $F : \left(M, \nabla, g\right) \to \left(B, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Eğer $\dim \overline{M} = 1$ ise $\mathcal{H}\left(M\right)$ integrallenebilirdir.

İspat. Yardımcı Teorem 6.2.5 den $A_X \varphi Y = \overline{\varphi} A_X Y$ dir. Burada Y yerine φY alınırsa ve $\varphi^2 Y = -Y + \eta\left(Y\right)\xi$,

$$A_X \varphi^2 Y = A_X\left(-Y + \eta\left(Y\right)\xi\right) = \overline{\varphi} A_X \varphi Y$$

olup böylece

$$-A_X Y + \eta\left(Y\right) A_X \xi - \overline{\varphi} A_X \varphi Y = 0$$

bulunur. Yardımcı Teorem 6.2.4 den $A_X \xi = 0$ olup, buradan $A_X Y = -\overline{\varphi} A_X \varphi Y$ elde edilir. $\dim \overline{M} = 1$ olduğundan $A_X \varphi Y = \lambda \xi$ yazılabilir. Böylece $A_X Y = 0$ olduğu görülür. Buradan da Yardımcı Teorem 6.1.4 kullanıldığında $\mathcal{H}\left(M\right)$ nin integrallenebilir olduğu sonucuna ulaşılır. □

(5.2) eşitliğinde $E = F = A_X Y$ alınırsa

$$\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)A_X Y = 0 \tag{6.12}$$

dir.

Önerme 6.2.8. [43] $F:(M,\nabla,g)\to\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Eğer $rank\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right) = \dim\overline{M}-1$ ise $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilirdir.

İspat. Yardımcı Teorem 6.2.5 den $A_X Y = -\overline{\varphi}A_X\varphi Y$ dir. $\{U_1,U_2,...,U_{s-1},\xi\}$, $\overline{M}$ üzerinde bir ortonormal çatı olsun. $rank\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right) = \dim\overline{M}-1$ olduğu için $\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_1$, $\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_2$, ..., $\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_{s-1}$ vektör alanları lineer bağımsızdır. Böylece

$$A_X\varphi Y = \sum_{i=1}^{n-1} g\left(A_X\varphi Y, U_i\right)U_i + g\left(A_X\varphi Y,\xi\right)\xi \tag{6.13}$$

dir. (6.13) eşitliğine $\overline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}^*$ uygulanırsa

$$\overline{\varphi}A_X\varphi Y = \sum_{i=1}^{n-1} g\left(A_X\varphi Y, U_i\right)\overline{\varphi}U_i$$

ve

$$\overline{\varphi}^* A_X\varphi Y = \sum_{i=1}^{n-1} g\left(A_X\varphi Y, U_i\right)\overline{\varphi}^* U_i$$

dir. (6.12) den

$$\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)A_X\varphi Y = \sum_{i=1}^{n-1} g\left(A_X\varphi Y, U_i\right)\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_i = 0$$

ve $\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_1$, $\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_2$, ..., $\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)U_{s-1}$ vektör alanları lineer bağımsız olduğundan

$$g\left(A_X\varphi Y, U_i\right) = 0$$

bulunur. O halde (6.13) den

$$A_X\varphi Y = g\left(A_X\varphi Y,\xi\right)\xi$$

ve

$$\overline{\varphi}A_X\varphi Y = 0$$

elde edilir. Yani $A_X Y = 0$ dır. Yukarıdakine benzer şekilde Yardımcı Teorem 6.1.4 kullanıldığında $\mathcal{H}(M)$ nin integrallenebilir olduğu görülür. □

Sonuç 6.2.9. [43] $F:(M,\nabla,g)\to(B,\hat{\nabla},\hat{g})$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Eğer $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}^*$ ise $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilirdir.

İspat. $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}^*$ ise (6.12) denkleminden $\overline{\varphi} A_X Y = 0$ dır. Yardımcı Teorem 6.2.5 den $A_X \varphi Y = \overline{\varphi} A_X Y$ olup, bir önceki önermede $A_X Y = -\overline{\varphi} A_X \varphi Y$ olduğundan burada $A_X Y = 0$ bulunur. O halde, Yardımcı Teorem 6.1.4 gereği $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilirdir. □

