T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SERBEST ÇÖZÜLÜMLER VE SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER

NEŞE TUTAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri :	Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE	(Tez Danışmanı)
	Prof. Dr. Recep ŞAHİN	
	Prof. Dr. Figen ÖKE	

BALIKESİR, OCAK 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Neşe TUTAR tarafından hazırlanan "**SERBEST ÇÖZÜLÜMLER VE SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 31 Ocak 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | İmza

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE
Balıkesir Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Recep Şahin
Balıkesir Üniversitesi
Üye
Prof. Dr. Figen ÖKE
Trakya Üniversitesi

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan " Serbest Çözülümler ve Simplisyal Kompleksler " başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Neşe TUTAR

ÖZET

SERBEST ÇÖZÜLÜMLER VE SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NEŞE TUTAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DR. ÖĞR. ÜYESİ PINAR METE)
BALIKESİR, OCAK - 2020

İdeallerin minimal serbest çözülümlerinin açıklanması, değişmeli cebirin önemli problemlerinden birisidir. Özellikle, karesiz tekterimli ideallerle ilgilendiğimizde, bu tip ideallerin çözülümlerinin yapıları oldukça az bilinmektedir.
Bu tezde, serbest çözülümler ve simplisyal komplekslerin kombinatorikleri arasındaki ilişkiyi anlamak için, ilk olarak temel kavramları veriyoruz ve sonrasında simplisyal kompleksler ve serbest çözülümler arasındaki karşılık gelmeyi gösteriyoruz.

ANAHTAR KELİMELER: Simplisyal kompleks, Stanley-Reisner karşılık gelmesi, serbest çözülümler, simplisyal homoloji.

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 75

ABSTRACT

FREE RESOLUTIONS AND SIMPLICIAL COMPLEXES
MSC THESIS
NEŞE TUTAR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, JANUARY - 2020

The description of the minimal resolution of ideals is one of the important problems in commutative algebra. In particular, when we restrict our attention to squarefree monomial ideals, very little is known about the structure of the resolutions of these kind of ideals.
In this thesis, we study the relation between the free resolutions and combinatorics of simplicial complexes. To understand this connection, first we give basic concepts and then we show the correspondence between simplicial complexes and free resolutions.

KEYWORDS: Simplicial complex, Stanley-Reisner correspondence, free resolutions, simplicial homology.

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 75

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER iii
1. GİRİŞ 1
2. CEBİRSEL ALT YAPI 2
2.1 Karesiz Tekterimliler ve Sıralamalar 2
2.2 Modüller ve Serbest Modüller 6
2.3 Regüler Diziler 10
2.4 Hilbert Baz Teoremi 12
2.5 Gröbner Bazlar 16
2.6 Cohen-Macaulay Halkaları 19
3. SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER 21
3.1 Çizgeler 21
3.2 Simplisyal Kompleksin Tanımı 29
3.3 Çizgelerin Simplisyal Kompleksleri 34
3.4 Kruskal-Katona Teoremi 35
3.5 Stanley-Reisner Halkaları 44
3.6 Shellable Simplisyal Kompleksler 47
3.7 Cohen-Macaulay (CM) Kompleksler 51
4. KOMPLEKSLER VE SERBEST ÇÖZÜLÜMLER 56
4.1 Serbest Çözülümler 56
4.2 Hilbert Sizigi Teorem 58
4.3 Gröbner Baz ve Sizigiler 58
5. SİMPLİSYAL HOMOLOJİ VE SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER 63
5.1 Yönlendirme 63
5.2 Zincir Kompleksi 64
5.3 İndirgenmiş Homoloji 69
6. KAYNAKLAR 74
ÖZGEÇMİŞ 75

SEMBOL LİSTESİ

multideg(f)	: f polinomunun katlı derecesi
LC(f)	: f polinomunun en yüksek dereceli teriminin katsayısı
LM(f)	: f polinomunun en yüksek dereceli tekterimlisi
LT(f)	: f polinomunun en yüksek dereceli terimi
<LT(I)>	: LT(I) kümesinin elemanları tarafından üretilen ideal
$\bar{f}^F$	: F=($f_1, \dots, f_s$) sıralı s-lisine göre bölme işleminden kalan
depth($\mathcal{m}, M$)	: $\mathcal{m}$ maksimal ideal olan R lokal halkası
S(f,g)	: f ve g polinomlarının S-polinomu
(R,$\mathcal{m}$**)**	: R lokal halkası
G	: V sonlu küme, E⊂V×V olmak üzere (V, E) şeklindeki ikililer, çizge
deg x	: x köşesinin derecesi
#comp(G)	: G çizgesinin bağlantılı bileşenlerinin sayısı
G_S	: Köşe kümesi S olan G çizgesinin indirgenmiş alt çizgesi
G^c	: G çizgesinin tümleyeni
V_G	: G çizgesinin köşe kümesi
E_G	: G çizgesinin kenar kümesi
C_q	: q uzunluğundaki bir çevrim
$\mathcal{K}_n$	: n köşeli tam çizge
$\mathcal{K}_{n,m}$	: tam olan iki parçalı çizge
P(V)	: V' nin kuvvet kümesi
dim F	: F ∈ Δ olmak üzere F' nin boyutu
|F|	: F' nin eleman sayısı
Δ(G)	: G sonlu çizgesinin klik kompleksi

$\mathbf{C\ell_n}$	: G çizgesinin n-uzunluklu bir klik kompleksi
$\mathbf{f_i(\Delta)}$	: Δ simplisyal kompleksinin i-boyutlu yüzlerinin sayısı
|V|	: Δ simplisyal kompleksinin köşelerinin sayısı
$\boldsymbol{\partial\mathcal{F}}$	: $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}$ için $\mathcal{F}$' nin gölgesi
$\boldsymbol{S_{x,y,\mathcal{F}}(\mathcal{F})}$	: Shifting (Kaydırma) operatörü
$\mathbf{I_\Delta}$	: Δ simplisyal kompleksinin Stanley-Reisner ideali
$\mathbf{\Gamma}$	: Multikompleks, yarı simplisyal kompleks
Gör$(\boldsymbol{\varphi_{k+1}})$	: φ_{k+1}' in görüntü kümesi
Çek$(\boldsymbol{\varphi_k})$	: φ_k' nın çekirdeği
$\boldsymbol{\beta_k(M)}$	: M modülünün k. Betti sayısı
Syz$(\mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_k})$	: $f_1, \dots, f_k$ elemanları arasındaki sizigilerin kümesi
$\mathbf{F_i(\Delta)}$	: Δ simplisyal kompleksinin i-simplekslerinin kümesi
$\mathbf{k^{F_i(\Delta)}}$	: k cismi üzerinde bir vektör uzayı
$\boldsymbol{\partial_i}$	: i-simpleksinin sınır dönüşümü
$\mathbf{\widetilde{H_i}(\Delta,k)}$	: Δ simplisyal kompleksinin k vektör uzayında indirgenmiş homolojisi

ÖNSÖZ

İlk olarak, değişmeli cebir ve cebirsel geometri ile tanışmamı sağlayan ve bu çalışmada sabırla sorularımı yanıtlayan değerli danışman hocam Dr.Öğr.Üyesi Pınar METE'ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anına ortak olup, desteklerini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan aileme sabır ve özverileri için çok teşekkür ederim.

Balıkesir, 2020 **Neşe TUTAR**

1. GİRİŞ

Değişmeli cebir ve cebirsel topolojide pek çok uygulamaya sahip olan simplisyal kompleksler oldukça yaygın kullanılan yapılardır. Bilhassa, istenilen özellikleri taşıyan tekterimli bölüm halkalarını karakterize etmek için, simplisyal kompleksler ve tekterimli idealler arasındaki Stanley-Reisner karşılık gelmesi göz önüne alındığında simplisyal kompleks oldukça kullanışlı bir araçdır.

Değişmeli cebirin temel problemlerinden birisi de, ideallerin minimal çözülümlerini yazmaktır.

Bu tezde, serbest çözülümler ve simplisyal kompleksler arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tezin, 2. ve 3. Bölümlerinde çizgelerin simplisyal kompleksleri, Kruskal-Katona teoremi ve simplisyal komplekslerin Cohen-Macaulay (CM) olması ile ilgili tanımlar ve teoremler verilmektedir. Değişmeli cebir ile kombinatorik arasındaki merkez bağlantı olan Stanley-Reisner teorisi anlatıldıktan sonra shellable simplisyal kompleksler, Cohen-Macaulay (CM) kompleksler anlatılmaktadır.

Tezin 4. bölümünde, kompleksler ile serbest çözülümler arasındaki ilişki, Hilbert Sizigi Teoremi ve Gröbner bazlar ile sizigiler anlatılacaktır.

Tezin 5. bölümünde ise simplisyal homoloji ile simplisyal kompleksler arasındaki bağlantı verilecektir.

2. CEBİRSEL ALT YAPI

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız bazı temel kavramlar, teoremler ve örnekler verilecektir.

2.1 Karesiz Tekterimliler ve Sıralamalar

2.1.1 Tanım $k[x_1, \ldots, x_n]$, k cismi üzerinde çok değişkenli bir polinom halkası olsun. $a=(a_1, \ldots, a_n)$ negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $m={x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\ldots{x_n}^{a_n}$ şeklinde tanımlanan çarpıma tekterimli denir.
Tekterimliler tarafından üretilen ideale ise, tekterimli ideal denir.

2.1.2 Örnek k[x,y], k cismi üzerinde iki değişkenli bir polinom halkası ve $I=<x^4y^2, x^3y^4, x^2y^5> \subset k[x,y]$ bir ideal olsun. I bir tekterimli idealdir.

2.1.3 Tanım $a_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m={x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\ldots{x_n}^{a_n}$ tekterimlisinde, eğer $0 \leq a_i \leq 1$ ise m' ye karesiz tekterimli denir.
Eğer I ideali (karesiz) tekterimliler tarafından üretiliyor ise, I' ya bir (karesiz) tekterimli ideal denir.

2.1.4 Örnek $k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ k cismi üzerinde bir polinom halkası olsun.
$I=<x_1x_2, x_2x_5, x_3x_5, x_1x_3, x_1 \subset k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ karesiz tekterimliler tarafından üretilen bir idealdir.

2.1.5 Tanım k cismi üzerindeki, $k[x_1, \ldots, x_n]$ bir polinom halkasını alalım.
$\mathbb{Z}^{n}_{\geq 0}$ veya buna denk olarak $\alpha \in \mathbb{Z}^{n}_{\geq 0}$ $x^{\alpha} = {x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}\ldots{x_n}^{\alpha_n}$ tekterimliler kümesi üzerindeki ">" bağıntısı ,

(i) $\mathbb{Z}^{n}_{\geq 0}$ üzerinde ">" bir tam (lineer) sıralama ,

(ii) $\alpha > \beta$ ve $\gamma \in \mathbb{Z}^{n}_{\geq 0}$ iken $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

(iii) > , $\mathbb{Z}^{n}_{\geq 0}$ üzerinde iyi-sıralıdır,

özelliklerini sağlıyor ise ">" $k[x_1, \ldots, x_n]$ de bir tekterimli sıralamasıdır.
Şimdi, alfabetik (lex) ve ters alfabetik (grevlex) sıralamalarından bahsedeceğiz. Diğer sıralama çeşitleri için, bakınız [1].

2.1.6 Tanım (Alfabetik (Lex) Sıralama) α = $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ olsun.

α-β = $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$ vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı koordinat pozitif ise α $\underset{lex}{>}$ β denir. Eğer α $\underset{lex}{>}$ β ise $X^\alpha \underset{lex}{>} X^\beta$ yazılır.

2.1.7 Örnek k cismi üzerindeki k[x,y,z] polinom halkasını alalım. m_1=xy^2 ve m_2=y^3z^4 tekterimlilerini alfabetik (lex) sıralamasına göre sıralayalım.

$$m_1 = xy^2 \text{ için } \alpha = (1,2,0)$$

$$m_2 = y^3z^4 \text{ için } \beta = (0,3,4)$$

olur.

$$\alpha - \beta = (1,2,0) - (0,3,4)$$
$$= (1\text{-}0,\ 2\text{-}3,\ 0\text{-}4)$$
$$= (1, -1, -4)$$

en soldaki sıfırdan farklı koordinatı 1>0 olduğundan α $\underset{lex}{>}$ β dır. Buradan, x$y^2 \underset{lex}{>} y^3z^4$ olur.

2.1.8 Tanım (Derecelendirilmiş Lex (Grlex) Sıralama)

α = $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ olsun.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

veya

|α | =|β | iken α $\underset{lex}{>}$ β

oluyor ise α $\underset{grlex}{>}$ β denir. α $\underset{grlex}{>}$ β ise $X^\alpha \underset{grlex}{>} X^\beta$ yazılır.

2.1.9 Örnek k bir cisim, k[x,y,z] bir polinom halkası olsun.

m_1=xy^2z^3 ve m_2=x^3y^2 tekterimlilerini grlex sıralamasına göre sıralayalım.

$$m_1 = xy^2z^3 \text{ için } \alpha = (1,2,3)$$

$$m_2 = x^3y^2 \text{ için } \beta = (3,2,0)$$

olur. |α|=1+2+3=6 , |β|=3+2+0=5 olduğundan |α| > |β| dır.

Buradan α $\underset{grlex}{>}$ β olmasından $m_1 \underset{grlex}{>} m_2$ elde edilir.

2.1.10 Tanım (Ters Alfabetik (Grevlex) Sıralama)

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ olsun.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

veya

$|\alpha| = |\beta|$ iken $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$

vektör farkında en sağdaki sıfırdan farklı koordinat negatif ise $\alpha \underset{grevlex}{>} \beta$ denir. Eğer $\alpha \underset{grevlex}{>} \beta$ ise $X^\alpha \underset{grevlex}{>} X^\beta$ yazılır. Bu sıralama $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ üzerinde bir tam sıralamadır.

2.1.11 Örnek k bir cisim, k[x,y,z] bir polinom halkası olsun.

$m_1 = x^3y^2z$ ve $m_2 = x^2y^6z^{12}$ tekterimlilerini ters alfabetik (grevlex) sıralamasına göre sıralayalım.

$$m_1 = x^3y^2z \text{ için } \alpha = (3,2,1)$$
$$m_2 = x^2y^6z^{12} \text{ için } \beta = (2,6,12)$$

olur.

$\alpha - \beta = (3,2,1) - (2,6,12)$

$= (3-2, 2-6, 1-12)$

$= (1, -4, -11)$

en sağdaki sıfırdan farklı koordinatı $-11<0$ olduğundan $\alpha \underset{grevlex}{>} \beta$ dır. Buradan $x^3y^2z \underset{grevlex}{>} x^2y^6z^{12}$ olur.

Şimdi üç elemanlı bir kümenin grevlex sıralamasına göre alt kümelerinin nasıl sıralanacağını göstereceğiz.

2.1.12 Örnek $V=\{x_1, x_2, x_3\}$' ün üçlü elemanları $x_1x_2x_3$, $x_1x_3x_2$, $x_2x_1x_3$, $x_2x_3x_1$, $x_3x_1x_2$, $x_3x_2x_1$ şeklindedir.

$x_1x_2x_3$ için $\alpha_1 = (1,2,3)$

$x_1x_3x_2$ için $\alpha_2 = (1,3,2)$

$x_2x_1x_3$ için $\alpha_3 = (2,1,3)$

$x_2x_3x_1$ için $\alpha_4 = (2,3,1)$

$x_3x_1x_2$ için α_5= (3,1,2)

$x_3x_2x_1$ için α_6= (3,2,1)

olmak üzere, bu elemanları, indislerine ters alfabetik sıralama uygulayarak ve ters alfabetik sıralamanın bir tam sıralama bağıntısı olduğunu da göz önüne alarak, yeniden sıralayalım.

$\alpha_6 - \alpha_4$= (3,2,1) - (2,3,1)

= (3-2, 2-3, 1-1)

= (1, -1, 0)

sağdan sıfırdan farklı ikinci koordinatı -1<0 olduğundan $\alpha_6 \underset{grevlex}{>} \alpha_4$ olur. Buradan

$x_3x_2x_1 \underset{grevlex}{>} x_2x_3x_1$ elde edilir.

$\alpha_4 - \alpha_5$= (2,3,1) - (3,1,2)

= (2-3, 3-1, 1-2)

= (-1, 2, -1)

sağdan sıfırdan farklı ilk koordinatı -1<0 olduğundan $\alpha_4 \underset{grevlex}{>} \alpha_5$ olur. Buradan

$x_2x_3x_1 \underset{grevlex}{>} x_3x_1x_2$ elde edilir.

$\alpha_5 - \alpha_2$= (3,1,2) - (1,3,2)

= (3-1, 1-3, 2-2)

= (2, -2, 0)

sağdan sıfırdan farklı ikinci koordinatı -2<0 olduğundan $\alpha_5 \underset{grevlex}{>} \alpha_2$ olur. Buradan

$x_3x_1x_2 \underset{grevlex}{>} x_1x_3x_2$ elde edilir.

$\alpha_2 - \alpha_3$= (1,3,2) - (2,1,3)

= (1-2, 3-1, 2-3)

= (-1, 2, -1)

sağdan sıfırdan farklı ilk koordinatı -1<0 olduğundan $\alpha_2 \underset{grevlex}{>} \alpha_3$ olur. Buradan

$x_1x_3x_2 \underset{grevlex}{>} x_2x_1x_3$ elde edilir.

$\alpha_3 - \alpha_1$= (2,1,3) - (1,2,3)

= (2-1, 1-2, 3-3)

= (1, -1, 0)

sağdan sıfırdan farklı ikinci koordinatı -1<0 olduğundan $\alpha_3 \underset{grevlex}{>} \alpha_1$ olur. Buradan

$x_2x_1x_3 \underset{grevlex}{>} x_1x_2x_3$ elde edilir. Yine $>$ bir tam sıralama bağıntısı olup geçişme özelliğine sahip olduğundan,

$\alpha_6 \underset{grevlex}{>} \alpha_4 \underset{grevlex}{>} \alpha_5 \underset{grevlex}{>} \alpha_2 \underset{grevlex}{>} \alpha_3 \underset{grevlex}{>} \alpha_1$

bulunur. O halde,

$x_3x_2x_1 \underset{grevlex}{>} x_2x_3x_1 \underset{grevlex}{>} x_3x_1x_2 \underset{grevlex}{>} x_1x_3x_2 \underset{grevlex}{>} x_2x_1x_3 \underset{grevlex}{>} x_1x_2x_3$

olur.

$\{x_1x_2x_3, x_2x_1x_3, x_1x_3x_2, x_3x_1x_2, x_2x_3x_1, x_3x_2x_1\}$ şeklinde elde edilir.

$\{x_1, x_2, x_3\}$' ün alt kümeleri ise benzer şekilde ters alfsbetik (grevlex) sıralamaya göre

$\{\,\}$, $\{x_1\}$, $\{x_1,\ x_2\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_3\}$

şeklinde sıralanır.

2.2 Modüller ve Serbest Modüller

Bir halka üzerindeki modül kavramı, bir cisim üzerindeki vektör uzayı kavramı ile benzerlik gösterir. Ancak bir vektör uzayın her zaman bir bazı varken, modüllerin bir bazı olmayabilir. Bir modülün bir bazı varsa bu modül serbest modül olarak adlandırılır.

