T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK THETA-ÖN-I-SÜREKLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU

KÜBRA CENGİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ** **(Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Fırat ATEŞ
Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ

BALIKESİR, OCAK-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

KÜBRA CENGİZ tarafından hazırlanan "**BULANIK THETA-ÖN-I-SÜREKLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23 Ocak 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Fırat ATEŞ Balıkesir Üniversitesi	
Üye Doç.Dr. Çiğdem GÜNDÜZ Kocaeli Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir ÜniversitesiFen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan BULANIK THETA-ÖN-I-SÜREKLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Kübra CENGİZ

ÖZET

BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
KÜBRA CENGİZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF.DR. AHU AÇIKGÖZ)

BALIKESİR, OCAK - 2020

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olan birinci bölümde; tezde kullandığımız kavramların kısaca literatür bilgileri verildi. İkinci bölümde; çalışmamız için gerekli olan ideal topolojik uzaylardaki temel kavramlar ve kümenin lokal fonksiyonundan bahsedildi. Üçüncü ve dördüncü bölümde ise; fuzzy topolojik uzaylar, fuzzy ideal topolojik uzaylar ve fuzzy pre-I-sürekli fonksiyonların, konumuz ile ilgili yapılmış olan bazı çalışmalardan alınan temel kavramları ve teoremleri verildi. Beşinci bölümde; kuvvetli-θ-pre-I-sürekli fonksiyon kavramı fuzzy topolojik uzaya genişletildi ve bu fonksiyonun özellikleri incelendi. Ayrıca tarafımızca verilen fuzzy p-I-regüler ve fuzzy pre-I-regüler uzaylarda bu fonksiyonun sırasıyla fuzzy sürekli fonksiyon ve fuzzy pre-I-sürekli fonksiyon ile karşılaştırması yapıldı. Ayrıca bu fonksiyonun kısıtlanmış fonksiyon, grafik fonksiyon, bileşke fonksiyon ile ilgili özellikleri bazı fuzzy uzaylarda ve iç çarpım uzaylarında araştırıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık kuvvetli theta-ön-I-sürekli fonksiyonlar, bulanık zayıf ön-I-sürekli fonksiyonlar, bulanık I lokal kapalı, bulanık ön theta-I-açık.

Bilim Kod / Kodları : 20405 Sayfa Sayısı : 31

ABSTRACT

STRONG FORM OF FUZZY THETA-PRECONTINUOUS FUNCTIONS
MSC THESIS
KÜBRA CENGIZ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ)

BALIKESİR, JANUARY - 2020

Our study consists of five chapters. In the first section which is the entrance section; brief information about the concepts used in the thesis was given. In the second part; the basic concepts in the ideal topological spaces and the local function of the cluster are discussed. In the third and fourth sections; the basic concepts and theorems of fuzzy topological spaces, fuzzy ideal topological spaces and fuzzy pre-I-continuous functions taken from some studies about the subject are given.In the fifth chapter; the concept of strong-θ-pre-I-continuous function was extended to fuzzy topological space and its properties were examined. In addition, this function was compared with fuzzy continuous function and fuzzy pre-I-continuous function in fuzzy p-I-regular and fuzzy pre-I-regular spaces given by us.Moreover, the properties of this function related to constrained function, graphical function, resultant function were investigated in some fuzzy spaces and inner product spaces.

KEYWORDS: Fuzzy strongly theta pre-I-continuous functions, fuzzy weakly pre-I-continuous functions, fuzzy I-locally closed, fuzzy pre-theta-I-open.

Science Code / Codes : 20405 Page Number : 31

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\forall$	:	Her
$\in$	:	Ait
$\notin$	:	Ait değil
$\varnothing$	:	Boş küme
P (X)	:	Güç kümesi
$\neq$	:	Eşit değil
$\Rightarrow$	:	Gerektirir
$\Leftarrow$	:	Yeterlidir
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	:	A birleşim B
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	:	A kesişim B
$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$	:	B kümesi, A kümesini kapsar
$\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$	:	B kümesi, A kümesini kapsamaz
$(\mathbf{X}, \tau)$	:	Topolojik uzay
$(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{X}})$	:	Fuzzy topolojik uzay
$(\mathbf{X}, \tau, \mathbf{I})$	:	Fuzzy ideal topolojik uzay
$\mathbf{A}^{c}$	:	A kümesinin tümleyeni
$\mathbf{I}^{x}$	:	X’ in fuzzy kümeler ailesi
Cl (A)	:	A kümesinin kapanışı
İnt (A)	:	A kümesinin içi
pCl (A)	:	A kümesinin pre kapanışı
sCl (A)	:	A kümesinin semi kapanışı
$\mathbf{G}_{\mathbf{F}}$	:	F çoğul değerli fonksiyon grafiği
$\mathbf{F}\|_{\mathbf{A}}$	:	F çoğul değerli fonksiyonun A kümesine kısıtlanışı
$\vartheta_{(\mathbf{x})}$	:	(X, τ) topolojik uzayında x noktasının komşuluklar ailesi
$\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$	:	x in A ya ait olma derecesi
$\mathbf{1}_{\mathbf{X}}$	:	X kümesindeki en büyük sabit fuzzy küme
$\mathbf{0}_{\mathbf{X}}$	:	X kümesindeki en küçük sabit fuzzy küme
$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	:	A fuzzy kümesi birleşim B fuzzy kümesi
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	:	A fuzzy kümesi kesişim B fuzzy kümesi
$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$	:	B fuzzy kümesi, A fuzzy kümesini kapsar
$\mathbf{1}_{\mathbf{X}} - \mathbf{A}$	:	A fuzzy kümesinin tümleyeni
$\mathbf{x}_{\alpha}$	:	fuzzy nokta
$\mathbf{x}_{\alpha}\mathbf{q}A$	:	x_{α} fuzzy noktası ile A kümesi çakışığımsıdır
$\mathbf{N}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_{\alpha})$	:	(X, τ_X) fuzzy topolojik uzayındaki x_α fuzzy noktasının q komşuluklar ailesi

ÖNSÖZ

Öncelikle tez konusu seçerken isteklerimi göz önünde bulunduran, tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, sayın hocam Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.
Son olarak, benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2020 Kübra CENGİZ

1. GİRİŞ

Bulanık küme kavramı, küme kavramının eleman olma derecelendirilmesine dayanan bir genelleştirilmedir. Bulanık küme kavramını ilk olarak Prof. Dr. Lütfi Zadeh 1965 yılında ortaya koymuştur [1]. Bulanık küme devamlılık derecesine sahip nesneler sınıfıdır. Zadeh 'ten önce matematik klasik mantıkla temelleniyordu. Klasik mantığa göre örnek verecek olursak; bir bardağın içi ya boştur ya doludur. Yani doğruluk değeri ya 0 ya da 1 dir. Bulanık mantığına göre kısmen doğru ya da yanlış olabilir. Bardağın içinde bir miktar su bulunabilir. Zadeh 'ten sonra 1968'de Chang tarafından fuzzy topoloji kavramları belirlendi [2]. Klasik topolojiden bildiğimiz süreklilik türlerinin birçoğu, araştırmacılar tarafından fuzzy topolojiye aktarıldı.

1933 yılında Kuratowski [3], topolojik uzaylarda ideal kavramını kullanarak kümenin lokal fonksiyonu tanımladı ve bu fonksiyonun sağladığı özellikleri araştırdı.

Jankovic ve Hamlet [4], 1990 yılında lokal fonksiyon kavramı ile ilgili yapılan bütün çalışmaları detaylı bir şekilde incelediler ve bu kavram ile ilgili yeni özellikler elde ettiler.

1990 yılından günümüze kadar ideal topolojik uzay, önemli bir çalışma konusu oldu ve genel topolojideki pek çok topolojik kavram yapılan bu çalışmalarla ideal topolojik uzaylara taşındı.

Sarkar 1997'de fuzzy topolojik uzayda ideal kavramını verip, bu ideal ile birlikte fuzzy topolojiye bağlı lokal fonksiyonu tanımladı ve özelliklerini inceledi [5]. Sonrasında da genel topolojik uzaydaki pek çok kavram farklı araştırmacılar tarafından fuzzy ideal topolojiye genişletildi.

Bu çalışmada; kuvvetli θ -pre sürekli fonksiyon kavramı fuzzy ideal topojiye genişletildi ve bu kavramın özelliklerinden ayrıntılı bahsedildi. Fuzzy ideal topolojik uzayda bu süreklilik ile ilgili bazı özellikler verildi. Son kısımda ise fuzzy ideal topolojik uzaylarda verdiğimiz ayırma aksiyomlarında kuvvetli- θ –pre-I- sürekli fonksiyon kavramları incelendi.

2. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARIN TEMEL KAVRAMLARI

2.1 İdeal Topolojik Uzaylar

1933 yılında kümenin lokal fonksiyon kavramı ve bu fonksiyonun sağladığı özellikler ilk defa Kuratowski tarafından verilmiştir. Bu kavram üzerinde çalışmalar yapılmış, bu da araştırmalarda önemli bir çalışma konusu olmuştur.

2.1.1. Tanım: Boş olmayan bir X kümesi verilsin. P(X), X' in kuvvet kümesi olsun. Boş olmayan bir I ailesi için;

(I) Her A, B ∈ I kümeleri için; $A \cup B \in I$ (Sonlu Toplamsallık)

(II) Her $A \in I$ kümesi ve $B \subset A$ alt kümesi için $B \in I$ (Kalıtımsallık) özellikleri sağlansın. Bu taktirde I ailesine, X kümesi üzerinde bir ideal denir [3].

2.1.2. Tanım: P(X) kümesi, X'in kuvvet kümesi olmak üzere; $\alpha : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu için,

(1) $\alpha(\varnothing) = \varnothing$

(2) $A \in P(X) \Rightarrow A \subset \alpha(A)$

(3) $A,B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

(4) $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartları sağlansın. Böylece α küme değerli fonksiyonuna, Kuratowski Kapanış işlemi denir.

$K = \{A \in P(X) : A = \alpha(A)\}$ ailesine, X kümesi üzerinde oluşturulan topolojiye göre kapalı kümeler ailesi denir [3].

2.1.3. Örnek: P(X), X'in güç kümesi olmak üzere; d: $P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

(1) $d(\varnothing) = \varnothing$

(2) $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

(3) $d(d(A)) \subset d(A)$

şartlarını sağladığı taktirde $d(A) = A \cup d(A)$ şeklinde tanımlanan $d: P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu P(X) kuvvet kümesi üzerinde bir Kuratowski Kapanış İşlemidir [4].

2.1.4. Tanım: $\tau = \{\varnothing, X\}$ olsun. τ ailesi görüldüğü gibi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye En Kaba Topoloji (X'in en kaba topolojisi, ya da ayrık olmayan topoloji) denir. (X,τ)ikilisine ayrık olmayan topolojik uzay denir [6].

2.1.5 Tanım: τ ailesi P(X)'e eşit alınırsa, X kümesi üzerinde tanımlanan P(X) topolojisine ayrık topoloji ve (X, P(X)) ikilisine de ayrık topolojik uzay denir [6].

2.1.6.Tanım: (X,τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi ile $x \in X$ noktası verilsin. $\forall V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap V \neq \varnothing$ oluyorsa $x \in X$ noktasına A kümesinin kapanış noktası denir [3].

2.1.7.Tanım: (X,τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. $\forall V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap (V - \{x\}) \neq \varnothing$ ise $x \in X$ noktasına A kümesinin yığılma noktası denir [3].

2.1.8. Tanım: (X,τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. $\forall V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap V$ kümesinde sonsuz sayıda eleman varsa $x \in X$ noktasına A kümesinin yoğunlaşma noktası denir [3].

2.2 Kümenin Lokal Fonksiyonu

2.2.1. Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $A \subset X$ alt kümesi verilsin. I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olmak üzere:

$$A^*(I,\tau) = \{x \in X : \forall V \in \vartheta_{(x)}, (V \cap A) \notin I\}$$

kümesine, A kümesinin I idealine bağlı lokal fonksiyonu denir.

$A^*(I,\tau) = A^*$ sembolü yerine A^* sembolü kullanılacaktır.

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $I = \{\emptyset\}$ ise minimal ideal ve I=P(X) ise maksimal ideal olup A^* lokal fonksiyonu bu ideallerde aşağıdaki gibi elde edilmiştir [4].

$$A^*(\{\emptyset\},\tau) = \{x \in X : \forall V \in \vartheta_{(x)}, (V \cap A) \notin \{\emptyset\}\}$$

$$= \{x \in X : \forall V \in \vartheta_{(x)}, (V \cap A) \neq \{\emptyset\}\}$$

$$= \overline{A}$$

$$A^*(P(X),\tau) = \{x \in X : \forall V \in \vartheta(x) \text{ için } (V \cap A) \notin P(X)\} = \emptyset$$

2.2.2. Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere X kümesi üzerinde I_1, I_2 idealleri birlikte verilsin. Bu taktirde [4];

(1) $I_1 \subset I_2$ ise $A^*(I_2) \subset A^*(I_1)$

(2) $A^* = \overline{A^*} \subset \overline{A}$ (A^* kümesi kapalı bir kümedir.)

(3) $(A^*)^* \subset A^*$

(4) $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$

(5) $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$

(6) $A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subset (A - B)^*$

(7) $U \in \tau$ ise; $U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subset (U \cap A)^*$

(8) $C \in I$ ise; $(A \cup C)^* = A^* = (A - C)^*$

2.2.3. Tanım: (X,τ) topolojik uzayı ve *X* kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi için $Cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^* : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu, Tanım 2.1.2'deki şartları sağlasın. Bu taktirde bu fonksiyona A kümesinin Kuratowski kapanışı denir [4]. Bu bölüm boyunca; $Cl^*(A)$ sembolü yerine $\overline{A}^*$ sembolü kullanılacaktır.

2.2.4. Tanım: (X,τ) topolojik uzayı veX kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu taktirde;

$$\tau^*(I) = \{U \subset X : \overline{X - U}^* = (X - U)\}$$

şeklinde tanımlanan bu $\tau^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji τ topolojisinden daha ince olan bir topolojidir [3].

Jankovic ve Hamlet, minimal ideali ($I = \{\varnothing\}$) ve maksimal ideali kullanıp $\tau^*(I)$ topolojisini aşağıdaki gibi elde ettiler.

(I) $I = \{\varnothing\}$ minimal ideali için, $A^*(\{\varnothing\}) = \overline{A}$ ve $\overline{A}^* = \overline{A}$ olduğundan; $\tau^*(I) = \tau$

(II) $I = P(X)$ maksimal ideali için, $A^*(P(X)) = \varnothing$ ve $\overline{A}^* = \overline{A}$ olduğundan, $\tau^*(I) = P(X)$ elde edilir.

(I)ve(II) ifadeleri de şu sonuçları verebilir:

(X,τ) topolojik uzay olmak üzere, X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\{\varnothing\} \subset I \subset P(X)$ olduğundan,

$\tau = \tau^*(\{\varnothing\}) \subset \tau^*(I) \subset \tau^*(P(X)) = P(X)$ dir.

Ayrıca; diğer idealler bu iki ideal arasında yer aldığından bu ideallere karşılık gelen $\tau^*(I)$ topolojisi için de sonuçlar verildi.

Üstelik (X,τ)topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde, $I \subset J$ olacak şekilde I ve J gibi iki ideal verildiğinde; $\tau^*(I) \subset \tau^*(J)$ bağıntısı vardır.

2.2.5. Tanım :(X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde; $\beta(\mathrm{I},\tau) = \{\mathrm{U} - \mathrm{V} : \mathrm{U} \in \tau, \mathrm{V} \in \mathrm{I}\}$ ailesi $\tau^{*}(I)$ için, bir topoloji tabanıdır [4].

2.2.6. Tanım:(X,τ)topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. I ideali ile birlikte (X,τ) topolojik uzayına, ideal topolojik uzay denir ve (X,τ,I) şeklinde gösterilir [4].

2.2.7. Tanım: $(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I})$ topolojik uzayı verilsin. Eğer $\mathrm{X} = \mathrm{X}^{*}$ ise, bu takdirde $(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I})$ ideal topolojik uzayına Hayashi uzayı denir [4].

2.2.8. Tanım: $(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I})$ ideal topolojik uzayında $\tau \cap \mathrm{I} = \{\varnothing\}$ ise, bu takdirde $(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I})$ ideal topolojik uzayına Samuels uzayı denir[4].

2.2.9.Önerme: (X,τ)topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu taktirde; aşağıdaki özelliklerdenktir [4];

(1) $\mathrm{X} = \mathrm{X}^{*}$

(2) $\tau \cap \mathrm{I} = \{\varnothing\}$

(3) Eğer $\mathrm{U} \in \mathrm{I}$ ise; $\mathrm{U} = \varnothing$

(4) Her $\mathrm{V} \in \tau$ kümesi için; $\mathrm{V} \subset \mathrm{V}^{*}$

3. BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARIN TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde bulanık küme kavramı tanıtılarak bulanık kümelerle ilgili cebirsel özellikler verilecektir. Üstelik bulanık topolojik yapının sağladığı özelliklerden bahsedilecektir.

3.1 Bulanık Kümeler

3.1.1. Tanım: Boş olmayan bir X kümesini ve I=[0,1] aralığını alalım. I^x, X' den I aralığına giden bütün fonksiyonların kümesi olsun. Bu taktirde I^x kümesinin her elemanına X kümesi üzerinde bir bulanık küme denir [1].

