T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA EŞİTSİZLİKLER

EMİNE KIRHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, OCAK - 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Emine KIRHAN tarafından hazırlanan "**DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA EŞİTSİZLİKLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 27 Ocak 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Ali GÜVEN Balıkesir Üniversitesi	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR Çanakkale 18 Mart Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA EŞİTSİZLİKLER" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Emine KIRHAN

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2018/071 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
EMİNE KIRHAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, OCAK - 2020

Bu tez çalışmasında değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisi üzerine yapılan araştırmaların bir özeti verilmiştir. Tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş bölümüdür.
İkinci bölümde temel tanımlara yer verilmiş olup, özel halde değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılmıştır.
Üçüncü bölümde değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım problemlerine yer verilmiştir, ağırlıklı ve ağırlıksız durumda yaklaşım teorisinin eş zamanlı yaklaşım teoremlerine bakılmıştır.
Dördüncü bölümde değişken üslü Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ifade edilmiştir. Ayrıca, Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu ile yaklaşım hızı konusunda bazı eşitsizlikler verilmiştir.
Beşinci bölüm bu tezde elde edilen sonuçların özetinden oluşmaktadır.
Altıncı bölümde ise tez çalışmasında kullanılan kaynaklara yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üslü Lebesgue uzayı, düz teorem, ters teorem, Lipschitz sınıfı, Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 46

ABSTRACT

THE INEQUALITIES IN LEBESGUE SPACES WITH VARIABLE EXPONENT
MSC THESIS

EMİNE KIRHAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, JANUARY - 2020

In this thesis a summary of the results obtained on approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent is given. The thesis consists of six chapters.
The first chapter is the introduction.
In the second chapter, basic definitions are given and Lebesgue spaces with variable exponents are introduced in a special case.
In the third chapter, approximation problems in variable exponential Lebesgue spaces are given, and theorems related to the simultaneous approximation of approximation theory in weighted and non weighted situations are examined.
e fourth chapter, direct and inverse theorems of approximation theory are expressed in variable exponential Smirnov classes. In addition, some inequalities, relating the approximation properties of Faber-Laurent rational functions, on the rate of approximation are given.
The fifth chapter consists of a brief summary of the results obtained in this thesis.
In the sixth chapter, the references used in the thesis are given.

KEYWORDS: Lebesgue space with variable exponent, direct theorem, inverse theorem Lipschitz class, Faber-Laurent rational function.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 46

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{D}$	: Birim disk
$\mathbb{T}$	: Birim çember veya $[0,2\pi]$ aralığı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{L^p}([\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{W^p}([\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde Sobolev uzayı
$\boldsymbol{M(f)}$	: $[0,2\pi]$ üzerinde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
$\boldsymbol{T_n(x)}$	: n dereceli trigonometrik polinom
$\boldsymbol{\Pi_n}$	: derecesi n ' yi geçmeyen trigonometrik polinomlar ailesi
$\boldsymbol{P_n(z)}$	: n dereceli cebirsel polinom
$\boldsymbol{D_n(t)}$	: Dirichlet çekirdeği
$\boldsymbol{F_n(t)}$	: Fejér çekirdeği
$\boldsymbol{S_n(f)}$	: f ' in Fourier seri açılımının n. kısmi toplamı
$\boldsymbol{V_n(f)}$	: f ' in de la Vallée-Poussin ortalaması
$\boldsymbol{\mathcal{K}_n(t)}$	: De la Vallée-Poussin çekirdeği
$\boldsymbol{\sigma_n(f)}$	: f ' in Cesàro ortalaması
$\boldsymbol{L^{p(\cdot)}}([\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde değişken üslü Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{W^{p(\cdot)}}([\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde değişken üslü Sobolev uzayı
$\boldsymbol{\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ' de düzgünlük modülü
$\boldsymbol{E_n(f)_{p(\cdot)}}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ' de en iyi yaklaşım hatası
$\boldsymbol{T_n^0(f)}$	: f ' e en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom
$\boldsymbol{T_n^*(f)}$	: f ' e hemen hemen en iyi yaklaşan trigonometrik polinom
$\boldsymbol{Lip^{p(\cdot),\alpha}}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ' de genelleşmiş Lipschitz sınıfı
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Sonlu uzunluklu Jordan eğrisi
$\mathfrak{C}$	: Carleson eğri ailesi
$\mathfrak{D}$	: Dini düzgün eğri ailesi
$\boldsymbol{G}$	: Basit bağlantılı ve sınırlı bölge
$\boldsymbol{\overline{G}}$	: G bölgesinin kapanışı
$\boldsymbol{G^-}$	: $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$

$\boldsymbol{E^p(G)}$	: G bölgesinde Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{E^{p(\cdot)}(G^-)}$	: G^- bölgesinde Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{S_\Gamma(f)}$	: Cauchy singüler integrali
$\boldsymbol{M_\Gamma(f)}$	: Γ üzerinde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
$\boldsymbol{F_k(z)}$	: G bölgesinin *n* dereceli Faber polinomu
$\boldsymbol{\widetilde{F_k}(1/z)}$	: $\overline{G^-}$ bölgesinin Faber rasyonel fonksiyonu
$\boldsymbol{R_n(f,z)}$	: f ' in *n* dereceli Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu
$\boldsymbol{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$	: Γ üzerinde değişken üslü Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{E^{p(\cdot)}(G)}$	: G bölgesinde değişken üslü Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{E^{p(\cdot)}(G^-)}$	: G^- bölgesinde değişken üslü Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{E_n(f)_{G,p(\cdot)}}$	: $E^{p(\cdot)}(G)'$ de en iyi yaklaşım hatası
$\boldsymbol{\Delta_k(f)(z)}$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de Faber seri açılımının Lacunary kısmi toplamı
$\boldsymbol{\widetilde{\Delta}_k(f)(z)}$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de Faber seri açılımının Lacunary kısmi toplamı

ÖNSÖZ

Lisans eğitimim ve tez çalışmam boyunca bana değerli zamanını ayıran, bilgi ve tecrübesini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE' ye çok teşekkür ederim.

Hayatta karşılaştığım her zorlukta yanımda bulunan ve yapıcı eleştirileriyle beni motive eden sevgili eşim Muhammetali KIRHAN' a ve bugünlere gelmemde büyük emekleri olan aileme çok teşekkür ederim

Balıkesir, 2020 **Emine KIRHAN**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belli bir normlu uzaydan olan fonksiyonlara bu uzayın belirli alt uzayından olan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenmektedir. Yaklaşım teorisinde polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar bu tür alt uzaylar olarak düşünülebilir.
Alt uzaya bir örnek verelim:
$a, b \in \mathbb{R}$ için $[a, b]$ ile $\mathbb{R}$ nin bir kapalı aralığını ve (a, b) ile açık aralığını göstereceğiz.
$C_{[a,b]}$ ile $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonların uzayını gösterelim.
Her bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, polinomu için her zaman $P(x) \in C_{[a,b]}$ yazılabilir. $\Pi_{[a,b]}$ ile tüm $P(x)$ polinomlarının oluşturduğu kümeyi işaretlersek $\Pi_{[a,b]} \subset C_{[a,b]}$ olur.
Böylece $\Pi_{[a,b]}$, $C_{[a,b]}$ uzayının alt uzayı olur.

$\Pi_{[a,b]}$ alt uzayını $C_{[a,b]}$ uzayından farklı kılan en önemli özelliklerden bir tanesi $\Pi_{[a,b]}$ alt uzayından olan her $P(x)$ polinomunun her mertebeden sürekli türeve sahip olması ve üstelik bu türevin $\Pi_{[a,b]}$ ye dahil olmasıdır. Böylece $\Pi_{[a,b]}$ alt uzayından olan fonksiyonların daha iyi özelliklere sahip olduğu görülmektedir.

Bir X normlu uzayı ve bunun $Y \subset X$ alt uzayı verildiğinde $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - y\| < \varepsilon$ olacak şekilde $y \in Y$ elemanı bulunabiliyorsa X uzayından olan fonksiyonlara Y alt uzayından olan fonksiyonlara istenilen kadar küçük hata ile yaklaşım mümkündür denir.

Yaklaşım teorisinin iki önemli problemi vardır:

1. Nitelik problemi

2. Nicelik problemi

Nitelik problemi, bir uzaydan olan her f fonksiyonuna alt uzaydan olan fonksiyonlarla istenilen kadar küçük hata ile yaklaşılabilmenin araştırılması problemidir.
Örneğin; $C_{[a,b]}$ yukarıda tanımladığımız uzay, $\Pi_{[a,b]}$ ise yukarıda tanımlanan polinomlar uzayı olsun.

$f \in C_{[a,b]}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\|f - P_f\right\|_{C_{[a,b]}} := \max_{x \in [a,b]} \left|f(x) - P_f(x)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P_f \in \Pi_{[a,b]}$ bulunabiliyorsa $C_{[a,b]}$ de polinomlara yaklaşım için nitelik problemi pozitif çözümlenmiştir denir.

İkinci problem sadece birinci problem pozitif çözümlendiği durumda devreye girer. İkinci problemde yaklaşımın hızı değerlendirilir. Yüksek hızlı yaklaşım daha az işlem gerçekleştirerek başlangıçta verilen fonksiyona daha hızlıca ulaşmamıza imkan sağlar.

Nicelik probleminde temel olarak iki problem yer almaktadır. Birinci problemde yaklaşım teorisinin düz teoremleri incelenmektedir. En iyi yaklaşım sayısının üstten düzgünlük modülü ile değerlendirildiği teoremlere yaklaşım teorisinin düz teoremleri denir. Belli fonksiyonlar ailesinde yaklaşım hızı verildiğinde fonksiyonların düzgünlük özelliklerinin elde edildiği teoremlere, yaklaşım teorisinin ters teoremleri denir.

$f \in L^p[0,2\pi]$ ve Π_n derecesi n yi aşmayan cebirsel polinomların bir sınıfı olsun.

$$E_n(f)p := \inf_{P_n \in \Pi_n} \|f - P_n\|_{L^p[0,2\pi]}$$

sayısına Π_n sınıfında f fonksiyonuna en iyi yaklaşım hatası denir.

Eğer Π_n sınıfında nitelik problemi pozitif çözümlenmiş ise $E_n(f) \to 0$, $n \to \infty$ olur. Bir başka deyişle

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0$$

olur.

$f \in L^p[0,2\pi]$ için $r \in \mathbb{N}$ olduğunda r. düzgünlük modülü

$$\Omega_r(f,\delta)_p := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{v=0}^{r} (-1)^{r-v} \binom{r}{v} f(x+vh) \right\|_{L^p[0,2\pi]} ,\delta > 0$$

olarak tanımlanır.

$L^p[0,2\pi]$ uzayında bir düz teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Eğer $f \in L^p[0,2\pi]$, $r = 1,2,...$ ise pozitif bir $c > 0$ sabiti vardır öyle ki $\forall n = 1,2,3,...$ için

$$E_n(f)_p \le c.\Omega_r\left(f,\frac{1}{n+1}\right)_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıda verilen düz teorem $r = 1$ ve $p = \infty$ için Jackson [1] tarafından, $r = 2$ ve $1 \leq p < \infty$ için Akhiezer [2] tarafından, $r \geq 1$ ve $p = \infty$ için ise Stechkin [3] tarafından ispatlanmıştır.

