T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ UZAYLARDA KONVOLÜSYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

ELİFE GÜRSEL

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2020

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Konvolüsyonlar ve Özellikleri" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Elife GÜRSEL

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 114F422 nolu "Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım problemleri" isimli proje ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ UZAYLARDA KONVOLÜSYONLAR VE ÖZELLİKLERİ
DOKTORA TEZİ
ELİFE GÜRSEL
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2020

Altı bölümden oluşan bu tezde, değişken üslü Lebesgue uzayları, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları, konvolüsyonlar, bunların özellikleri, en iyi yaklaşım sayısı ile olan bağlantıları ve basit bağlantılı bölgede tanımlı analitik fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfında yaklaşım teorisinin maksimal yakınsaklık problemleri araştırılmıştır.

Birinci bölümde tez konusu ile ilgili gereken literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanımlar ve sonuçlar verilmektedir.

Üçüncü bölümde, değişken üslü Lebesgue uzaylarında konvolüsyon operatörleri tanımlanmıştır. Daha sonra bu konvolüsyon operatörlenin bazı özellikleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında konvolüsyon ile en iyi yaklaşım sayısı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Beşinci bölümde, basit bağlantılı bölgede tanımlı analitik fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfında maksimal yakınsaklık teoremleri kanıtlanmıştır.

Altıncı bölümde tezde elde edilen sonuçların kısa özeti verilmiştir ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üslü Lebesgue uzayları, konvolüsyon operatörleri, maksimal yakınsaklık, düz-ters teoremler, Faber polinomları

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 51

ABSTRACT

CONVOLUTIONS AND THEIR PROPERTIES IN THE SPACES WITH VARIABLE EXPONENT
PH.D THESIS
ELIFE GURSEL
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. DANIYAL ISRAFILZADE)

BALIKESİR, AUGUST - 2020

In this thesis consisting of six sections, it is investigated variable exponent Lebesgue spaces, weighted variable exponent Lebesgue spaces, convolutions, their properties and relationship between best approximation. Therefore, maximal approximation problems are investigated in variable exponent Smirnov classes of analytic function defined simple connected domain.

In the first section required literature rewiev related to the thesis subject is made.

In the second section basic definitions and results used in thesis are given.

In the third section, the convolution operators are defined in the variable exponent Lebesgue spaces. Then, some properties of these convolution operators are obtained.

In the fourth section the relationship between convolutions and best approximation numbers are investigated.

In the fifth section, in the variable exponent Smirnov classes of analytic functions defined simple connected domain, maximal convergence theorems are proved.

In the sixth section, a short summary of the results obtained in the thesis is given and some suggestions have been made.

KEYWORDS: Lebesgue spaces with variable exponent, convolution operators, maximal approximation, direct-inverse theorems, Faber polynomials

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 51

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
D	: Birim Disk
D^{-}	: Birim diskin dış bölgesi
T	: Birim çember sınırı
$\bar{G}$	: G 'nin kapanışı
$L_{2\pi}^{p}$	: 2π periyodik fonksiyonların Lebesgue uzayı
$L_{\varphi,\omega}([0,2\pi])$	: $[0,2\pi]$ üzerindeki ağırlıklı Orlicz uzayı
$L_{2\pi}^{p(\cdot)}$	: $[0,2\pi]$ üzerindeki değişken üslü Lebesgue uzayı
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	: Ω üzerinde tanımlı değişken üslü Lebesgue uzayı
$\mathfrak{I}_n$	: Derecesi n 'yi aşmayan trigonometrik polinomların sınıfı
T_n	: n dereceli trigonometrik polinom
χ_I	: Karakteristik fonksiyon
$E_n(f)_p$	: $L_{2\pi}^{p}$ uzaylarında f 'e en iyi yaklaşım hatası
$f * g$	: f ile g 'nin konvolüsyonu
$\sigma_h(f)$	: Ortalama değer fonksiyonu
$E^{p}(G)$	: Smirnov sınıfı
$E^{p(\cdot)}(G)$	: Değişken üslü Smirnov sınıfı
$R_n(z,f)$	: $f(z)$ fonksiyonunun Faber serisinin $n.$ kalan terimi
$S_{2\pi}$	: $[0,2\pi]$ üzerindeki basit fonksiyonların sınıfı
G	: Basit bağlantılı ve sınırlı bölge
$\rho_{p(\cdot)}(f)$	: Modüler fonksiyonel
$L_{\omega}^{p(\cdot)}$	: Değişken üsse sahip ağırlıklı Lebesgue uzayı
$S_n(f)$	: f 'in Fourier serisinin açılımının $n.$ kısmi toplamı
$A_{p(\cdot)}$	: Muckenhoupt sınıfı
$F_n(z)$	: $n.$ dereceden Faber polinomu
$K_n(\cdot)$	: En iyi yaklaşım özdeşliği
$S_{\lambda,\tau} f$	: Steklov operatörü

ÖNSÖZ

Danışmanım Prof. Dr. Daniyal İsrafilzade'ye bu çalışmanın ortaya çıkması için geçen sürede kıymetli zamanını bana ayırdığı için, koşullar ne olursa olsun her zaman bana yardımcı olma çabası içerisinde olduğu için, gerek akademik konular gerekse onun dışındaki konularda her daim dostani biçimde yaklaştığı için ne kadar teşekkür etsem yetersiz kalır. Sizinle başladığım bu yolculukta daima sizin öğrettiğiniz titizlikle ve disiplinle bu yolculuğa devam edeceğimden hiç şüpheniz olmasın. Hayat boyu, bana kazandırdıklarınızdan dolayı size minnettar kalacağım.

Çalışmalarım boyunca yapıcı eleştirileri ve samimi yaklaşımlarından dolayı sevgili Prof. Dr. Ali Güven'e ve sevgili Prof. Dr. Yunus Emre Yıldırır'a teşekkürü bir borç bilirim.

Her anımda yanımda olan ve hayattaki her zorluğu kolaylıkla aşmama sebep olan güzel aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca sonsuz anlayış ve desteği ile her zaman yanımda olan sevgili eşim Okan Gürsel'e çok teşekkür ederim. Böylesine güzel bir aileye sahip olduğum için kendimi her daim şanslı hissedeceğim.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi nitelikleri daha az bilinen bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi, bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir ve yaklaşım hızı ile ilgili önemli sorulara cevap arayan çalışmaları kapsamaktadır. Bu sorulardan yola çıkarak 1800'lerden başlayarak birçok matematikçi bu teori üzerinde çalışmalar yapmıştır. Basit yapıda olan fonksiyonlar kümesi çoğunlukla araştırılan fonksiyon uzaylarının bir alt uzayı olarak alınır ve alınan alt uzay verilen uzayda yoğun ise o zaman yaklaşım teorisinin nitelik problemi pozitif anlamda çözülmüş olur. Bunun en klasik örneği 1885 yılında Weierstrass tarafından ispatlanan ve reel eksenin aralıklarında tanımlı sürekli fonksiyonlar sınıfında cebirsel polinomlarla istenilen kadar küçük hata ile yaklaşımın mümkünlüğünü ifade eden teoremlerdir.

Yaklaşım teorisinin nitelik problemi pozitif anlamda çözüldükten sonra nicelik problemine, yani yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemine geçilir. Nicelik problemler iki kısıma ayrılır. Birinci kısım, temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşım hızının üstten değerlendirildiği problemler olan düz teoremlerden oluşur iken, ikinci kısım bunun tersi olan yani yaklaşım hızı bilinen fonksiyonun özelliklerinin araştırıldığı ters teoremlerdir. Ters ve düz teoremlerin belli fonksiyonlar sınıfında gerek ve yeter koşul olarak ifade edilebildiği durumlarda söz konusu fonksiyon sınıfının konstruktif karakterizasyonu elde edilmiş olur.

İlk olarak 1912 yılında $\left[0,2\pi\right]$ aralığında sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonlar uzayında düz teoremler Jackson tarafından elde edilmiştir. 1913 yılında ise Bernstein aynı uzayda ters teoremleri vermiştir. Daha sonra yaklaşım problemleri Lebesgue uzaylarına taşınmıştır.

Düz teoremlerin incelenmesi aşamasında en iyi yaklaşım sayısı ve düzgünlük modülü kavramları kullanılır. Örneğin, $L_{2\pi}^{p}$, 2π periyotlu p. dereceden Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı ve $\Im_n$, derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların ailesi olduğunda $f\in L_{2\pi}^{p}$ fonksiyonu için en iyi yaklaşım hatası

$$E_n\left(f\right)_p := \inf_{T_n\in\Im_n}\left\|f-T_n\right\|_{L_{2\pi}^{p}}$$

ve alışılmış r. düzgünlük modülü

$$\Omega_r\left(f,\delta\right)_p := \sup_{|h|<\delta}\left\|\sum_{\upsilon=0}^{r}\left(-1\right)^{1-\upsilon}\binom{r}{\upsilon}f\left(x+\upsilon h\right)\right\|_{L_{2\pi}^{p}}, \quad r\in\mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. $L_{2\pi}^{p}$ Lebesgue uzaylarında düz teorem genellikle aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Eğer $f\in L_{2\pi}^{p}$ ve $r=1,2,3,...$ ise öyle bir $c>0$ sabiti vardır ki, her $n=1,2,3,...$ için

$$E_n(f)_p\le c\Omega_r\left(f,\frac{1}{n+1}\right)_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıda ifade edilen teorem $r=1$ ve $p=\infty$ için Jackson [1], $r=2$ ve $1\le p<\infty$ için Akhiezer [2], $r\ge 1$ ve $p=\infty$ için ise Stechkin [3] tarafından kanıtlanmıştır. Yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşa edilmesi aşamasında konvolüsyon kavramı kullanılmaktadır ve klasik anlamda konvolüsyon operatörü $f,g\in L_{2\pi}^{p}$ olmak üzere

$$(f*g)(x):=\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)dy$$

biçiminde tanımlıdır.

Konvolüsyon ve konvolüsyon tipi dönüşümler matematiğin farklı alanlarında birçok temel problemlerin araştırılması için önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle yaklaşım teorisinde en iyi yaklaşım sayısı ile konvolüsyon operatörü arasındaki ilişkiyi inceleme ihtiyacı duyulmaktadır. Biz burada tezde tanımladığımız konvolüsyon ile ilgili bazı ön bilgileri ve elde edilmiş sonuçları hatırlayalım:

$\sigma,$ sınırlı varyasyonlu, $\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(u)=0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve

$$D(f;\sigma,h,p):=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-hu)d\sigma(u)\right\|_p$$

olsun. Eğer $f\in L_{2\pi}^{p}$ $(1<p<\infty)$ ve $0<h<1$ ise bu karakterizasyonun en iyi yaklaşım sayısı ile üstten değerlendirilmesi ile ilgili 1971 yılında M. F. Timan tarafından

$$D(f;\sigma,h,p)\le A(\sigma,p)\left\{\sum_{\upsilon=0}^{n}E_{n_\upsilon-1}^{\gamma}(f)_p\delta^{\gamma}(n_\upsilon,h)+E_{n_{m+1}}^{\gamma}(f)_p\right\}^{1/\gamma} \tag{1.1}$$

eşitsizliği elde edilmiştir [4]. Burada

$$\gamma = \min\{2, p\},$$

$$n_o = 1 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots, \quad n_{k+1} / n_k \geq q > 1, \quad n_{m+1} \leq 1/h,$$

$$\delta(n_\upsilon, h) = \sum_{k=n_\upsilon}^{n_{\upsilon+1}-1} \left|\hat{\sigma}(kh) - \hat{\sigma}((k+1)h)\right| + \left|\hat{\sigma}(n_\upsilon h)\right|,$$

$$\hat{\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} d\sigma(u)$$

ve $A(\sigma, p)$ sadece σ ve p ye bağlı bir sabittir.

Daha sonra bu ilişki Orlicz uzaylarında araştırılmıştır.

$\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ konveks ve sürekli fonksiyonu $\varphi(0) = 0$, $\forall x > 0$ için $\varphi(x) > 0$ ve

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0\ , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$$

koşullarını sağlıyor ise φ fonksiyonuna *Young fonksiyonu* denir. Ayrıca $y \geq 0$ için

$$\psi(y) := \max\{xy - \varphi(x) : x \geq 0\}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonuna φ ' nin *tamamlayıcı Young fonksiyonu* denir.

φ bir Young fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

koşulunu sağlayan 2π periyotlu fonksiyonlar uzayına Orlicz uzayı denir ve $L_\varphi[0,2\pi]$ ile gösterilir. ψ, φ 'nin tamamlayıcı Young fonksiyonu olmak üzere bu uzaylarda

Orlicz normu;

$$\| f \|_\varphi := \sup\left\{\int_0^{2\pi} | f(x) g(x)| dx : \int_0^{2\pi} \psi\left[|g(x)|\right] dx \leq 1\right\},$$

Luxemburg normu;

$$\| f \|_{(\varphi)} := \inf\left(k > 0 : \int_0^{2\pi} \varphi\left[k^{-1} | f(x)|\right] dx \leq 1\right)$$

olarak tanımlıdır ve bu iki norm denktir.

