T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN GORENSTEIN TEKTERİMLİ EĞRİLER

AYŞE ÇALIŞKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Müge KANUNİ ER
Doç. Dr. Seher TUTDERE KAVUT

BALIKESİR, TEMMUZ - 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ayşe ÇALIŞKAN tarafından hazırlanan **"HEMEN HEMEN GORENSTEIN TEK TERİMLİ EĞRİLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22 Temmuz 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | İmza

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE
Balıkesir Üniversitesi
....

Üye
Prof. Dr. Müge KANUNİ ER
Düzce Üniversitesi
....

Üye
Doç. Dr. Seher TUTDERE KAVUT
Balıkesir Üniversitesi
....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**HEMEN HEMEN GORENSTEIN TEKTERİMLİ EĞRİLER**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ayşe ÇALIŞKAN

A. Ç

ÖZET

HEMEN HEMEN GORENSTEIN TEKTERİMLİ EĞRİLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
AYŞE ÇALIŞKAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ PINAR METE)

BALIKESİR, TEMMUZ - 2020

Tekterimli eğriler, geometri, cebir ve kombinatorik arasında bir bağlantı sağladıkları için eğrilerin önemli bir sınıfını oluştururlar. Bu, tekterimli eğriler ve sayısal yarıgruplar arasındaki ilişkinin doğrudan sonucudur. A_k^e afin uzayındaki C=C(n_1 ,…,n_e) tekterimli eğrisi, eğer S=< n_1 ,…,n_e > sayısal yarıgrubu hemen hemen simetrik ise, hemen hemen Gorenstein eğri olarak adlandırılır. Bu tezde, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar ele alınacaktır. Bu çalışma, sırasıyla Herzog-Watanabe' nin [9] hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar ve Eto' nun [13] hemen hemen Gorenstein tekterimli eğriler ile ilgili makalelerindeki sonuçların bir derlemesidir.

ANAHTAR KELİMELER: Hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup, RF-Matrisler, Tekterimli eğriler.

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 58

ABSTRACT

ALMOST GORENSTEIN MONOMIAL CURVES
MSC THESIS
AYŞE ÇALIŞKAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, JULY - 2020

Monomial curves constitute an important class of curves since they provide a link between geometry, algebra and combinatorics. This is a direct consequence of the relation between the monomial curves and numerical semigroups. The monomial curve $C=C(n_1, \ldots, n_e)$ in the affine space A_k^e is called almost Gorenstein, if the numerical semigroup $S=< n_1, \ldots, n_e >$ is almost symmetric. In this thesis, we revisit almost symmetric numerical semigroups. This study is a survey of the results of the papers of Herzog-Watanabe [9] and Eto [13] about almost symmetric numerical semigroups and Gorenstein monomial curves, respectively.

KEYWORDS: Almost symmetric numerical semigroup, RF-Matrices, Monomial curves.

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 58

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

S=< n_1 ,…, n_e >	: n_1 ,…,n_e sayıları ile üretilen sayısal yarıgrup
G(S)	: S' nin boşlukları
g(S)	: G(S)' nin eleman sayısı
F(S)	: S' nin Frobenius sayısı
PF(S)	: S' nin sözde-Frobenius sayılarının kümesi
t(S)	: S' nin tipi
$\leq_s$	: S üzerinde kısmi sıralama bağıntısı
Maksimaller $_{\leq S}$ **(**Z\ S**)**	: Z\ S ' nin $\leq_s$ kısmi sıralama bağıntısına göre maksimal elemanlarının kümesi
Ap(a,S)	: a' nın S içindeki Apery kümesi
K[S]	: S' nin yarıgrup halkası
I(S)	: k[S] yarıgrup halkasının ideali
der ϕ	: ϕ binomunun derecesi
UF	: Tek türlü faktorizasyon
RF(f)	: f' nin RF-matrisi
C=C(n_1 ,…,n_e)	: A_k^e afin uzayında tekterimli eğri
I(C)	: C' nin tanımlayan ideali
k[x_1 ,…,x_e]	: k cismi üzerinde x_1 ,…,x_e değişkenli polinom halkası
k[[x_1 ,…,x_e]]	: k cismi üzerinde x_1 ,…,x_e değişkenli kuvvet serileri halkası

ÖNSÖZ

Değişmeli cebir ve cebirsel geometrinin gizli dünyası ile tanıştırıp, ufkumu genişleten, tez çalışmamda, planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE' ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana güvenen, her zaman yanımda olan, en büyük destekçim canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Balıkesir, 2020 **Ayşe ÇALIŞKAN**

1. GİRİŞ

Tekterimli eğriler, önemli bir eğri sınıfını oluştururlar. Yarıgrup halkasına bağlı olarak tekterimli eğri ile toplamsal yarıgrup arasında bir bağlantı vardır. Bu açıdan, tekterimli eğriler, geometrik, cebirsel ve aritmetik tekniklerin uygulandığı ortak bir alan olarak görülmektedir. Tekterimli eğriler, tek bir tekil noktaya (orjinde) sahiptirler ve bu tekil noktanın ne kadar kötü olup olmadığı hala açık bir problemdir.

Simetrik sayısal yarıgrupların doğal bir genellemesi olan hemen hemen simetrik yarıgruplar, Barucci ve Fröberg [1] tarafından tanımlanmıştır ve oldukça ilginç özelliklere sahiptirler. Hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar, Nari [2] tarafından keşfedilen sözde-Frobenius sayılarının simetrisi ile ayırt edilirler. Hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar, sayısal yarıgruplardaki indirgenemezlik özelliğini genelleştirmelerinden dolayı son dönemlerde oldukça çalışılmaktadırlar. Yine, bir boyutlu halkalardaki Gorenstein özelliğinin bir genellemesi olmalarından dolayı doğal olarak ilgi çekicidirler. Pek çok çalışma, bu yarıgrup özelliklerinin nasıl oluşturulacağı ile ilgilidir.

2. Bölüm' de, hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplarının yapısı, Apery kümeleri ve sözde Frobenius sayıları kullanılarak çalışılmıştır.

3. Bölüm' de, ilk olarak sayısal yarıgrup halkalarının ideali tanıtılmış ve bu idealin üreteçlerinin nasıl bulunduğu çalışılmıştır. Yine, bu bölümde bir sayısal yarıgrubun minimal üretecine göre tek türlü faktorizasyonu tartışılmıştır.

4. Bölüm' de, hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların çalışılmasında önemli bir rolü olan ve bir sözde-Frobenius sayısana bağlı olan RF-matris kavramı detaylıca anlatılmaktadır.

5. Bölüm' de, tekterimli eğriler tanımlanarak Gorenstein ve hemen hemen Gorenstein tekterimli eğriler ve tanımlayan idealleri verilmiştir. Önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar hemen hemen Gorenstein tekterimli eğriler için kısaca açıklanmıştır.

2. HEMEN HEMEN SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Bu bölümde, sayısal yarıgruplar teorisinin temel kavramları ve örnekler verilecektir.

2.1 Sözde-Frobenius Sayıları ve Apery Kümeleri

2.1.1 Tanım. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayıların bir kümesi ve $S \subset \mathbb{N}$ olsun.

(i) $0 \in S$

(ii) $\forall\, x,\ y \in S$ için $x + y \in S$

(iii) $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu bir küme

şartlarını sağlayan S alt monoidine bir sayısal yarıgrup denir.

2.1.2 Örnek. $S = \langle\, 3, 5\,\rangle = \{\, 3x_1 + 5x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{N}\,\}$ kümesinin bir sayısal yarıgrup olup olmadığını inceleyelim.

(i) $x_1 = x_2 = 0 \in \mathbb{N}$ ve $0 = 3.0 + 5.0$ olduğundan $0 \in S$' dir.

(ii) $x, y \in S$ olsun. Bu durumda,

$x = 3x_1 + 5x_2$

$y = 3y_1 + 5y_2$

olacak şekilde x_1 , x_2 , y_1 , y_2 $\in$ $\mathbb{N}$ vardır.

$x + y = 3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2)$

$x_1 + y_1 = x' \in \mathbb{N}$, $x_2 + y_2 = y' \in \mathbb{N}$

olduğundan $x + y \in S$' dir.

(iii) $S = \langle\, 3, 5\,\rangle = \{\, 0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, ...\,\}$

olduğundan

$\mathbb{N} \backslash S = \{\, 1, 2, 4, 7\,\}$

kümesi olur ki, bu sonlu bir kümedir.

Böylece, S kümesi, $(i),(ii),(iii)$ koşullarını sağladığı için bir sayısal yarıgruptur.

S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda S' nin $i=1,2,...,i$ için n_i' ler pozitif tamsayılar olmak üzere, bir tek $\{n_1,n_2,...,n_e\}$ minimal üreteç kümesi vardır [3].

2.1.3 Not. S bir sayısal yarıgrup olsun.

$a \leq_s b \ \Leftrightarrow \ b-a \in S$

bağıntısı, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır :

• $a \ \in \ \mathbb{Z}$ için $0=a-a \ \in \ S \ \Rightarrow \ a \ \leq_S \ a$

• $a \ , \ b \ \in \ \mathbb{Z}$ için $a \ \leq_S \ b$ ve $b \ \leq_S \ a$ olsun.

$\Rightarrow \ b-a \ \in \ S$ ve $a-b \in S$

$\Rightarrow \ b-a=s_1 \ , \ s_1 \ \in \ S$

$a-b=s_2 \ , \ s_2 \ \in \ S$

$s_1=-s_2$ ve $S \ \subset \ \mathbb{N}$ olduğundan

$\Rightarrow \ s_1=0 \ \Rightarrow \ b-a=0 \ \Rightarrow \ a=b$

• $a \ , \ b \ , \ c \ \in \ \mathbb{Z}$ için $a \ \leq_S \ b$ ve $b \ \leq_S \ c$ olsun.

$a \ \leq_S \ b \ \Rightarrow \ b-a \ \in \ S$

$b \ \leq_S \ c \ \Rightarrow \ c-b \ \in \ S$

S bir sayısal yarıgrup olduğundan, (ii)' den

$(b-a)+(c-b)=c-a \ \in \ S$

elde edilir.

2.1.4 Tanım. S bir sayısal yarıgrup ve $\{n_1,n_2,...,n_e\}$, S' nin bir üreteç kümesi olsun. $h \in S$ alalım. Her $i=1,2,...,e$ için α_i' ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$h=\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2+...+\alpha_e n_e=\sum_{i=1}^{e}\alpha_i n_i$

olarak yazılabilir. h' nin bu gösterimine h' nin bir faktorizasyonu denir.

$\{n_1,n_2,..,n_e\}$ kümesi, S' nin bir üreteç kümesi ise, $S=\langle n_1,n_2,...,n_e\rangle$ şeklinde yazılır. Bu $\{n_1,n_2,..,n_e\}$ üreteç kümesinden n_i' lerin hiçbirisi çıkarılamıyor ise $\{n_1,n_2,..,n_e\}$ kümesine, S' nin minimal üreteç kümesi denir. S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümeleri tek türlüdür [3].

$S = \langle\, n_1, ..., n_e \rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun. $\{n_1, n_2, ..., n_e\}$ kümesinin S' nin minimal üreteç kümesi, $obeb(n_1, ..., n_e) = 1$ ve $S \neq \mathbb{N}$ olduğunu varsayalım.

2.1.5 Tanım. $G(S) = \mathbb{N} \backslash S$ kümesi üstteki kabulümüzden dolayı boş olmayan sonlu bir kümedir. Bu kümenin elemanlarına, S' nin boşlukları denir. $G(S)$' nin eleman sayısı $g(S)$ ile gösterilir. S' nin en büyük boşluğuna, S' nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir.

2.1.6 Örnek. $S = \langle\, 3, 5 \,\rangle = \{\, 0, 3, 5, 6, 8, 9, 10 \ \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.
S' nin boşluklarının kümesi,
$G(S) = \mathbb{N} \backslash S = \{\, 1, 2, 4, 7 \,\}$,
S' nin Frobenius sayısı
$F(S) = maks(\mathbb{N} \backslash S) = 7$
olarak bulunur.

2.1.7 Tanım. $S = \langle\, n_1, n_2, ...n_e \rangle$ bir sayısal yarıgrup ve $f \in \mathbb{Z} \backslash S$ olsun. $\forall\, i = 1, 2, ..., e$ için $f + n_i \in S$ ise, f elemanına bir sözde - Frobenius sayısı denir. Sözde - Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. Bu küme,
$PF(S) = \{\, f \notin S \mid f + n_i \in S \,,\ \forall\, i = 1, 2, ..., e \,\}$
olarakta yazılabilir.

S' nin Frobenius sayısı $F(S)$' yi alalım.
$F(S) = maks(\mathbb{N} \backslash S)$
olduğundan, $\forall\, i = 1, 2, ..., e$ için
$F(S) + n_i \in S$
olur. Bu Frobenius sayısının bir sözde-Frobenius sayısı olduğunu gösterir.
f , S' nin sözde - Frobenius sayısı olsun. 2.1.7 Tanım' dan $f \in G(S)$ olduğu açıktır .

2.1.8 Örnek. $S = \langle 5, 9, 21\rangle = \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. S' nin sözde - Frobenius sayılarını bulalım. S' nin boşlukları,

$G(S) = \mathbb{N}\backslash S = \{\ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 22\ \}$

kümesidir. Bu kümenin eleman sayısı

$g(S) = |G(S)| = 13$,

S' nin Frobenius sayısı,

$F(S) = maks(\mathbb{N}\backslash S) = 22$

olarak bulunur. $16\ \in\ G(S)$ ve

$16 + 5 = 21\ \in\ S$

$16 + 9 = 25\ \in\ S$

$16 + 21 = 37\ \in\ S$

olduğundan $16\ \in\ PF(S)$' dir. Ayrıca $F(S) = 22 \in PF(S)$ olduğunu biliyoruz. $x \in G(S)$ ve $x \neq 16$ ve $x \neq F(S)$ için $PF(S)$ tanımından, $x \notin PF(S)$ olduğu görülür. Bu durumda $PF(S) = \{16,\ 22\}$ olarak elde edilir.

2.1.9 Tanım. $PF(S)$ kümesinin eleman sayısına, S' nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir.

2.1.10 Örnek. $S = \langle 11, 13, 19, 36\rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. S' yi listelersek,

$S = \{0, 11, 13, 19, 22, 24, 26, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56 \rightarrow\}$

olarak yazılır.

$G(S) = \mathbb{N}\backslash S$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 31, 34, 40, 42, 53\}$

kümesi, S' nin boşluklarıdır.

$F(S) = maks(\mathbb{N}\backslash S) = 53$

S' nin Frobenius sayısıdır. $PF(S) = \{25, 28, 53\}$ kümesi, S' nin sözde - Frobenius sayılarının kümesidir ve eleman sayısı 3 olduğundan $t(S) = 3$ bulunur.

2.1.11 Not. $PF(S)$' nin elemanları, $(\mathbb{Z}\backslash S\ ,\ \leq_S)$ kısmi sıralı kümesi (poseti)' nin maksimal elemanlarıdır :

$(\mathbb{Z}\backslash S\ ,\ \leq_S)$ kısmi sıralı bir küme olduğunu göstermiştik. Eğer her $a\ ,\ b \in\ \mathbb{Z}\backslash S$ için $a\ \leq_S\ b$ veya $b\ \leq_S\ a$ ise, a ve b elemanlarına kıyaslanabilir denir. ($\mathbb{Z}\backslash S\ ,\ \leq_S)$ kısmi sıralı kümesinin bir B altkümesini alalım. $c \in B$ olsun. $c\ \leq_S\ b$ koşulunu sağlayan her $b\ \in\ B$ için $c = b$ oluyor ise, c' ye B' nin maksimal elemanı denir. $\mathbb{Z}\backslash S$' nin,

$PF(S) = \{\ x\ \in \mathbb{Z}\backslash S \mid x + n_i\ \in\ S\ ,\ \forall\ i = 1, 2, ..., e\ \}$

$= \{\ x\ \in \mathbb{Z}\backslash S \mid\ x + s\ \in S\ ,\ \forall\ s\ \in\ S\backslash\{0\}\}$

altkümesinin, S sayısal yarıgrubunun sözde - Frobenius sayılarının kümesi olduğunu biliyoruz. $\mathbb{Z}\backslash S$' nin $\leq_S$ kısmi sıralama bağıntısına göre maksimal elemanlarının kümesini $Maksimaller_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$PF(S) = Maksimaller_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$

eşitliğini ispatlayalım.

$x\ \in PF(S)$ olsun. $PF(S)$' nin tanımından, $\forall s \in S\backslash\{0\}$ için $x + s\ \in S$ olarak yazabiliriz. $y \in \mathbb{Z}\backslash S$ ve $x \leq_S y$ olduğunu varsayalım. Eğer $x \neq y$ ise $y - x \neq 0$ ve $x \leq_S y$ olmasından $y - x \in S$.

$\Rightarrow\ y - x = s\ ,\ s \in\ S\backslash\{0\}$

$\Rightarrow\ y = x + s\ ,\ s \in\ S\backslash\{0\}$

$\forall\ s \in S\backslash\{0\}$ için $x + s \in S$ olduğundan $y \in S$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda, $x = y$ olur. Böylece, maksimal eleman tanımından

$x\ \in\ Maksimaller_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$

elde edilir.

$x\ \in\ Maksimaller_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$ alalım. Bir $s \in S\backslash\{0\}$ için

$x + s \notin S$ olduğunu varsayalım.

$\Rightarrow\ x + s \in \mathbb{Z}\backslash S$

$(x + s) - x = s$ ve $s \in S\backslash\{0\}$ olmasından

$x\ \leq_S\ x + s$

olur. Fakat x, $\mathbb{Z}\backslash S$' nin maksimal elemanı olduğundan, maksimal eleman tanımından,

$x = x + s$

olmalıdır. $s\ \neq\ 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu durumda, $\forall\ s \in S\backslash\{0\}$ için $x + s\ \in\ S$ elde edilir.