Şimdi bu bölüm için gerekli tanım, örnek ve teoremleri verelim.

2.2.1 Tanım R bir halka olsun. M,

RxM ⟶ M

(r,a) ⟶ r.a

etkisi, $\forall\ r, s \in R\ ,\ \ a, b \in M\ için$

(i) M, toplamsal Abelyan grup

(ii) r.(a+b)= r.a + r.b

(iii) (r+s).a= r.a + s.a

(iv) r.(s.a)= (r.s).a

özelliklerini sağlıyor ise M' ye R üzerinde bir modül veya R-modül denir

(v) $\forall\ a \in M\ için\ 1_R$.a= a

ise , yani , halka "." işlemine göre birimli ise M' ye birimli R-modül denir.

2.2.2 Örnek R=k[$x_1, \dots, x_n$] bir polinom halkası,

$\mathrm{R}^{\mathrm{n}}=\{(f_1, \dots, f_n) \mid f_i \in \mathrm{R} = \mathrm{k}[x_1, \dots, x_n]\ , \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}\}$ olsun.

Rx $\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$

(g,$(f_1, \dots, f_n)$) → (gf_1, …, gf_n)

etkisi bir modüldür.

2.2.3. Tanım M bir R-modül, $\emptyset \neq N \subset M$ olsun.

$\forall\, m, n \in N$ ve $r \in R$ için

(i) $m+n \in N$

(ii) $r.m \in N$

ise N modülüne M modülünün alt modülü denir.

2.2.4 Tanım R bir halka, A,B R-modüller ve

$T: A \rightarrow B$

fonksiyonu

(i) $\forall a, c \in A$ için $T(a+c) = T(a) + T(c)$

(ii) $\forall r \in R$ ve $a \in A$ için $T(r.a) = r.T(a)$

ise T' ye R-modül homomorfizması denir.

k bir cisim, $R=k[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası olsun.

$R^n = \{(f_1, \dots, f_n) \mid f_i \in R = k[x_1, \dots, x_n], i = 1, \dots, n\}$

kümesinin 2.2.2 örnekten bir R-modül olduğunu biliyoruz.

2.2.5 Örnek $R=k[x_1, \dots, x_n]$ olsun. $T: R^n \longrightarrow R^m$ fonksiyonu için $f=(f_1, \dots, f_n)$, $g=(g_1, \dots, g_n) \in R^n$ olmak üzere,

$T(f+g) = T(f)+T(g)$ ve $c \in R$ için $T(c.f) = c.T(f)$

olduğundan T bir R-modül homomorfizmasıdır.

2.2.6 Teorem $T: R^n \longrightarrow R^m$ bir R-modül homomorfizması ise

$T(f) = A.f$

olacak şekilde bir $A \in \mathcal{M}at(m, n, R)$ matrisi vardır. Bu A matrisi

$$A=[T(e_1)\ T(e_2) \dots T(e_n)]\ ,\ e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i.satır} \\ \\ \\ \end{array} \in R^n\ ,\ 1 \leq i \leq n$$

şeklindedir.

İspat $R^n = \mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ olduğunu biliyoruz. $f \in R^n$ alalım.

Bu durumda,

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = f_1.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} +\ldots+ f_i.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} +\ldots+ f_n.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = f_1e_1 + \cdots + f_ie_i + \cdots f_ne_n$$

olarak yazılabilir.

$T(f)= T(f_1e_1 + \cdots + f_ie_i + \cdots f_ne_n)$

T lineer olduğundan;

$T(f)=f_1.T(e_1) +\ldots+ f_i.T(e_i) +\ldots+ f_n.T(e_n)$

$$T(f)=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.\,[T(e_1)\;\; T(e_2)\ldots\, T(e_n)]$$

$$T(f)=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.A\,,\;\; A=[T(e_1)\;\; T(e_2)\ldots\, T(e_n)]$$

olur.

2.2.7 Tanım R bir halka, M bir R-modül olsun. I indeks kümesinin eleman sayısı M modülünün rankını verir.

2.2.8 Örnek R bir halka, $M=R^n$ olsun. R^n, 2.2.2 Örnekten bir R-modüldür.

$m\in M=R^n$ olsun.

$$\Rightarrow m = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in R^n\,,\; r_i \in R\,,\; i=1,\ldots,n$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = r_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + r_2.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + r_n.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= r_1e_1 + r_2e_2 + \cdots + r_ne_n$$

$\forall\, m \in M=R^n$ için $m\in Sp(e_1,\ldots,e_n)$ ve $e_1,\ldots,e_n$ lineer bağımsız olduğundan M bir serbest R-modüldür.

2.2.9 Uyarı M, $\{b_i | i \in I\}$ bazına sahip bir serbest modül ve $M_i = Sp(b_i)$ olan bir alt modül olsun. Bu durumda, b_i tarafından üretilen alt modül M_i, M={r.b_i | r∈R} sağlayan kümedir. R halkasının kendisi üzerinde bir R-modül olduğunu göz önüne alarak,

$T{:}R \longrightarrow M_i$

$r \longrightarrow T(r)=r.b_i$

dönüşümü R ve M_i modüllerinin bir R-modül izomorfizması olduğunu görelim:

∀ r,s∈R için

$T(r+s) = (r+s).b_i$

$= r.b_i+s.b_i$ (M_i, modül)

$=T(r)+T(s)$

ve c∈R için

$T(c.r) = (c.r).b_i$

$= c.(r.b_i)$

$= c.T(r)$

olduğundan T bir R-modül homomorfizmasıdır.

∀ r,s∈R için

$T(r)=T(s) \Longrightarrow r.b_i= s.b_i$

$\Longrightarrow r.b_i- s.b_i=0$

$\Longrightarrow (r- s).b_i=0$

ve $b_i \neq 0$ olduğundan,

$\Longrightarrow r- s = 0$

$\Longrightarrow r = s$

olduğundan, T 1-1' dir.

s∈ M_i olsun. T(r)=s olacak şekilde bir r∈R bulmalıyız.

s∈ M_i ve M_i=Sp(b_i) olduğunda s= r.b_i ∈M olacak şekilde r∈R vardır. Böylece T örten olur.

Böylece, T' nin bir R-modül izomorfizması olduğu gösterilmiş olur. M, $\{b_i | i \in I\}$ tarafından üretildiğinden ve i≠j iken $M_i \cap M_j = \emptyset$ olduğundan $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olur. $i \in I$ için $M_i \cong R$ olduğundan $M \cong \bigoplus_{i \in I} R$ elde edilir.

Tersine, $M \cong \bigoplus_{i \in I} R$ olduğunu varsayalım.

∀ i∈ I için $e_i=(0,0,...,1,...,0)$ olsun.

$\{e_i \mid i \in I\}$, $\bigoplus_{i \in I} R$ için bir bazdır ve $M \cong \bigoplus_{i \in I} R$ olduğundan bu küme M için de bir bazdır. Böylece M bir serbest R-modüldür.

2.2.10 Tanım R bir halka, M bir modül, S M'nin bir alt kümesi olmak üzere, $\forall$ m∈M,
a_i ∈R için $m=a_1m_1+\ldots+a_nm_n$, $m_i \in S$, $i=1,\ldots,n$
sonlu lineer kombinasyon olarak tek şekilde yazılabiliyorsa S kümesine, M modülünün bir bazı denir.

2.3 Regüler Diziler

2.3.1 Tanım R bir halka ve P, R' nin bir ideali olsun.
a.b∈P iken a∈ P veya b∈ P
oluyor ise P' ye asal ideal denir.

2.3.2 Örnek $R=k[x_1,\ldots,x_n]$ polinom halkası ve $I=(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})$, $1\leq i_k \leq n$, $1\leq k\leq r$, $\{x_1,\ldots,x_n\}$' nin bir alt kümesi tarafından üretilen herhangi bir ideal olsun.
p,q∈ $R=[x_1,\ldots,x_n]$ ve p,q∈I alalım.
$\Longrightarrow p.q=h_0.x_{i_1}+h_1.x_{i_2}+\ldots+h_n.x_{i_r}$ olacak şekilde $h_0,\ldots,h_n$ ∈R polinomları vardır.
p.q, x_{i_k}, $1\leq k\leq r$' ler cinsinden bir polinom olduğundan, p.q' nun sabit terimi 0' dır.
$R=k[x_1,\ldots,x_n]$ çok değişkenli polinom halkasını,

$$R=\left\{\sum_{i_n,\ldots,i_r} r_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n} \,\middle|\, r_{i_1\ldots i_n}\in k\right\}$$

olarak yazabiliriz.

$$p \in k[x_1,\ldots,x_n] \Rightarrow p=\sum_{i_n,\ldots,i_r} r_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}, r_{i_1\ldots i_n}\in k$$

$$q \in k[x_1,\ldots,x_n] \Rightarrow q=\sum_{i_n,\ldots,i_r} s_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}, s_{i_1\ldots i_n}\in k$$

ve $a_{0\ldots0}$ ∈k , p' nin $b_{0\ldots0}$ ∈k q' nun sabit terimleri olsun.
$\Longrightarrow a_{0\ldots0}.b_{0\ldots0}=0$
k bir cisim olduğundan $a_{0\ldots0}=0$ veya $b_{0\ldots0}=0$ elde edilir.
$a_{0\ldots0}=0$ ise, p' nin her terimi $x_{i_1},\ldots,x_{i_r}$ değişkenlerinden en az birini içerir. Bu p∈I

anlamına gelir. Benzer şekilde $b_{0...0} = 0$ ise q∈I elde edilir. Sonuçta, I asal idealdir.

2.3.3 Tanım Bir halkanın(Krull) boyutu, R' deki asal ideallerin en uzun zincirinin uzunluğudur ve dimR ile gösterilir. Yani, i=1,..., d için

dimR = $\sup\{d | P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d \subsetneq R, P_i \text{ asal}\}$

2.3.4 Örnek R=k$[x_1, \dots, x_n]$ ise, dimR= n' dir [2].

2.3.5 Tanım R birimli ve değişmeli bir halka olsun. 0≠a∈R için a.b=0 olacak şekilde 0≠b∈R varsa a' ya R' nin sıfır böleni denir. 0≠a∈R için, a, R' nin sıfır böleni değilse, a elemanına R' nin regüler elemanı denir.

2.3.6 Uyarı I, R=k$[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkasının bir ideali olsun. $\bar{F} = F + I$, R/I bölüm halkasının sıfır böleni değilse F∈R 'ye R/I' nın bir regüler elemanı denir.

$\bar{F} = F + I$ ∈R/I' da sıfır bölen olmasın. Bu durumda,

$(F + I).(G + I)=0_{R/I}$ iken $G + I = 0_{R/I}$

olur ki, bu G∈I demektir. Burada

$(F + I).(G + I)=0_{R/I}$

$(F.G)+I=0_{R/I} \Longrightarrow F.G \in I$

olarak düşünülebilir. Sonuçta, üstteki tanıma denk olarak

F.G ∈ I iken G∈I ise F, R/I' da regülerdir.

2.3.7 Örnek Herhangi bir $x_i \in$ R=k$[x_1, \dots, x_n]$ elemanı için,

x_i, R=R $/_{(0)}$ da regülerdir, çünkü I=(0) ve F=x_i iken $\bar{F} = x_i + (0) \in R /_{(0)}$

dır. $x_i \neq 0$ ve R bir tamlık bölgesi olduğundan

$(x_i).G \in I=(0) \Rightarrow G=0 \in I$

olur.

2.3.8 Örnek k[x,y,z] polinom halkasından, I=(xyz) idealini alalım. xy∉I olduğundan $\overline{xy} \neq \bar{0}$ ∈R/I ve z∉I olduğundan $\bar{z} \neq \bar{0}$ ∈R/I iken xy, R/I üzerinde regüler değildir, çünkü

$\overline{xy}(\bar{z}) = \overline{xyz} = xyz + I \underset{xyz \in I}{\Longrightarrow} \bar{0}_{R/I} = \bar{0}$

dır.

2.3.9 Tanım R değişmeli halka, M, R halkası üzerinde bir R-modül ve $F_1, \dots, F_m$, R’ nin bir dizisi olsun.

(i) $(F_1, \dots, F_m)$.M ≠M

(ii) Her i=1,..., m için , F_i, M $/_{(F_1,\dots,F_{i-1}).M}$ üzerinde regüler,

ise $F_1, \dots, F_m$ dizisine M üzerinde bir regüler dizi veya kısaca M-dizi denir.

2.3.10 Örnek k bir cisim olsun. M=k[x,y,z] modülünü düşüelim. x, y(1-x), z(1-x) dizisinin regüler bir dizi olduğunu gösterelim.

(i) 1∉ (x, y(1-x), z(1-x)).M olduğundan (x, y(1-x), z(1-x)).M≠M olur.

(ii) 0≠x∈ k[x,y,z] için x.p = 0 olacak şekilde 0≠p∈ k[x,y,z] olmadığından x, k[x,y,z]’ de sıfır bölen değildir.

0≠y∈ k[y,z] için y.r = 0 olacak şekilde 0≠r∈ k[y,z] olmadığından y, k[y,z]’ de sıfır bölen değildir.

0≠z∈ k[z] için z.s = 0 olacak şekilde 0≠s∈ k[z] olmadığından z, k[z]’ de sıfır bölen değildir.

Diğer yandan; y(1-x), z(1-x), x dizisi bir regüler dizi değildir:

(i) 1∉ (y(1-x), z(1-x), x).M ⇒ (y(1-x), z(1-x), x).M≠M olur.

(ii) 0≠y(1-x)∈ k[x,y,z] için

y(1-x).p=0 olacak şekilde 0≠p∈ k[x,y,z] olmadığından y(1-x), k[x,y,z]’ de sıfır bölen değildir, fakat

0≠z(1-x)∈ k[x,y,z] için y∉(y(1-x) ve z(1-x).(y)∈(y(1-x)) olduğundan z(1-x), $k[x,y,z]\,/_{y(1-x).k[x,y,z]}$ ‘de sıfır bölendir.

Dolayısıyla, y(1-x), z(1-x), x regüler dizi değildir.

Bu nedenle, regüler dizilerde sıra önemlidir.

2.4 Hilbert Baz Teoremi

2.4.1 Tanım R bir halka olsun. R’ nin her ideali sonlu üretilmiş ideal ise R’ ye Noether halkası denir.

2.4.2 Uyarı A, R’ nin bir alt modülü olsun. R’ nin Noether halkası olması için gerekli ve yeterli şart A ve R/A’ nın Noether halkaı olmasıdır [3].

2.4.3 Teorem (Hilbert Baz Teoremi. R bir halka olsun. R' nin bir Noether halkası olması için gerekli ve yeterli koşul R[x] tek değişkenli polinom halkasının Noether halkası olmasıdır.

İspat $\Leftarrow$: R[x]' in Noether halkası olduğunu varsayalım.

θ: R[x]$\longrightarrow$ R

f(x) $\longrightarrow$ θ(f(x))=f(0)

θ dönüşümü iyi tanımlıdır:

$\forall$ x$\in$R için f(x)=g(x) varsayalım.

0$\in$R ve f(0) = g(0) $\Longrightarrow$ θ(f(x)) = θ(f(x)) elde edilir.

θ bir halka homomorfizmasıdır:

$\forall$ f(x), g(x)$\in$ R[x] için

$$\begin{aligned}\theta(f(x)+g(x)) &= \theta((f+g)(x))\\ &= (f+g)(0)\\ &= f(0)+g(0)\\ &= \theta(f(x))+\theta(g(x))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta(f(x).g(x)) &= \theta((f.g)(x))\\ &= (f.g)(0)\\ &= f(0).g(0)\\ &= \theta(f(x)).\theta(g(x))\end{aligned}$$

olur. θ dönüşümü örtendir:

r$\in$R alalım. θ(f(x))= r olacak şekilde f(x) $\in$ R[x] bulmalıyız.

f(x)= $r+a_1.x+\ldots+a_n.x^n \in$ R[x] alırsak

$$\begin{aligned}\theta(f(x)) = f(0) &= r+a_1.0+\ldots+a_n.0\\ &= r\end{aligned}$$

olduğundan θ örtendir. Buradan θ dönüşümü iyi tanımlı ve örten bir halka homomorfizması olur.

$$\begin{aligned}\text{Çek}\,\theta &= \{f(x) \in R[x] | \theta(f(x)) = 0\}\\ &= \{f(x) \in R[x] | f(0) = 0\}\\ &= \{f(x) \in R[x] | f(0) = a_0 + a_1 0^1 + \cdots + a_n 0^n = 0\,, a_i \in R, i = 0, \ldots, n\}\\ &= \{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x] | a_0 = 0\}\\ &= \{a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n | a_i \in R, i = 1, \ldots, n\}\\ &= \langle x \rangle\end{aligned}$$

Halkalar için I. izomorfizma teoreminden [3], $R[x] /_{<x>} \cong R$ dır. Buradan, R, bir Noether halkasıdır.

$\Longrightarrow$ **:** R' nin Noether halkası olduğunu varsayalım.

R[x]' in her sol idealinin sonlu üretilmiş olduğunu göstermeliyiz. J, R[x]' in bir sol ideali olsun.

J=<0> ise ispat biter.

J≠<0> olsun. $n\in \mathbb{Z}^+$ ve I_n , J' nin sıfırdan farklı ve derecesi en çok n olan en yüksek dereceli terimin katsayılarının kümesi olarak tanımlansın.

İddia 1: I_n , R' nin bir sol ideali ve $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ olduğunu görelim.

$\forall\, n\in \mathbb{Z}^+$ için $0\in I_n$ olduğundan $I_n \neq \emptyset$ olur.

a, $b\in I_n$ olsun. Bu durumda,

$f(x)=aX^m + \cdots$ ve $g(x)=bX^t + \cdots$, $m,t \leq n$

olacak şekilde $f,g\in I$ vardır.

m>t olduğunu varsayalım.

$X^{m-t}.g = b.X^m + \cdots \in J$, J ideal ve $f \in J$ olduğundan

$f-X^{m-t}.g = (a-b).X^m + \cdots \in J$

olur.

a=b ise $a-b=0\in I_n$

a≠b ise a-b, $f-X^{m-t}.g \in J$' nin en büyük dereceli teriminin katsayısıdır. Buradan $a-b \in I_n$ olur.

$a \in I_n$, $r\in R$ olsun.

$f(x)=a.X^m + \cdots$, $m\leq n$

olacak şekilde bir $f \in J$ vardır. J bir sol ideal olduğundan

$r.f(x)=r.a.X^m + \cdots \in J$ olur.

r.a=0 ise $0\in I_n$ olduğu için $r.a \in I_n$' dir.

r.a≠0 ise r.a, $r.f \in J$' nin en yüksek dereceli teriminin katsayısıdır. Buradan, $r.a\in I_n$ olur. O halde, $\forall\, n\in \mathbb{Z}^+$ için I_n, R' nin bir sol idealidir.

$I_n=\{a \in R | f(x) = a.x^n + \cdots \in J\}$

$a\in I_n \Longrightarrow \exists\, f(x) = a.x^n + ... \in J$ öyleki deg(f)=n

$\quad\quad \underset{J\text{ ideal}}{\Longrightarrow}$ $x.f(x) = a.x^{n+1} + \cdots + ... \in J$, deg(x.f)=n+1

$\quad\quad \Longrightarrow$ $a\in I_{n+1}$

olur. Buradan $I_n \subset I_{n+1}$' dir. R, Noether halkası olduğundan $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$ artan zinciri bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$

olur. Buradan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I_k$$

elde edilir. R Noether halkası ve I_n, R' nin bir sol ideali olduğundan

$I_n = \langle a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{t_n}} \rangle$, $a_{n_j} \in I_n$, j=1,... t_n

şeklinde yazabiliriz.