Lebesgue uzaylarının bir genelleşmesi olan Orlicz uzaylarında (1.1) eşitsizliği V. G. Ponomarenko ve M. F. Timan tarafından kanıtlanmıştır [5].

Öteleme dönüşümüne göre invaryantlık her uzay için geçerli olan bir özellik değildir. Bu özelliği sağlamayan uzaylardan biri $L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$ ağırlıklı Orlicz uzaylarıdır. Bu nedenle tezde öteleme dönüşümü yerine $(\sigma_h f)(x,u) := \frac{1}{h}\int_0^h f(x+ut)\,dt$ ortalama değer fonksiyonu yardımı ile inşa edilen

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(x,u)\,d\sigma(u)$$

karakterizasyonu kullanılmaktadır.

Ağırlıklı Orlicz uzaylarında φ Young fonksiyon olmak üzere

$$D(f,\sigma,h,\varphi) := \left\| \int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(x,u)\,d\sigma(u) \right\|_{\varphi,\omega}$$

ifadesi 2010 da D. M. İsrafilov ve Y. E. Yıldırır tarafından değerlendirilmiştir [6].

$L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$ yansımalı, $f \in L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$, $\omega \in A_{p(\varphi)}[0,2\pi]$, bir $\alpha \in (0,1)$ için φ^{α} kuvazikonveks olsun ve φ fonksiyonu bir c sabiti için

$$\varphi(uv) \le c\varphi(u)\varphi(v)$$

koşulunu sağlasın. [6] çalışmasında her m doğal sayısı için

$\varphi(\sqrt{u})$ konveks ise

$$D(f;\sigma,h,\varphi) \le c\left(\sum_{r=0}^{m} E_{2^r-1}^2(f)_{\varphi,\omega}\,\delta_{2^r,h}^2\right)^{1/2} + cE_{2^{m+1}}(f)_{\varphi,\omega},$$

$\varphi(\sqrt{u})$ konkav ise

$$D(f;\sigma,h,\varphi) \le c\inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\sum_{r=0}^{m} c\varphi\left(kE_{2^r-1}(f)_{\varphi,\omega}\,\delta_{2^r,h}\right)\right) + cE_{2^{m+1}}(f)_{\varphi,\omega}$$

eşitsizlikleri elde edilmiştir. Burada

$$\delta_{2^r,h} = \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}-1}\left|\hat{\sigma}(lh) - \hat{\sigma}\left[(l+1)h\right]\right| + \left|\hat{\sigma}(2^r h)\right|,$$

$$\hat{\sigma}(x) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ux}{ux}\,d\sigma(u), \quad 0 < h \le \pi$$

dir.

Doğal olarak elde edilen sonuçların Lebesgue uzaylarından daha genel ve daha fazla uygulama alanlarına sahip olan uzaylara taşınabilirliği problemi ortaya çıkmaktadır. Bu tip uzaylardan biri uygulamalı matematiğin birçok alanlarında ve özellikle mekaniksel problemlerde, potansiyel teoride ve birçok fizik problemlerinde kullanılan değişken üslü Lebesgue uzaylarıdır. Bu uzaylar ile ilgili detaylı bilgi edinmek için [7-9] kaynaklarına bakılabilir.

$L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları klasik Lebesgue uzaylarının, p sabiti yerine $p(\cdot)$ değişken fonksiyonunu alarak elde edilen bir genellemesidir. Bu uzaylardan, ilk olarak 1931 yılında Orlicz bahsetmiş daha sonra kendi adını taşıyan Orlicz uzaylarını geliştirmiştir. Daha sonra H. Nakano, Orlicz uzaylarının bir genelleştirilmesi olup değişken üslü uzaylara yakın olan modüler uzayları tanımlamış ve bu uzaylarda bir dizi sonuçlar elde etmiştir [10-12]. Nakano'nun çalışmalarını takiben birçok matematikçi modüler uzaylar üzerine değişik konularda çalışmalar yapmıştır. Özel halde 1970 ve 1980'li yıllarda bu uzaylar başta H. Hudzik [13,14] ve J. Musielak [15] olmak üzere, Polonyalı matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalardan bağımsız olarak değişken üslü uzaylarda yaklaşım teorisinin nitelik problemleri I. I. Sharapudinov tarafından incelenmiş ve yaklaşımın nitelik bakımından pozitif yönde çözülebilirliği için üs fonksiyonu üzerine gereken koşullar elde edilmiştir [16-18].

Değişken üslü uzaylar son otuz yılda çeşitli uygulama problemlerinin çözümünde başarıyla kullanıldıklarından dolayı 1990 yılından başlayarak birçok matematikçi tarafından önem verilen bir obje haline gelmiştir. Özellikle diferansiyel denklemler ve matematiksel modelleme problemlerinde sıklıkla bu uzaylardan faydalanılmaktadır. Gerek uygulama alanında gerekse teorik alanda çok sayıda araştırma yapılmış ve yapılmaya devam edilmektedir [19-27].

Değişken üslü Lebesgue uzaylarında elde edilen en önemli çalışmalardan biri tartışmasız O. Kovacik ve J. Rakosnik [28] tarafından yazılan makaledir, bu makalede $\mathbb{R}^n$ üzerinde bu uzayların ve değişken üslü Sobolev uzaylarının temel özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu ve buna benzer konular S. G. Samko ve öğrencileri tarafından araştırılmış ve değişken üslü uzaylarda potansiyel teori, singüler operatör teorisi konularında klasik sonuçlara benzer sonuçlar elde edilmiştir [Örneğin: 29,30].

Değişken üslü uzaylarda yaklaşım problemleri çözümüne gelince, klasik Lebesgue uzaylarından farklı olarak bu uzayların öteleme dönüşümüne göre invaryant uzaylar olmadığı görülmüştür [28]. Bunun sonucu olarak klasik bir takım sonuçlar bu uzaylarda geçerli olmayabilir veya klasik öteleme yerine kullanılabilen yeni objelerin tanımlanması gerekebilir. Bu problem özellikle yaklaşım hızının değerlendirildiği düz teoremlerin elde edilmesi aşamasında ortaya çıkmaktadır. Bunun dışında değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisi ile ilgili bir takım sonuçlar elde edebilmek için değişken üs fonksiyonu üzerine bazı koşulların konulması gerekir. Bu koşullardan ilki üs fonksiyonun esaslı sınırlı olması, diğeri ise ilk olarak [18] de I. I. Sharapudinov tarafından tanımlanan

$$\left|p(x)-p(y)\right| \le \frac{c_0}{-\log\left(|x-y|\right)}, \qquad |x-y| \le 1/2$$

log-Hölder süreklilik koşuludur. Bu koşullar özellikle değişken üslü uzayların tamlığı ve bu uzaylarda yaklaşım teorisinin nitelik problemlerinin pozitif yönde çözülebilmesi için gereklidir. Ayrıca bu koşulların maksimal fonksiyonun sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşullar olduğu da görülmektedir. Bu sonuçtan hareketle 2010 yılında [31] çalışmasında A. Guven ve D. M. İsrafilov tarafından değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin ilk defa bir düz teoremi ispatlanmıştır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları öteleme dönüşümüne göre invaryant olmadığı için bu uzaylarda konvolüsyon operatörü Steklov ortalamaları kullanılarak tanımlanır. Bu tanımlama doğrultusunda (1.1) eşitsizliğine benzer bir eşitsizlik 2016 yılında [32] çalışmasında D. M. İsrafilov ve E. Yırtıcı tarafından kanıtlanmış olup ayrıca bu uzaylarda yaklaşım teorisinde gerekli olan eşitsizliklerin elde edilmesinde sıkça kullanılan ve çarpanlar teoremi olarak bilinen teoremlerde elde edilmiştir. Çarpanlar teoremi farklı uzaylarda da incelenmiştir. Örneğin, [33-36] çalışmalarına bakılabilir.

Tezin içeriğine gelince, tez değişken üslü uzaylarda konvolüsyon tanımı, bu konvolüsyonun özellikleri, konvolüsyon operatörünün en iyi yaklaşım sayısı ile üstten değerlendirmesi ve ayrıca değişken üslü uzaylarda maksimal yakınsaklık problemlerinin incelenmesi üzerinedir. Buradan hareketle tezde değişken üslü ve ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında konvolüsyon operatörleri tanımlanmış, bu operatörlerin değişik özellikleri ispatlanmış ve en iyi yaklaşım sayısı yardımı ile üstten değerlendirmeleri elde edilmiştir. Benzer sonuçlar kompleks düzlemin bölgelerinde araştırılmış ve bu bölgelerde tanımlı Smirnov sınıflarında yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Daha detaylı bakacak olursak, bu tezin ikinci bölümünde diğer bölümler için gerekli olan temel tanımlar ve teoremler bulunmaktadır. Üçüncü bölümünde, değişken üslü Lebesgue uzaylarında $f, g \in L^1$ ve

$$\sigma_h f(x,u) := \frac{1}{h}\int_0^h f(x+tu)\,dt,\ 0<h<\pi,\ x\in[0,2\pi],\ -\infty<u<\infty$$

olmak üzere

$$(f*g)(x,h) := \int_0^{2\pi} (\sigma_h f)(x,u)\, g(u)\,du$$

biçiminde konvolüsyon operatörü tanımlanmış ve bu operatörlerin temel bir dizi özellikleri incelenmiştir. Ayrıca yaklaşım için önemli bir rol alan $\{K_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ çekirdek fonksiyonunun da özellikleri incelenmiştir.

Vurgulayalım ki $p(\cdot)=p$ alınarak elde edilen klasik Lebesgue uzaylarında, öteleme operatörü yardımı ile tanımlanan konvolüsyon operatörü ile ilgili önemli sonuçlar [37] de bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında $D_\omega\left(f;\sigma,h,p(\cdot)\right)$ operatörü tanımlanmış olup, bu operatörün en iyi yaklaşım sayısı yardımı ile üstten değerlendirilmesi yapılmış ve bu uzaylardaki düz teoremler kullanılarak bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Yapılan bu değerlendirmeler [4, 32] de elde edilen sonuçlardan daha geneldir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir K kontinyumunda analitik ise o zaman

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z),\quad z\in K$$

Faber seri gösterimi vardır ve bu seri K kontinyumu üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Şimdi

$$R_n(z,f) := f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z)$$

olsun. Burada $R_n(z,f)$'e $f(z)$ Faber serisinin n. kalan terimi denir. f, K' da analitik ve $z\in K$ olduğu durumda $R_n(z,f)$'in değerlendirildiği problemlere Faber serilerinin maksimal yakınsaklık problemleri denir.

Beşinci bölümde, tümleyeni basit bağlantılı bölgeden oluşan sınırlı bir K kontinyumu üzerinde maksimal yakınsaklık problemi incelenmiştir. $f(z)$ Smirnov sınıfında olduğunda Suetin [38], Smirnov-Orlicz sınıfından olduğunda İsrafilov, Oktay, Akgün [39], değişken üslü Lebesgue uzaylarından olduğunda İsrafilov, Gürsel, Aydın [40] maksimal yakınsaklık problemlerinin farklı versiyonlarını elde etmişlerdir. Ayrıca bu problemler için [41-52] çalışmalarına da bakılabilir.

Smirnov sınıflarında yaklaşım problemlerinin incelenmesi için gereken polinomlar Faber polinomları olarak bilinen polinomlar yardımı ile inşa edilmiştir. Bu polinomlar birim diskteki $\{z^n\}$ üs fonksiyonların kompleks düzleme genelleşmeleridir. Faber polinomları yardımı ile inşa edilen Faber polinomları serisi basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların gösterimi için kullanılır. Faber polinomları serisi $|z-z_0|<R$ diskinde analitik bir fonksiyonun

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Taylor serisinin bir benzeri olup söz konusu bölge disk olduğu durumda Taylor serisine dönüşür. Üstelik bu seri de bölgenin kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Başka bir deyişle Faber serileri birim disk durumunda ifade edilen Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgelere genelleştirilmiş halidir.

Faber [53], ilk kez 1903 yılında sınırlı, basit bağlantılı keyfi bir G bölgesi için bu bölgede analitik olan ve bazı ek koşulları sağlayan $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF_n(z),\quad z\in G$$

biçimindeki bir seriye açılabilecek şekilde $\{F_n(z)\}$ polinomlar sistemini belirleme problemini araştırmıştır. Burada a_n katsayıları G bölgesine bağlı olup $f(z)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Faber bu çalışmasında G bölgesinin sınırının regüler eğri olduğu durumu düşünmüştür. Daha sonra bu polinomlar kullanılarak değişik fonksiyonel uzaylarda yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri kanıtlanmıştır.