$L^p[0,2\pi]$ uzayında ters teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Eğer $\in L^p[0,2\pi]$, $r = 1,2, \ldots$ ise pozitif bir $c > 0$ sabiti vardır öyle ki $\forall n = 1,2,3, \ldots$ için

$$\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{c}{n^r} \sum_{v=1}^{n} v^{r-1} E_{v-1}(f)_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıda verilen ters teorem $r \geq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ için A.F. Timan ve M.F. Timan [4] tarafından 1950 yılında, $r \geq 1$ ve $p = \infty$ için Stechkin [3] tarafından 1951 yılında ispatlanmıştır.

Zaman zaman klasik Lebesgue uzaylarından daha genel uzaylarda da yaklaşım problemleri incelenmektedir. Vurgulayalım ki,

Klasik Lebesgue uzaylarında bazı fonksiyonların özelliklerini araştırmak zordur.

Örneğin;

$$f(x) = |x|^{-1/3}$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon çok iyi özelliklere sahip olmasına rağmen $[1, \infty)$ aralığındaki hiçbir p değeri için $L^p(\mathbb{R})$ sınıfına giremez. Ancak burada $\mathbb{R}$ kümesini parçalayarak

$$f \in L^2([-2,2]) \quad ve \quad f \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$$

elde edilir.

Bu yöntemle devam edilirse daha karmaşık fonksiyonları incelemek için daha fazla parça ve daha fazla fonksiyon sınıfına ihtiyaç duyulur.

Örneğin;

$$g(x) = |x|^{-1/3} + |x - 1|^{-1/4}$$

fonksiyonu için $g \in L^2[-1,1\ /\ 2]$, $g \in L^3[1\ /\ 2,2]$ ve $g \in L^{9/2}(\mathbb{R} \setminus [-1,2])$

Bu yaklaşımın pek kullanışlı olmadığı görülmektedir.

Bu gibi durumlarda bölgeleri ayırmak yerine p sabitini bir fonksiyon kabul ederek yeni fonksiyon sınıfları tanımlanabilir.

Örnek verdiğimiz fonksiyonlar için

$$p(x) = \frac{9|x| + 2}{2|x| + 1} = \frac{9}{2} - \frac{5 / 2}{2|x| + 1}$$

üs olarak alabiliriz.

Burada $p(0) = 2$, $p(1) = 11 / 3$ ve $p(x) \to 9 / 2$, $|x| \to \infty$, ve kolayca görülebilir ki

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \quad ve \quad \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p(x)}\, dx < \infty.$$

Böylece yeni değişken üslü fonksiyon uzayların araştırılması ve bu uzaylarda yaklaşım problemlerinin incelenmesi problemi ortaya çıkmıştır.

Bu tez çalışmasında üzerinde durulan $L^{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları bu fonksiyon uzaylarına bir örnek olarak gösterilebilir.

$N: [0, \infty) \to [0, \infty]$ konveks ve soldan sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $N(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$ ve $\lim_{t \to 0^+} N(t) = 0$ ise bu fonksiyona Young fonksiyonu denir.

Hemen $\forall x \in \Omega$ için $\phi(x,\cdot)$ bir Young fonksiyonu olmak üzere $\phi: \Omega \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonunu alalım. En az bir $\lambda > 0$ sayısı için

$$\rho_{\phi}(f) = \int_{E} \phi\left(x, \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Musielak-Orlicz Uzayı veya genelleşmiş Orlicz uzayı denir. Orlicz Uzayı $L^{\Phi}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay,

$$\|f\|_{L^{\phi(\cdot,\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0: \rho_{\phi}(f) \leq 1\}$$

normuyla bir Banach uzayı olur.

Özel halde, t nin bir fonksiyonu olmak üzere $\phi(x, t) = \phi(t)$ olarak alındığında Orlicz Uzayı elde edilir. Eğer $\phi(x, t) = t^{p(\cdot)}$ alınırsa değişken üslü Lebesgue uzayı, Eğer $\phi(x, t) = t^{p(\cdot)} \omega(x)$ alınırsa ağırlıklı Lebesgue uzayı elde edilir. [5]

Bu tez çalışmasında değişken üslü uzaylarda yaklaşımla ilgili:

A. Guven and D. M. Israfilov, “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 4, no. 2, 285–299, 2010.

D. M. Israfilov and A. Testici, “Some Inverse and Simultaneous Approximation Theorems in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces,” *Analysis Mathematica*, vol. 44, no. 4, 475–492, 2018.

D. M. Israfilov, and A. Testici, “Simultaneous approximation in Lebesgue space with variable exponent”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan,* 44(1), 3-18, 2018.

D. M. Israfilov and A. Testici, “Approximation by Faber–Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent,” *Indagationes Mathematicae*, vol. 27, no. 4, 914–922, 2016.

D. M. Israfilov and A. Testici, “Approximation in Smirnov classes with variable exponent,” *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 60, no. 9, 1243–1253, 2015.

D. M. Israfilov and A. Testici, “Multiplier and approximation theorems in Smirnov classes with variable exponent,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 3, 2018

çalışmalarının bir özeti yapılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar

2.1.1 Tanım g , $[0,2\pi] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $t_1, t_2 \in [0,2\pi]$ ve $\delta > 0$ için

$$w(g,\delta): \sup_{|t_1 - t_2| < \delta} \{|g(t_1) - g(t_2)|\}$$

ifadesine g fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

$$\int_0^{\pi} \frac{w(g,t)}{t} dt < \infty$$

koşulunu sağlayan g fonksiyonuna Dini-Sürekli fonksiyon denir [6].

2.1.2 Tanım $\Gamma: \gamma_0(t), 0 \leq t \leq 2\pi$ bir Jordan eğrisi olsun. Eğer Γ düzgün eğri ve $\gamma_0'(t)$ fonksiyonu Dini-sürekli ise Γ eğrisine Dini düzgün eğri denir. Kompleks düzlemde tüm Dini düzgün eğrilerin ailesi $\mathfrak{D}$ ile gösterilir [6].

2.1.3 Tanım f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\operatorname*{ess\,sup}_x f(x) = \inf\{b: f(x) \leq b \text{ hemen hemen her yerde}\}$$

ifadesine f fonksiyonunun esaslı supremumu denir. Benzer şekilde

$$\operatorname*{ess\,inf}_x f(x) = \sup\{a: f(x) \geq a \text{ hemen hemen her yerde}\}$$

ifadesine f fonksiyonunun esaslı infimumu denir [7].

2.1.4 Tanım $f \in L^1(\mathbb{T})$ olsun. $k = 1, 2, 3, \dots$ için

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad , \quad b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ile gösterilir.

Burada $a_k(f)$, $b_k(f)$ katsayılarına f fonksiyonunun Fourier katsayıları denir [8].

2.1.5 Tanım $f \in L^1(\mathbb{T})$ olsun.

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\, tan(t-x)\,/\,2} \mathrm{d}t$$

ifadesine f fonksiyonunun eşleniği denir ve

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, sin\, kx - b_k \, cos\, k\, x$$

olarak yazılabilir [9].

2.1.6 Tanım $f \in L^1(\mathbb{T})$ ve $a_k(f),\ b_k(f)$ Fourier katsayıları olsun.

$$S_n(f) := S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ifadesine f fonksiyonunun n'inci Fourier kısmi toplamı denir [10].

2.1.7 Tanım $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ve $k = 1,2,\cdots,n$ olsun. $|a_n| + |b_n| \neq 0$ için

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k (cos\, kx + b\, sin\, kx)$$

ifadesine n dereceli trigonometrik polinom denir [10].

Şimdi aşağıda L^p uzayında önemli olan iki trigonometrik ortalamayı tanımlayalım.

2.1.8 Tanım $\{p_n\}_0^{\infty}$ pozitif bir reel sayı dizisi olsun.

$$P_n := \sum_{m=0}^{n} p_m \quad , \qquad p_{-1} = P_{-1} := 0$$

olmak üzere

$$N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} S_m(f)(x)$$

$$R_n(f)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f)(x)$$

sırasıyla f fonksiyonunun Fourier serisine göre Nörlund ve Riesz ortalamaları denir.

2.1.9 Tanım $\{p_n\}_0^{\infty}$ pozitif bir reel sayı dizisi olsun. $p_n = 1$, $n \geq 0$ olmak üzere

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} S_m(f)(x)$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisine göre Cesàro ortalaması denir.

2.1.10 Tanım $1 < p < \infty$ için $T_h'(f)(x) \coloneqq f(x+h) - f(x)$ olarak tanımlansın. $\delta > 0$ için

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|T_h'(f)\|_p$$

ifadesine $L^p(\mathbb{T})$ uzayında süreklilik modülü denir [11].

2.1.11 Tanım $f \in L^1$ olsun. $x \in [0,2\pi]$ için

$$M(f)(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, \mathrm{d}t \quad , \quad x \in [0,2\pi]$$

ifadesine Hardy-Littlewood maximal operatörü denir [11].

2.1.12 Tanım $f \in L^1(\mathbb{T})$ olsun.

$$V_n(f)(x) \coloneqq V_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{v=n}^{2n-1} S_v(f)(x)$$

ifadesine De la Vallee Poussin ortalaması denir. Bu ortalamanın integral gösterimi

$$V_n(f) \coloneqq V_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, \mathrm{d}t$$

biçimindedir. Burada

$$K_n(t) \coloneqq \frac{1}{\pi} \frac{\sin(3nt/2)\sin(nt/2)}{2n \sin^2(t/2)}$$

De la Vallee Poussin çekirdeği olarak tanımlanır [12].

Şimdi aşağıda iki önemli trigonometrik toplamı verelim:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k t = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}$$

ve

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right]^2$$

sırasıyla Dirichlet Çekirdeği ve Fejer Çekirdeği olarak tanımlanır [10].

2.1.13 Tanım $f \in L^1(\mathbb{T})$ olsun.

$$K_n(f)(x) \coloneqq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

ifadesi f fonksiyonunun kısmi toplamlarının n. aritmetik ortalaması olarak tanımlanır. [3] çalışmasında

$$K_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) F_n(x-t)\, \mathrm{d}t$$

olduğu görülmüştür [9].

2.1.14 Tanım $A \coloneqq [0,2\pi]$ veya Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olduğunda, Lebesgue ölçülebilir bir $\omega: A \to [0,\infty]$ fonksiyonu için $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna A üzerinde bir ağırlık fonksiyonu denir [13].

2.1.15 Tanım $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olsun. Sürekli bir $\Gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. Γ bir çembere homeomorfik (topolojik eşyapılı) ise buna Jordan eğrisi denir.

2.1.16 Tanım Γ eğrisi sınırlı değişimli bir parametrizasyona sahip ise bu eğriye sonlu uzunluklu eğri denir.

2.1.17 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir eğri ve $z \in \Gamma$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$\Gamma(z,\varepsilon) \coloneqq \{t \in \mathbb{C}: \Gamma_n |t-z| < \varepsilon\}$

olsun. Eğer

$$\mathop{sup}_{\varepsilon>0} \sup_{z\epsilon\Gamma} \frac{|\Gamma(z,\varepsilon)|}{\varepsilon} < \infty$$

ise Γ ‘ ya Carleson eğrisi denir. Carleson eğrilerinin kümesi $\mathfrak{C}$ ile gösterilir [13].