$a_{n_j} \in I_n$ için a_{n_j} , f_{n_j}' nin en yüksek dereceli teriminin katsayısı olacak şekilde $f_{n_j} \in J$ vardır.

$\deg(f_{n_j}) = n$ olduğunu varsayalım.

İddia 2: $J = \langle f_{n_j} \mid 0 \leq n \leq k , 1 \leq j \leq t_n \rangle$

$0 \neq f \in J$ ve $\deg(f) = \ell$ olsun.

ℓ üzerinden tümevarım yapalım. $\ell = 0$ için ispat açıktır.

$\ell \geq 1$ ve J' nin derecesi m-1'den küçük veya eşit olan her elemanının f_{n_j}' nin R[x]-lineer kombinasyonu olarak yazıldığını varsayalım.

$1 \leq \ell \leq m-1$ iken $f \in J$ olur.

$\ell = m$ iken $\deg(f) = m$. Böylece, I_m' nin tanımından $a \in I_m$ olur. Buradan,

$I_m = \langle a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_{t_m}} \rangle$ olduğundan bazı $\alpha_{m_j} \in R$ için

$$a = \sum_{j=1}^{t_m} \alpha_{m_j} . a_{m_j}$$

olur.

$\forall\, m \geq k$ için $I_m = I_k$ olduğundan bazı $\alpha_{k_j} \in R$ için $a = \sum_{j=1}^{t_k} \alpha_{k_j} . a_{k_j}$

$$g(X) = \begin{cases} f(X) - X^{m-k}\left(\sum_{j=1}^{t_k} \alpha_{k_j} . a_{k_j}(X)\right), & m \leq k \ ise \\ f(X) - \left(\sum_{j=1}^{t_m} \alpha_{m_j} . f_{m_j}(X)\right), & diğer\ durumda \end{cases}$$

$g \in J$ ve $\deg(g) \leq$ m-1 olduğu açıktır. Tümevarım kabulünden, g' nin sağ tarafı $J = \langle f_{n_j} \mid 0 \leq n \leq k , 1 \leq j \leq t_n \rangle$' nin elemanıdır. Buradan

$f \in J = < f_{n_j} | 0 \leq n \leq k, 1 \leq j \leq t_n >$ elde edilir. Böylece, J sonlu üretilmiştir.

2.4.4 Sonuç R bir Noether halkası ise $R=k[x_1, \ldots, x_n]$ çok değişkenli polinom halkası da Noether halkadır.

2.5 Gröbner Bazlar

2.5 1 Tanım $0 \neq f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n]$ bir polinom, $'' > ''$ bir tekterimli sıralaması olsun. $'' > ''$ sıralamasına göre,

(i) f' nin katlı derecesi (multidegree),

multideg(f)=$\max(\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} | a_\alpha \neq 0)$

(ii) f' nin en yüksek dereceli teriminin katsayısı,

LC(f)=$a_{\text{multideg(f)}} \in k$

(iii) f' nin en yüksek dereceli tekterimlisi,

LM(f)=$X^{\text{multideg(f)}}$

(iv) f' nin en yüksek dereceli terimi,

LT(f)=LC(f)**.**LM(f)

olarak tanımlanır.

2.5.2 Örnek $f(x,y,z) = 4xy^2z+4z^2-5x^3+7x^2z^2 \in k[x, y, z]$ ve $'' > ''$ lex sıralaması olsun.

$$m_1 = 4xy^2z \text{ için } \alpha_1 = (1, 2, 1)$$
$$m_2 = 4z^2 \text{ için } \alpha_2 = (0, 0, 2)$$
$$m_3 = -5x^3 \text{ için } \alpha_3 = (3, 0, 0)$$
$$m_4 = 7x^2z^2 \text{ için } \alpha_4 = (2, 0, 2)$$

şeklindedir. Buradan;

multideg(f)=(3, 0, 0)

LC(f)=-5

LM(f)=x^3

LT(f)=$-5x^3$

elde edilir.

2.5.3 Tanım $\{0\} \neq I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ idealini alalım.

(i) I idealinin elemanlarının en yüksek dereceli terimlerinin kümesi LT(I),

$LT(I)=\{c.x^{\alpha} | f \in I$ öyleki $LT(f) = c.x^{\alpha}\}$ ile ifade edilir.

(ii) LT(I) kümesinin elemanları tarafından üretilen ideal $< LT(I)>$ ile gösterilir.

2.5.4 Örnek $I=<f_1, f_2> \subset k[x, y]$, $f_1 = x^3 - 2xy$, $f_2 = x^2y-2y^2+x$ olsun. $k[x,y]$' de grlex tekterimli sıralamasını kullanalım.

$(-y).f_1+ x.f_2= (-y).(x^3 - 2xy) + x.(x^2y-2y^2+x)$

$= x^2 \in I$

$LT(x^2) = x^2 \in <LT(I)>$

olur. Buradan

$m_1 = x^3$ için $\alpha_1 = (3, 0)$

$m_2 =-2xy$ için $\alpha_2 = (1, 1)$

olup $|\alpha_1|=3 > 2=|\alpha_2|$ olduğundan

$\text{multideg}(f_1)=(3, 0)$

$LC(f_1)=1$

$LM(f_1)=x^3$

$LT(f_1)= x^3$

olur. Benzer şekilde, $LT(f_2)= x^2y$ elde edilir.

$LT(f_1)= x^3$, $LT(f_2)= x^2y$ ve $x^2 \notin <x^3, x^2y >$ olduğundan,

$<LT(I)> \nsubseteq <LT(f_1), LT(f_2)>$ olur.

2.5.5 Tanım $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ üzerinde $'' > ''$ tekterimli sıralaması ve $I\subset k[x_1, \dots, x_n]$ olan bir ideal olsun. $G=\{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ sonlu altkümesini alalım.

$<LT(g_1),\dots, LT(g_t)> = <LT(I)>$ ise, G kümesine I idealinin Gröbner bazı (veya standart bazı) denir.

2.5.6 Teorem ($k[x_1, \dots, x_n]$' de Bölme Algoritması)

$\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ üzerinde $'' > ''$ tekterimli sıralaması ve $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$,

$LT(f_1) > LT(f_2) > \dots > LT(f_s)$ olacak şekilde polinomlar olsun. Her $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ polinomu, $a_i, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ iken r=0 veya r, $LT(f_1)$, $LT(f_2)$, ..., $LT(f_s)$' lerin hiçbirisi ile bölünmeyecek şekilde tekterimlilerin bir k-lineer kombinasyonu olarak

$f = a_1f_1+ \dots + a_sf_s+ r$

şeklinde yazılabilir.

İspat [1].

2.5.7 Uyarı $f \in k[x_1, \dots, x_n]$' nin $F=(f_1, \dots, f_s)$ sıralı s-lisine göre bölme işleminden kalanını $\overline{f}^F$ ile gösterelim.

2.5.8 Örnek $F=(x^2y - y^2, x^4y^2 - y^2) \subset k[x,y]$ ve "$>$" lex sıralaması olsun.

$f=x^5y \in k[x,y]$ için

$f_1 = x^2y - y^2$, $f_2 = x^4y^2 - y^2$ olmak üzere;

$x^5y = (x^3 + xy).f_1 + xy^3$

$xy^3 = 0.\, f_2 + xy^3$

olduğundan

$f = (x^3 + xy).f_1 + 0.\, f_2 + xy^3$

$\Longrightarrow \overline{f}^F = xy^3$

elde edilir. Burada, f polinomunun F sıralı s-lisine göre kalan $f \longrightarrow_F xy^3$ olarak da gösterilebilir.

2.5.9 Tanım $0 \neq f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ olsun.

(i) $\text{multideg}(f)=\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $\text{multideg}(g)=\beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$,

$\forall$ $i=1,\dots,n$ için $\gamma_i=\max(\alpha_i, \beta_i)$ olmak üzere LM(f) ve LM(g)' nin en küçük ortak katı $\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ olsun.

$x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n}=X^\gamma=\text{OKEK}(LM(f), LM(g))$

şeklindedir.

(ii) f ve g polinomlarının S-polinomu,

$S(f,g)=\frac{X^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{X^\gamma}{LT(g)} \cdot g$

şeklindedir.

2.5.10 Örnek $R=\mathbb{R}[x,y]$, $f=x^3y^2 - x^2y^3 + x \in R$ ve $g=3x^4y + y^2 \in R$, "$>$" grlex sıralaması olsun.

$f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$ için $LT(f)=x^3y^2$

$g = 3x^4y + y^2$ için $LT(g)= 3x^4y$

olup $X^\gamma=x^4y^2$, $\gamma = (4, 2)$ elde edilir. Buradan,

$$S(f,g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2}(x^3y^2 - x^2y^3 + x) - \frac{x^4y^2}{3x^4y}(3x^4y + y^2)$$
$$= x^4y^2 - x^3y^3 + x^2 - x^4y^2 - \frac{1}{3}y^3$$
$$= -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3$$

2.6 Cohen-Macaulay Halkaları

Macaulay halkası olarak da adlandırılan Cohen-Macaulay halkaları değişmeli cebirin temel konularından biridir. Cohen-Macaulay kavramında polinom halkalarından esinlenilmiştir.

2.6.1 Tanım R bir halka, I , R' nin bir ideali ve M bir R-modül olsun. M≠I.M ise, I, içinde bir n-uzunluklu $a_1, \dots, a_n$ M-dizisinin maksimal uzunluğuna M' nin I derinliği denir ve depth(I, M) ile gösterilir.
M=I.M ise depth(I, M) = ∞ olur.

2.6.2 Tanım R bir halka ve m , R halkasının bir maksimal ideali olsun.
R halkasının m idealinden başka maksimal ideali yok ise, R halkasına lokal halka denir ve (R,m) ile gösterilir.

2.6.3 Örnek Bütün cisimler lokal halkadır, çünkü $\{0\}$, bu halkanın tek maksimal idealidir.

2.6.4 Uyarı Eğer (R,m) lokal halka ise, M'nin m-derinliğine kısaca M'nin derinliği denir ve depth(M) := depth(m, M) ile gösterilir.

2.6.5 Örnek k bir cisim ve R= k[$x_1, \dots, x_n$] polinom halkası olsun.
k[$x_1, \dots, x_n$] halkasına $m = < x_1, \dots, x_n >$ maksimal idealini alalım. M= k[$x_1, \dots, x_n$],
R×M⟶M
(r, f)⟶ r.f
etkisi ile bir R-modüldür.
$x_1, \dots, x_n \in < x_1, \dots, x_n >$ ve $x_1, \dots, x_n$ n-uzunluklu bir M-dizisidir:
(i) i=1,...,n için x_i, $k[x_1, \dots, x_n] /_{<x_1,\dots,x_{i-1}>.k[x_1,\dots,x_n]}$ üzerinde sıfır bölen değildir, çünkü $k[x_1, \dots, x_n] /_{<x_1,\dots,x_{i-1}>.k[x_1,\dots,x_n]} \cong k[x_i, \dots, x_n]$
(ii) $k[x_1, \dots, x_n] \neq < x_1, \dots, x_n >. k[x_1, \dots, x_n]$ olur, çünkü $1 \notin < x_1, \dots, x_n >. k[x_1, \dots, x_n]$

dır. Buradan, depth($< x_1, \dots, x_n >. k[x_1, \dots, x_n]$) $\geq$ n elde edilir.

2.6.6 Tanım R bir Noether lokal halkası, M$\neq$0 bir sonlu R-modül olsun. depth(M)=dimM ise M bir Cohen-Macaulay modül' dür.

R halkası, bir Cohen-Macaulay modül ise, R bir Cohen-Macaulay halkasıdır denir.

2.6.7 Teorem Herhangi bir I$\subseteq$R= $k[x_1, \dots, x_n]$ ideali için depth(R/I) $\leq$ dim(R/I) olur.

İspat [4].

2.6.8 Tanım R bir halka ve I$\subseteq$R bir ideal olsun. depth(R/I) $=$ dim(R/I) ise R/I halkası bir Cohen Macaulay halkasıdır.

2.6.9 Örnek R= $k[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası bir Cohen-Macaulay halkadır, çünkü I=(0) alırsak,

depth(R/I) $\leq$ dim(R/I) ve dim(R/I) = n olur. 2.6.5 Örnekten,

depth(R/I) $= n$ = dim(R/I)

elde edilir.

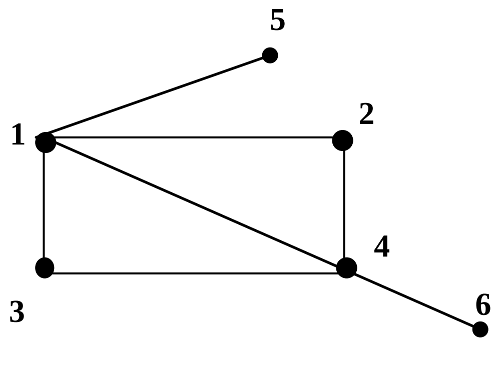
3. SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER

Bu bölümde çizgeler, simplisyal komplekslerin tanımı, çizgelerin simplisyal kompleksleri, Kruskal-Katona teoremi, Stanley-Reisner halkaları ve simplisyal kompleksin Cohen-Macaulay özellikleri ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir. Bu bilgiler [4] kaynaklarından alınmıştır.

3.1 Çizgeler

3.1.1 Tanım V sonlu bir küme ve E, V×V' de bir sırasız ikililer topluluğu olmak üzere (V, E) şeklindeki ikililere çizge denir. ″G″ ile gösterilir. V 'nin elemanları çizgenin köşe noktaları, E' nin elemanları kenarlar olarak adlandırılır.

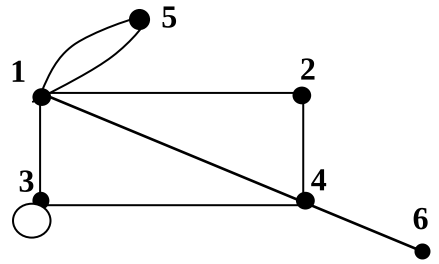
3.1.2 Örnek V={1,2,3,4,5} ve E=(1, 2)(1, 3)(1, 4)(2, 4)(3, 4)(1, 5)(4, 6) ⊂ V×V ile bir G çizgesi tanımlayalım.



şekli ile gösterilen G çizgesi 5 köşe ve 7 kenardan oluşur.
E' de tekrar eden elemanlar olabilir. Bu durumda G' nin çoklu kenarı vardır denir.

3.1.3 Tanım G çizgesinin sadece bir köşesi arasında bir kenarı varsa bu kenara döngü denir.

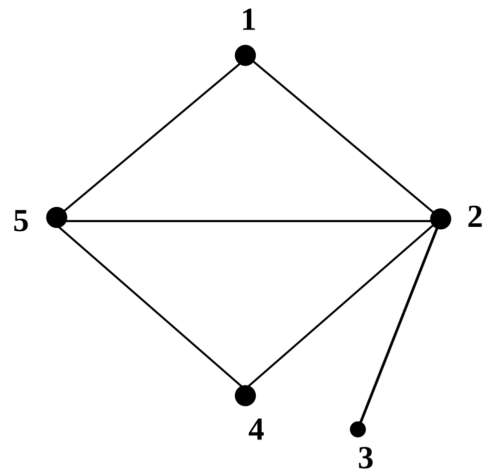
3.1.4 Örnek



bir çizge olsun. Bu çizgede (3, 3) bir döngüdür ve (1, 5) iki kez eklenmiştir.

3.1.5 Tanım Döngüler içermeyen ve çoklu kenarları olmayan bir çizgeye basit çizge denir.

3.1.6 Örnek

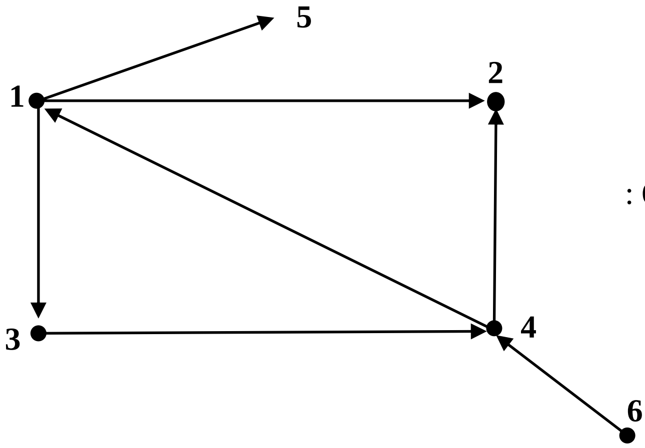


şekli basit bir çizgeyi göstermektedir.

3.1.7 Not 3.1.1 Çizge tanımında kenarlar sıralı olmayan ikililerdir. Burada (1, 4) kenarı ile (4, 1) kenarı aynı kenardır. Böyle çizgelere yönlendirilmiş çizge denir.

3.1.8 Tanım Kenarları sıralı ikililerden oluşan çizgeye yönlendirilmiş çizge denir. Böyle çizgelerde, (x_1, x_2) kenarı için, x_1' den başlayıp x_2' de biten bir ok çizilir.

3.1.9 Örnek V={1,2,3,4,5,6} ve E=(1, 2),(1, 3),(4, 1),(4, 2),(3, 4),(1, 5),(6, 4) $\subset$ V×V ile yönlendirilmiş bir G_1 çizgesi tanımlayalım.



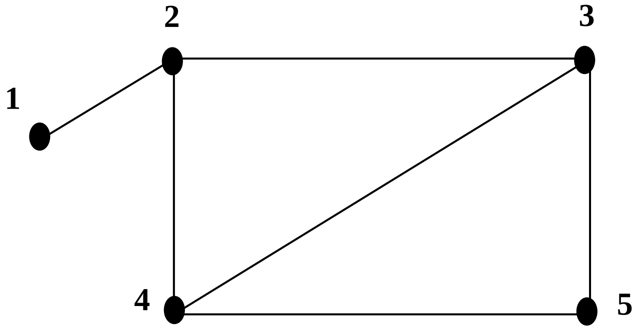
: G_1

3.1.10 Tanım V_G, G' nin köşelerinin kümesi, $x \in V_G$ olsun. x' e bağlı olan kenarların sayısına x' in derecesi denir ve degx ile gösterilir.

3.1.11 Not Basit çizgeler bağlantılı olmak zorunda değildir. G' nin bağlantılı bileşenlerinin sayısı $\#\mathrm{comp}(G)$ ile gösterilir.

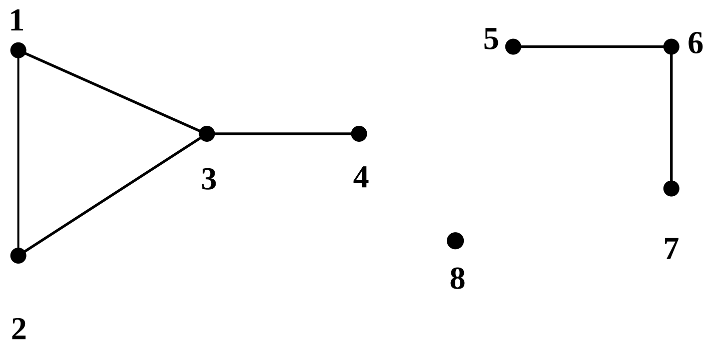
3.1.12 Tanım G=(V, E) bir çizge olsun.G'nin tüm köşeleri arasında en az bir kenar varsa G' ye bağlı (bağlantılı) çizge denir. Eğer, G' nin herhangi iki köşesi arasında bir kenar bulunmuyor ise G, bağlantılı olmayan çizgedir.