Ayrıca birçok düşünceye temel oluşturabilecek çalışmalar B. T. Bilalov ve diğerleri tarafından yapılmıştır [54-56].

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, sürekli bir $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir ***eğri*** denir. $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ 'ya kapalı eğri; γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa γ 'ya ***Jordan eğrisi*** denir. γ' türevi var ve sürekli ise γ 'ya ***diferansiyellenebilir eğri***, diferansiyellenebilir γ eğrisi için eğer $\forall t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)\neq 0$ oluyorsa γ 'ya ***düzgün eğri*** denir [57, sayfa: 120].

2.1.2 Tanım $a\le t\le b$ için $\gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$ sürekli bir eğri olsun. $[a,b]$ kapalı aralığının

$$a=t_1<t_2<t_3<\ldots<t_{n+1}=b$$

biçimindeki parçalanışı olan keyfi bir $\{t_{n+1}\}$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n}\left|z(t_{k+1})-z(t_k)\right|$$

toplamı sınırlı kalıyor ise γ eğrisine ***sonlu uzunluklu eğri*** denir [58, sayfa: 417].

2.1.3 Tanım Bir f karmaşık fonksiyonu z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyor ise f, z_0 'da ***analitiktir*** denir [57, sayfa:97].

2.1.4 Tanım B, $\mathbb{C}$ 'de bir bölge olmak üzere $f:B\to\mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0\in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0=f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 'da bir ***konform dönüşümdür*** denir. Eğer her $z_0\in B$ noktasında f konform ise f**,** B 'de ***konformdur*** denir [59, sayfa:295].

2.1.5 Tanım $(V,\|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. Eğer $\|\cdot\|$ normu ile ilişkili metrik uzay (V,d) bir tam metrik uzay ise $(V,\|\cdot\|)$ uzayına ***Banach uzayı*** denir [60].

2.1.6 Tanım $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ve $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_F(x)=\sup\left\{\sum_{1}^{n}\left|F(x_j)-F(x_{j-1})\right|: n\in\mathbb{N},\ -\infty<x_0<\ldots<x_n=x\right\}$$

fonksiyonuna F ' in ***total varyasyon fonksiyonu*** denir. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} T_F(x) < \infty$$

ise F , $\mathbb{R}$ üzerinde ***sınırlı varyasyonludur*** denir [59, sayfa:102].

Bir γ Jordan eğrisinin sonlu uzunluklu eğri olması için gerekli ve yeterli koşul $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının (a,b) aralığında sınırlı varyasyonlu olmasıdır. Ayrıca açıktır ki bir γ eğrisi sonlu uzunluklu bir eğri ise onun terside sonlu uzunluklu eğridir [58, sayfa: 417].

2.1.7 Tanım f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $a,b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\operatorname{ess}\sup_x f(x) = \inf\{b : f(x) \le b \text{ hemen her yerde}\}$$

ifadesine f ***fonksiyonunun esaslı supremumu*** denir. Benzer şekilde

$$\operatorname{ess}\inf_x f(x) = \sup\{a : f(x) \ge a \text{ hemen her yerde}\}$$

ifadesine f ***fonksiyonunun esaslı infimumu*** denir [59, sayfa:26].

2.1.8 Tanım A Lebesgue ölçülebilir küme olsun. $1 \le p \le \infty$ için

$$\begin{cases} \int_A |f(x)|^p\, dx < \infty, & 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess}\sup_{x\in A} |f(x)| < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

koşulunu sağlayan A üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının oluşturduğu küme $L^p(A)$ ile gösterilir. $L^p(A)$ kümesine ***Lebesgue uzayı*** denir [59, sayfa:27].

2.1.9 Tanım $1 \le p < \infty$ için 2π periyodik ve Lebesgue ölçülebilir tüm f fonksiyonlarının Lebesgue uzayı $L^p_{2\pi}$ ile gösterilir.

2.1.10 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $1 \le p < \infty$ için

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p\, |dz|\right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan Γ üzerinde tanımlı bütün Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların kümesine ***Lebesgue uzayı*** denir ve $L^p(\Gamma)$ ile gösterilir. $L^p(\Gamma)$ uzayı $\|f\|_{L^p(\Gamma)}$ normu ile bir Banach uzayı olur [60].

2.1.11 Tanım $f \in L_{2\pi}^{1}$ olmak üzere herhangi bir $x \in [0, 2\pi]$ için

$$Mf(x) := \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_{I} |f(y)| dy$$

fonksiyonuna, f fonksiyonunun ***Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu*** denir. Burada supremum x i içeren tüm $I \subset [0, 2\pi]$ aralıkları üzerinden alınmaktadır [7, sayfa:80]

2.1.12 Tanım $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ..., n$ ve $|a_n| + |b_n| \neq 0$ için

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olarak tanımlanan ifadeye n ***dereceli trigonometrik polinom*** denir ve $n = 0, 1, 2, ...$ için derecesi n 'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi $\Im_n$ ile gösterilir [61, sayfa:2].

Eğer katsayılar

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \text{ ve } c_{-k} = \overline{c}_k,\ k = 1, 2, ...n$$

olarak alınır ise trigonometrik polinomun kompleks formu, $c_k \in \mathbb{C}$ ve $|k| \leq n$ için

$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ biçiminde bir gösterime sahip olur.

2.1.13 Tanım $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ ve $|a_n| \neq 0$ için $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ olarak tanımlanan ifadeye n ***dereceli cebirsel polinom*** denir [61, sayfa:2].

2.1.14 Tanım $f \in L_{2\pi}^{1}$ olsun. $k = 0, 1, 2, ...$ için

$$a_k(f) = a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt \text{ ve } b_k(f) = b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt$$

olmak üzere $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ serisine f ***fonksiyonunun Fourier serisi***, $a_k(f)$, $b_k(f)$ katsayılarına da f ***fonksiyonunun Fourier katsayıları*** denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olarak yazılır [62, sayfa:46].

Fourier serisinin kompleks formu aşağıdaki gibidir:

2.1.15 Tanım $f \in L^1_{2\pi}$ olsun. f ' nin $k.$ Fourier katsayısı

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}dy$$

olmak üzere $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ serisine f ***fonksiyonunun kompleks biçimli Fourier serisi*** denir [62, sayfa:47].

$n = 0,1,2,...$ için f ' nin Fourier serisinin n. kısmi toplamı

$$S_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx}$$

biçiminde gösterilir.

2.1.16 Tanım f ve g, $\mathbb{R}$ üzerinde yerel integrallenebilir fonksiyonlar olsun. $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$

fonksiyonuna f ***ve*** g ***'nin konvolüsyonu*** denir [7, sayfa:192].

2.1.17 Tanım $U_k = u_1 + u_2 + ... + u_k$, $k = 1,2,3...$ olmak üzere

$$\sum_{\upsilon=1}^{n} u_\upsilon v_\upsilon = \sum_{\upsilon=1}^{n-1} U_\upsilon (v_\upsilon - v_{\upsilon+1}) + U_n v_n$$

dönüşümüne ***Abel dönüşümü*** denir [63, sayfa:3].

2.1.18 Tanım $E_j \subset [0,2\pi]$ $j = 1,2,..,n$, ikişerli ayrık kümeler ve a_j sayıları sonlu tane birbirinden farklı sayılar olmak üzere

$$s(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$$

olarak gösterilen s fonksiyonuna ***basit fonksiyon*** denir [64]. Basit fonksiyonların sınıfını $S_{2\pi}$ ile gösterelim.

2.1.19 Tanım Kompeks düzlemde bağlantılı ve kapalı kümeye ***kontinyum***, bağlantılı ve açık kümeye de ***bölge*** denir [65].

2.1.20 Tanım $A := [0,2\pi]$ veya Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olduğunda Lebesgue ölçülebilir bir $\omega : A \to [0,\infty]$ fonksiyonu için $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna A üzerinde ***ağırlık fonksiyonu*** denir [66, sayfa:27].

2.1.21 Tanım f, G bölgesi içerisinde analitik ve $p>0$ olsun. G içindeki $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir $\{\Gamma_n\}$ dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \le M$$

koşulunu n ' den bağımsız bir M sabiti ile sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına ***Smirnov sınıfı*** denir ve $E^p(G)$ ile gösterilir. Özel halde $G := D := \{z : |z| < 1\}$ ise $H^p(D)$ ***Hardy uzayı*** elde edilir [58].

2.1.22 Teorem (Cauchy İntegral Formülü) G bir bölge ve γ bu bölge içinde kapalı bir çevre olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, G 'de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

olur [57].

Aşağıdaki teorem sınırsız bölgeler için kullanılan Cauchy integral formülünü ifade eder.

2.1.23 Teorem G sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, $\mathbb{C}-G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) \ , & z \in \mathbb{C} - \overline{G} \\ f(\infty) & , \ z \in G \end{cases}$$

olur [67, sayfa: 486].

2.1.24 Teorem (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi) $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda G bölgesini birim disk D 'ye $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [68].

2.1.25 Teorem $E \subset \mathbb{C}$ en az iki noktadan oluşan, basit bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda $\mathbb{C} \setminus E$ bölgesini $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ bölgesine

$$\varphi(\infty) = \infty \ \text{ ve } \ \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden φ konform dönüşümü tektir [68].

2.1.26 Teorem Eğer G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise G bölgesinden D birim diske her konform dönüşüm $\overline{G}$ 'ye bire bir ve sürekli olarak genişletilebilir [69, sayfa: 24].

2.2 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ Değişken Üslü Lebesgue Uzayları ve Bazı Temel Özellikleri

2.2.1 Tanım $\Omega \subset \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir bir küme ve $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir üs fonksiyonu olsun. En az bir $\lambda > 0$ için $\int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx < \infty$ koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine ***değişken üslü Lebesgue uzayı*** denir ve $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilir [7].

$p(\cdot)$ üs fonksiyonu, değişken üslü fonksiyon uzaylarının yapısal özelliklerini araştırmak için önemli bir role sahiptir. Bu uzaylarda belirli sonuçları elde etmek için bir takım koşullara ihtiyaç vardır. $p(\cdot)$ fonksiyonu Ω üzerinde tanımlı bir üs fonksiyonu ve

$$p_- := \underset{x\in\Omega}{ess\inf}\ p(x) \ , \qquad p_+ := \underset{x\in\Omega}{ess\sup}\ p(x)$$

olsun.

2.2.2 Önerme $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olsun. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının bir vektör uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul $p(\cdot)$ üs fonksiyonu için $p_+ < \infty$ olmasıdır [7].

2.2.3 Tanım $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ ve f Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olsun.

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx$$

fonksiyoneline *modüler fonksiyonel* denir [7].

2.2.4 Teorem $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $p_+ < \infty$ için $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \ \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \le 1\right\}$ normu ile bir Banach uzayıdır [7].

2.2.5 Teorem $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$, $p_+ < \infty$ olsun. O zaman sürekli fonksiyonlar sınıfı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğundur [28].

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında $p(\cdot)=p$ alındığı durumda $L^{p}(\Omega)$ klasik Lebesgue uzayı elde edilir. Bu durumda $\|f\|_{p(\cdot)}=\|f\|_{p}$ halini alır. Buradan da anlaşılacağı üzere değişken üslü Lebesgue uzayları, klasik Lebesgue uzaylarının genelleştirilmiş halidir.

Klasik Lebesgue uzaylarında bildiğimiz Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği gibi bazı eşitsizlikler değişken üslü uzaylarda da geçerli olur. $L^{p}(\Omega)$ uzaylarında iyi bilinen bazı teoremler $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzaylarında aşağıdaki gibi ifade edilir.

2.2.6 Teorem (Hölder Eşitsizliği) $p(\cdot):\Omega\to[1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $1/p(\cdot)+1/p'(\cdot)=1$ olsun. Her $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $g\in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için $fg\in L^{1}(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|dx\le K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}$$

dir. Burada $K_{p(\cdot)}=\dfrac{1}{p_{-}}-\dfrac{1}{p_{+}}+1$ dir [7, sayfa: 27].

2.2.7 Teorem (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $p(\cdot):\Omega\to[1,\infty)$ fonksiyonu için $f:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve her $y\in\Omega$ için $f(\cdot,y)\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\left\|\int_{\Omega}f(\cdot,y)dy\right\|_{p(\cdot)}\le K_{p(\cdot)}\int_{\Omega}\|f(\cdot,y)\|_{p(\cdot)}dy$$

dir [7, sayfa: 34].

2.2.8 Teorem (Gömülme Teoremi) $p(\cdot),q(\cdot):\Omega\to[1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir iki fonksiyon ve Ω kümesinin Lebesgue ölçüsü $|\Omega|<\infty$ olsun. $L^{q(\cdot)}(\Omega)\subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul hemen her yerde $p(x)\le q(x)$ olmasıdır. Ayrıca bu durumda $\|f\|_{p(\cdot)}\le(1+|\Omega|)\|f\|_{q(\cdot)}$ eşitsizliği geçerli olur. [7, sayfa: 41].