2.1.18 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve ω, Γ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $1 < p < \infty$ için

$$\left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |f(z)|^p \omega(z) |\mathrm{d}z| \right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan Γ üzerinde tanımlı bütün Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli f fonksiyonlarının kümesine ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L^p_\omega(\Gamma)$ ile gösterilir [14].

2.1.19 Tanım $G \subset \mathbb{C}$ sınırlı, basit bağlantılı bir bölge, f, G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \partial G$ olacak şekilde bir $(\gamma_n) \in G$ sonlu uzunluklu γ_n eğrilerinin dizisi için

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz| < c(f) < \infty \quad , \quad 1 \le p < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa $f \in E^p(G)$ denir.

2.1.20 Tanım ω, Γ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. $1 < p < \infty$ için

$$E_\omega^p(G) := \{f \in E^1(G): f \in L_\omega^p(\Gamma)\}$$

olarak tanımlanan kümeye G bölgesinde analitik fonksiyonların ağırlıklı Smirnov sınıfı denir [14].

Şimdi aşağıda değişken üslü Lebesgue uzalarında yer alan temel tanımları verelim:

2.1.21 Tanım $p(\cdot): \mathbb{T} := [0,2\pi] \to [1,\infty)$ ve $p(\cdot)$ Lebesgue ölçülebilir 2π periyodik bir fonksiyon olsun.

$$1 \le p_- := \text{ess} \inf_{x\in\mathbb{T}} p(x) \le \text{ess} \sup_{x\in\mathbb{T}} p(x) := p^+ < \infty$$

ve pozitif bir c sabiti için

$$|p(x) - p(y)|\, ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \le c\ , \quad x, y \in \mathbb{T}\,, \quad 0 < |x-y| \le \frac{1}{2}$$

koşulları x, y den bağımsız bir c sabiti ile sağlanıyorsa $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ denir. Eğer $p_- > 1$ ve $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ise $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ denir [9].

2.1.22 Tanım $p(x): \mathbb{T} \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir üs fonksiyonu olsun.

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)}\, \mathrm{d}x < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ile gösterilir.

$L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayı $1 \le p^+ < \infty$ olduğunda

$$\|f\|_{p(\cdot)} = inf\{\lambda > 0: \rho_{p(\cdot)}(f\ /\ \lambda) \le 1\}$$

normuyla bir Banach uzayıdır [9].

2.1.23 Tanım $p(\cdot): \mathbb{T} \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir, 2π periyodik bir fonksiyon olsun.

$$W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T}) := \{f: f^{(k-1)} \text{ mutlak sürekli ve } f^{(k)} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})\} \quad k = 1,2,...$$

kümesine k. mertebeden değişken üslü Sobolev uzayı denir.

Ayrıca $W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})\,,\ 1 \le p^+ < \infty$ olduğunda

$$\|f\|_{W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^{p(\cdot)}} + \left\|f^{(k)}\right\|_{L^{p(\cdot)}}$$

normuna göre bir Banach uzayı olur [12].

2.1.24 Tanım Eğer $p(\cdot)$ üs fonksiyonu için

$$\sup_{B_j} |B_j|^{-1} \left\| \omega \chi_{B_j} \right\|_{p(\cdot)} \left\| \omega^{-1} \chi_{B_j} \right\|_{p'(\cdot)} < \infty \ , \quad 1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$$

koşulları sağlanıyor ise $\omega \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ denir. Burada supremum tüm $B_j \subset \mathbb{T}$ açık aralıkları üzerinden alınmıştır, χ_{B_j} ise B_j nin karakteristik fonksiyonudur [9].

2.1.25 Tanım $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun.

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),\omega} := \sup_{|h| \leq \delta} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] \, \mathrm{d}t \right\|_{p(\cdot),\omega} , \qquad \delta > 0$$

ifadesine ağırlıklı düzgünlük modülü denir [9].

3. $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

3.1 Genelleşmiş $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ Lebesgue Uzaylarında Trigonometrik Yaklaşım

3.1.1 Temel Tanımlar ve Yardımcı Sonuçlar

Her şeyden önce $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzaylarında [11] çalışmasında elde edilen düz teoremi vereceğiz. Bu teoremi vermeden önce gereken ön bilgileri ve yardımcı sonuçları verelim.

$p \in P(\mathbb{T})$ yani $p(x)$, 2π periyotlu olup

$1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ ve pozitif bir c sabiti için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{-\ln|x-y|} \quad , \quad 0 < |x-y| \leq \frac{1}{2}$$

koşulları sağlansın.

3.1.1.1 Tanım $p \in P(\mathbb{T})$ ve $f \in L^{p(\cdot)}$ olsun.

$$T_h(f)(x) := \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,\mathrm{d}t$$

olmak üzere

$$\Omega_{p(\cdot)}(f,\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \|T_h(f)\|_{p(\cdot)} \ , \qquad \delta > 0$$

ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [11].

3.1.1.2 Tanım Verilen $p(\cdot): \mathbb{T} \to [0,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir f fonksiyonu için $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. $L^{p(\cdot)}$ uzayında

$$\Delta_t^r f(x) := \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s} \binom{r}{s} f(x+st) \ , \qquad r = 1,2,\ldots$$

her pozitif r tamsayısı için r. düzgünlük modülü

$$\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} := \sup_{|h|\leq\delta} \left\| \frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t^r f(x)\,\mathrm{d}t \right\|_{L^{p(\cdot)}} \ , \ h > 0$$

olarak tanımlanır.

$p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun. Eğer f, f_1 ve $f_2 \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ise o zaman r. düzgünlük modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\Omega_r(f,\delta)$, $\delta > 0$ için negatif olmayan, sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

(ii) $\Omega_r(f,\delta)$, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayında düzgün sınırlı bir fonksiyondur.

(iii) $\lim_{\delta\to 0} \Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} = 0$

(iv) $\Omega_r(f_1+f_2,\delta)_{p(\cdot)} \leq \Omega_r(f_1,\delta)_{p(\cdot)} + \Omega_r(f_2,\delta)_{p(\cdot)}$ [12].

3.1.1.3 Tanım $p \in P(\mathbb{T})$ ve $f \in L^{p(x)}$ olsun. Π_n derecesi $\leq n$ olan trigonometrik polinomların kümesi olmak üzere

$$E_n(f)_{p(\cdot)} := \inf\{\|f - T_n\|_{L^{p(\cdot)}} : T_n \in \Pi_n\} \quad , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

olarak tanımlanan sayıya f in n dereceli polinomlar sınıfıda en iyi yaklaşım sayısı denir [11].

3.1.1.4 Tanım $p \in P(\mathbb{T})$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$Lip(\alpha, p(\cdot)) = \{f \in L^{p(\cdot)} : \Omega_{p(\cdot)}(f,\delta) = O(\delta^\alpha), \qquad \delta > 0\}$$

kümesine α dereceden Lipschitz sınıfı denir [11].

$$\Delta g_n := g_n - g_{n+1} \quad , \quad \Delta_m g(n,m) := g(n,m) - g(n,m+1)$$

sayılarını tanımlayalım.

$\{p_n\}_0^\infty$, reel sayılı bir dizisi verildiğinde sadece bu diziye bağlı olup tüm $n \geq m$ ler için

$p_n \leq c p_m$, $(c p_n \geq p_m)$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir c sabiti bulunuyorsa diziye hemen hemen monoton azalan (artan) dizi denir.

Böyle dizileri $\{p_n\}_0^\infty \in AMDS$ ($\{p_n\}_0^\infty \in AMIS$) biçiminde işaretleyeceğiz.

Şimdi aşağıda yardımcı sonuçları verelim:

3.1.1.5 Lemma $p \in P(\mathbb{T})$ ve $f \in W^{p(\cdot)}$ olsun. $\forall\, n = 1,2,\ldots$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = O\left(\frac{1}{n}\|f'\|_{p(\cdot)}\right)$$

eşitliği sağlanır.

3.1.1.6 Teorem Eğer $p \in P_0(\mathbb{T})$ ise $f \in L^{p(\cdot)}$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = O\left(\Omega_{p(\cdot)}\left(f, \frac{1}{n}\right)\right) \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

eşitliği sağlanır.

3.1.1.7 Lemma $p \in P_0(\mathbb{T})$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\forall f \in Lip\big(\alpha, p(\cdot)\big)$ için

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} = O(n^{-\alpha}) \quad , \quad n = 1,2, \dots$$

eşitliği sağlanır [11].

3.1.1.8 Lemma $p \in P_0(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $f \in Lip\big(1, \mathrm{p}(\cdot)\big)$ ise f fonksiyonu mutlak sürekli ve $f' \in L^{p(\cdot)}$ dir. Yani $f \in W^{p(\cdot)}$ [11].

3.1.1.9 Lemma $p \in P_0(\mathbb{T})$ ve $f \in Lip\big(1, p(\cdot)\big)$ olsun. $n = 1,2, \dots$ için

$$\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_{p(\cdot)} = O(n^{-1})$$

eşitliği sağlanır [11].

3.1.1.10 Lemma $\{p_n\}_0^\infty$ pozitif bir sayı dizisi olsun. Eğer $\{p_n\}_0^\infty \in AMDS$ veya $\{p_n\}_0^\infty \in AMIS$ ve $(n+1)p_n = O(P_n)$ ise, $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha} p_{n-m} = O(n^{-\alpha} P_n)$$

eşitliği sağlanır. Lemma 3.1.1.10 [15] çalışmasında ispatlanmıştır.

3.1.2 Ana Sonuçlar

3.1.2.1 Teorem $p \in P_0(\mathbb{T})$, $0 < \alpha < 1$, $f \in Lip\big(\alpha, p(\cdot)\big)$ ve $\{p_n\}_0^\infty$ pozitif bir sayı dizisi olsun. Eğer $\{p_n\}_0^\infty \in AMDS$ veya $\{p_n\}_0^\infty \in AMIS$ ve $(n+1)p_n = O(P_n)$, ise

$$\|f - N_n(f)\|_{\boldsymbol{p}(\cdot)} = O(n^{-\alpha})$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} f(x)$$

eşitliği kullanılırsa

$$f(x) - N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\{f(x) - S_m(f)(x)\}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1.7 ve Lemma 3.1.1.10 kullanılarak

$$\|f - N_n(f)\|_{\boldsymbol{p}(\cdot)} \leq \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} \|f - S_m(f)\|_{\boldsymbol{p}(\cdot)}$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n} p_{n-m} O(m^{-\alpha}) + \frac{p_n}{P_n}\|f - S_0(f)\|_{\boldsymbol{p}(\cdot)}$$

$$= \frac{1}{P_n} O(n^{-\alpha}P_n) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) = O(n^{-\alpha})$$

elde edilir.

3.1.2.2 Teorem $p \in P_0(\mathbb{T})$, $f \in \mathrm{Lip}(1, \mathrm{p}(\cdot))$ ve $\{p_n\}_0^\infty$ pozitif bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\left|\Delta_{p_k}\right| = O(P_n)$$

veya

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta_{p_k}\right| = O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

ise $n = 1,2, \ldots$ için

$\|f - N_n(f)\|_{\boldsymbol{p}(\cdot)} = O(n^{-1})$ elde edilir.