3.1.13 Örnek



şekli ile gösterilen çizge bağlı çizgedir.

3.1.14 Örnek



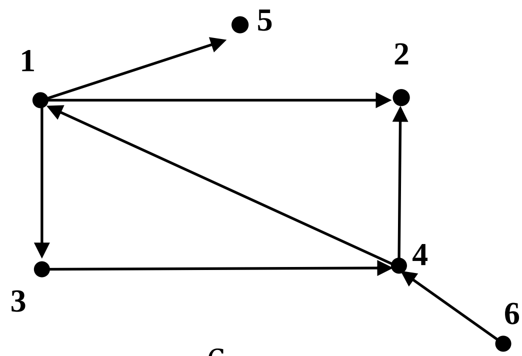
şekli ile gösterilen çizge, bağlı olmayan çizgedir.

3.1.15 Tanım G=(V, E) bir çizge olsun.

$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ ise, $H=(V', E')$ ikilisine G' nin bir alt çizgesi denir.

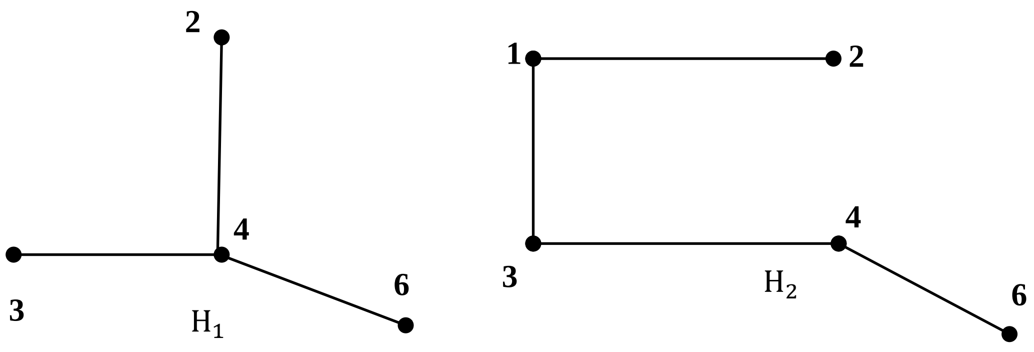
3.1.16 Tanım $\emptyset \neq S \subseteq V_G$ olsun. Köşe kümesi S olan ve kenar kümesi de S' deki iki köşeyi bağlayan G' deki kenarlardan oluşan, G' nin alt çizgesine G' nin indirgenmiş alt çizgesi denir ve G_S ile gösterilir.

3.1.17 Örnek



G_1

G_1 çizgesini düşünelim.



şekilleri G_1' in iki alt çizgesini göstermektedir. H_1 alt çizgesi indirgenmiş alt çizgedir. Bu çizgede, G_1' e ait olan 2, 3, 4 ve 6 köşeleri arasındaki tüm kenarlar H_1' de vardır. İkinci alt çizge olan H_2 indirgenmiş alt çizge değildir, çünkü (2, 4) ve (1, 4) kenarları, G_1' de olmasına rağmen H_2' de eksiktir.

3.1.18 Tanım G^c ile gösterilen G çizgesinin tümleyeni, G kümesiyle aynı köşe kümesine sahip, fakat kenar kümesi $\{x_i, x_j\} \in E_{G^c} \Leftrightarrow \{x_i, x_j\} \notin E_G$ kuralı ile tanımlı olan çizgedir.

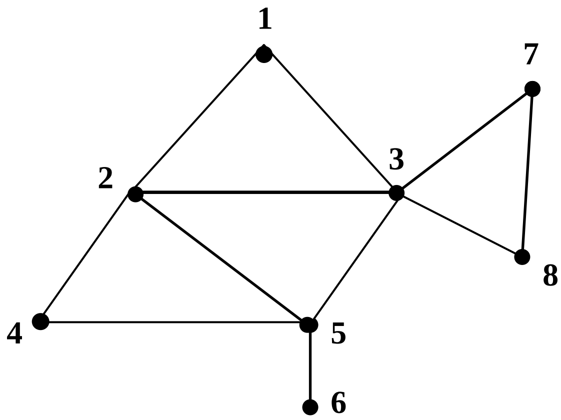
3.1.19 Tanım G bir çizge olsun G' nin q uzunluğundaki çevrimi (cycle), G'de

$\{e_1 = x_1x_2, e_2 = x_2x_3, \dots, e_{q-1} = x_{q-1}x_q, e_q = x_qx_1\}$ (i≠j için $x_i \neq x_j$)

olan dizidir.

$x_1, \dots, x_q$ köşeleri olan q uzunluğundaki bir çevrim, $(x_1x_2 \dots x_qx_1)$ ile veya C_q ile gösterilir.

3.1.20 Örnek



C_5 çevrimi: (124531)

.

3.1.21 Tanım C=$(x_1x_2 \dots x_qx_1)$, G' nin bir çevrimi olsun.

Eğer , x_ix_j, G' nin bir kenarı olacak şekilde bir j≢i+1(mod q) var ise, C çevrimi bir kirişe sahiptir.

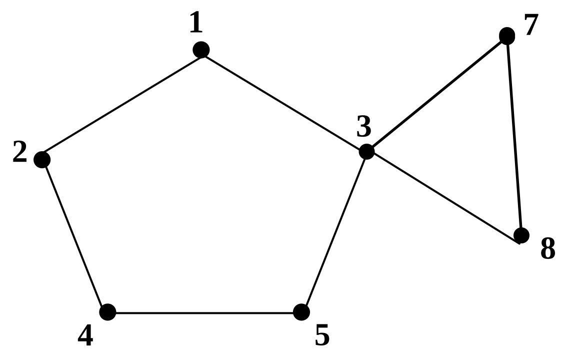
3.1.22 Örnek 3.1.20 Örneğindeki C_5=($x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_1$) = (124531) çevrimini alalım.

($x_2 = 2, x_5 = 3$) kenarı, j=5$\not\equiv$3(mod 5) olduğundan C_5' in bir kirişidir.

($x_2 = 2, x_4 = 5$) kenarı da j=4$\not\equiv$(mod 5) olduğundan C_5' in bir kirişidir.

3.1.23 Tanım C, G' nin bir çevrimi olsun. C' nin uzunluğu en az 4 ve hiç kiriş yok ise, C' ye minimal çevrim denir.

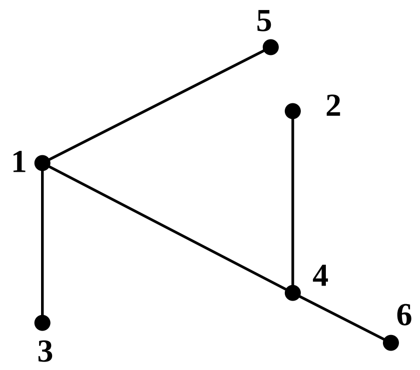
3.1.24 Örnek G çizgesi



olsun. C_5 = (124531) çevrimi G' nin minimal çevrimidir, fakat C_3=(3, 7, 8, 3) çevrimi minimal değildir.

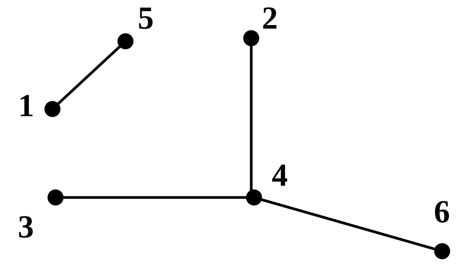
3.1.25 Tanım Çevrimleri olmayan bağlantılı çizgelere ağaç denir.

3.1.26 Örnek



3.1.27 Tanım Her bir bağlantı bileşeni ağaç olan çizgeye orman denir.

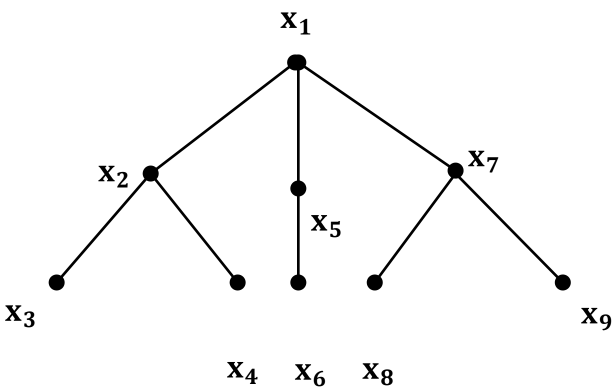
3.1.28 Örnek



şekil iki ağaçlık bir ormanı göstermektedir.

3.1.29 Tanım Bir ağaçta, derecesi 1 olan herhangi bir köşeye yaprak denir.

3.1.30 Örnek



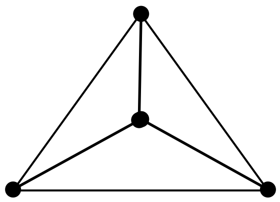
bir ağaçtır. x_3, x_4, x_6, x_8, x_9 bu ağacın yapraklarıdır, çünkü

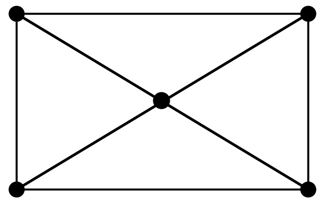
$\deg(x_3) = \deg(x_4) = \deg(x_6) = \deg(x_8) = \deg(x_9) = 1$

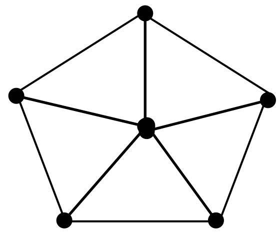
dir.

3.1.31 Tanım C_n, n uzunluklu bir çevrim olsun. C_n' e bir z köşesi ve V_{C_n} içindeki her köşe ile z arasına bir kenar ekleyerek oluşturulan W_n çizgesine, çark çizgesi denir. W_n, n+1 köşelidir.

3.1.32 Örnek





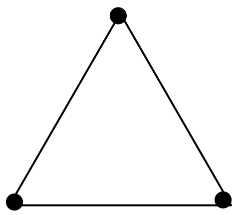


W_3 W_4 W_5

3.1.33 Tanım $\mathcal{K}_n$ ile gösterilen n köşeli tam çizge, her i≠j için $x_i, x_j \in V_{\mathcal{K}_n}$ iken $x_i, x_j \in E_{\mathcal{K}_n}$ özelliğine sahip olan çizgedir. Bir başka deyişle, eğer bir çizgede, her köşe arasında bir kenar varsa tam çizgedir.

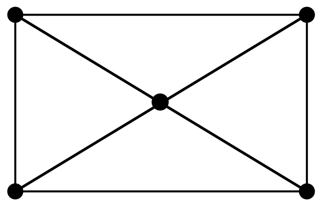
3.1.34 Örnek

$\mathcal{K}_3$



3 köşeli tam çizge

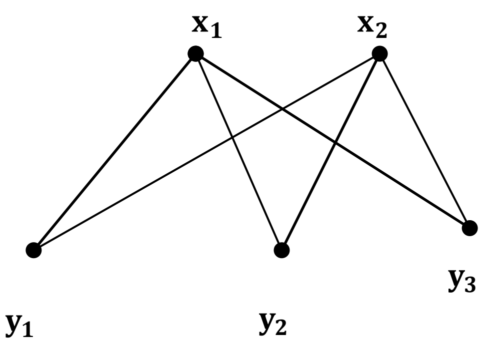
$\mathcal{K}_4$



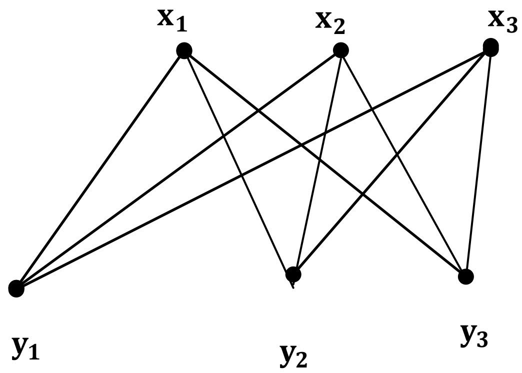
4 köşeli tam çizge

3.1.35 Tanım $\mathcal{K}_{n,m}$ ile gösterilen tam olan iki parçalı çizge, köşe kümesi $V_G=\{x_1, x_2, \dots, x_{n,} y_1, y_2, \dots, y_m\}$ ve kenar kümesi $E_G=\{x_i y_j | \, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ olan çizgedir.

3.1.36 Örnek



$\mathcal{K}_{2,3}$



$\mathcal{K}_{3,3}$

3.2 Simplisyal Kompleksin Tanımı

Simplisyal kompleks, topolojik yapıları temsil etmek için kullanılmasının yanında kombinatorik doğası nedeniyle de cebirsel topolojinin ilginç bir konusudur. Simplisyal kompleks, simpleks adı verilen blokların bir araya getirilmesiyle oluşturulur.

3.2.1 Tanım V=$\{x_1, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme, P(V), V' nin kuvvet kümesi olsun. V üzerinde Δ simplisyal kompleksi, P(V)' nin

(i) $\forall$ i için $\{x_i\} \in \Delta$

(ii) F $\in \Delta$ ve G$\subseteq$F iken G$\in \Delta$

olacak şekildeki bir alt kümesidir.

$\Delta \subseteq$ P(V) olduğu açıktır.

3.2.2 Örnek V=$\{x_1,\ x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere;

$\Delta = \big\{\{x_1\}, \{\ x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\big\}$

$\{x_1\}, \{\ x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\} \in \Delta$ ve

$\{x_1, x_2\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_1, x_2\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_2, x_3\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_2, x_3\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_3, x_4\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_4\} \subset \{x_3, x_4\}$ iken $\{x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_3\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_1, x_3\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

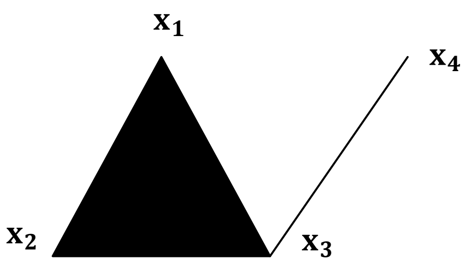
$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1, x_2\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1, x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_2, x_3\} \in \Delta$

olduğundan Δ bir simplisyal komplekstir. Δ simplisyal kompleksini



olarak çizebiliriz.

3.2.3 Örnek $\Delta'=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$

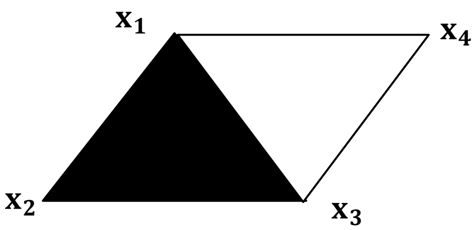
bir simplisyal kompleks değildir, çünkü $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\} \in \Delta'$ fakat

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta'$ ve $\{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1, x_2\} \notin \Delta'$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta'$ ve $\{x_1, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1, x_3\} \notin \Delta'$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta'$ ve $\{x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_2, x_3\} \notin \Delta'$

3.2.4 Örnek



olarak verilen Δ simplisyal kompleksi,

$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$

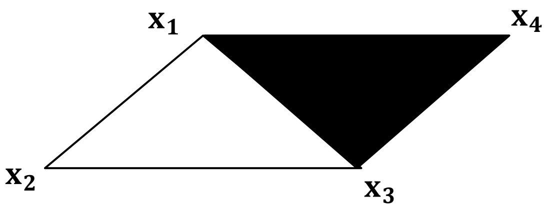
olarak yazılabilir.

3.2.5 Tanım Δ' nın elemanlarına yüzler denir."$\subseteq$" altındaki maksimum yüzlere faset denir.

3.2.6 Tanım F$\in \Delta$ bir yüz ise F' nin boyutu dim F = $|F| - 1$ ile, Δ' nın boyutu ise

dim Δ = max$\{\dim F \,|F \in \Delta\}$ ile ifade edilir.

3.2.7 Örnek Δ



olsun. Δ' yı liste şeklinde,

$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}\{x_1, x_3, x_4\}\}$

olarak yazabiliriz.

F_1=$\{x_1\}$ yüzünün boyutu, dim F_1=$|F_1| - 1$

$$= 1 - 1 = 0$$

F_2=$\{x_2\}$ yüzünün boyutu, dim F_2=$|F_2| - 1$

$$= 1 - 1 = 0$$

$F_3=\{x_3\}$ yüzünün boyutu, dim $F_3=|F_3|-1$

$$=1-1=0$$

$F_4=\{x_4\}$ yüzünün boyutu, dim $F_4=|F_4|-1$

$$=1-1=0$$

$F_5=\{x_1,x_2\}$ yüzünün boyutu, dim $F_5=|F_5|-1$

$$=2-1=1$$

$F_6=\{x_1,x_3\}$ yüzünün boyutu, dim $F_6=|F_6|-1$

$$=2-1=1$$

$F_7=\{x_1,x_4\}$ yüzünün boyutu, dim $F_7=|F_7|-1$

$$=2-1=1$$

$F_8=\{x_2,x_3\}$ yüzünün boyutu, dim $F_8=|F_8|-1$

$$=2-1=1$$

$F_9=\{x_3,x_4\}$ yüzünün boyutu, dim $F_9=|F_9|-1$

$$=2-1=1$$

$F=\{x_1,x_3,x_4\}$ yüzünün boyutu, dim $F=|F|-1$

$$=3-1=2$$

F yüzünün boyutu 2 ve diğer tüm yüzlerin boyutu ≤ 1 olduğundan

dim Δ = max{dim F |F $\in \Delta$}

= 2

elde edilir.

3.2.8 Tanım F$\in \Delta$ bir yüz olsun.

- Eğer dim F=0 ise veya buna denk olarak $|F|=1$ ise, F bir köşedir.
- Eğer dim F=1 ise veya $|F|=1$ ise, F bir kenardır.

- Eğer F=∅ ise, dim F=-1 dir.

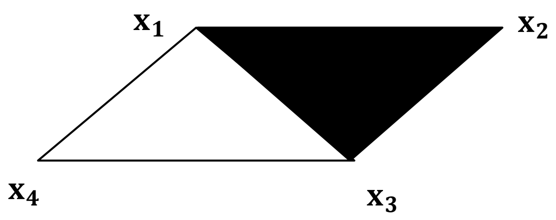
3.2.9 Tanım $\{F_1, F_2, \dots, F_s\}$ V' nin alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Tüm F_i' leri içeren ve $<F_1, F_2, \dots, F_s>$ ile gösterilen bir tek en küçük simplisyal kompleks vardır. $<F_1, F_2, \dots, F_s>$ simplisyal kompleksine F_i' ler tarafından üretilir denir ve

$<F_1, F_2, \dots, F_s>=\{G \subseteq V | G \subseteq F_i$, bir i $\in \{1, \dots, s\}\}$ olarak yazılır.