Bu, $x \in PF(S)$ demektir.

2.1.12 Not. $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ olsun. Bu durumda $f - x \in S$ olacak şekilde $f \in PF(S)$ vardır :

$x \in \mathbb{Z}\backslash S$ olsun. $x \in PF(S)$ ise,

$0 = x - x \in S$

olduğundan iddia doğrudur. $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ ve $x \notin PF(S)$ olduğunu varsayalım.

$F(S) \in PF(S)$' dır.

$\Rightarrow F(S) \in Maksimaller_{\leq S}(\mathbb{Z}\backslash S)$

$\Rightarrow F(S) - x \in S$.

Sayısal yarıgruplar ile ilgilenenler için Apery kümeleri önemli araçlardan birisidir. S sayısal yarıgrubu ikiden fazla eleman tarafından üretildiğinde, bu grupların Frobenius sayılarını ve cinslerini veren genel bir formül bilinmemektedir. Bununla birlikte, yarıgrubun sıfır olmayan bir elemanının Apery kümesi biliniyor ise her iki invaryantta hesaplanabilmektedir.

Şimdi, Apery kümelerini kısaca tanıtalım.

2.1.13 Tanım. $a \in S$ olsun.

$Ap(a, S) = \{ s \in S \mid s - a \notin S \}$

kümesine, a' nın S içindeki Apery kümesi denir.

$|Ap(a, S)| = a$ [3] .

$0 \in S$ ve $0 - a \notin S$ olduğundan $0 \in Ap(a, S)$.

$S = \langle n_1, n_2, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubunda, $\forall\, i = 1, 2, ..., e$ için $n_i \in S$' dir.

$a \neq n_i$ alalım. $n_i - a \in S$ olduğunu varsayalım.

$\Rightarrow n_i - a = s$, $s \in S$

$\Rightarrow n_i = a + s$, $a \in S$ ve $s \in S$

olur. Bu, $n_i \in S$ elemanlarının, S' nin minimal elemanları olması ile çelişir.

$\Rightarrow n_i \in Ap(a, s)$

elde edilir.

Her $a \in S$ için $a + F(S)$, $Ap(a, S)$ kümesinin en büyük elemanıdır :
$a + F(S) + 1 \in Ap(A, S)$ olduğunu varsayalım.
$\Rightarrow (a + F(S) + 1) - a = F(S) + 1 \notin S$
Bu bir çelişkidir, çünkü $F(S)$, S' nin Frobenius sayısıdır.

2.1.14 Örnek. $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{ 0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16 \rightarrow \}$ sayısal yarıgrubunu ve $a = 5 \in S$ alalım.
$Ap\,(5, S) = \{ s \in S \mid s - 5 \notin S \} = \{ 0, 7, 9, 16, 18 \}$
olarak elde edilir.

2.2 Simetrik , Sözde - Simetrik ve Hemen Hemen Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Simetrik sayısal yarıgruplar, oldukça kullanışlı özelliklere sahip olmalarından dolayı oldukça çalışılmaktadırlar. Simetrik sayısal yarıgrupların doğal bir genellemesi olan hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplarında çok ilginç özellikleri vardır. Sözde-simetrik kavramı ise hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların özel bir sınıfıdır.

Şimdi, simetrik sayısal yarıgrup tanımını vermeden önce tanım için gerekli olan bir gözlem verelim.

$S = \langle n_1, n_2, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. Her $h \in S$ için $F(S) - h \notin S$ olduğunu görelim.
$F(S) - h \in S$ olsaydı , α_i ' ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere
$F(S) - h = \sum_i^e \alpha_i n_i$
$\Rightarrow F(S) = \sum_i^e \alpha_i n_i + h \in S$
olur ki bu bir çelişkidir.
Her $h \in S$ ve $h < F(S)$ için
$\phi : S \rightarrow \mathbb{Z} \backslash S$
$h \rightarrow F(S) - h$
dönüşümü tanımlanabilir. Böylece, $h < F(S)$ olan S' nin her h elemanı S' nin bir boşluğuna taşınabilir.

2.2.1 Tanım. S sayısal yarıgrup olsun. Her $h \in S$ için S' nin her boşluğu, $F(S) - h$ formunda ise, S' ye simetrik sayısal yarıgrup denir.

Bir başka deyişle,

S simetriktir $\Leftrightarrow$ $\{ a \in S \Leftrightarrow F(S) - a \notin S \}$,

ve buradan,

S simetriktir $\Leftrightarrow$ $g(S) = |\{ h \in S \mid h < F(S) \}|$

olduğunu elde ederiz.

2.2.2 Teorem. S bir sayısal yarıgrup olsun.

S simetriktir $\Leftrightarrow$ $g(S)$ tek sayı ve $2g(S) = F(S) + 1$.

İspat: [4].

$t(S)$, S sayısal yarıgrubunun tipi olmak üzere,

$2g(S) \geq F(S) + t(S)$

olduğunu biliyoruz [2] . Bu durumda, 2.2.2 Teorem' den $t(S) = 1$ olan sayısal yarıgruplar simetriktir diyebiliriz.

2.2.3 Tanım. S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer,

$2g(S) = F(S) + t(S)$

eşitliği var ise S' ye hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup denir.

2.2.4 Örnek. $S = \langle 11, 13, 19, 36 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım . S' yi listelersek,

$S = \{0, 11, 13, 19, 22, 24, 26, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,$
$52, 54, 55, 56 \rightarrow\}$

olarak yazılır. S' nin boşluklarının oluşturduğu küme

$G(S) =$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 31, 34, 40, 42, 53\}$

olarak bulunur. $g(S) = |G(S)| = 28$ ve $F(S) = 53$' dür.

$PF(S) = \{25, 28, 53\}$ olduğundan $t(S) = 3$' dür.

$2g(S) = 2.28 = 53 + 3 = F(S) + t(S)$

eşitliğinden S hemen hemen simetrik yarıgruptur.

2.2.5 Tanım. S bir hemen hemen simetrik yarıgrup ve $t(S) = 2$ olsun. Bu durumda, S' ye sözde - simetrik yarıgrup denir.

2.2.6 Not. S bir sözde-simetrik sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda, 2.2.5 Tanım' dan S hemen hemen simetrik ve $t(S) = 2$' dir.

$\Rightarrow \ |PF(S)| = 2$

$F(S) \in PF(S)$ olduğundan, f bir sözde-Frobenius sayısı olmak üzere

$PF(S) = \{ \ f \ , \ F(S)\}$

yazabiliriz. Şimdi, $f = \frac{F(S)}{2}$ olduğunu görelim.

$\frac{F(S)}{2} \ \notin \ S$' dir, çünkü $\frac{F(S)}{2} \ \in \ S$ olursa, bir $s \ \in S$ için

$\frac{F(S)}{2} = s$

$\Rightarrow \ F(S) = 2.s \ \in S$

elde edilir. Bu bir çelişkidir.

$\Rightarrow \ \frac{F(S)}{2} \ \in \ \mathbb{Z} \backslash S$

2.1.12 Not' tan

$f - \frac{F(S)}{2} \ \in \ S$

olacak şekilde $f \ \in \ PF(S)$ vardır.

$f = \frac{F(S)}{2}$ alırsak,

$f - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} - \frac{F(S)}{2} = 0 \ \in \ S$

sağlanır . Dolayısıyla , $\frac{F(S)}{2} \ \in \ PF(S)$ elde edilir. $f \neq \frac{F(S)}{2}$ ve $f \ \in \ PF(S)$ ise, bu durumda,

$PF(S) = \{ \ f \ , \ \frac{F(S)}{2} \ , \ F(S) \ \}$

olur. Buradan $|PF(S) = 3|$ elde edilir. Halbuki, S sözde - simetrik olduğundan $t(S) = 2$' dir. Böylece, $|PF(S)| = 3$ olamaz. Bu durumda, $f \neq \frac{F(S)}{2}$ ve $f \in PF(S)$ kabulü yanlıştır.

$\Rightarrow \ PF(S) = \{ \ \frac{F(S)}{2} \ , \ F(S) \ \}$

elde edilir.

2.2.7 Yardımcı Teorem. $f_1 < f_2 < ... < f_{t-1}$ olmak üzere

$PF(S) = \{ f_1 , f_2 , ... , f_{t-1} , F(S) \}$ olsun.

Bu durumda, S' nin hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul

$i = 1, 2, ..., t-1$ için

$f_i + f_{t-i} = F(S)$

olmasıdır.

İspat: [2] .

2.2.8 Örnek. 2.2.7 Yardımcı Teoremini örnek üzerinde görelim. $S = \langle 11, 13, 19, 36 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. 2.2.4 Örnek' ten, S' nin Frobenius sayısının $F(S) = 53$ ve sözde - Frobenius sayılarının $PF(S) = \{25, 28, 53\}$ olduğunu biliyoruz.

$f_1 = 25$, $f_2 = 28$ dersek,

$i = 1$ için $f_1 + f_2 = 25 + 28 = 53 = F(S)$

$i = 2$ için $f_2 + f_1 = 28 + 25 = 53 = F(S)$

olduğu görülür. Böylece, S bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

3. SAYISAL YARIGRUPLARDA FAKTORİZASYON

Bu bölümde, ilk olarak bir sayısal yarıgrubun idealini ve S sayısal yarıgrubunun bir minimal üretecine göre tek türlü faktorizasyonunu çalışıyoruz.

3.1 Sayısal Yarıgrup Halkasının İdeali

3.1.1 Tanım. Bir k sonsuz cismi üzerindeki A vektör uzayı, her x , y , $z \in A$ ve α , $\beta \in k$ için,

(i) $xy = yx$

(ii) $x(yz) = (xy)z$

(iii) $x(y + z) = xy + xz$

(iv) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

(v) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

özelliklerini sağlıyor ise , A ' ya değişmeli k -cebiri denir .

3.1.2 Tanım. A ve B , bir k cismi üzerinde k -cebirleri ve $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Her x , $y \in A$ ve $c \in k$ için

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(x.y) = f(x).f(y)$

(iii) $f(c.x) = c.f(x)$

özelliklerini sağlayan f fonksiyonuna k -cebir homomorfizması denir.

t, k cismi üzerinde bir bilinmeyen olsun. $S =< n_1, ..., n_e >$ sayısal yarıgrubunun $k[S]$ yarıgrup halkası,

$k[S] := k[t^{n_1}, ..., t^{n_e}] \ \subset \ k[t]$

olarak tanımlanır.

$k[x_1, ..., x_e]$, k cismi üzerinde $x_1, ..., x_e$ bilinmeyenli polinom halkası olsun.

$\pi \ : \ k[x_1, x_2, ..., x_e] \ \rightarrow \ k[S]$

$x_i \rightarrow t^{n_i}$, $i = 1, 2, ..., e$

bir örten k -cebiri homomorfizmasıdır.

çek $\pi = \{ \ f \ \in \ k[x_1, ..., x_e] \mid \pi(f) = 0 \ \}$.

İdeali, çek $\pi = \mathbf{I}_s$ olarak gösterilir.

3.1.3 Tanım. $\mathbf{I}_s$ idealine , $k[S]$ halkasının tanımlayan ideali denir.

$\mathbf{I}_s$ bir homojen idealdir ve binomlar tarafından üretilir [11] .

3.1.4 Not. $\phi = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\alpha i} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\beta_i}$ binomunu alalım.

$\phi \ \in \ \mathbf{I}_s \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = \sum_{i=1}^{e} \beta_i n_i$

olduğunu görelim.

$\phi \ \in \ \mathbf{I}_s \ \Leftrightarrow \ \phi \ \in$ Çek π

$\Leftrightarrow \ \pi(\phi) = 0_{k[s]}$

$\Leftrightarrow \ \pi \ (\ x_1^{\alpha_1} ... \ x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} ... \ x_e^{\beta_e}) = 0$

$\Leftrightarrow \ (t^{n_1})^{\alpha_1} ... \ (t^{n_e})^{\alpha_e} - (t^{n_1})^{\beta_1} ... \ (t^{n_e})^{\beta_e} = 0$

$\Leftrightarrow \ t^{\alpha_1 n_1 + ... + \alpha_e n_e} = t^{\beta_1 n_1 + ... + \beta_e n_e}$

$\Leftrightarrow \ \sum_{i}^{e} \alpha_i n_i \ = \ \sum_{1}^{e} \beta_i n_i$.

Burada, ϕ ' nin derecesi,

$der \ (\phi) = \sum_{i}^{e} \alpha_i n_i$

olur.

3.1.5 Örnek. $S = \langle \ 22, 28, 47, 53 \ \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. Burada,

$n_1 = 22$, $n_2 = 28$, $n_3 = 47$, $n_4 = 53$ olur.

$PF(S) = \{ \ f \ \notin \ S \mid f + n_i \ \in \ S \ , \ \forall \ i = 1, 2, 3, 4 \ \}$ eşitliğinden,

$PF(S) = \{ \ 25, 258, 283 \ \}$.

$f_1 = 25$, $f_2 = 258$, $F(S) = 283$ ve $f_1 + f_2 = 25 + 258 = 283$

olmasından 2.2.7 Yardımcı Teorem' den S hemen hemen simetriktir ve $t(S) = 3$' dür.

Şimdi, $\mathbf{I}_s$ idealinin elemanlarını bulmaya çalışalım. 3.1.4 Not' tan,

$\phi \in \mathbf{I}_s \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \alpha_i n_i = \sum_{i=1}^{4} \beta_i n_i$

olduğunu biliyoruz.

$1.22 + 1.53 = 1.28 + 1.47$

eşitliğinden

$\alpha_1 n_1 + \alpha_4 n_4 = \beta_2 n_2 + \beta_3 n_3$

elde edilir. Bu,

$\phi = x_1^{\alpha_1} x_4^{\alpha_4} - x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}$

$\phi = x_1 x_4 - x_2 x_3$

demektir. Böylece,

$\phi = x_1 x_4 - x_2 x_3 \in \mathbf{I}_s$

bulunur. Benzer şekilde,

$x_1 x_2^3 - x_4^2$, $x_1^2 x_2^2 - x_3 x_4$, $x_1^{13} x_3 - x_2^{10} x_4$, $x_1^{14} - x_2^{11}$, $x_1^3 x_2 - x_3^2 \in \mathbf{I}_s$

elde edilir.

3.2 Tek Türlü Faktorizasyon (UF)

Bu bölümde, S sayısal yarıgrubunun bir minimal üretecine göre, tek türlü faktorizasyonunu çalışıyoruz.

$PF'(S) = PF(S) \backslash \{ F(S) \}$ olsun.

3.2.1 Yardımcı Teorem. $a \in S$ ve $h \in Ap\,(a, S)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) h , $h' \in S$ ve eğer $h + h' \in Ap\,(a, S)$ ise $h, h' \in Ap\,(a, S)$.

(ii) S hemen hemen simetrik olsun. $h \in Ap\,(a, S)$ ise,

$(a + F(S)) - h \in Ap\,(a, S)$ veya $h - a \in PF'(S)$.

İspat: (i) h , $h' \notin Ap\,(a,S)$ olduğunu varsayalım.

$h \notin Ap\,(a,S) \Rightarrow h-a \in S$

$h' \notin Ap\,(a,S) \Rightarrow h'-a \in S$

yazabiliriz. S bir sayısal yarıgrup olduğundan

$(h-a)+(h'-a)=(h+h')-2a \in S$

olur. $a \in S$ olduğundan,

$(h+h')-2a+a \in S$

$\Rightarrow (h+h')-a \in S$

ve Apery kümesi tanımından,

$h+h' \notin Ap\,(a,S)$

elde edilir. Bu, $h+h' \in Ap\,(a,S)$ olmasıyla çelişir. Böylece, h , $h' \in Ap\,(a,S)$ olur.

(ii) Her $a \in S$ için $a+F(S) \in Ap\,(a,S)$ olduğunu biliyoruz. $h \in Ap\,(a,S)$ iken

$(a+F(S))-h \in Ap\,(a,S)$

veya

$(a+F(S))-h \notin Ap\,(a,S)$

olabilir. Varsayalım ki, $(a+F(S))-h \notin Ap\,(a,S)$ olsun. Eğer,

$(a+F(S))-h \notin S$

ise,

$(a+F(S))-h \in \mathbb{Z}\backslash S$

olur. 2.1.12 Not' tan

$f-(a+F(S))-h \in S$ olacak şekilde $f \in PF(S)$ vardır. $h' \in S$ olmak üzere

$f-(a+F(S)-h)=h'$

$\Rightarrow f=(a+F(S)-h)+h'$.

$h \in Ap\,(a,S)$ olmasından $h-a \notin S$' dir.

$f=(a+F(S)-h)+h'$

ifadesi $F(S)$' ye eşit değildir çünkü, $f=F(S)$ olsaydı,

$F(S)=a+F(S)-h+h'$

$\Rightarrow h-a=h'$

ve $h' \in S$ olmasından $h-a \in S$ çelişkisi elde edilirdi.

$\Rightarrow\ f \neq F(S)$

S hemen hemen simetrik olmasından, 2.2.7 Yardımcı Teorem gereği,

$F(S) - f = f'\ ,\ f' \in PF'(S)$

$\Rightarrow\ f' = F(S) - [(a + F(S)) - h + h']$

$f' = (h - a) - h'\ \in\ PF'(S)$

$f' = (h - a) - h'$

$f'\ \in\ PF'(S)$ ve $h'\ \in\ S$

$\Rightarrow\ f' + h'\ \in\ S$

olmalıdır, fakat $h - a\ \notin\ S$ olduğundan

$h' = 0$

olur. Bu $f' = h - a$, ve buradan $h - a\ \in\ PF'(S)$ demektir.