3.1.2.3 Teorem $p \in P_0(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$, $f \in Lip(\alpha, p(\cdot))$ ve $\{p_n\}_0^\infty$ pozitif bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right| = O\left(\frac{P_n}{n+1}\right)$$

ise $n = 1,2, \ldots$

$\|f - R_n(f)\|_{\boldsymbol{p}(\cdot)} = O(n^{-\alpha})$

elde edilir.

3.2 $L_{\omega}^{p(\cdot)}([0, 2\pi])$ Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Düz ve Ters Teoremler

3.2.1 Yardımcı Sonuçlar

3.2.1.1 Teorem $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$, $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. M maksimal operatörü, $L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayında sınırlıdır, ancak ve ancak $\omega \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$. Pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $\forall f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ için

$$\|Mf\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır [16].

3.2.1.2 Lemma $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $\forall f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ için

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1.3 Lemma $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $n = 1,2, \ldots$ için

$$\|S_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1.4 Lemma T_n , n. dereceden bir trigonometrik polinom olsun. O zaman pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega(T_n, \delta)_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\delta\|T_n'\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1.5 Lemma $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. O zaman pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $\forall f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ için

$$\|K_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot),\omega} \quad , \qquad n = 1,2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1.6 Lemma $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer T_n, n. dereceden bir trigonometrik polinom ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $r = 1,2,3, \ldots$ için

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)n^r\|T_n\|_{p(\cdot),\omega} \quad , \qquad n = 1,2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1.7 Lemma $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $T_n, n.$ dereceden bir trigonometrik polinom olsun. Eğer $\{M_n\}$ ve $\{N_n\}$ reel sayı dizileri olup

$$\|f - T_n\|_{p(\cdot),\omega} \leq M_n \quad ve \quad \|T_n'\|_{p(\cdot),\omega} \leq N_n$$

ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\{M_n + \delta N_n\} \quad , \quad \delta > 0$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.1.8 Lemma $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer T_n^0 , f'e en iyi yaklaşan polinom ise pozitif bir $c(p)$ sabiti ve $k = 1,2,3, \ldots$ için

$$\left\|(T_n^0)^{(k)}\right\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p) \sum_{v=1}^{n} v^{k-1} E_v(f)_{p(\cdot),\omega} \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır [9].

3.2.2 Ana Sonuçlar

3.2.2.1 Teorem Eğer $f \in W_{\omega}^{p(\cdot),1}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} \leq \frac{c(p)}{n} E_n(f')_{p(\cdot),\omega} \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$$u_0(f)(x) := \frac{a_0}{2} \quad ve \quad u_k(f)(x) := (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier katsayıları olmak üzere

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} u_k(f)(x) \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

f'in Fourier serisinin n. kısmi toplamını göz önüne alalım. Kolayca görülebilir ki

$$u_k\big(\widetilde{f'}\big)(x) = k u_k(f)(x) \quad , \quad k = 1,2, \ldots$$

$S_k(f') - f'$ fonksiyonunun eşleniğini, $(S_k(f') - f')^{\sim}$ olarak gösterelim. Lemma 3.2.1.2 ve Lemma 3.2.1.3 kullanılarak

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} u_k\big(\widetilde{f'}\big)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$= \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left[S_k\big(\widetilde{f'}\big) - \widetilde{f'}\right] - \frac{1}{n+1}\left[S_n\big(\widetilde{f'}\big) - \widetilde{f'}\right]\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left\|S_k\big(\widetilde{f'}\big) - \widetilde{f'}\right\|_{p(\cdot),\omega} + \frac{1}{n+1}\left\|S_n\big(\widetilde{f'}\big) - \widetilde{f'}\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \|\widetilde{S_k}(f') - \widetilde{f'}\|_{p(\cdot),\omega} + \frac{1}{n+1} \|\widetilde{S_n}(f') - \widetilde{f'}\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \|(S_k(f') - f')^{\sim}\|_{p(\cdot),\omega} + \frac{1}{n+1} \|(S_k(f') - f')^{\sim}\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq c_1(p) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \|S_n(f') - f'\|_{p(\cdot),\omega} + \frac{c_2(p)}{n+1} \|S_n(f') - f'\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq \frac{c_3(p)}{n} \|S_n(f') - f'\|_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği elde edilir.

$T_n^0(n = 1,2,\dots)$, $f' \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ye en iyi yaklaşan polinom olsun. Yani

$$\|f' - T_n^0\|_{p(\cdot),\omega} \coloneqq E_n(f')_{p(\cdot),\omega}$$

o zaman

$$\|S_n(f') - f'\|_{p(\cdot),\omega} \leq \|S_n(f') - T_n^0\|_{p(\cdot),\omega} + \|T_n^0 - f'\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$= \|S_n(f') - T_n^0\|_{p(\cdot),\omega} + \|f' - T_n^0\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq c_4(p)\|f' - T_n^0\|_{p(\cdot),\omega} = c_4(p)E_n(f')_{p(\cdot),\omega}$$

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} \leq \frac{c(p)}{n} E_n(f')_{p(\cdot),\omega}$$

elde edilir.

3.2.2.2 Teorem Eğer $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $n = 1,2,\dots$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot),\omega}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.2.3 Teorem $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ için vardır bir $c(p) > 0$ sayısı öyle ki

$$\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot),\omega} \leq \frac{c(p)}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k(f)_{p(\cdot),\omega} \quad , \qquad n = 1,2,\dots$$

İspat T_n^0 , $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ye en iyi yaklaşan polinom olsun. $2^m \leq n < 2^{m+1}$; $m \in \mathbb{N}$ ve verilen bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot),\omega} \leq \Omega\left(f - T_{2^{m+1}}^0, 1/n\right)_{p(\cdot),\omega} + \Omega\left(T_{2^{m+1}}^0, 1/n\right)_{p(\cdot),\omega}$$

elde edilir.

$$\Omega\left(f-T^0_{2^{m+1}},1/n\right)_{p(\cdot),\omega}c(p)\left\|f-T^0_{2^{m+1}}\right\|_{p(\cdot),\omega}=c(p)E_{2^{m+1}}f_{p(\cdot),\omega}$$

Minkowski ve

$$2^{(i+1)k}E_{2^i}(f)_{p(\cdot)}\leq 2^{2k}\sum_{\mu=2^{i-1}+1}^{2^i}\mu^{k-1}E_\mu(f)_{p(\cdot),\omega}\ , \qquad j\geq 1$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\leq c(p)\frac{2^{(m+1)}}{n}E_{2^m}(f)_{p(\cdot),\omega}\leq \frac{2^2c(p)}{n}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}$$

$$\Omega\left(T^0_{2^{m+1}},1/n\right)_{p(\cdot),\omega}\leq\frac{c(p)}{n}\left\|\left(T^0_{2^{m+1}}\right)'\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$=\frac{c(p)}{n}\left\|(T^0_1)'+\sum_{v=0}^{m}\left[\left(T^0_{2^{v+1}}\right)'-\left(T^0_{2^v}\right)'\right]\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq\frac{c(p)}{n}\left(\|(T^0_1)'\|_{p(\cdot),\omega}+\left\|\sum_{v=0}^{m}\left[\left(T^0_{2^{v+1}}\right)'-\left(T^0_{2^v}\right)'\right]\right\|_{p(\cdot),\omega}\right)$$

$$\leq\frac{c_5(p)}{n}\left(\|T^0_1\|_{p(\cdot),\omega}+\sum_{v=0}^{m}2^{v+1}\left\|T^0_{2^{v+1}}-T^0_{2^v}\right\|_{p(\cdot),\omega}\right)$$

$$\leq\frac{c_6(p)}{n}\left(E_0(f)_{p(\cdot),\omega}+\sum_{v=0}^{m}2^{v+1}E_{2^v}(f)_{p(\cdot),\omega}\right)$$

$$=\frac{c_6(p)}{n}\left(E_0(f)_{p(\cdot),\omega}+2E_1(f)_{p(\cdot),\omega}+\sum_{v=1}^{m}2^{v+1}E_{2^v}(f)_{p(\cdot),\omega}\right)$$

$$\leq\frac{c_7(p)}{n}\left(3E_0(f)_{p(\cdot),\omega}+\sum_{v=1}^{m}\sum_{k=2^{v-1}+1}^{2^v}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}\right)$$

$$\leq\frac{c_8(p)}{n}\left(E_0(f)_{p(\cdot),\omega}+\sum_{k=1}^{2^m}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}\right)=\frac{c_8(p)}{n}\sum_{k=0}^{2^m}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}$$

$$\Omega(f,1/n)_{p(\cdot),\omega}\leq\frac{c_9(p)}{n}\left(\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}+\sum_{k=0}^{2^m}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}\right)$$

$$\leq\frac{c_{10}(p)}{n}\sum_{k=0}^{2^m}E_k(f)_{p(\cdot),\omega}$$

3.2.2.4 Sonuç $f \in W_{\omega}^{p(\cdot),1}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ise o zaman vardır bir $c(p) > 0$ sayısı öyle ki

$$E_n(f)_{p(\cdot),\omega} \leq \frac{c(p)}{n} \Omega(f', 1/n)_{p(\cdot),\omega} \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2.2.5 Sonuç $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $E_n(f)_{p(\cdot)\omega} = O(n^{-\alpha})$ ise $\alpha > 0$ için

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot),\omega} = \begin{cases} O(\delta^{\alpha}) & , \quad \alpha < 1 \\ O\left(\delta \left| log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right|\right) & , \quad \alpha = 1 \\ O(\delta) & , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

3.2.2.6 Tanım $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$Lip(\alpha, p(\cdot), \omega) \coloneqq \left\{f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T}) : \Omega(f, \delta)_{p(\cdot),\omega} = O(\delta^{\alpha}), \delta > 0\right\} ,$$

ifadesine genelleşmiş Lipschitz sınıfı denir ve $Lip(\alpha, p(\cdot), \omega)$ ile gösterilir.

3.2.2.7 Sonuç $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $a \in (0,1)$ için

$E_n(f)_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-\alpha})$ ise $f \epsilon Lip(\alpha, p(\cdot), \omega)$.

3.2.2.8 Teorem $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. $\forall a \in (0,1)$

(i) $f \epsilon Lip(\alpha, p(\cdot), \omega)$,

(ii) $E_n(f)_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-\alpha}) \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

koşulları denktirler.

3.2.2.9 Teorem $f \in L_{\omega}^{p(\cdot),1}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $T_n^* \in \Pi_n$, f'e en iyi yaklaşan polinom ise pozitif $c(p)$ sabiti vardır öyle ki

$$\|f' - (T_n^*)'\|_{p(\cdot),\omega} \leq c(p) E_n(f')_{p(\cdot),\omega} \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.2.10 Teorem $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer

$$\sum_{v=1}^{\infty} E_v(f)_{p(\cdot),\omega} < \infty$$

ise o zaman $f \in W_{\omega}^{p(\cdot),1}(\mathbb{T})$ ve pozitif bir $c(p)$ sabiti için

$$E_n(f')_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\left\{nE_n(f)_{p(\cdot),\omega} + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(f)_{p(\cdot),\omega}\right\}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

eşitsizliği sağlanır [9].