6.3 Kosimplektik-benzeri İstatistiksel Submersiyonların Eğrilik Tensörü için Bazı Sonuçlar

$F:(M,\nabla,g)\to(B,\hat{\nabla},\hat{g})$ bir kosimplektik-benzeri istatiksel submersiyon olsun. Böylece Teorem 6.1.3 ve (6.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& g\left(\overline{R}(U,V)W,W'\right)+g\left(T_U W,T_V^* W'\right)-g\left(T_V W,T_U^* W'\right)=\frac{c}{4}\Big\{g(V,W)g\left(U,W'\right) \\
& -g(U,W)g\left(V,W'\right)+\eta(U)\eta(W)g\left(V,W'\right)-\eta(V)\eta(W)g\left(U,W'\right) \\
& +\eta(V)\eta\left(W'\right)g(U,W)-\eta(U)\eta\left(W'\right)g(V,W)-g\left(V,\overline{\varphi}W\right)g\left(W',\overline{\varphi}U\right) \\
& +g\left(U,\overline{\varphi}W\right)g\left(\overline{\varphi}V,W'\right)+\left[g\left(U,\overline{\varphi}V\right)-g\left(\overline{\varphi}U,V\right)\right]g\left(\overline{\varphi}W,W'\right)\Big\},
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
& g\left((\nabla_X T)_U V,Y\right)-g\left((\nabla_U A)_X V,Y\right)+g\left(A_X U,A_Y^* V\right)-g\left(T_U X,T_V^* Y\right) \\
& =\frac{c}{4}\Big\{\left[g(U,V)-\eta(U)\eta(V)\right]g(X,Y)-g\left(U,\overline{\varphi}V\right)g(\varphi X,Y)\Big\},
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
& g\left((\nabla_X T)_U Y,V\right)-g\left((\nabla_U A)_X Y,V\right)+g\left(T_U X,T_V Y\right)-g\left(A_X U,A_Y V\right) \\
& =-\frac{c}{4}\Big\{\left[g(U,V)-\eta(U)\eta(V)\right]g(X,Y)-g\left(\overline{\varphi}U,V\right)g(X,\varphi Y)\Big\},
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
& g\left(\hat{R}(X,Y)Z,Z'\right)-g\left(A_Y Z,A_X^* Z'\right)+g\left(A_X Z,A_Y^* Z'\right)+g\left(\left(A_X+A_X^*\right)Y,A_Z^* Z'\right) \\
& =\frac{c}{4}\Big\{g(Y,Z)g\left(X,Z'\right)-g(X,Z)g\left(Y,Z'\right)-g(Y,\varphi Z)g\left(\varphi X,Z'\right) \\
& +g\left(\varphi Y,Z'\right)g(X,\varphi Z)+\left[g(X,\varphi Y)-g(\varphi X,Y)\right]g\left(\varphi Z,Z'\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 6.3.1. [43] $F:(M,\nabla,g)\to\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Eğer $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda ise B nin eğrilik tensör alanı (6.3) formundadır.

İspat. $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir olduğundan A ve A^* sıfırdır. M nin eğrilik tensörü (6.11) eşitliğini sağladığından (6.17) elde edilir.

X,Y,Z temel vektör alanları ve X_*,Y_*,Z_* vektör alanlarına F -bağlantılı olduğundan (6.17) den

$$F_*\left(\widehat{R}(X,Y)Z\right)=\widehat{R}(F_*X,F_*Y)F_*Z=\frac{c}{4}\left\{\widehat{g}(Y_*,Z_*)X_*-\widehat{g}(X_*,Z_*)Y_*\right.$$

$$\left.-\widehat{g}(Y_*,JZ_*)JX_*+\widehat{g}(X_*,JZ_*)JY_*+\left[g(X_*,JY_*)-g(JX_*,Y_*)\right]JZ_*\right\}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 6.3.2. [43] $F:(M,\nabla,g)\to\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Eğer $\dim\overline{M}=1$ veya $rank\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)=\dim\overline{M}-1$ ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda ise B nin eğrilik tensör alanı (6.3) formundadır.