$h - a \in PF'(S)\ \Leftrightarrow\ (a + F(S)) - h \in PF(S)$

$h - a \in PF'(S) = PF(S) \backslash \{F(S)\}$ ise , bir $f \in PF'(S)$ için $h - a = f$ olur. 2.2.7 Yardımcı Teorem' den

$f + f' = F(S)\ ,\ f' \in PF'(S)$

$\Rightarrow\ F(S) - f = f'$

$\Rightarrow\ F(S) - (h - a) = f'$

$\Rightarrow\ f' = (F(S) + a) - h \in PF'(S)$

Diğer taraftan, $(a + F(S)) - h \in PF(S)$ ise, yine 2.2.7 Yardımcı Teorem' den,

$F(S) - (a + F(S) - h) \in PF'(S)$

$\Rightarrow\ F(S) - a - F(S) + h \in PF'(S)$

$\Rightarrow\ h - a \in PF'(S)$

elde edilir.

3.2.2 Tanım. $S = \langle\ n_1, ..., n_e\ \rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun. Her $1 \leq i \leq e$ için

$\alpha_i n_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{e} \alpha_{ij} n_j$

ve α_i' ler minimal pozitif tamsayılar olacak şekilde α_i sayılarını tanımlayabiliriz. Genellikle, α_{ij}' ler tek türlü değildir.

3.2.3 Örnek. $S = \langle\ 6, 7, 9, 10\ \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. $n_2 = 7 \in S$ için

$\alpha_2 n_2 = \alpha_{21} n_1 + \alpha_{23} n_3 + \alpha_{24} n_4$

eşitliğinde, $\alpha_2 = 4$ minimal sayısı için, α_{ij}' ler

$\alpha_2 n_2 = 4.7 = 3.6 + 0.9 + 1.10$

$\alpha_2 n_2 = 4.7 = 0.6 + 2.9 + 1.10$

olarak iki türlü yazılabilir.

3.2.4 Yardımcı Teorem. $1 \leq i$, $k \leq e$ için $i \neq k$ olan her i, k tamsayıları için, $(\alpha_i - 1)n_i \in Ap(n_k, S)$.

İspat: $Ap(n_k, S) = \{ h \in S \mid h - n_k \notin S \}$ olduğunu biliyoruz.

$i < k$ olsun. $(\alpha_i - 1)n_i \notin Ap(n_k, S)$ olduğunu varsayalım.

$\Rightarrow$ $(\alpha_i - 1)n_i - n_k \in S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$

$\Rightarrow$ $(\alpha_i - 1)n_i = \gamma_1 n_1 + ... + \gamma_i n_i + ... + \gamma_k n_k + ... + \gamma_e n_e + n_k$

olacak şekilde negatif olmayan γ_i tamsayıları vardır.

$\Rightarrow$ $(\alpha_i - 1)n_i = \gamma_1 n_1 + ... + \gamma_i n_i + ... + (\gamma_k + 1)n_k + ... + \gamma_e n_e$

$\Rightarrow$ $(\alpha_i - 1)n_i - \gamma_i n_i = \gamma_1 n_1 + ... + \gamma_{i-1} n_{i-1} + \gamma_{i+1} n_{i+1} + ... + (\gamma_k + 1)n_k + ... + \gamma_e n_e$

$\Rightarrow$ $(\alpha_i - \gamma_i - 1)n_i = \gamma_1 n_1 + ... + \gamma_{i-1} n_{i-1} + \gamma_{i+1} n_{i+1} + ... + (\gamma_k + 1)n_k + ... + \gamma_e n_e$

elde edilir. Burada, $\beta_i = \alpha_i - \gamma_i - 1$ alırsak,

$0 < \beta_i < \alpha_i$ ve $i \neq k$ için $\beta_{ij} = \gamma_i$, $i = k$ için $\beta_{ij} = \gamma_k + 1$ olmak üzere

$\beta_i n_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{e} \beta_{ij} n_j$

elde edilir. Ancak, bu 3.2.2 Tanım' daki $\alpha_i n_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{e} \alpha_{ij} n_j$ eşitliğini sağlayan α_i' lerin minimal olması ile çelişir. Varsayım yanlıştır. Böylece, $(\alpha_i - 1)n_i \in Ap(n_k, S)$ olur.

3.2.5 Tanım. $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$, $\{ n_1, ..., n_e \}$ sayıları ile minimal olarak üretilen bir sayısal yarıgrup olsun. $h \in S$' nin bir tek faktorizasyonu var ise, h' ye UF' ye sahiptir denir. Bir başka ifadeyle, $h \in S$' nin bir tek faktorizasyonu var ise,

$h = \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i$ eşitliğinde $\alpha_i \geq 0$ tamsayıları tek türlüdür.

3.2.6 Örnek. $S = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. $h = 20 \in S$ elemanı

$20 = 0.6 + 0.7 + 0.9 + 2.10$

$20 = 1.6 + 2.7 + 0.9 + 0.10$

olarak iki türlü yazılabileceğinden $h = 20 \in S$' nin tek türlü faktorizasyonu yoktur.

3.2.7 Not. $h \in S$' nin tek türlü faktorizasyonu olmadığını varsayalım. α_i , $\beta_i \geq 0$ olmak üzere

$h = \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = \sum_{i=1}^{e} \beta_i n_i$

olarak yazabiliriz. Bu durumda, bir $\phi = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\beta_i} \in \mathbf{I}_S$ için

$h - \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = 0$ ' dir.

$\phi \in \mathbf{I}_S$ için $h - der(\phi) \in S$' dir. Çünkü $h = der(\phi)$ ise $h - der(\phi) = 0$ olur. Bu durumda $\phi \in \mathbf{I}_S$ için $der(\phi) \leq_S h$' dir.

$\mathbf{I} = \{h \in S \mid h'nin\ UF'si\ yoktur.\}$ kümesini alalım. **I**' nın S' nin bir ideali olduğunu gösterelim :

$h_1, h_2 \in \mathbf{I}$ olsun. **I**' nın tanımından,

h_1 ve h_2' nin UF' leri yoktur. 3.2.7 Not' tan, $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{I}_S$ için $h_1 \geq_S der(\phi_1)$ ve

$h_2 \geq_S der(\phi_2)$ yazabiliriz. Burada,

$\phi_1 = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\beta_i}$, $der(\phi_1) = \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i$

$\phi_2 = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\overline{\alpha_i}} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\overline{\beta_i}}$, $der(\phi_2) = \sum_{i=1}^{e} \overline{\alpha_i} n_i$.

$h_1 + h_2 \in \mathbf{I}$ olduğunu görmek için, bir $\phi \in \mathbf{I}_S$ olmak üzere $h_1 + h_2 \geq_S der(\phi)$ olmalıdır.

$\phi = \phi_1 \phi_2$ alırsak, $\phi_1 \in \mathbf{I}_S$, $\phi_2 \in \mathbf{I}_S$ ve $\mathbf{I}_S$ ideal olduğundan $\phi_1 \phi_2 \in \mathbf{I}_S$' dir. Yine,

$der(\phi_1 \phi_2) = der(\phi_1) + der(\phi_2)$

$(h_1 + h_2) - der(\phi) = (h_1 + h_2) - der(\phi_1 \phi_2)$

$= (h_1 + h_2) - (der(\phi_1) + der(\phi_2))$

$= (h_1 - der(\phi_1)) + (h_2 - der(\phi_2))$

$h_1 \geq_S der(\phi_1)$' den $h_1 - der(\phi_1) \in S$

$h_2 \geq_S der(\phi_2)$' den $h_2 - der(\phi_1) \in S$

olmasından,

$(h_1 - der(\phi_1)) + (h_2 - der(\phi_2)) \in S$

elde edilir. Böylece, $h_1 + h_2 \in \mathbf{I}$ bulunur.

$h \in S$, $h_1 \in \mathbf{I}$ olsun. $h.h_1 \in \mathbf{I}$ göstermek için bir $\phi \in \mathbf{I}_S$ olmak üzere $h.h_1 \geq_S der(\phi)$ olmalıdır. $h_1 \in \mathbf{I}$' dan h_1' in UF' si yoktur ve 3.2.7 Not' tan bir $\phi_1 \in \mathbf{I}_S$ için $h_1 \geq_S der(\phi_1)$

yazabiliriz.

$\phi = (\phi_1)^h$ alalım. Yine $\mathbf{I}_S$ ideal olduğundan $(\phi_1)^h \in \mathbf{I}_S$' dir.

$der(\phi) = der(\phi_1)^h = der(\underbrace{\phi_1\phi_1...\phi_1}_{h-kere})$

$= \underbrace{der(\phi_1) + ... + der(\phi_1)}_{h-kere}$

$= h.der(\phi_1)$

$h.h_1 - der(\phi) = h.h_1 - h(der(\phi_1))$

$= h(h_1 - der(\phi_1))$

$h_1 \geq_S der(\phi_1)$' den $h_1 - der(\phi_1) \in S$

$\Rightarrow (\underbrace{h_1 - der(\phi_1)) + ... + (h_1 - der(\phi_1)}_{h-kere}) \in S$

$\Rightarrow hh_1 - der(\phi) \in S$

$\Rightarrow hh_1 \geq_S der(\phi)$

3.2.8 Not. Şimdi, $\mathbf{I} = \{\ h \in S \mid h'nin\ UF'si\ yoktur\ \}$ ve $\{\ der(\phi) \mid \phi \in \mathbf{I}_S\ \}$ kümelerinin aynı olduklarını görelim :

$h \in \mathbf{I}$ olsun. $\mathbf{I}$' nın tanımından

$\Leftrightarrow$ h'nin UF' si yoktur.

$\Leftrightarrow h = \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = \sum_{i=1}^{e} \beta_i n_i$ olacak şekilde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ vardır.

$\Leftrightarrow h - \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = 0$, $\phi = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\beta_i}$

$\Leftrightarrow$ $h - der(\phi) = 0$

$\Leftrightarrow$ $h = der(\phi)$, $\phi \in \mathbf{I}_S$

Böylece, $\mathbf{I} = \{\ der(\phi) \mid \phi \in \mathbf{I}_S\ \}$ elde edilmiş olur.

3.2.9 Yardımcı Teorem. $\phi = m_1 - m_2$, $\mathbf{I}_S$ idealinin bir minimal binom üreteci olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır :

(i) $der(\phi) \leq_S f + n_i + n_j$ olacak şekilde $i \neq j$ tamsayıları ve $f \in PF(S)$ vardır.

(ii) i ve j tamsayıları $x_i | m_1$ ve $x_j | m_2$ olacak şekilde olsunlar. Bu durumda bir $f \in PF'(S)$ için

$der(\phi) = f + n_i + n_j \Leftrightarrow F(S) + n_i + n_j - der(\phi) \notin S$' dir.

İspat: (i) $\phi = \prod_{i=1}^{e} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{e} x_i^{\beta_i}$

$\phi = x_1^{\alpha_1} ... \, x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} ... \, x_e^{\beta_e}$

binomunun $\mathbf{I}_S$' nin elemanı olması için gerek ve yeterli şartın $\sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = \sum_{i=1}^{e} \beta_i n_i$ ve $der(\phi) = \sum_{i=1}^{e} \alpha_i n_i = \alpha_1 n_1 + ... + \alpha_e n_e$ olduğunu biliyoruz.

$m_1 = x_1^{\alpha_1} ... \, x_e^{\alpha_e}$ ve $m_2 = x_1^{\beta_1} ... \, x_e^{\beta_e}$ olsun. $x_i | m_1$ ve $x_j | m_2$ olacak şekilde i ve j tamsayıları seçelim. $i \lneqq j$ olsun.

$der(\phi) - n_i - n_j = \alpha_1 n_1 + ... + \alpha_i n_i + ... + \alpha_j n_j + ... + \alpha_e n_e - n_i - n_j \in S$ olduğunu varsayalım.

$h = \alpha_1 n_1 + ... + \alpha_i n_i + ... + \alpha_j n_j + ... + \alpha_e n_e - n_i - n_j$ dersek, $der(m) = h$ olacak şekilde bir $m = x_1^{\alpha_1} ... \, x_i^{\alpha_i - 1} ... \, x_j^{\alpha_j - 1} ... \, x_e^{\alpha_e}$ monomu vardır.

$der(m) + n_j = h + n_j$

$= \alpha_1 n_1 + ... + \alpha_i n_i + ... + \alpha_j n_j + ... + \alpha_e n_e - n_i - n_j + n_j$

$= \alpha_1 n_1 + ... + (\alpha_i - 1) n_i + ... + \alpha_e n_e$

$\frac{m_1}{x_i} = \frac{x_1^{\alpha_1} ... \, x_i^{\alpha_i} ... \, x_j^{\alpha_j} ... \, x_e^{\alpha_e}}{x_i} = x_1^{\alpha_1} ... \, x_i^{\alpha_i - 1} ... \, x_e^{\alpha_e}$ olduğuna dikkat edersek,

$der(\frac{m}{x_i}) = \alpha_1 n_1 + ... + (\alpha_i - 1) n_i + ... + \alpha_j n_j + ... + \alpha_e n_e$

$= \alpha_1 n_1 + ... + (\alpha_i - 1) n_i + ... + (\alpha_j - 1) n_j + ... + \alpha_e n_e + n_j$

$= der(m) + n_j$

Bu eşitlikten, $der(m) + n_j = der(\frac{m_1}{x_i})$

$\Rightarrow \; m.x_j - \frac{m_1}{x_i} \in \mathbf{I}_S$

elde edilir. Benzer şekilde $m.x_i - \frac{m_2}{x_j} \in \mathbf{I}_S$ bulunabilir. $\mathbf{I}_S$ bir ideal olduğundan

$x_i(m.x_j - \frac{m_1}{x_i}) + x_j(m.x_i - \frac{m_2}{x_j}) \in \mathbf{I}_S$

$\Rightarrow \; x_i[(x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i - 1} ... x_j^{\alpha_j - 1} ... x_e^{\alpha_e}) x_j - \frac{x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i}}{x_i}] + x_j[(x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i - 1} ... x_j^{\alpha_j - 1} ... x_e^{\alpha_e}) x_i - \frac{x_1^{\beta_1} ... x_j^{\beta_j} ... x_e^{\beta_e}}{x_j}]$

$= x_1^{\alpha_1} ... \, x_i^{\alpha_i} ... \, x_j^{\alpha_j} ... \, x_e^{\alpha_e} - x_1^{\alpha_1} ... \, x_i^{\alpha_i} ... \, x_e^{\alpha_e} + x_1^{\alpha_1} ... \, x_i^{\alpha_i} ... \, x_j^{\alpha_j} ... \, x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} ... \, x_j^{\beta_j} ... \, x_e^{\beta_e}$

$= x_1^{\alpha_1} ... \, x_e^{\alpha_e} - x_1^{\beta_1} ... \, x_e^{\beta_e} = \phi$

eşitliği bize, ϕ' nin $m.x_j - \frac{m_1}{x_i}$ ve $m.x_i - \frac{m_2}{x_j}$ binomları tarafından elde edilebileceğini söyler. Bu, ϕ' nin $\mathbf{I}_S$' nin minimal binom üreteci olması ile çelişir. Bu durumda, $der(\phi) - n_i - n_j \notin S$ olmalıdır.

$\Rightarrow \; der(\phi) - n_i - n_j \in \mathbb{Z} \backslash S$

2.1.2 Not' tan, $f - (der(\phi) - n_i - n_j) \in S$ olacak şekilde bir $f \in PF(S)$ vardır.

$\Rightarrow \; der(\phi) \leq_S f + n_i + n_j$.

(ii) İspatın (i) şıkkından $der(\phi) - n_j - n_i \notin S$ olduğunu biliyoruz. Bunu ve

$Ap(n_i, S) = \{ h \in S \mid h - n_i \notin S \}$

tanımını gözönüne alırsak, $der(\phi) - n_j \in Ap(n_i, S)$ elde edilir. 3.2.1 Yardımcı Teorem' de,

$a = n_i \in S$ ve $h = der(\phi) - n_j \in Ap(n_i, S)$ alırsak,

$h - a \in PF'(S) \Leftrightarrow (a + F(S)) - h \in PF(S)$

ifadesinden, bir $f \in PF'(S)$ için $der(\phi) = f + n_i + n_j$ olmasından

$\underbrace{der(\phi) - n_j}_{h} - \underbrace{n_i}_{a} = f \in PF'(S)$

$\Leftrightarrow (F(S) + n_i) - (der(\phi) - n_j) \in PF(S)$

elde edilir.

$f \in PF(S)$ olmak üzere, $f + n_k$ elemanlarının faktorizasyonları, $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubunun yapısının anlaşılmasında önemli bir rol oynamaktadır.

3.2.10 Yardımcı Teorem. $f \in PF(S)$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır :

(i) $f + n_k = \sum_{j \neq k} \beta_j n_j$ ve bir i için $\beta_i \geq \alpha_i$ ise, $\alpha_{ik} = 0$ ' dır.

(ii) Bir $k \neq i$ için $f + n_k = b_i n_i$ ise, $b_i \geq \alpha_i - 1$ ' dir.

(iii) Bir $k \neq i$ için $f + n_k \leq_S (\alpha_i - 1)n_i$ ise, $f + n_k = (\alpha_i - 1)n_i$.

İspat: (i) 3.2.2 Tanım' dan, $\alpha_i n_i = \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} n_k$ olacak şekilde α_i minimal pozitif tamsayılarının olduğunu biliyoruz.

$\Rightarrow \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} n_k - \alpha_i n_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} n_k - \alpha_i n_i + \beta_i n_i = \beta_i n_i$

$\Rightarrow \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} n_k + (\beta_i - \alpha_i) n_i = \beta_i n_i$

Bunu, $f + n_k = \sum_{j \neq k\ ,\ j \neq i} \beta_j n_j + \beta_i n_i$ eşitliğinde yerine yazarsak

$f + n_k = \sum_{j \neq k\ ,\ j \neq i} \beta_j n_j + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} n_k + (\beta_i - \alpha_i) n_i$

$\Rightarrow f = \sum_{i \neq k\ ,\ j \neq i} \beta_j n_j + \sum_{k \neq i} (\alpha_{ik} - 1) n_k + (\beta_i - \alpha_i) n_i$

olur. Eğer $\alpha_{ik} \geq 1$ olursa $f \in S$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda, $\alpha_{ik} = 0$ olmalıdır.