3.2.2.11 Teorem $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer

$$\sum_{v=1}^{\infty} E_v(f)_{p(\cdot),\omega} < \infty$$

ise o zaman $f \in W_\omega^{p(\cdot),1}(\mathbb{T})$ ve pozitif bir $c(p)$ sabiti için

$$\Omega(f',1/n)_{p(\cdot),\omega} \leq c(p)\left\{\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} vE_v(f)_{p(\cdot),\omega} + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(f)_{p(\cdot),\omega}\right\}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

eşitsizliği sağlanır.[9]

3.2.2.12 Sonuç $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $\alpha > 0$, $n = 0,1,2,\dots$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-1-\alpha})$$

ise o zaman

$f \in W_\omega^{p(\cdot),1}(\mathbb{T})$ ve $\delta > 0$ için

$$\Omega(f',\delta)_{p(\cdot),\omega} = \begin{cases} O(\delta^\alpha) & , \quad \alpha < 1 \\ O\left(\delta\left|log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right|\right) & , \quad \alpha = 1 \\ O(\delta) & , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

3.2.2.13 Tanım $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$Lip(\alpha,p(\cdot),\omega)^* := \left\{f \in W_\omega^{p(\cdot),1}(\mathbb{T}) : \Omega(f',\delta)_{p(\cdot)\omega} = O(\delta^\alpha), \delta > 0\right\}$$

ifadesine genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı denir ve $Lip(\alpha,p(\cdot),\omega)^*$ ile gösterilir.

3.2.2.14 Sonuç $f \in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $\alpha > 0$, $n = 0,1,2,\dots$ için

$E_n(f)_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-1-\alpha})$ ise

$f \in Lip(\alpha,p(\cdot),\omega)^*$.

Sonuç 3.2.2.4 ve Sonuç 3.2.2.14 birleştirilerek $Lip(\alpha,p(\cdot),\omega)^*$ sınıfı için aşağıdaki teorem elde edilir.

3.2.2.15 Teorem $f \in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\mathbb{T}),\ p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ve $\omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. $0 < \alpha < 1$ için

(i) $f \in Lip(\alpha, p(\cdot), \omega)^*$,

(ii) $E_n(f)_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-1-\alpha}) \quad , \quad n = 1,2, \dots$

koşulları denktirler.

3.3 Değişken Üslü $L^{p(\cdot)}([0, 2\pi])$ Lebesgue Uzaylarında Eş Zamanlı Yaklaşım

3.3.1 Yardımcı Sonuçlar

Belirli bir mertebeye kadar türevlenebilen 2π periyodik bir f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik fonksiyon T_n olsun. $f^{(k)}, k = 1,2,3, \dots$ türevlerine karşılık T_n polinomunun aynı mertebeden türevi alınarak oluşturulan trigonometrik ${T_n}^{(k)}$ polinomu ile $f^{(k)}$ türevine yaklaşım hızının araştırıldığı teoremlere yaklaşım teorisinin eş zamanlı yaklaşım teoremleri denir.

Bu bölümde yapılan çalışmalarda Muckenhoupt ağırlıklar sınıfı $A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ sınıfından kullanılacaktır.

3.3.1.1 Teorem $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ve T_n , n. dereceden bir trigonometrik polinom olsun. Pozitif bir $c(p) > 0$ sabiti vardır öyle ki $\forall n = 1,2, \dots$ için

$$\left\| T_n^{(r)}(x) \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq c(p) n^r \| T_n(x) \|_{L^{p(\cdot)}}$$

eşitsizliği sağlanır [18].

3.3.1.2 Teorem Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p) > 0$ sabiti vardır öyle ki $\forall n = 1,2, \dots$ için

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega_r(f, 1/n)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır [19].

3.3.1.3 Teorem Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p) > 0$ sabiti vardır öyle ki $\forall n = 1,2, \dots$ için

$$\Omega_r(f, 1/n)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^r} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır [19].

3.3.1.4 Sonuç Eğer $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p, k) > 0$ sabiti vardır öyle ki $\forall n = 1,2, \dots$ için

$$\|f - V_n(f)\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \frac{c(p,k)}{n^k} \Omega_r\big(f^{(k)}, 1/n\big)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.2 Ana Sonuçlar

3.3.2.1 Teorem $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun. Her $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $n \in \mathbb{N}$ için vardır bir pozitif $c(p,k)$ sabiti öyle ki

$$\left\|f^{(k)} - (T_n^*)^{(k)}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq c(p,k) E_n\big(f^{(k)}\big)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu teorem klasik Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$ uzayında $1 \leq p \leq \infty$ için [20] çalışmasında ispatlandı. Ayrıca $k \in R^+$ durumu için ağırlıklı Lebesgue uzayı ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında sırasıyla [21] ve [22] çalışmalarında ispatlandı. Teorem 3.3.2.1 $k \in R^+$ ve $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ durumunda [23] çalışmasında ispatlandı.

3.3.2.2 Teorem $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$, $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $r = 1,2,\ldots$ olsun. Eğer $T_n \in \Pi_n$ bir trigonometrik polinomu için

$$\| f - T_n\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \frac{c}{n^k} \Omega_r \left(f^{(k)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)} \quad , \qquad n = 1,2,\ldots$$

ise pozitif bir $c(p,k,r)$ sabiti vardır öyle ki $m = 0,1,\ldots,k$ için

$$\left\|f^{(m)} - T_n^{(m)}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \frac{c(p,k,r)}{n^{k-m}} \Omega_r \left(f^{(k)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edilir [12].

Aşağıdaki teorem De la Valle Poussin ortalamasının eş zamanlı yaklaşım özelliğini ifade eder.

3.3.2.3 Teorem $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ve $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ olsun. Pozitif bir $\mathrm{c(p,k,r)}$ sabiti vardır öyle ki $m = 0,1,\ldots,k$ için

$$\left\|f^{(m)} - V_n^{(m)}(f)\right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \frac{c(p,k,r)}{n^{k-m}} \Omega_r \left(f^{(k)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.3.2.3 m = 0 ve $r = 1$ durumunda Sharapudinov tarafından [24] çalışmasında ispatlandı.

3.3.2.4 Teorem Eğer $k \leq r$, $f \in W_{r-k}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ise pozitif bir $c(p,r) > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\Omega_r(f, 1/n)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^{r-k}} \left\| f^{(r-k)} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \quad , \qquad \forall\, n = 1,2,3 \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.3.2.4 ağırlıklı ve ağırlıksız Lebesgue uzaylarında farklı düzgünlük modülleri kullanılarak sırasıyla [25], [26] ve [27] çalışmalarında elde edildi.

3.3.2.5 Teorem $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $k = 0,1, \ldots$ için

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^{k-1} E_v(f)_{p(\cdot)} < \infty$$

ise $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve pozitif bir $c(p,k) > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} \leq c(p,k) \left\{ n^k E_n(f)_{p(\cdot)} + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{k-1} E_v(f)_{p(\cdot)} \right\} \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır [12].

3.3.2.6 Teorem $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $k = 0,1, \ldots$ için

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^{k-1} E_v(f)_{p(\cdot)} < \infty$$

ise $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve pozitif bir $c(p,k,r) > 0$ sabiti vardır öyle ki $n = 1,2, \ldots$ için

$$\Omega_r\left(f^{(k)}, 1/n\right)_{p(\cdot)} \leq c(p,k,r) \left\{ \frac{1}{n^r} \sum_{v=1}^{n} v^{k+r-1} E_v(f)_{p(\cdot)} + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{k-1} E_v(f)_{p(\cdot)} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır [12].

3.3.2.7 Sonuç $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $\alpha > 0$ ve $k = 0,1, \ldots$ için

$E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha})$, $n = 1,2, \ldots$ ise $f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve her $\delta > 0$ için

$$\Omega_r\left(f^{(k)}, 1/n\right)_{p(\cdot)} = \begin{cases} \mathcal{O}(n^{-\alpha}) & , \ r > \alpha \\ \mathcal{O}(n^{-\alpha} \log n) & , \ r = \alpha \\ \mathcal{O}(n^{-r}) & , \ r < \alpha \end{cases}$$

3.3.2.8 Tanım $r \coloneqq [\alpha] + 1 > 0$ için

$$Lip_{k,\alpha}^{p(\cdot)}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T}) : \Omega_r\left(f^{(k)}, \delta\right)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(\delta^{\alpha}), \delta > 0 \right\}$$

kümesine $W_k^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayındaki genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı denir.

3.3.2.9 Sonuç $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun. Eğer

$E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha})$, $\quad n = 0,1,2, \dots$

$k = 0,1, \dots$ ve $\alpha > 0$ ise $f \in Lip_{k,\alpha}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$.

Sonuç 3.3.2.7 ve Sonuç 3.3.2.9 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

3.3.2.10 Teorem $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ **,** $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ve $\alpha > 0$ olsun. $\forall k = 0,1,2, \dots$ için

(i) $f \in Lip_{k,\alpha}^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$

(ii) $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$

ifadeleri denktir.

4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMİRNOV SINIFLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

4.1 Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Faber - Laurent Rasyonel Fonksiyonu ile Yaklaşım

4.1.1 Temel Tanımlar ve Yardımcı Sonuçlar

4.1.1.1 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $p(z): \Gamma \to [1, \infty)$ üs fonksiyonu Γ üzerinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Verilen $p(z)$ fonksiyonu için $\int_\Gamma |f(z)|^{p(z)} |dz| < \infty$ koşulunu sağlayan Γ üzerinde tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ile gösterilir.

$L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ değişken üslü Lebesgue uzayı $p_+ := \underset{z\in\Gamma}{ess\ sup}\, p(z) < \infty$ için

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} := inf\left\{\lambda > 0: \int_\Gamma \left|\frac{f(z)}{\lambda}\right|^{p(z)} |\mathrm{dz}| \leq 1\right\} < \infty$$

normu ile bir Banach uzayıdır. $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}$ ve $\Gamma := \mathbb{T}$ olduğu özel halde kompleks düzlemdeki $\mathbb{T}$ ve reel eksendeki $[0,2\pi]$ aralığı özdeş olduğundan $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ değişken üslü lebesgue uzayında norm

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} := inf\left\{\lambda > 0: \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(e^{it})}{\lambda}\right|^{p(e^{it})} |dt| \leq 1\right\} =: \|f\|_{p(\cdot)}$$

olarak elde edilir.

G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisiyle sınırlandırılmış sınırlı bir bölge olsun.

$G^- := Ext\,\Gamma,\ \ D := Int\,\mathbb{T}\ \ ve\ \ D^- := Ext\,\mathbb{T}$ olarak tanımlayalım:

F , $[0,2\pi]$ aralığı veya düzgün bir Jordan eğrisi olmak üzere

$p(\cdot): \Gamma \to \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonu için

$$1 \leq p_- := \underset{z\in F}{ess\ inf}\, p(z) \leq \underset{z\in F}{ess\ sup}\, p(z) =: p^+ < \infty \qquad (4.1)$$

olduğunu varsayalım.

4.1.1.2 Tanım Eğer bir $p(\cdot)$ fonksiyonu pozitif bir $c(p)$ sabiti için (4.1) koşulu ve

$$|p(z_1) - p(z_2)|\, ln\left(\frac{|F|}{|z_1 - z_2|}\right) \leq c(p) \quad , \quad \forall z_1, z_2 \in F \;\; , \; z_1 \neq z_2$$

eşitsizliğini sağlarsa $p(\cdot) \in P(F)$ olur.

Burada $|F|$, F için Lebesgue ölçümüdür.