3.1.2. Tanım: Boş olmayan bir X kümesini ve I=[0,1] aralığını alalım.$\mu_A\colon X \to I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \subset XxI$$

kümesine X'in bir bulanık alt kümesi denir [1].

3.1.3. Tanım: X ve $\emptyset$ klasik kümeleri birer bulanık küme olup

$$1_x = X = \{(x, 1_x(x)) = 1\}: x \in X\} \subset XxI$$

$$0_x = \emptyset = \{(x, 0_\emptyset(x)) = 0\}: x \in X\} \subset XxI$$

şeklinde ifade edilir.

Genellikle kullanılan kapsama, birleşim ve kesişim sembolleri yerine, bulanık kümeler için sırasıyla $\leq$, $\vee$, $\wedge$ sembolleri kullanılır. Bir A bulanık kümesinin tümleyeni de

$$1_x - A = A^c$$

ilegösterilir. X kümesinin herhangi bir A bulanık alt kümesi $A \leq X$ ile gösterilir.

bulanık kümeleri α, β, γ vb. gibi harfler ile her $x \in X$ için $C_\lambda(x) = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ sabit bulanık kümesi C_λ ile ve bir β fuzzy kümesinin $x \in X$ noktasında ki değeri $\beta(x)$ ile belirtilir.

3.1.4. Tanım: Her $x \in X$ için $\alpha = [0,1]$ olmak üzere $\mu_A(x) = \alpha$ olsun. μ_A üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilen A bulanık alt kümesine sabit bulanık küme denir.

3.1.5. Tanım: Herhangi $\alpha, \beta \leq X$ bulanık alt kümeleri verilsin. α ve β'nın üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_α ve μ_β olmak üzere [1] :

(1) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\alpha(x) \leq \beta(x)$
(2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\alpha(x) = \beta(x)$
(3) $\mu = \alpha \vee \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\mu(x) = \mathrm{Max}\{\alpha(x), \beta(x)\}$
(4) $\gamma = \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\gamma(x) = \mathrm{Min}\{\alpha(x), \beta(x)\}$
(5) $\alpha = 1 - \beta \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\alpha(x) = 1 - \beta(x)$

3.1.6. Tanım: $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ ailesi X kümesinin bulanık alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır [2]:

(1) $\mu = \bigvee_{j\in J} \alpha_j \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\mu(x) = \sup_{j\in J}\{\alpha_j(x)\}$

$\beta = \bigwedge_{j\in J} \alpha_j \Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\beta(x) = \inf_{j\in J}\{\alpha_j(x)\}$

3.1.7. Tanım: Bir $x \in X$ noktası ve $\lambda = [0,1]$ aralığı verilsin. X kümesinde x_λ bulanık noktasının;

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

fonksiyonu X'de ki bulanık kümesidir. $x_\lambda(y)$ kümesine X kümesinde bir bulanık nokta denir. x_λ bulanık noktasının sıfırdan farklı değer aldığı $x \in X$ noktasına x_λ bulanık noktasının dayanağı ve $\lambda \in (0,1]$ sayısınada x_λ bulanık noktasının değeri denir [7].

3.1.8. Tanım: α bir bulanık kümesi ve x_λ bir bulanık nokta olmak üzere $\lambda \leq \alpha(x)$ şeklinde ise $x_\lambda \in \alpha$ dır [7].

3.1.9. Teorem: $\alpha, \beta \in I^X$ ve x_λ bir bulanık nokta olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [8]:

(1) $x_\lambda \in \alpha \wedge \beta \Rightarrow x_\lambda \in \alpha$ ve $x_\lambda \in \beta$

(2) $x_\lambda \in \alpha \vee \beta \Rightarrow x_\lambda \in \alpha$ veya $x_\lambda \in \beta$

3.1.10. Önermeler: Boş olmayan bir X kümesi ve $A \leq X$ bulanık alt kümesi verilsin. Bu taktirde birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $A \vee \emptyset = A$
(2) $A \wedge \emptyset = \emptyset$
(3) $A \vee X = X$
(4) $A \wedge X = A$
(5) $(A^c)^c = A$
(6) $A \leq A^c$ veya $A^c \leq A$ olmak zorunda değildir.

3.2 Bulanık Kümelerde İşlemler

3.2.1. Tanım: Boş olmayan bir X kümesi ve $\alpha, \beta \leq X$ bulanık alt kümeleri verilsin.α ve β kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_α ve μ_β olsun.

Bu taktirde α ile β'nın çarpımı $\alpha.\beta$ ile gösterilir ve her $x \in X$ için,

$\mu_{\alpha.\beta} = \mu_\alpha(x).\mu_\beta(x)$üyelik fonksiyonu

$\alpha.\beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu_{\alpha.\beta} = \mu_\alpha(x).\mu_\beta(x)$

ile tanımlanır [1].

3.2.2. Teorem: $\alpha, \beta \leq X$ için $\alpha.\beta \leq \alpha \wedge \beta$ dır [1].

3.2.3. Tanım: Herhangi $\alpha, \beta \leq X$ bulanık alt kümeleri verilsin.α ve β nın üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_α ve μ_β olsun.

$\alpha + \beta \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için, $\mu_{\alpha+\beta} = \mu_\alpha(x) + \mu_\beta(x) - \mu_\alpha(x).\mu_\beta(x)$şeklinde tanımlanan bulanık alt kümeye, α ile β bulanık kümelerinin toplamı denir [1].

3.2.4. Tanım: $\alpha, \beta \leq X$ bulanık alt kümeleri verilsin.α ve β nın üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_α ve μ_β olsun.

$\alpha - \beta = \alpha \wedge \beta^c \Leftrightarrow \forall x \in X, \;\; \mu_A(x) = \{\mu_A(x), 1 - \mu_\beta(x)\}$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bulanık alt kümeye α ile β bulanık kümelerinin farkı denir [1].

3.2.5. Tanım: $\alpha, \beta \leq X'$de bulanık alt kümeleri olsun.$(\alpha \circ \beta)(x, y) \Leftrightarrow \forall x \in X$ için,

$\mu_{(\alpha\circ\beta)}(x, y) = \sup\{\min\{\mu_\alpha(x, z), \mu_\beta(z, y)\}: z \in X\}$ şeklinde tanımlanan X'deki bulanık kümelerine α ile β bulanık kümelerinin bileşkesi denir ve$(\alpha \circ \beta)$ ile gösterilir.

$\alpha, \beta, \gamma \leq X$ ve $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$dır [1].

3.3 Bulanık Topolojik Uzaylar

3.3.1.Tanım: X kümesinin bulanık alt kümelerinin bir ailesi $\tau_x$olsun. Eğer τ ailesi,

(1) $0_x, 1_x \in \tau_x$
(2) $\alpha, \beta \in \tau_x \Rightarrow \alpha \wedge \beta \in \tau_x$
(3) $\forall j \in J, \alpha_j \in \tau_x \Rightarrow \vee_{j\in J}\, \alpha_j \in \tau_x$

şartlarını sağlıyorsa $\tau_x$ailesine, X kümesinde bir bulanık topoloji, (X,τ_x) ikilisine de bulanık topolojik uzay denir,τ_x ailesinin her elemanına bulanık açık küme ve bulanık açık kümenin tümleyenine ise bulanık kapalı küme denir. Bulanık açık kümeler ailesi FO(x,X), bulanık kapalı kümeler ailesi FC(x,X) ile gösterilir [2].

3.3.2.Tanım: (X,τ_x) bulanık topolojik uzay, $\alpha \leq X$ ve x_λ bulanık nokta olsun. Eğer $x_\lambda q\beta$ ve $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\beta \in \tau_x$ bulanık açık kümesi varsa, α bulanık kümesine x_λ bulanık noktasının bir q-komşuluğu denir ve x_λ bulanık noktasının tüm q-komşuluklarının ailesi $Nq(x_\lambda)$ ile gösterilir [7].

3.3.3.Tanım: (X,τ_X) bulanık topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun.
$\alpha^\circ = \{\beta | \beta \leq \alpha, \beta \in \tau_x\}$
şeklinde tanımlanan α° bulanık kümesine,α bulanık kümesinin içi denir [2].

3.3.4.Tanım: (X,τ_X) bulanık topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun. α bulanık kümesinin açık küme olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha^\circ$ olmasıdır [2].

3.3.5.Tanım:(X,τ_X) bulanık topolojik uzay ve $\alpha, \beta \leq X$ bulanık alt kümeleri verilsin. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler sağlanır [9]:

(1) $\alpha^{\circ} \leq \alpha$
(2) $\alpha^{\circ\circ} \leq \alpha^{\circ}$
(3) $(\alpha \wedge \beta)^{\circ} = \alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}$
(4) $\vee_{j\in J} \alpha_j^{\circ} \leq (\vee_{j\in J} \alpha_j)^{\circ}$
(5) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^{\circ} \leq \beta^{\circ}$
(6) $1_x^{\circ} = 1_x$ ve $0_x^{\circ} = 0_x$

3.3.6.Tanım:(X,τ_X) bulanık topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun.

