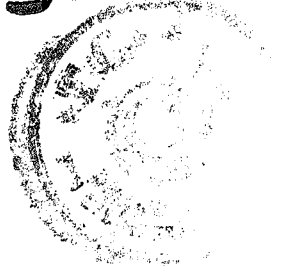


47555



T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

KORDİYAL GRAFLAR VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURAN KEMANKAŞLI

Balıkesir, Temmuz - 1996

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

KORDİYAL GRAFLAR VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURAN KEMANKAŞLI

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Mehmet ARISOY

Sınav Tarihi : 09.07.1996

Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Mehmet ARISOY (Danışman)
Prof.Dr. Mehmet SEZER
Prof. Hasan SOYDAN

Balıkesir, Temmuz - 1996



Öz

**KORDİYAL GRAFLAR
VE UYGULAMALARI**

Nuran KEMANKAŞLI

**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Eğitimi AnaBilim Dalı**

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet ARISOY)

Balıkesir, 1996

Bu çalışmada, birleştirilmiş graflar sınıfına giren çarkların, yelpazelerin, Petersen graflarının S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralanması incelenmiştir. Bu grafların S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşullu teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Bu teoremlerin ispatı için gerekli temel kavramlar saptanmış, bu temel kavramların tanımları yapılmış ve birer örnek yardımı ile ikinci bölümde açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, literatürde görülen bazı kordiyal graflar hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, çarklar, yelpazeler ve petersen grafları ile ilgili teoremler ortaya atılmıştır. Beşinci bölümde, düzgün altı yüzlü, düzgün sekizyüzlü, düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmiyüzlünün tanımları verilerek, bu grafların S-kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralanmaları incelenmiştir.



Bu çalışmada ortaya atılan teoremlerde belirtilen grafların ayrıntılarının ve tepelerinin numaralanmasında $\{-1,1\}$ kümesinin elemanları kullanılmıştır. Herbir teoremin gereklilik koşulu olmayana ergi metodu ile ispatlanmıştır. Teoremin genel ispatı verildikten sonra incelenen grafin S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal olan ya da olmayan numaralanmaları şekiller çizilerek gösterilmiştir.

Yapılan inceleme sonunda, $n \equiv 2 \pmod{4}$ denklğini sağlayan n tepeli birleştirilmiş grafların S-Kordiyal olmadıkları görülmüştür.



Anahtar Sözcükler : Kordiyal/Graf/Kordiyal Graf/(+1)-Kordiyal/
(-1)-Kordiyal/Birleştirilmiş Graf



Abstract

**CORDIAL GRAPHS AND
APPLICATIONS**

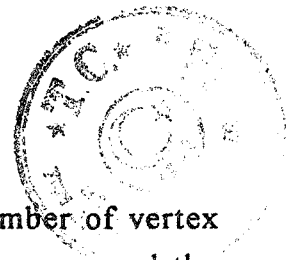
Nuran KEMANKAŞLI

**Balıkesir University, Institute of Science, Department
of Mathematics Education**

(M.Sc. Thesis / Supervisor: Doç. Dr. Mehmet ARISOY)

Balıkesir, TURKEY, 1996

In this thesis, S-Cordial, (+1)-Cordial and (-1)-Cordial labelling of wheels, fans and Petersen graphs, which are subclasses of connected graphs have been investigated. Therefore, related theorems have been performed and proofed. In order to proof related theorems, the fundamental concepts have been determined, defined and shown by examples in chapter 2. In chapter 3, it has been given the knowledge about some of the cordial graphs found in the literature. In chapter 4, new theorems due to wheels, fans and Petersen graphs have been performed. In chapter 5, definitions of cube, Octahedral, Dodecahedral, Icosahedral have been given and S-Cordial, (+1)-Cordial and (-1)-Cordial labelling of these graphs have been investigated.



In this work, we have used $\{-1,1\}$ set in order to number of vertex and edges of the graphs which have been defined by the theorems and the necessity of each theorem has been proofed by contradiction.

After giving the general proof of the theorem, the graphs which are investigated here, have been labelled with figures according to be wheather they are S-Cordial, (+1)-Cordial and (-1)-Cordial or not.

As a result, it has been seen that for $n \equiv 2 \pmod{4}$ the connected graphs with n vertex have not been found S-Cordial.



Key Words: Cordial / Graphs / Cordial Graphs / (-1)-Cordial
(+1)-Cordial / Connected Graphs



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZ, ANAHTAR SÖZCÜKLER	i
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	xi
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Yol	2
2.2 Çevre	2
2.3 Tam Graf	3
2.4 İki Kümeli Graf, Tamiki Kümeli Graf, Yıldız Grafı	3
2.5 Çark	4
2.6 Yelpaze	4
2.7 Petersen Grafı	5
3.KORDİYAL GRAFLAR	6
3.1 Kordiyal Graf	6
3.2 M-Kordiyal Graf	6
3.3 A-Kordiyal Graf	7
3.4 E_3 -Kordiyal Graf	8
3.5 S-Kordiyal Graf	9



4. W_n ÇARKLARININ, F_n YELPAZELERİNİN, $P(n,m)$ PETERSEN GRAFLARININ S-KORDİYAL, (+1)-KORDİYAL VE (-1)-KORDİYAL NUMARALANMASI	11
--	-----------

5. DÜZGÜN ALTIYÜZLÜNÜN, DÜZGÜN SEKİZYÜZLÜNÜN, DÜZGÜN ONİKİYÜZLÜNÜN, DÜZGÜN YİRMİYÜZLÜNÜN GRAFININ S-KORDİYALİTESİ İLE (-1)-KORDİYALİTESİ VE (+1)-KORDİYALİTESİNİN İNCELENMESİ	56
--	-----------

5.1 Düzgün Altıyüzlünün Grafi	56
5.2 Düzgün Sekizyüzlünün Grafi	56
5.3 Düzgün Onikiyüzlünün Grafi	57
5.4 Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi	57

6. YÖNTEM	64
------------------	-----------

7. SONUÇ VE TARTIŞMA	65
-----------------------------	-----------

KAYNAKÇA	66
-----------------	-----------



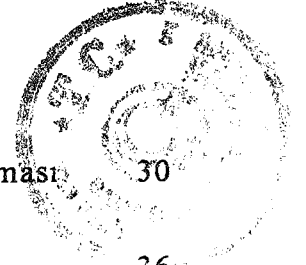
SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge Adı</u>	<u>Tanımı</u>
V	Grafın Tepeler Kümesi
E	Grafın Ayrıtlar Kümesi
$G=(V,E)$	G Grafı
P_n	n Uzunluklu Yol
C_n	n Uzunluklu Çevre
K_n	n Tepeli Tam Graf
W_n	$n+1$ Tepeli Çark
F_n	$n+1$ Tepeli Yelpaze
S_n	$n+1$ Tepeli Yıldız Ağacı
$P(n,m)$	$2n$ Tepeli Petersen Graf
$V_f(i)$	i Numaralı Tepelerin Sayısı
$e_f(i)$	i Numaralı Ayrıtların Sayısı
Σ	Toplam Sembölü
Π	Çarpım Sembölü
V_c	Merkez Tepe
f	Tepe Numaralama Fonksiyonu
\bar{f}	Ayrıtlar Numaralama Fonksiyonu
$f(v_c)$	v_c Merkez Tepesinin Numarası
Q_3	Düzdün Altıyüzlü (Küp)

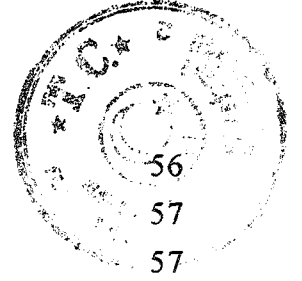


ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>	<u>Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1	P_3 Yolu	2
Şekil 2.2	C_3 Çevresi	3
Şekil 2.3	K_4 Tam Grafi	3
Şekil 2.4	S_5 Yıldız Ağacı	4
Şekil 2.5	W_3 Çarkı	4
Şekil 2.6	F_3 Yelpazesi	5
Şekil 2.7	$P(5,2)$ Petersen grafi	5
Şekil 3.1	W_3 Çarkı ve Onun M-Kordiyal Numaralanması	7
Şekil 3.2	K_3 Tam Grafi ve Onun A-Kordiyal Numaralanması	8
Şekil 3.3	K_3 Tam Grafi ve Onun E -Kordiyal Numaralanması	9
Şekil 3.4	K_3 Tam Grafi ve Onun S-Kordiyal Numaralanması	10
Şekil 4.1	W_4 Çarkı ve Onun S-Kordiyal Numaralanması	15
Şekil 4.2	W_5 Çarkı ve Onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması	16
Şekil 4.3	W_6 Çarkı ve Onun S-Kordiyal Numaralanması	16
Şekil 4.4	W_7 Çarkı ve Onun S-Kordiyal Numaralanması	16
Şekil 4.5	K_4 Tam Grafi ve Onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	17
Şekil 4.6	K_4 Tam Grafi ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	18
Şekil 4.7	W_4 Çarkı ve Onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	20
Şekil 4.8	W_5 Çarkı ve Onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	21
Şekil 4.9	W_6 Çarkı ve Onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	21
Şekil 4.10	W_7 Çarkı ve Onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	21
Şekil 4.11	W_4 Çarkı ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	23
Şekil 4.12	W_5 Çarkı ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	23
Şekil 4.13	W_6 Çarkı ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	23
Şekil 4.14	W_7 Çarkı ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	24
Şekil 4.15	F_4 Yelpazesi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	29
Şekil 4.16	F_5 Yelpazesi ve onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması	30
Şekil 4.17	F_6 Yelpazesi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	30



Şekil 4.18	F ₇ Yelpazesi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	30
Şekil 4.19	F ₄ Yelpazesi ve onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	36
Şekil 4.20	F ₅ Yelpazesi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	36
Şekil 4.21	F ₆ Yelpazesi ve onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	37
Şekil 4.22	F ₇ Yelpazesi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	37
Şekil 4.23	F ₄ Yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	42
Şekil 4.24	F ₅ Yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	42
Şekil 4.25	F ₆ Yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	42
Şekil 4.26	F ₇ Yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	43
Şekil 4.27	P (5,2) Petersen grafi ve onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması	46
Şekil 4.28	P (6,2) Petersen grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	46
Şekil 4.29	P (7,2) Petersen grafi ve onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması	47
Şekil 4.30	P (8,2) Petersen grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	47
Şekil 4.31	P (5,2) Petersen grafi ve onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	50
Şekil 4.32	P (6,2) Petersen grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	50
Şekil 4.33	P (7,2) Petersen grafi ve onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	51
Şekil 4.34	P (8,2) Petersen grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	51
Şekil 4.35	P (5,2) Petersen grafi ve onun (+1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	54
Şekil 4.36	P (6,2) Petersen grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	54
Şekil 4.37	P (7,2) Petersen grafi ve onun (+1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması	55
Şekil 4.38	P (8,2) Petersen grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	55
Şekil 5.1	Q ₃ Düzgün Altyüzünün Grafi	56



Şekil 5.2	Düzgün Sekizyüzlünün Grafi	56
Şekil 5.3	Düzgün Onikiyüzlünün Grafi	57
Şekil 5.4	Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi	57
Şekil 5.5	Düzgün Altıyüzlünün Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	58
Şekil 5.6	Düzgün Altıyüzlünün Grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	58
Şekil 5.7	Düzgün Altıyüzlünün Grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	58
Şekil 5.8	Düzgün Sekizyüzlünün Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	59
Şekil 5.9	Düzgün Sekizyüzlünün Grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	59
Şekil 5.10	Düzgün Sekizyüzlünün Grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	60
Şekil 5.11	Düzgün Onikiyüzlünün Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	60
Şekil 5.12	Düzgün Onikiyüzlünün Grafi ve onun (+1) -Kordiyal Numaralanması	61
Şekil 5.13	Düzgün Onikiyüzlünün Grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	61
Şekil 5.14	Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması	62
Şekil 5.15	Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması	62
Şekil 5.16	Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması	63



ÖNSÖZ

Tez çalışma konumun, bana ve daha sonra bu konuda çalışma yapacak kişilere ışık tutmasını ve yararlı olmasını istedim. Araştırmalarım sonucunda ülkemizde çok iyi tanınmayan ancak yeni yeni uygulanmaya başlayan Kordiyal Graflar ve uygulamaları konusunu seçtim. Bu konudaki çalışmalarım esnasında büyük destek ve yardımını gördüğüm danışman hocam Doç.Dr.Mehmet ARISOY'a içtenlikle teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca, çalışmanın düzenlenmesi esnasında yardımlarını esirgemeyen Fatma AYAZ hocama, arkadaşım Mergül MUTLU'ya, Hüseyin AŞIK'a ve Bilgi İşlem Daire Başkanlığı Uzmanı Arzem ÖZYURT'a teşekkür ediyorum.