İspat. $\dim\overline{M}=1$ veya $rank\left(\overline{\varphi}+\overline{\varphi}^*\right)=\dim\overline{M}-1$ olması durumunda Yardımcı Teorem 6.2.5 ve Önerme 6.2.8 gereği $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilirdir. Böylece Önerme 6.3.1 kullanıldığında B nin eğrilik tensör alanı (6.3) formunda olduğu görülür. □

Şimdi $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir olsun. Bu durumda (6.15) den

$$g\left((\nabla_X T)_U V,Y\right)-g\left(T_U X,T_V^*Y\right)=\frac{c}{4}\left\{\left[g(U,V)-\eta(U)\eta(V)\right]g(X,Y)\right.$$

$$\left.-g\left(U,\overline{\varphi}V\right)g(\varphi X,Y)\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde U ve V üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left((\nabla_X T)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)-\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}X,T_{U_\alpha}^*Y\right)=\frac{c}{4}\left\{(s-1)g(X,Y)\right.$$

$$\left.-\left(tr\overline{\varphi}\right)g(\varphi X,Y)\right\},\tag{6.18}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left((\nabla_X T)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\{g\left(\nabla_X\left(T_{U_\alpha}U_\alpha\right),Y\right)$$

$$-g\left(T_{\nabla_X U_\alpha}U_\alpha,Y\right)-g\left(T_{U_\alpha}\nabla_X U_\alpha,Y\right)\}$$

olup, T nin simetri özelliği ve (6.8) kullanıldığında

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g\left(\left(\nabla_X T\right)_{U_\alpha} U_\alpha, Y\right) = g\left(\nabla_X H, Y\right) - \sum_{\alpha=1}^{s}\{g\left(T_{U_\alpha}\nabla_X U_\alpha, Y\right)$$
$$+g\left(T_{U_\alpha}\nabla_X U_\alpha, Y\right)\}$$

yazılabilir. (6.6) dan

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g\left(\left(\nabla_X T\right)_{U_\alpha} U_\alpha, Y\right) = g\left(\nabla_X H, Y\right) + \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla_X U_\alpha\right)\right.$$
$$\left.+g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla_X U_\alpha\right)\right\} \tag{6.19}$$

dir. (6.7) den $\nabla^{*}_X U_\alpha = \sum_{j=1}^{s} w^{*j}_\alpha U_j$ ve $\nabla_X U_\alpha = \sum_{j=1}^{s} w^{j}_\alpha U_j$ yazılabilir. Diğer taraftan

$$T^{*}_{U_\alpha} Y = \sum_{j=1}^{s} g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, U_j\right) U_j$$

olduğundan

$$g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla^{*}_X U_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} w^{*j}_\alpha g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, U_j\right) \tag{6.20}$$

ve

$$g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla_X U_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} w^{j}_\alpha g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, U_j\right) \tag{6.21}$$

yazılabilir. (6.20) ve (6.21) eşitlikleri toplanırsa

$$g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla^{*}_X U_\alpha\right) + g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla_X U_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(w^{*j}_\alpha + w^{j}_\alpha\right) g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, U_j\right) \tag{6.22}$$

elde edilir. (6.7) eşitliğinden $\left(w^{*j}_\alpha + w^{j}_\alpha\right) = 0$ dır. O halde (6.22) den

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla^{*}_X U_\alpha\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla_X U_\alpha\right) \tag{6.23}$$

bulunur. (6.23) eşitliği (6.19) da kullanılırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g\left(\left(\nabla_X T\right)_{U_\alpha} U_\alpha, Y\right) = g\left(\nabla_X H, Y\right) + \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla_X U_\alpha\right)\right.$$
$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{s} g\left(T^{*}_{U_\alpha} Y, \nabla^{*}_X U_\alpha\right)\right\}$$

elde edilir. Burada ∇ ve ∇^{*} torsiyonsuz afin konneksiyonlar oldukları için

$$\nabla_X U_\alpha - \nabla^*_X U_\alpha = \nabla_{U_\alpha} X - \nabla^*_{U_\alpha} X$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g\left((\nabla_X T)_{U_\alpha} U_\alpha, Y \right) = g(\nabla_X H, Y) + \sum_{\alpha=1}^{s} \left\{ g\left(T^*_{U_\alpha} Y, \nabla_{U_\alpha} X \right) \right.$$

$$\left. - \sum_{\alpha=1}^{s} g\left(T^*_{U_\alpha} Y, \nabla^*_{U_\alpha} X \right) \right\}$$

olup, Yardımcı Teorem 6.1.2 kullanılırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{s} g\left((\nabla_X T)_{U_\alpha} U_\alpha, Y \right) = g(\nabla_X H, Y) + \sum_{\alpha=1}^{s} g\left(T^*_{U_\alpha} Y, T_{U_\alpha} X - T^*_{U_\alpha} X \right) \tag{6.24}$$