3.2.10 Not $F_1, F_2, \dots, F_s$' ler, Δ simplisyal kompleksinin fasetleri ise $\Delta=< F_1, F_2, \dots, F_s >$ olur. Eğer Δ=<F> ise, Δ bir simplekstir denir.

3.2.11 Tanım Bütün fasetleri aynı boyuta sahip olan Δ simplisyal kompleksine pür simplisyal kompleks denir.

3.2.12 Örnek



olsun. Δ simplisyal kompleksi pür değildir:

$F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $F_2 = \{x_1, x_3\}$

Δ' nın fasetleridir. Burada

dim F_1=$|F_1| - 1$

$= 3 - 1 = 2$

dim F_2=$|F_2| - 1$

$= 2 - 1 = 1$

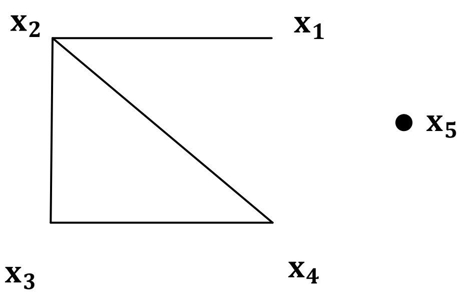
Δ' nın farklı boyutlara sahip iki faseti olduğundan, Δ pür simplisyal kompleks değildir.

3.3 Çizgelerin Simplisyal Kompleksleri

Bu bölümde bir çizgeyle bir simplisyal kompleks arasındaki ilişkiden bahsedilecektir.

3.3.1 Tanım G döngülere veya çok katlı kenarlara sahip olmayan bir çizge olsun. G çizgesi, köşe kümesi V_G=$\{x_1, \ldots, x_n\}$ üzerinde 1-boyutlu bir simplisyal komplekstir.

3.3.2 Örnek



çizgesi, 1-boyutlu

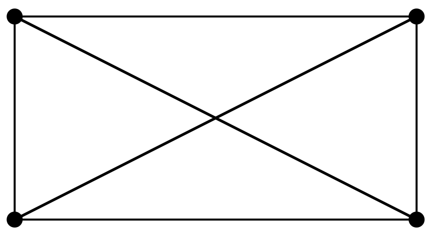
$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}\{x_3, x_4\}\}$

simplisyal kompleksidir.

3.3.3 Not Herhangi bir 1-boyutlu simplisyal kompleks bir çizge ile temsil edilir.

3.3.4 Tanım $C\ell_n(G)$ ile gösterilen G çizgesinin n-uzunluklu bir kliki, her bir köşe arasında bir kenarı olan n köşeli bir çizgedir.

3.3.5 Örnek $C\ell_4(G)$ klikinin çizgesi



şeklindedir.

3.3.6 Tanım G sonlu bir çizge ve G_F, $F \subseteq V_G$ iken G' nin F üzerindeki bir alt çizgesi olsun. G' nin klik kompleksi, $\Delta(G) = \{F \subseteq V_G | G_F \text{ bir klik}\}$ simplisyal kompleksidir.

3.3.7 Not $\Delta(G)$ bir simplisyal komplekstir, çünkü;

- $\forall$ i için $F=\{x_i\} \subseteq V_G$ iken $G_{\{x_i\}} = C\ell_1(G)$ bir klik olduğundan $F=\{x_i\} \in \Delta(G)$
- $F \in \Delta(G)$ ve $H \subseteq F$ ise G_H, G_F kliğinin bir indirgenmiş alt çizgedir. G_H da bir kliktir, bu yüzden $H \in \Delta(G)$' dir.

3.4 Kruskal-Katona Teoremi

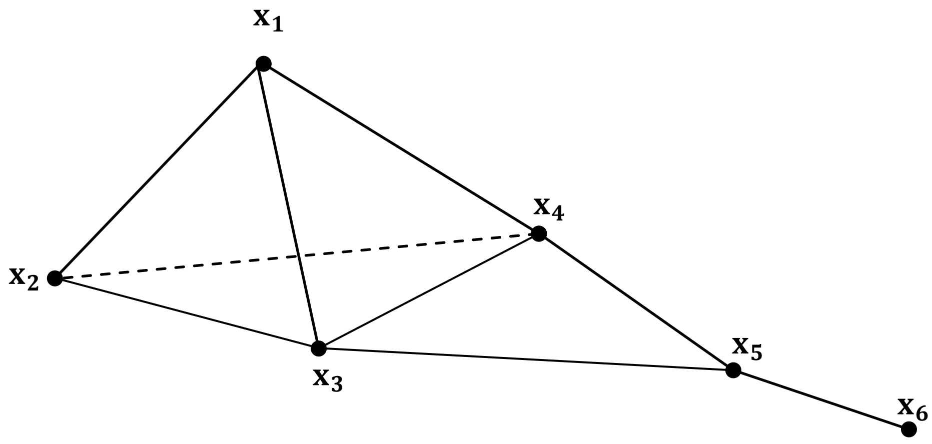
Kruskal-Katona teoreminin, ilk yayınlanmış ispatı Kruskal tarafından ve daha sonra da bağımsız olarak Katona tarafından verilmiştir [5], [6]. Kruskal-Katona teoremi, simplisyal komplekslerin temel kombinatorik sayısal verisi olan f-vektörlerinin bir karakterizasyonunu vermektedir. Daha açık ifadeyle, Kruskal-Katona teoremi, k-1 boyutlu yüzlerin sayısı verildiğinde kompleksin sahip olabileceği k-boyutlu yüz sayısına bir üst sınır verir.

3.4.1 Tanım Δ bir simplisyal kompleks ise, $f_i = f_i(\Delta)$ = i boyutlu yüzlerinin sayısı olarak tanımlanır.

3.4.2 Uyarı $\emptyset \in \Delta$ ve dim Δ = -1 olduğundan $f_{-1} = 1$ ve $f_0 = |V|$ = köşelerin sayısı olur.

3.4.3 Tanım dim Δ = d ise, Δ' nın f-vektörü, $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ d-lisidir.

3.4.4 Örnek Δ simplisyal kompleksini düşünelim



$\Delta=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\},$

$\{x_4, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_2, x_4\}\}$

$f_0 = |V| = 6$

Şimdi f_1' i bulalım.

$f_1 = f_1(\Delta)$ = 1 boyutlu yüzlerinin sayısı

= Δ' nın kenarlarının sayısı

= 9

$f_2 = f_2(\Delta)$ = 2 boyutlu yüzlerinin sayısı

= Δ' nın üçgenlerinin sayısı

= 4

$f_3 = f_3(\Delta)$ = 3 boyutlu yüzlerinin sayısı

= Δ' nın dört yüzlülerinin sayısı

= 1

f-vektörü buradan $f(\Delta)=(6, 9, 4, 1)$' dir, çünkü 6 köşe, 9 kenar, 4 üçgen ve 1 üçgen piramite (dört yüzlüye) sahiptir.

$(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ bir tam sayı dizisi iken, $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ olacak şekilde bir Δ simplisyal kompleksi var mıdır?

3.4.5 Tanım k, pozitif bir tam sayı olsun.$\forall$ a $\in \mathbb{N}$ için,

$$a = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_s}{s}, \; a_k > a_{k-1} > \dots > a_s \geq 1$$

tek şekilde yazılır. Bu toplama, a' nın k. Macaulay Gösterimi denir.

3.4.6 Not Binom katsayısı $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,.(a-b)!}$ şeklindedir ve $a < b$ ise $\binom{a}{b} = 0$

dır.

Şimdi Macaulay Gösterimi' nin nasıl bulunacağını anlatalım. Pascal üçgeninin dikdörtgen olarak yazılımını düşünelim.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**	**i**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	...	
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	...	
2	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	...	
3	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	...	
4	**1**	**5**	**15**	**35**	**70**	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
j							$\binom{i+j}{i}$

i-sütunu, j-satırı göstermektedir.

a = 23' ün 4. Macaulay gösterimini bulalım.

i = 4. sütunda 23' ten küçük veya eşit olan en büyük sayı 15' dir.

$15 = \binom{4+2}{4} = \binom{6}{4}$ olarak yazılabilir.

i = 3. sütunda 23-15 = 8' den küçük veya eşit olan en büyük sayı 4 olur ve

$4 = \binom{3+1}{3} = \binom{4}{3}$ yazılabilir.

i = 2. sütunda 23-15-4 = 4’ ten küçük veya eşit olan en büyük sayı 3 olup,

$3 = \binom{2+1}{2} = \binom{3}{2}$ dir.

i = 1. sütunda 23-15-4-3 = 1 olup 1’ den küçük veya eşit sayı

$\binom{1}{1} = 1$ dir.

Böylece, a = 23’ ün 4. Macaulay gösterimi

$$23 = \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1}$$

olarak elde edilir.

3.4.7 Tanım $a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \ldots + \binom{a_j}{j}$, a’ nın i. Macaulay gösterimi olsun.

$a_i > a_{i-1} > \ldots > a_j \geq 1$ için

$^{[i]}: \square \longrightarrow \square$

$$a \longrightarrow a^{[i]} = \binom{a_i}{i-1} + \binom{a_{i-1}}{(i-1)-1} + \ldots + \binom{a_j}{j-1}, \quad 0^{[i]} = 0$$

bir fonksiyondur.

Şimdi, ilk olarak, Kruskal-Katona Teoremi için gerekli notasyon ve tanımları vereceğiz. Sonrasında teoremin simplisyal kompleksler için olan versiyonunu ifade edeceğiz.

3.4.8 Notasyon

$$\binom{\square}{k} = \{F \subseteq \square \,|\, |F| = k\}$$

ℕ’ nin k-elemanlı alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun.

3.4.9 Örnek

$$\binom{\square}{3} = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,5\},\ldots\}$$

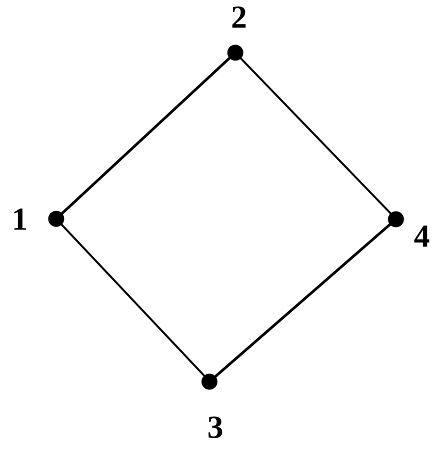
3.4.10 Tanım $\mathcal{F} \subseteq$ □ için, $\mathcal{F}$' nin $\partial\mathcal{F}$ gölgesi, $\partial\mathcal{F} = \{F \setminus \{x\} | F \in \mathcal{F}, x \in F\}$ şeklinde tanımlanır.

3.4.11 Örnek $\mathcal{F} = \big\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\big\}$ olsun.

$\partial\mathcal{F} = \{\{1,2,3\} \setminus \{1\}, \{1,2,3\} \setminus \{2\}, \{1,2,3\} \setminus \{3\}, \{2,3,4\} \setminus \{2\}, \{2,3,4\} \setminus \{3\},$

$\{2,3,4\} \setminus \{4\}\}$

$= \big\{\{2,3\},\{1,3\},\{1,2\},\{3,4\},\{2,4\},\{2,3\}\big\}$



$|\partial\mathcal{F}| = 5$

3.4.12 Teorem (Kruskal-Katona Teoremi)

$\mathcal{F} \subseteq \binom{\square}{k}$, $|\mathcal{F}| = m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_s}{s}$ ise,

$|\partial\mathcal{F}| \geq m^{[k]} = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \ldots + \binom{a_s}{s-1}$ olur.

İspat [5], [6].

Şimdi, Erdös, Ko ve Rado tarafından [7] makalesinde verilen ve ispatta kullanılan Shifting (kaydırma) operatörünü tanımlayalım.

3.4.13 Tanım (Shifting Operatörü)

$x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$, $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ için

$$S_{x,y,\mathcal{F}} = \begin{cases} (H \setminus \{x\}) \cup \{y\}\,; & x \in H, y \notin H \text{ ve } [(H \setminus \{x\}) \cup \{y\}] \notin F \\ H\,; & \textit{diğer durumda} \end{cases}$$

$S_{x,y,\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = \{S_{x,y,\mathcal{F}}(\mathrm{H}) \mid \mathrm{H} \in \mathcal{F}\}$

şeklinde tanımlanan operatöre, Shifting (Kaydırma) Operatörü denir.

Shifting (Kaydırma) Operatörünü ve Kruskal-Katona Teoremini simplisyal kompleksler için ifade edelim.

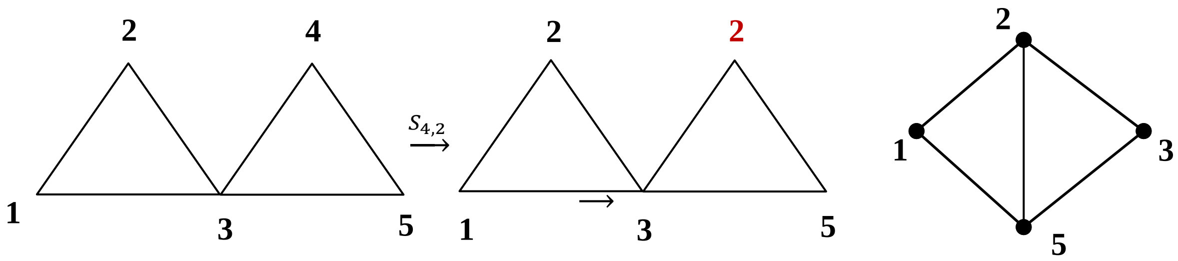
3.4.14 Tanım Δ, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ üzerinde bir simplisyal kompleks olsun.

$\forall\ 1 \leq j \leq n$ ve $\forall\ F \in \Delta$ için

$$S_{x_i x_j}(F) = \begin{cases} (F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\}\ ; & x_j \in F, x_i \notin F \text{ ve } [(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\}] \notin \Delta \\ F\ ; & diğer \text{ durumda} \end{cases}$$

ile tanımlanan operatör Shifting (Kaydırma) Operatörü'dür. Bu operatör, $\{x_j\}$ köşesini $\{x_i\}$ ile değiştirir.

3.4.15 Örnek



Shifting (Kaydırma) Operatörü' nün amacı, Δ simplisyal kompleksini $f_i(\Delta') \leq f_i(\Delta)$ olacak şekilde daha basit Δ' simplisyal kompleksi ile yer değiştirmektedir.

3.4.16 Teorem (Kruskal-Katona Teoremi)

$(f_1, f_2, \ldots, f_d) \in \mathbb{N}^d$ d-lisi, d-1 boyutlu bir simplisyal kompleksin f-vektörüdür. $\Leftrightarrow$ $1 \leq i \leq d-1$ için $0 < {f_{i+1}}^{[i+1]} \leq f_i$

Bir f-vektör verildiğinde, f(Δ)=f olacak şekilde Δ simplisyal kompleksinin nasıl oluşturulacağını bir örnekle açıklayalım.

f=(6, 8, 3) f-vektörünü düşünelim. İlk önce f-vektörünün, geçerli bir f-vektörü olduğunu, bir başka deyişle f-vektörü f=(6, 8, 3) olan bir simplisyal kompleks olduğunu görelim.

$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olsun. f=(6, 8, 3), yani,

$f_0 = |V| = 6$

$f_1 = f_1(\Delta)$ = 1 boyutlu yüzlerinin sayısı

= Δ' nın kenarlarının sayısı

= 8

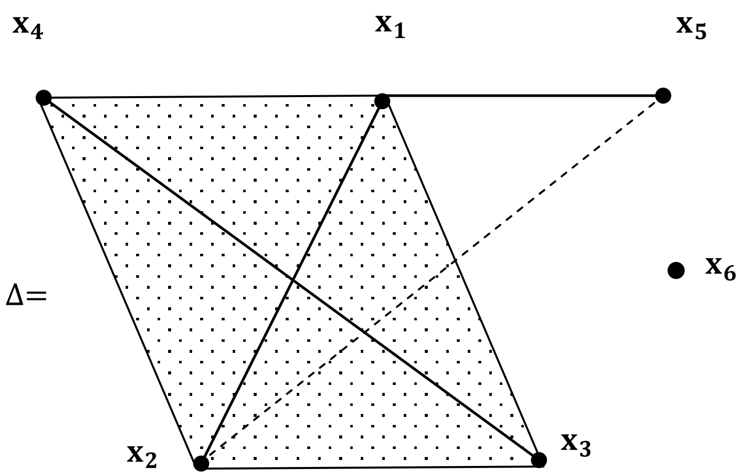
$f_2 = f_2(\Delta)$ = 2 boyutlu yüzlerinin sayısı

= Δ' nın üçgenlerinin sayısı

= 3

olduğundan Δ' yı

Δ=



şeklinde çizebiliriz.

$\Delta=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\},$

$\{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}\}$

şeklinde yazabiliriz.

(i) $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\} \in \Delta$

(ii) $\{x_1, x_2\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_1, x_2\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_3\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_1, x_3\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_4\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_4\} \subset \{x_1, x_4\}$ iken $\{x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_5\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_5\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_5\} \in \Delta$ ve $\{x_5\} \subset \{x_1, x_5\}$ iken $\{x_5\} \in \Delta$

$\{x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_2, x_3\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_2, x_3\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_2, x_4\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_4\} \subset \{x_2, x_4\}$ iken $\{x_4\} \in \Delta$

$\{x_2, x_5\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_2, x_5\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_2, x_5\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_2, x_5\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_3, x_4\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_4\} \subset \{x_3, x_4\}$ iken $\{x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1, x_2\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_1, x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ ve $\{x_2, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ iken $\{x_2, x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_2, x_4\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_4\}$ iken $\{x_2\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_4\} \subset \{x_1, x_2, x_4\}$ iken $\{x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_4\}$ iken $\{x_1, x_2\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_4\} \subset \{x_1, x_2, x_4\}$ iken $\{x_1, x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_2, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_2, x_4\} \subset \{x_1, x_2, x_4\}$ iken $\{x_2, x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1\} \subset \{x_1, x_3, x_4\}$ iken $\{x_1\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_3\} \subset \{x_1, x_3, x_4\}$ iken $\{x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_4\} \subset \{x_1, x_3, x_4\}$ iken $\{x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_3\} \subset \{x_1, x_3, x_4\}$ iken $\{x_1, x_3\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_1, x_4\} \subset \{x_1, x_3, x_4\}$ iken $\{x_1, x_4\} \in \Delta$

$\{x_1, x_3, x_4\} \in \Delta$ ve $\{x_3, x_4\} \subset \{x_1, x_3, x_4\}$ iken $\{x_3, x_4\} \in \Delta$

olduğundan Δ bir simplisyal komplekstir.

Şimdi de, bu geçerli f-vektörüne bir Δ simplisyal kompleksin nasıl oluşturulabileceğini açıklayalım. $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$' nın ikili elemanlarını ters alfabetik (degrevlex) sıralamaya göre düzenleyerek yazalım.

$$X_{i_1}X_{j_1} > X_{i_2}X_{j_2} \Leftrightarrow (i_1, j_1) \underset{\text{degrevlex}}{>} (i_2, j_2)$$

$$\Leftrightarrow j_1 < j_2 \text{ veya } j_1 = j_2 \text{ ise } i_1 < i_2$$

Bu elemanlar,

$x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_1x_6, x_2x_6, x_3x_6, x_4x_6, x_5x_6.$

olarak elde edilir. Δ_1 bu kümenin ilk f_1=8 elemanı olsun.