Çalışmalarım boyunca beni büyük bir sabır ve anlayışla destekleyen aileme, bu fedakarlıklarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

BALIKESİR 1996

Nuran KEMANKAŞLI



1.GİRİŞ

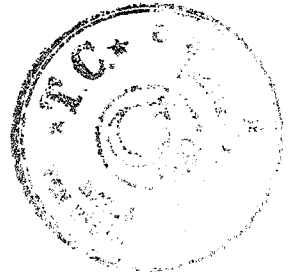
Grafların Kordiyal olabilmesi, kordiyal numaralama adı verilen yönteme bağlıdır. Eğer, bir graf kordiyal numaralamaya imkan veriyorsa, bu graf kordiyaldır[7].

Kordiyal grafların pek çok çeşitleri vardır. Bunlar, M-Kordiyal Graflar [5], A-Kordiyal Graflar [13], E_3 -Kordiyal Graflar [6], S-Kordiyal Graflar [7], H -Kordiyal Graflar [8] literatürde görülen bazı graflardır. 1987'den beri Kordiyal Grafların bir çok çeşitleri İ.Cahit tarafından [5], [6], [7], [8] nolu referanslarda incelenmiştir. O tarihten bu yana Kordiyal numaralama yöntemine değişik yaklaşımlar [4], [9] ve [14] ' nolu referanslarda okuyucuya sunulmuştur.

Birleştirilmiş Graflar, her bir tepe çifti arasında en az bir yol bulunan graflardır [10]. Birleştirilmiş graflardan bazıları tam graflar, tam iki kümeli graflar, çarklar, yelpazeler, Petersen grafları v.b. dir. Bu graflar üzerinde yapılan kordiyal numaralamalar bir takım teoremler ortaya atılmasını ve bu konuda çalışacak kişilere zemin hazırlanmasını sağlamıştır.

Ayrıca, birleştirilmiş olmayan grafların kordiyal numaralanmalarının da incelenmesi, kordiyal grafların uygulanma alanlarını arttırmaktadır. Uygulama alanlarının geniş olması, çalışmanın yapılabilmesini oldukça zorlaştırır. Bu nedenle, kordiyal grafların uygulama alanları birleştirilmiş graflar sınıfına giren çarklar, yelpazeler ve petersen grafları ile sınırlandırılarak, özellikle S-Kordiyal numaralama yardımı ile S-Kordiyal Graflara yer verilebilir. Bundan başka, sınırlamanın yapıldığı graflar üzerinde (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralama yapılarak, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal Graflar üzerinde çalışılabilir.

S-Kordiyal numaralama yöntemi, grafin tepelerinin ve ayrıtlarının numaralarının +1 ve -1 den oluşması ile diğer numaralama yöntemlerinden ayrılır. (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralama yöntemlerinde, grafin ayrıtlarının +1 ve -1 ile numaralanması, bu yöntemlerin S-Kordiyal numaralama yöntemi ile benzer olduğunu gösterir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

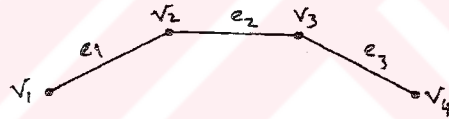
Tanım 2.1 Yol : Bir $G=(V,E)$ grafında v_1 tepesinden v_i tepesine bir yol,

$$1 \leq j < i \quad (2.1)$$

içine, e_j ayrıtı, v_j tepesi ve v_{j+1} tepesi ile bağlantılı olmak üzere,

$$P = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{i-1}, v_i \quad (2.2)$$

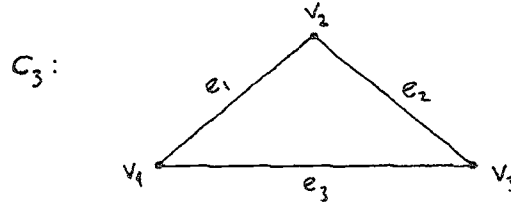
şeklinde tepe-ayrıt dizisidir. $n \geq 1$ için, n ayrıtlı, $n+1$ tepeli bir yol P_n ile gösterilir [3]. Şekil 2.1'de P_3 yolu (4 tepeli, 3 ayrıtlı) görülmektedir.



Şekil 2.1 P_3 yolu

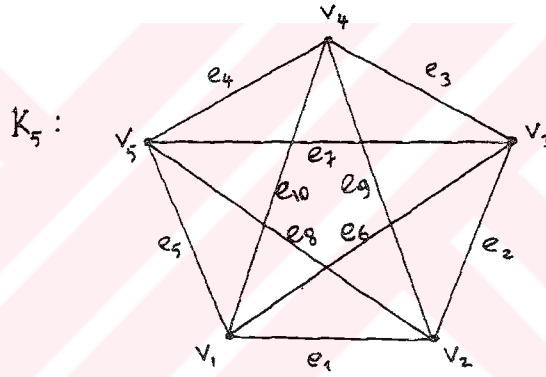
Tanım 2.2 Çevre : Bir P_n yolunun başlangıç tepesi v_1 ve son tepesi v_{n+1} olmak üzere, $n \geq 3$ için, başlangıç ve son tepesi çakışık olan ($v_1 = v_{n+1}$) bir yola "çevre" denir ve bu C_n ile gösterilir [1].

Bu tanıma göre C_n çevresinin tepe ve ayrıtlı sayısı n 'dir. Şekil 2.2'de C_3 çevresi görülmektedir.



Şekil 2.2 C_3 Çevresi

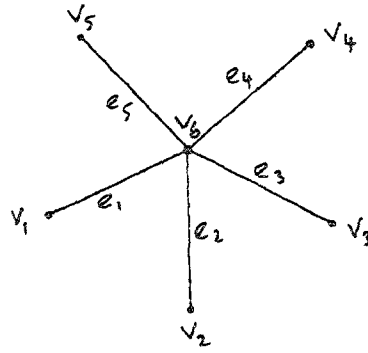
Tanım 2.3 Tam Graf : n tane farklı tepenin ikişer ikişer birleştirilmesiyle oluşturulan grafa "*n*-tepelili tam graf" denir ve K_n ile gösterilir [2]. Bu tanıma göre K_n 'nin $(n/2)$ tane ayrıtı vardır. Şekil 2.3 'te K_5 tam grafi görülmektedir.



Şekil 2.3 K_5 Tam Grafi

Tanım 2.4 İki Kümeli Graf : Aynı renkten iki tepe bir ayrıtıla bağlantılı olmamak üzere bir grafın tepeleri siyah ve beyaz ile boyanabiliyorsa, böyle grafa "*iki kümeli graf*" denir. Bir iki kümeli grafın her siyah tepesi, her beyaz tepeye bağlantılı fakat aynı renkten iki tepe bağlantılı değilse ve siyah tepe sayısı beyaz tepe sayısına eşitse, böyle bir grafa "*Tam İki Kümeli Graf*" denir ve $K_{n,n}$ ile gösterilir[2].

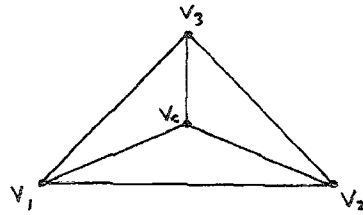
Bu tanıma göre, $K_{1,n}$ ile gösterilen tam iki kümeli grafa "*yıldız grafi*" denir ve bu $K_{1,n} = S_n$ ile gösterilir [11]. Şekil 2.4 'te $K_{1,5} = S_5$ yıldız grafi (ağacı) görülmektedir.



Şekil 2.4 S_5 Yıldız Ağacı

Tanım 2.5 Çark : $n \geq 3$ olmak üzere n uzunluklu (n tepeli) C_n çevresinin tüm tepeleri bu çevrenin içinde merkez adı verilen v_c tepesine birleştirilmesiyle oluşturulan grafa " n -parmaklı çark (tekerlek)" denir ve W_n şeklinde gösterilir [13].

Bu tanıma göre, W_n çarkı, C_n çevresi ile S_n yıldız ağacının birleşimidir. Yani $W_n = S_n \cup C_n$ 'dir. Bir W_n çarkı, $n+1$ tepeli ve $2n$ ayrıtıdır. Şekil 2.5 'te C_3 çevresi ile S_3 yıldız ağacının birleşiminden oluşan, W_3 çarkı görülmektedir.



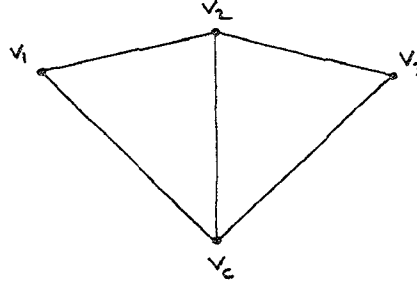
Şekil 2.5 W_3 Çarkı

Tanım 2.6 Yelpeze : $n \geq 2$ olmak üzere, P_{n-1} yolunun n tane tepesi merkez adı verilen v_c tepesine birleştirilerek elde edilen birleştirilmiş grafa " $yelpeze$ " denir ve F_n ile gösterilir [5].

Bu tanıma göre, F_n yelpazesinin $(n+1)$ sayıda tepesi ve $(2n-1)$ sayıda ayrıtı vardır. Bir F_n yelpazesi, P_{n-1} yolu ile S_n yıldız ağacının birleşiminden



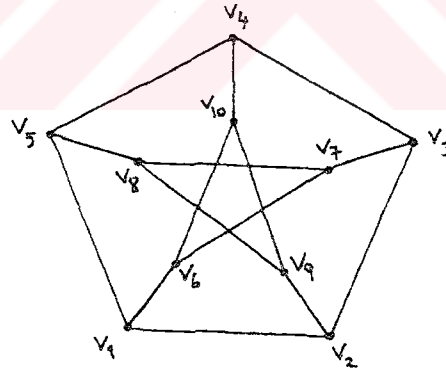
oluşmaktadır, yani, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ 'dir. Şekil 2.6 'da F_3 görülmektedir.