$\alpha^{-} = \{\beta | \alpha \leq \beta, (1_x - \beta) \in \tau_x\}$

şekilde tanımlanan α^{-} bulanık kümesine,α bulanık kümesinin kapanışı denir [2].

3.3.7.Tanım: (X,τ_X) bulanık topolojik uzay ve $\alpha, \beta \leq X$fuzzy alt kümeleri verilsin.α bulanık kümesinin bulanık kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha^{-}$ olmasıdır [2].

3.3.8.Teorem: (X,τ_X) bulanık topolojik uzay ve $\alpha, \beta \leq X$ bulanık alt kümeleri verilsin. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler sağlanır [9]:

(1) $\overline{\alpha}$ bulanık kümesi bulanık kapalıdır.
(2) $\alpha \leq \overline{\alpha}$
(3) $\overline{\alpha}$ bulanık kümesi α'yı kapsayan en küçük bulanık kapalı kümedir.
(4) $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}$
(5) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$
(6) $\overline{\alpha \wedge \beta} \leq \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}$
(7) $\overline{\alpha \vee \beta} \leq \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
(8) $\overline{1_x} = 1_x$ ve $\overline{0_x} = 0_x$

4. BULANIK İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR VE BULANIK PRE-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde daha önceden verilmiş olan bulanık ideal topolojik uzaylar ve bulanık pre-I-sürekli fonksiyonlar ile ilgili temel kavramlar ele alınacaktır.

4.1 Bulanık İdeal Topolojik Uzaylar

4.1.1. Tanım: Boştan farklı bir X kümesi ve bu kümedeki tüm bulanık kümelerin ailesi P(X) olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi

(1) $A, B \in I \Rightarrow (A \vee B) \in I$ (sonlu toplamsallık)

(2) $A \in I, B \leq A \Rightarrow B \in I$ (kalıtımsallık)

özelliklerini sağlıyorsa; I ailesine X kümesi üzerinde bir bulanık ideal denir [5].

$I = \{0_x\}$ ve $I = P(X)$ aileleri X kümesindeki en basit bulanık ideal örnekleridir.

4.1.2. Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzayı ve bir $A \leq X$ bulanık alt kümesi verilsin. Ayrıca I ailesi, X kümesi üzerindebir bulanık ideal olsun. Bu taktirde $A^*(I,\tau)$ kümesi $N \in N_q(X_q)$ ve $E \in I$ iken bir $y \in X$ noktası vardır öyle ki $N(y) + A(y) - 1 \rangle E(y)$ olacak şekildeki x_α bulanık noktalarının birleşimidir. $A^*(I,\tau)$ kümesine A kümesinin I ideali ve τ bulanık topolojisine bağlı bulanık lokal fonksiyon denir [5].

4.1.3.Uyarı: (X,τ) bulanık topolojik uzayı, X kümesi üzerinde I_1 ve I_2 bulanık idealleri ile $A, B \leq X$ bulanık kümeleri verilsin. Bu taktirde; aşağıdaki özellikler sağlanır [5]:

(1) $A \leq B \Rightarrow A^* \leq B^*$

(2) $I_1 \subset I_2 \Rightarrow A(I_2,\tau) \leq A^*(I_1,\tau)$

(3) $A^* = \overline{A}^* \leq \overline{A}$

(4) $(A^*)^* \leq A^*$

(5) $(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$

(6) $U \in I_1 \Rightarrow (U \vee A)^* = A^*$

4.1.4. Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I bulanık ideal ve P(X), X kümesindeki tüm bulanık kümelerinin ailesi olsun. Herhangi bir $A \leq X$ bulanık alt kümesi için, $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu,

(1) $\alpha(0_x) = 0_x$

(2) $A \in P(X) \Rightarrow A \leq \alpha(A)$

(3) $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \vee B) = \alpha(A) \vee \alpha(B)$

(4) $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartlarını sağlasın.

Bu taktirde, α fonksiyonuna bulanık kapanış işlemi ve $K = \{A \in P(X) : A = \alpha(A)\}$ ailesi de X kümesi üzerinde oluşturulan bulanık topolojiye göre bulanık kapalılar ailesi denir [5].

4.1.5. Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I bulanık ideal ve P(X), X kümesindeki tüm bulanık kümelerinin ailesi olsun. Herhangi bir $A \leq X$ bulanık alt kümesi için, $d : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu,

(1) $d(0_x) = 0_x$

(2) $A, B \in P(X) \Rightarrow d(A \vee B) = d(A) \vee d(B)$

(3) $A \in P(X) \Rightarrow d(d(A)) \leq d(A)$

şartlarını sağlasın. Bu taktirde, $\alpha(A) = A \vee d(A)$ şeklinde tanımlanan $d : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu, bulanık kapanış işlemidir [5].

4.1.6. Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I bulanık ideal ve P(X), X kümesinde ki tüm bulanık kümelerin ailesi olsun. Herhangi bir $A \leq X$ bulanık alt kümesi için, $Cl^*(A) = A \vee A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^* : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu tanım 4.1.5 deki şartları sağlar. O halde Cl^* kümesine bulanık kapanış işlemi denir [5].

4.1.7. Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I bulanık ideali verilsin. Bu taktirde,

$$\tau^*(I) = \{U \le X : \overline{(1_x - U)} = 1_x - U\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir bulanık topoloji belirtir. Bu topoloji, τ bulanık topolojisinden daha ince bir topolojidir [5].

4.1.8. Tanım: (X,τ) bulanık topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I bulanık ideali verilsin. I bulanık ideali ile birlikte (X,τ) bulanık topolojik uzayına, bulanık ideal topolojik uzay denir ve (X,τ,I) şeklinde gösterilir [5].

4.2 Bulanık Pre-I-Sürekli Fonksiyonlar

4.2.1. Tanım: (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayının bir A bulanık alt kümesi verilsin. Eğer A≤Int($Cl^*(A)$) ise A kümesine bulanık pre-I-açık küme denir [10].

(X,τ,I)' da bütün bulanık pre-I-açık kümelerinin ailesi FPIO(X) ile tanımlanır.

4.2.2.Tanım :Eğer Y'de her bulanık açık kümenin ters görüntüsü (X,τ)'da bulanık açıksa bir $f : (X,\tau) \to (Y,\phi)$ fonksiyonu; bulanık sürekli olarak adlandırılır [10].

4.2.3. Tanım: Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\phi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y'deki her bulanık açığın ters görüntüsü (X,τ,I)' da bulanık pre-I-açıksa f fonksiyonu; bulanık pre-I-sürekli olarak adlandırılır [10].

5. BULANIK THETA ÖN SÜREKLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE

Bu bölümde bulanık kuvvetli θ-pre-I-sürekli fonksiyon kavramı tanımlandı. Bu fonksiyonun karakterizasyonları ve sağladığı özellikler bulanık ideal topojik uzaylarda elde edildi. Bu fonksiyon ile ilgili çeşitli teoremler verildi. Bu türden olan fonksiyon türleri ile bulanık kuvvetli θ -pre-I-sürekli fonksiyonların karşılaştırılması yapıldı.

5.1 Bazı Ön Bilgiler

5.1.1. Lemma: (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzay ve $A, B \leq X$ olsun.Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır [11];

(1) Eğer $A \leq B \Rightarrow A^* \leq B^*$

(2) $A^* = Cl(A^*) \leq Cl(A)$

(3) $(A^*)^* \leq A^*$

(4) $(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$

5.1.2. Tanım: Bir bulanık topolojik uzayın bir A alt kümesi için eğer $A \leq Int(Cl(A))$ ise A alt kümesine bulanık pre-açık denir. Bulanık pre-açık kümenin tümleyeni bulanık pre-kapalıdır.

A'yı ihtiva eden bütün bulanık pre-açık kümelerin birleşimi A'nın bulanık pre-içidir ve $pInt(A)$ ile gösterilir.

X'in bütün bulanık pre-açık kümelerinin ailesi FPO(X) ile tanımlanıp

$$FPO(X, x) = \{U : x \in X \text{ ve } U \in FPO(X)\}$$

ile ifade edilir [8].

5.1.3. Tanım: Bir bulanık ideal topolojik uzayın bir A alt kümesi için eğer $A \leq Int(Cl^*(A))$ iseA alt kümesine bulanık pre-I-açık denir.

Bir x ∈ X noktasını ihtiva eden (X,τ,I) 'nın bütün bulanık pre-I-açıklarının ailesi FIPO(X,x) ile tanımlanır.(X,τ,I) bir bulanık ideal ve (X,τ,I)'nın bir A alt kümesinde bulanık pre-I-açığın tümleyeni bulanık pre-I-kapalıdır [10].