Δ_1=$\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_5\}\}$

Şimdi, V' nin üçlü elemanlarını ters alfabetik (degrevlex) sıralamaya göre yazalım.

$x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_2x_3x_5, x_1x_4x_5, x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_1x_2x_6,$
$x_1x_3x_6, x_2x_3x_6, x_1x_4x_6, x_2x_4x_6, x_3x_4x_6, x_1x_5x_6, x_2x_5x_6, x_3x_5x_6, x_4x_5x_6.$

Δ_2 yukarıdaki kümenin ilk f_2=3 elemanı olsun.

Δ_2=$\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}\}$ olur.

$\Delta = V \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$

$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1x_2\}, \{x_1x_3\}, \{x_2x_3\}, \{x_1x_4\}, \{x_2x_4\}, \{x_3x_4\}, \{x_1x_5\},$

$\{x_2x_5\}, \{x_1x_2x_3\}, \{x_1x_2x_4\}, \{x_1x_3x_4\}\}$

elde edilir ki, Δ’ nın f=(6, 8, 3) olan bir simplisyal kompleks olduğunu görmüştük

.

3.5 Stanley-Reisner Halkaları

Stanley-Reisner teorisi, kombinatorik ve değişmeli cebir arasında bir bağlantı verir. Simplisyal kompleksler ve karesiz tekterimli idealler arasında karşılık gelme her iki alanda da önemli ilerlemelere sebep olmuştur. En bilinen sonuçlar, Reisner’ ın Cohen-Macaulaylık kriteri [8], [9], Stanley’ in simplisyal kümeler için üst sınır konjektörü ve Hochster’ in simplisyal homoloji kullanarak karesiz tekterimli ideallerin çoklu dereceli Betti sayılarını hesaplamak için olan formülüdür.

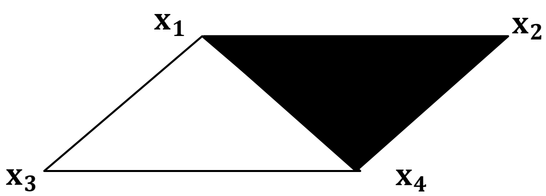
Şimdi bu bölümde, simplisyal komplekslerin bazı cebirsel özelliklerini tanıtacağız.

3.5.1 Tanım Δ, $V=\{x_1, \ldots, x_n\}$ köşe kümesi üzerinde bir simplisyal kompleks olsun.

Stanley-Reisner halkası, $I_\Delta = \langle \{x_{i_1} \ldots x_{i_r} \,|\, \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \notin \Delta\} \rangle$ olan $k[x_1, \ldots, x_n] \,/_{I_\Delta}$ bölüm halkasıdır.

I_Δ’ nın üreteçlerinin Δ’ nın elemanları olmadığına dikkat edelim.

3.5.2 Örnek Δ,



$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_4\}\}$

simplisyal kompleksi olsun. Δ’ nın ″nonface″ leri (yüz olmayanları),

$\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

şeklindedir.

Böylece, Stanley-Reisner ideali I_Δ = $<x_2x_3,\ x_1x_3x_4, x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_4>$ dır. I_Δ, minimal değildir.

$x_2x_3 \in I_\Delta$ iken ideal tanımından $x_1x_2x_3x_4$ = $(x_1x_4).(x_2x_3) \in I_\Delta$

olur. Böylece $x_1x_2x_3x_4$ listeden çıkarılır. Benzer şekilde, $x_1x_2x_3$ = $x_1.(x_2x_3) \in I_\Delta$,

$x_2x_3x_4$ = $(x_2x_3).x_4 \in I_\Delta$ olduğundan I_Δ = $<x_2x_3,\ x_1x_3x_4>$ minimal üreteç kümesi elde edilir.

3.5.3 Not Δ simplisyal kompleksinin, I_Δ Stanley-Reisner ideali bir karesiz tekterimli idealdir.

Bir karesiz tekterimli ideal, üreteçleri veya tekterimliler tarafından üretilen asal ideallerin bir arakesiti olarak iki türlü temsil edilebilir [10].

3.5.4 Teorem Δ, V=$\{x_1, \dots, x_n\}$ köşe kümesi üzerinde bir simplisyal kompleks olsun. I_Δ, k$[x_1, \dots, x_n]$' de bir karesiz tekterimli ideal olmak üzere Δ' dan I_Δ' ya bir 1-1 ve örten dönüşüm karşılık gelir.

İspat

$$\{\text{Simplisyal kompleks}\} \xleftrightarrow{\ \varphi\ } \{\text{Karesiz tekterimli idealler}\}$$

$$\Delta \longrightarrow I_\Delta$$

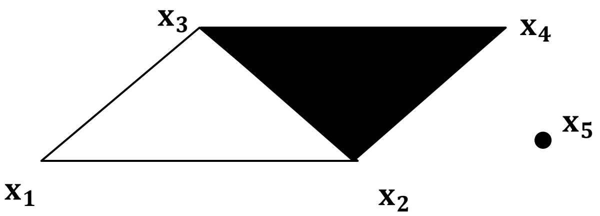
φ dönüşümünün 1-1 ve örten olduğunu gösterelim.

Δ, Δ' iki simplisyal kompleks ve $\varphi(\Delta) = \varphi(\Delta')$ olsun. φ tanımından I(Δ) = I(Δ') olur.

I_Δ = $<\{x_{i_1} \dots x_{i_r} \big| \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \notin \Delta\}>$ = $I_{\Delta'}$ $\Longrightarrow$ $\Delta = \Delta'$ olduğundan φ, 1-1' dir.

Her I_Δ karesiz tekterimli ideali için en az bir Δ simplisyal kompleksi olduğu için φ örtendir.

3.5.5 Örnek V = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesi üzerinde Δ,



simplisyal kompleksini alalım.

Δ' nın "nonface" leri

$\{x_1, x_4\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_3, x_5\},$

$\{x_1, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_5\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\},$

$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

şeklindedir. Böylece, Stanley-Reisner ideali I_Δ,

$I_\Delta = <x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_1x_2x_4, x_1x_2x_5, x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_1x_4x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5,$

$x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_5, x_1x_2x_4x_5, x_1x_3x_4x_5, x_2x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_5>$

dır.

$x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5 \in I_\Delta$ iken ideal tanımından

$x_1x_2x_4 = (x_1x_4). x_2 \in I_\Delta$

$x_1x_3x_4 = (x_1x_4). x_3 \in I_\Delta$

$x_1x_4x_5 = (x_1x_4). x_5 \in I_\Delta$

$x_1x_2x_3x_4 = (x_1x_4). x_2x_3 \in I_\Delta$

$x_1x_2x_4x_5 = (x_1x_4). x_2x_5 \in I_\Delta$

$x_1x_3x_4x_5 = (x_1x_4). x_3x_5 \in I_\Delta$

$x_1x_2x_3x_4x_5 = (x_1x_4). x_2x_3x_5 \in I_\Delta$

$x_1x_2x_5 = (x_1x_5). x_2 \in I_\Delta$

$x_1x_3x_5 = (x_1x_5). x_3 \in I_\Delta$

$x_1x_2x_3x_5 = (x_1x_5).\, x_2x_3 \in I_\Delta$

$x_2x_3x_5 = (x_2x_5).\, x_3 \in I_\Delta$

$x_2x_4x_5 = (x_2x_5).\, x_4 \in I_\Delta$

$x_2x_3x_4x_5 = (x_2x_5).\, x_3x_4 \in I_\Delta$

$x_3x_4x_5 = (x_3x_5).\, x_4 \in I_\Delta$

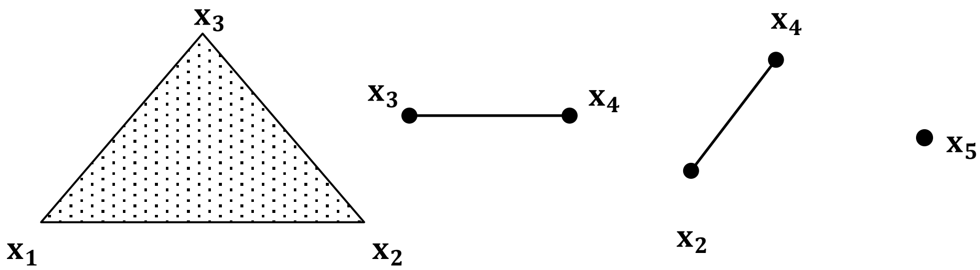
olur. Böylece

$x_1x_2x_4,\ x_1x_3x_4,\ x_1x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_4,\ x_1x_2x_4x_5,\ x_1x_3x_4x_5,\ x_1x_2x_3x_4x_5, x_1x_2x_5,\ x_1x_3x_5, x_1x_2x_3x_5, x_2x_3x_5, x_2x_4x_5, x_2x_3x_4x_5, x_3x_4x_5$ listeden çıkarılır. Böylece,

$I_\Delta = <x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_3x_4>$ elde edilir.

I ve $J \subset k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ idealleri için I.J ⊆ I∩J olduğunu ve I_Δ' nın elemanlarının Δ' nın nonfacelerinden oluştuğunu göz önüne alarak

$I_\Delta = <x_4, x_5> \cap <x_1, x_2, x_5> \cap <x_1, x_3, x_5> \cap <x_1, x_2, x_3, x_4>$



şeklinde yazabiliriz.

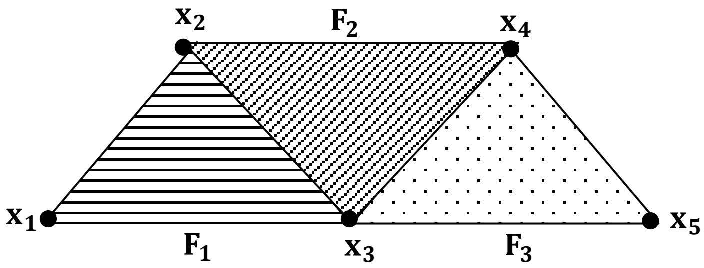
3.6 Shellable Simplisyal Kompleksler

Bir Stanley-Reisner halkasının Cohen-Macaulay olduğunu doğrulamak için en basit ve en yaygın kriterlerinden biri ilgili simplisyal kompleksin shellable olduğunu kontrol etmektir.

Bu bölümde simplisyal komplekslerin ″shellable″ olarak isimlendirilen bir sınıfı tanıtacağız.

3.6.1 Tanım Δ bir pür simplisyal kompleks olsun. Δ' nın fasetleri, $\forall$ $1 \leq j < i \leq n$ için bir $v \in F_i \setminus F_j$ ve $F_i \setminus F_k = \{ v \}$ ile bir $k \in \{1, 2, ..., i\text{-}1\}$ var olacak şekilde $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ olarak listelenebiliyor ise Δ' ya shellable simplisyal kompleks denir.

3.6.2 Örnek Δ simplisyal kompleksi,



$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$

şeklinde olsun. Δ' nın $F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, F_2 = \{x_2, x_3, x_4\}, F_3 = \{x_3, x_4, x_5\}$ fasetlerini göz önüne alalım.

$\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$

$\dim F = |F| - 1 = 3 - 1 = 2$ olur.

$\dim F_1 = \dim F_2 = \dim F_3 = \dim \Delta$

olduğundan Δ pür bir simplisyal komplekstir.

$k=1 \in \{1, 2\}$ için $F_2 \setminus F_1 = \{x_4\}$, $F_3 \setminus F_1 = \{x_4, x_5\}$ dir.

Eğer $v = x_4$ alırsak,

$k=2 \in \{1, 2\}$, $i=3$, $j=1$ için $x_4 \in F_3 \setminus F_1$, $F_3 \setminus F_2 \neq \{x_4\}$

$k=1 \in \{1, 2\}$ için $F_3 \setminus F_1 = \{x_4, x_5\} \neq \{x_4\} = v$ olur.

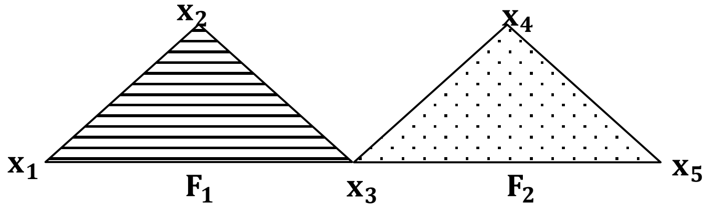
Bu nedenle, $v = x_5$' i seçmeliyiz.

$k=2 \in \{1, 2\}$, $i=3$, $j=1$ için $x_5 \in F_3 \setminus F_1$, $F_3 \setminus F_2 = \{x_5\} = v$

$k=2 \in \{1, 2\}$, $i=3$, $j=2$ için $x_5 \in F_3 \setminus F_2$, $F_3 \setminus F_2 = \{x_5\} = v$

olur. O halde Δ, shellable olur.

3.6.3 Örnek Δ simplisyal kompleksi ,



$\Delta=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\},\{x_3,x_5\},\{x_4,x_5\},$
$\{x_1,x_2,x_3\},\{x_3,x_4,x_5\}\}$

olsun. Δ' nın $F_1=\{x_1,x_2,x_3\}, F_2=\{x_3,x_4,x_5\}$ fasetlerini düşünelim.

dim Δ = max$\{\dim F \mid F \in \Delta\}$

dim F=$|F|-1$=3 $-$ 1= 2 olur.

dim F_1= dim F_2=dim Δ

olduğundan, Δ pür bir simplisyal komplekstir.

k=1 $\in\{1\}$ için $F_2 \setminus F_1=\{x_4,x_5\}$ dir.

Eğer $v=x_4$ alırsak,

k=1 $\in\{1\}$, i=2, j=1 için $x_4 \in F_2 \setminus F_1$, $F_2 \setminus F_1=\{x_4, x_5\}\neq v$ olur.

$v=x_5$ için ise,

k=1 $\in\{1\}$, i=2, j=1 için $x_5 \in F_2 \setminus F_1$, $F_2 \setminus F_1=\{x_4, x_5\}\neq v$ olur.

$F_2 \setminus F_1 = v$ sağlayacak şekilde k olmadığı için Δ' nın F_1 ve F_2 fasetlerini

$F_1=\{x_3,x_4,x_5\}$, $F_2=\{x_1,x_2,x_3\}$ şeklinde düşünelim. $F_2 \setminus F_1=\{x_1, x_2\}$ dir.

$v=x_1$ alalım.

k=1 $\in\{1\}$, i=2, j=1 için $x_1 \in F_2 \setminus F_1$, $F_2 \setminus F_1=\{x_1, x_2\}\neq v$

$v=x_2$ alalım.

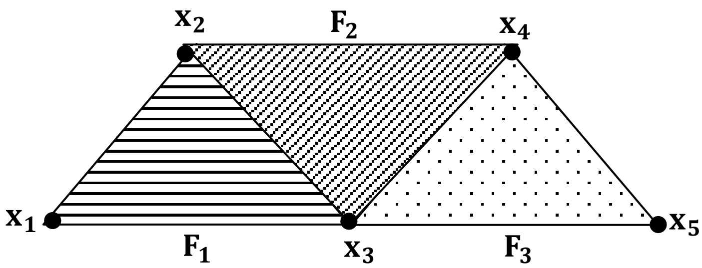
k=1 $\in\{1\}$, i=2, j=1 için $x_2 \in F_2 \setminus F_1$, $F_2 \setminus F_1 = \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$

olduğundan Δ, shellable değildir.

Şimdi, bir shellable kompleks için denk bir tanım verelim.

3.6.4 Tanım Δ bir pür simplisyal kompleks olsun. Δ' nın $F_1, F_2, \dots, F_n$ fasetleri, i=1,...,n için $<F_i> \cap <F_1, \dots, F_{i-1}>$ arakesiti, i=1,...,n için öz maksimal F_i yüzlerinin baz olmayan bir kümesi ile üretiliyor olacak şekilde bir lineer sıralama ile verilebiliyor ise, Δ' ya shellable kompleks denir.

3.6.5 Örnek Δ, 3.6.3 örnekteki



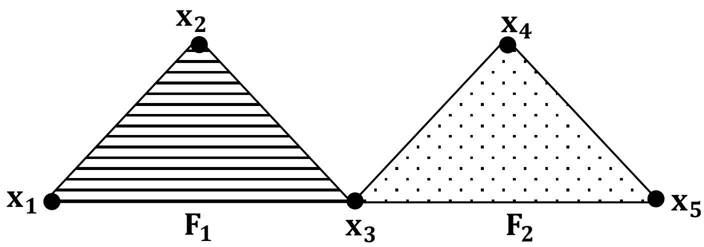
pür simplisyal kompleks olsun.

$F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, F_2 = \{x_2, x_3, x_4\}, F_3 = \{x_3, x_4, x_5\}$ Δ' nın fasetleri olmak üzere,

i=2 için $<F_2> \cap <F_1> = <\{x_2, x_3\}>$ F_2' nin max. öz yüzüdür.

i=3 için $<F_3> \cap <F_1, F_2> = <\{x_3\}, \{x_3, x_4\}> = <\{x_3, x_4\}>$ F_3' ün max. öz yüzüdür.

3.6.6 Örnek Δ, 3.6.4 örnekteki



pür simplisyal kompleks olsun. Δ' nın $F_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, F_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ fasetleri için

F_1' in max. öz yüzleri $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3\}$,

F_2' nin max. öz yüzleri $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_5\}$ iken

$<F_2> \cap <F_1>=<\{x_3\}>$ F_1 ve F_2' nin ikisinin de bir max. öz yüzü değildir.

3.7 Cohen-Macaulay (CM) Kompleksler

3.7.1 Tanım Δ bir simplisyal kompleks olsun.

Eğer Δ' nın R/I_Δ Stanley-Reisner halkası bir Cohen-Macaulay halka ise Δ' ya Cohen-Macaulay (CM) Kompleks denir.

3.7.2 Tanım Γ, V=$\{x_1, \dots, x_n\}$ üzerinde $x_1{}^{a_1}x_2{}^{a_2} \dots x_n{}^{a_n}$ tekterimlilerinin bir kümesi olsun. $u \in \Gamma$ ve $v|u \Rightarrow v \in \Gamma$ ve $1 \le i \le n$ için $x_i \in \Gamma$

oluyor ise Γ' ya multikompleks denir. Bu kompleksler bazen yarı simplisyal kompleks olarak da adlandırılır.

3.7.3 Tanım Δ, d boyutlu bir simplisyal kompleks ve $k[\Delta]=k[x_1, \dots, x_n] /_{I_\Delta}$ olmak üzere Δ' nın h-vektörü $h(\Delta) := h(k[\Delta])$ olarak tanımlanır. Bu tanıma denk olarak,

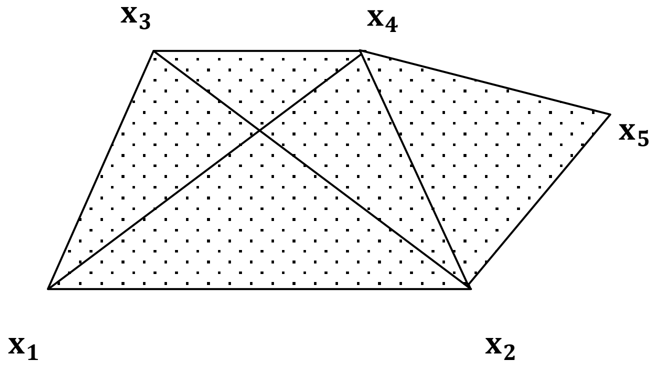
$(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$, Δ' nın f-vektörü olmak üzere,

$h(\Delta)=(h_0, h_1, \dots, h_{d-1})$ h-vektörünü, $f_{-1}=1$ alarak

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1} \,, 0 \le k \le d$$

eşitliğini kullanarak bulabiliriz.