(ii) Bir $k \neq i$ için $f + n_k = b_i n_i$ olsun. Eşitliğin her iki tarafına n_i ekleyelim.

$\Rightarrow (f + n_i) + n_k = b_i n_i + n_i = (b_i + 1) n_i$

Bir $j \neq i$ için $f + n_i = \sum_{j \neq i} c_j n_j$ olduğundan,

$(b_i + 1)n_i = \sum_{j \neq i} c_j n_j + n_k$

olur. Eşitliğin sağ tarafında n_i'li terim yoktur. Bu durumda 3.2.2 Tanım' dan $b_i + a \geq \alpha_i$ olmalıdır.

(iii) Bir $k \neq i$ için $f + n_k \leq_S (\alpha_i - 1)n_i$ olsun.

$\Rightarrow (\alpha_i - 1)n_i - (f + n_k) = h \;,\; h \in S$

$\Rightarrow (\alpha_i - 1)n_i = f + n_k + h \;,\; h \in S$

$f \in PF(S)$ olmasından, f bir sözde-Frobenius sayısıdır. Bu durumda, 2.1.7 Tanım' dan, β_j' ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $f + n_k = \sum_j \beta_j n_j$ olur. Yine,

$h \in S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ olmasından da γ_j' ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$h = \sum_j \gamma_j n_j$ yazılır.

$\Rightarrow f + n_k + h = \sum_j \beta_j n_j + \sum_j \gamma_j n_j$

$= \sum_{j \neq i}(\beta_j + \gamma_j)n_j + \beta_i n_i + \gamma_i n_i$

$f + n_k + h = (\alpha_i - 1)n_i$ eşitliğini kullanırsak,

$(\alpha_i - 1) = \sum_{j \neq i}(\beta_j + \gamma_j)n_j + \beta_i n_i + \gamma_i n_i$

$\Rightarrow (\alpha_i - 1)n_i - \beta_i n_i - \gamma_i n_i = \sum_{j \neq i}(\beta_j + \gamma_j)n_j$

$\Rightarrow (\alpha_i - 1 - \beta_i - \gamma_i)n_i = \sum_{j \neq i}(\beta_j + \gamma_j)n_j$

3.2.2 Tanım' daki α_i' lerin minimal olmasından $\alpha_i - 1 - \beta_i - \gamma_i = 0$ ve $j \neq i$ için $\beta_j = 0$ elde edilir.

$f + n_k = \sum_j \beta_j n_j = \beta_i n_i$

$\alpha_i - 1 - \beta_i - \gamma_i = 0 \;\Rightarrow\; \beta_i = (\alpha_i - 1) - \gamma_i$

$\Rightarrow \beta_i \leq \alpha_i - 1$

bulunur. $f + n_k = \beta_i n_i$ ve (ii)'den $\beta_i \geq \alpha_i - 1$ olur. Böylece, $\beta_i = \alpha_i - 1$' dir.

$f + n_k = \beta_i n_i = (\alpha_i - 1)n_i$

elde edilir.

S bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda $f + n_k$ elemanın faktorizasyonu hakkında daha fazlasını söyleyebiliriz.

3.2.11 Yardımcı Teorem. $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun ve $f \in PF'(S)$ olsun.

(i) $\beta_i > 0$ için $f + n_k = \sum_{j \neq k} \beta_j n_j$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $j \neq i$ için $a_j \geq \beta_j$ ve $\beta_i = a_i + 1$ olacak şekilde $F(S) + n_k$ ' nın bir $F(S) + n_k = \sum_{j \neq k} a_j n_j$ faktorizasyonu vardır.

(ii) $F(S) + n_k$' nın $F(S) + n_k = \sum_{j \neq k} a_j n_j$ olarak bir UF' si olduğunu varsayalım. Bu durumda, bir $i \neq k$ için $f + n_k = (a + 1)n_i$' dir.

İspat: (i) $h = (f + n_k - n_i)$ alalım. $\beta_i > 0$ iken $f + n_k = \sum_{j \neq k} \beta_j n_j$ olduğunu varsaymıştık. Buradan, $h = \sum_{j \neq k} \beta_j n_j - n_i$

$= \sum_{j \neq k, j \neq i} \beta_j n_j + (\beta_i n_i - n_i)$

$\Rightarrow \; h = \sum_{j \neq k, j \neq i} \beta_j n_j + (\beta_i - 1)n_i$

yazılır. $\beta_i > 0$ iken $\beta_i - 1 \geq 0$ olacağından $h \in S$ olur.

$h = (f + n_k) - n_i$ eşitliğinden,

$\Rightarrow \; f + n_k = h + n_i$

$\Rightarrow \; F(S) + n_k + f = h + F(S) + n_i$

$\Rightarrow \; F(S) + n_k = h + (F(S) - f) + n_i$

bulunur. S hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olduğundan 2.2.7 Yardımcı Teorem gereğince $F(S) - f \in PF'(S)$ olur. Şimdi, $(F(S) - f) + n_i$' nin faktorizasyonunda n_i elemanının olamayacağını görelim. $F(S) - f \in PF'(S)$' den $f' \in PF'(S)$ olmak üzere $F(S) - f = f'$ alabiliriz. Tersini kabul edelim.

$\Rightarrow \; F(S) - f + n_i = \sum_{j=1}^{e} \alpha_j n_j$ ve $\alpha_i \geq 1$

olsun.

$\Rightarrow \; f' + n_i = \sum_{j=1, j \neq i} \alpha_j n_j + \alpha_i n_i$

$\Rightarrow \; f' = \sum_{j=1, j \neq i} \alpha_j n_j + (\alpha_i - 1)n_i$

ve $\alpha_i \geq 1$ olmasından $\alpha_i - 1 \geq 0$. Buradan, $f' \in S$ olur ki bu bir çelişkidir.

Böylece, $(F(S) - f) + n_i$' nin faktorizasyonunda n_i olamaz. $\gamma_j \geq 0$ olmak üzere,

$(F(S) - f) + n_i = \sum_{j \neq i} \gamma_j n_j$

elde edilir.

$F(S) + n_k = h + (F(S) - f) + n_i$

$= \sum_{j \neq k} \beta_j n_j - n_i + \sum_{j \neq i \, , \, j \neq k} \gamma_j n_j$

$= \sum_{j\neq k\ ,\ j\neq i} \beta_j n_j + (\beta_i - 1)n_i + \sum_{j\neq i\ ,\ j\neq k} \gamma_j n_j$
$= \sum_{j\neq k\ ,\ j\neq i} (\beta_j + \gamma_j)n_j + (\beta_i - 1)n_i$
bulunur. $j \neq i$ için $a_j = \beta_j + \gamma_j$ ve $j = i$ için $a_i = \beta_i - 1$ dersek,
$F(S) + n_k = \sum_{j\neq k} a_j n_j$
faktorizasyonunu elde ederiz.

(ii) $\beta_i > 0$ iken $f + n_k = \sum_{j\neq k} \beta_j n_j$ olsun. $\beta_\iota > 0$ iken bir $\iota \neq i$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (i)' den $\beta_\iota = a_\iota + 1$ elde edilir. Böylece, $a_\iota < \beta_\iota$' dir. Bununla birlikte, $\beta_i > 0$ olmasından yine (i)' den her $j \neq i$ için $a_j \geq \beta_j$' dir. Özel olarak, $a_\iota \geq \beta_\iota$ olur. Bu, $a_\iota < \beta_\iota$ olmasıyla çelişir. Bu durumda, $j \neq i$ için $\beta_i = 0$' dır.
$f + n_k = \sum_{j\neq k} \beta_j n_j = \beta_i n_i = (a_i + 1)n_i$
bulunur.

3.2.12 Sonuc. $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubunun hemen hemen simetrik olduğunu varsayalım. $f \in PF'(S)$ olsun. Eğer, bir k için $f + n_k$' nın birden fazla sıfır olmayan katsayılı bir faktorizasyonu var ise, $F(S) + n_k$ tek türlü faktorizasyona sahip olamaz.

İspat: 3.2.11 Yardımcı Teorem (ii)' den açıktır.

3.2.13 Yardımcı Teorem. $F(S) + n_k$' nın tek türlü faktorizasyonu olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır :
(i) Her $j \neq k$ $F(S) + n_k - (\alpha_j - 1)n_j \in S$ ise, bu durumda $F(S) + n_k = \sum_{j\neq k} (\alpha_i - 1)n_j$ olur.
(ii) Üstelik, eğer S hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup ise, bir $f \in PF'(S)$ ve $i \neq k$ için $f + n_k = \alpha_i n_i$' dir.

İspat: (i) $F(S) + n_k = \sum_{j\neq k} a_j n_j$, $F(S) + n_k$' nın tek faktorizasyonu olsun. Bu durumda, (i)' deki hipotez gereği
$F(S) + n_k - (\alpha_j - 1)n_j \in S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$
ise, $\gamma_i \geq 0$ olmak üzere,
$F(S) + n_k = \sum_{i=1}^{e} \gamma_i n_i + (\alpha_j - 1)n_j$

$= \sum_{i=1\ ,\ i\neq j}^{e} \gamma_i n_i + \gamma_j n_j + (\alpha_j - 1)n_j$
$= \sum_{i=1\ ,\ i\neq j}^{e} \gamma_i n_i + (\gamma_j + (\alpha_j - 1))n_j$
ve $F(S) + n_k = \sum_{j\neq k} a_j n_j$ olmasından, her $j \neq k$ için $a_j = \gamma_j + (\alpha_j - 1)$'den $a_j \geq (\alpha_j - 1)$ elde edilir. Şimdi, $a_j = \alpha_j - 1$ olduğunu görelim. Eğer, bir $i \neq k$ için $a_i \geq \alpha_i$ ise, $t \geq 0$ olmak üzere $a_i = \alpha_i + t$ olur.
$\Rightarrow \sum_{j\neq k} a_j n_j = \sum_{j\neq k}(\alpha_i + t)n_j$
olarak yazılabilir. Bu, $F(S) + n_k$' nın bir diğer faktorizasyonu olur ki, $F(S) + n_k$' nın tek faktorizasyonu olduğu kabul ettiğimizden bu bir çelişkidir.
$\Rightarrow j \neq k$ için $a_j = \alpha_j - 1$
$\Rightarrow F(S) + n_k = \sum_{j\neq k}(\alpha_j - 1)n_j$
elde edilir.

(ii) S' nin hemen hemen simetrik olduğunu varsayalım. $F(S) + n_k$' nın tek türlü faktorizasyonu olduğunu kabul ettiğimizden, 3.2.11 Yardımcı Teorem (ii)' den $F(S) + n_k = \sum_{j\neq i} a_j n_j$ iken bir $i \neq k$ için $f + n_k = (a_i + 1)n_i$' dir. (i)' den $j \neq k$ için $a_j = \alpha_j - 1$ olduğundan
$f + n_k = (a_i + 1)n_i = \alpha_i n_i$
elde edilir.

3.2.14 Yardımcı Teorem. $S = \langle\, n_1, n_2, n_3, n_4 \,\rangle$ ve $f \in PF(S)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) Eğer, $f + n_k$' nın tek türlü faktorizasyonu yok ise, bir i için $f + n_k \geq_S \alpha_i n_i$

(ii) $f + n_k$' nın herhangi bir faktorizasyonu ve her i için $a_i < \alpha_i$ iken $f + n_k = \sum_{i\neq k} = a_i n_i$ ise, bu durumda $f + n_k$' nın faktorizasyonu vardır.

İspat: (i) $f + n_k$' nın
$f + n_k = \sum_{j\neq k} \beta_j n_j$ ve $f + n_k = \sum_{j\neq k} \beta'_j n_j$
olmak üzere iki farklı faktorizasyonu olsun.
Bu durumda, $\prod_{j\ ,\ j\neq k} x_j^{\beta_j} - \prod_{j\ ,\ j\neq k} x_j^{\beta'_j}$, $\mathbf{I}_S$' nin sıfırdan farklı bir binomudur. Varsayalım ki $j \neq k$ ve $j \neq i$ için $x_i^{\beta_i}$ ortak çarpan olsun. $\beta_i \leq \beta_i\,'$ iken
$\Rightarrow x_i^{\beta_i}(\prod_{j\neq k\ ,\ j\neq i} x_j^{\beta_j} - \prod_{j\neq k\ ,\ j\neq i} x_j^{\beta'_j}) \in \mathbf{I}_S$

$x_i^{\beta_i} \notin \mathbf{I}_S$ ve $\mathbf{I}_S$ asal ideal olduğundan kalan $\phi = m_1 - m_2 \in \mathbf{I}_S$ olur. $f + n_k$' nın tek türlü faktorizasyonu olmamasından ve 3.2.7 Not' tan $f + n_k \geq_S deg(\phi)$ elde edilir. $\phi = m_1 - m_2$ binomunda $j \neq k$ olduğundan ϕ , x_k değişkenini içermez. Bu sebeple, ϕ, en fazla 3 değişkenlidir. Yine, $\phi = m_1 - m_2$ binomu, $\prod_j x_j^{\beta_j} - \prod_j x_j^{\beta'_j}$ binomunun ortak çarpanları atılarak elde edilen bir binom olduğundan $obeb(m_1, m_2) = 1$' dir. Böylece, ϕ , $b \geq \alpha_i$ iken bir x_i^b monomu içermelidir.

$b \geq \alpha_i \;\Rightarrow\; bn_i \geq_S \alpha_i n_i$

$\Rightarrow\; f + n_k \;\geq_S\; der(\phi) \;\geq_S\; bn_i \;\geq_S\; \alpha_i n_i$

(ii) (i)' den $f + n_k$' nın UF' si yok $\Rightarrow$ bir i için $f + n_k \geq_S \alpha_i n_i$ olduğunu biliyoruz. Bu ifade, $\forall\, i$ için $f + n_k \leq_S \alpha_i n_i \;\Rightarrow\; f + n_k$' nın UF'si vardır önermesine denktir. Şimdi, her i için $a_i < \alpha_i$ iken $f + n_k$' nın bir faktorizasyonu için $f + n_k = \sum_{i \neq k} a_i n_i$ olduğunu varsayalım.

$\Rightarrow\; \alpha_i n_i - f + n_k = \alpha_i n_i - \sum_{i \neq k} a_i n_i$

$\Rightarrow\; \alpha_i n_i - f + n_k = \sum_{i \neq k} (\alpha_i - a_i) n_i$

$a_i < \alpha_i$' den S' nin elemanı olması anlamına gelir.

$\Rightarrow\; f + n_k \leq_S \alpha_i n_i$

$\Rightarrow\; f + n_k$' nın tek faktorizasyonu vardır.

3.2.15 Örnek. $S = \langle\, 22, 28, 47, 53 \,\rangle$ sayısal yarıgrubununu alalım. 3.1.5 Örnek' ten, S' nin tipi 3 olan bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olduğunu ve

$\mathbf{I}_S = \langle\, x_1x_4 - x_2x_3\ ,\ x_1x_2^3 - x_4^2\ ,\ x_1^2x_2^2 - x_3x_4\ ,\ x_1^{13}x_3 - x_2^{10}x_4\ ,\ x_1^{14} - x_2^{11}\ ,\ x_1^3x_2 - x_3^2 \,\rangle$

olduğunu biliyoruz. Burada, $\alpha_1 = 14$, $\alpha_2 = 11$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 2$

$f = 25 \in PF'(S)$ alalım. $S = \langle\, 22, 28, 47, 53 \,\rangle$ sayısal yarıgrubundan,

$n_1 = 22$, $n_2 = 28$, $n_3 = 47$, $n_4 = 53$.

$25 + n_1 = 25 + 22 = 1.n_3$

eşitliğinden $a_3 = 1 < \alpha_3 = 2$ olduğundan 3.2.14 Yardımcı Teorem' in (ii) şıkkından $f + n_1$' in bir tek faktorizasyonu vardır. Benzer şekilde $\forall\, i = 1, 2, 3, 4$ için $f + n_i$' nin tek faktorizasyonunun olduğu gösterilebilir. Ancak, $f = F(S) = 283$ alırsak,

$283 + 47 = 283 + n_3 = 330 = 15.22 + 0.28 + 0.53$

$283+47=283+n_3=330=1.22+11.28+0.53$

$283+47=283+n_3=330=0.22+8.28+2.53$

Benzer şekilde, $283+53=283+n_4$ ’ ün 3 farklı faktorizasyonu vardır.

3.2.16 Yardımcı Teorem. S’ nin hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup olduğunu varsayalım. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır.

(i) $e=4$ olsun. Her $i \neq k$ ve bir k için $\alpha_{ik} \geq 1$ ise, $F(S)+n_k$’ nın bir tek faktorizasyonu vardır.

(ii) $F(S)+n_k = \sum_{j\neq k} \beta_j n_j$ olduğunu varsayalım. Eğer, $F(S)+n_k$’ nın bir tek faktorizasyonu var ise $n_k = \prod_{j\neq k}(\beta_j+1)+tip(S)-1$.

İspat: (i) $F(S)+n_k$ birden fazla faktorizasyona sahip ise, 3.2.14 Yardımcı Teorem (ii)’ den, bir i için $\beta_i \geq \alpha_i$ iken $F(S)+n_k=\beta_i n_i$ faktorizasyonu vardır.

$\Rightarrow$ $F(S)+n_k = ... + \beta_i n_i + ...$

ve bir i için $\beta_i \geq \alpha_i$ ise, $\beta_i = \alpha_i + t$ ’ dir.