yazılabilir. (6.24) ve $g(TX, TY) = \sum_{\alpha=1}^{s} g\left(T_{U_\alpha} X, T_{U_\alpha} Y \right)$ eşitlikleri (6.18) de kullanılırsa

$$g(\nabla_X H, Y) - g\left(T^* Y, T^* X \right) = \frac{c}{4} \left\{ (s-1) g(X, Y) - \left(tr\overline{\varphi} \right) g(\varphi X, Y) \right\} \tag{6.25}$$

sonucuna ulaşılır. Eğer $h\nabla_X H = 0$ ise (6.25) den

$$-g\left(T^* Y, T^* X \right) = \frac{c}{4} \left\{ (s-1) g(X, Y) - \left(tr\overline{\varphi} \right) g(\varphi X, Y) \right\} \tag{6.26}$$

bulunur. (6.26) eşitliğinden aşağıdaki teorem ve sonuç elde edilir:

Teorem 6.3.4. [43] $F : (M, \nabla, g) \to \left(B, \hat{\nabla}, \hat{g} \right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ve keyfi $X \in \mathcal{H}(M)$ için $h\nabla_X H = 0$ olsun.

(i) Eğer $c = 0$ ise M ve B flattir ve her bir lif M nin total geodezik altmanifoldudur.

(ii) Eğer $tr\overline{\varphi} = 0$ ise $\dim \overline{M} > 1$ dir.

Sonuç 6.3.5. [43] $F : (M, \nabla, g) \to \left(B, \hat{\nabla}, \hat{g} \right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olsun. Eğer $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ve H sabit ise Teorem 6.3.4 ün sonuçları elde edilir.

Şimdi ∇^* afin konneksiyonuna göre Teorem 6.3.4 ün karşılığı incelenecektir.

R ve R^*, ∇ ve ∇^* dual konneksiyon çiftinin eğrilik tensör alanları olduğundan (3.3) gereği

$$g\left(R(X, U) Y, V \right) = -g\left(R^*(X, U) V, Y \right)$$

dir. Burada $g\left(R^{*}(X,U)V,Y\right)$ değerini hesaplamak için Yardımcı Teorem 6.1.2 kullanılırsa

$$g\left(R^{*}(X,U)V,Y\right)=g\left(\left(\nabla^{*}_{X}T^{*}\right)_{U}V,Y\right)-g\left(\left(\nabla^{*}_{U}A^{*}\right)_{X}V,Y\right)$$
$$-g\left(T^{*}_{U}X,T_{V}Y\right)+g\left(A_{Y}V,A^{*}_{X}U\right)$$

bulunur. Son iki eşitlik ve (6.16) eşitliği gözönüne alınırsa

$$g\left(\left(\nabla^{*}_{X}T^{*}\right)_{U}V,Y\right)-g\left(\left(\nabla^{*}_{U}A^{*}\right)_{X}V,Y\right)-g\left(T^{*}_{U}X,T_{V}Y\right)+g\left(A_{Y}V,A^{*}_{X}U\right)$$
$$=\frac{c}{4}\left\{\left[g(U,V)-\eta(U)\eta(V)\right]g(X,Y)-g\left(\bar{\varphi}U,V\right)g(X,\varphi Y)\right\} \tag{6.27}$$

bulunur. $\mathcal{H}(M)$ nin integrallenebilir olduğu kabul edilsin. O halde (6.27) den

$$g\left(\left(\nabla^{*}_{X}T^{*}\right)_{U}V,Y\right)-g\left(T^{*}_{U}X,T_{V}Y\right)=\frac{c}{4}\left\{\left[g(U,V)-\eta(U)\eta(V)\right]g(X,Y)\right.$$
$$\left.-g\left(\bar{\varphi}U,V\right)g(X,\varphi Y)\right\} \tag{6.28}$$

elde edilir. (6.28) denkleminde U ve V üzerinde toplam alındığında

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g\left(\left(\nabla^{*}_{X}T^{*}\right)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)-g\left(T^{*}_{U_\alpha}X,T_{U_\alpha}Y\right)\right\}=\frac{c}{4}\left\{(s-1)g(X,Y)\right.$$
$$\left.-\left(tr\bar{\varphi}\right)g(X,\varphi Y)\right\} \tag{6.29}$$

bulunur. T nin simetri özelliği, (6.6) ve (6.8) den

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(\left(\nabla^{*}_{X}T^{*}\right)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)=g\left(\nabla^{*}_{X}H^{*},Y\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla^{*}_{X}U_\alpha\right)\right. \tag{6.30}$$
$$\left.+g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla^{*}_{X}U_\alpha\right)\right\}$$