Şekil 2.6 F_3 Yelpazesi

Tanım 2.7 Petersen Graf : Tüm tepelerinin derecesi 3 olan birleştirilmiş graflara "Kübik Graflar" denir. Kübik grafların en iyi bilinen örneği petersen grafidir.

Genelleştirilmiş $P(n,m)$ Petersen grafi için, $1 < m < n/2$ olup, $n \geq 5$ 'tir. $n = 5$, $m = 2$ için , $P(5,2)$ Petersen grafi şekil 2.7 'de görülmektedir [12].



Şekil 2.7 $P(5,2)$ Petersen Grafi

Bir $P(n,m)$ Petersen grafi, $2n$ tepeli, $3n$ ayrıtlı birleştirilmiş graf olup, C_n dış çevresi ile C_n^* iç çevresinin karşılıklı tepelerinin birleştirilmesiyle oluşmaktadır.



3. KORDİYAL GRAFLAR

Tanım 3.1 Kordiyal Graf : Bir G grafının ikilik tepe numaralaması f ,

$$f: V(G) \rightarrow N = \{0,1\} \quad (3.1)$$

şeklinde olsun ve bu tepe numaralanmasının sebep olduğu ayrıt numaralaması $\bar{f}, \forall (u,v) \in E(G)$ için,

$$\bar{f}(\{u,v\}) = |f(u) - f(v)| \quad (3.2)$$

eşitliğiyle verilsin. Eğer,

$$|v_f(1) - v_f(0)| \leq 1 \quad (3.3)$$

$$|e_f(1) - e_f(0)| \leq 1 \quad (3.4)$$

koşulları sağlanıyorsa ; burada $v_f(i)$ ve $e_f(i)$ sırasıyla G grafının i ile numaralanmış tepelerinin ve ayrıtlarının sayısıdır; o zaman f numaralanmasına G grafının "*Kordiyal Numaralanması*" denir. Eğer G grafi bir Kordiyal Numaralanmaya imkan veriyorsa, bu grafa "*Kordiyal Graf*" denir [7].

Literatürde geçen bazı kordiyal graf tanımları : aşağıda veilmıştır.

Çok katlı ayrıtları ve bukleleri olmayan yönlendirilmemiş sonlu bir graf $G(V,E)$ olsun. Bu G grafın tepelerinin sayısı $|V| = n$ ve ayrıtlarının sayısı $|E| = m$ olsun.

Tanım 3.2 M-Kordiyal Graf : $E(G)$ ayrıtlar kümesinden bir $N = \{0,1\}$ kümesi üzerine bir f fonksiyonu G grafının bir ikilik numaralanması olsun ve $V(G)$ tepeler kümesinden bir $N = \{0,1\}$ kümesine bir fonksiyon da $\forall v \in V(G)$ için,

$$f(v) = \sum_{u, (u,v) \in E(G)} f(u,v) = 1 \text{ veya } 0 \pmod{2} \quad (3.5)$$



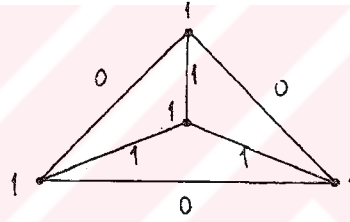
eşitliğiyle verilsin ve f ile tanımlansın. Böyle bir numaralama aşağıdaki koşulları sağlarsa, buna "*M-Kordiyal Numaralanma*" denir :

$$|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1 \quad (3.6)$$

$$\forall v \in V(G) \text{ için, } v_f(0) = n \text{ (veya } v_f(1) = n) \quad (3.7)$$

dir. Burada $v_f(i)$ ve $e_f(i)$, $i = 0,1$ olmak üzere, G grafinin sırasıyla i ile numaralanmış tepelerinin ve ayrıtlarının sayısıdır. Eğer, bir graf *M-Kordiyal Numaralanmaya* imkan veriyorsa, bu grafa "*M-Kordiyal Graf*" denir [5].

Yukarıda verilen Tanım 3.2'ye göre, $n = 3$ için W_3 çarkının *M-Kordiyal Numaralanması* Şekil 3.1'de görülmektedir.



Şekil 3.1 W_3 çarkı ve onun *M-Kordiyal Numaralanması*

Tanım 3.3 *A-Kordiyal Graf* : $E(G)$ ayrıtlar kümesinden bir $N = \{0,1\}$ kümesi üzerine f fonksiyonu G grafinin bir numaralanması olsun ve $V(G)$ tepeler kümesinden bir $N = \{0,1\}$ kümesine bir fonksiyon da $\forall v \in V(G)$ için,

$$f(v) = \sum f(u,v) \pmod{2} \quad (3.8)$$

$$\forall u, (u,v) \in E(G)$$

eşitliğiyle verilip, f ile tanımlansın. Böyle bir numaralama aşağıdaki koşulları sağlarsa, buna "*A-Kordiyal Numaralanma*" denir :

$$|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1 \quad (3.9)$$

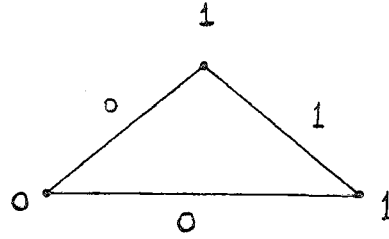
$$v_f(0) \neq 0 \text{ veya } v_f(1) \neq 0 \quad (3.10)$$



dır. Burada ; $i = 0,1$ olmak üzere, $v_f(i)$ ve $e_f(i)$ sırasıyla G grafinin i ile numaralanmış tepelerinin ve ayrıtlarının sayısıdır.

Eğer, bir graf A-Kordiyal Numaralanmaya imkan veriyorsa, böyle bir grafa "*A-Kordiyal Graf*" denir [13].

Yukarıda verilen Tanım 3.3'e göre, $n = 3$ için, K_3 tam grafinin A-Kordiyal Numaralanması Şekil 3.2 'de görülmektedir.



Şekil 3.2 K_3 Tam Grafi ve onun A-Kordiyal Numaralanması

Tanım 3.4 E_k -Kordiyal Graf : Bir $f : V(G) \rightarrow \{0,1,\dots,k-1\}$ numaralanması, $i \neq j$, $i,j = 0,1,\dots,k-1$, için,

$$|v_f(i) - v_f(j)| \leq 1 \quad (3.11)$$

ve

$$|e_f(i) - e_f(j)| \leq 1 \quad (3.12)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, bu f numaralanmasına "*k- Adil Nuamaralama*" denir. Burada $x \in \{0,1,\dots,k-1\}$ için, $v_f(x)$ ve $e_f(x)$ sırasıyla G grafinin x numaralı tepelerinin ve ayrıtlarının sayısıdır ve f tepe numaralanmasının sebep olduğu f ayrıt numaralanması,

$$\bar{f}(u,v) = |f(u) - f(v)| \quad (3.13)$$

eşitliğiyle verilir.

Burada tanımlanan k -adil numaralama ile grafların ayrıt-graceful numaralamasını birleştiren I.Cahit [6] buna " *E_k -Kordiyal Numaralama*" adı verilerek yeni bir graf numaralamasını aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$f : E(G) \rightarrow \{0,1,2,\dots,k-1\} \quad (3.14)$$



olmak üzere, $G(V,E)$ grafinin bir ayrıt numaralaması f olsun ve f ayrıt numaralamasının sebep olduğu tepe numaralaması,

$$f(v) = \sum_{\forall u} f(u,v)(\text{mod } k) \quad (3.15)$$

olarak verilsin, burada $v \in V$ ve $\{u,v\} \in E$ dir. $i \neq j$, $i,j = 0,1,2,\dots,k-1$ için,

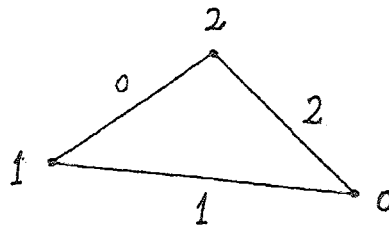
$$|e_f(i) - e_f(j)| \leq 1 \quad (3.16)$$

$$|v_f(i) - v_f(j)| \leq 1 \quad (3.17)$$

koşulları sağlanırsa, bunları sağlayan f ye G 'nin bir " E_k -Kordiyal Numaralaması" denir, burada $e_f(i)$, $e_f(j)$ sırasıyla i ve j ile numaralanmış ayrıtların sayısını ve $v_f(i)$, $v_f(j)$ sırayla i ve j ile numaralanmış tepelerin sayısını gösterir.

Eğer, bir G grafi bir E_k -Kordiyal Numaralamaya imkan veriyorsa, böyle bir grafa " E_k -Kordiyal Grafi" denir [6].

Bu tanıma göre, $k = 3$ için, K_3 tam grafinin E_3 -Kordiyal Numaralanması Şekil 3.3 'te görülmektedir.



Şekil 3.3 K_3 Tam Grafi ve onun E_3 -Kordiyal Numaralanması

Tanım 3.5 S-Kordiyal Graf : $f : E(G) \rightarrow \{-1,+1\}$ olsun. G nin ayrıt numaralamasının sebep olduğu tepe numaralaması,

$$f(v) = \prod_{\forall u, (u,v) \in E(G)} f(u,v) \quad (3.18)$$



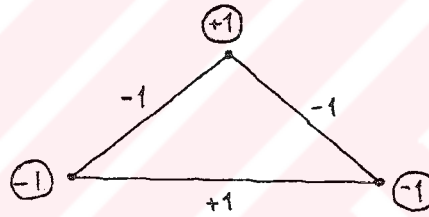
kuralına göre tanımlansın. Burada, $\forall v \in V(G)$ için, \prod sembolü tepesine bağlantılı olan ayrıtların üzerindeki sayıların çarpımını ifade eder. Eğer, v tepesine bağlantılı ayrıtlar üzerindeki -1'lerin sayısı çift ise, $f(v) = +1$, tek ise, $f(v) = -1$ 'dir. Eğer,

$$|v_f(+1) - v_f(-1)| \leq 1 \quad (3.19)$$

$$|e_f(+1) - e_f(-1)| \leq 1 \quad (3.20)$$

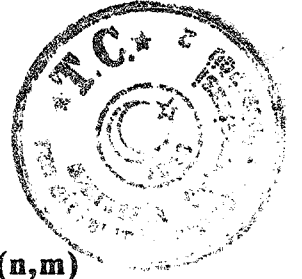
koşulları sağlanırsa, bu grafa "*İşaret Kordiyal Graf veya S-Kordiyal Graf*" denir [7].

Yukarıda verilen Tanım 3.5'e göre, $n = 3$ için K_3 tam grafinin S-Kordiyal Numaralanması Şekil 3.4 'te görülmektedir.



Şekil 3.4 K_3 Tam Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması

I.Cahit, "n tepeli bir birleştirilmiş grafin S-kordiyal olması için gerek ve yeter koşulun $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ " olduğunun ispatını okuyucuya bırakmıştır [7]. I.Cahit birleştirilmiş graflar sınıfına giren, tam grafların, tam iki kümeli grafların, çevrelerin, çarkların S-Kordiyalitesini incelerken, birleştirilmiş her grafin ayrıtlarını -1 ve +1 ile numaraladı. Buradan, W_n çarkının S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşulun $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ olduğunu ispatladı. Bu ispattan farklı bir yaklaşımla Teorem 4.1'in ispatı bundan sonraki bölümde ele alınmıştır.