$\Rightarrow$ $F(S)+n_k = ... + (\alpha_i + t)n_i + ...$

$\Rightarrow$ $F(S)+n_k = ... + \alpha_i n_i + ...$

3.2.2 Tanım’ dan, $\alpha_i n_i = \sum_{k=1 \ k\neq i}^{4} \alpha_{ik} n_k$ olmasından

$F(S)+n_k = ... + \sum_{k\neq i} \alpha_{ik} n_k + ...$

$\Rightarrow$ $F(S) = ... + \sum_{k\neq i}(\alpha_{ik}-1)n_k + ...$

ve $\alpha_{ik} \geq 1$ kabulümüzden $\alpha_{ik}-1 \geq 0$ ve buradan $F(S) \in S$ olmak zorunda kalır. Bu bir çelişkidir. Böylece, $F(S)+n_k$ bir tek faktorizasyona sahiptir.

(ii) $n_k \in S$ için 2.1.13 Tanım’ dan,

$Ap(n_k, S) = \{ \ h \in S \mid h - n_k \notin S \ \}$

kümesi, n_k’nın S’ deki Apery kümesidir. Yine, $|Ap(n_k,S)| = n_k$ ve $Ap(n_k,S)$’ nin en büyük elemanı $F(S)+n_k$ olduğunu hatırlayalım.

$f \in PF'(S)$ iken, $f+n_k \in S$’ dir.

$(f+n_k)-n_k = f \notin S$

olduğundan $f \in Ap(n_k,S)$’ dir.

$F(S)+n_k-h \in S$ olan $h \in S$ ' leri alalım.

$\Rightarrow$ $s \in S$ olmak üzere $F(S)+n_k-h=S$

$\Rightarrow$ $F(S)-s=h-n_k$

$F(S)-s \notin S$ ' dir, çünkü $F(S)-s \in S$ olsaydı

$F(S)-s=s_1$, $s_1 \in S$ olurdu. Bu, $F(S)=s+s_1 \in S$ çelişkisini verir.

$\Rightarrow$ $F(S)-s \notin S$

$\Rightarrow$ $h-n_k \notin S$

$\Rightarrow$ $h \in Ap(n_k,S)$

Böylece,

$Ap(n_k,S)=\{\ h \in S \mid h \leq_S F(S)+n_k\ \} \cup \{\ f+n_k \mid f \in PF'(S)\ \}$

elde ederiz.

$\Rightarrow$ $|Ap(n_k,S)|=|\{\ h \in S \mid h \leq_S F(S)+n_k\ \}| + |\{\ f+n_k \mid f \in PF'(S)\ \}|$

$|Ap(n_k,S)|=n_k$, $|\{\ f+n_k \mid f \in PF'(S)\ \}|=|PF(S)|-1$ ve $|PF(S)|=t(S)$

olmasından

$n_k=t(S)-1+|\{\ h \in S \mid h \leq_S F(S)+n_k\ \}|$

bulunur. Şimdi, her $h \leq_S F(S)+n_k$ olan $h \in S$' nin tek faktorizasyonu olduğunu görelim. $h \leq_S F(S)+n_k$ olan $h \in S$ elemanlarının, $\gamma_j \neq \gamma_j'$ ' ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$h=\sum_{j \neq k}\gamma_j n_j$ ve $h=\sum_{j \neq k}\gamma_j' n_j$

olacak şekilde iki faktorizasyonu olduğunu varsayalım. $F(S)+n_k-h \in S$ olmasından bir $s \in S$ için $F(S)+n_k-h=s$ yazabiliriz.

$\Rightarrow$ $F(S)+n_k=h+s$

$\Rightarrow$ $F(S)+n_k=\sum_{j \neq k}\gamma_i n_j+s$

$\Rightarrow$ $F(S)+n_k=\sum_{j \neq k}\gamma_j' n_j+s$

yazabiliriz. $F(S)+n_k$' nın tek faktorizasyonu olduğundan

$\Rightarrow$ $\sum_{j \neq k}\gamma_j n_j+s=\sum_{j \neq k}\gamma_j' n_j+s$

$\Rightarrow$ $\sum_{j \neq k}(\gamma_j-\gamma_j')n_j=s-s=0 \in S$

n_j' ler 0' dan farklı pozitif tamsayılar olduğundan

$\gamma_j-\gamma_j'=0$ $\Rightarrow$ $\gamma_j=\gamma_j'$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece, her $h \leq_S F(S)+n_k$ için $h \in S$' nin

$\Rightarrow\ h = \sum_{i \neq k} \gamma_i n_i$

tek faktorizasyonu vardır.

$F(S) + n_k - h = \sum_{j \neq k} \beta_j n_j - \sum_{j \neq k} \gamma_j n_j$

$= \sum_{j \neq k} (\beta_j - \gamma_j) n_j$

ve $F(S) + n_k - h \in S$ olduğundan $\beta_j - \gamma_j \geq 0$ olmalıdır.

Böylece, $h = \sum_{i \neq k} \gamma_i n_i$ faktorizasyonunda $0 \leq \gamma_i \leq \beta_i$ olmalıdır. Yine, benzer şekilde tersine $\sum_{i \neq k} \gamma_i n_i$ toplamı için

$F(S) + n_k - \sum_{i \neq k} \gamma_i n_i \in S$

olduğundan $\sum_{i \neq k} \gamma_i n_i \leq_S F(S) + n_k$ olur.

Buradan,

$|\{\ h \in S \mid h \leq_S F(S) + n_k\ \}| = \prod_{i \neq k} (\beta_i + 1)$

bulunur.

4. SAYISAL YARIGRUPLARDA RF-MATRİSLER

Bu bölümde, $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubu için, A.Moscariello [5] tarafından verilen ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların sınıflandırılmasında oldukça kullanışlı olan RF (satır-faktorizasyon)-matrisler kavramı açıklanacaktır.

4.1 RF-Matrisler

4.1.1 Tanım. $f \in PF(S)$ olsun. f' nin RF-matrisi, her i için $a_{ii} = -1$, her $i \neq j$ için $a_{ij} \in \mathbb{N}$ ve her $i = 1, ..., e$ için
$\sum_{j=1}^{e} a_{ij} n_j = f$
olarak tanımlanan bir exe-boyutlu $A = (a_{ij})$ matrisidir.

4.1.2 Örnek. $S = \langle\ 6, 7, 9, 10\ \rangle$ sayısal yarıgrubunu düşünelim. S' yi listelersek,
$S = \{\ 0, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17\ \rightarrow \}$
yazılabilir. Böylece, $F(S) = 11$ ' dir. Yine, S' nin sözde-Frobenius sayılarının kümesi,
$PF(S) = \{\ f \notin S \mid f + n_i \in S,\ \forall\ i = 1, 2, 3, 4\ \}$
olduğunu biliyoruz. S' nin boşluklarının kümesi,
$G(S) = \mathbb{N} \backslash S = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\ \}$
kümesidir. $n_1 = 6$, $n_2 = 7$, $n_3 = 9$, $n_4 = 10$ ' dur.
$f = 1$ olsun. $1 + 7 = 8 \notin S \Rightarrow f = 1 \notin PF(S)$
$f = 2$ alalım. $2 + 6 = 8 \notin S \Rightarrow f = 2 \notin PF(S)$.
$f = 3$ için $f + 6 = 9$, $f + 7 = 10$, $f + 9 = 12$ ve $f + 10 = 13 \in S$ olduğundan $f = 3 \in PF(S)$ ' dir.
Benzer şekilde, $f = 8 \in PF(S)$ olur. Ve $F(S) = 11 \in PF(S)$ ' dir.

$\Rightarrow \; PF(S) = \{3, 8, 11\}$

elde edilir.

$f = 8 \in PF(S)$ alalım. $a_{11} = -1$ olmak üzere

$8 = a_{11}.6 + a_{12}.7 + a_{13}.9 + a_{14}.10$

olacak şekilde a_{12} , a_{13} , $a_{14} \in \mathbb{N}$ sayılarını bulalım.

$8 = (-1).6 + 2.7 + 0.9 + 0.10$

eşitliğinden $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 0$ bulunabilir. Böylece, $f = 8 \in PF(S)$ elemanı için RF-matrisinin ilk satırını elde ederiz. Yine, $a_{22} = -1$ olmak üzere

$8 = a_{21}.6 + a_{22}.7 + a_{23}.9 + a_{24}.10$

eşitliğinden ve

$8 = 1.6 + (-1).7 + 1.9 + 0.10$

olmasından, $a_{21} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{24} = 0$ bulunur.

Benzer şekilde,

$8 = 0.6 + 1.7 + (-1).9 + 1.10$ ve $8 = 0.6 + 0.7 + 2.9 + (-1).10$

eşitliklerinden, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 1$, $a_{34} = 1$ ve $a_{41} = 0$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 2$ bulunabilir. Dolayısıyla, $f = 8 \in PF(S)$ ' nin RF-matrisi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak yazılır. $f = 8 \in PF(S)$ için

$8 = 3.6 + 0.7 + 0.9 + (-1).10$

eşitliğinin de sağlandığını gözönüne alırsak, üstteki matrisin son satırı için $a_{41} = 3$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 2$ alınabilir. Böylece, $f = 8 \in PF(S)$ nin RF-matrisi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak da yazılabilir. Bu bize, $f \in PF(S)$' nin RF-matrislerinin tek olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Sıradaki Yardımcı Teorem, RF-matrislerinin en önemli özelliğini vermektedir.

4.1.3 Yardımcı Teorem. $f, f' \in PF(S)$ ve $f + f' \notin S$ olsun. $RF(f) = A = (a_{ij})$ ve $RF(f') = B = (b_{ij})$ alalım. Bu durumda, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ij} = 0$ ' dır. Özellikle, eğer $RF(\frac{F(S)}{2}) = (a_{ij})$ ise, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $a_{ji} = 0$ ' dır.

İspat: $f \in PF(S)$ için f' nin RF-matrisi $A = (a_{ij})$ ise, 4.1.1 Tanım' dan, $i = 1, ..., e$ ve

$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \cdots + a_{ii}n_i + \cdots + a_{ie}n_e$

ve her i için $a_{ii} = -1$ olduğundan

$f = a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + a_{ie}n_e$

$\Rightarrow \; f + n_i = a_{i1}n_1 + \cdots + a_{i(n-1)}n_{(i-1)} + a_{i(i+1)}n_{i+1} + \cdots + a_{ie}n_e$

$\Rightarrow \; f + n_i = \sum_{k \neq i} a_{ik}n_k$

elde edilir. Benzer şekilde, $f' \in PF(S)$ ve f' ' nün RF-matrisi $B = (b_{ij})$ ise, yine 4.1.1 Tanım' dan,

$f' + n_j = \sum_{l \neq j} b_{jl}n_l$

bulunabilir. $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ji} \geq 1$ ise,

$f = a_{i1}n_1 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + a_{ij}n_j + \cdots + a_{ie}n_e$

$f' = b_{j1}n_1 + \cdots + b_{ji}n_i + \cdots + (-1)n_j + \cdots + b_{je}n_e$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$f + f' = (a_{i1} + b_{j1})n_1 + \cdots + (b_{ji} - 1)n_i + \cdots + (a_{ij} - 1)n_j + \cdots + (a_{ie} + b_{je})n_e$

$f + f' = (b_{ji} - 1)n_i + (a_{ij} - 1)n_j + \sum_{s \neq i,j}(a_{is} + b_{js})n_s$

elde edilen eşitlik S' nin bir elemanı olur. Bu $f + f' \notin S$ olması ile çelişir. Böylece, $a_{ij} \geq 1$ ve $b_{ij} \geq 1$ varsayımı yanlıştır. Bu durumda, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $b_{ji} = 0$ olur. Eğer $\frac{F(S)}{2} \in PF(S)$ ve $RF(\frac{F(S)}{2}) = (a_{ij})$ ise, üstteki ifade de $f = \frac{F(S)}{2}$ ve $f' = \frac{F(S)}{2}$ ve $RF(f) = RF(\frac{F(S)}{2}) = (a_{ij})$, $RF(f') = RF(\frac{F(S)}{2}) = (b_{ij}) = (a_{ij})$ yazabileceğimizden, her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ve $b_{ji} = a_{ji} = 0$ elde edilir.

4.1.4 Örnek. $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ ve bir sözde-simetrik sayısal yarıgrup olsun. $f = \frac{F(S)}{2}$ alalım. $RF(f) = (a_{ij})$ dersek, 4.1.3 Yardımcı Teorem' den her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ veya $a_{ji} = 0$ ' dır.

Bu durumda, $a_{21} = a_{13} = a_{32} = 0$ kabul edebiliriz.

$$\Rightarrow\ RF(f) = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} & 0 \\ 0 & -1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak yazılır. Bu matristen,

$\Rightarrow\ f = \frac{F(S)}{2} = (-1).n_1 + a_{12}.n_2 + 0.n_3$

$f = \frac{F(S)}{2} = 0.n_1 + (-1).n_2 + a_{23}.n_3$

$f = \frac{F(S)}{2} = a_{31}.n_1 + 0.n_2 + (-1).n_3$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri kullanarak $RF(F(S)) = (b_{ij})$ matrisini bulmaya çalışalım.

$F(S) = (-1).n_1 + b_{12}.n_2 + b_{13}.n_3$

eşitliğindeki b_{12} ve b_{13} sayılarını bulmak için

$\frac{F(S)}{2} = (-1).n_1 + a_{12}.n_2 + 0.n_3$

$\frac{F(S)}{2} = 0.n_1 + (-1).n_2 + a_{23}.n_3$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$F(S) = (-1).n_1 + (a_{12} - 1).n_2 + a_{23}.n_3$

eşitliği elde edilir. Böylece, $b_{12} = a_{12} - 1$ ve $b_{13} = a_{23}$ olarak elde edilir. Yine,

$F(S) = b_{21}.n_1 + (-1).n_2 + b_{23}.n_3$

ifadesindeki b_{21} ve b_{23} sayılarını bulmak için

$\frac{F(S)}{2} = 0.n_1 + (-1).n_2 + a_{23}.n_3$

$\frac{F(S)}{2} = a_{31}.n_1 + 0.n_2 + (-1).n_3$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$F(S) = a_{31}.n_1 + (-1).n_2 + (a_{23} - 1).n_3$

bulunur ki, buradan $b_{21} = a_{31}$ ve $b_{23} = a_{23} - 1$ yazılır. Son olarak,

$F(S) = b_{31}.n_1 + b_{32}.n_2 + (-1).n_3$

eşitliğindeki b_{31} ve b_{32} sayılarını bulalım.

$\frac{F(S)}{2} = (-1).n_1 + a_{12}.n_2 + 0.n_3$

$\frac{F(S)}{2} = a_{31}.n_1 + 0.n_2 + (-1).n_3$

eşitliklerini toplarsak,

$F(S) = (a_{31} - 1).n_1 + a_{12}.n_2 + (-1).n_3$

eşitliği elde edilir. Buradan, $b_{31} = a_{31} - 1$ ve $b_{32} = a_{12}$ bulunur. Böylece, $F(S)$' nin

RF-matrisi

$$\begin{pmatrix} -1 & a_{12}-1 & a_{23} \\ a_{31} & -1 & a_{23}-1 \\ a_{31}-1 & a_{12} & -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Şimdi, RF(f) matrisinin satırlarının, $\mathbf{I}_S$ idealinin binomlarını nasıl ürettiğini görelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki kavrama ihtiyaç duyacağız.

4.1.5 Tanım. $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ vektörü için, a^+ vektörü, eğer i. vektör $a_i \geq 0$ ise

$a^+ = (0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0)$

ve $a^- = a^+ - a$ olarak tanımlanır.

Bu durumda,

$a = a^+ - a^-$

yazılır.

4.1.6 Örnek. $a = (2, -1, 3, 0, -5) \in \mathbb{Z}^5$ vektörünü alalım. a^+ ve a^- vektörlerini bulalım.

$a_1 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0 \geq 0$ ve $a_2 = -1$, $a_5 = -5 < 0$ olduğundan $a^+ = (2, 0, 3, 0, 0)$ olarak bulunur.

$a^- = a^+ - a = (2, 0, 3, 0, 0) - (2, -1, 3, 0, -5) = (2-2, 0-(-1), 3-3, 0-0, 0-(-5))$

$a^- = (0, 1, 0, 0, 5) \in \mathbb{N}^5$

vektörüdür.

4.1.7 Yardımcı Teorem. $a_1, ..., a_e$ vektörleri, RF(f) matrisinin satır vektörleri olsun ve $1 \leq i < j \leq e$ olan her i, j sayıları için $a_{ij} = a_i - a_j$ alalım. Bu durumda $i < j$ için $\phi = X^{a_{ij}^+} - X^{a_{ij}^-} \in \mathbf{I}_S$ olur. Üstelik, $der(\phi_{ij}) \leq f + n_i + n_j$ ' dir.

İspat: $a_1, ..., a_e$ vektörleri RF(f) matrisinin satır vektörleri olsun. Bu durumda,

$1 \leq i < j \leq e$ için

$f = a_{i1}n_1 + \cdots + \underbrace{a_{ii}}_{-1} n_i + \cdots + a_{ie}n_e$

$f = a_{j1}n_1 + \cdots + \underbrace{a_{jj}}_{-1} n_j + \cdots + a_{je}n_e$

ve

$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., \underbrace{a_{ii}}_{-1}, ..., a_{ij}, ..., a_{ie})$

$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{ji}, ..., \underbrace{a_{jj}}_{-1}, ..., a_{je})$

yazabiliriz.