2.2.9 Sonuç $p(\cdot):\Omega\to[1,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $|\Omega|<\infty$ olsun. O zaman öyle $c_1,c_2>0$ sabit sayıları vardır ki $c_1\|f\|_{p_{-}}\le\|f\|_{p(\cdot)}\le c_2\|f\|_{p_{+}}$ eşitsizliği sağlanır [7].

2.2.10 Tanım $\Omega := [0,2\pi]$ veya Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi ve ω, A üzerinde ağırlık fonksiyonu olsun. $\omega f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ koşulunu sağlayan $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfı $L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilir. $L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$ sınıfına ***değişken üsse sahip ağırlıklı Lebesgue uzayı*** denir.

$L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$ sınıfı $\|f\|_{p(\cdot),\omega} := \|\omega f\|_{p(\cdot)}$ normu ile bir Banach uzayı olur.

2.2.11 Tanım $p(\cdot) : \Omega \to [1,\infty)$ ve $1 \le p_- \le p(x) \le p_+ < \infty$ olmak üzere pozitif bir d sabiti için $|p(x) - p(y)| \ln \frac{|\Omega|}{|x-y|} \le d$; $x, y \in \Omega$ ve $x \ne y$ koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir, 2π periyotlu $p(\cdot)$ üs fonksiyonlarının kümesi $\wp(\Omega)$ ile gösterilir. $\wp(\Omega)$ kümesinin $p_- > 1$ koşulunu sağlayan alt kümesi $\wp_0(\Omega)$ ile gösterilir.

2.2.12 Tanım Verilen bir $p(\cdot) \in \wp_0(\Omega)$ için

$$\sup_{I \subset A} |I|^{-1} \|\omega \chi_I\|_{p(\cdot)} \|\omega^{-1}\|_{q(\cdot)} < \infty$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonuna $A_{p(\cdot)} - Muckenhoupt$ koşulunu sağlıyor denir. $A_{p(\cdot)} - Muckenhoupt$ koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfı $A_{p(\cdot)}$ ile gösterilir. Burada $q(\cdot)$, $p(\cdot)$ fonksiyonunun $q(x) := p(x)/(p(x)-1)$ olarak tanımlı eşlenik fonksiyonu, $|I|$, $I \subset \Omega$ 'nin Lebesgue ölçümü ve χ_I, I 'nın karakteristik fonksiyonudur.

2.2.13 Tanım $p(\cdot) \in \wp([0,2\pi])$ olsun. $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = \inf_{T_n \in \Im_n} \|f - T_n\|_{p(\cdot)}$$

sayısına, f fonksiyonuna, derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar sınıfında ***en iyi yaklaşım sayısı*** veya ***en iyi yaklaşım hatası*** denir. $T_n(f) := T_n$ trigonometrik polinomuna da f ***fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom*** denir.

[70, sayfa: 2, Teorem 1.1] den $n = 0,1,...$ için $p(\cdot) \in \wp_0([0,2\pi])$ olduğunda $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = \|f - T_n^*\|_{p(\cdot)}$$

olacak şekilde $T_n^* \in \Im_n$ trigonometrik polinomunun varlığı görülür.

Değişken üslü Lebesgue uzayları öteleme dönüşümüne göre invaryant uzaylar değildir. Yani $f(x)\in L^{p(\cdot)}$ iken $f(x+h)\notin L^{p(\cdot)}$ olabilir [28]. Bu nedenle konvolüsyon operatörünü klasik durumdaki gibi tanımlayamayız. O nedenle

$$\sigma_h f(x,u):=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+tu)\,dt$$

olarak tanımlı Steklov ortalamalarını kullanarak konvolüsyon operatörünü tanımlayacağız.

2.2.14 Lemma Eğer $p(\cdot)\in\wp_0(\Omega)$ ise o zaman Mf Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olmasıdır [71].

Bu Lemma'dan da anlaşılacağı üzere $p(\cdot)\in\wp_0(\Omega)$ ve $\omega\in A_{p(\cdot)}$ koşulları $\sigma_h f: L_\omega^{p(\cdot)}\to L_\omega^{p(\cdot)}$ lineer operatörünün sınırlılığını garanti eder.

Kompleks düzlemde yaklaşım teorisi ile ilgili incelediğimiz problemlerde yaklaşan polinomların inşa edilmesi aşamasında gereken bazı ön bilgileri verelim:

Sınırı Γ Jordan eğrisi olan basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin öyleki $\bar{G}=G\cup\Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni ∞'u içeren basit bağlantılı G^- bölgesi olsun. Riemann konform dönüşüm teoremine göre G^- bölgesini D^- bölgesine resmeden φ konform dönüşümü vardır. Üstelik bu konform dönüşüm

$$\varphi(\infty)=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}=\gamma>0$$

koşulları ile tektir. Bu koşullar bize gösteriyor ki $w=\varphi(z)$ dönüşümü $z=\infty$ dışında D^- bölgesinde analitik olur. $z=\infty$ da basit kutup noktasıdır. Böylece $z=\infty$ noktasının belli bir komşuluğunda φ'nin Laurent seri açılımı

$$\varphi(z)=\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots+\frac{\gamma_k}{z^k}+\ldots$$

formundadır. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere her iki tarafın $n.$ kuvveti alınır ise

$$\varphi^n(z)=\left(\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots+\frac{\gamma_k}{z^k}+\ldots\right)^n$$

$$=\gamma^n z^n+a_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+a_{n-2}^{(n)}z^{n-2}+\ldots+a_1^{(n)}z+a_0^{(n)}+\frac{b_1^{(n)}}{z}+\frac{b_2^{(n)}}{z^2}+\ldots+\frac{b_k^{(n)}}{z^k}+\ldots$$

gösterimi elde edilir. Bu eşitlikte z'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan kısmını

$$F_n(z) = \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

ile gösterelim.

2.2.16 Tanım $F_n(z)$ cebirsel polinomuna $\bar{G}$ bölgesi için n. ***dereceden Faber polinomu*** denir.

z 'nin negatif kuvvetlerini içeren terimlerin toplamı

$$-E_n(z) = \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \ldots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \ldots$$

ile gösterilir ise $F_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z), \quad z \in G^-$ elde edilir.

φ dönüşümünün ters dönüşümünü ψ ile gösterelim.

$$\Gamma_R := \{ z \in G^- : |\varphi(z)| = R \text{ ve } R > 1 \}$$

sınırına sahip olan bölge G_R olduğunda $F_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z), \ z \in G^-$ eşitliğinde Cauchy integral formülü ve sınırsız bölgeler için Cauchy integral teoremi uygulanırsa

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^n \psi'(w)}{\psi(w) - z} dw, \quad z \in G_R$$

elde edilir. Bu eşitlikten görülür ki $F_n(z)$ Faber polinomları D^- bölgesinde analitik olan $\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z}$ fonksiyonunun ∞ 'un komşuluğundaki Laurent katsayılarıdır.

Böylece $w \in D^-$ için

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{k+1}}, \quad z \in G$$

biçiminde ifade edilen seri gösterimi varlığı görülür. Ayrıca bu seri gösteriminin yanı sıra $F_n(z)$ polinomunun integral gösterimi de mevcuttur.

Eğer $z \in G^-$ ise

$$F_n(z) = [\varphi(z)]^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

olur.

Burada Γ_R eğrisine G^- bölgesinin φ dönüşümüne göre ***seviye eğrisi*** denir. $w=\varphi(z)$ dönüşümü konform ve univalent olduğundan bu eğri kapalı analitik eğridir.

3. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA KONVOLÜSYONLAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

3.1 $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ Uzaylarında Konvolüsyonun Temel Özellikleri

Bu bölümde matematiğin farklı alanlarında önemli bir rol oynayan, özel halde değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşasında kullanılabilen konvolüsyon operatörü tanımlanacak ve onun temel özellikleri incelenecektir. Değişken üslü Lebesgue uzayları öteleme dönüşümüne göre invaryant uzaylar olmadıkları için konvolüsyon operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayacağız:

3.1.1 Tanım $f, g \in L^1$ olsun. O zaman

$$\sigma_h f(x,u) := \frac{1}{h}\int_0^h f(x+tu)\,dt,\ 0<h<\pi,\ x\in[0,2\pi],\ -\infty<u<\infty$$

olmak üzere

$$(f*g)(x,h) := \int_0^{2\pi} (\sigma_h f)(x,u)\, g(u)\,du$$

biçiminde tanımlanan operatöre ***konvolüsyon operatörü*** denir.

3.1.2 Lemma $\forall f, g, j \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $((\alpha f)*g)(x,h) = \alpha(f*g)(x,h)$,

b) $((f\pm g)*j)(x,h) = (f*j)(x,h) \pm (g*j)(x,h)$.

Kanıt a) Konvolüsyon tanımını kullanacak olursak, $\forall f, g, j \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ için

$$((\alpha f)*g)(x,h) = \int_0^{2\pi} (\sigma_h(\alpha f))(x,u)\, g(u)\,du$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h \alpha f(x+tu)\,dt\right) g(u)\,du$$

$$= \alpha\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h f(x+tu)\,dt\right) g(u)\,du = \alpha(f*g)(x,h)$$

b) $((f\pm g)*j)(x,h) = \int_0^{2\pi} (\sigma_h(f\pm g))(x,u)\, j(u)\,du$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{h}\int_0^h (f\pm g)(x+tu)dtj(u)\,d(u)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{h}\int_0^h f\left(x+tu\right)dtj\left(u\right)d\left(u\right)\pm\int_0^{2\pi}\frac{1}{h}\int_0^h g\left(x+tu\right)dtj\left(u\right)d\left(u\right)$$

$$=\left(f*j\right)\left(x,h\right)\pm\left(g*j\right)\left(x,h\right). \square$$

Tanımlamış olduğumuz bu konvolüsyon operatörü, klasik uzaylarda öteleme dönüşümü ile tanımlanan konvolüsyon operatörü gibi değişme özelliğini sağlamaz. Örneğin; $f\left(x\right):=1$ ve $g\left(x\right):=x$ fonksiyonlarını tanımlarsak

$$\left(f*g\right)\left(x,h\right)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h f\left(x+tu\right)dt\right)g\left(u\right)du$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h 1dt\right)udu=2\pi^2$$

iken

$$\left(g*f\right)\left(x,h\right)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h g\left(x+tu\right)dt\right)f\left(u\right)du$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h\left(x+tu\right)dt\right)du$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(x+\frac{hu}{2}\right)du=\pi\left(2x+\pi h\right)$$

olur. Bu da $f*g\neq g*f$ olduğunu gösterir.

3.1.3 Teorem $p\left(\cdot\right)\in\wp_0\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ olmak üzere eğer $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $g\in L_{2\pi}^{1}$ ise o zaman öyle bir $c_{p(\cdot)}$ sabiti vardır ki

$$\|f*g\|_{p(\cdot)}\leq c_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_1$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olsun. O zaman sırasıyla 2.2.7 Teorem ve 2.2.14 Lemma kullanılarak

$$\|f*g\|_{p(\cdot)}=\left\|\int_0^{2\pi}\sigma_h f\left(\cdot,u\right)g\left(u\right)du\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{p(\cdot)} \int_0^{2\pi} \left\| \sigma_h f(\cdot,u) \right\|_{p(\cdot)} \left| g(u) \right| \left| du \right|$$

$$\leq c_{p(\cdot)} \left\| f \right\|_{p(\cdot)} \left\| g \right\|_{L^1}$$

istenilen sonuç elde edilir. □

Bu özellikler konvolüsyon operatörünün integrallenebilirliğini göstermektedir.

3.1.4 Teorem $p(\cdot) \in \wp_0([0,2\pi])$ olmak üzere eğer $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $g \in L_{2\pi}^1$ ise o zaman $f * g$ konvolüsyon operatörüne f 'in ortalamalarının sonlu lineer birleşimi ile yaklaşılabilir. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\{\lambda_k\}_1^n \subset \mathbb{R}$ ve $\{u_k\}_1^n \subset [0,2\pi]$ sayı kümeleri bulunabilir ki

$$\left\| (f * g)(\cdot,h) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \sigma_h f(\cdot,u_k) \right\|_{p(\cdot)} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt $S_{2\pi}$, $[0,2\pi]$ üzerinde tanımlı basit fonksiyonların kümesi olsun. $S_{2\pi}$ kümesi L^1 sınıfında yoğun olduğundan bu teoremi $g \in S_{2\pi}$ fonksiyonu için kanıtlayacağız. Ayrıca $[0,2\pi]$ üzerinde tanımlı her basit fonksiyon $[0,2\pi]$'nin bazı alt kümelerinin lineer kombinasyonu olarak temsil edilebildiğinden teoremi

$$g(u) := \chi_M(u) := \begin{cases} 1, & u \in M \\ 0, & u \notin M \end{cases}$$

fonksiyonu için göstermemiz yeterli olacaktır. Burada $M = [a,b]$, $0 < a < b < 2\pi$, biçimindeki keyfi aralıklardır.