4. W_n ÇARKLARININ, F_n YELPAZELERİNİN, $P(n,m)$ PETERSEN GRAFLARININ S-KORDİYAL, (+1)-KORDİYAL VE (-1)-KORDİYAL NUMARALANMASI

Teorem 4.1 Bir W_n çarkının S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul, $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat :

Gereklilik : " W_n -çarkı S-Kordiyal ise $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ' tür" gereklilik koşuludur. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu kullanılarak ispatlanır. Yani, $n \equiv 1 \pmod{4}$ varsayılır. Bu varsayıma göre, $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) tek sayıdır. Tanım 2.5'e göre, $W_n = C_n \cup S_n$ olduğundan S_n yıldız ağacının $n = 4k + 1 =$ tek sayıda dalı vardır. Bu dallar pozitif dönme yönünde sol alt daldan başlayarak,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda -1 ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda +1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda -1 ile $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda +1 çarpılırsa,

$$f(v_c) = +1$$

elde edilir. W_n çarkını oluşturan C_n çevresinin $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) tek sayıda tepesi ve $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) tek sayıda ayrıtı vardır. C_n çevresinin $n = 4k + 1 =$ tek sayıdaki ayrıtları pozitif dönme yönünde alt ayrıttan başlayarak,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, C_n nin $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda +1 ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda -1 ile numaralı tepesi olduğu görülecektir. Buna göre, v_c merkez tepesinin de numarası +1 olduğuna göre, $n \equiv 1 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan W_n çarkları için,



$$v_f(-1) = \lfloor n/2 \rfloor = \text{çift}$$

$$v_f(+1) = \lceil n/2 \rceil + 1 = \text{çift}$$

olup

$$v_f(+1) = v_f(-1) + 2$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik Tanım 3.5 'teki (3.19) koşulunun sağlanmadığını gösterir. O halde, $n \equiv 1 \pmod{4}$ için W_n çarkları S-Kordiyal değildir. Bu durum, W_n nin S-Kordiyal varsayılması ile çelişir. Böylece, W_n çarkı S-Kordiyal ise, $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ 'tür. Burada, $\lfloor n/2 \rfloor$, $n/2$ den daha küçük olan en büyük tamsayıdır. $\lceil n/2 \rceil$, $n/2$ den daha büyük olan en küçük tamsayıdır.

Yeterlik : " $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, W_n çarkı S-Kordiyaldir" yeterlilik koşuludur. Bu durumda $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 0,2,3 \pmod{4}$ 'tür.

a) $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıdır. Tanım 3.5'e göre, $W_n = C_n \cup S_n$ olduğundan, S_n yıldız ağacının $n = 4k =$ çift sayıda dalı vardır. Bu dallar pozitif dönme yönünde sol alt daldan başlayarak,

$$-1, +1, -1, +1 \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n nin $n/2 =$ çift sayıda $+1$ ile ve $n/2 =$ çift sayıda -1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $n/2 =$ çift sayıda -1 ile $n/2 =$ çift sayıda $+1$ çarpılırsa,

$$f(v_c) = +1$$

elde edilir. W_n çarkını oluşturan C_n çerçevesinin $n = 4k =$ çift sayıda tepesi ve ayrıtı vardır. C_n çevresinin $n = 4k =$ çift sayıdaki ayrıtları pozitif dönme yönünde alt ayrittan başlayarak,

$$-1, +1, -1, +1 \dots$$



sırası ile numaralandığında, C_n nin $n/2 = \text{çift sayıda} +1$ ile ve -1 ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. Ayrıca, C_n nin $n/2 = \text{çift sayıda} +1$ ile ve -1 ile numaralı tepesi vardır. Böylece, $n \equiv 0 \pmod{4}$ 'ü sağlayan W_n çarkları için,

$$e_f(-1) = e_f(+1) = n$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.20) koşulunun sağlanacağını gösterir. Bundan başka, v_c merkez tepesinin numarası $+1$ olduğundan, $n \equiv 0 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan W_n çarkları için,

$$v_f(-1) = n/2 = \text{çift}$$

$$v_f(+1) = n/2 + 1 = \text{tek}$$

olup

$$v_f(+1) = v_f(-1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.19) koşulunun sağlanacağını gösterir. Buradan, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, W_n çarkı S-Kordiyaldir.

b) $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$) çift sayıdır. Tanım 3.5'e göre, $W_n = C_n \cup S_n$ olduğundan S_n yıldız ağacının $n = 4k + 2 = \text{çift sayıda}$ dalı vardır. Bu dallar pozitif dönme yönünde sol alt daldan başlayarak,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n/2 = \text{tek sayıda} +1$ ile ve -1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki tek sayıdaki -1 ile, tek sayıdaki $+1$ çarpılırsa,

$$f(v_c) = -1$$

elde edilir. W_n çarkını oluşturan C_n çevresinin $n = 4k + 2 = \text{çift sayıda}$ tepesi ve ayrıtı vardır. C_n çevresinin $n = 4k + 2 = \text{çift sayıdaki}$ ayrıtları pozitif dönme yönünde alt ayrıttan başlayarak,



-1, +1, -1, +1, ...

sırası ile numaralandığında, C_n' nin $n/2 = \text{tek}$ sayıda +1 ile ve -1 ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. Ayrıca, C_n' nin $n/2 = \text{tek}$ sayıda +1 ile ve -1 ile numaralı tepesi vardır. Böylece, $n \equiv 2 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan W_n çarkları için,

$$e_f(-1) = e_f(+1) = n$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.20) koşulunun sağlanacağını gösterir. Bundan başka, v_c merkez tepesinin numarası -1 olduğundan, $n \equiv 2 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan W_n çarkları için,

$$\begin{aligned} v_f(-1) &= n/2 + 1 = \text{çift} \\ v_f(+1) &= n/2 = \text{tek} \end{aligned}$$

olup

$$v_f(-1) = v_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.19) koşulunun sağlanacağını gösterir. Buradan, $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, W_n çarkı S-Kordiyaldır.

c) $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) tek sayıdır. Tanım 3.5'e göre, $W_n = C_n \cup S_n$ olduğundan S_n yıldız ağacının $n = 4k - 1 = \text{tek}$ sayıda dalı vardır. Bu dallar pozitif dönme yönünde sol alt daldan başlayarak,

+1, -1, +1, -1, ...

sırası ile numaralandığında, S_n' nin $\lfloor n/2 \rfloor = \text{tek}$ sayıda -1 ile $\lceil n/2 \rceil = \text{çift}$ sayıda +1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $\lfloor n/2 \rfloor = \text{tek}$ sayıdaki -1 ile, $\lceil n/2 \rceil = \text{çift}$ sayıdaki +1 çarpılırsa,

$$f(v_c) = -1$$



elde edilir. W_n çarkını oluşturan C_n çevresinin $n = 4k - 1 =$ tek sayıda tepesi ve ayrıtı vardır. C_n 'nin $n = 4k - 1 =$ tek sayıdaki ayrıtları pozitif dönme yönünde,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, C_n 'nin $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda $+1$ ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda -1 ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. Ayrıca, C_n 'nin $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda -1 ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda $+1$ ile numaralı tepesi vardır. Böylece, $n \equiv 3 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan W_n çarkları için,

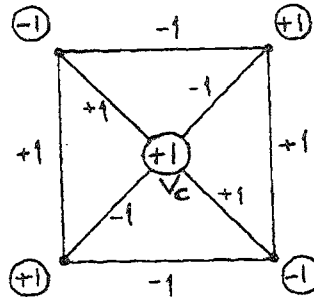
$$e_f(-1) = e_f(+1) = n$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.20) koşulunun sağlanacağını gösterir. Bundan başka, v_c merkez tepesinin numarası -1 olduğundan, $n \equiv 3 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan W_n çarkları için,

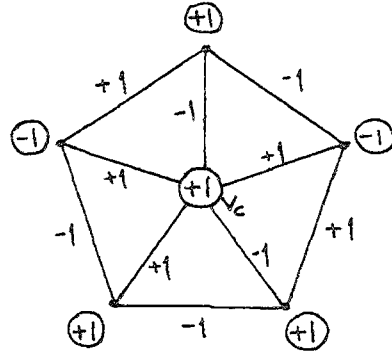
$$v_f(-1) = v_f(+1) = \lceil n/2 \rceil$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.19) koşulunun sağlanacağını gösterir. Buradan, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, W_n çarkı S-Kordiyaldır. Böylece, $n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$, yani $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, W_n çarkı S-Kordiyaldır.

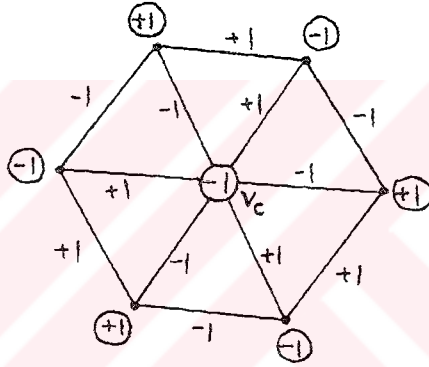
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.1'e göre, $n = 4, 5, 6, 7$ için sırasıyla, W_4, W_5, W_6, W_7 , çarklarının S-Kordiyal Numaralanması Şekil 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4'te görülmektedir.



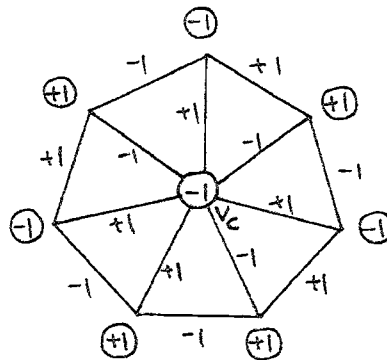
Şekil 4.1 W_4 çarkı ve onun S-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.2 W_5 çarkı ve onun S-Kordiyal olmayan Numaralanması



Şekil 4.3 W_6 çarkı ve onun S-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.4 W_7 çarkı ve onun S-Kordiyal Numaralanması



Tanım 4.1 (-1)-Kordiyal ve (+1)-Kordiyal Graf : n tepeli ve m ayrıtlı bir graf G olsun. $f : E(G) \rightarrow \{-1, +1\}$ ayrıt numaralamasının sebep olduğu tepe numaralaması Tanım 3.5 deki gibi olmak üzere, eğer,

$$v_f(+1) = n \quad (4.1)$$

ve

$$|e_f(+1) - e_f(-1)| \leq 1 \quad (4.2)$$

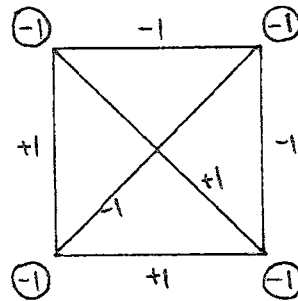
koşulları sağlanırsa, böyle bir G grafına "*(+1)-Kordiyal Graf*" denir. Eğer,

$$v_f(-1) = n \quad (4.3)$$

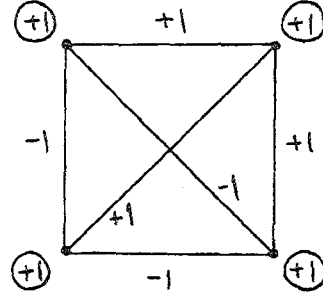
ve

$$|e_f(+1) - e_f(-1)| \leq 1 \quad (4.4)$$

koşulları sağlanırsa, böyle bir G grafına "*(-1)-Kordiyal Graf*" denir. Bu tanıma göre, $n=4$ için, K_4 tam grafının (-1) ve (+1)-Kordiyal numaralanması sırasıyla Şekil 4.5 ve 4.6 ' da görülmektedir.