$f = a_{i1}n_1 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + a_{ij}n_j + \cdots + a_{ie}n_e$

$\Rightarrow \ f + n_i = a_{i1}n_1 + \cdots + a_{i(i-1)}n_{i-1} + 0.n_i + a_{i(i+1)}n_{i+1} + \cdots + a_{ij}n_j + \cdots + a_{ie}n_e$

Bu eşitliğin her iki tarafını n_j ile toplarsak,

$\Rightarrow \ f + n_i + n_j = a_{i1}n_1 + \cdots + a_{i(i+1)}n_{i-1} + 0.n_i + a_{i(i+1)}n_{i+1} + \cdots + (a_{ij} + 1)n_j + \cdots + a_{ie}n_e$

elde edilir. Böylece, $f + n_i + n_j$ ' nin bir faktorizasyonunun katsayı vektörü

$(a_{i1}, ..., a_{i(i+1)}, 0, a_{i(i+1)}, ..., a_{ij} + 1, ..., a_{ie})$

olarak yazılır. Şimdi, bu vektörün $a_i + e_i + e_j$ vektörüne eşit olduğunu görelim.

$a_i + e_i + e_j$

$= (a_{i1}, ..., a_{i(i-1)}, -1, a_{i(i+1)}, ..., a_{ij}, ..., a_{ij}, ...a_{ie}) + (0, ..., \underbrace{1}_{i.bilesen}, ..., 0) + (0, ..., 1, ..., 0)$

$= (a_{i1}, ..., a_{i(i-1)}, -1 + 1, a_{i(i+1)}, ..., a_{ij} + 1, ..., a_{ie})$

$= (a_{i1}, ..., a_{i(i-1)}, 0, a_{i(i+1)}, ..., a_{ij} + 1, ..., a_{ie})$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$f = a_{j1}n_1 + \cdots + a_{j1}n_i + \cdots + \underbrace{a_{jj}}_{-1} n_j + \cdots + a_{je}n_e$

$\Rightarrow \ f + n_i = a_{j1}n_1 + \cdots + a_{ji}n_i + \cdots + a_{j(j-1)}n_{j-1} + 0.n_j + a_{j(j+1)}n_{j+1} + \cdots + a_{je}n_e$

Eşitliğin her iki tarafını n_i ile toplarsak,

$f + n_i + n_j = a_{j1}n_1 + \cdots + (a_{ji} + 1)n_i + \cdots + a_{j(j-1)}n_{j-1} + 0.n_j + a_{j(j+1)}n_{j+1} + \cdots + a_{je}n_e$

bulunur ki, bu eşitlikten $f + n_i + n_j$ ' nin bir faktorizasyonunun katsayı vektörü

$(a_{j1}, ..., a_{ji} + 1, ..., a_{j(j-1)}, 0, a_{j(j+1)}, ..., a_{je})$

olarak bulunur. Yine,

$a_j + e_i + e_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., \underbrace{a_{ji}}_{i.bilesen}, ..., -1, ...a_{je}) + (0, ..., \underbrace{1}_{j.bilesen}, ..., 0) + (0, ..., \underbrace{1}_{i.bilesen}, ..., 0)$

$= (a_{j1}, ..., a_{ji} + 1, ..., -1 + 1, ..., a_{je})$

$= (a_{j1}, ..., a_{ji} + 1, ..., 0, ..., a_{je})$

olduğundan $a_j + e_i + e_j$ vektörüde bu katsayı vektörüne eşit olur.

$(a_i + e_i + e_j) - (a_j + e_i + e_j) = a_i - a_j = a_{ij}$

ve $a_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., -1, ..., a_{ij}, ..., a_{ie}) - (a_{j1}, ..., a_{ji}, ..., -1, ...a_{je})$

$= (a_{i1} - a_{j1}, ..., -1 + a_{ji}, ..., a_{ij} - 1, ..., a_{ie} - a_{je})$

olur.

$(a_{i1} - a_{j1})n_1 + \cdots + (-1 + a_{ji})n_i + \cdots + (a_{ij} - 1)n_j + \cdots + (a_{ie} - a_{je})n_e$

$= (a_{i1}n_1 + \cdots + (-1)n_i + \cdots + a_{ij}n_j + \cdots + a_{ie}n_e) - (a_{j1}n_1 + \cdots + a_{ji}n_i + \cdots + (-1)n_j + \cdots + a_{je}n_e)$

$= f - f = 0$

olmasından $c_k = (a_{ik} - a_{jk})$ sayıları a_{ij} vektörünün bileşenleri iken $\sum_{k=1}^{e} c_k n_k$ olan a_{ij} vektörü elde edilir. Buradan,

$\Rightarrow\ \phi_{ij} = X^{a_{ij}^{+}} - X^{a_{ij}^{-}} \in \mathbf{I}_S$

olur. Yine, $f + n_i + n_j$ ' nin iki faktorizasyonu olmasından ve 3.2.7 Not' tan

$der(\phi) \leq_S f + n_i + n_j$ elde edilir.

4.2 RF-Bağıntılar

4.2.1 Tanım. $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrup ve $f \in PF'(S)$ olsun. $a_1, ..., a_e$ vektörleri RF(f)' nin satır vektörleri ve $1 \leq i < j \leq e$ için $a_{ij} = a_i - a_j$ iken $\phi_{ij} = X^{a_{ij}^{+}} - X^{a_{ij}^{-}} \in \mathbf{I}_S$ formundaki binom bağıntısına RF(f)-bağıntı veya RF-bağıntı denir.

4.2.2 Örnek. $S = \langle 7, 12, 13, 22 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$S = \{\ 0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33 \rightarrow\ \}$ olduğundan

$PF(S) = \{15, 30\}$ olarak bulunabilir.

$f = 15 \in PF'(S)$ için, RF(f)-matrisini bulalım.

$15 = (-1).7 + 0.12 + 0.13 + 1.22$

$15 = 2.7 + (-1).12 + 1.13 + 0.22$

$15 = 4.7 + 0.12 + (-1).13 + 0.22$

$15 = 0.7 + 2.12 + 1.13 + (-1).22$

olmasından,

$$RF(f = 15) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. RF(f)-matrisinin satır vektörleri

$a_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1, 0)$, $a_3 = (4, 0, -1, 0)$, $a_4 = (0, 2, 1, -1)$ vektörleridir.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, w)$ olarak alalım. $RF(15)$ matrisinde birinci ve ikinci satırların farklarını alırsak,

$a_{12} = a_1 - a_2 = (-1, 0, 0, 1) - (2, -1, 1, 0) = (-3, 1, -1, 1)$ elde ediriz.

$a_{12} = (-3, 1, -1, 1) \in \mathbb{Z}^5$ vektörü için

$a_{12}^+ = (0, 1, 0, 1)$ olur. $a_{12}^- = a_{12}^+ - a_{12}$ olmasından

$a_{12}^- = (0, 1, 0, 1) - (-3, 1, -1, 1) = (3, 0, 1, 0)$ olarak bulunur.

Bu durumda, 4.1.7 Yardımcı Teorem kullanılarak,

$x^{a_{12}^+} = x^0 y^1 z^0 w^1$ ve $x^{a_{12}^-} = x^3 y^0 z^1 w^0$

olmak üzere $\phi_{12} = yw - x^3 z \in \mathbf{I}_S$ binom üreteci elde edilir.

Benzer şekilde,

$a_{13} = a_1 - a_3 = (-1, 0, 0, 1) - (4, 0, -1, 0) = (-5, 0, 1, 1)$ ve $a_{13}^+ = (0, 0, 1, 1)$,

$a_{13}^- = a_{13}^+ - a_{13} = (0, 0, 1, 1) - (-5, 0, 1, 1) = (5, 0, 0, 0)$ vektörlerinden $\phi_{13} = zw - x^5$,

$a_{14} = a_1 - a_4 = (-1, 0, 0, 1) - (0, 2, 1, -1) = (-1, -2, -1, 2)$ ve

$a_{14}^+ = (0, 0, 0, 2)$, $a_{14}^- = a_{14}^+ - a_{14} = (0, 0, 0, 2) - (-1, -2, -1, 2) = (1, 2, 1, 0)$ olmasından

$\phi_{14} = w^2 - xy^2 z$,

$a_{23} = a_2 - a_3 = (2, -1, -1, 0) - (4, 0, -1, 0) = (-2, -1, 2, 0)$ ve

$a_{23}^+ = (0, 0, 2, 0)$, $a_{23}^- = a_{23}^+ - a_{23} = (0, 0, 2, 0) - (-2, -1, 2, 0) = (2, 1, 0, 0)$ olacağından

$\phi_{23} = z^2 - x^2 y$,

$a_{24} = a_2 - a_4 = (2, -1, 1, 0) - (0, 2, 1, -1) = (2, -3, 0, 1)$ ve

$a_{24}^+ = (2, 0, 0, 1)$, $a_{24}^- = a_{24}^+ - a_{24} = (2, 0, 0, 1) - (2, -3, 0, 1) = (0, 3, 0, 0)$ eşitliklerinden

$\phi_{24} = x^2 w - y^3$,

ve son olarak,

$a_{34} = a_3 - a_4 = (4, 0, -1, 0) - (0, 2, 1, -1) = (4, -2, -2, 1)$ ve

$a_{34}^+ = (4, 0, 0, 1)$, $a_{34}^- = a_{34}^+ - a_{34} = (4, 0, 0, 1) - (4, -2, -2, 1) = (0, 2, 2, 0)$ eşitlikleri kullanılarak $\phi_{34} = x^4 w - y^2 z^2 \in \mathbf{I}_S$ binom üreteçler elde edilir. Burada,

$\phi_{34} = x^4 w - y^2 z^2 \in \mathbf{I}_S$ üreteci,

$\phi_{34} = x^4 w - y^2 z^2 = x^2(x^2 w - y^3) - y^2(z^2 - x^2 y) = x^2 \phi_{24} - y^2 \phi_{23}$

olarak yazılabileceğinden ϕ_{34}, $\mathbf{I}_S$' nin minimal üreteci değildir. Böylece, $\mathbf{I}_S$ idealinin 5 tane minimal üreteci elde edilmiş olur.

4.3 Sayısal Yarıgruplar ve RF-Bağıntılar

Bu bölümde, $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ bir sayısal yarıgrup iken $\mathbf{I}_S$ idealinin minimal üreteçleri ile RF-bağıntılar arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. $f \in PF(S)$ iken RF(f) matrisinin satırlarının RF(f)-bağıntılar ile $\mathbf{I}_S$ ' deki binomları nasıl ürettiğini bir önceki bölümde inceledik. Bu durumda, "Bir sayısal yarıgrubun tüm minimal üreteçleri RF-bağıntılarından mı elde edilir?"' sorusunu sormak doğaldır.

Bir sonraki Yardımcı Teorem, $\mathbf{I}_S$ idealinin RF-bağıntılar ile üretilmesini garanti eden bir koşul verir.

4.3.1 Yardımcı Teorem. $\phi_1, ..., \phi_s \in \mathbf{I}_S$ ve her k için, u ve v monomları x_i/u ve x_j/v olacak şekilde $\phi_k = u - v$ ve $der(\phi_k) = f + n_i + n_j$ olacak şekilde $f \in PF'(S)$ ve $i < j$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\mathbf{I}_S$, RF-bağıntılar tarafından üretilir.

İspat: $\phi_k = u - v$ binomu, her k için u ve v monomları $i < j$ için x_i/u , x_j/v ve $f \in PF'(S)$ için $der(\phi_k) = f + n_i + n_j$ olacak şekilde tanımlansın. $u' = \frac{u}{x_j}$ olsun. Bu durumda,

$der(u') = der(\frac{u}{x_i}) = der(u) - der(x_i)$

olmasından $der(u) = (f + n_j) + n_i$ ve $der(u') = f + n_j$ olur. $der(v') = f + n_i$ olan bir v' monomu alalım.

$der(x_j.v') = der(x_j) + der(v')$

$= n_j + (f + n_i)$

$\psi_k = u - x_j.v'$ binomu için $der(\psi_k) = (f + n_i) + n_j$ ve ψ_k' nın yapısı 4.1.7 Yardımcı Teorem' deki binomların formunda olduğundan $\psi_k = u - x_j.v'$ bir RF-bağıntıdır.

$der(\frac{v}{x_j}) = f + n_i = der(v')$ olmasından $\frac{v}{x_j} - v' \in \mathbf{I}_S$ ' dir ve

$\psi_k + x_j(\frac{v}{x_j} - v') = u - x_j v' + x_j(\frac{v}{x_j} - v')$

$= u - v = \phi_k$

ve böylece, $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_e)$ maksimal ideal olmak üzere

$\phi_k = \psi_k + x_j(\frac{v}{x_j} - v') \in \psi_k + \mathfrak{m}\mathbf{I}_S$ bulunur. Buradan,
$(\phi_1, ..., \phi_m) + \mathfrak{m}\mathbf{I}_S = (\psi_1, ..., \psi_m) + \mathfrak{m}\mathbf{I}_S$ yazabiliriz. Nakayama Yardımcı Teoreminden [6]
$\mathbf{I}_S = (\psi_1, ..., \psi_m)$ elde edilir.

$e = 3$ olduğunda, $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ sayısal yarıgrubunun tüm minimal üreteçlerinin RF-bağıntılar olduğunu görmeden önce literatürde bilinenlerden bazılarını verelim.

4.3.2 Önerme. $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ simetrik olmayan bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda,
$g_1 = x^{\alpha+\alpha'} - y^{\beta'} z^{\gamma}$, $g_2 = y^{\beta+\beta'} - x^{\alpha} z^{\gamma'}$, $g_3 = z^{\gamma+\gamma'} - y^{\beta} x^{\alpha'}$ olmak üzere $\mathbf{I}_S = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ ideali g_1, g_2, g_3 minimal binomları ile üretilecek şekilde α, β, γ ve α', β', γ' pozitif sayıları vardır. Burada,
$(\alpha + \alpha')n_1 = \beta' n_2 + \gamma n_3$, $(\beta + \beta')n_2 = \alpha n_1 + \gamma' n_3$, $(\gamma + \gamma')n_3 = \alpha' n_1 + \beta n_2$
$n_1 = (\beta + \beta')\gamma + \beta'\gamma'$, $n_2 = (\gamma + \gamma')\alpha + \gamma'\alpha'$ ve $n_3 = (\alpha + \alpha')\beta + \alpha'\beta'$.

İspat: [7].

4.3.3 Önerme. $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ simetrik olmayan bir sayısal yarıgrup ise,
$f = \alpha n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - (n_1 + n_2 + n_3)$
$f' = \beta' n_2 + (\gamma + \gamma')n_3 - (n_1 + n_2 + n_3)$
olmak üzere $PF(S) = \{f, f'\}$ olur.

İspat: [8] .

4.3.3 Önerme' den,
$f = \alpha n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - (n_1 + n_2 + n_3)$
$\Rightarrow\ f = \alpha n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - n_1 - n_2 - n_3$
$\Rightarrow\ f + n_1 = \alpha n_1 + \gamma n_3 + \gamma' n_3 - n_2 - n_3$
$= (\alpha n_1 + \gamma' n_3) - n_2 + (\gamma n_3 - n_3)$
ve 4.3.2 Önerme' den $(\beta + \beta')n_2 = \alpha n_1 + \gamma' n_3$ olmasından
$f + n_1 = (\beta + \beta')n_2 - n_2 + (\gamma n_3 - n_3)$
$f + n_1 = (\beta + \beta' - 1)n_2 + (\gamma - 1)n_3$
$\Rightarrow\ f = (-1)n_1 + (\beta + \beta' - 1)n_2 + (\gamma - 1)n_3$

elde edilir. Böylece, RF(f) matrisinin ilk satırı bulunmuş olur.

$f = \alpha n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - (n_1 + n_2 + n_3)$

$\Rightarrow \; f = (\alpha - 1)n_1 + (-1)n_2 + (\gamma + \gamma' - 1)n_3$

eşitliğinden RF(f) matrisinin 2.satırı yazılır. Yine,

$f = \alpha n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - n_1 - n_2 - n_3$

$\Rightarrow \; f + n_3 = (\alpha - 1)n_1 + (\gamma + \gamma')n_3 - n_2$

ve $(\gamma + \gamma')n_3 = \alpha' n_1 + \beta n_2$ olmasından

$f + n_3 = (\alpha - 1)n_1 + (\alpha' n_1 + \beta n_2) - n_2$

$= (\alpha + \alpha' - 1)n_1 + (\beta - 1)n_2$

$\Rightarrow \; f = (\alpha + \alpha' - 1)n_1 + (\beta - 1)n_2 + (-1)n_3$

olur. Bu eşitlikten, RF(f) matrisinin son satırı bulunur. Böylece,

$$RF(f) = \begin{pmatrix} -1 & \beta + \beta' - 1 & \gamma - 1 \\ \alpha - 1 & -1 & \gamma + \gamma' - 1 \\ \alpha + \alpha' - 1 & \beta - 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilmiş olur.

$a_1 = (-1\ ,\ \beta' + \beta - 1\ ,\ \gamma - 1)\ ,\ a_2 = (\alpha - 1\ ,\ -1\ ,\ \gamma + \gamma' - 1)$ ve $a_3 = (\alpha + \alpha' - 1\ ,\ \beta - 1\ ,\ -1)$ vektörleri olsun.

$a_3 - a_1 = (\alpha + \alpha' - 1\ ,\ \beta - 1\ ,\ -1) - (-1\ ,\ \beta' + \beta - 1\ ,\ \gamma - 1)$

$= (\alpha + \alpha'\ ,\ -\beta'\ ,\ -\gamma)$

$a_1 - a_2 = (-1\ ,\ \beta' + \beta - 1\ ,\ \gamma - 1) - (-\alpha - 1\ ,\ -1\ ,\ \gamma + \gamma' - 1)$

$= (-\alpha\ ,\ \beta + \beta'\ ,\ -\gamma')$

ve $a_2 - a_3 = (\alpha - 1\ ,\ -1\ ,\ \gamma + \gamma' - 1) - (\alpha + \alpha' - 1\ ,\ \beta - 1\ ,\ -1)$

$= (-\alpha'\ ,\ -\beta\ ,\ \gamma + \gamma')$

vektörleri elde edilir.