5.1.4. Tanım: Bir bulanık ideal topolojik uzayın bir A alt kümesi için eğer $A \le Cl^*(Int(A))$ ise A alt kümesine bulanık semi-I-açık denir [12].

5.1.5. Lemma: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve $A \le X$ olsun.

(1) $x \in p\imath Cl(A)$ olması için gerek ve yeter şart x'i içeren X'in her U bulanık pre-I-açık kümesi için $U \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

(2) $A = p\imath Cl(A)$ olması için gerek ve yeter şart A kümesinin bulanık pre-I-kapalı olmasıdır [10].

5.1.6. Tanım: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve $A \le X$ olsun. Eğer x'i ihtiva eden X'in her açık U kümesi için, $Cl^*(U) \wedge A \neq \emptyset$ ise X'in bir x noktası A'nın bulanık -θ-I-kapanış noktası olarak adlandırılır.

5.1.7.Tanım: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve $A \le X$ olsun. Eğer x'i ihtiva eden X'in her bulanık pre-I-açık U kümesi için, $p\imath Cl(U) \wedge A \neq \emptyset$ ise X'in bir x noktası A'nın bulanık pre-θ-I-kapanış noktası olarak adlandırılır.

5.1.8. Tanım: $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \vartheta)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin her V açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x'i içeren X'in bir U açık kümesi varsa bu taktirde f fonksiyonuna pre-sürekli denir [13].

5.1.9.Tanım:(X,τ,I) ,(Y,ϑ,I_1) bulanık ideal topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\vartheta,I_1)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin her V açık kümesi için $f(U) \le V$ olacak şekilde x'i içeren X'in bir U bulanık pre-I-açık kümesi varsa bu taktirde f fonksiyonuna bulanık pre-I-sürekli denir [14].

5.1.10. Tanım: (X,τ) , (Y,ϑ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \vartheta)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktasıve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin her V açık kümesi için $f(Cl(U)) \subset V$ olacak şekilde x'i içeren X'in bir U açık kümesi varsa bu taktirde f fonksiyonuna kuvvetli-θ-sürekli denir [15].

5.1.11. Tanım: (X,τ) , (Y,ϑ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \vartheta)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin her V açık kümesi için

$f(pCl(U)) \subset V$ olacak şekilde x'i içeren X'in bir U pre açık kümesi varsa bu taktide f fonksiyonuna kuvvetli-θ-pre-sürekli denir [15].

5.1.12. Tanım: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve $A \leq X$ olsun.Eğer $A = A^*$ oluyorsa, bu taktirde A alt kümesine *-perfect denir [16].

5.1.13. Tanım: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve $A \leq X$ olsun. Eğer G açık ve V *- perfect olmak üzere $A = G \wedge V$ ise bu taktirde A alt kümesine bulanık -I-lokal-kapalıdır denir [11].

5.1.14.Tanım: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktası ve x noktasının her V bulanık açık komşuluğu için $x \in U \leq Cl^*(U) \leq V$ olacak şekilde x'in bir U bulanık açık komşuluğu varsa (X, τ, I) bulanık ideal topolojik uzayına bulanık RI-uzay denir.

5.1.15. Lemma: Bir X bulanık ideal topolojik uzayın bir U alt kümesinin X'de bulanık -pre-θ -I-açık olması için gerek ve yeter koşul her $x \in U$ noktası için $p_ı Cl(W) \leq U$ olacak şekilde x noktasını ihtiva eden bir W bulanık pre-I-açık kümesinin olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki U, X uzayında bulanık pre-θ-I-açık küme olsun. Bu taktirde 1-U bulanık pre-θ-I-kapalıdır. Böylece bir $x \in U$ ve $x \notin p_ı Cl\theta(1\text{-}U)$ noktası vardır. $p_ı Cl(W) \wedge (1\text{-}U) = \emptyset$ olacak şekilde $W \in FPIO(X,x)$ vardır. Böylece $fp_ı Cl(W) \leq U$ elde ederiz. Aksine varsayalım ki, X uzayında U bulanık pre-θ-I-açık olmasın. Böylece 1-U bulanık pre-θ-I-kapalı değildir. Ayrıca $x \in p_ı Cl\theta(1\text{-}U)$ fakat $x \notin 1\text{-}U$ olacak şekilde bir x noktası vardır. $x \in U$ olduğundan hipotez gereği $p_ı Cl(W) \leq U$ olacak şekilde x noktasını ihtiva eden bir bulanık pre-I-açık W kümesi vardır. $x \in p_ı Cl\theta(1\text{-}U)$ olduğundan bu bir çelişkidir.

5.2 Bazı Karakterizasyonlar

5.2.1. Tanım: (X,τ,I) , (Y,ϑ) bulanık ideal topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau, I) \rightarrow (Y, \vartheta)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin her V bulanık açık kümesi için, $f(p_ı Cl(U)) \leq V$ olacak şekilde x noktasını içeren X'in bir U bulanık-pre-I-açık kümesi varsa bu taktirde f fonksiyonuna bulanık-kuvvetli-θ-pre-I-sürekli denir.

5.2.2. Teorem: Bir $f:(X,\tau,I)\to(Y,\vartheta)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

(1) f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

(2) Y'nin her V bulanık açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesinin X'de bulanık pre-θ-I-açık olmasıdır.

(3) Y'nin her F bulanık kapalı kümesi için $f^{-1}(F)$ kümesinin X'de bulanık pre-θ-I-kapalı olmasıdır.

(4) X'in her A alt kümesi için; $f(p_ICl\theta(A)) \le Cl(f(A))$

(5) Y'nin her B alt kümesi için $p_ICl\theta(f^{-1}(B)) \le f^{-1}(Cl(B))$.

İspat:(**1**)⇒ (**2**) Y'nin herhangi bulanık açık kümesine V diyelim. Varsayalım ki; $x\in f^{-1}(V)$ olsun. f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olduğundan $f(p_ICl(U))\le V$ olacak şekilde $U\in FPIO(X,x)$ vardır. Buradan $x\in U\le p_ICl(U)\le f^{-1}(V)$ olur.

Yani $f^{-1}(V)$ kümesi X'de bulanık pre-θ-I-açıktır.

(2)⇒ (3) ispat açıktır.

(3)⇒ (4) X'in herhangi bir alt kümesi A olsun. $Cl(f(A))$ kümesi Y'de bulanık kapalı olduğundan (3) gereği, $f^{-1}(Cl(f(A))$ kümesi bulanık pre-θ-I-kapalıdır. Dolayısıyla, $fp_ICl\theta(A) \le fp_ICl\theta f^{-1}(f(A)) \le fp_ICl\theta(f^{-1}(Cl(f(A))) \le f^{-1}(Cl(f(A)))$.Böylece, $fp_ICl\theta(A) \le Cl(f(A))$ bulunur.

(4)⇒ (5) Y'nin herhangi bir alt kümesi B olsun. (4) gereği, $f(p_ICl\theta(f^{-1}(B)) \le Cl(B)$ve böylece $p_ICl\theta(f^{-1}(B)) \le f^{-1}(Cl(B))$olduğu elde edilir.

(5)⇒ (1) $x\in X$ noktası ve f(x) noktasının herhangi açık komşuluğu V olsun. 1_Y -V, Y'de bulanık kapalı olduğundan;
$p_ICl\theta(f^{-1}(1_y\text{-}V)) \le f^{-1}(Cl(1_y\text{-}V)) = f^{-1}(1_y\text{-}V)$olduğu bulunur.

Böylece $f^{-1}(1_y - V)$ kümesi X'de bulanık pre-θ -I-kapalıdır ve $f^{-1}(V)$ kümesi x noktasını ihtiva eden bir bulanık θ-I-açık kümedir. Lemma 5.1.15.
gereği $x\in U \le p_ICl(U) \le f^{-1}(V)$olup böylece $f(p_ICl(U)) \le V$ ifadesini elde ederiz.

5.2.3. Tanım: (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasını içeren her U bulanık pre-I-açık kümesi için X'deki $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ ağı sonunda pıCl(U) kümesinde kalıyorsa, bu ağ $x \in X$ noktasına Pı-yakınsaktır denir ve $x_\lambda \rightarrow$ pıx ile gösterilir.

5.2.4. Tanım: Bir $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\vartheta)$ fonksiyonunun bulanık kuvvetli-θ -pre-I-sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ noktası ve her $(x_\lambda) \leq X$ ağı için, $x_\lambda \rightarrow$ pıx $\Rightarrow$ $f(x_\lambda) \rightarrow f(\text{pıx})$ olmasıdır.

5.2.5. Sonuç: Y bir bulanık RI-uzay olsun. Bu taktirde $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\vartheta,I_1)$ fonksiyonunun bulanık zayıf I-presürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun bulanık pre-I-sürekli olmasıdır.