Şekil 4.5 K_4 Tam Grafı ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.6 K_4 Tam Grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması

Teorem 4.2 $\forall n \geq 3$ için W_n çarkının (-1)-Kordiyal olması için, gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat :

Gereklilik : " $n \geq 3$ için W_n çarkı (-1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ tür" gereklilik koşuludur. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu kullanılarak ispatlanır. Yani, $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ varsayılır. Bu varsayıma göre, $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$), $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise $n = 4k$ ($k \geq 1$) olup, her iki durumda da n çift sayıdır. Bu durumda, $W_n = C_n \cup S_n$ çarkını oluşturan S_n yıldız ağacının dalları pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, v_c merkez tepesinin numarası,

$$f(v_c) = +1$$

olur. W_n çarkını oluşturan C_n çevresinin ayrıtları pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralansın. C_n çevresinin her bir tepesine üç tane ayrıtlı bağlantılı olup, bunlardan bir tanesi, v_c merkez tepesiyle bağlantılı olduğundan -1 ile numaralanır. C_n çevresinin her bir tepesine bağlantılı üç tane ayrıtıdan ikisi +1 ve biri de -1 ile numaralandığından, $\forall v_i \in C_n$



($i = 1, 2, \dots, n$) için, $f(v_i) = -1$ olur. W_n çarkının böyle bir ayrıt numaralamasına göre,

$$e_f(+1) = e_f(-1) = n$$

olacağından, Tanım 4.1'deki (4.4) koşulu sağlanır. Ancak, v_c merkez tepesi +1 ile numaralandığından, $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan, $n + 1$ tepeli W_n çarkı için,

$$v_f(-1) = n + 1$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu sağlanmaz. Bu durumda, $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ denkleği sağlayan, $n = 4k$ ve $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$) için W_n çarkları (-1)-Kordiyal olamazlar. Bu da, W_n 'nin (-1)-Kordiyal varsayılması ile çelişir. O halde, W_n -çarkı (-1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ 'tür.

Yeterlik : " $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ ise, W_n çarkı (-1)-Kordiyaldır" yeterlilik koşuludur. Burada, $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$ olur. Buna göre $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) ve $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n =$ tek sayıdır. Bu durumda, $W_n = C_n \cup S_n$ çarkını oluşturan S_n yıldız ağacının dalları pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

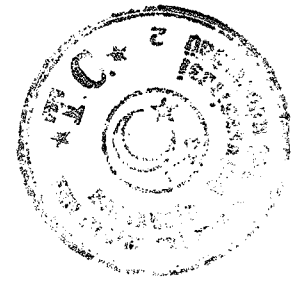
sırası ile numaralanırsa, v_c merkez tepesinin numarası,

$$f(v_c) = -1$$

olur. W_n çarkını oluşturan C_n çevresinin ayrıtları pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralansın. Bu durumda, C_n 'nin her bir tepesine üç tane ayrıt bağlantılı olup, bunlardan bir tanesi, v_c merkez tepesiyle bağlantılı olduğundan -1 ile numaralanır. C_n çevresinin her bir tepesine bağlantılı üç tane ayrıttan ikisi +1 ve biri de -1 ile numaralandığından, $\forall v_i \in C_n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) için,



$$f(v_1) = -1$$

olur. W_n çarkının böyle bir ayrıt numaralmasına göre,

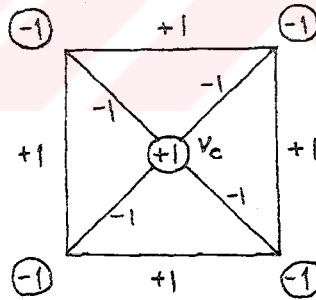
$$ef(+1) = ef(-1) = n$$

olacağından, Tanım 4.1 'deki (4.4) koşulu sağlanır. Aynı zamanda, $n+1$ tepeli W_n çarkı için,

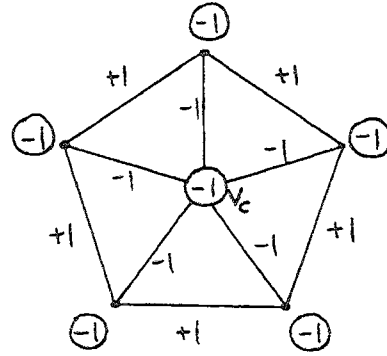
$$vf(-1) = n + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1 'deki (4.3) koşulunun sağlandığını gösterir. Böylece, $n \geq 3$ için, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan $n = 4k + 1$ ve $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) için, W_n çarkları (-1) -Kordiyaldir. Yani, $n \not\equiv 0,2 \pmod{4}$ ise, $n \geq 3$ için W_n çarkı (-1) -Kordiyaldir.

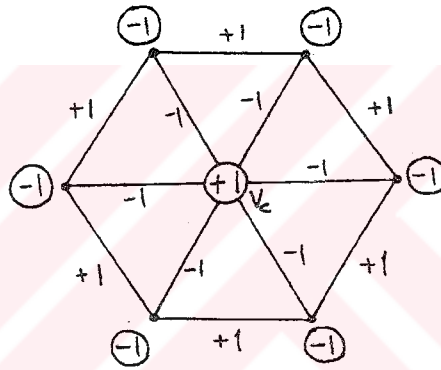
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.2 'ye göre, $n = 4,5,6,7$ için sırasıyla W_4 , W_5 , W_6 , W_7 çarklarının (-1) -Kordiyal olan ve olmayan numaralanması Şekil 4.7, 4.8, 4.9 ve 4.10' da görülmektedir.



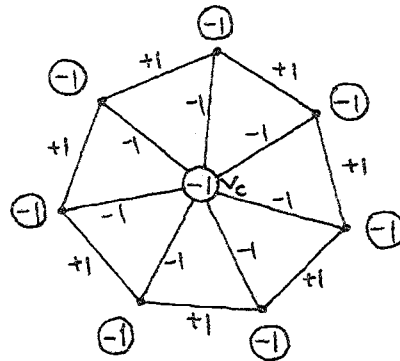
Şekil 4.7 W_4 çarkı ve onun (-1) -Kordiyal Olmayan Numaralanması



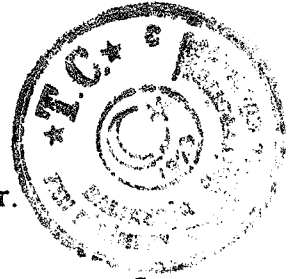
Şekil 4.8 W_5 çarkı ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.9 W_6 çarkı ve onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.10 W_7 çarkı ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması



Teorem 4.3 $\forall n \geq 3$ için, W_n çarkı (+1)-Kordiyaldir.

İspat : $\forall n \geq 3$ için, $W_n = C_n \cup S_n$ çarkını oluşturan S_n yıldız ağacının tüm dalları pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralanırsa, v_c merkez tepesinin numarası,

$$f(v_c) = +1$$

olur. W_n çarkını oluşturan C_n çevresinin ayrıtları pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile numaralansın. Bu durumda, C_n çevresinin her bir tepesine üç tane ayrıtlı bağlantılı olup, bunlardan bir tanesi v_c merkez tepesiyle bağlantılı olduğundan +1 ile numaralanır. C_n 'nin her bir tepesine bağlantılı üç tane ayrıttan ikisi -1 ile ve biri de +1 ile numaralandığından, $\forall v_i \in C_n$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ için,

$$f(v_i) = +1$$

elde edilir. W_n 'nin böyle bir ayrıtlı numaralamasına göre,

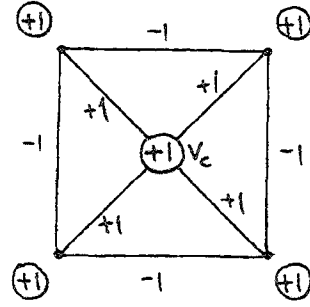
$$e_f(+1) = e_f(-1) = n$$

olacağından, Tanım 4.1'deki (4.2) koşulu sağlanır. Aynı zamanda, $n + 1$ tepeli W_n çarkı için,

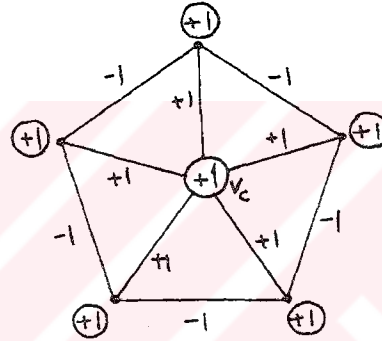
$$v_f(+1) = n + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.1) koşulunununda sağlandığını gösterir. Böylece, $\forall n \geq 3$ için, W_n çarkı (+1)-Kordiyaldir.

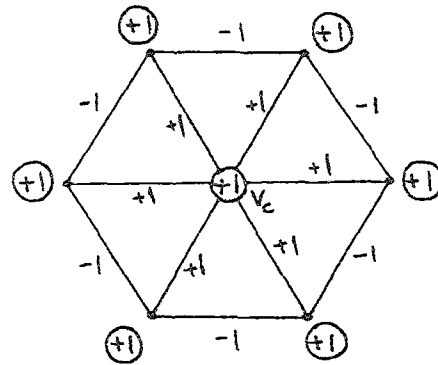
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.3'e göre, $n = 4, 5, 6, 7$ için, sırasıyla W_4, W_5, W_6, W_7 çarklarının (+1)-Kordiyal olan numaralanmaları Şekil 4.11, 4.12, 4.13 ve 4.14'te görülmektedir.



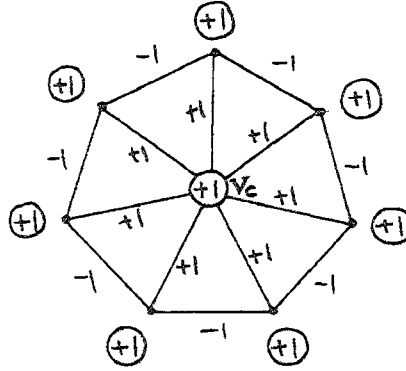
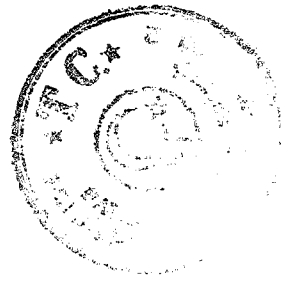
Şekil 4.11 W_4 çarkı ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.12 W_5 çarkı ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.13 W_6 çarkı ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.14 W_7 çarkı ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması

Teorem 4.4 $\forall n \geq 2$ için, F_n yelpazesinin S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat :

Gereklik : " $n \geq 2$ için, F_n yelpazesi S-Kordiyal ise, $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ " tür" gereklilik koşuludur. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu kullanılarak ispatlanır. Yani, $n \equiv 1 \pmod{4}$ varsayılır. Bu varsayıma göre, $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) tek sayıdır. Tanım 2.6'ya göre, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının $n = 4k + 1 =$ tek sayıda dalı vardır. Bu dallar soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n nin $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda -1 ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda +1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda -1 ile, $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda +1 çarpılırsa,

$$f(v_c) = +1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) tek sayıda tepesi ve $n - 1 = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıda ayrıtı vardır. P_{n-1} yolunun $n - 1 = 4k =$ çift sayıdaki ayrıtları soldan sağa doğru,



-1, +1, -1, +1, ...