$a_{31} = (\alpha + \alpha'\ ,\ -\beta'\ ,\ -\gamma)$ ve $a_{31}^{+} = (\alpha + \alpha'\ ,\ 0\ ,\ 0)$

$a_{31}^{-} = a_{31}^{+} - a_{31} = (\alpha + \alpha'\ ,\ 0\ ,\ 0) - (\alpha + \alpha'\ ,\ -\beta'\ ,\ 0) = (0\ ,\ \beta'\ ,\ \gamma)$

bulunur. Bu durumda, 4.1.7 Yardımcı Teorem' den

$\phi_{31} = x^{a_{31}^{+}} - x^{a_{31}^{-}} = x^{\alpha + \alpha'} - y^{\beta'} z^{\gamma} = g_1$

üreteci bulunur. Benzer şekilde, $\phi_{12} = g_2$ ve $\phi_{23} = g_3$ eşitlikleri gösterilebilir.

Şimdi, $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$obeb(a,b) = 1$ ve $n_1 = d.a$, $n_2 = d.b$ ve $n_3 = \alpha a - \beta b$ olacak şekilde a, b, d pozitif tamsayıları ve yine $\mathbf{I}_S$ ideali için $bn_1 = an_2$, $dn_3 = \alpha n_1 + \beta n_2$ üreteç bağıntıları ile

$\mathbf{I}_S = \langle\ g_1 = x^b - y^a\ ,\ g_2 = z^d - x^\alpha y^\beta\ \rangle$

olduğu bilinmektedir [9]. S simetrik sayısal yarıgrup ise, $PF(S) = \{F(S)\}$ ve

$F(S) = (deg\ g_1) + (deg\ g_2) - n_1 - n_2 - n_3$ oldukları bilinmektedir [3] , [10] .

$g_1 = x^b - y^a$ ve $bn_1 = an_2$ 'den $deg\ g_1 = bn_1$

$g_2 = z^d - x^\alpha y^\beta$ ve $dn_3 = \alpha n_1 + \beta n_2$ ' den $deg\ g_2 = dn_3$

Böylece,

$F(S) = bn_1 + dn_3 - n_1 - n_2 - n_3$

bulunur. Bu eşitlikten,

$F(S) + n_1 = bn_1 + dn_3 - n_2 - n_3$

$= an_2 + dn_3 - n_2 - n_3$

$= (a-1)n_2 + (d-1)n_3$

elde edilir. Bu eşitlikten, $RF(F(S))$ matrisinin ilk satırı bulunur. Yine,

$F(S) = bn_1 + dn_3 - n_1 - n_2 - n_3$

$\Rightarrow\ F(S) + n_2 = bn_1 + dn_3 - n_1 - n_3$

$= (b-1)n_1 + (d-1)n_3$

olur. Bu eşitliktende $RF(F(S))$ matrisinin ikinci satırı elde edilir.

$F(S) + n_3 = bn_1 + dn_3 - n_1 - n_2$

$= bn_1 + (\alpha n_1 + \beta n_2) - n_1 - n_2$

$= (bn_1 + \alpha n_1 - n_1) + (\beta n_2 - n_2)$

$= (b - 1 + \alpha)n_1 + (\beta - 1)n_2$

eşitliğinden, $RF(S)$' nin son satırı bulunur. Böylece, eğer $\beta > 0$ ise,

$$RF(F(S)) = \begin{pmatrix} -1 & a-1 & d-1 \\ b-1 & -1 & d-1 \\ b-1+\alpha & \beta-1 & -1 \end{pmatrix}$$

olur. Yine, eğer $\beta = 0$, $\alpha > 0$ ise,

$F(S) + n_3 = bn_1 + dn_3 - n_1 - n_2$

$= an_2 + (\alpha n_1 + \beta n_2) - n_1 - n_2$

$= (an_2 + \beta n_2 - n_2) + (\alpha n_1 - n_1)$

$= (\alpha-1)n_1 + (a-1+\beta)n_2$

olur. Böylece,

$$RF(F(S)) = \begin{pmatrix} -1 & a-1 & d-1 \\ b-1 & -1 & d-1 \\ \alpha-1 & a-1+\beta & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

$\beta > 0$ olduğunu varsayalım. $a_1 = (-1, a-1, d-1)$, $a_2 = (b-1, -1, d-1)$,

$a_3 = (b-1+\alpha, \beta-1, -1)$ olsun.

$a_2 - a_1 = (b, -a, 0)$ ve $a_3 - a_2 = (\alpha, \beta, -d)$ vektörleri elde edilir.

$a_{21} = (b, -a, 0)$, $a_{21}^{+} = (b, 0, 0)$, $a_{21}^{-} = a_{21}^{+} - a_{21} = (b,0,0) - (b,-a,0) = (0,a,0)$

olur. Bu durumda, 4.1.7 Yardımcı Teorem' den,

$\phi_{21} = x^{a_{21}^{+}} - x^{a_{21}^{-}} = x^b - x^a = g_1$

üreteci bulunur.

$a_{32} = (\alpha, \beta, -d)$, $a_{31}^{+} = (\alpha, \beta, 0)$, $a_{31}^{-} = (0, 0, d)$

olur. Yine, 4.1.7 Yardımcı Teorem' den,

$\phi_{32} = x^{a_{31}^{+}} - x^{a_{31}^{-}} = x^{\alpha} y^{\beta} - z^d = g_2$

üreteci bulunur. $\alpha > 0$ olduğu durumda,

$a_1 = (-1, a-1, d-1)$, $a_2 = (b-1, -1, d-1)$, $a_3 = (\alpha-1, a-1+\beta, -1)$

Burada, $a_3 - a_1 = a_{31} = (\alpha, \beta, -d)$ olur.

$a_{31}^{+} = (\alpha, \beta, 0)$, $a_{31}^{-} = (0, 0, d)$ olmasından ve 4.1.7 Yardımcı Teorem' den,

$\phi_{31} = x^{a_{31}^{+}} - x^{a_{31}^{-}} = x^{\alpha} y^{\beta} - z^d$

elde edilir.

Böylece, $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ sayısal yarıgrubu için tüm minimal üreteçler RF-bağıntılardan elde edilir sonucuna varabiliriz.

$S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ sayısal yarıgrubu sözde simetrik veya hemen hemen simetrik yarıgrup olduğu durumda da aynı sorunun cevabı olumludur [9] . Bununla ilgili detaylara değinmeyeceğiz. Şimdi Moscariello [5] tarafından verilen ve ana fikri RF-matrislerindeki sıfırların yerlerini ve sayılarını belirlemek olan sayma argümanını görelim.

4.3.4 Yardımcı Teorem. [5]. $S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup, $f \in PF(S) \backslash \{F(S)\}$ ve M , f için bir sütununda hiç pozitif elemanı olmayan bir RF-matris olsun. Bu durumda, $f = \frac{F(S)}{2}$ olur.

İspat: Genelliği kaybetmeden

$$RF(f) = \begin{pmatrix} -1 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & -1 & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & -1 & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -1 \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $d = obeb(n_2, n_3, n_4)$ olsun.

RF(f) matristen,

$f = (-1)n_1 + m_{12}n_2 + m_{13}n_3 + m_{14}n_4$

$f = 0.n_1 + (-1)n_2 + m_{23}n_3 + m_{24}n_4$

yazabiliriz. $d = obeb(n_2, n_3, n_4)$ olmasından d/n_2 , d/n_3 , d/n_4 ' dür.

$\Rightarrow\ d/(-1)n_2 + m_{23}n_3 + m_{24}n_4$

$\Rightarrow\ d/f$

olur. Yine,

$f = (-1)n_1 + m_{12}n_2 + m_{13}n_3 + m_{14}n_4$

$\Rightarrow\ n_1 = (m_{12}n_2 + m_{13}n_3 + m_{14}n_4) + (-1)f$

ve $d/(m_{12}n_2 + m_{13}n_3 + m_{14}n_4)$, d/f olmasından d/n_1 elde edilir.

d/n_1 , d/n_2 , d/n_3 , d/n_4 ve $obeb(n_1, n_2, n_3, n_4) = 1$ olmasından $d = 1$ olmalıdır.

$obeb(n_2, n_3, n_3) = d = 1$ ' den $S = \langle n_2, n_3, n_4 \rangle$ bir sayısal yarıgruptur. $f \notin PF(S_1)$ olduğunu görelim.

$PF(S_1) = \{\ x \notin S_1 \mid x + n_i \in S_1\ ,\ i = 2, 3, 4\ \}$

olduğunu biliyoruz. f' nin M , RF-matrisinden

$f + n_2 = m_{23}n_3 + m_{24}n_4\ \in\ S_1$

bulunur.

Benzer şekilde,

$f + n_3 = m_{32}n_2 + m_{34}n_4\ \in\ S_1$

$f + n_4 = m_{42}n_2 + m_{43}n_3\ \in\ S_1$

yazılır. $f + n_2$, $f + n_3$ ve $f + n_4$, S_1 ' in elemanı olduğundan $f \in PF(S_1)$ olur.

$S_1 \subseteq S\ \Rightarrow\ (\mathbb{N} \backslash S) \subset (\mathbb{N} \backslash S_1)$

$\Rightarrow\ max(\mathbb{N}\backslash S) \leq (\mathbb{N}\backslash S_1)$

$\Rightarrow\ F(S) \leq F(S_1)$

olacaktır. $f \in PF(S)\backslash F(S)$ ve $F(S) \leq F(S_1)$ ' den $f \neq F(S_1)$ ' dir.

$S_1 = \langle n_2, n_3, n_4\rangle$ sayısal yarıgrubu 3-üreteçlidir. Bu durumda, S' nin tipi en fazla 2' dir [3] .

$f \in PF(S_1)$ ve $F(S_1) \in PF(S_1)$ ' den $t(S_1) = 2$ olur. Şimdi, $F(S_1) - f$ ' yi düşünelim.

$f \neq F(S_1)$ olmasından $f \in PF(S_1)\backslash\{F(S_1)\}$ 'dir. $F(S_1) - f \in S_1$ olsaydı, c_2 , c_3 , c_4 negatif olmayan sayıları için

$F(S_1) - f = c_2n_2 + c_3n_3 + c_4n_4$

$\Rightarrow\ F(S_1) = f + (c_2n_2 + c_3n_3 + c_4n_4)$

olurdu. $f \in PF(S_1)$ olmasından, her $x \in S_1\backslash\{0\}$ için $f + x \in S_1$ ' dir.

$c_2n_2 + c_3n_3 + c_4n_4 \in S_1$ ' den,

$\Rightarrow\ f + (c_2n_2 + c_3n_3 + c_4n_4) \in S_1$

$\Rightarrow\ F(S_1) \in S_1$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $F(S_1) - f \notin S_1$ ' dir.

$\Rightarrow\ F(S_1) - f \in (\mathbb{Z}\backslash S_1)$

$t(S_1) = 2$ ve f , $F(S_1) \in PF(S_1)$ olmasından $PF(S_1) = \{f\ ,\ F(S_1)\}$ ' dir. Bu durumda, 2.1.11 Not' tan, f ve $PF(S_1)$, $(\mathbb{Z}\backslash S_1\ ,\ \leq_{S_1})$ posetinin maksimal elemanlarıdır:

$F(S_1) - f \leq_{S_1} f$ veya $F(S_1) - f \leq_{S_1} F(S_1)$ ' dir.

$F(S_1) - f \leq_{S_1} F(S_1)$ ise, $F(S_1) - (F(S_1) - f) \in S_1$ ve buradan $f \in S_1$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Bu durumda, $F(S_1) - f \leq_{S_1} F(S_1)$ olamayacağından $F(S_1) - f \leq_{S_1} f$ olmalıdır. Diğer yandan, $F(S) \notin S$ ve $S \supseteq S_1$ ' den $F(S) \notin S_1$ ' dir. $f \in PF(S)\backslash\{F(S_1)\}$ olmasından $F(S) > f$ ' dir.

$f\ <\ F(S)\ \leq\ F(S_1)$

$\Rightarrow\ F(S) - f\ \leq_{S_1}\ F(S_1) - f\ \leq_{S_1}\ f$

$\Rightarrow\ F(S) - f\ \leq_{S_1}\ f$

$\Rightarrow\ F(S) - f\ \leq_{S}\ f$

Son olarak, S hemen hemen simetrik olduğundan, 2.2.7 Yardımcı Teorem' den

$F(S) - f \in PF(S)$

$\Rightarrow\ F(S) - f = f$

$\Rightarrow\ F(S) = 2f$

$\Rightarrow\ f = \frac{F(S)}{2}$
elde edilir.

Şimdi vereceğimiz Yardımcı Teorem, 4.3.4 Yardımcı Teorem' in biraz daha geliştirilmişidir.

4.3.5 Yardımcı Teorem. [9] . $S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgrup olsun. $f \in PF(S)$, $f \neq F(S)$ ve $M = RF(f) = (m_{ij})$ alalım. Bu durumda, her j için, $m_{ij} > 0$ olacak şekilde $i \neq j$ vardır. Bir başka deyişle, M matrisinin herhangi bir sütunu bir pozitif bileşen içermelidir.

İspat: Genelliği bozmadan $i = 2, 3, 4$ için $m_{i1} = 0$ olduğunu varsayalım. 4.3.4 Yardımcı Teorem' in ispatından $F(S) = F(S_1)$ ve S_1 ' in sözde simetrik olduğu görülür.
$S_1 = \langle n_2, n_3, n_4 \rangle$ sözde simetrik olduğundan
$g(S_1) = \frac{F(S_1)}{2} + 1$
$S\ \supset\ S_1\ \cup\ \{n_1\}$ olmasından,
$g(S)\ \leq\ g(S_1) - 1 = \frac{F(S_1)}{2} = \frac{F(S)}{2}$
Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda, varsayım yanlıştır. Böylece, M matrisinin 1. sütununda mutlaka bir pozitif bileşen bulunmalıdır.

$S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \rangle$ olduğunda 4.3.4 Yardımcı Teorem doğru değildir. Buna bir örnek verelim.

4.3.6 Örnek. $S = \langle 10, 11, 15, 16, 28 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. S ' nin sözde-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S) = \{5, 17, 29, 34\}$ 'dür. Böylece, S tipi 4 olan hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

$f = 5 \in PF(S)$ alalım.

$5 = (-1).10 + 0.11 + 1.15 + 0.16 + 0.28$

$5 = 0.10 + (-1).11 + 0.15 + 1.16 + 0.28$

$5 = 2.10 + 0.11 + (-1).15 + 0.16 + 0.28$

$5 = 1.10 + 1.11 + 0.15 + (-1).16 + 0.28$

$5 = 0.10 + 3.11 + 0.15 + 0.16 + (-1).28$

olmasından

$$RF(f=5)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

olur. Burada, $RF(5)$ ' in 5.sütununda hiç pozitif bileşen yoktur.

5. GORENSTEIN TEKTERİMLİ EĞRİLER

Bu bölümde, ilk olarak tekterimli eğriler, Gorenstein ve hemen hemen Gorenstein eğriler tanıtılacaktır. Sonrasında, hemen hemen Gorenstein tekterimli eğriler için bilinen sonuçlardan bahsedilecektir.

5.1 Tekterimli Eğriler

$n_1, ..., n_e$ ' ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,
$S = \langle n_1, ..., n_e \rangle = \{ \ n \mid n = \sum_{i=1}^{e} a_i n_i \ , \ a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$
kümesi, $n_1, ...n_e$ ' ler ile üretilen toplamsal yarıgrup olsun.

5.1.1 Tanım. $n_1, ..., n_e$ ' ler, $(n_1, ..., n_e) = 1$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olmak üzere, bir k cismi üzerindeki $\mathbb{A}_k^e$ afin uzayındaki C tekterimli eğrisi,
$x_1 = t^{n_1} \ , \ x_2 = t^{n_2} \ , ..., \ x_e = t^{n_e}$
parametrik gösterimi ile verilir. Bir başka deyişle,
$C = \{ \ (t^{n_1}, ..., t^{n_e}) \in \ \mathbb{A}_k^e \mid t \in k \ \}$
kümesidir.

5.1.2 Örnek. $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4) = 1$ iken
$C = \{ \ (t^2 \ , \ t^3 \ , \ t^4) \in \ \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \mid t \in \ \mathbb{R} \ \}$
$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ afin uzayında bir tekterimli eğridir.

Tekterimli eğriler, binomlar tarafından üretilen afin varyetelerdir [11] .

5.1.3 Tanım. Bir $\mathbb{A}_k^e$ afin uzayındaki C tekterimli eğrisinin $\mathbf{I}(C)$ tanımlayan ideali

$\mathbf{I}(C) = \{ \ f(x_1, ..., x_e) \in \ k[x_1, ..., x_e] \mid f(t^{n_1} \ , ..., \ t^{n_e}) = 0 \ \}$

olarak tanımlanır.

Tezin 3.1 Bölümünden,

$\pi \ : \ k[x_1, ..., x_e] \ \rightarrow \ k[t^{n_1} \ , ..., \ t^{n_e}]$

$x_i \mapsto t^{n_i}$

homomorfizmasının bir örten k-cebiri homomorfizması olduğunu biliyoruz. Yine,

Gör$(\pi) = k[t^{n_1} \ , ..., \ t^{n_e}]$

kümesini, S sayısal yarıgrubu ile ilişkilendirilmiş yarıgrup halkası olarak adlandırıp,

Gör$(\pi) = k[S]$ ve Çek$(\pi) = \mathbf{I}_S$ olarak göstermiştik.