yazılabilir. (6.7) den $\nabla^{*}_{X}U_\alpha=\sum_{j=1}^{s}w^{*j}_{\alpha}U_j$ ve $\nabla_{X}U_\alpha=\sum_{j=1}^{s}w^{j}_{\alpha}U_j$ yazılabilir. Diğer taraftan

$$T_{U_\alpha}Y=\sum_{j=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}Y,U_j\right)U_j$$

olduğundan

$$g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla^{*}_{X}U_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}w^{*j}_{\alpha}g\left(T_{U_\alpha}Y,U_j\right) \tag{6.31}$$

ve

$$g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X U_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}w_\alpha^j g\left(T_{U_\alpha}Y,U_j\right) \tag{6.32}$$

yazılabilir. (6.31) ve (6.32) eşitlikleri toplanırsa

$$g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X^* U_\alpha\right)+g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X U_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(w_\alpha^{*j}+w_\alpha^j\right)g\left(T_{U_\alpha}Y,U_j\right) \tag{6.33}$$

elde edilir. (6.7) eşitliğinden $\left(w_\alpha^{*j}+w_\alpha^j\right)=0$ dır. O halde (6.31) ve (6.32) den

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X^* U_\alpha\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X U_\alpha\right) \tag{6.34}$$

bulunur. (6.34) eşitliği (6.30) da kullanılırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(\left(\nabla_X^* T^*\right)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)=g\left(\nabla_X^* H^*,Y\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X U_\alpha\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_X^* U_\alpha\right)\right\}$$

elde edilir. Burada ∇ ve ∇^* torsiyonsuz afin konneksiyonlar oldukları için

$$\nabla_X U_\alpha-\nabla_X^* U_\alpha=\nabla_{U_\alpha}X-\nabla_{U_\alpha}^* X$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(\left(\nabla_X^* T^*\right)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)=g\left(\nabla_X^* H^*,Y\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_{U_\alpha}X\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}Y,\nabla_{U_\alpha}^* X\right)\right\}$$

olup, Yardımcı Teorem 6.1.2 kullanılırsa

$$\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(\left(\nabla_X^* T^*\right)_{U_\alpha}U_\alpha,Y\right)=g\left(\nabla_X^* H^*,Y\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}Y,T_{U_\alpha}X-T_{U_\alpha}^* X\right) \tag{6.35}$$

yazılabilir. (6.35) ve $g\left(TX,TY\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}g\left(T_{U_\alpha}X,T_{U_\alpha}Y\right)$ eşitlikleri (6.29) da kullanılırsa

$$g\left(\nabla_X^* H^*,Y\right)-g\left(TY,TX\right)=\frac{c}{4}\left\{\left(s-1\right)g\left(X,Y\right)-\left(tr\overline{\varphi}\right)g\left(X,\varphi Y\right)\right\}$$

elde edilir. Burada $h\nabla_X^* H^*=0$ ise aşağıdaki teorem ve sonucu elde edilir:

Teorem 6.3.6. [43] $F:(M,\nabla,g)\rightarrow\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ve keyfi $X\in\mathcal{H}(M)$ için $h\nabla_X^* H^*=0$ olsun.

(i) Eğer $c=0$ ise M ve B flattir ve her bir lif M nin total geodezik altmanifoldudur.

(ii) Eğer $tr\overline{\varphi}=0$ ise $\dim\overline{M}>1$dir.

Sonuç 6.3.7. [43] $F:(M,\nabla,g)\rightarrow\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olsun. Eğer $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ve H^* sabit ise Teorem 6.3.6 nın sonuçlarının benzeri elde edilir.

[23] numaralı çalışmada Takano, F istatistiksel submersiyonunu konformal lifler ile birlikte ele almıştır. $U,V\in\mathcal{V}(M)$ için eğer $T_UV=0$ ise F istatistiksel submersiyonu isometrik lifli, eğer $T_UV=\frac{1}{s}g(U,V)H$ ise konformal lifli istatistiksel submersiyon adını alır. Böylece aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 6.3.8. [43] Eğer $F:(M,\nabla,g)\rightarrow\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir konformal lifli kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ise F nin izometrik lifleri vardır.