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} ' in $\lceil n/2 \rceil = \text{tek sayıda } +1$ ile ve $\lfloor n/2 \rfloor = \text{çift sayıda } -1$ ile numaralı tepesi olduğu görülecektir. Buna göre, $n \equiv 1 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan F_n yelpazeleri için,

$$\begin{aligned} e_f(-1) &= n-1 \\ e_f(+1) &= n \text{ olup,} \\ e_f(+1) &= e_f(-1) + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.20) koşulunun sağlandığını gösterir. Ancak, v_c merkez tepesi +1 ile numaralandığından, $n \equiv 1 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan $(n+1)$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(+1) = \lceil n/2 \rceil + 1 = \text{çift}$$

$$v_f(-1) = \lfloor n/2 \rfloor = \text{çift}$$

olup,

$$v_f(+1) = v_f(-1) + 2$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.19) koşulunun sağlanmadığını gösterir. O halde, $n \equiv 1 \pmod{4}$ için, F_n yelpazesi S-Kordiyal değildir. Bu durum F_n yelpazesinin S-Kordiyal varsayılması ile çelişir. Böylece, F_n yelpazesi S-Kordiyal ise, $n \equiv 1 \pmod{4}$ ' tür. Burada,

$\lfloor n/2 \rfloor$, $n/2$ den küçük olan en büyük tamsayı ve $\lceil n/2 \rceil$, $n/2$ den daha büyük olan en küçük tamsayıdır.

Yeterlik : " $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için F_n yelpazesi, S-Kordiyaldir" yeterlik koşuludur. Buna göre, $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 0,2,3 \pmod{4}$ ' tür.

a) $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıdır. $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının $n = 4k = \text{çift sayıda}$ dalı vardır. Bu dallar soldan sağa doğru,

+1, -1, +1, -1, ...



sırası ile numaralandığında, $n/2 = \text{çift sayıda } +1 \text{ ve } -1 \text{ ile numaralı dalının}$ olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesi için,

$$f(v_c) = +1$$

olur. F_n 'yi oluşturan P_{n-1} yolunun $n = 4k = \text{çift sayıda tepesi ve}$ $n - 1 = 4k - 1 = \text{tek sayıda ayrıtı vardır. } P_{n-1}$ 'in $n - 1 = \text{tek sayıdaki}$ ayrıtları soldan sağa doğru,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n/2 = \text{çift sayıda tepesi } +1 \text{ ve çift}$ sayıda tepesi -1 ile numaralanacaktır. Ayrıca, P_{n-1} 'in $(n/2) - 1 = \text{tek}$ sayıda $+1$ ile ve $n/2 = \text{çift sayıda } -1$ ile numaralı ayrıtı vardır. Böylece, $n \equiv 0 \pmod{4}$ 'ü sağlayan F_n yelpazesi için,

$$e_f(-1) = n = \text{çift}$$

$$e_f(+1) = n - 1 = \text{tek}$$

olup,

$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.20) koşulunun sağlanacağını gösterir. Bundan başka, v_c merkez tepesinin numarası $+1$ olduğundan, $n \equiv 0 \pmod{4}$ 'ü sağlayan F_n yelpazesi için,

$$v_f(+1) = n/2 + 1 = \text{tek}$$

$$v_f(-1) = n/2 = \text{çift}$$

olup,

$$v_f(+1) = v_f(-1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.19) koşulunun sağlanacağını gösterir. Buradan, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için F_n yelpazesi,



S-Kordiyaldır.

b) $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k - 2$ ($k \geq 1$) çift sayıdır. $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının $n = 4k - 2 =$ çift sayıda dalı vardır. Bu dallar soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n/2 = 2k-1$ tek sayıda $+1$ ile ve $n/2 = 2k-1$ tek sayıda -1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki tek sayıda -1 ile, tek sayıdaki $+1$ çarpılırsa

$$f(v_f) = -1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun $n = 4k - 2 =$ çift sayıda tepesi ve $n - 1 = 4k - 3$ tek sayıda ayrıtı vardır. P_{n-1} yolunun $n - 1 =$ tek sayıdaki ayrıtları soldan sağa doğru,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n/2 =$ tek sayıda -1 ile ve $(n/2) - 1 =$ çift sayıda $+1$ ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. Ayrıca, P_{n-1} 'in $n/2 =$ tek sayıda hem $+1$ ile, hem de -1 ile numaralı tepesi vardır. Böylece, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan F_n yelpazesi için,

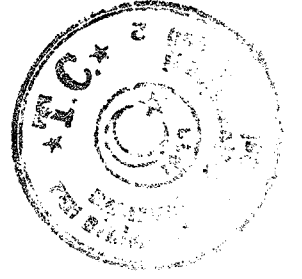
$$e_f(-1) = n$$

$$e_f(+1) = n-1$$

olup,

$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5' teki (3.20) koşulunun sağlandığını gösterir. Bundan başka, v_c merkez tepesinin numarası -1 olduğundan, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $(n+1)$ tepeli F_n yelpazesi için,



$$v_f(-1) = n/2 + 1$$

$$v_f(+1) = n/2$$

olup,

$$v_f(-1) = v_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik Tanım 3.5 'teki (3.19) koşulunun sağlanacağını gösterir. Buradan, $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için, F_n yelpazesi, S-Kordiyaldir.

c) $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) tek sayıdır. $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının $n = 4k - 1 =$ tek sayıda dalı vardır. Bu yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda -1 ile, $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda $+1$ ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Böylece, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda -1 ile, $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda $+1$ çarpılırsa,

$$f(v_c) = -1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun $n = 4k - 1 =$ tek sayıda tepesi ve $n - 1 = 4k - 2 =$ çift sayıda ayrıtı vardır. P_{n-1} 'in $n - 1 =$ çift sayıdaki ayrıtları soldan sağa doğru,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $(n - 1)/2 =$ tek sayıda hem -1 ile, hem de $+1$ ile numaralı ayrıtlarının olduğu görülecektir. Ayrıca, P_{n-1} 'in $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda $+1$ ile, $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda -1 ile numaralı tepesi vardır. Böylece, $n \equiv 3 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan F_n yelpazesi için,

$$e_f(+1) = n$$



$$e_f(-1) = n-1$$

olup,

$$e_f(+1) = e_f(-1) + 1$$

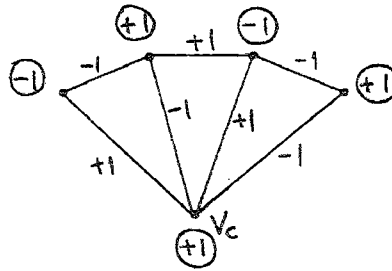
elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.20) koşulunun sağlandığını gösterir. Bundan başka, v_c merkez tepesinin numarası -1 olduğundan $n \equiv 3 \pmod{4}$ deklüğünü sağlayan $(n+1)$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(+1) = v_f(-1) = \lceil n/2 \rceil = \text{çift}$$

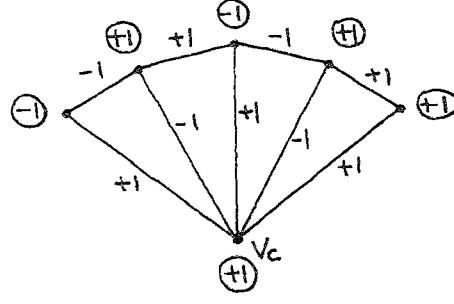
elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.19) koşulunun sağlanacağını gösterir. Buradan, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için, F_n yelpazeleri S - Kordiyaldır.

Böylece, $n \equiv 0,2,3 \pmod{4}$, yani $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için, F_n yelpazesi S - Kordiyaldır.

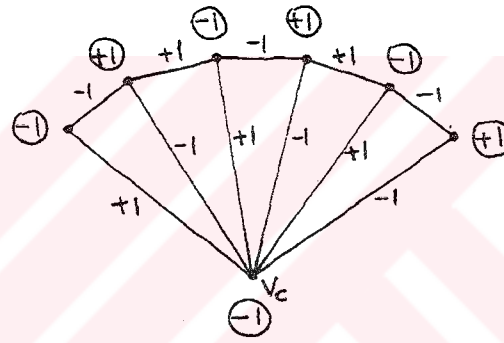
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.4'e göre $n = 4,5,6,7$ için sırası ile F_4, F_5, F_6, F_7 yelpazelerinin S - Kordiyal olan ve olmayan numaralanması Şekil 4.15, 4.16, 4.17, 4.18'de görülmektedir.



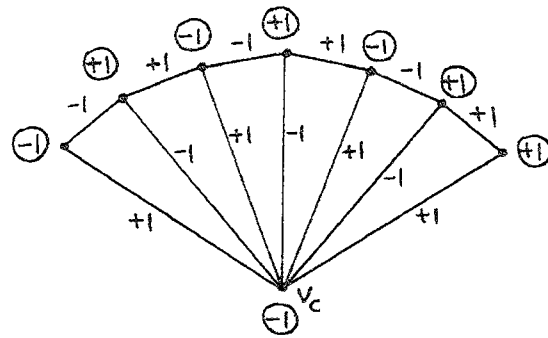
Şekil 4.15 F_4 Yelpazesi ve onun S - Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.17 F_5 Yelpazesi ve onun S - Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.16 F_6 yelpazesi ve onun S - Kordiyal olmayan Numaralanması



Şekil 4.18 F_7 yelpazesi ve onun S - Kordiyal Numaralanması



Teorem 4.5 $\forall n \geq 2$ için, F_n yelpazesinin (-1) - Kordiyal olması için, gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat:

Gereklilik: " $n \geq 2$ için, F_n yelpazesi, (-1) -Kordiyal ise, $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ 'tür." gereklik koşuludur. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu kullanılarak ispatlanır. Yani, $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ varsayılır. Bu varsayıma göre,

$$n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise, } n \equiv 4k \text{ (} k \geq 1 \text{)}$$

$$n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise, } n \equiv 4k - 2 \text{ (} k \geq 1 \text{)}$$

olup, her iki durumda da n çift sayıdır.

a) $n \equiv 0 \pmod{4}$ durumunda, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n/2 =$ çift sayıda $+1$ ile ve $n/2 =$ çift sayıda -1 ile numaralı dalının olduğu görülecektir. Buradan v_c merkez tepesine bağlantılı dallar üzerindeki $n/2 =$ çift sayıdaki -1 ile, $n/2 =$ çift sayıdaki $+1$ çarpılırsa,