3.7.4 Örnek Δ,



şeklinde bir simplisyal kompleks olsun.

$\Delta = \{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_1,x_4\},\{x_2,x_3\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_5\},\{x_3,x_4\},$
$\{x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_4,x_5\}\}$.

Burada, $\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_4,x_5\}$ I_Δ' nın maksimal yüzleridir.

Δ' nın f-vektörü f(Δ)=(5, 8, 4), h-vektörü ise

$$h_0 = \sum_{i=0}^{0}(-1)^{0-i}\binom{3-i}{0-i}.f_{i-1}$$

$$= (-1)^0.\binom{3}{0}.f_{-1}$$

$$= 1.1.1$$

$$= 1$$

$$h_1 = \sum_{i=0}^{1}(-1)^{1-i}\binom{3-i}{1-i}.f_{i-1}$$

$$= (-1)^1.\binom{3}{1}.f_{-1} + (-1)^0.\binom{2}{0}.f_0$$

$$= -1.3.1+1.1.5$$

$$= -3+5$$

$$= 2$$

$$h_2 = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{2-i} \binom{3-i}{2-i} . f_{i-1}$$

$$= (-1)^2 . \binom{3}{2} . f_{-1} + (-1)^1 . \binom{2}{1} . f_0 + (-1)^0 . \binom{1}{0} . f_1$$

= 1.3.1-1.2.5+1.1.8

= 3-10+8

= 1

$$h_3 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \binom{3-i}{3-i} . f_{i-1}$$

$$= (-1)^3 . \binom{3}{3} . f_{-1} + (-1)^2 . \binom{2}{2} . f_0 + (-1)^1 . \binom{1}{1} . f_1 + (-1)^0 . \binom{0}{0} . f_1$$

= -1.1.1+1.1.5-1.1.8+1.1.4

= -1+5-8+4

= 0

olduğundan h(Δ) = (1, 2, 1, 0) şeklindedir.

3.7.4 Tanım $\emptyset \neq$ Γ multikompleksin h-vektörünün $(h_0, h_1, ...)$ dizisine, M-vektör denir.

3.7.5 Teorem h ve i pozitif sayılar olmak üzere,

$n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geq j \geq 1$ iken h = $\binom{n_i}{i}$ + $\binom{n_{i-1}}{i-1}$ + ... + $\binom{n_j}{j}$ verilsin ve

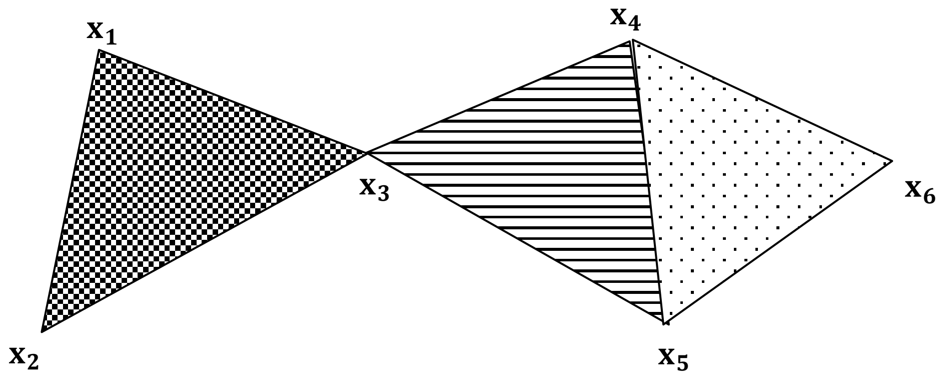
$h^{<i>}$ = $\binom{n_i + 1}{i+1}$ + $\binom{n_{i-1} + 1}{i}$ + ... + $\binom{n_j + 1}{j+1}$, $0^{<i>}$ =0

olarak tanımlansın. Bu durumda,

h=$(h_0, h_1, ...)$ bir M-vektördür ⇔ $0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{<i+1>}$, i ≥ 1

İspat [11]

3.7.6 Örnek Δ,



şeklinde bir simplisyal kompleks olsun.

$\Delta = \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_5\},$

$\{x_4, x_6\}, \{x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_4, x_5, x_6\}\}.$

Δ' nın f-vektörü f(Δ)=(6, 8, 3) h-vektörü ise

$$h_0 = \sum_{i=0}^{0} (-1)^{0-i} \binom{3-i}{0-i} . f_{i-1}$$

$$= (-1)^0 . \binom{3}{0} . f_{-1}$$

$$= 1.1.1$$

$$= 1$$

$$h_1 = \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} \binom{3-i}{1-i} . f_{i-1}$$

$$= (-1)^1 . \binom{3}{1} . f_{-1} + (-1)^0 . \binom{2}{0} . f_0$$

$$= -1.3.1+1.1.6$$

$$= -3+6$$

$$= 3$$

$$h_2 = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{2-i} \binom{3-i}{2-i} . f_{i-1}$$

$$= (-1)^2 . \binom{3}{2} . f_{-1} + (-1)^1 . \binom{2}{1} . f_0 + (-1)^0 . \binom{1}{0} . f_1$$

= 1.3.1-1.2.6+1.1.8

= 3-12+8

= -1

$$h_3 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \binom{3-i}{3-i} . f_{i-1}$$

$$= (-1)^3 . \binom{3}{3} . f_{-1} + (-1)^2 . \binom{2}{2} . f_0 + (-1)^1 . \binom{1}{1} . f_1 + (-1)^0 . \binom{0}{0} . f_1$$

= -1.1.1+1.1.6-1.1.8+1.1.3

= -1+6-8+3

= 0

olduğundan h(Δ)=(1, 3, -1, 0)' dır.

$h_2 < 0$ olup 3.7.5 Teoremden h(Δ) bir M-vektör değildir. Bu yüzden, h(Δ) bir Cohen-Macaulay kompleks değildir.

4. KOMPLEKSLER VE SERBEST ÇÖZÜLÜMLER

4.1 Serbest Çözülümler

Değişmeli Cebir'in konuları, çoğunlukla, ayrıştırarak veya iyi bilinen yapılarla ilişkilendirerek çalışır. Serbest çözülümler teorisi, R değişmeli halkası üzerindeki bir M modülünü serbest modüller ve bunların arasındaki dönüşümler (modül homomorfizmaları)

$\mathcal{F}$:... $F_m \longrightarrow F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$

olarak ifade eden bir yaklaşım olarak alınır. F serbest çözülümündeki her bir F serbest modülü, hem M' nin yapısını belirleyen hem de M modülünün yapısının anlaşılmasını sağlayan bir ranka sahiptir.

Şimdi gerekli tanım, teorem ve örnekleri verelim.

4.1.1 Tanım R bir halka, M_k, R-modüller ve φ_k, R-modül homomorfizmaları olmak üzere,

$\ldots \longrightarrow M_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} M_k \xrightarrow{\varphi_k} M_{k-1} \longrightarrow \cdots$

dizisinde Gör$(\varphi_{k+1}) \subset$ Çek(φ_k) ise, bu diziye bir kompleks denir. Eğer,

Gör$(\varphi_{k+1}) =$ Çek(φ_k) ise, bu diziye M_k modülünde tamdır denir.

Her M_k modülünde bu eşitlik sağlanıyor ise, bu diziye tam dizi denir. Bir tam dizi

$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$

sağlanıyor ise kısa tam dizi olarak adlandırılır.

4.1.2 Tanım R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül ve ∀ k≥0 için F_k sonlu üretilmiş serbest R-modül olsun.

$\mathcal{F}$: ... $F_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \xrightarrow{\varphi_k} \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$

tam dizisine M modülünün serbest çözülümü denir.

∀ k>n için F_k=0 ve n bu özellikteki minimal sayı ise serbest çözülüm (sonlu) n-uzunluktadır denir.

4.1.3 Tanım (R,$\mathcal{m}$) bir lokal halka, F_k sonlu üretilmiş serbest R-modüller olsun.

$\forall$ k≥1 için $\varphi_k(F_k) = \mathcal{m}F_{k-1}$ ise, 4.1.2 tanımdaki serbest çözülüm minimaldir denir.

k≥0 için $\beta_k(M)$:=rank(F_k) sayısına, M modülünün k. Betti sayısı denir.

4.1.4 Tanım R herhangi bir halka, M bir R-modül ve $f_1, \dots, f_k \in M$ olsun.

$$g_1.f_1 + \cdots + g_k.f_k = \sum_{i=1}^{k} g_i.f_i = 0$$

eşitliğini sağlayan $(g_1, \dots, g_k) \in R^k$, k' lısına, $f_1, \dots, f_k$ elemanları arasındaki bağıntı veya sizigi denir.

$f_1, \dots, f_k$ elemanları arasındaki tüm sizigilerin kümesi R^k nın bir alt modülüdür. $\{e_1, \dots, e_k\}$, R^k nın kanonik (standart) bazı olmak üzere

$$\varphi: F_1 := \bigoplus_{i=1}^{k} R_{e_i} \longrightarrow M$$

$$e_i \longmapsto f_i$$

modül homomorfizmasını alalım.

Çekφ = $\{m \in F_1 \mid \varphi(m) = 0_M\}$

$$m \in F_1 \Leftrightarrow m = r_1.e_1 + \cdots + r_k.e_k \in \bigoplus_{i=1}^{k} R_{e_i}$$

öyle ki $\varphi(m) = \varphi(r_1.e_1 + \cdots + r_k.e_k)$

φ modül homomorfizması olduğundan,

$\varphi(m) = r_1.\varphi(e_1) + \dots + r_k.\varphi(e_k)$

$= r_1.f_1 + \dots + r_k.f_k \in Syz(f_1, \dots, f_k)$

olur. Buradan Çekφ = $Syz(f_1, \dots, f_k)$ elde edilir.

4.2 Hilbert Sizigi Teorem

Herhangi bir R-modül için sonlu serbest çözülüm var mıdır?

Genelde, cevap olumsuzdur, fakat Hilbert Sizigi Teorem ile polinom halkaları için cevap olumludur.

4.2.1 Teorem (Hilbert Sizigi Teoremi)

k bir cisim ve R= $k[x_1, \dots, x_n]$ n-değişkenli polinom halkası olsun. Her sonlu üretilmiş R-modülün, uzunluğu en fazla n olan bir sonlu serbest çözülümü vardır.

İspat [12].

4.3 Gröbner Baz ve Sizigiler

Gröbner baz ile sizigiler arasındaki bağıntı Schreyer [13] tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

4.3.1 Teorem k bir cisim, $k[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası ve I, $k[x_1, \dots, x_n]$' de bir ideal olsun. G = $\{g_1, \dots, g_k\}$, I' nın üreteçlerinin, $\mathbb{N}^n_{\geq 0}$ üzerindeki bir tekterimli $'' > ''$ sıralamasına göre bir Gröbner bazı olsun.

$$\mathrm{Syz}(g_1, \dots, g_t) = \left\{ (g_1, \dots, g_t) \in R^t \middle| \sum_{i=1}^{t} a_i . g_i = 0 \right\}$$

olsun. i≠j için

$$S(g_i, g_j) = a_i . g_j - a_j . g_i = \sum_{k=1}^{t} h_k . g_k \longrightarrow_G 0$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$(h_1, \dots, h_i - a_j, \dots, h_j + a_i, \dots, h_t)$ $\mathrm{Syz}(g_1, \dots, g_t)$' yi üretir.

İspat [14].

4.3.2 Önerme $G \subset k[x_1, \dots, x_n]$ sonlu bir küme, f, g ∈ G olsun.

okek(LM(f), LM(g)) = LM(f) **.** LM(g)

Bu f ve g' nin en yüksek dereceli tekterimlilerin aralarında asal olduğu anlamına gelir. Böylece S(f, g) $\longrightarrow_G 0$ olur.

4.3.3 Örnek k bir cisim, R=k[x, y, z], $I = < x^2, y^2, z >$ şeklinde k[x, y, z]' de bir ideal olsun.

G = {g_1=x^2, g_2=y^2, g_3=z} I için bir Gröbner bazdır:

$$S(g_1, g_2) = \frac{x^2y^2}{x^2}(x^2) - \frac{x^2y^2}{y^2}(y^2) = 0$$

$$\Rightarrow S(g_1, g_2) = y^2 . g_1 - x^2 . g_2 \ = \ 0$$

$$S(g_1, g_3) = \frac{x^2z}{x^2}(x^2) - \frac{x^2z}{z}(z) = 0$$

$$\Rightarrow S(g_1, g_3) = z . g_1 - x^2 . g_3 \ = \ 0$$

$$S(g_2, g_3) = \frac{y^2z}{y^2}(y^2) - \frac{y^2z}{z}(z) = 0$$

$$\Rightarrow S(g_2, g_3) = z . g_2 - y^2 . g_3 \ = \ 0$$

Buradan 1. Sizigi modülü

$$\begin{bmatrix} y^2 & z & 0 \\ -x^2 & 0 & z \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4.3.4 Örnek $I = < z^3 - yw^2, yz - xw, y^3 - x^2z, xz^2 - y^2w > \subset R = k[x, y, z, w]$ ideal olsun. I' nın serbest çözülümünü bulalım.

G = {g_1=$z^3 - yw^2$, g_2= $yz - xw$, g_3=$y^3 - x^2z$, g_4= $xz^2 - y^2w$ }

kümesinin Gröbner baz olup olmadığını kontrol edelim. " $>$" grevlex sıralaması olsun.

$g_1=z^3-yw^2$ için α_1 = (0, 0, 3, 0), β_1 = (0, 1, 0, 2)' dir.

$|\alpha_1|$ = 0+0+3+0 = 3, $|\beta_1|$ = 0+1+0+2 = 3 olup $|\alpha_1| = |\beta_1| = 3$ ve

$\alpha_1-\beta_1$ = (0, 0, 3, 0)$-$ (0, 1, 0, 2)

= (0-0, 0-1, 3-0, 0-2)

= (0, -1, 3, -2)

en sağdaki ilk terim $-2<0$ olduğundan $\alpha_1 \underset{grevlex}{>} \beta_1$ olur. Buradan $z^3 \underset{grevlex}{>} yw^2$ elde edilir. $LT(g_1)=z^3$ olmaktadır. Benzer şekilde,

$g_2= yz-xw$ için $LT(g_2)=yz$

$g_3=y^3-x^2z$ için $LT(g_3)=y^3$

$g_4= xz^2-y^2w$ için $LT(g_4)=xz^2$

olmaktadır.

okek($LM(g_1), LM(g_2)$) = yz^3 olmak üzere,

$$S(g_1,g_2)=\frac{yz^3}{z^3}(z^3-yw^2)-\frac{yz^3}{yz}(yz-xw)$$

$$= yz^3-\ y^2w^2-yz^3+xz^2w$$

$$=-y^2w^2+xz^2w$$

$$= xz^2w-y^2w^2$$

$$= w.(xz^2-y^2w)$$

$$= w.\,g_4$$

$$S(g_1,g_2)=yg_1-z^2g_2=w.g_4$$

$$\Longrightarrow S(g_1,g_2)=yg_1-z^2g_2-w.g_4=0$$

okek($LM(g_1), LM(g_3)$) = y^3z^3

olduğundan 4.3.2 Önermeden $S(g_1,g_3)\longrightarrow\ _G0$ olur.

okek($LM(g_1), LM(g_4)$) = xz^3 olmak üzere,

$$S(g_1, g_4) = \frac{xz^3}{z^3}(z^3 - yw^2) - \frac{xz^3}{xz^2}(xz^2 - y^2w)$$

$$= xz^3 - xyw^2 - xz^3 + y^2zw$$

$$= -xyw^2 + y^2zw$$

$$= y^2zw - xyw^2$$

$$= yw.(yz - xw)$$

$$= yw.\, g_2$$

$S(g_1, g_4) = xg_1 - zg_4 = yw.\, g_2$

$\Longrightarrow \; S(g_1, g_4) = xg_1 - zg_4 - yw.\, g_2 = 0$

okek(LM(g_2), LM(g_3)) = y^3z olmak üzere,

$$S(g_2, g_3) = \frac{y^3z}{yz}(yz - xw) - \frac{y^3z}{y^3}(y^3 - x^2z)$$

$$= y^3z - xy^2w - y^3z + x^2z^2$$

$$= -xy^2w + x^2z^2$$

$$= x^2z^2 - \; xy^2w$$

$$= x.(xz^2 - y^2w)$$

$$= x.\, g_4$$

$S(g_2, g_3) = y^2.\, g_2 - z.\, g_3 = x.\, g_4$

$\Longrightarrow \; S(g_2, g_3) = y^2.\, g_2 - z.\, g_3 - x.\, g_4 = 0$

okek(LM(g_2), LM(g_4)) = xyz^2 olmak üzere,

$$S(g_2, g_4) = \frac{xyz^2}{yz}(yz - xw) - \frac{xyz^2}{xz^2}(xz^2 - y^2w)$$

$$= xyz^2 - xz^2w - xyz^2 + y^3w$$

$$= -xz^2w + y^3w$$

$$= y^3w - xz^2w$$

$= w.\,(y^3 - x^2 z)$

$= w.\,g_3$

$S(g_2, g_4) = xzg_2 - yg_4 = w.\,g_3$

$\Longrightarrow\ S(g_2, g_4) = xzg_2 - yg_4 - w.\,g_3 = 0$

okek(LM(g_3), LM(g_4)) = xy^3z^2

olduğundan 4.3.2 Önermeden $S(g_3, g_4) \longrightarrow\ _G 0$ olur.

Buradan, 1.Sizigi modülü

$$\begin{bmatrix} y & x & 0 & 0 \\ -z^2 & -yw & y^2 & xz \\ 0 & 0 & -z & -w \\ -w & -z & -x & -y \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

5. SİMPLİSYAL HOMOLOJİ VE SİMPLİSYAL KOMPLEKSLER

Kombinatorik değişmeli cebirin büyük bir kısmı, kombinatorik veriler tarafından belirlenen yöntem ile çeşitli homolojik yapılar ve invaryantların analiz edilmesiyle ilişkilidir. Çoğunlukla bu analiz, sadece simplisyal topolojideki ilişkili olduğu homolojik yapılara indirgenerek yapılır.

5.1 Yönlendirme

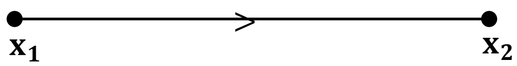
5.1.1 Tanım Bir i-boyutlu yüze i-simpleks denir.

5.1.2 Örnek 0-simpleks sadece bir [x] köşesidir.

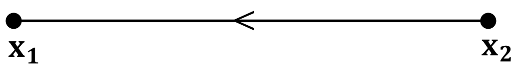
1-simpleks, $[x_1, x_2]$ kenarıdır.

Her bir simpleksin üzerine bir yönlendirme konulabilir.