Verilen bir $\delta > 0$ sayısı için M kümesini öyle sonlu I_k alt aralıklara bölelim ki $|I_k| < \delta$, $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \varnothing$ ve $M = \bigcup_k I_k$ koşulları sağlansın. O zaman

$$(f * g)(x,h) = \int_0^{2\pi} (\sigma_h f)(x,u) g(u) du$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sigma_h f)(x,u) \chi_M(u) du$$

$$= \int_M (\sigma_h f)(x,u) du$$

$$=\sum_k \int_{I_k} (\sigma_h f)(x,u)\,du$$

elde ederiz. Şimdi $u_k \in I_k$ alarak

$$(f*g)(x,h)-\sum_k |I_k|(\sigma_h f)(x,u_k)$$

$$=\sum_k \int_{I_k} (\sigma_h f)(x,u)\,du-\sum_k \int_{I_k} (\sigma_h f)(x,u_k)\,du$$

$$=\sum_k \int_{I_k} \left[(\sigma_h f)(x,u)-(\sigma_h f)(x,u_k)\right]du$$

eşitliğini elde ederiz. 2.2.7 Teorem ve normun üçgen eşitsizliği kullanılır ise

$$\left\|(f*g)(\cdot,h)-\sum_k |I_k|(\sigma_h f)(\cdot,u_k)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$=\left\|\sum_k \int_{I_k} \left[(\sigma_h f)(\cdot,u)-(\sigma_h f)(\cdot,u_k)\right]du\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{p(\cdot)}\sum_k \int_{I_k} \left\|(\sigma_h f)(\cdot,u)-(\sigma_h f)(\cdot,u_k)\right\|_{p(\cdot)}|du| \tag{3.1}$$

olur. $\sigma_h f$ ortalama değer operatörünün sürekliliğinden söyleyebiliriz ki her $\varepsilon>0$ sayısı için öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki $|I_k|<\delta$ biçimindeki her $I_k \subset M$ ve $u\in I_k$ için

$$\left\|(\sigma_h f)(\cdot,u)-(\sigma_h f)(\cdot,u_k)\right\|_{p(\cdot)}<\varepsilon/\left(2\pi c_{p(\cdot)}\right) \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (3.1) ve (3.2)'den

$$\left\|(f*g)(\cdot,h)-\sum_k |I_k|(\sigma_h f)(\cdot,u_k)\right\|_{p(\cdot)}\le c_{p(\cdot)}\sum_k \int_{I_k} \varepsilon\,du$$

$$=c_{p(\cdot)}\sum_k |I_k|\,\varepsilon/\left(2\pi c_{p(\cdot)}\right)$$

$$=c_{p(\cdot)}|M|\,\varepsilon/\left(2\pi c_{p(\cdot)}\right)\le\varepsilon$$

sonucu elde edilir. Burada $|M|$, M 'nin Lebesgue ölçüsüdür. □

Şimdi yaklaşım teorisinde önemli rol üstlenen çekirdek fonksiyonların bir dizisini tanımlayalım:

3.1.5 Tanım Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{K_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1(-\pi,\pi)$ dizisine ***konvolüsyon için yaklaşım birimi veya yaklaşım özdeşliği*** denir [37]:

a) $\sup_n \|K_n\|_{L^1} < \infty$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta\le|x|\le\pi} K_n(x)\,dx = 0$, $\forall\delta\in(0,\pi)$.

3.1.6 Teorem $\{K_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ yaklaşım birimi olsun. O zaman $p(\cdot)\in\wp_0([0,2\pi])$ olmak üzere her $f\in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{f*K_n}{2\pi}-f\right\|_{p(\cdot)}=0$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt Varsayalım ki $f\in C([0,2\pi])$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left\|\frac{f*K_n}{2\pi}-f\right\|_{p(\cdot)} \le \left\|\frac{f*K_n}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)K_n(u)\,du\right\|_{p(\cdot)}$$

$$+\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)K_n(u)\,du - f(\cdot)\right\|_{p(\cdot)} \tag{3.3}$$

yazılır. (3.3)'ün sağ tarafındaki ilk terim için aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\left|\frac{(f*K_n)(x,h)}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(u)\,du\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h f(x+ut)\,dt\right)K_n(u)\,du-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(u)\,du\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+ut)-f(x))\,dt\right)K_n(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{h}\int_0^h\left|f(x+ut)-f(x)\right|\left|dt\right|\right)\left|K_n(u)\right|\left|du\right|.$$

$\varepsilon > 0$ alalım. $0 \leq t \leq h$ olduğundan ve f fonksiyonunun sürekliliğinden $h < \delta$ koşulunu sağlayan öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $\left|f(x+ut)-f(x)\right| < \varepsilon$ sağlanır. Böylece yaklaşım biriminin (a) özelliğinden

$$\left|\frac{(f * K_n)(x,h)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(u)\,du\right|$$

$$\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|K_n(u)\right|du \leq c\varepsilon \tag{3.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Öte yandan yaklaşım kimliğinin (b) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(u)\,du = f(x), \quad x \in [0,2\pi]$$

ve verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ki her $n \geq n_0$ için

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)K_n(u)\,du - f(\cdot)\right\|_{p(\cdot)} \leq \varepsilon \tag{3.5}$$

dir. (3.3) eşitsizliğinde (3.4) ve (3.5) kullanılırsa

$$\left\|\frac{f * K_n}{2\pi} - f\right\|_{p(\cdot)} < c\varepsilon \tag{3.6}$$

olur.

$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olsun. $C([0,2\pi])$ kümesi $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında yoğun olduğundan [29], her $\varepsilon > 0$ için bir $g \in C([0,2\pi])$ fonksiyonu vardır ki

$$\left\|f-g\right\|_{p(\cdot)} < \varepsilon \tag{3.7}$$

dir. Yaklaşım biriminin (a) özelliğinden ve 3.1.3 Teorem' den öyle bir M_0 pozitif sabiti vardır ki

$$\left\|\frac{f * K_n}{2\pi} - \frac{g * K_n}{2\pi}\right\|_{p(\cdot)} = \left\|\frac{(f-g) * K_n}{2\pi}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c_{p(\cdot)}}{2\pi}\left\|(f-g)\right\|_{p(\cdot)}\left\|K_n\right\|_{L^1} \leq M_0\varepsilon \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada M_0 sabiti n den bağımsızdır.

Şimdi $\forall n \geq n_0$ için (3.8), (3.6) ve (3.7) ilişkileri kullanılarak

$$\left\|\frac{f*K_n}{2\pi}-f\right\|_{p(\cdot)} \leq \left\|\frac{f*K_n}{2\pi}-\frac{g*K_n}{2\pi}\right\|_{p(\cdot)}+\left\|\frac{g*K_n}{2\pi}-g\right\|_{p(\cdot)}+\left\|f-g\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq M_0\varepsilon + c\varepsilon + \varepsilon = \left(M_0+c+1\right)\varepsilon$$

istenilen sonuç elde edilir. □

Burada elde edilen sonuçlar $p(\cdot)\in \wp_0\left([0,2\pi]\right)$ koşulu altında gözlemlenmiştir. Bu koşulun önemi maksimal operatörlerin sınırlılığını garanti etmesi ve böylece tanımladığımız ortalama operatörün anlamlı olmasıdır. Ancak maksimal operatörün sınırlılığını kullanmadan direkt olarak Steklov ortalamalarının sınırlılığını kullanarak $p(\cdot)$ üzerine konulan koşulu biraz daha esnetebiliriz. Yani $p_- \geq 1$ durumu içinde bu sonuçlar elde edilebilir. Aşağıdaki tanımlamalar ve teoremler ile bunun nasıl gerçekleştiğini gözlemleyebiliriz.

$\lambda,\gamma > 0$ ve $|\tau| \leq \pi/\lambda^{\gamma}$ olsun. $\left(S_{\lambda,\tau}f\right)(x) := \lambda\int_{x+\tau-1/2\lambda}^{x+\tau+1/2\lambda} f(t)\,dt$ biçiminde tanımlı $S_{\lambda,\tau}f$ Steklov operatörünü alalım.

3.1.7 Teorem $p(\cdot)\in\wp\left([0,2\pi]\right)$ ve $0<\gamma\leq 1$ olsun. Bu durumda öyle bir $c(p)$ pozitif sabiti bulunabilir ki $1\leq\lambda<\infty$ ve $|\tau|\leq\pi/\lambda^{\gamma}$ için $S_{\lambda,\tau}f$ Steklov operatörleri $L^{p(\cdot)}\left([0,2\pi]\right)$ uzayında düzgün sınırlıdır ve

$$\left\|S_{\lambda,\tau}(f)\right\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\left\|f\right\|_{p(\cdot)},\ 1\leq\lambda<\infty,\ |\tau|\leq\pi/\lambda^{\gamma}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(x+ut)\,dt = \frac{1}{uh}\int_x^{x+uh} f(s)\,ds = \frac{1}{uh}\int_{x+uh/2-uh/2}^{x+uh/2+uh/2} f(s)\,ds = \left(S_{\frac{1}{uh},\frac{uh}{2}}f\right)(x)$$

eşitliğinden faydanılarak 3.1.3, 3.1.4 ve 3.1.6 numaralı teoremlerin $p(\cdot) \in \wp([0,2\pi])$ koşulu altında sağlandığı açık olarak gözlemlenebilir. Burada $\lambda := 1/uh$, $\tau := uh/2$ olarak tanımlanmıştır.

Klasik Lebesgue uzaylarında benzer problemler, öteleme operatörü yardımı ile tanımlanan konvolüsyon operatörü için [37]'de yeterince çalışılmıştır.

4. AĞIRLIKLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA KONVOLÜSYONLAR VE EN İYİ YAKLAŞIM

4.1 Yardımcı Sonuçlar

4.1.1 Teorem $p(\cdot):[0,2\pi]\to[1,\infty)$ olmak üzere $f:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ve her $y\in[0,2\pi]$ için $f(\cdot,y)\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$ olsun. O zaman öyle bir $c(p)>0$ sayısı vardır ki

$$\left\|\int_0^{2\pi} f(\cdot,y)\,dy\right\|_{p(\cdot),\omega} \le c(p)\int_0^{2\pi}\|f(\cdot,y)\|_{p(\cdot),\omega}\,dy$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt Her $y\in[0,2\pi]$ için $f(\cdot,y)\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$ olsun. O zaman ağırlıklı norm tanımından ve $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ağırlıksız uzayındaki Minkowski eşitsizliğinden [7, sayfa: 34]

$$\left\|\int_0^{2\pi} f(\cdot,y)\,dy\right\|_{p(\cdot),\omega} = \left\|\int_0^{2\pi}\left(f(\cdot,y)\,dy\right)\omega(\cdot)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c(p)\int_0^{2\pi}\|f(\cdot,y)\,\omega(\cdot)\|_{p(\cdot)}\,dy$$

$$= c(p)\int_0^{2\pi}\|f(\cdot,y)\|_{p(\cdot),\omega}\,dy$$

elde edilir. □

4.1.2 Lemma $p(\cdot)\in\wp_0([0,2\pi])$ ve $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olsun. O zaman her $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$ için öyle bir $c(p)>0$ sabiti bulunabilir ki, her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\|f-S_nf\|_{p(\cdot),\omega}\le c(p)E_n(f)_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada S_nf, f 'in Fourier serisinin n. kısmi toplamıdır.

Kanıt $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom T_n olsun. O zaman

$$\|f-S_nf\|_{p(\cdot),\omega}\le\|f-T_n\|_{p(\cdot),\omega}+\|S_nf-T_n\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\le E_n(f)_{p(\cdot),\omega}+\|S_n(f-T_n)\|_{p(\cdot),\omega}$$

elde edilir. [69] çalışmasından söyleyebiliriz ki öyle bir $c(p)$ sabiti vardır ki

$$\left\|S_n(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\|f - S_n f\|_{p(\cdot),\omega} \le c_1(p) E_n(f)_{p(\cdot),\omega}$ eşitsizliği kanıtlanmış olur. □

Şimdi konvolüsyon operatörünün değerlendirilmesi için gereken bazı yardımcı sonuçları verelim.

$\upsilon \in \mathbb{Z}$ olmak üzere c_υ reel katsayıları için

$$\Delta_\mu := \Delta_\mu(x, f) := \sum_{|\mu|=2^{\upsilon-1}}^{2^\upsilon - 1} c_\mu e^{i\mu x}$$

olsun.