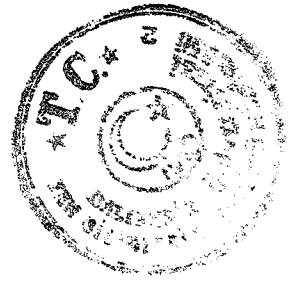
$$f(v_c) = +1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} yolunun $n - 1$ tek sayıdaki ayrıtlarından, $\lfloor (n-1)/2 \rfloor =$ tek sayıda $+1$ ile, $\lceil (n-1)/2 \rceil$ çift sayıda ayrıtı -1 ile numaralanmış olacaktır. Buna göre, P_{n-1} yolunun $n =$ çift sayıdaki tepesi, $\forall v_i \in P_{n-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = -1$$



olur. F_n yelpazesinin böylr bir ayrıt numaralanmasına göre,

$$e_f(-1) = n = \text{çift}$$

$$e_f(+1) = n - 1 = \text{tek}$$

olup,

$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ancak, v_c merkez tepesi +1 ile numaralandığından, $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(-1) = n + 1$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu sağlanmaz. Bu durumda, $n \equiv 0 \pmod{4}$ denkliğini sağlayan, $n = 4k$ ($k \geq 1$) için F_n yelpazesi (-1)-Kordiyal olamaz. Bu durum, F_n 'nin (-1)-Kordiyal varsayılması ile çelişir. O halde, F_n yelpazesi (-1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ ' tür.

b) $n \equiv 2 \pmod{4}$ durumunda, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n/2 = \text{tek}$ sayıda -1 ile ve $n/2 = \text{tek}$ sayıda +1 ile numaralı dalının olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesine bağlantılı dallar üzerindeki $n/2 = \text{tek}$ sayıda -1 ile ve $n/2 = \text{tek}$ sayıda +1 çarpılırsa,

$$f(v_c) = -1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$



sırası ile numaralandığında, P_{n-1} ' in $n-1 = 4k-3$ ($k \geq 1$) tek sayıdaki ayrıklarından $\lfloor (n-1)/2 \rfloor =$ çift sayıda -1 ile ve $\lceil (n-1)/2 \rceil =$ tek sayıda $+1$ ile numaralı ayrığı olduğu görülecektir. Bu ayrıt numaralamasına göre,

$$e_f(-1) = n - 1$$

$$e_f(+1) = n$$

olup,

$$e_f(+1) = e_f(-1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ancak, F_n yelpazesinin bu ayrıt numaralamasına göre, P_{n-1} yolunun $n = 4k - 2$ ($k \geq 1$) çift sayıdaki tepelerinden biri v_c merkez tepesiyle bağlantılı olduğundan $+1$ ile numaralanacaktır. Yani,

$\forall v_i \in P_{n-1}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$) için,

$$f(v_i) = -1$$

iken, $\exists v_i \in P_{n-1}$, ($i = n$) için,

$$f(v_i) = +1$$

olacaktır. Bu durumda, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan, $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(-1) = n + 1$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu sağlanmaz. Böylece, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $n = 4k-2$ ($k \geq 1$) için F_n yelpazesi, (-1) - Kordiyal olamaz. Bu da, F_n 'nin (-1) - Kordiyal varsayılması ile çelişir. O halde, F_n yelpazesi, (-1) - Kordiyal ise $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ 'tür.

a) ve b) durumlarına göre, $n \geq 2$ için, F_n yelpazesi (-1) - Kordiyal ise, $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ 'tür.



Yeterlilik: " $n \not\equiv 0,2 \pmod{4}$ ise, F_n yelpazesi (-1) - Kordiyaldir." yeterlilik koşuludur. Burada, $n \not\equiv 0,2 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ olur. Buna göre, $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k+1$ ($k \geq 1$) ve, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k-1$ ($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n =$ tek sayıdır. Buna göre,

a) $n \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$-1, +1, -1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n nin $n =$ tek sayıdaki dallarından $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda -1 ile ve $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda $+1$ ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda -1 ile, $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda $+1$ ile çarpılırsa,

$$f(v_c) = -1$$

olur. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n-1 = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıdaki ayrıtlardan, $(n-1)/2 =$ çift sayıda -1 ile ve $(n-1)/2 =$ çift sayıda $+1$ ile numaralı ayrıtları olduğu görülecektir. Böyle bir ayrıt numaralamasına göre, F_n yelpazesi için,

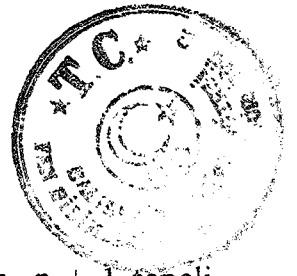
$$e_f(-1) = n$$

$$e_f(+1) = n - 1$$

olup,

$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ayrıca, $\forall v_i \in P_{n-1}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,



$$f(v_i) = -1$$

olur. Böylece, v_c merkez tepesi de -1 ile numaralandığından, $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(-1) = n + 1$$

şekline dönüşen, Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu sağlanır. Buradan, $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, F_n yelpazesi (-1) -Kordiyaldir.

b) $n \equiv 3 \pmod{4}$ durumunda $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) tek sayıda dalından $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda -1 ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda $+1$ ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesine bağlantılı olan dallar üzerindeki $\lfloor n/2 \rfloor =$ tek sayıda -1 ile, $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda $+1$ çarpılırsa,

$$f(v_c) = -1$$

olur. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$-1, -1, +1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n - 1 = 4k - 2$ ($k \geq 1$) çift sayıdaki ayrıtlarından, $\lfloor n/2 \rfloor - 1 =$ çift sayıda $+1$ ile, $\lceil n/2 \rceil =$ çift sayıda -1 ile numaralı ayrıtlarının olduğu görülecektir. F_n 'nin böyle bir ayrıtların numaralamasına göre,

$$e_f(-1) = n$$

$$e_f(+1) = n - 1$$

olup,

$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$



elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ayrıca, $\forall v_i \in P_{n-1}, (i = 1, 2, \dots, n)$ için,

$$f(v) = -1$$

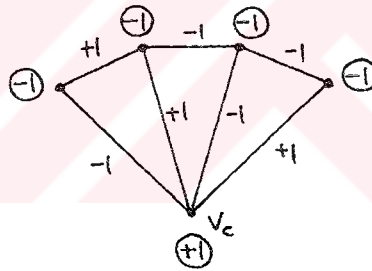
olur. Böylece, v_c merkez tepesi de -1 ile numaralandığından, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ni sağlayan $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(-1) = n + 1$$

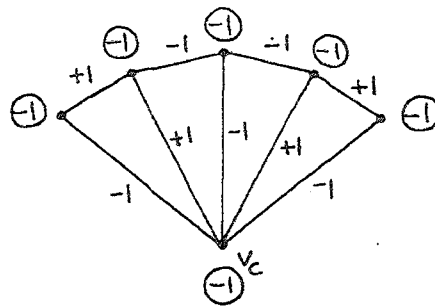
şekline dönüşen, Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu da sağlanır. Buradan, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, F_n yelpazesi (-1)-Kordiyaldir.

a) ve b) durumlarına göre, $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$, yani, $n \not\equiv 0, 2 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için F_n yelpazesi (-1)-Kordiyaldir. Buradan, yeterlik koşulunun ispatı sonuçlanmış olur.

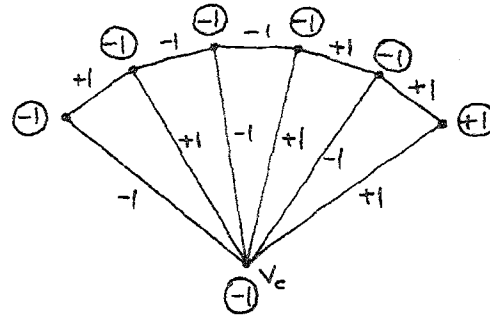
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.5'e göre, $n = 4, 5, 6, 7$ için sırasıyla, F_4, F_5, F_6, F_7 yelpazelerinin (-1)-Kordiyal olan ve olmayan numaralanmaları Şekil 4.19, 4.20, 4.21 ve 4.22'de görülmektedir.



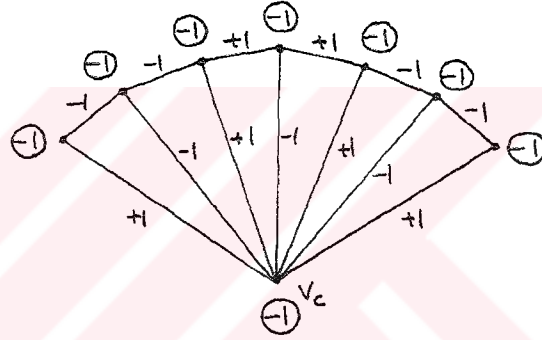
Şekil 4.19 F_4 Yelpazesi ve Onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.20 F_5 Yelpazesi ve Onun (-1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.21 F_6 Yelpazesi ve onun (-1)-Kordiyal olmayan Numaralanması



Şekil 4.22 F_7 Yelpazesi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması

Teorem 4.6 $\forall n \geq 2$ için, F_n yelpazesinin (+1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat:

Gereklik: " $n \geq 2$ için F_n yelpazesi (+1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ tür " gereklik koşuludur. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu kullanılarak ispatlanır. Yani, $n \equiv 2,3 \pmod{4}$ varsayılır. Bu varsayıma göre,

$n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k-2$ ($k \geq 1$) çift sayı, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k-1$ ($k \geq 1$) tek sayıdır.

a) $n \equiv 2 \pmod{4}$ durumunda, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

+1, -1, +1, -1,...



sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n/2 = \text{tek sayıda } +1$ ile, $n/2 = \text{tek sayıda } -1$ ile numaralı dalının olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesi için,

$$f(v_c) = -1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n-1 = 4k-3$ ($k \geq 1$) tek sayıdaki ayrıtlarından $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = \text{çift sayıda } -1$ ile ve $\lceil (n-1)/2 \rceil = \text{tek sayıda } +1$ ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. Bu ayrıt numaralmasına göre,

$$e_f(-1) = n-1$$

$$e_f(+1) = n$$

olup,

$$e_f(+1) = e_f(-1) + 1$$

elde edilecektir. Bu eşitlik Tanım 4.1'deki (4.2) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ancak, F_n yelpazesinin bu ayrıt numaralmasına göre, $\forall v_i \in P_{n-1}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$) için,

$$f(v_i) = +1$$

iken, $\exists v_i \in P_{n-1}$, ($i = n$) için,

$$f(v_i) = -1$$

olacaktır. Bu durumda, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $n+1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(+1) = n+1$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.1) koşulunun sağlanmadığı görülür. Böylece, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $n = 4k - 2$ ($k \geq 1$) için F_n yelpazesi, (+1)-Kordiyal olamaz. Bu da, F_n 'nin (+1)-Kordiyal varsayılması ile çelişir. O halde, F_n -yelpazesi (+1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ 'tür.

b) $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) tek sayı idi. Bu durumda,



$F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n = \text{tek sayıdaki dalından } \lfloor n/2 \rfloor = \text{tek sayıda } -1$ ile ve $\lceil n/2 \rceil = \text{çift sayıda ayrıtı } +1$ ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesi için,

$$f(v_c) = -1$$

elde edilir. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n - 1 = 4k - 2$ ($k \geq 1$) çift sayıdaki ayrıtlarından $(n-1)/2 = \text{tek sayıda } -1$ ve $(n-1)/2 = \text{tek sayıda } +1$ ile numaralandığı görülecektir. Bu ayrıtı numaralamasına göre,

$$e_f(-1) = n - 1$$

$$e_f(+1) = n$$

olup,

$$e_f(+1) = e_f(-1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.2) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ancak, $\forall v_i \in P_{n-1}, (i = 1, 2, \dots, n-1)$ için,

$$f(v_i) = +1$$

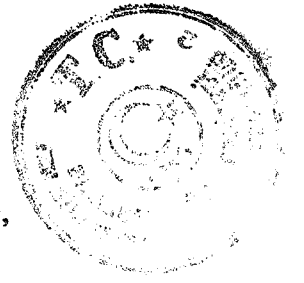
iken, $\exists v_i \in P_{n-1}, (i = n)$ için, $f(v_i) = -1$ 'dir. Ayrıca,

$$f(v_i) = -1$$

idi. Bu durumda, $n \equiv 3 \pmod{4}$ ü sağlayan $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$v_f(+1) = n + 1$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.1) koşulunun sağlanmadığı görülür. Böylece, $n \equiv 3 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $n = 4k - 1$ ($k \geq 1$) için F_n yelpazesi (+1)-Kordiyal olamaz. Bu durumda, F_n 'nin (+1)-Kordiyal varsayılması ile çelişir. F_n yelpazesi (+1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 3 \pmod{4}$ 'tür.



a) ve b) durumlarından, F_n yelpazesi (+1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ olur.