Eğer $p(\cdot) \in P(F)$ ve $p_{-} > 1$ ise $p(\cdot) \in P_0(F)$ olarak göstereceğiz [28].

4.1.1.3 Tanım $p(z): \Gamma \rightarrow [1, \infty)$ üs fonksiyonu Γ üzerinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Verilen $p(z)$ fonksiyonu için

$$E^{p(\cdot)}(G) := \left\{f \in E^1(G): f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye G bölgesinde analitik fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfı denir [29].

4.1.1.4 Tanım $p(z): \Gamma \rightarrow [1, \infty)$ üs fonksiyonu Γ üzerinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Verilen $p(z)$ fonksiyonu için

$$E^{p(\cdot)}(G^-) := \left\{f \in E^1(G^-): f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \; ve \; f(\infty) = 0\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye G^- bölgesinde analitik fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfı denir.

$E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^-)$ sınıfından olan fonksiyonlar için norm

$\|f\|_{E^{p(\cdot)}G} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ ve $\|f\|_{E^{p(\cdot)}(G^-)} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$

biçiminde tanımlanır ve böylece $E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^-)$ değişken üslü Smirnov sınıflarının $p^+ < \infty$ olduğu durumda Banach uzayı olduğu görülür.

$L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayı klasik ötelemeye göre invaryant olmadığı için bu uzayda düzgünlük modülünün inşası için aşağıda verilen lineer operatörü tanımlayalım:

$p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ olsun.

$$\sigma_h f(w) := \frac{1}{h}\int_0^h f\left(we^{it}\right) dt \; , \qquad w \in \mathbb{T} \;\; , \;\; 0 < h < \pi$$

olarak göstereceğiz.

$\sigma_h f(w)$ lineer operatörü $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayında sınırlıdır [29].

3.1.1.2 tanımında $r=1$ olduğunda aşağıdaki tanım elde edilir.

4.1.1.5 Tanım $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot)\in P(\mathbb{T})$ ve $\Omega(f,\cdot)_{p(\cdot)}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ olsun.

$$\Omega(f,\cdot)_{p(\cdot)}:=\sup_{0<h\leq\delta}\|f(\cdot)-\sigma_h f(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

ifadesine f fonksiyonunun 1. mertebeden düzgünlük modülü denir [28].

φ ve φ_1 ile sırasıyla G^- ve G bölgelerinin $\mathbb{U}^-$ üzerine konform dönüşümlerini gösterelim. Bu dönüşümlerin

$$\varphi(\infty)=\infty\ ,\quad \lim_{z\to\infty}\ \varphi(z)/z>0$$

$$\varphi_1(0)=\infty\ ,\quad \lim_{z\to 0}\ z\varphi_1(z)>0$$

biçiminde normalize edildiklerini düşünelim. φ ve φ_1‘ in ters dönüşümlerini sırasıyla ψ ve ψ_1 ile gösterelim.

$\Gamma\in\mathfrak{D}$ olsun. f ve $p(\cdot)$ üs fonksiyonu için

$$f_0(w):=f[\psi(w)]\quad ve\quad f_1(w):=f[\psi_1(w)]$$

$$p_0(w):=p[\psi(w)]\quad ve\quad p_1(w):=p[\psi_1(w)]$$

fonksiyonlarını oluşturalım.

4.1.1.6 Tanım $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ fonksiyonu için

$$f_0^+(w):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_0(\tau)}{\tau-w}d\tau\ ,w\in\mathbb{D}$$

$$f_1^+(w):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_1(\tau)}{\tau-w}d\tau\ ,w\in\mathbb{D}$$

$$f_0^-(w):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_0(\tau)}{\tau-w}d\tau\ ,w\in\mathbb{D}^-$$

eşitlikleri ile belirli Cauchy tipi integralleri, sırasıyla verilen $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}^-$ bölgelerinde analitiktir.

4.1.1.7 Tanım $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot)\in P_0(\mathbb{T})$ ve

$$\Delta_t^r f(w):=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}\binom{r}{s}f\left(we^{ist}\right)\ ,\qquad r=1,2,3,\ldots$$

olarak tanımlansın.

$$\Omega_r(f,\delta)_{\mathbb{T},p(\cdot)}:=\sup_{|h|\leq\delta}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\Delta_t^r f(w)\,dt\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}\ ,\qquad \delta>0$$

ifadesine f fonksiyonunun r. mertebeden düzgünlük modülü denir [29].

$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ için 1. mertebeden düzgünlük modülleri

$\Omega(f,\delta)_{G,p(\cdot)} := \Omega(f_0^+,\delta)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}$,

$\Omega(f,\delta)_{G^-,p(\cdot)} := \Omega(f_1^+,\delta)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}$, $\delta > 0$

olarak tanımlanır.

Derecesi n 'yi aşmayan kompleks değişkenli cebirsel polinomlar ailesi Π_n , $n = 0,1,2,...$ ile gösterilsin.

4.1.1.8 Tanım $G \subset \mathbb{C}, \Gamma$ ile sınırlı bir bölge, $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun.

$$E_n(f)_{G,p(\cdot)} := \inf_{P_n \in \Pi_n} \|f - P_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

ifadesine f fonksiyonuna $E^{p(\cdot)}(G)$ uzayında Π_n sınıfında en iyi yaklaşım hatası denir [29].

4.1.1.9 Tanım $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ fonksiyonuna karşılık gelen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z)$$

ifadesine f' in Faber-Laurent seri açılımı denir. Burada $F_k(z)$ ve $\tilde{F}_k(1/z)$ sırasıyla $\bar{G}$ ve $\overline{G^-}$ kümelerinin Faber polinomları olup ileride tanımlanacaktır. Ayrıca

$$a_k = a_k(f) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_0(\psi(w))}{w^{k+1}} \mathrm{d}w \quad , \quad k = 0,1,2,...$$

$$\tilde{a}_k = \tilde{a}_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(\psi_1(w))}{w^{k+1}} dw \quad , \quad k = 1,2,...$$

katsayılarına f' in Faber-Laurent katsayları denir.

4.1.1.10 Tanım $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun.

$$R_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z)$$

rasyonel fonksiyonuna f 'in n. Faber-Laurent kısmi toplamı denir.

$\Gamma \in \mathfrak{D}$ ise pozitif bir $\mathrm{c_i} > 0$ sabiti için öyle ki $i = 1,2,3,4$

$$0 < c_1 \le |\psi'(w)| \le c_2 < \infty \qquad , \qquad 0 < c_3 \le |\varphi'(z)| \le c_4 < \infty$$

eşitsizlikleri sırasıyla Γ üzerinde hemen her yerde sağlanır [30].

4.1.1.11 Lemma $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ise o zaman

$$f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_0 \in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f_1 \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})$$

$p \in P_0(\Gamma) \Leftrightarrow p_0 \in P_0(\mathbb{T}) \Leftrightarrow p_1 \in P_0(\mathbb{T})$

denklikleri sağlanır. Ayrıca

$\|f_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T})} \leq c_5\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c_6\|f_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$

$\|f_1\|_{L^{p_0}(\mathbb{T})} \leq c_5\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c_6\|f_1\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$.

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $f \in L^1(\Gamma)$ olsun.

$$S_\Gamma(f)(z) := \frac{1}{2\pi i}(P \cdot V)\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

ifadesine $z \in \Gamma$ noktasında Cauchy singüler integrali denir. Burada

$\Gamma(z,\varepsilon) := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, $\forall z \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$

olarak tanımlıdır.

Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ise

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{[\psi'(w)]}{\psi(w) - z}f_0(w)\,dw \quad , \quad z \in G \tag{4.2}$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{[\psi_1{}'(w)]}{\psi_1(w) - z}f_1(w)\,dw \quad , \quad z \in G^- \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar sırasıyla G ve G^- içinde analitiktirler ve

$f^-(\infty) = 0$ dır.

Böylece, Γ 'nın her iki tarafı üzerinde bulunan açısal yollar boyunca limit alınarak Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f^+(z) = S_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2}f(z) \tag{4.4}$$

$$f^-(z) = S_\Gamma(f)(z) - \frac{1}{2}f(z) \tag{4.5}$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitsizlikler yardımıyla

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z) \tag{4.6}$$

formülüne ulaşılır [6]. Ayrıca

$$f_0^-(\infty) = f_1^-(\infty) = 0 \tag{4.7}$$

$$f_0(w) = f_0{}^+(w) - f_0{}^-(w) \tag{4.8}$$

$$f_1(w) = f_1{}^+(w) - f_1{}^-(w) \tag{4.9}$$

4.1.1.12 Lemma Eğer $g \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p \in P_0(\mathbb{T})$ ise

$\Omega(S_{\mathbb{T}}[g],\cdot)_{p(\cdot)} \leq c(p)\Omega(g,\cdot)_{p(\cdot)}$

olacak şekilde bir $c(p) > 0$ sabiti vardır.

4.1.1.13 Lemma Eğer $g \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p \in P_0(\mathbb{T})$ ise, o zaman

$\Omega(g^+,\cdot)_{p(\cdot)} \leq c(p)\Omega(g,\cdot)_{p(\cdot)}$

4.1.1.14 Lemma $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p \in P_0(\Gamma)$ ise $f^+ \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $f^- \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ [29].

4.1.1.15 Lemma $g \in E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ ve $p \in P_0(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $\sum_{k=0}^{n} a_k(g)w^k$, g fonksiyonunun orjindeki Taylor serisini n. kısmi toplamı ise n den bağımsız bir $c(p) > 0$ sabiti için

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k(g)w^k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p)\Omega(g, 1/n)_{p(\cdot)} \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Aşağıdaki Lemma aynı zamanda yaklaşım sürecinde kullanacağımız Faber polinom ve rasyonel fonksiyonlarının tanımını da ifade etmektedir.

4.1.1.16 Lemma Eğer $z \in G$ ve $z' \in G^-$ ise o zaman

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}} \quad , \ \forall w \in \mathbb{D}^-$$

ve

$$\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z'} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_k(1/z')}{w^{k+1}} \quad , \ \forall w \in \mathbb{D}^-$$

eşitlikleri sağlanır [29].

Faber polinom ve rasyonel fonksiyonlarının integral gösterimleri aşağıdaki Lemma ile ifade edilir.

4.1.1.17 Lemma Eğer $z \in G^-$ ve $z' \in G$ ise o zaman $k = 0,1,2,...$ için

$$F_k(z) = \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi^k(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \ ,$$

$$\tilde{F}_k(1/z') = \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi_1^k(\zeta)}{\zeta - z'}\mathrm{d}\zeta.$$

Burada $F_k(z)$, G bölgesinin Faber polinomu, $\tilde{F}_k(1/z')$ ise $\overline{G^-}$ bölgesinin Faber rasyonel fonksiyonudur [29].

4.1.2 Ana Sonuçlar

4.1.2.1 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ise n den bağımsız pozitif bir $c(p) > 0$ sabiti vardır ki

$$\|f - R_n(\cdot, f)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\left[\Omega\left(f_0, \frac{1}{n}\right)_{p_0(\cdot)} + \Omega\left(f_1, \frac{1}{n}\right)_{p_1(\cdot)}\right] \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ olsun. Eşitsizliğin geçerliliğini ispatlamak için (4.6) eşitliği kullanılarak

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\Omega\left(f_1, {}^{1}/_{n}\right)_{p_1(\cdot)} \tag{4.10}$$

ve

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\Omega\left(f_0, {}^{1}/_{n}\right)_{p_0(\cdot)} \tag{4.11}$$

eşitsizliklerinin ispatlanması gerekir.