İspat. F bir konformal lifli kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon olsun. Bu durumda

$$T_UV=\frac{1}{s}g(U,V)H$$

dir. Eğer $V=\xi$ alınırsa Yardımcı Teorem 6.2.4 den, $\frac{1}{s}g(U,\xi)H=0$ yazılabilir. Bu durumda $U,\xi\in\mathcal{V}(M)$ olduğu için $H=0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar. □

Önerme 6.3.9. [43] $F:(M,\nabla,g)\rightarrow\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir konformal lifli kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olsun. Bu durumda her bir lif M nin total geodezik altmanifoldudur ve eğrilik tensör alanı (6.11) formundadır.

İspat. Kabul edelim ki F nin konformal lifleri olsun. Önerme 6.3.8 den, F nin izometrik liflerinin olduğu açıktır. Bu durumda $T=0$ dır. Böylece her bir lif total geodeziktir. M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olduğundan, (6.14) den, liflerin de eğrilik tensör alanının (6.11) formunda olduğu görülür. □

Teorem 6.3.10. [43] $F:(M,\nabla,g)\rightarrow\left(B,\widehat{\nabla},\widehat{g}\right)$ bir izometrik lifli kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyon ve M nin eğrilik tensör alanı (6.11) formunda olsun. Eğer $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ise M ve B flatdir.

İspat: (6.16) dan,

$$g\left((\nabla_X T)_U Y,V\right)-g\left((\nabla_U A)_X Y,V\right)+g\left(T_U X,T_V Y\right)-g\left(A_X U,A_Y V\right)$$

$$=-\frac{c}{4}\left\{g(X,Y)g(U,V)-g(X,Y)\eta(U)\eta(V)-g(X,\varphi Y)g\left(\bar{\varphi}U,V\right)\right\} \tag{6.36}$$

ve

$$g\left((\nabla_Y T)_U X,V\right)-g\left((\nabla_U A)_Y X,V\right)+g\left(T_U Y,T_V X\right)-g\left(A_Y U,A_X V\right)$$

$$=-\frac{c}{4}\left\{g(Y,X)g(U,V)-g(Y,X)\eta(U)\eta(V)-g(Y,\varphi X)g\left(\bar{\varphi}U,V\right)\right\} \tag{6.37}$$

yazılabilir. $\mathcal{H}(M)$ integrallenebilir ve F nin izometrik lifleri olsun. Bu durumda (6.36) eşitliği ve (6.37) eşitliği

$$0=\frac{c}{4}\left\{g(X,Y)g(U,V)-g(X,Y)\eta(U)\eta(V)-g(X,\varphi Y)g\left(\bar{\varphi}U,V\right)\right\} \tag{6.38}$$

ve

$$0=\frac{c}{4}\left\{g(X,Y)g(U,V)-g(X,Y)\eta(U)\eta(V)-g(\varphi X,Y)g\left(\bar{\varphi}U,V\right)\right\} \tag{6.39}$$

şekline dönüşür. (6.38) ve (6.39) birbirinden çıkarılırsa

$$0=\frac{c}{4}g\left(\bar{\varphi}U,V\right)\left\{g(\varphi X,Y)-g(X,\varphi Y)\right\} \tag{6.40}$$

elde edilir. (6.40) eşitliğinde U ve V üzerinde toplam alınırsa

$$0=\frac{c}{4}\left(tr\bar{\varphi}\right)\left\{g(\varphi X,Y)-g(X,\varphi Y)\right\} \tag{6.41}$$

bulunur. (6.41) denkleminde $g(\varphi X,Y)\neq g(X,\varphi Y)$ olduğu için, $c=0$ veya $tr\bar{\varphi}=0$ dır. F nin izometrik lifleri olduğundan, (6.26) eşitliği

$$0=\frac{c}{4}\left\{(s-1)g(X,Y)-\left(tr\bar{\varphi}\right)g(\varphi X,Y)\right\} \tag{6.42}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi kabul edilsin ki $tr\bar{\varphi}=0$ olsun. Bu durumda (6.42) den,

$$0=\frac{c}{4}(s-1)g(X,Y)$$

elde edilir. Buradan $s>1$ olduğu için $c=0$ bulunur. Böylece (M,∇,g) ve $\left(B,\hat{\nabla},\hat{g}\right)$ flat dir. Bu da ispatı tamamlar. □

Örnek 6.3.11. [43] Örnek 6.2.2 de verilen $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4, \widehat{\nabla}, \widehat{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}^4}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifolddur. Şimdi $F:\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)\to\left(\mathbb{R}^4, \nabla^{\mathbb{R}^4}, g_{\mathbb{R}^4}\right)$ kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonu

$$F\left(t, x_1, x_2, y_1, y_2\right) = \left(x_1, x_2, y_1, y_2\right)$$

izdüşüm fonksiyonu ile tanımlansın. Burada $\mathcal{V}\left(M\right) = span\left\{\frac{\partial}{\partial t}\right\}$ ve $\mathcal{H}\left(M\right) = span\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right\}$ dir. $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \in \mathcal{H}\left(M\right)$ olduğu için buradan $A = 0$ elde edilir.