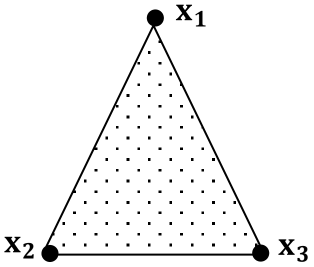
5.1.3 Tanım Bir yönlendirilmiş 1-simpleksi olan $[x_1, x_2]$ kenarı,



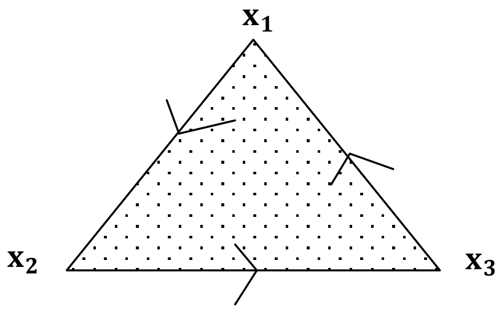
olur. Yine,

$[x_2, x_1] \Leftrightarrow$ 

olur. Burada $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$ şeklindedir.



$[x_1, x_2, x_3]$ 2-simpleksini alalım.



ise, $[x_1, x_2, x_3] = [x_2, x_3, x_1] = [x_3, x_2, x_1]$ yazarız, ya da

$-[x_1, x_3, x_2] = -[x_3, x_2, x_1] = -[x_2, x_1, x_3]$

olur. Genel olarak, eğer F köşeleri $[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}]$ olarak sıralanmış bir i-simpleks ise

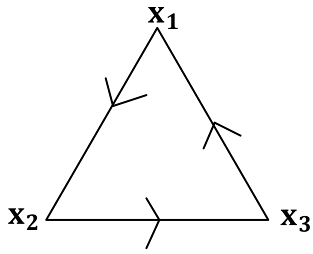
$$[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}] = \begin{cases} [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}], & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i+1 \\ 1 & 2 & \dots & i+1 \end{pmatrix} \text{çift permütasyon ise} \\ [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}], & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i+1 \\ 1 & 2 & \dots & i+1 \end{pmatrix} \text{tek permütasyon ise} \end{cases}$$

5.2 Zincir Kompleksi

5.2.1 Tanım k bir cisim, Δ, $\{x_1, \dots, x_n\}$ üzerinde bir simplisyal kompleks ve $F_i(\Delta)$,Δ' nın i-simplekslerinin kümesi olsun. Her bir i-yüzlü $\sigma \in F_i(\Delta)$ için, e_σ, $F_i(\Delta)$' nın yönlendirilmiş i-simpleksleri ve baz elemanlar olsun.

$k^{F_i(\Delta)}$, k cismi üzerinde baz elemanları e_σ'ları olan bir vektör uzayıdır. $k^{F_i(\Delta)}$ nın elemanlarına i-zincirleri denir.

5.2.2 Örnek Δ,



simplisyal kompleksini alalım.

$\Delta=\{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_1\}\}$ olmak üzere

$F_{-1}(\Delta) = \{\emptyset\} = \{[0]\}$

$F_0(\Delta) = \{[x_1], [x_2], [x_3]\}$

veya 5.2.1 tanımdaki notasyonla $F_0(\Delta) = \{e_{\{1\}}, e_{\{2\}}, e_{\{3\}}\}$ yazılır. Benzer şekilde

$F_1(\Delta) = \{[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1]\}$ veya $F_1(\Delta) = \{e_{\{1,2\}}, e_{\{2,3\}}, e_{\{3,1\}}\}$

yazılır. Burada $k^{F_{-1}(\Delta)} = \{c.[0] | c \in k\}$ ve $\{[0]\}$, $F_{-1}(\Delta)$' nın baz elemanı olduğundan

$k^{F_{-1}(\Delta)} \cong \mathbb{Q}$ olur.

$k^{F_0(\Delta)}=\{c_1.[x_1] + c_2.[x_2] + c_3.[x_3] | c_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, 3\}$

ve $\{[x_1], [x_2], [x_3]\}$, $F_0(\Delta)$' nın baz elemanları olduğundan $k^{F_0(\Delta)} \cong \mathbb{Q}^3$ olur.

$k^{F_1(\Delta)}=\{c_1.[x_1, x_2] + c_2.[x_2, x_3] + c_3.[x_3, x_1] | c_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, 3\}$

ve $\{[x_1, x_2], [\{x_2, x_3], [x_3, x_1]\}$, $F_1(\Delta)$' nın baz elemanları olduğundan $k^{F_1(\Delta)} \cong \mathbb{Q}^3$ olur.

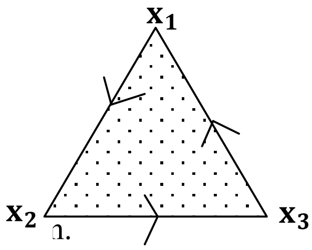
5.2.3 Not $\dim_k(k^{F_i(\Delta)}) = |F_i(\Delta)|$ = #(i-simpleksler)

5.2.4 Tanım $e_\sigma = [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}]$ bir i-simpleks olsun. $\widehat{x_k}$, x_k. teriminin atılması anlamına gelmek üzere

$$\partial_i([x_1, x_2, \dots, x_{i+1}]) = \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k+1}.[x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_{i+1}]$$

olarak tanımlanan dönüşüme i-simpleksinin sınır dönüşümü denir.

5.2.5 Örnek

yönlendirilmiş 2-simpleksini 

ı.

$$\partial_2([x_1, x_2, x_3]) = (-1)^{1+1}.\,[x_2, x_3] + (-1)^{2+1}.\,[x_1, x_3] + (-1)^{3+1}.\,[x_1, x_2]$$

$$= [x_2, x_3] - [x_1, x_3] + [x_1, x_2]$$

$-[x_1, x_3] = [x_3, x_1]$ olduğundan $[x_1, x_2] + [x_2, x_3] + [x_3, x_1]$ elde edilir.

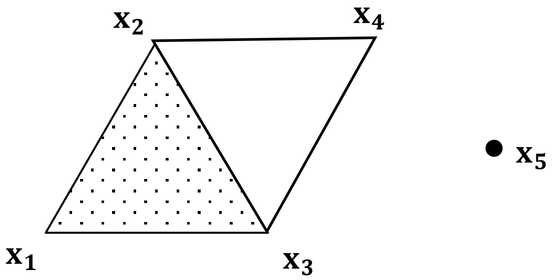
5.2.6 Uyarı 5.2.4 Tanımdaki, ∂_i sınır dönüşümü,

$k^{F_i(\Delta)} \longrightarrow k^{F_{i-1}(\Delta)}$

$$\sum_q m_q\,[x_{1,q}, \dots, x_{(i+1),q}] \xrightarrow{\partial_i} \sum_q m_q\,\partial_i([x_{1,q}, \dots, x_{(i+1),q}])$$

dönüşümünü verir.

5.2.7 Örnek Δ,



şeklinde bir simplisyal kompleks olarak tanımlansın.

$\Delta = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ olmak üzere

$F_{-1}(\Delta) = \{\emptyset\} = \{[0]\}$

$F_0(\Delta) = \{[x_1], [x_2], [x_3], [x_4], [x_5]\}$

$F_1(\Delta) = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3], [x_2, x_4], [x_3, x_4]\}$

$F_2(\Delta) = \{[x_1, x_2, x_3]\}$

$k^{F_{-1}(\Delta)} = \{c.[0] \mid c \in k\} \cong k$

$k^{F_0(\Delta)} = \{c_1.[x_1] + c_2.[x_2] + c_3.[x_3] + c_4.[x_4] + c_5.[x_5] \mid c_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, 3, 4, 5\} \cong k^5$

$k^{F_1(\Delta)} = \{c_1.[x_1, x_2] + c_2.[x_1, x_3] + c_3.[x_2, x_3] + c_4.[x_2, x_4] + c_5.[x_3, x_4] \mid c_i \in \mathbb{Q}, i = 1,2,3,4,5\}$

$\cong k^5$

$k^{F_2(\Delta)} = \{c.[x_1, x_2, x_3] \mid c \in k\} \cong k$

$k^{F_1(\Delta)} \xrightarrow{\partial_1} k^{F_0(\Delta)}$ dönüşümünü alalım.

$3.[x_1, x_2] + 2.[x_1, x_3] + 5.[x_2, x_3] + [x_2, x_4] + 7.[x_3, x_4] \in k^{F_1(\Delta)}$ 1-zincirini alalım.

$\partial_1(3.[x_1, x_2] + 2.[x_1, x_3] + 5.[x_2, x_3] + [x_2, x_4] + 7.[x_3, x_4])$

$= 3.\partial_1([x_1, x_2]) + 2.\partial_1([x_1, x_3]) + 5.\partial_1([x_2, x_3]) + \partial_1([x_2, x_4]) + 7.\partial_1([x_3, x_4])$

$= 3.([x_2] - [x_1]) + 2.([x_3] - [x_1]) + 5.([x_3] - [x_2]) + ([x_4] - [x_2]) + 7.([x_4] - [x_3])$

$= 3[x_2] - 3[x_1] + 2[x_3] - 2[x_1] + 5[x_3] - 5[x_2] + [x_4] - [x_2] + 7[x_4] - 7[x_3]$

$= -5[x_1] - 3[x_2] + 8[x_4] \in k^{F_0(\Delta)}$

$k^{F_2(\Delta)} \xrightarrow{\partial_2} k^{F_1(\Delta)}$ dönüşümünü alalım.

$$\partial_2(1[x_1, x_2, x_3]) = (-1)^{1+1}.[x_2, x_3] + (-1)^{2+1}.[x_1, x_3] + (-1)^{3+1}.[x_1, x_2]$$

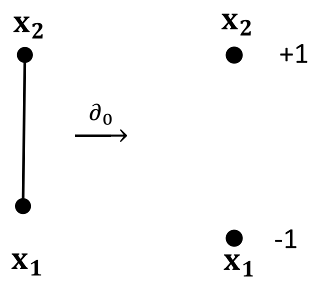
$$= [x_2, x_3] - [x_1, x_3] + [x_1, x_2]$$

elde edilir.

5.2.8 Uyarı $k^{F_i(\Delta)} \longrightarrow k^{F_{i-1}(\Delta)}$ vektör uzayları arasındaki ∂_i sınır dönüşümü, j, $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ kümesinin i. elemanı iken işaret(j, σ) = $(-1)^{i-1}$ olmak üzere

$\partial_i(e_\sigma) = \sum_{j\in\sigma} \text{işaret}(j,\sigma).\, e_{\sigma\backslash j}$ şeklinde de gösterilebilir.

i > n-1 veya i < -1 ise $k^{F_i(\Delta)} = 0$ ve $\partial_i := 0$ olarak tanımlıdır. Böylece, ∂_0 dönüşümü



şeklindedir.

5.2.9 Not $k^{F_i(\Delta)} \longrightarrow k^{F_{i-1}(\Delta)}$ vektör uzayları arasındaki sınır dönüşümü ∂_i olmak üzere $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ şeklindedir.

5.2.10 Tanım Δ, {$x_1, \ldots, x_n$} üzerinde bir simplisyal kompleks olsun. Her i=0, 1,..., n-1 için

$$0 \longrightarrow k^{F_{n-1}(\Delta)} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \longrightarrow k^{F_i(\Delta)} \xrightarrow{\partial_i} k^{F_{i-1}(\Delta)} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_0} k^{F_{-1}(\Delta)} \longrightarrow 0$$

kompleksine Δ' nın k cismi üzerinde zincir kompleksi denir.

5.2.11 Örnek 5.2.7 Örnekteki

$\partial_2(e_{\{1,2,3\}}) = e_{\{2,3\}} - e_{\{1,3\}} + e_{\{1,2\}}$

$\partial_2([x_1, x_2, x_3]) = [x_2, x_3] - [x_1, x_3] + [x_1, x_2]$

dönüşümü (1, -1, 1, 0, 0) vektörü ile eşleştirirsek

$$k^{F_2(\Delta)} \cong k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} k^{F_1(\Delta)} \cong k^5$$

olarak gösterilir. Benzer şekilde,

$\partial_1([x_1, x_2]) = [x_2] - [x_1]$

$\partial_1([x_1, x_3]) = [x_3] - [x_1]$

$\partial_1([x_2, x_3]) = [x_3] - [x_2]$

$\partial_1([x_2, x_4]) = [x_4] - [x_2]$

$\partial_1([x_3, x_4]) = [x_4] - [x_3]$

dönüşümünü $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile eşleştirirsek

$$k^{F_1(\Delta)} \cong k^5 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} k^{F_0(\Delta)} \cong k^5$$

elde edilir.

5.3 İndirgenmiş Homoloji

5.3.1 Tanım $k^{F_i(\Delta)} \longrightarrow k^{F_{i-1}(\Delta)}$ vektör uzayları arasındaki ∂_i sınır dönüşümü olmak üzere

Çek ∂_i := i-çevrimlerinin grupları

Gör ∂_i := (i-1)-sınırlarının grupları

şeklinde tanımlanır.

5.3.2 Teorem $\forall$ i için Gör $\partial_{i+1} \subseteq$ Çek ∂_i dir.

İspat

$$\ldots \longleftarrow k^{F_{i+2}(\Delta)} \xleftarrow{\partial_{i+1}} k^{F_{i+1}(\Delta)} \xleftarrow{\partial_i} k^{F_i(\Delta)} \longleftarrow \cdots$$

$v \in k^{F_{i+1}(\Delta)}$ olsun $\Rightarrow v = [x_1, x_2, \ldots, x_{i+2}]$

Gör $\partial_{i+1} = \{\partial_{i+1}(v) \mid v \in k^{F_{i+1}(\Delta)}\}$

$\partial_i(\partial_{i+1}(v)) = (\partial_i \circ \partial_{i+1})(v)$

$= 0$

olduğundan $v \in$ Çek ∂_i olur.

5.3.3 Tanım $\forall$ i tam sayısı için, k vektör uzayında $\widetilde{H_i}(\Delta,k) = \frac{\text{Çek}(\partial_i)}{\text{Gör }(\partial_{i+1})}$ ise $\widetilde{H_i}(\Delta,k)$' ya Δ' nın k üzerinde indirgenmiş homolojisi ya da i. dereceden homoloji denir.

$\widetilde{H_{n-1}}(\Delta,k) = \frac{\text{Çek}(\partial_{n-1})}{\text{Gör }(\partial_n)}$ ve Gör$(\partial_n) = 0$ olduğundan

$$\widetilde{H_{n-1}}(\Delta,k) = \text{Çek}(\partial_{n-1})$$

olur. $i < 0$ veya $i > n-1$ için $\widetilde{H_i}(\Delta,k) = 0$' dır.

5.3.4 Örnek 5.2.7 Örnekteki Δ simplisyal kompleksinin, zincir kompleksi

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow[\partial_2]{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} k^5 \xrightarrow[\partial_1]{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} k^5 \xrightarrow[\partial_0]{[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]} k \longrightarrow 0$$

$\widetilde{H_1}(\Delta,k) = \frac{\text{Çek}(\partial_1)}{\text{Gör }(\partial_2)}$. Δ' nın 1. dereceden homolojisini bulalım. İlk olarak

Çek(∂_1) ve Gör(∂_2)' yi bulmaya çalışalım.

$k^{F_1(\Delta)} = k^5 \xrightarrow{\partial_1} k^{F_0(\Delta)} = k^5$

∂_1' in transformasyon matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\text{Çek}(\partial_1) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \in \mathrm{k}^5 \;\middle|\; \partial_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{a}_3 \\ \mathrm{a}_4 \\ \mathrm{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 \qquad\qquad &= 0 \\ \mathrm{a}_1 \qquad -\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_4 \quad &= 0 \\ \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 \quad -\mathrm{a}_5 &= 0 \\ \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_5 &= 0 \end{aligned}$$

Bu homojen sistemin katsayılar matrisini,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ satır indirgenmiş eşelon formuna dönüştürebiliriz.

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 \qquad\qquad &= 0 \\ \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_4 \quad &= 0 \\ \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \mathrm{a}_1 = -\mathrm{a}_2$$

$a_2 = -a_3 - a_4$

$a_4 = -a_5$

$\Longrightarrow a_2 = -a_3 + a_5$

$a_1 = -a_2 = -(-a_3 + a_5) = a_3 - a_5$

Böylece,

$a_1 = a_3 - a_5$

$a_2 = -a_3 + a_5$

$a_3 =$ keyfi

$a_4 = -a_5$

$a_5 =$ keyfi

$$\Longrightarrow \partial_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. a_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. a_5$$

olarak yazılabilir. Buradan, Çek(∂_1)' in baz kümesi

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

olur ki, bu dim(Çek(∂_1))=2 demektir.

∂_2' in transformasyon matrisi $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dir.

Gör(∂_2) = span$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ olur.

$\mathrm{rank}\partial_2 = 1 = \dim(\mathrm{Gör}(\partial_2))$

Böylece,

$\dim_k(\widetilde{H_1}(\Delta,k)) = \dim_k(\mathrm{Çek}(\partial_1)) = \dim_k(\mathrm{Gör}(\partial_2))$

$= 2\text{-}1 = 1$

Böylece, $\widetilde{H_1}(\Delta,k) \cong k$ elde edilir. Benzer şekilde, $\widetilde{H_0}(\Delta,k) \cong k$ bulunur.

6. KAYNAKLAR

[1] Cox D., Little J. and O'Shea D., ″Ideals, Varieties and Algorithms″, *New York: Springer* (2000).

[2] Nathanson, M. B., ″ An elemantary proof for the Krull dimension of a polynomial ring″, *Amer. Math. Monthly*, 125, no. 7 623-637 (2018).

[3] Hungerford, T. W., ″Algebra″, *New york: Springer* (2003).

[4] Tuyl, A. V., "Combinatorial Commutative Algebra Seminar Notes", *Lakehead University, Canada* (2005-2006).

[5] Kruskal, J. B. "The number of simplicies in a complex", *Mathematical Optimization Techniques, Univ. California Press*, 251-278 (1963).

[6] Katona, G. O. H. "A theorem of finite sets in : Theory of Graphs", *Proc. Colloq Tihany*, 187-207 (1966).

[7] Erdös, P. , Ko, C. and Rado, R.,″ Intersection theorems for systems of finite sets″, *Quart J. Math Oxford Ser* (2) 12, 313-320 (1961).

[8] Stanley R. "The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings", *Studies in Applied Math* 54, 135-142 (1975).

[9] Reisner G. "Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings", *Advances in Math.* 21, 30-49 (1976).

[10] Miller E. and Sturmfels B. "Combinatorial Commutative Algebra", *New York: Springer* (2005).

[11] Macaulay, F. S. ″Some properties of enumeration in the theory of modular systems″, *Proc. London Math. Soc* 26, 531-555 (1927).

[12] Hilbert, D., ″Über die Theorie der algebraischen Formen″, *Mathematische Annalen*, 36 (4), 473-534 (1890).

[13] Greuel, G-M and Pfister, G. "A Singular Introduction to Commutative Algebra", *New York: Springer* (2000).

[14] Vasconcelos, W., "Arithmetic of blowup algebras", LMS Lecture Note Series 195, *U. K : Cambridge University Press* (1994).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Neşe TUTAR

Doğum tarihi ve yeri :Osmangazi/BURSA

e-posta :nese_joyy_tutar@hotmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2020
Lisans	Trakya Üniversitesi/Matematik Bölümü	2013
Lise	Bursa Çınar Lisesi	2009