5.2.6. Tanım: Eğer her $x \notin F$ noktası ve X'in her F bulanık kapalı kümesi için $x \in U$ ve $F \leq V$ olacak şekilde ayrık U ve V bulanık pre-I-açık kümeleri varsa bir (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayına bulanık p-I-regüler denir.

5.2.7. Lemma: Bir (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayının bulanık p-I-regüler olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ noktası ve x noktasının her U bulanık -açık komşuluğu için $x \in W \leq \text{pıCl}(W) \leq U$ olacak şekilde $W \in \text{FPIO}(X,x)$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$**:** $x \in X$ noktası ve U kümesi x noktasının bir bulanık açık komşuluğu olsun.O halde 1-U bulanık kapalı ve $x \notin 1-U$ olur. (X,τ,I) bulanık p-I-regüler uzay olduğundan $x \in W, 1-U \leq V$ olacak şekilde ayrık W ve V bulanık pre-I-açık kümeleri vardır. [yuksel et al] $\text{pıInt}(1-A) = 1-\text{pıCl}(A)$ ve $\text{pıCl}(1-A) = 1-\text{pıInt}(A)$ gösterilir. Buradan $V \leq X - W$ ve $V = \text{pıInt}(V) \leq \text{fpıInt}(X-W) = 1-\text{pıCl}(W)$ olup böylece $\text{pıCl}(W) \leq X - V \leq U$ olduğunu elde ederiz.

$\Leftarrow$**:** $x \notin F$ noktası ve X'in bir bulanık kapalı kümesi F olsun. Bu taktirde 1-F bulanık açık ve $x \in 1-F$ dir. Hipotez gereği $x \in V \leq \text{pıCl}(V) \leq 1-F$ olacak şekilde $V \in \text{FPIO}(X,x)$ vardır. Böylece $F \leq 1-\text{pıCl}(V)$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak X bulanık p-I-regüler uzaydır.

5.2.8. Tanım: Eğer her $x \notin F$ noktası ve X'in her bulanık pre-I-kapalı F kümesi için $x \in U$ ve $F \leq V$ olacak şekilde ayrık U ve V bulanık pre-I-açık kümeleri varsa bir (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayına bulanık pre-I-regüler uzay denir.

5.2.9. Teorem: Bir bulanık sürekli fonksiyonunun bulanık kuvvetli- θ-pre-I-sürekli olması için gerek ve yeter koşul X'in bir bulanık p-I-regüler uzay olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ **:** f fonksiyonu bulanık sürekli olduğundan, f(x) noktasının herhangi bulanık açık V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$ kümesi x noktasının bulanık açık komşuluğu olur. f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklioldığundan $f^{-1}(V)$ kümesi bulanık -θ-pre-I-açık kümedir. Buradan pıCl(W)≤f^{-1}(V) olacak şekilde $W \in FPIO(X,x)$ kümesi vardır. Böylece X bir bulanık p-I-regüler uzaydır.

$\Leftarrow$ **:** Varsayalım ki: $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\vartheta)$ fonksiyonu bulanık sürekli ve X bir bulanık p-I-regüler uzay olsun. f(x) noktasının herhangi bir bulanık açık komşuluğu V ve herhangi $x \in X$ noktası için; $f^{-1}(V)$ kümesi x noktasını ihtiva eden X'in bulanık açık kümesidir. X bir bulanık p-ı-regüler uzay olduğundan $p\imath Cl(U) \le f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in FPIO(X,x)$ vardır. Bu gösterir ki f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

5.2.10. Lemma: Bir (X,τ,I) ideal topolojik uzayının bulanık pre-I-regüler olması için gerek ve yeter koşul xnoktasının her bulanık pre-I-açık U komşuluğu ve her $x \in X$ noktası için $x \in V \le p\imath Cl(V) \le U$ olacak şekilde $V \in FPIO(X,x)$ kümesinin varolmasıdır.

5.2.11.Teorem: (X,τ,I) bir bulanık pre-I-regüler uzay olsun. Bu taktirde $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\vartheta)$ fonksiyonunun bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun bulanık pre-I-sürekli olmasıdır.

İspat: $x \in X$ noktası ve f(x)noktasını ihtiva eden Y'nin herhangi bulanık açık kümesi V olsun. f'in bulanık pre-I-sürekliliğinden $f^{-1}(V) \in FPIO(X,x)$ olduğuna sahibiz ve X bulanık pre-I-regüler uzay olduğundan $p\imath Cl(U) \le f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in FPIO(X,x)$ kümesi vardır. Bu nedenle $f(p\imath Cl(U)) \le V$ elde edilir.Bu gösterir ki f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

5.2.12. Tanım: Eğer X'in her alt kümesi bulanık I-lokal-kapalı ise, (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayı bulanık I-submaximal uzay olarak adlandırılır.

5.2.13. Lemma: Eğer (X,τ,I) bir bulanık I-submaximal uzay ise bu taktirde $FPIO(X) = \tau$.

5.2.14. Teorem: (X,τ,I) bir bulanık I-submaximal uzayolsun. Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\vartheta)$ bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli ise bu taktirde f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

İspat: Varsayalım ki f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli, $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin herhangi bir açık kümesi V olsun. f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olduğundan $f(p\imath Cl(U))\le V$ olacak şekilde $U\in FPIO(X,x)$ vardır. X bir I-submaximal uzay olduğundan $p\imath Cl(U)=Cl(U)$ veburadan $f(Cl^{*}(U))\le V$ olur**.** Bu gösterir ki f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

5.3 Bazı Özellikler

5.3.1. Teorem: $f:(X,\tau,I)\to(Y,\vartheta,I_1)$ bir fonksiyon ve $g:(X,\tau,I)\to XxY$ fonksiyonu f fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Eğer g fonksiyonu bulanık kuvvetliθ-pre-I-süreklidir ve X bir p-I-regüler uzaydır.

(2) Eğer f fonksiyonu bulanık kuvvetliθ-pre-I-sürekli ve X pre-I-regüler uzay, bu taktirde g fonksiyonu bulanık kuvvetliθ-pre-I-süreklidir.

İspat: (1): $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin herhangi açık kümesi V olsun. Bu taktirde XxY'nin XxV açık kümesi g(x) noktasını ihtiva eder. g fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olduğundan $g:(p\imath Cl(U))\le XxV$ olacak şekilde $U\in FPIO(X,x)$ kümesi vardır. Böylece $f(p\imath Cl(U))\le V$ olup f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olur. X noktasının herhangi açık komşuluğu U olsun. $g(x)\in UxY$ olduğundan ve UxY kümesi XxY de açıktır. Buradan $p\imath Cl(W)\le U$ olup X 'in p-I-regüler uzay olduğu elde edilir.

(2): $x\in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden XxY'nin herhangi açık kümesi W olsun.Bu taktirde $g(x)=(x,f(x))\in UxV\le W$ olacak şekilde $U\le X, V\le Y$ açık kümeleri vardır. f fonksiyonu bulanık kuvvetli- θ-pre-I-sürekli olduğundan, x noktasının bir bulanık pre-I-açık komşuluğu $U\wedge G$, aynı zamanda $f(p\imath Cl(G))\le V$ olacak şekilde $G\in FPIO(X,x)$ kümesi vardır. X bulanık pre-I-regüler uzay olduğundan $x\in T\le p\imath Cl(T)\le U\wedge G$ olacak şekilde $T\in FPIO(X,x)$ vardır. Böylece $g(p\imath Cl(T))\le U\ x\ f(p\imath Cl(G))\le UxV\le W$ olduğunu elde ederiz. Bu gösterir ki g fonksiyonu bulanık kuvvetli- θ-pre-I-süreklidir.

5.3.2.Sonuç: (X,τ,I) bir bulanık pre-I-regüler uzay olsun. Bu taktirde bir $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\vartheta)$ fonksiyonunun bulanık kuvvetli θ-pre-I-sürekli olması için gerek ve yeter koşul $g:(X,\tau,I)\rightarrow XxY$ grafik fonksiyonunun kuvvetli−θ-pre-I-sürekli olmasıdır.

5.3.3. Teorem: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve A ve X_0, X'in alt kümeleri olsun. Eğer $A\in FPIO(X)$ ve $X_0\in FSIO(X)$ ise, bu taktirde $g(pıCl(T))\leq Uxf(pıCl(G))\leq UxV\leq W$ dir. Bu gösterir ki g fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

5.3.4. Teorem: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve A ve X_0, X'in alt kümeleri olsun.

(1) Eğer $A\in FPIO(X)$ ve $X_0\in FSIO(X)$, bu taktirde $A\wedge X_0\in FPIO(X_0)$

(2) Eğer $A\in FPIO(X_0)$ ve $X_0\in FPIO(X)$ bu taktirde $A\in FPIO(X)$.