(4.8) ve (4.9) da w yerine sırasıyla $\varphi(z)$ ve $\varphi_1(z)$ yazılarak Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z) = \left[f_0^+\left(\varphi(z)\right) - f_0^-\left(\varphi(z)\right)\right] \tag{4.12}$$

$$f(z) = \left[f_1^+\left(\varphi_1(z)\right) - f_1^-\left(\varphi_1(z)\right)\right] \tag{4.13}$$

eşitlikleri sağlanır.

Önce (4.10) eşitsizliği ispatlayalım. (4.11) benzer şekilde ispatlanır.

$z' \in G$ alalım. Lemma 4.1.1.17 ve (4.13) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z') = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\zeta)}{\zeta - z'}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\zeta) - f_1^+\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} \mathrm{d}\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1^-\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} \mathrm{d}\zeta \ .$$

Lemma 4.1.1.14 ten $f_1^-\big(\varphi_1(\zeta)\big) \in E^{p(\cdot)}(G) \subset E^1(G)$ ve bundan dolayı Cauchy integral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1^-\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} \mathrm{d}\zeta = f_1^-\big(\varphi_1(z)\big)$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z') = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z')$$

$$- \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\zeta) - f_1^+\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} \mathrm{d}\zeta - f_1^-\big(\varphi_1(z')\big) - f^+(z').$$

$z' \to z \in \Gamma$ olduğunda Γ eğrisi içi ve dışından açısal yollar üzerinden limit alırsak (4.4) ve (4.5) bağıntıları yardımıyla Γ üzerinde hemen her yerde

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+\big(\varphi_1(z)\big) \right)$$

$$- S_{\Gamma} \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^{\dagger}\big(\varphi_1(z)\big) \right) - f_1^-\big(\varphi_1(z)\big) - f^+(z)$$

olduğu görülür. (4.6) ve (4.13) eşitlikleri kullanılarak

$$f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+\big(\varphi_1(z)\big) \right)$$

$$- S_{\Gamma} \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^{\dagger}\big(\varphi_1(z)\big) \right) \ .$$

elde edilir.

Şimdi S_{Γ} singüler operatörünün $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayındaki sınırlılığını kullanalım. Lemma 4.1.1.15 ve Lemma 4.1.1.13 ten

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/z) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+\big(\varphi_1(z)\big) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

$$+\left\|S_{\Gamma}\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+\big(\varphi_1(z)\big)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

$$\leq\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}+c_7(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$=c(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f_1^+)w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p)\Omega(f_1^+,1/n)_{p_1(\cdot)}\leq c(p)\Omega(f_1,1/n)_{p_1(\cdot)}$$

elde edilir.

4.1.2.2 Sonuç Eğer $f\in E^{p(\cdot)}(G)$, $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in P_0(\Gamma)$ ise n den bağımsız pozitif bir $c(p)>0$ sabiti vardır ki

$$\|f-P_n(\cdot,f)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\Omega(f_0,1/n)_{p_0(\cdot)}\quad,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $P_n(z,f):=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k F_k(z)$ biçiminde tanımlıdır.

4.1.2.3 Sonuç Eğer $f\in E^{p(\cdot)}(G^-)$, $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in P_0(\Gamma)$ ise n den bağımsız pozitif bir $c(p)>0$ sabiti vardır ki

$$\|f-P_n(1/\cdot,f)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\Omega(f_1,1/n)_{p_1(\cdot)}\quad,\forall n\in\mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $P_n(1/z,f):=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$ biçiminde tanımlıdır.

4.2 Değişken Üslü Smirnov Uzaylarında Operatörler ve Ters Teoremler

4.2.1 Değişken Üslü Smirnov Sınıflarında Operatörler

Bu alt bölümde diskte elde edilen sonuçların basit bağlantılı bölge durumuna taşınmasına imkan sağlayan operatörleri tanımlayacağız.

Π, derece kısıtlaması olmayan tüm cebirsel polinomların kümesi, $\Pi(\mathbb{D})$ ise Π kümesindeki elemanların $\mathbb{D}$ üzerindeki izleri kümesi olsun. Eğer $\Pi(\mathbb{D})$ kümesinde T operatörü

$$T(P):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw\quad,\quad z\in G$$

ise

$$T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k w_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z)$$

eşitliği sağlanır. Burada $F_k(z)$

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}\ , \quad z \in G \quad , \ w \in \mathbb{D}^-$$

seri açılımına göre belirlenen k dereceli Faber polinomudur [31].

4.2.1.2 Lemma T_n , $n.$ dereceden bir trigonometrik polinom olsun. $\forall\delta > 0$ için

$\Omega(T_n, \delta)_{p(\cdot)} \leq c(p)\delta \|T_n'\|_{p(\cdot)}$

eşitsizlliği sağlanır [31]

4.2.1.3 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. $T: \Pi(\mathbb{D}) \subset E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \to E^{p(\cdot)}(G)$ operatörü lineer ve sınırlıdır. [31]

4.2.1.4 Lemma $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Sürekli fonksiyonların kümesi $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayında yoğundur. [31]

Lemma 4.2.1.4 ün sonucu olarak w kompleks değişkenine göre cebirsel polinomların kümesi $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ uzayında yoğundur. Böylece T operatörü $\Pi(\mathbb{D})$ kümesinden $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ sınıfına lineer ve sınırlı olarak genişletebiliriz. Sonuç olarak

$$T(f)(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z} \mathrm{d}w\ , \ f \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \ , \ z \in G$$

$$\tilde{T}(f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)\psi_1{}'(w)}{\psi_1(w)-z} \mathrm{d}\omega \ , \ f \in E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D}), \ z \in G^-$$

operatörleri sırasıyla $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ ve $E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D})$ uzaylarında tanımlanmış olur.

4.2.1.5 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. $T: E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \to E^{p(\cdot)}(G)$ operatörü birebir ve üzerinedir. Ayrıca $f \in E^{p_0(\cdot)}(G)$ için $T(f_0^+) = f$ olur [31].

4.2.1.6 Lemma $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise n' den bağımsız pozitif c_8 ve c_9 sabitleri için

$E_n(f_0^+)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)} \leq c_8 E_n(f)_{G,p(\cdot)} \leq c_9 E_n(f_0^+)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)}$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.2 Değişken Üslü Smirnov Sınıflarında Bir Ters Teorem ($r = 1$ Durumu)

3. Bölümde ispatlanan 3.2.2.2 teoreminde $\omega = 1$ alırsak aşağıdaki teorem elde edilir.

4.2.2.1 Teorem Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P_0(\mathbb{T})$ ise n' den bağımsız pozitif $c(p) > 0$ sabiti için

$$\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} \sum_{v=0}^{n} E_v(f)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi bu teorem yardımıyla Smirnov sınıflarında $r = 1$ durumunda bir ters teoremi ifade ve ispat edelim.

4.2.2.2 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$, $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ ise n den bağımsız bir $c(p) > 0$ sabiti vardır ki

$$\Omega(f, 1/n)_{G,p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} \sum_{v=0}^{n} E_v(f)_{G,p(\cdot)} \ , \qquad n = 1,2, ...$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun. Lemma 4.2.1.1 kullanılırsa $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ olur. $g := f_0^+$ ve Lemma 4.2.1.6 nın ilk eşitsizliğini kullanarak

$$\Omega(f, 1/n)_{G,p(\cdot)} = \Omega(f_0^+, 1/n)_{\mathbb{T},p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} \sum_{v=0}^{n} E_v(f_0^+)_{\mathbb{D},p(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c(p)}{n} \|T^{-1}\| \sum_{v=0}^{n} E_v(f)_{G,p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} \sum_{v=0}^{n} E_v(f)_{G,p(\cdot)}$$

elde edilir.

4.2.2.3 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,1)$ için $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = O(n^{-\alpha})$ ise $f \in Lip_{p(\cdot)}(G, \alpha)$.

4.3 Değişken Üslü Smirnov Sınıflarında Yaklaşım ve Çarpanlar Teoremi

Şimdi $r \in \mathbb{N}$ durumunda geçerli düz ve ters teoremleri verelim.

4.3.1 Yardımcı Sonuçlar

Birim çember durumunda elde edilen düz ve ters teoremleri hatırlayalım.

4.3.1.1 Teorem $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ve $r \in \mathbb{N}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{\mathbb{T},p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.3.1.2 Teorem $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in P(\mathbb{T})$ ve $r \in \mathbb{N}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki

$$\Omega_r(f,1/n)_{\mathbb{T},p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_k(f)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremler yardımıyla Smirnov sınıflarında düz ve ters teoremleri elde edeceğiz. Bu amaçla yukarda inşa edilen operatörleri kullanacağız.

4.3.1.3 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Cauchy singüler operatörü $S_\Gamma(f)$, $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayında sınırlıdır [29].

4.3.1.4 Lemma $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. O halde

(i) $T: E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \to E^{p(\cdot)}(G)$ operatörü; lineer, sınırlı, birebir ve üzerinedir.

Ayrıca $\forall f \in E^{p(\cdot)}(G)$ için $T(f_0^+) = f$ [29].

(ii) $\tilde{T}: E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D}) \to E^{p(\cdot)}(G^-)$ operatörü; lineer, sınırlı, birebir ve üzerinedir.

Ayrıca $\forall f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ için $\tilde{T}(f_1^+) = f$ [29].

4.3.1.5 Lemma $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. O zaman pozitif $c_i(p)$, $i = 10,11,12,13,$ sabitleri vardır öyle ki

(i) Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise $E_n(f_0^+)_{p_0(\cdot)} \leq c_{10}(p)E_n(f)_{G,p(\cdot)} \leq c_{11}(p)E_n(f_0^+)_{p_0(\cdot)}$;

(ii) Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ ise $E_n(f_1^+)_{p_1(\cdot)} \leq c_{12}(p)E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} \leq c_{13}(p)E_n(f_1^+)_{p_1(\cdot)}$

elde edilir [29].

$\{\lambda_k\}_0^\infty$, bir c sabiti ile

$$|\lambda_k| \leq c \quad , \quad \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}|\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq c \tag{4.14}$$

koşullarını sağlayan kompleks bir sayı dizisi olsun.

4.3.1.6 Lemma $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ ve $\{\lambda_k\}_0^\infty$ (4.14) koşullarını sağlayan kompleks sayıların sayı dizisi olsun. Eğer $g \in E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ Taylor serisi

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(g) w^k \quad , \quad w \in \mathbb{D}$$

olan bir fonksiyon ise o zaman Taylor serisi

$$g^*(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \beta_k(g) w^k \quad , \quad w \in \mathbb{D}$$

şeklinde olan bir $g^* \in E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonu vardır ki pozitif bir $c(p)$ sabiti için

$$\|g^*\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

4.3.2 Ana Sonuçlar

Önce bir düz teoremin ifadesini verelim:

4.3.2.1 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$, $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ ve $r = 1,2,3 \ldots$ ise pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki

$$E_n(f)_{G,p(\cdot)} \leq c(p,r) \Omega_r(f, 1/\mathrm{n})_{G,p(\cdot)} \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise, o zaman $f_0^+ = T^{-1}(f) \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ olur. Lemma 4.3.1.5 *(i)* eşitsizliği ve Teorem 4.3.1.1 kullanılarak

$$E_n(f)_{G,p(\cdot)} \leq c_{14}(p) E_n(f_0^+)_{p_0(\cdot)}$$

$$\leq c_{14}(p) c(p,r) \Omega_r(f_0^+, 1/n)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)} = c_1(p,r) \Omega_r(f, 1/n)_{G,p(\cdot)}$$

elde edilir.