Çek$(\pi) = \{ \ f \in \ k[x_1, ..., x_e] \mid \pi(f) = 0 \ \}$

$= \mathbf{I}(C)$

$\Rightarrow \ \mathbf{I}_S = \mathbf{I}(C)$

bulunur. I. İzomorfizma Teoreminden,

$k[x_1, ..., x_e]/$Çek$(\pi) \ \cong$ Gör$(\pi) = k[t^{n_1} \ , ..., \ t^{n_e}]$

$\Rightarrow \ k[x_1, ..., x_e]/\mathbf{I}(C) \ \cong \ k[t^{n_1} \ , ..., \ t^{n_e}]$

elde edilir. Bu izomorfizma, tekterimli eğri ile yarıgrup arasındaki bağıntıyı gösterir. $\mathbf{I}(C)$ idealini $k[[x_1, ..., x_e]]$ formal kuvvet serileri halkasının bir ideali olarak düşünebiliriz. Bu durumda,

$k[[x_1, ..., x_e]]/\mathbf{I}(C) \ \cong \ k[[t^{n_1} \ , ..., \ t^{n_e}]]$

bir lokal halkadır.

$\mathbf{I}(C)$ ideali, tekterimlilerin bir farkı olan binomların sonlu bir kümesi üretilir [11] .

5.2 Gorenstein Tekterimli Eğriler

$S = \langle n_1, ..., n_e \rangle = \{ \ \sum_{i=1}^{e} a_i n_i \mid a_i \in \ \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \}$ sayısal yarıgrubunu alalım. 2.2.1 Tanım' dan, S sayısal yarıgrubu simetriktir $\Leftrightarrow$ $F(S)$, S' nin Frobenius sayısı olmak üzere

$| \ \{n \notin S \ , \ 0 \ < \ n \ \leq \ F(S) \ \}| = | \ n \in S \ , \ 0 \ \leq \ n \ < \ F(S) \ |$

olduğunu biliyoruz. Bu tanıma bir örnek verelim.

5.2.1 Örnek. $S = \langle 4, 5, 6 \rangle = \{0, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

S' nin Frobenius sayısı $F(S) = 7$ ' dir.

$\{ \ n \notin S \ , \ 0 \ < n \ \leq \ F(S) \ \} = \{1, 2, 3, 7\}$

$\{ \ n \in S \ , \ 0 \ \leq \ n \ < \ F(S) \ \} = \{0, 4, 5, 6\}$

ve bu kümelerin eleman sayıları eşit olduğundan 2.2.1 Tanım gereği $S = \langle 4, 5, 6 \rangle$ sayısal yarıgrubu simetrik yarıgruptur.

5.2.2 Tanım. $C = C(n_1, ..., n_e)$, $\mathbb{A}_k^e$ afin uzayında bir tekterimli eğri olsun. Eğer, $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubu simetrik ise, $C = C(n_1, ..., n_e)$ tekterimli eğrisine Gorenstein tekterimli eğri denir.

5.2.3 Örnek. $C = C(4, 5, 6) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ tekterimli eğrisini alalım. 5.2.1 Örnek' ten, $S = \langle 4, 5, 6 \rangle$ sayısal yarıgrubu simetrik bir yarıgruptur. Bu durumda, 5.2.2 Tanım' dan, $C = C(4, 5, 6)$ bir Gorenstein tekterimli eğridir.

Şimdi, $\mathbb{A}_k^3$ ve $\mathbb{A}_k^4$ afin uzayındaki tekterimli eğrilerin tanımlayan ideallerinin üreteçleri ile simetrik yarıgruplar arasındaki bağıntıdan bahsedeceğiz. Herzog [7] makalesinde $C = C(n_1, n_2, n_3)$ tekterimli eğrisi için, $\mathbf{I}(C)$ tanımlayan idealinin 2 üreteçli olması için gerekli ve yeterli koşul $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ yarıgrubu simetriktir önermesini ispatlamıştır. e=3 durumunda, $\mathbf{I}(C)$ idealinin binom üreteçlerinin nasıl bulunduğuna bir örnek verelim.

5.2.4 Örnek. $S = \langle 6, 7, 10 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. Burada,

$4.6 = 2.7 + 1.10$

$4.7 = 3.6 + 1.10$

$2.10 = 1.6 + 2.7$

yazabiliriz. Böylece, $\mathbf{I}(C) = \langle \ x^4 - y^2 z \ , \ y^4 - x^3 z \ , \ z^2 - xy^2 \ \rangle$ elde edilir.

$e = 4$ olduğunda, Bresinsky, $C = C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ tekterimli eğrisi için, eğer

$S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ simetrik yarıgrup ise $\mathbf{I}(C)$, 3 veya 5 eleman tarafından üretilir [12] . Aynı makalede, Bresinsky, $\mathbf{I}(C)$ idealinin 5 üreteçli olduğu durum için, idealin üreteçlerini açık olarak vermektedir.

5.3 Hemen Hemen Gorenstein Tekterimli Eğriler

5.3.1 Tanım. $C = C(n_1, ..., n_e)$, $\mathbb{A}_k^e$ afin uzayında bir tekterimli eğri olsun.Eğer, $S = \langle n_1, ..., n_e \rangle$ sayısal yarıgrubu hemen hemen simetrik ise, $C = C(n_1, ..., n_e)$ (veya $\mathbf{I}(C)$) ' ye hemen hemen Gorenstein denir.

5.3.2 Örnek. $S = \langle 11, 13, 19, 36 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. 2.2.4 Örnek' ten, S' nin hemen hemen simetrik yarıgrup olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $C = C(11, 13, 19, 36)$ eğrisi hemen hemen Gorenstein tekterimli eğridir.

Tezin 4.3 Bölümündeki;
"Bir sayısal yarıgrubun tüm minimal ürteçleri RF-bağıntılarından elde edilir mi ?"' sorusunun cevabının, $S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ sayısal yarıgrubunun hemen hemen simetrik yarıgrup olduğu durumda olumlu olduğunu biliyoruz [9] . Simdi, Eto' nun [13] makalesinin 5. Bölümünde, $S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgrubu için $\mathbf{I}(S)$ idealinin minimal üreteçlerini RF-matrislerinden nasıl elde ettiğini detaylara girmeden tek bir durum için anlatacağız.

$S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun. Eto [13] makalesinin 3. Bölümünde, f sözde-Frobenius sayısı olmak üzere, RF(f) matrislerinin ilk örneklerini vermektedir.

$S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ bir hemen hemen simetrik yarıgrup olsun. Bu durumda, $t(S) \leq 3$ olduğu bilinmektedir [5] .

5.3.3 Teorem. [13] . $S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$, $t(S) = 3$ olan bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup olsun. Her $i \in \{1,2,3,4\}$ için $F(S) + n_i$ ' nin tek türlü faktorizasyonunun olmadığını varsayalım. n_1, n_2, n_3, n_4 ' ün uygun bir sıra değişimi için, f_1 , $f_2 \in PF'(S)$ ' lerin aşağıdaki tipten biri RF-matrisi vardır:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \alpha_4 - 1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha_4 - 2 \\ 0 & \alpha_2 - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 - 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & \alpha_3 - 2 & 0 \\ \alpha_1 - 1 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 - 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ (nUF1)}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_4 - 1 \\ \alpha_1 - 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 - 2 & \alpha_3 - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 - 2 & \alpha_4 - 1 \\ \alpha_1 - 1 & 0 & -1 & \alpha_4 - 2 \\ \alpha_1 - 2 & \alpha_2 - 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ (nUF2)}$$

İspat: [13].

5.3.4 Örnek (Watanabe'nin örneği). $S = \langle 21, 18, 23, 26 \rangle$ sayısal yarıgrubunu alalım. $PF(S) = \{\ 31, 66, 97\ \}$ ' dir. S , $t(S) = 3$ olan bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur. $f = 31 \in PF(S)$ alalım.

$31 = (-1).21 + 0.18 + 0.23 + 2.26$

$31 = 0.21 + (-1).18 + 1.23 + 1.26$

$31 = 0.21 + 3.18 + (-1).23 + 0.26$

$31 = 1.21 + 2.18 + 0.23 + (-1).26$

olduğundan,

$$RF(31) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$RF(66) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$RF(31)$ matrisi, 5.3.3 Teorem' in (nUF1)' deki

$\alpha_4 - 1 = 2 \Rightarrow \alpha_4 = 3$

$\alpha_2 - 1 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = 4$

ve yine $RF(66)$ matrisi,

$\alpha_3 - 2 = 3 \Rightarrow \alpha_3 = 5$

$\alpha_1 - 1 = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 5$

olduğu durumdur.

5.3.3 Teorem' de f_1 , $f_2 \in PF'(S)$ ' lerin RF-matrisleri,

$$RF(f_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \alpha_4 - 1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha_4 - 2 \\ 0 & \alpha_2 - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 - 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \; RF(f_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \alpha_3 - 2 & 0 \\ \alpha_1 - 1 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 - 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu matrislerden,

$f_1 = (-1).n_1 + \qquad\qquad\qquad +(\alpha_4 - 1).n_4$

$f_1 = \qquad\qquad (-1).n_2 + 1.n_3 + (\alpha_4 - 2).n_4$

$f_1 = \qquad\qquad (\alpha_2 - 1).n_2 + (-1).n_3$

$f_1 = 1.n_1 + (\alpha_2 - 2).n_2 + \qquad +(-1).n_4$

ve

$f_2 = (-1).n_1 + 1.n_2 + (\alpha_3 - 2).n_3$

$f_2 = (\alpha_1 - 1).n_1 + (-1).n_2$

$f_2 = (\alpha_1 - 2).n_1 + \qquad +(-1).n_3 + 1.n_4$

$f_2 = \qquad\qquad (\alpha_3 - 1).n_3 + (-1).n_4$

eşitlikleri elde edilir. S hemen hemen simetrik olduğundan, $f_1 + f_2 = F(S)$ ' dir. Böylece, f_1 ' in 1. eşitliği ile f_2 ' nin 4. eşitliği toplanırsa

$f_1 + f_2 = (-1).n_1 + (\alpha_3 - 1).n_3 + (\alpha_4 - 1 - 1).n_4$

elde edilir.

$\Rightarrow F(S) = (-1).n_1 + 0.n_2 + (\alpha_3 - 1).n_3 + (\alpha_4 - 2).n_4$

bulunur ki, buradan $F(S)$' nin RF-matrisinin ilk satırı elde edilir. Yine, f_1 ' in 2. eşitliği ile

f_2 ' nin 3. eşitliğini toplarsak,

$f_1 + f_2 = (\alpha_1 - 2).n_1 + (-1).n_2 + (1 + (-1))n_3 + (\alpha_4 - 2 + 1).n_4$

$\Rightarrow\ F(S) = (\alpha_1 - 2).n_1 + (-1).n_2 + 0.n_3 + (\alpha_4 - 1).n_4$

elde edilir. f_1 ' in 4. eşitliği ile f_2 ' nin 3. eşitliğini toplarsak,

$f_1 + f_2 = (1 + (\alpha_1 - 2)).n_1 + (\alpha_2 - 2).n_2 + (-1).n_3 + 0.n_4$

$\Rightarrow\ F(S) = (\alpha_1 - 1).n_1 + (\alpha_2 - 2).n_2 + (-1).n_3 + 0.n_4$

bulunur. Son olarak, f_1 ' in 3. eşitliği ile f_2 ' nin 4. eşitliğini toplarsak

$\Rightarrow\ f_1 + f_2 = 0.n_1 + (\alpha_2 - 1).n_2 + (\alpha_3 - 1 - 1).n_3 + (-1).n_4$

$\Rightarrow\ F(S) = 0.n_1 + (\alpha_2 - 1).n_2 + (\alpha_3 - 2).n_3 + (-1).n_4$

elde edilir. Böylece,

$$RF(F(S)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha_3 - 1 & \alpha_4 - 2 \\ \alpha_1 - 2 & -1 & 0 & \alpha_4 - 1 \\ \alpha_1 - 1 & \alpha_2 - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 1 & \alpha_3 - 2 & -1 \end{pmatrix}$$

yazılır.

$\varphi : \mathbb{Z}^4 = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{Z}\varepsilon_i \ \mapsto\ \mathbb{Z}$

$\sum_{i=1}^{4} a_i e_i \ \mapsto\ \sum_{i=1}^{4} a_i n_i$

$a = \sum_i a_i e_i \in V(S) =$çek$\varphi$, $a^+ = \sum_i$maks$\{a_i, 0\}\varepsilon_i$ ve $a^- = \sum_i$maks$\{-a_i, 0\}\varepsilon_i$ olmak üzere, $F(a_i) = X^{a^+} - X^{a^-}$ formundaki binomlar ile üretildiğini biliyoruz.

$a_1 = (\alpha_1, -2, -\alpha_3 + 2, 0)$, $a_2 = (0, \alpha_2, -2, -\alpha_4 + 2)$, $a_3 = (-\alpha_1 + 2, 0, \alpha_3, -2)$,

$a_4 = (-2, -\alpha_2 + 2, 0, \alpha_4)$, $w = (1, -1, 1, -1)$ alalım. Burada,

$\alpha_1 = \alpha_3 = 5$ ve $\alpha_2 = 4$, $\alpha_4 = 3$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

$a_1 = (5, -2, -5 + 2, 0) = (5, -2, -3, 0)$

$a_2 = (0, 4, -2, -3 + 2) = (0, 4, -2, -1)$

$a_3 = (-5 + 2, 0, 5, -2) = (-3, 0, 5, -2)$

$a_4 = (-2, -4 + 2, 0, 3) = (-2, -2, 0, 3)$

bulunur.

$V(S) = \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 + \mathbb{Z}w$, $a_1 + a_3 = 2w$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

olur. Bu durumda,

$\mathbf{I}(S) = (F(a_1), F(a_2), F(a_3), F(a_4), F(w), F(a_1 - w), F(a_2 + w))$

elde edilir.

$F(a_1) = X^{a_1^+} - X^{a_1^-} \ \Rightarrow \ F(a_1) = x_1^5 - x_2^2 x_3^3$

$F(a_2) = X^{a_2^+} - X^{a_2^-} \ \Rightarrow \ F(a_2) = x_2^4 - x_3^2 x_4$

$F(a_3) = X^{a_3^+} - X^{a_3^-} \ \Rightarrow \ F(a_3) = x_3^5 - x_1^3 x_4^2$

$F(a_4) = X^{a_4^+} - X^{a_4^-} \ \Rightarrow \ F(a_4) = x_4^3 - x_1^2 x_2^2$

$F(w) = X^{w^+} - X^{w^-} \ \Rightarrow \ F(w) = x_1 x_3 - x_2 x_4$

$a_1 - w = (5, -2, -3, 0) - (1, -1, 1, -1)$

$= (4, -1, -4, 1)$

$F(a_1 - w) = X^{(a_1 - w)^+} - X^{(a_1 - w)^-} \ \Rightarrow \ F(a_1 - w) = x_1^4 x_4 - x_2 x_3^4$

$a_2 + w = (0, 4, -2, -1) + (1, -1, 1, -1)$

$= (1, 3, -1, -2)$

$F(a_2 + w) = X^{(a_2 + w)^+} - X^{(a_2 + w)^-} \ \Rightarrow \ F(a_2 + w) = x_1 x_2^3 - x_3 x_4^2$

ve böylece, $S = \langle 21, 18, 23, 26 \rangle$ için

$\mathbf{I}_S = (x_1^5 - x_2^2 x_3^3,\ x_2^4 - x_3^2 x_4,\ x_3^5 - x_1^3 x_2^2,\ x_4^3 - x_1^2 x_2^2,\ x_1 x_3 - x_2 x_4,\ x_1^4 x_4 - x_2 x_3^4,\ x_1 x_2^3 - x_3 x_4^2)$

elde edilir.

6. KAYNAKLAR

[1] V. Barucci and R. Fröberg, "One Dimensional Almost Gorenstein Rings", *Journal of Algebra*, vol. 188, pp. 418-442, 1997, doi : 101006/jabr. 1996. 6837 .

[2] H. Nari, "Symmetries On Almost Symmetric Numarical Semigroups", *Semigroup Forum* vol. 86, pp. 140-154, 2013, doi : 10.1007/500233-012-9397-z .

[3] J.C. Rosales and P.A. Garcia-Sanchez , *Numerical Semigroups*. Developments in Mathematics. 20. New York, USA : Springer,2009, doi: 10.1007 /978-1-4419-0160-6 .

[4] M. G. Madero-Craven, "Apery Sets of Numerical Semigroups", Master of Arts, University of Maryland, USA, 2003 .

[5] A. Moscariello, "On The Type of An Almost Gorenstein Monomial Curve", *Journal of Algebra*,vol. 456, pp. 266-277, 2016, doi : 10.1006/j.jalgebra.2016.02.019 .

[6] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, New York : Springer-Verlog, 1995 .

[7] J. Herzog, "Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings", *Manuscripta Math* vol. 3, pp. 175-193, 1970 .

[8] H. Nari, T. Numata and K. Watanabe, "Genus of Numerical Semigroups Generated by Three Elements", *Journal of Algebra*,vol. 358 , pp. 67-73, 2012, doi : 10.1016/j.jalgebra.2012.02.010 .

[9] J. Herzog and K. Watanabe, "Almost Symmetric Numerical Semigroups", *Semigroup Forum* vol. 98, pp. 589-630, 2019, doi : 10.1007/s00233-019-10007-2 .

[10] S. M. Johnson, "A Linear Diophantine Problem", *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 12, pp. 390-398, 1960, doi : 10.4153/CJM-1960-033-6 .

[11] R.H. Villarreal, *Monomial Algebras*. Monogrophs and Textbooks in pure and Applied Mathematics, 238. New York : Marcel Dekker, 2001 .

[12] H. Brensinsky, "Symmetric Semigroups of Integers Generated by four elements, *Manuscripta Math*,vol. 17, pp. 205-219. 1975 .

[13] K. Eto, "Almost Gorenstein Monomial Curves In Affine Four Space", *Journal of Algebra*, vol. 488, pp. 362-387, 2017, doi : 10.1016/j.jalgebra.2017.05.044 .