4.1.3 Teorem Eğer $p(\cdot) \in \wp_0([0, 2\pi])$ ve $\omega \in A_{p(\cdot)}$ ise o zaman her $f \in L_\omega^{p(\cdot)}$ için öyle $c_3(p), c_4(p) > 0$ sabitleri bulunabilir ki

$$\begin{aligned} c_3(p)\left\|\left(\sum_{\mu=\upsilon}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot),\omega} &\le \left\|\sum_{|\mu|=2^{\upsilon-1}}^{\infty} c_\mu e^{i\mu x}\right\|_{p(\cdot),\omega} \\ &\le c_4(p)\left\|\left(\sum_{\mu=\upsilon}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot),\omega} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [73].

4.1.4 Lemma $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$

$$\left|\lambda_k\right| \le M \ , \ \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j - 1}\left|\lambda_k - \lambda_{k+1}\right| \le M \ \ (k, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

koşulunu sağlayan sayıların bir dizisi, $p(\cdot) \in \wp_0([0, 2\pi])$ ve $\omega \in A_{p(\cdot)}$ olsun. a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sayıları, $f \in L_\omega^{p(\cdot)}$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere

$$a_0\lambda_0 / 2 + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \lambda_\upsilon (a_\upsilon \cos \upsilon x + b_\upsilon \sin \upsilon x)$$

serisi bir $F \in L_\omega^{p(\cdot)}$ fonksiyonunun Fourier serisidir ve

$$\|F\|_{p(\cdot),\omega} \le c\|f\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c>0$, f fonksiyonundan bağımsız bir sabittir [73].

4.1.5 Lemma $p(\cdot)\in \wp_0([0,2\pi])$, $\omega\in A_{p(\cdot)}$ ve $\gamma := \min\{2, p_-\}$ olsun. O zaman $\varphi_j \in L_\omega^{p(\cdot)}$ fonksiyonlarının $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ keyfi sistemi için

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^m \varphi_j^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot),\omega} \le \left[\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{p(\cdot),\omega}^\gamma \right]^{1/\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır [73].

$f\in L_\omega^{p(\cdot)}$ ve $\sigma(u)$ reel eksen üzerinde tanımlı, sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f)(\cdot,u)d\sigma(u),\quad x\in[0,2\pi],\ 0<h<1,\ -\infty<u<\infty$$

fonksiyonu için

$$D_\omega(f,\sigma,h,p(\cdot)) := \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f)(\cdot,u)d\sigma(u) \right\|_{p(\cdot),\omega}$$

ifadesini tanımlayalım.

4.2 Ana Sonuçlar

4.2.1 Teorem $p(\cdot)\in \wp_0([0,2\pi])$ ve $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olsun. O halde öyle bir $c(p)$ sabiti bulunabilir ki her $f\in L_\omega^{p(\cdot)}$ ve m doğal sayısı için

$$D_\omega(f,\sigma,h,p(\cdot)) \le c(p)\left[\left(\sum_{k=0}^m E_{2^k-1}^\gamma (f)_{p(\cdot),\omega}\, \delta_{2^k,h}^\gamma \right)^{1/\gamma} + E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot),\omega} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\delta_{2^k,h} := \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \left|\hat{\sigma}(lh)-\hat{\sigma}((l+1)h)\right| + \left|\hat{\sigma}(2^k h)\right|,$$

$$\hat{\sigma}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{ux} d\sigma(u),\quad h\le 2^{-m-1}$$

$$\gamma := \min\{2, p_-\}$$

dir.

Kanıt $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$, $m\in\mathbb{N}$ alalım. f 'in Fourier serisinin 2^{m+1} inci kısmi toplamını $S_{2^{m+1}}$ ile gösterelim. Ayrıca $h\le 2^{-m-1}$ olsun. Normun üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$D_{\omega}\left(f,\sigma,h,p(\cdot)\right)\le\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left[(\sigma_h f)(\cdot,u)-\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f\right)(\cdot,u)\right]d\sigma u\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$+\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f\right)(\cdot,u)\,d\sigma u\right\|_{p(\cdot),\omega} \tag{4.1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sağ taraftaki ilk terime sırasıyla 2.2.7 Teorem, 2.2.14 Lemma ve 4.1.2 Lemma uygularsak

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left[(\sigma_h f)(\cdot,u)-\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f\right)(\cdot,u)\right]d\sigma u\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\le c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(\sigma_h f)(\cdot,u)-\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f\right)(\cdot,u)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|d\sigma(u)\right|$$

$$=c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\sigma_h\left(f-S_{2^{m+1}}f\right)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|d\sigma(u)\right|$$

$$\le c_5(p)\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f-S_{2^{m+1}}f\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|d\sigma(u)\right|$$

$$\le c_6(p)E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot),\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\left|d\sigma(u)\right|$$

$$\le c_7(p)E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot),\omega} \tag{4.2}$$

elde ederiz. Şimdi (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirelim: Genelliği kaybetmeden f 'in

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{A}_k(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}_k(x)e^{ikx}$$

Fourier serisi için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f\right)(x,u)\,d\sigma(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}S_{2^{m+1}}f(x+tu)\,dt\right]d\sigma(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{f}_k e^{ik(x+tu)}dt\right]d\sigma(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{f}_k e^{ikx}\int_{-h}^{h}e^{iktu}dt\right]d\sigma(u)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikhu}-e^{-ikhu}}{2ikhu}d\sigma(u)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}(kh) \tag{4.3}$$

elde ederiz. (4.1), (4.2) ve (4.3) birlikte düşünülür ise

$$D_\omega(f,\sigma,h,p(\cdot))\leq\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}+c_7(p)E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot),\omega} \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Her $a,b\in\mathbb{R}$ ve $0<p<1$ için $(a+b)^p<a^p+b^p$ eşitsizliği sağlandığından 4.1.3 Teorem ve 4.1.5 Lemma kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq c_{4\,p(\cdot)}\left\|\left(\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\hat{A}_l(x)\hat{\sigma}(lh)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$:=c_4(p)\left\|\left(\sum_{k=0}^{m}\left|\Delta_{k,\sigma}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq c_4(p)\left[\sum_{k=0}^{m}\left\|\Delta_{k,\sigma}\right\|_{p(\cdot),\omega}^{\gamma}\right]^{1/\gamma} \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada $\gamma:=\min\{2,p_-\}$ dir. Şimdi $l\leq 2^k-1$ için $\hat{A}_l=0$ durumunda

$$\Delta_{k,\sigma}=\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\hat{A}_l(x)\hat{\sigma}(lh)$$

toplamına Abel dönüşümünü uygularsak

$$\Delta_{k,\sigma}=\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left[S_l(f,x)-S_{2^{k+1}-1}(f,x)\right]\left[\hat{\sigma}(lh)-\hat{\sigma}((l+1)h)\right]$$

$$+\left[S_{2^{k+1}-1}(f,x)-S_{2^k-1}(f,x)\right]\hat{\sigma}\left(2^k h\right)$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\left\|\Delta_{k,\sigma}\right\|_{p(\cdot),\omega}\leq\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\left\|S_l(f,x)-S_{2^{k+1}-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|\hat{\sigma}(lh)-\hat{\sigma}((l+1)h)\right|$$

$$+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-S_{2^k-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)\right|$$

$$=\left\|S_{2^k}(f,x)-S_{2^{k+1}-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^k+1\right)h\right)\right|$$

$$+\ldots+\left\|S_{2^{k+1}-2}(f,x)-S_{2^{k+1}-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-2\right)h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-1\right)h\right)\right|$$

$$+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-S_{2^k-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)\right|$$

$$\leq\left[\left\|S_{2^k}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot),\omega}+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\right]\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^k+1\right)h\right)\right|$$

$$+\ldots+\left[\left\|S_{2^{k+1}-2}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot),\omega}+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\right]\times$$

$$\times\left|\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-2\right)h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-1\right)h\right)\right|$$

$$+\left[\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot),\omega}+\left\|S_{2^k-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot),\omega}\right]\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)\right|$$

$$\leq cE_{2^k-1}(f)_{p(\cdot),\omega}\,\delta_{2^k,h} \tag{4.6}$$

olur. Böylece (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri birlikte düşünülür ise

$$\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}\leq c_9(p)\left[\sum_{k=0}^{m}E_{2^k-1}^{\gamma}(f)_{p(\cdot),\omega}\,\delta_{2^k,h}^{\gamma}\right]^{1/\gamma} \tag{4.7}$$

olduğu görülür. (4.4) ve (4.7) den de istenilen eşitsizlik elde edilir. □

4.2.2 Teorem $p(\cdot)\in\wp_0([0,2\pi])$ ve $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olsun. F sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon, yani, $h\le 2^{-m-1}$ olmak üzere

$$\|F\|\le c_1,\quad \sum_{\theta=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left|F(\theta h)-F((\theta+1)h)\right|\le c_2$$

olsun. Eğer σ_1 ve σ_2

$$\hat{\sigma}_1(x)=\hat{\sigma}_2(x)F(x),\quad |x|<1$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar ise o zaman her $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$ fonksiyonu ve m doğal sayısı için öyle bir $c(p)$ sabiti bunulabilir ki

$$D_{\omega}(f,\sigma_1,h,p(\cdot))\le c(p)\left[D_{\omega}(f,\sigma_2,h,p(\cdot))+E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot),\omega}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ için 4.2.1 Teorem'in kanıtında $D_{\omega}(f;\sigma,h,p(\cdot))$ 'nin değerlendirmesi için kullanılan tekniği tekrarlarsak,

$$D_{\omega}(f;\sigma_1,h,p(\cdot))\le\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}\right)(\cdot,u)\,d\sigma_1(u)\right\|_{p(\cdot),\omega}+cE_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot),\omega}\tag{4.8}$$

elde edilir. Öte yandan 4.1.4 Lemma ve (4.3) kullanılar ise

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f\right)(\cdot,u)\,d\sigma_1(u)\right\|_{p(\cdot),\omega}=\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(\cdot)\hat{\sigma}_1(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(\cdot)\hat{\sigma}_2(kh)F(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{f}_k e^{ikx}\hat{\sigma}_2(kh)F(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\le c(p)\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{f}_k e^{ikx}\hat{\sigma}_2(kh)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=c(p)\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(\cdot,u)\,d\sigma_2(u)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=c(p)\left\|\int_{-\infty}^{\infty} S_{2^{m+1}}\left(\sigma_h f\right)(\cdot,u)\,d\sigma_2(u)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=c(p)\left\|S_{2^{m+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h f\right)(\cdot,u)\,d\sigma_2(u)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq c(p)\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_h f(\cdot,u)\,d\sigma_2(u)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=D_\omega\left(f;\sigma_2,h,p(\cdot)\right)$$

olduğu görülür. Böylece (4.8) ve bu eşitsizlikten istenilen elde edilir. □

4.2.3 Tanım Verilen bir $p(\cdot)\in\wp_0\left([0,2\pi]\right)$, $\omega\in A_{p(\cdot)}$ için $f\in L_\omega^{p(\cdot)}$ ve

$$\Delta_t^r f(x):=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}\binom{r}{s}f(x+st),\quad r=1,2,...$$

olmak üzere

$$\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot),\omega}:=\sup_{|h|\leq\delta}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\Delta_t^r f(x)\,dt\right\|_{p(\cdot),\omega},\quad \delta>0$$

değerine f fonksiyonunun r. ***düzgünlük modülü*** denir.

$p(\cdot)\in\wp_0\left([0,2\pi]\right)$, $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olmak üzere $f\in L_\omega^{p(\cdot)}$ ise o zaman $r=1,2,...$

$$E_n(f)_{p(\cdot),\omega}\leq c(p,r)\,\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot),\omega}$$

düz teoremi geçerlidir [74]. Bu teoreme dayanarak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

4.2.4 Sonuç $p(\cdot)\in\wp_0\left([0,2\pi]\right)$ ve $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olsun. O halde öyle bir $c(p,r)$ sabiti bulunabilir ki her $f\in L_\omega^{p(\cdot)}$ ve m doğal sayısı için

$$D_{\omega}\left(f,\sigma,h,p(\cdot)\right)\leq c(p,r)\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\Omega_r^{\gamma}\left(f,\frac{1}{2^k-1}\right)_{p(\cdot),\omega}\delta_{2^k,h}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}+\Omega_r\left(f,\frac{1}{2^{m+1}}\right)_{p(\cdot),\omega}\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.5 Sonuç $p(\cdot)\in\wp_0\left([0,2\pi]\right)$ ve $\omega\in A_{p(\cdot)}$ olsun. Varsayalım ki F ’ de sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon olsun. Eğer σ_1 ve σ_2

$$\hat{\sigma}_1(x)=\hat{\sigma}_2(x)F(x), \quad |x|<1$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar ise o zaman her $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}$ fonksiyonu ve m doğal sayısı için öyle bir $c(p,r)$ sabiti bulunabilir ki

$$D_{\omega}\left(f,\sigma_1,h,p(\cdot)\right)\leq c(p,r)\left[D_{\omega}\left(f,\sigma_2,h,p(\cdot)\right)+\Omega_r\left(f,1/2^{m+1}\right)_{p(\cdot),\omega}\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMİRNOV SINIFLARINDA FABER SERİLERİNİN MAKSİMAL YAKINSAKLIĞI

5.1 Temel Tanımlar ve Yardımcı Teoremler

G, kompleks düzlemde, Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi ile sınırlandırılmış sonlu bir bölge olsun. Bu bölgenin tümleyenini $G^{-} := \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ ile gösterelim. Ayrıca $D := \{ w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \}$, $D^{-} := \{ w \in \mathbb{C} : |w| > 1 \}$ ve $T := \partial D$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoreminden söyleyebiliriz ki G^{-} bölgesini D^{-} bölgesine resmeden ve $\varphi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\varphi(z)}{z} > 0$ normlayıcı şartlara sahip $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır. Bu konform dönüşümün ters dönüşümünü ψ ile gösterelim. φ ve ψ dönüşümleri sırasıyla Γ ve T üzerine sürekli genişlemeye sahiptir. Türevleri olan φ' ve ψ' dönüşümleri de sırasıyla Γ ve T üzerinde hemen her yerde teğetsel olmayan limit değerlerine sahiptir ve üstelik bu limit fonksiyonları Lebesgue ölçümüne göre integrallenebilirlerdir [58, sayfa: 419-438].