4.3.2.2 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$, $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ ise pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki her $r = 1,2,3 \ldots$ için

$$\Omega_r(f, 1/\mathrm{n})_{G,p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{r-1} E_k(f)_{G,p(\cdot)} \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.3.2.1 ve Teorem 4.3.2.2 $r = 1$ drumunda [31] çalışmasında ispatlandı.

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise, Lemma 4.3.1.5'ten $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ olur. $f_0^{+\prime}$ nın sınır değeri için Teorem 4.3.1.2 ve Lemma 4.3.1.5 *(i)* eşitsizliğini kullanırsak

$$\Omega_r(f,1/n)_{G,p(\cdot)} = \Omega_r(f_0^+,1/n)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_k(f_0^+)_{p_0(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c(p,r)c_{15}(p)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_n(f)_{G,p(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c_2(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_n(f)_{G,p(\cdot)}$$

elde edilir.

4.3.2.3 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $n = 1,2,3,\ldots$ için $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\mathrm{n}^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ ise

$$\Omega_r(f,\delta)_{G,p(\cdot)} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta^\alpha) & , \quad r > \alpha \\ \mathcal{O}\left(\delta^r \log {}^1/_\delta\right) & , \quad r = \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^r) & , \quad r < \alpha \end{cases}$$

sağlanır.

4.3.2.4 Tanım $\alpha > 0$, $r := [\alpha] + 1$ için

$Lip(G,p(\cdot),\alpha) := \left\{f \in E^{p(\cdot)}(G) \colon \Omega_r(f,\delta)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\delta^a) \ , \ \delta > 0\right\}$

ifadesine $E^{p(\cdot)}(G)$ sınıfındaki genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı denir.

4.3.2.5 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $n = 1,2,3,\ldots$ için $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\mathrm{n}^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ ise $f \in Lip(G,p(\cdot),\alpha)$.

Aynı zamanda 4.3.2.1 teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

4.3.2.6 Sonuç Eğer $f \in Lip(G,p(\cdot),\alpha)$ ve $\alpha > 0$ ise $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\mathrm{n}^{-\alpha})$ olur.

Sonuç 4.3.2.5 ve Sonuç 4.3.2.6 birleştirilerek aşağıdaki teorem elde edilir.

4.3.2.7 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. $\alpha > 0$ için

(i) $f \in Lip(G,p(\cdot),\alpha)$,

(ii) $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\mathrm{n}^{-\alpha})$ $\quad n = 1,2,3,\ldots$

ifadeleri denktir.

Aşağıdaki teorem değişken üslü Smirnov sınıflarında bir çarpanlar teoremidir.

4.3.2.8 teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ fonksiyonuna karşılık gelen Faber serisi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)F_k(z)$ ve $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$ (4.14) koşulunu sağlayan bir kompleks sayı dizisi ise o zaman öyle bir $F \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve pozitif bir $c(p) > 0$ sabiti vardır ki

$F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(f)F_k(z)$, $z \in G$ ve $\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$.

sağlanır.

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun. Tanım 3.1.1.9 kullanılarak

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_0^-(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w = \beta_k(f_0^+) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir.

$a_k(f)$ Faber katsayıları f_0^+ fonksiyonunun orjindeki Taylor katsayılarıdır. Yani

$$f_0^+(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)w^k \quad , \quad w \in \mathbb{D}$$

elde edilir.

$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olduğundan $f_0^+ E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ elde edilir. Lemma 4.3.1.7'den öyle bir $F_0 \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonu vardır öyle ki $\beta_k(F_0) = \lambda_k \beta_k(f_0^+) = \lambda_k a_k(f)$, $k = 0,1,2,\ldots$ için

$\|F_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p)\|f_0^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$ olur.

Lemma 4.3.1.4 kullanılarak $F \coloneqq T(F_0) \in E^{p(\cdot)}(G)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu alalım.

$\beta_k(F_0) = \lambda_k a_k(f)$, $k = 0,1,2,\ldots$ Taylor katsayıları için

$$F(z) = T(F_0)(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(f)F_k(z) \quad , \quad z \in G$$

elde edilir.

T operatörünün sınırlılığı, Teorem 4.3.1.3 , (4.4) ve (4.5) ifadeleri kullanılarak

$$\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} = \|T(F_0)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \|T\|\|F_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p)\|f_0^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c_{16}(p)\|f_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c_{17}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ fonksiyonunun Faber serisinin lacunary kısmi toplamı

$$\Delta_k(f)(z) := \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} a_j(f)F_j(z) \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

olarak alınırsa $E^{p(\cdot)}(G)$ sınıfları için Littlewood-Paley tipi teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir.

4.3.2.9 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise o zaman pozitif $c_{18}(p)$ ve $c_{19}(p)$ sabitleri vardır öyle ki

$$c_{18}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c_{19}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.3.2.10 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$, $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ ve $r = 1,2,3,\ldots$ ise pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki

$$E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} \le c(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{G^-,p(\cdot)} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

4.3.2.11 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ fonksiyonuna karşılık gelen Faber serisi $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z)$ ve $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$, (4.14) koşulunu sağlayan bir kompleks sayı dizisi ise o zaman öyle bir $F \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ fonksiyonu ve pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır ki

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z) \quad , \quad z \in G^-$$

ve

$$\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

sağlanır.

$f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ fonksiyonunun Faber serisinin lacunary kısmi toplamı

$$\tilde{\Delta}_k(f)(z) := \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \tilde{a}_j(f)\tilde{F}_j(1/z) \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

olarak alınırsa $E^{p(\cdot)}(G^-)$ sınıfları için Littlewood-Paley tipi teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir.

4.3.2.12 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in P_0(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ ise pozitif $c_{20}(p)$ ve $c_{21}(p)$ sabitleri vardır öyle ki

$$c_{20}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{\Delta}_k(f) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c_{21}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizliği sağlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Reel eksenin $[0,2\pi]$ aralığında tanımlı $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin temel problemleri incelenmiş olup:

- Yaklaşım teorisininin düz teoremleri
- Yaklaşım teorisinin ters teoremleri
- Belli sınıfların konstruktif karakterizasyonları konularında elde edilmiş önemli sonuçların bir özeti verilmiştir.

Ayrıca, bu sonuçların kompleks düzlemdeki benzerleri ile ilgili sonuçlar da bu tezde ele alınmıştır.

Yapılan incelemeler ileride değişken üslü uzaylarda yapılmış olan diğer sonuçları da kapsayacak şekilde genişletilebilir. Değişken üslü uzaylarda elde edilen sonuçlar uygulamalı matematiğin güncel problemlerinin çözüm süreçlerinde kullanılabilir. Matematik literatürde değişken üslü uzaylarda potansiyel teori, operatörler teorisi alanlarında yapılan çalışmaların geniş özetleri bulunmaktadır. Aynı özetin yaklaşım teorisi alanında da yapılması önerilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] D. Jackson, *The theory of approximation*. New York: Amer. Math. Soc., Coll. Publ., 13-32, 1930.

[2] N. I. Achieser, *Theory of approximation*. New York, Frederick Ungar, 1-307, 1956.

[3] S. B. Stechkin, “On the order of approximation of continuous function,” *Izv.*, 15, 219–242, 1951.

[4] A. F. Timan and M. F. Timan, “The generalized modulus of continuity and best mean approximation,” *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 17–20, 1950.

[5] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*. Birkhäuser, 1-211, 2013.

[6] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*. Berlin: Springer, 43-48, 1992.

[7] B. P. Rynne and M. A. Youngson, *Linear functional analysis*. London: Springer, 26-101, 2008.

[8] N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*. London: Pergamon Press, vol. 1, 44-48, 1964.

[9] D. M. Israfilov and A. Testici, “Some Inverse and Simultaneous Approximation Theorems in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces,” *Analysis Mathematica*, vol. 44, no. 4, 475–492, 2018.

[10] G. Mastroianni and G. V. Milovanović, *Interpolation processes: basic theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 4-212, 2008.

[11] A. Guven and D. M. Israfilov, “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 4, no. 2, 285–299, 2010.

[12] D. M. Israfilov, and A. Testici, “Simultaneous approximation in Lebesgue space with variable exponent”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 44(1), 3-18, 2018.

[13] A. Böttcher and Y. I. Karlovich, *Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplitz operators*. Basel: Springer, 1-44, 1997.

[14] D. M. Israfilov, "Approximation by p −Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials," *Constructive Approximation,* 335-351, 2001.

[15] L. Leindler, "Trigonometric approximation in L_p – norm", *J. Math. Anal. Apple.* vol. 302, 129-136, 2005.

[16] D. Cruz-Uribe, L. Diening, and P. Hästö, "The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 14, no. 3, 361-374, 2011.

[17] D. V. Cruz-Uribe and L. D. Wang, "Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 369, no. 2, 1205–1235, 2017.

[18] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials", *Izvestiya: Mathematics*, 407-434, 2013.

[19] D. M. Israfilov and A. Testici, "Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 459, no. 1, 112–123, 2018.

[20] J. Czipszer and G. Freud, "Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigono-métrique et par ses dérivées successives," *Acta Mathematica*, vol. 99, 33–51, 1958.

[21] Y. E. Yildirir and D. M. Israfilov, "Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces," *Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 14, no. 2, 359–371, 2011.

[22] R. Akgun and D. M. Israfilov, "Simultaneous and Converse Approximation Theorems in Weighted Orlicz Spaces," *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, vol. 17, no. 1, 1-16, 2010.

[23] R. Akgun, "Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent," *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 63, no. 1, 3–23, 2011.

[24] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions in variable-exponent Lebesgue and Sobolev spaces by de la Vallée-Poussin means," *Sbornik: Mathematics*, vol. 207, no. 7, 131-158, 2016.

[25] A. Marchaud, "Sur les dérivées et sur les differences des fonctions de variables réelles", *J. Math. Pures App.* , 337-425, 1927.

[26] H. Nakano, *Modulared Semi-ordered linear spaces*, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[27] Y. E. Yildirir and D. M. Israfilov, "Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces," *Mathematical Inequalities and Applications*, no. 2, 359–371, 2011.

[28] D. M. Israfilov and A. Testici, "Approximation by Faber–Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent," *Indagationes Mathematicae*, vol. 27, no. 4, 914–922, 2016.

[29] D. M. Israfilov and A. Testici, "Multiplier and approximation theorems in Smirnov classes with variable exponent," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 3, 2018.

[30] S. Warschawski, "Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 35, no. 1, 321–456, 1932.

[31] D. M. Israfilov and A. Testici, "Approximation in Smirnov classes with variable exponent," *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 60, no. 9, 1243–1253, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Emine KIRHAN

Doğum tarihi ve yeri : **28.03.1991 – PERVARİ/SİİRT**

e-posta : eminekirhan56@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2020
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2016
Lise	Halkalı Mehmet Akif Ersoy Lisesi	2010