Örnek 6.3.12. [43] Örnek (6.2.3) de verilen $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \widehat{\nabla}, \widehat{g} = dt^2 + g_{\mathbb{R}2}\right)$ bir kosimplektik-benzeri istatistiksel manifolddur. Şimdi $F:\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \widehat{\nabla}, \widehat{g}\right)\to\left(\mathbb{R}^2, \nabla^{\mathbb{R}^2}, g_{\mathbb{R}^2}\right)$ kosimplektik-benzeri istatistiksel submersiyonu

$$F\left(t, x, y\right) = \left(x, y\right)$$

izdüşüm fonksiyonu ile tanımlansın. Burada $\mathcal{V}\left(M\right) = span\left\{\frac{\partial}{\partial t}\right\}, \mathcal{H}\left(M\right) = span\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ ve $\dim\overline{M} = 1$ olduğu açıktır.

7. KAYNAKLAR

[1] S. Amari, “Differential-Geometrical Methods in Statistics”, *Springer-Verlag*, 1985.

[2] H. Shima, K. Yagi,“Geometry of Hessian manifolds”, *Differential Geom. Appl.*,vol. 7, no 3, p. 277-290, 1997.

[3] N. H. Abdel-All, H. N. Abd-Ellah and H. M. Moustafa, “Information geometry and statistical manifold”, *Chaos Solitons Fractals,* vol. 15, no 1, p. 161-172, 2003.

[4] B.Y. Chen, “Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds”, *Arch Math (Basel)*, vol. 60, p. 568-578, 1993.

[5] B.Y. Chen, “Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions”, *Glasg Math J*,vol. 41, p. 33-41, 1999.

[6] Mihai, “Ricci curvature of submanifolds in Sasakian space forms”, *J Aust Math Soc*, vol. 72, p. 247-256, 2002.

[7] K. Matsumoto, I. Mihai, “Ricci tensor of -totally real submanifolds in Sasakian space forms”, *Nihonkai Math J*,vol. 13, p. 191-198, 2002.

[8] Mihai, C. Özgür, “Chen inequalities for submanifolds of real space forms with a semi-symmetric metric connection”, *Taiwanese J Math*, vol. 14, p. 1465-1477, 2010.

[9] Mihai, C. Özgür, “Chen inequalities for submanifolds of complex space forms and Sasakian space forms endowed with semi-symmetric metric connections”, *Rocky Mountain J Math*, vol. 41,p. 1653-1673, 2011.

[10] B.Y. Chen, “Geometry of Submanifolds”, *Pure Appl. Math.*,vol. 22, Dekker New York,1973.

[11] B.Y. Chen, “Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real space-forms”, *Glasgow Math J*, vol. 38, p. 87-97, 1996.

[12] K. Arslan, R. Ezentaş, I. Mihai, C. Murathan, C. Özgür, “Ricci curvature of submanifolds in locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Math J Toyama Univ*, vol. 26, p. 13-24, 2003.

[13] M. E. Aydın, A. Mihai, I. Mihai, “Some Inequalities on submanifolds in statistical manifolds of constant curvature”, *Filomat*, vol. 29, p. 465-477, 2015.

[14] Mihai, I. Mihai, “Curvature invariants for statistical submanifolds of Hessian manifolds of constant Hessian curvature”, *Mathematics*, vol. 6, no 3, p. 44, 2018.

[15] Gray, “Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions”, *J. Math. Mech.*,vol. 16, p. 715-737, 1967.

[16] B. O'Neill, “The fundamental equations of a submersion”, *Michigan Math. J.*,vol. 13, p. 459-469, 1966.

[17] B. O'Neill, “Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity”, *Academic Press, New York*, 1983.

[18] B. Şahin, “Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry and their applications”, *Elsevier/Academic Press, London*, 2017.