5.1.1 Tanım $p(\cdot) : \Gamma \to [1, \infty)$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$E^{p(\cdot)}(G) := \left\{ f \in E^{1}(G) : f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \right\}$$

kümesine G de analitik fonksiyonların ***değişken üslü Smirnov sınıfı*** denir.

Değişken üslü Smirnov sınıfı $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ için $\| f \|_{E^{p(\cdot)}(G)} := \| f \|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ normu ile bir Banach uzayı olur.

Şimdi tümleyeni bağlantılı olan sınırlı bir K kontinyumunu alalım. $G^{-} := K^{-} := \mathbb{C} \setminus K$ ve

$$\Gamma_R := \{ z \in \Gamma : |\varphi(z)| = R \} \text{ ve } K_R := \operatorname{int} \Gamma_R, \; R > 1$$

olsun. φ dönüşümü konform ve univalent olduğundan Γ_R kapalı ve analitik bir eğri olur.

Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(K_R)$ ise o zaman [38, sayfa:199] da görebileceğimiz gibi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \quad z \in K, \tag{5.1 }$$

Faber seri gösterimi vardır. Bu seri K üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Burada Φ_k, $k=0,1,2,\ldots,$ K için Faber polinomları, a_k, $k=0,1,2,\ldots,$ ise

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{5.2}$$

biçimindeki Faber katsayılarıdır. Ayrıca Φ_k polinomları

$$\frac{\psi'(w)}{\psi'(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{w^{k+1}}, \qquad |w|>1,\ \ z\in K,$$

seri gösteriminin Taylor katsayıları olarak karşımıza çıkar. Faber polinomları, Faber serileri ve bu serilerin yaklaşım özellikleri için daha detaylı bilgi edinmek için [38, 75, 76] monografilerine bakılabilir.

(5.1) kullanılarak

$$R_n(z,f) := f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\Phi_k(z),\ z\in K \tag{5.3}$$

elde edilir.

Ayrıca (5.2) ve (5.3) eşitlikleri kullanılarak da

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(\psi(t))\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt$$

elde edilir. Eğer p_n derecesi en fazla n olan trigonometrik bir polinom ise

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \left\{f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right\}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt \tag{5.4}$$

olur. E_k, K^- bölgesinde analitik ve

$$\Phi_k(z) = [\varphi(z)]^k + E_k(z),\ z\in K^-$$

olduğundan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(z)}{t^{k+1}}$$

elde edilir.

Buradan (5.4) kullanılarak

$$\left|R_n(z,f)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f(\psi(t))-p_n(\psi(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(\psi(w))\frac{1}{t^{k+1}}\right||dt| \tag{5.5}$$

elde edilir.

$$F(\tau,w):=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)}-\frac{1}{t-w},\ |\tau|>1,\ |w|>1$$

olmak üzere ana sonuçlarımızı kanıtlamak için $|w|\ge r>1$ olduğunda

$$E_k(\psi(w))=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r}\tau^k\left[\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)}-\frac{1}{t-w}\right]d\tau \tag{5.6}$$

ilişkisini ve aşağıda ifade edilen Lebedev'in bilinen sonucunu kullanacağız.

5.1.2 Teorem Eğer $r>1$ ve $|w|\ge\rho>1$ ise o zaman

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=r}\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(w)}-\frac{1}{t-w}\right||dt|\le\sqrt{\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}}\quad. \tag{5.7}$$

eşitsizliği sağlanır [38, sayfa 63-205].

5.2 Ana Sonuçlar

5.2.1 Teorem $p(\cdot)\in\wp_0(\Gamma_R)$ olsun. Eğer $R>1$ için $f\in E^{p(\cdot)}(K_R)$ ise o zaman

$$\left|R_n(z,f)\right|\le\frac{c_{p(\cdot)}}{R^{n+1}(R-1)}E_n(f,K_R)_{p(\cdot)}\sqrt{n\ln n},\ z\in K$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt $z\in\Gamma_r$, $1<r<R$ ve p_n , $f\in E^{p(\cdot)}(K_R)$ fonksiyonuna derecesi n'yi geçmeyen trigonometrik polinomlar sınıfından en iyi yaklaşan polinom olsun. Böyle bir polinomun her zaman var ve tek olduğu [77] de görülebilir. Ayrıca [70] monografisine de bakılabilir.

$$I_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|,$$

$$I_2 := \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k\left(\psi(w)\right)\frac{1}{t^{k+1}}\right||dt|.$$

olmak üzere (5.5)'den görebiliriz ki

$$\left|R_n(z,f)\right|\le I_1+I_2 \tag{5.8}$$

dir. $R>1$ için Γ_R analitik bir eğri olduğundan $|w|=R$ eğrisi üzerinde öyle bir $c_i>0$, $i=1,2,3,4$ sabitleri bulunabilir ki

$$0<c_1\le\left|\psi'(w)\right|\le c_2<\infty,\ 0<c_3\le\left|\varphi'(w)\right|\le c_4<\infty \tag{5.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz [78]. Hölder eşitsizliği ve (5.9) den

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\left(\psi(t)\right)-p_n\left(\psi(t)\right)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left[\varphi(z)\right]^k}{\left[\varphi(\zeta)\right]^{k+1}}\right|\left|\varphi'(\zeta)\right||d\zeta|$$

$$\le\frac{c_1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}\left|f(\zeta)-p_n(\zeta)\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left[\varphi(z)\right]^k}{\left[\varphi(\zeta)\right]^{k+1}}\right||d\zeta|$$

$$\le\frac{c_2(p)}{2\pi}\left\|f(\cdot)-p_n(\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)}\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left[\varphi(z)\right]^k}{\left[\varphi(\cdot)\right]^{k+1}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)}$$

$$=\frac{c_2(p)}{2\pi}\left\|f(\cdot)-p_n(\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)}\left\|\frac{\left|\varphi(z)\right|^{n+1}}{\left|\varphi_1(\cdot)\right|^{n+1}\left(\left|\varphi(\cdot)\right|-\left|\varphi(z)\right|\right)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)}$$

$$=\frac{c_2(p)}{2\pi}E_n\left(f,K_R\right)_{p(\cdot)}\left\|\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)}$$

$$\le\frac{c_3(p)}{2\pi}E_n\left(f,K_R\right)_{p(\cdot)}\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}\left(R-r\right)}$$

dir. Böylece

$$I_1 \le \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \tag{5.10}$$

değerlendirmesini elde ederiz. Şimdi I_2 integrali için bir değerlendirme yapalım. (5.6) eşitliğinden

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left\{ \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r} \tau^k F(\tau, w)\, d\tau \right] \frac{1}{t^{k+1}} \right| \right\} |dt|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=r} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} \right| \left| F(\tau, w) \right| |d\tau| \right\} |dt|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=r} \left| \frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)} \right| \left| F(\tau, w) \right| |d\tau| \right\} |dt|$$

sağlandığı görülür. Fubini teoreminden

$$I_2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=r} |\tau|^{n+1} \left| F(\tau, w) \right| \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \frac{1}{|t|^{n+1}|t-\tau|} |dt| \right\} |d\tau|$$

$$\le \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} \left| F(\tau, w) \right| \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|t|=R} \left| f(\psi(t)) - p_n(\psi(t)) \right| \frac{1}{|t-\tau|} |dt| \right\} |d\tau|$$

elde edilir. Daha sonra değişken değiştirilip sırası ile (5.9), Hölder eşitsizliği ve 5.1.2 Teorem kullanır ise

$$I_2 \le \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} \left| F_1(\tau, w) \right| \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} \left| f(\zeta) - p_n(\zeta) \right| \frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|} |d\zeta| \right\} |d\tau|$$

$$\le \frac{c_4(p) r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} \left| F(\tau, w) \right| \left\{ \left\| f(\zeta) - p_n(\zeta) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \left\| \frac{\varphi'(\cdot)}{\varphi(\cdot) - \varphi(z)} \right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)} |d\tau| \right\}$$

$$\leq \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau,w)| E_n(f,K_R)_{p(\cdot)} \frac{1}{R-r} |d\tau|$$

$$= \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} E_n(f,K_R)_{p(\cdot)} \int_{|\tau|=r} |F(\tau,w)||d\tau|$$

$$\leq \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} E_n(f,K_R)_{p(\cdot)} \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{r^2}{r^2-1}} \tag{5.11}$$

elde edilir. Şimdi (5.8), (5.10) ve (5.11) eşitsizlikleri kullanılarak

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_3(p)r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} E_n(f,K_R)_{p(\cdot)} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}$$

$$+ \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} E_n(f,K_R)_{p(\cdot)} \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{r^2}{r^2-1}}$$

eşitsizliği görülür. Bu eşitsizlikte $z \in K$ alıp $r = 1+\frac{1}{n}$ yazarsak bir $c_6(p) > 0$ sabiti için

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_6(p)}{R^{n+1}(R-1)} E_n(f,K_R)_{p_1(\cdot)} \sqrt{n\ln n}$$

elde ederiz. □

5.2.2 Tanım $p(\cdot) \in \wp_0(T)$ için $f \in L^{p(\cdot)}(T)$ olsun.

$$\Omega(f,\cdot)_{p(\cdot),T} := \sup_{0<h\leq\delta} \| f(\cdot) - \sigma_h f(\cdot) \|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

biçiminde tanımlı $\Omega(f,\cdot)_{p(\cdot),T} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna ***f* ’in düzgünlük modülü** denir.

En iyi yaklaşım sayısı ile düzgünlük modülü arasındaki ilişkiyi ifade eden düz teoremlerin bu uzaylarda geçerli olması aynı zamanda bize $R_n(z,f)$ kalan fonksiyonun düzgünlük modülü ile arasındaki ilişkiyi incelememize olanak sağlamaktadır. Şimdi bu ilişkinin incelenebilmesi için aşağıdaki tanımlamayı yapıp sonucumuzu ifade edelim:

$$f_0(w) := f(\psi(Rw)) \text{ ve } p_0(w) := p(\psi(Rw))$$

olmak üzere D. M. İsrafilov ve A. Testici [46] çalışmasında

$$\left\| f-P_n(\cdot,f)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\,\Omega\left(f_0,1/n\right)_{p_0(\cdot)}$$

düz teoremi kanıtlamıştır.

5.2.3 Sonuç $p(\cdot)\in\wp_0(\Gamma_R)$ olsun. Eğer $R>1$ için $f\in E^{p(\cdot)}(K_R)$ ise o zaman

$$\left|R_n(z,f)\right| \leq \frac{c_{p(\cdot)}}{R^{n+1}(R-1)}\Omega\left(f_0,1/n\right)_{p_0(\cdot)}\sqrt{n\ln n}\,,\ z\in K$$

eşitsizliği sağlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yeni bulgular üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde yer almaktadır. Üçüncü bölümde, daha önce klasik Lebesgue uzayları için tanımlanan konvolüsyon operatörü için elde edilen bir dizi özellikler daha genel olan değişken üslü Lebesgue uzaylarına uygun bir öteleme operatörü kullanılarak taşınmıştır. Aynı zamanda yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşası için kullanılan yaklaşım birimi ile ilgili genel özellikler kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde değişken üslü Lebesgue uzaylarının bir genelleşmesi olan ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları tanımlandı. Bu uzaylarda konvolüsyon operatörü en iyi yaklaşım sayısı ile üstten değerlendirilmiş olup, daha sonra fonksiyonun düzgünlük modülü kullanılarak somut eşitsizlikler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, basit bağlantılı bölge durumunda değişken üslü Smirnov sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflarda maksimal yakınsaklık problemi incelenmiştir.