5.3.5. Teorem: (X,τ,I) bir bulanık ideal topolojik uzay ve $A\leq X_0\leq X$ ve X_0'da A'nın pre-I-kapanışı $pıClX_0(A)$ olmak üzere;

(1) Eğer X_0 kümesi X'de fuzzy semi-I-açık ise, bu taktirde $pıClX_0(A)\leq pıCl(A)$ olmasıdır.

(2) Eğer $A\in FPIO(X_0)$ ve $X_0\in FPIO(X)$ ise, bu taktirde $pıCl(A)\leq pıClX_0(A)$ olmasıdır.

5.3.6. Teorem: $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\vartheta)$ fonksiyonu bulanık kuvvetli- θ -pre-I-sürekli ve X'in bir bulanık semi-I-açık alt kümesi X_0 olsun. Bu taktirde $f/X_0:(X_0,\tau/X_0,I/X_0)\rightarrow(Y,\vartheta)$ kısıtlanış fonksiyonu bulanık kuvvetli- θ -pre-I-süreklidir.

İspat: $x\in X_0$ noktası ve f(x) noktasının herhangi bir komşuluğu V olsun. f fonksiyonu bulanık kuvvetli- θ -pre-I-sürekli olduğundan $f(pıCl(U))\leq V$ olacak şekilde $U\in FPIO(X,x)$ kümesi vardır. $U_0=U\wedge X_0$ bu taktirde Teorem5.3.4 ve Teorem 5.3.5 gereği $U_0\in FPIO(X_0)$ ve $pıClX_0(U_0)\leq pıCl(U_0)$ olur. Buradan

$(f/X_0)(\text{pıCl}X_0(U_0)) = f(\text{pıCl}X_0(U_0) \leq f(\text{pıCl}(U_0) \leq f(\text{pıCl}(U)) \leq V$ olduğunu elde ederiz.Bu gösterir ki f/X_0 kısıtlanış fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

5.3.7. Teorem: Eğer her $x \in X$ noktası için $f/X_0 : (X_0, \tau/X_0, I/X_0) \to (Y, \vartheta)$ kısıtlanış fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olacak şekilde $X_0 \in \text{FPIO}(X, x)$ kümesi varsa bu taktirde $f : (X, \tau, I) \to (Y, \vartheta)$ fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

İspat: $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını ihtiva eden Y'nin herhangi açık komşuluğu V olsun. f/X_0 fonksiyonu kuvvetli -θ-pre-I-sürekli olduğundan $(f/X_0)(\text{pıCl}X_0(U)) = f(\text{pıCl}X_0(U) \leq V$ olacak şekilde $U \in \text{FPIO}(X_0, x)$ kümesi vardır. Teorem 5.3.5 gereği $f(\text{pıCl}(U)) \leq f(\text{pıCl}X_0(U)) \leq V$ olur.Bu gösterir ki f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

5.3.8.Tanım: Eğer Y'nin her bulanık pre-I-açık alt kümesinin ters görüntüsü X'de bulanık pre-I-açık oluyorsa $f : (X, \tau, I) \to (Y, \vartheta, I_1)$ fonksiyonuna bulanık pre-I-irresolute denir.

5.3.9. Teorem: $f : (X, \tau, I) \to (Y, \vartheta, I_1)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

(1) f fonksiyonu pre-I-irresolute fonksiyondur.

(2) Y'nin her A alt kümesi için; $f^{-1}(\text{pıInt}(A)) \leq \text{pıInt}(f^{-1}(A))$.

(3) Y'nin her A alt kümesi için; $\text{pıCl}(f^{-1}(A)) \leq f^{-1}(\text{pıCl}(A))$.

İspat: **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** $A \leq Y$ olsun. Bu taktirde pıInt(A) Y'de bir pre-I-açık kümedir.f fonksiyonu bulanık pre-I-irresolute olduğundan $f^{-1}(\text{pıInt}(A))$ kümesi X'de bulanık pre-I-açıktır. Bu nedenle $f^{-1}(\text{pıInt}(A)) = \text{pıInt}(f^{-1}(\text{pıInt}(A))) \leq \text{pıInt}(f^{-1}(A))$ olduğunu elde ederiz.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** $A \leq Y$ olsun. Bu taktirde;
$X - f^{-1}(\text{pıCl}(A)) = f^{-1}(\text{pıInt}(Y - A)) \leq \text{pıInt}f^{-1}(Y - A) = X - \text{pıCl}(f^{-1}(A))$ olur. Böylece $\text{pıCl}(f^{-1}(A)) \leq f^{-1}(\text{pıCl}(A))$ olduğunu elde ederiz.

(3) $\Rightarrow$(1) Y'nin bir bulanık pre-I-kapalı alt kümesi F olsun. (3) gereği, $p\iota Cl(f^{-1}(F)) \leq f^{-1}(p\iota Cl(F)) \leq f^{-1}(F)$ olur. Bu gösterir ki f fonksiyonu bulanık pre-I-irresolute fonksiyondur.

5.3.10.Lemma: Eğer bir $f:(X,\tau,I) \to (Y,\vartheta,I_1)$ fonksiyonu bulanık pre-I-irresolute fonksiyon ise bu taktirde Y'nin her bulanık - θ -I-açık alt kümesinin ters görüntüsü X'de bulanık - θ -I-açıkdır.

İspat: $x \in f^{-1}(V)$ noktasıve Y'nin bir bulanık pre-θ-I-açık alt kümesi V olsun. Bu taktirde $f(x) \in W \leq p\iota Cl(W) \leq V$ ve $f^{-1}(W) \in FPIO(X)$ olacak şekilde $W \in FPIO(Y)$ kümesi vardır.

Yukarıdaki teoremi kullanarak $x \in f^{-1}(W) \leq p\iota Cl(f^{-1}(W)) \leq f^{-1}(V)$ olduğunu elde ederiz. Bu gösterir ki $f^{-1}(V)$ pre-θ-I-açıktır.

5.3.11. Teorem: $f:(X,\tau,I) \to (Y,\vartheta,I_1)$ ve $g:(Y,\vartheta,I_1) \to (Z,\phi,I_2)$ fonksiyonları verilsin.

(1) Eğer f bulanık kuvvetli- θ -pre-I-sürekli ve g bulanık sürekli ise, bu taktirde $g \circ f: (X,\tau,I) \to (Y,\phi,I_2)$ bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

(2) Eğer f bulanık pre-I-irresolute ve g bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli ise bu taktirde $g \circ f: (X,\tau,I) \to (Y,\phi,I_2)$ bulanık kuvvetli-θ-pre-I-süreklidir.

İspat: (1) Teorem 5.2.1'den görülür.

(2) Teorem 5.2.1 ve Lemma 5.3.10'dan görülür.

5.4 Ayırma Aksiyomları

5.4.1. Tanım: Eğer X'de herhangi x ve y ayrık nokta çifti için; $U \wedge V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in FPIO(X,x)$ ve $V \in FPIO(X,y)$ kümeleri varsa bu taktirde (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayına bulanık pre-I-T_2 uzayı denir.

5.4.2.Tanım: Eğer X'de herhangi x ve y ayrık nokta çifti için; $p\iota Cl(U) \wedge p\iota Cl(V) = \emptyset$ olacak şekilde $U \in FPIO(X,x)$ ve $V \in FPIO(X,y)$ kümeleri varsa bir (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzayına bulanık pre-I-Urysohn uzayı denir.

5.4.3.Uyarı: Her bulanık pre-I-Urysohn uzayı, bulanık pre-I-T_2 uzayıdır.

5.4.4. Teorem: Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\vartheta)$ fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli, birebir fonksiyon ve Y bir T_0 uzayı ise, bu taktirde X uzayı bulanık pre-I-T_2 uzayıdır.

İspat: x ve y noktaları X'in herhangi iki ayrık nokta olsun. Hipotez gereği $f(x)\neq f(y)$ ve $f(x)\in U, f(y)\notin U$ yada $f(y)\in U, f(x)\notin U$ olacak şekilde Y'de bir U açık kümesi vardır. Eğer 1.durum sağlanırsa $f(p_ICl(W))\leq U$ ve $y\notin p_ICl(W)$ olacak şekilde $W\in FPIO(X,x)$ vardır. Buradan y noktasının bir bulanık pre-I-açık komşuluğu $X - p_ICl(W)$ olur. ikinci durum geçerli olursa benzer bir sonuç elde ederiz. Böylece X pre-I-T_2 uzayıdır.

5.4.5. Teorem: Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\vartheta)$ fonksiyon bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli, birebir fonksiyon ve Y bir T_2 uzayı ise bu taktirde X bulanık pre-I-Urysohn uzayıdır.