[19] K. Yano, M. Kon, “Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics”, *3. World Scientific Publishing Co., Singapore*, 1984.

[20] N. Abe, K. Hasegawa, “An affine submersion with horizontal distribution and its applications”, *Differential Geom. Appl.*,vol. 14, p. 235-250, 2001.

[21] K. Takano, "Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions", *Tensor(N.S.),*vol. 65, no 2,p. 123-137, 2004.
[22] K. Takano, "Examples of the statistical submersion on the statistical model", *Tensor (N.S.),*vol. 65, no 2, p. 170-178, 2004.
[23] K. Takano, "Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions", *J. Geom.*,vol. 85, no 1-2, p. 171-187, 2006.
[24] S. Kobayashi, K. Nomizu, "Foundations of differential geometry", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1996.
[25] H. H. Hacısalihoğlu, "Diferensiyel Geometri", *İnönü Üniversitesi Yayınları*, 1983.
[26] B.Y. Chen, "Total Mean Curvature and Submanifold of Finite Type", 1984.
[27] D. E. Blair, "Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds", *Second Edition, Progress in Mathematics*, 203, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.
[28] B. Şahin, "CR-Altmanifoldların Geometrisi", Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 1996.
[29] M. Falcitelli, S. Ianus, A. M. Pastore, "Riemannian Submersions and Related Topics", *World Scientific Company*, 2004.
[30] H. Matsuzoe, "Geometry of statistical manifolds and its generalization", *Proceedings of the 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields*, Bulgaria, 2006.
[31] S. L. Lauritzen, "Statistical Manifolds, Lecture Notes-Monograph Series", 10 Hayward, CA, 165-197, 1987.
[32] H. Furuhata, "Hypersurfaces in statistical manifolds", *Differential Geom. Appl.,* vol. 27, no 3, p. 420-429, 2009.
[33] P. W. Vos, "Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the Bartlett correction", *Ann. Inst. Statist. Math.*, vol. 41, no 3, p. 429-450, 1989.
[34] L. Todjihounde, "Dualistic structure on warped product manifolds", *Differential Geometry-Dynamical Systems*, vol. 8, p. 278-284, 2006.
[35] H. Aytimur, C. Özgür, "Inequalities for submanifolds in statistical manifolds of quasi-constant curvature", *Ann. Polon. Math.,* vol. 121, no 3, p. 197–215, 2018.**[Tezden türetilmiştir.]**
[36] D. Djebbouri, S. Ouakkas, "Product of statistical manifolds with doubly warped product", *Gen. Math. Notes*, vol. 31, no 2, 16-28, 2015.
[37] B. Opozda, "Bochner's technique for statistical structures", *Ann. Global Anal.Geom.*, vol. 48, p. 357-395, 2015.
[38] B. Opozda, "A sectional curvature for statistical structures", *Linear Algebra Appl.*, vol. 497, p. 134-161, 2016.
[39] M. E. Aydın, A. Mihai, I. Mihai, "Generalized Wintgen inequality for statistical submanifolds in statistical manifolds of constant curvature", *Bull. Math. Sci.*, vol. 7, no 1, p. 155-166, 2017.
[40] H. Aytimur, C. Özgür, "Inequalities for submanifolds of Sasaki-like statistical manifolds", *Turkish J. Math.,* vol. 42, no 6, p. 3149–3163, 2018.**[Tezden türetilmiştir.]**
[41] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernández, M. Fernández, "Slant submanifolds in Sasakian manifolds", *Glasg Math J*, vol. 42, p. 125-138, 2000.

[42] C. Murathan, B. Şahin, "A study of Wintgen like inequality for submanifolds in statistical warped product manifolds", *J. Geom.*, vol. 109, no 2, Art. 30, p 18, 2018.
[43] H. Aytimur, C. Özgür, "On cosymplectic-like statistical submersions", *Mediterr. J. Math.,* vol. 16, no 3, Art. 70, p 14, 2019.**[Tezden türetilmiştir.]**
[44] K. Takano, "Exponential families admitting almost complex structures", *Sut J. Math*, vol. 46, no 1, p 1-21, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hülya AYTİMUR

Doğum tarihi ve yeri :19/02/1987, Balıkesir

e-posta : hülya.aytimur@balikesir.edu.tr

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2012
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Fen Fakültesi/ Matematik Bölümü	2010
Lise	Rahmi Kula Anadolu Lisesi	2005