Kompleks düzlemde bakılan yaklaşım problemlerinde Smirnov sınıfları Dini düzgün eğriler ile sınırlı bölgelerde tanımlanmaktadır. Bunun nedeni p üzerine konulan koşulların oldukça genel olup, sadece sınırda geçerli olma isteğinden kaynaklanmaktadır. Biz $p(\cdot)$ üzerine daha kısıtlayıcı koşullar koyarak Smirnov sınıflarını daha genel sınırlı bölgelerde, özel halde regüler eğriler ile sınırlı bölgelerde tanımlamayı ve bu durumda yaklaşım problemlerini incelemeyi düşünüyoruz.

7. KAYNAKLAR

[1] D. Jackson, *The Theory of Approximation*, New york: Amer. Math. Soc., Coll.Publ., 13-32, 1930.

[2] N. I. Akhiezer, *Theory of Approximation*, New York: Frederick Ungar Publishing, 1-307, 1956.

[3] S. B. Stechkin, “On the order approximation of continuous function,” *Izv.*, 15, 219-242, 1951.

[4] M. F. Timan, “Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and transformations of convolution type” (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 198, 776–778, 1971.

[5] V. G. Ponomarenko and M. F. Timan, “On the behaviour of convolution type transformations in the Orlicz space,” in Book: Approximation Theory of Functions, Vol.3, *Proceedings of the Institute of Application Mathematics and Mechanics*, Donetsk, 1998.

[6] Y. E. Yıldırır and D. M. Israfilov, “The Properties of convolution type transforms in weighted Orlicz spaces,” *Glasnik Matematicki*, 45(65), 461-474, 2010.

[7] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhäuser, 2013.

[8] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Michael Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Hiedelberg Dordrecht London New York, 2011.

[9] I. I. Sharapudinov, *Some problems of theory of approximation in the Lebesgue spaces with variable exponent*, Vladikav, 2012.

[10] H. Nakano, *Modulared semi-ordered linear spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1950.

[11] H. Nakano, Modulared sequence spaces, Proc. Japan Acad., vol 27, pp. 508-512, 1951.

[12] H. Nakano, *Topology and linear topological spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1951

[13] H. Hudzik, “On generalized Orlicz-Sobolev space,” *Func. Approximation Comment. Math*., 4, 35-51, 1976.

[14] H. Hudzik, “Uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm,” *Comment. Math. Parce Mat*., 23, 21-32, 1983.

[15] J. Musielak, *Orlicz spaces and modüler spaces*, Lecture notes in math., 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[16] I. I. Sharapudinov, “On a topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$,” *Matem. Zametki*, 26, no 4, 613-632, 1979.

[17] I. I. Sharapudinov, “Approximation of functions in the metric of the space $L^{p(t)}([a,b])$ and quadrature formulas,” (Russian). *In the Constructive function theory* 81 (Varna), 189-193, 1981, *publ. House Bulgar. Acad. Sci*., Sofia, 1983.

[18] I. I. Sharapudinov, “The basis property of the Haar system in the space $L^{p(t)}([0,1])$ and the principle of locatization in the mean,” (Russian)., *Mat. Sb. (N.S.)*, 130(172), 275-283, 286, 1986.

[19] E. Acerbi and G. Mingione, “Regularity results for a class of functional with non-standard growth,” *Arch. Ration. Mech. Anal*., 156, 121-140, 2001.

[20] M. Eleutera, “Hölder continutiy results for a class of functionals with nonstandard growth,” *Boll. Unione Math. Ital*., 7-B, 129-157, 2004.

[21] L. Diening, “Riesz Potential and Sobolev Embeddings of generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$,” *Math. Nachr*., 263, no. 1, 31-43, 2004.

[22] L. Diening and M. Růžička, “Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid Dynamics,” *J. Reine Ang. Math*., 563, 197-220, 2003.

[23] X. Fan and D. Zhao, “On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$,” *J. Math. Anal. Apply*., 263, 424-446, 2001.

[24] V. Kokilashvili and S. Samko, “Maximal and fractional oerators in weighted $L^{p(x)}$ spaces,” *Rev1. Mat. Iberonamericana*, 20, no. 2, 403-515, 2004.

[25] M. Růžička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[26] V. M. Kokilashvili and S. G. Samko “Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 352(1), 15-34, 2009.

[27] Bilalov B.T., Guseynov Z.G., “Basicity of a system of exponents with a piece-wise linear phase in variable spaces,” *Mediterr. J. Math.*, vol. 9, no. 3, 487–498, 2012.

[28] O. Kováčik and J. Rákosník “On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$,” *Czechoslovak Math. J.* 41(116), 592-618, 1991.

[29] S. G. Samko, “Convolution type operators in $L^{p(x)}$,” *Integral transforms and special functions*, vol. 7, no: 1-2, 123-144, 1998.

[30] S. G. Samko, “Convolution and potential type operators in the space $L^{p(x)}\left(\mathbb{R}^n\right)$,” *Integral transforms and special functions*, vol.7, no. 3-4, 261-284, 1998.

[31] A. Guven and D. M. Israfilov, “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$,” *J. Math. Inequal.* 4(2), 285-299, 2010.

[32] D. M. Israfilov and E. Yirtici, “Convolutions and best approximations in variable exponent Lebesgue spaces,” *Math. Reports 18(68)*, 4, 497-508, 2016.

[33] J. Marcinkiewicz “Sur les multiplicateurs des series de Fourier,*” Studia Mathematica*, 8, 78-91, 1939.

[34] D. S. Kurtz “Littlewood-Paley and multipliers theorems on weighted L^p spaces,” *Trans. Amer. Math. Soc*., 259, 235-254, 1980.

[35] V. Kokilašhvili “A direct theorem for the approximation in the mean of analytic functions by polynomials,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 185, 749-752, 1969.

[36] A. Guven and D. M. Israfilov “Multiplier theorems in weighted Smirnov spaces,” *J. Korean Math. Soc*., 45(6), 1535-1548, 2008.

[37] R. E. Edwars, *Fourier Series a Modern Introduction*, vol 3. Springer, Berlin 1979.

[38] P. K. Suetin, *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach, 1998.

[39] D. M. Israfilov, B. Oktay and R. Akgün, “Approximation in Smirnov-Orlicz classes,” *Glasnik matematički* 40(1), 87-102, 2005.

[40] D. M. Israfilov, E. Gürsel and E. Aydın, “Maximal Convergence of Faber Series in Smirnov Classes with Variable Exponent,” *Bull. Braz. Math. Soc*., New Series, DOI 10.1007/s00574-018-0086-8, 2018.

[41] D. M. Israfilov, “Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov classes $E_p\left(G,\omega\right)$ and the Bieberbach polynomials,” *Constructive approximation* 17(3), 335-351, 2001.

[42] D. M. Israfilov, “Approximation by p-Faber-Laurent Rational Functions in the weighted Lebesgue spaces,” *Czechoslovak Mathematical Journal* 54(3), 751-765, 2004.

[43] D. M. Israfilov, A. Guven, “Approximation in weighted Smirnov classes,” *East journal on approximations* 11(1), 91-102, 2005.

[44] D. M. Israfilov, R. Akgün, “Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes,” *Journal of Mathematics of Kyoto University* 46 (4), 775-770, 2006.

[45] D. M. Israfilov and A. Testici, “Approximation in Smirnov classes with variable exponent,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, Vol. 60(9), 1243-1253, 2015.

[46] D. M. Israfilov and A. Testici, “Approximation by Faber-Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent,” *Indagationes Mathematicae* 27, 914-922, 2016.

[47] H. Yurt and A. Guven, “Approximation by Faber-Laurent rational functions on doubly connected domains,” *New Zealand Journal of Mathematics*, 44, 113-124, 2014.

[48] S. Z. Jafarov, “On approximation in weighted Smirnov Orlicz classes,” *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57(5), 567-577, 2012.

[49] S. Z. Jafarov, “On approximation of functions by p-Faber Laurent Rattional functions,” *Complex Variables and Elliptic Equations*, 60(3), 416-428, 2015.

[50] S. Z. Jafarov, “Approximation in weighted rearrangement invariant Smirnov spaces,” *Tbilisi Mathematical Journal*, 9 (1), 9-21, 2016.

[51] R. Akgun, “Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent,” *Ukranian Math. J.* 63(1), 3-23, 2011.

[52] R. Akgun and V. Kokilashvili, “The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue space,” *Georgian Math. J.* 18(3), 399-423, 2011.

[53] G. Faber, *Uber polynomische Entwicklungen*, Mathem. Ann. 57, 389-408, 1903.

[54] B. T. Bilalov, T. B. Gasymov and A. A. Guliyeva, “On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 40, no 5, 1085-1101, 2016.

[55] B. T. Bilalov, T. B. Gasymov and G. V. Maharramova, “On basicity of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem in Morrey type spaces,” *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, vol. 35, no. 1-2, 2016.

[56] B.T. Bilalov and A.A Guliyeva, “On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces. International Journal of Mathematics,” vol. 25, no. 6, 1450054 (10 pages) DOI:10.1142/S0129167X14500542, 2014.

[57] T. Başkan, *Kompleks fonksiyonlar teorisi*, Vipaş A.Ş., Bursa, 126-313, 2000.

[58] G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of A Complex Variable* (AMS Translation of Mathematical Monographs Volume 26), Providence: American Mathematical Society, 388-453, 1969.

[59] P. B. Rynne and M. A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag, London 26-101, 2008.

[60] A. Çavuş and D. M. Israfilov, "Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L^p(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$," *Approximation theory App.*, 11(1), 105-118, 1987.

[61] G. Mastroianni and G. V. Milovanović, *Interpolation Processes Basic Theory and Applications,* Heidelberg, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4-212, 2008.

[62] N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series Volume I*, New york: Pergamon Press, 44-48, 1964.

[63] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I-II, Chambridge Univ. Press, 1959.

[64] G. B. Folland, *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, USA: A Wiley-lnterscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[65] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1, 1975.

[66] A. Böttcher and Y. I. Karlovich, "*Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators*," Basel, Boston, Berlin: Birkäuser, 1-44, 1997.

[67] M. O. Gonzalez, *Classical Complex Analysis*, Marcel Dekker Inc., 486, 1992.

[68] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable III*, New York: Chelsea Publishing Company, 8-14, 1977.

[69] C. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Map*, New york: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 43-48, 1992.

[70] R. A. Devore and G: G. Lorentz, "*Constructive Approximation*," USA: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

[71] P. Hästö and L. Diening "Muckenhoupt weights in variable exponent spaces", *http://www.helsinki.fi/~pharjule/varsob/publications. shtml*, 2008.

[72] I. I. Sharapudinov, "Some aspects of approximation theory in the spaces $L^{p(x)}$," *Anal. Math.* 33(2), pp. 135-153, 2007.

[73] D. M. Israfilov and A. Testici, "Linear methods of approximation in weighted Lebesgue spaces with variable exponent," submitted.

[74] R. Akgün, "Polynomial approximation of functions of weighted Lebesgue spaces and Smirnov spaces with nonstandard growth," *Georgian Math. J.*, 11(2), 203-235, 2011.

[75] V. I. Smirnov, N. A. Lebedev, *Functions of Complex Variable: Constructive Theory*, The MIT Press, Cambridge, 1968.

[76] D. Gaier, *Lectures on Complex Approximation*, Birkhauser, Boston, (translated from German by Renate McLaughlin), 1987.

[77] I. I. Sharapudinov, *Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent*, Vladikavkaz: Russian Academy of Sciences, South Mathematical Institute, 2012.

[78] S. Warschawski, "Über das randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung," *Math. Z.*, **35**(1), 321–456, 1932.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Elife GÜRSEL

Doğum tarihi ve yeri : 18.04.1990-Kocasinan

e-posta : elife.yirtici@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2012-2015
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2008-2012
Lise	75. Yıl Cumhuriyet Lisesi	2004-2007

Yayın Listesi

[1] D. M. Israfilov, E. Yirtici, “Convolutions and Best Approximations in Variable Exponent Lebesgue Spaces,” *Mathematical Reports*, Vol. 18(68) No. 4, 497-508 2016.

[2] D. M. Israfilov, E. Yirtici, “On Some Properties of Convolutions in Variable Exponent Lebesgue Spaces,” *Complex Analysis and Operator Theory*, 1-8 2017, tezden türetilmiştir.

[3] D. M. Israfilov, E. Gursel and E. Aydın, “Maximal Convergence of Faber Series in Smirnov Classes with Variable Exponent,” *Bull. Braz. Math. Soc.*, New Series, DOI 10.1007/s00574-018-0086-8, 2018, tezden türetilmiştir.

[4] D. M. Israfilov, E. Gursel, “Faber-Laurent Series in Variable Smirnov Classes” *Turk. J. Math.*, accepted for publication, 2020.

[5] D. M. Israfilov, E. Gursel, “Approximation by $p(\cdot)$-Faber Polynomials in Variable Smirnov Classes,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* DOI 10.102/mmma.6282, 2020.