İspat:x ve y noktaları X'in herhangi ayrık noktaları olsun. Hipotez gereği $f(x)\neq f(y)$ ve sırasıyla; f(x) ve f(y) noktalarını ihtiva eden Y'de ayrık U ve V açık kümeleri vardır. f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ-pre-I-sürekli olduğundan, $f(p_ICl(G))\leq U$ ve $f(p_ICl(H))\leq V$ olacak şekilde $G\in FPIO(X,x)$ ve $H\in FPIO(X,x)$ kümeleri vardır. Buradan $f(p_ICl(G))\wedge f(p_ICl(H))=\varnothing$ olur. Bu gösterir ki X bulanık pre-I-Urysohn uzayıdır.

5.4.6. Lemma: (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzay olsun. X'in A ve B alt kümeleri verilsin. Bu taktirde $Cl^*(A)xCl^*(B)\leq Cl^*(AxB)$ dır.

5.4.7. Lemma: (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzay olsun. X'in A ve B alt kümeleri verilsin. Eğer $A,B\in FPIO(X)$ ise bu taktirde $AxB\in FPIO(XxX)$ kümedir.

İspat:

$AxB\leq IntX(Cl^*X(A))xIntX(Cl^*X(B))=IntXxX(Cl^*X(A)xCl^*X(B))\leq IntXxX(Cl^*XxX(AxB))$ olur.

Bu gösterir ki $AxB\in FPIO(XxX)$ kümedir.

5.4.8. Lemma: (X,τ,I) bulanık ideal topolojik uzay ve $A,B\leq X$ olsun.

$$p_ICl(AxB)\leq p_ICl(A)xp_ICl(B)$$

dır.

İspat: $(x,y)\in XxX$ ve $(x,y)\in p_ICl(AxB)$ olsun. Bu taktirde herhangi $U\in FPIO(X,x)$ ve $V\in FPIO(X,y)$ kümeleri için Lemma 5.4.7 gereği

$(x,y) \in UxV \in FPIO(XxX)$ ve $(A \wedge U)x(B \wedge V) = (AxB) \wedge (UxV) \neq \emptyset$ olur. Buradan $x \in p\imath Cl(A)$ ve $y \in p\imath Cl(B)$ ve $(x,y) \in p\imath Cl(A)xp\imath Cl(B)$ bulunur.

5.4.9. Teorem: Eğer $f:(X,\tau,I) \to (Y,\vartheta)$ bulanık kuvvetli- θ -pre-I-sürekli ve Y bir T_2 uzayı ise bu taktirde $A = \{(x,y): f(x) = f(y)\}$ alt kümesi XxX'de fuzzy pre- θ -I-kapalı kümedir.

İspat: Varsayalım ki $(x,y) \notin A$ olsun. Hipotez gereği $f(x) \neq f(y)$ ve sırasıyla f(x) ve f(y) noktalarını ihtiva eden Y'de ayrık açık U ve W kümeleri vardır. f fonksiyonu bulanık kuvvetli- θ-pre-I-sürekli olduğundan, Lemma 5.4.7 gereği $f(p\imath Cl(U)) \leq V$ ve $f(p\imath Cl(G)) \leq W$ olacak şekilde $U \in FPIO(X,x)$ $G \in FPIO(X,y)$ kümeleri vardır. Lemma 5.4.8 gereği $(x,y) \in UxG \leq p\imath Cl(UxG) \leq (XxX) - A$ ve $(p\imath Cl(U)xp\imath Cl(G)) \wedge A = \emptyset$ olduğunu elde ederiz. Buradan $(x,y) \in UxG \leq p\imath Cl(UxG) \leq (XxX) - A$ olup A kümesinin bulanık - θ-pre-I-kapalı küme olduğu görülür.

5.4.10. Tanım: Eğer her $(x,y) \in (XxY) - G(f)$ için $(p\imath Cl(U)xV) \wedge G(f) = \emptyset$ olacak şekilde y noktasının bir V açık komşuluğu ve x noktasının bir bulanık pre-I-açık U komşuluğu varsa bu taktirde $f:(X,\tau,I) \to (Y,\vartheta)$ fonksiyonunun G(f) grafiğine bulanık kuvvetli pre-I-kapalı fonksiyon denir.

5.4.11. Lemma: Bir $f:(X,\tau,I) \to (Y,\vartheta)$ fonksiyonunun G(f) grafiğinin XxY 'de bulanık kuvvetli pre-I-kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $(x,y) \in (XxY) - G(f)$ noktası için $f(p\imath Cl(U)) \wedge V = \emptyset$ olacak şekilde y noktasının bir V açık komşuluğu ve x noktasının bir bulanık pre-I-açık U komşuluğunun var olmasıdır.

5.4.12. Teorem: Eğer $f:(X,\tau,I) \to (Y,\vartheta)$ fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ -pre-I-sürekli ve Y bir T_2 uzayı ise bu taktirde G(f) fonksiyonu XxY'de bulanık kuvvetli pre-I-kapalıdır.

İspat: $(x,y) \in (XxY) - G(f)$ olsun. Hipotezden $f(x) \neq y$ ve sırasıyla y ve f(x)'i noktalarını içeren Y 'de ayrık U ve V açık kümeleri vardır. f fonksiyonu bulanık kuvvetli-θ -pre-I-sürekli olduğundan $f(p\imath Cl(U)) \leq V$ olacak şekilde $U \in FPIO(X,x)$ kümesi vardır. Buradan

$f(p_I Cl(U)) \wedge W = \varnothing$ olup G(f) fonksiyonunun XxY'de bulanık kuvvetli pre-I-kapalı olduğu görülür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; kuvvetli -θ-pre-I- sürekli fonksiyon kavramı bulanık ideal topojiye genişletildi ve bu kavramın özelliklerinden bahsedildi.

Tarafımızca verilmiş olan kavramlar, bundan sonra yapılacak olan çalışmalar için farklı topolojik uzaylara genişletilebilir ve uygulamaları incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] L.A. Zadeh, Fuzzy set, "*Inform and control*", vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[2] C.L. Chang, "Fuzzy topological spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 24, pp. 1882-190, 1968.

[3] K. Kuratowski, *"Topologie I"*, Warszawa, 1933.

[4] D. Jankovic, T.R. Hamlett, "New topologies from old via ideals", *Amer. Math. Monthly.*, vol. 97, pp. 295-310, 1990.

[5] D. Sarkar, "Fuzzy ideal theory fuzzy local function and generated fuzzy topology", fuzzy set and Systems, vol.87, pp. 117-123, 1997.

[6] N. Bourbaki, "General Topology", *Addison-Wesley, Mass*, 1966.

[7] P. Pao-Ming, L.Ying-Ming, "Fuzzy Topology I. Neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 76, pp. 571-599, 1980.

[8] F. Hadba Algahtani, A. Alqubati, "On fuzzy pre-separation axioms", *Journal of Advanced Studies in Topology*, vol. 4, no. 4, 2013, pp. 1–6

[9] K.K. Azad, "On fuzzy semicontinuity, Fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity", *Journal of Mathematical Analysis and App.*, vol. 82, pp. 14-32, 1981.

[10] A.A. Nasef, E. Hatir, "On fuzzy pre-I-open sets and a decomposition of fuzzy I-continuity", *Chaos solitons and fractals*, vol. 40, pp.1185-1189, 2009.

[11] F. Abbas, C. Yıldız, "On fuzzy regular-I-closed sets, Fuzzy semi-I-regular sets and decompositions of fuzzy regular-I-continuity, fuzzy A_I-continuity", *Gazi University Journal of Science*, vol. 24, no. 4, pp. 731-738, 2011.

[12] E. Hatir, S. Jafari , "Fuzzy semi-I-open sets and fuzzy semi-I-continuity via fuzzy idealization", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 34 , pp. 1220–1224, 2007.

[13] A.S. Mashhour, I.A. Hasaneinand and S.N. El-Deeb, "Precontinuous and weak pre-continuous mappings", *Proc. Math. Hungar.*, vol. 41, pp. 213-218, 1983.

[14] S.Yuksel, E.G. Caylak, A.Acikgoz, "On fuzzy δ-I-open sets and decomposition of fuzzy α-I-continuity" *SDU. Journal of Science (E-Journal)*, vol. 5 , no.1, pp. 147-153, 2010.

[15] S. Yuksel, T. Simsekler, Z. Ergul, T. Noiri., "Strongly θ-pre-I-continuous functions", *Vasile Alecsandri University of Bacau Faculty of Sciences Scientific*

Studies and Research Series Mathematics and Informatics, vol. 20, no. 2, pp. 111-126 , 2010.

[16] T. Noiri, S.M. Kang, “On almost strongly θ-continuous functions”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 15, no. 1, pp. 1-8, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Kübra CENGİZ

Doğum tarihi ve yeri :NARMAN/15.06.1993

e-posta :cengizkubra@hotmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Topoloji	2020
Lisans	Balıkesir Üniversitesi	2016
Lise	Ümraniye Merkez Anadolu Lisesi	2011