Yeterlik : " $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ ise, $n \geq 2$ için F_n yelpazesi (+1)-Kordiyaldır" ifadesi yeterlik koşuludur. Bu durumda, $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 0,1 \pmod{4}$ olur. Eğer, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayı, $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) tek sayıdır.

a) $n \equiv 0 \pmod{4}$ durumunda, $n = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıdır. Bu durumda, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n 'nin $n = 4k =$ çift sayıdaki dalından, $n/2 =$ çift sayıda -1 ile ve $n/2 =$ çift sayıda +1 ile numaralı dalı olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesi için,

$$f(v_c) = +1$$

olur. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} 'in $n - 1 = 4k - 1$ ($k \geq 1$) tek sayıdaki ayrıtıdan $\lfloor (n-1)/2 \rfloor =$ tek sayıda +1 ile ve $\lceil (n-1)/2 \rceil =$ çift sayıda -1 ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. F_n 'nin böyle bir ayrıt numaralmasına göre,

$$ef(-1) = n$$

$$ef(+1) = n - 1$$

olup,

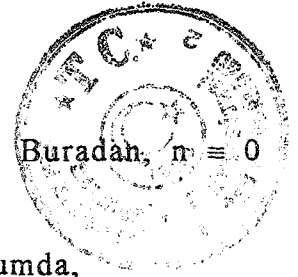
$$ef(-1) = ef(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1'deki (4.2) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ayrıca, P_{n-1} 'in $n = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıda tepesinin herbiri v_c merkez tepesine bağlı olan ayrıtlarla bağlantılı olduğundan, $\forall v_i \in P_{n-1}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = +1$$

olur. Böylece, v_c merkez tepesi de +1 ile numaralandığından, $n \equiv 0 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

$$vf(+1) = n + 1$$



şekline dönüşen, Tanım 4.1 'deki (4.1) koşulu sağlanır. Buradan, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, F_n yelpazesi (+1)-Kordiyaldir.

b) $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) idi. Bu durumda, $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, S_n ' nin $n = 4k + 1$ tek sayıda ayrıtından $\lfloor n/2 \rfloor =$ çift sayıda -1 ile ve $\lceil n/2 \rceil =$ tek sayıda +1 ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. Buradan, v_c merkez tepesi için,

$$f(v_c) = +1$$

olur. F_n yelpazesini oluşturan P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru,

$$+1, -1, -1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, P_{n-1} ' in $n - 1 = 4k$ ($k \geq 1$) çift sayıda ayrıtından $(n-1)/2 =$ çift sayıda -1 ile ve $(n-1)/2 =$ çift sayıda +1 ile numaralı ayrıtı olduğu görülecektir. F_n 'nin böyle bir ayrıtı numarasına göre,

$$e_f(-1) = n - 1$$

$$e_f(+1) = n$$

olup,

$$e_f(+1) = e_f(-1) + 1$$

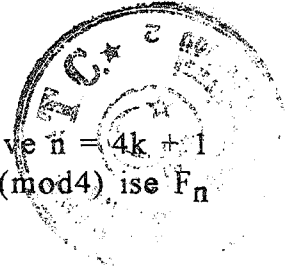
elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 4.1 'deki (4.2) koşulunun sağlanacağını gösterir. Ayrıca, P_{n-1} ' in $n = 4k + 1 =$ tek sayıda tepesinden her biri v_c merkez tepesine bağlı olan ayrıtlarla bağlantılı olduğundan, $\forall v_i \in P_{n-1}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = +1$$

olur. Böylece, v_c merkez tepesi de +1 ile numaralandığında, $n \equiv 1 \pmod{4}$ denliğini sağlayan $n + 1$ tepeli F_n yelpazesi için,

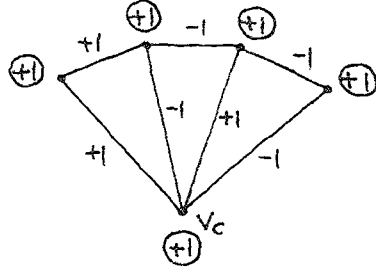
$$v_f(+1) = n + 1$$

şekline dönüşen, Tanım 4.1 'deki (4.1) koşulu sağlanır. Buradan $n \equiv 1 \pmod{4}$ ü sağlayan $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) için, F_n yelpazesi (+1)-Kordiyaldir.

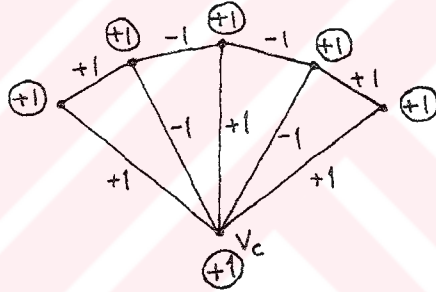


a) ve b) durumlarına göre $n \equiv 0,1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k$ ve $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) için F_n yelpazeleri (+1)-Kordiyaldır. Yani $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ ise F_n yelpazesi (+1)-Kordiyaldır.

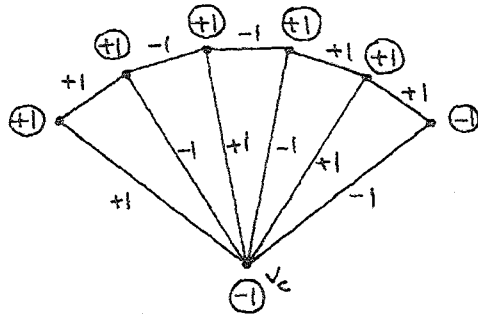
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.6'ya göre, $n = 4,5,6,7$ için sırasıyla F_4, F_5, F_6, F_7 yelpazelerinin (+1)-Kordiyal olan ve olmayan numaralanmaları şekil 4.23, 4.24, 4.25 ve 4.26'da görülmektedir.



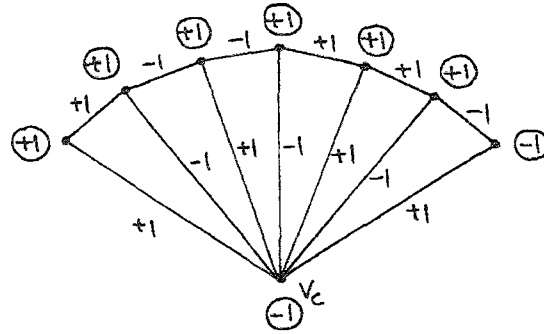
Şekil 4.23 F_4 yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.24 F_5 yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.25 F_6 yelpazesi ve onun (+1)-Kordiyal olmayan Numaralanması



Şekil 4.26 F_7 Yelpezesi ve onun (+1)-Kordiyal olmayan Numaralanması

Teorem 4.7 $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen Grafının S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat :

Gereklilik: $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen grafi S-Kordiyal ise, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu ile ispatlanır. Buna göre, $P(n,2)$ Petersen grafi S-Kordiyal ise, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ olduğu varsayılır. Bu varsayıma göre,

$n \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 1$ ($k \geq 1$) ve

$n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n = \text{tek sayıdır}$. Bu durumda, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan C_n dış çevresinin, C_n^* iç çevresinin ayrıtları ve dış çevre ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar $n = \text{tek sayıdır}$. Buna göre, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan C_n dış çevresinin ayrıtları en alttaki $\{v_1, v_2\}$ ayrıtından başlayarak pozitif dönme yönünde,

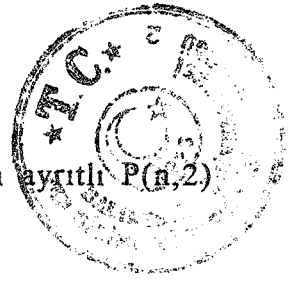
$-1, +1, -1, \dots$

sırası ile C_n^* iç çevresinin ayrıtları C_n 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan v_{n+1} iç tepesine bağlantılı $\{v_{2n}, v_{n+1}\}$ ayrıtından başlayarak pozitif dönme yönünde,

$+1, -1, +1, \dots$

sırası ile, dış çevre ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar, C_n 'nin ilk numaralanan ayrıtının v_1 tepesine bağlantılı olan ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$-1, +1, -1, \dots$



sırası ile numaralandığında, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $3n$ ayrıtlı $P(n,2)$ Petersen grafi için,

$$e_f(-1) = \lceil 3n/2 \rceil$$

$$e_f(+1) = \lfloor 3n/2 \rfloor$$

olup,

$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.20) koşulunun sağlandığı gösterir. Ayrıca, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan C_n dış çevresi ile C_n^* iç çevresi üzerinde $n =$ tek sayıda tepe olup, her bir tepeye üç ayrıtlı bağlantılıdır. Yukarıda belirtilen ayrıtlı numaralamasına göre, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen grafi için,

$$v_f(-1) = n-1$$

$$v_f(+1) = n+1$$

olup,

$$v_f(+1) = v_f(-1) + 2$$

elde edilir. Bu eşitlik, Tanım 3.5 'teki (3.19) koşulunun sağlanmadığını gösterir. Bu durumda, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan $n = 4k + 1$ ve $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$) için, $P(n,2)$ Petersen grafları S-Kordiyal olamazlar. Bu durum, $P(n,2)$ 'nin S-Kordiyal varsayılması ile çelişir. O halde, $P(n,2)$ Petersen grafi S-Kordiyal ise, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür.

Yeterlik : " $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise, $P(n,2)$ petersen grafi S-Kordiyaldir" yeterlik koşuludur. $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ 'tür. Buradan $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n = 4k+4$ ($k \geq 1$) ve $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k+2$ ($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n =$ çift sayıdır. Bu durumda, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan C_n dış çevresi ile C_n^* iç çevresinin ayrıtları ve dış çevre ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar $n =$ çift sayıdadır. C_n^* iç çevresi $C_n^* = C_{n/2} \cup C_{n/2}$ olmak üzere iki çevreden oluşmaktadır. Buna göre, C_n dış çevresinin ayrıtları, en alttaki $\{v_1, v_2\}$, ayrıtlıdan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, +1, -1, \dots$$

sırası ile, C_n^* iç çevresini oluşturan iki çevreden birinin ayrıtları, C_n^* 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan iç tepeye bağlı $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$ ayrıtlıdan başlayarak pozitif dönme yönünde

$$+1, +1, +1, \dots$$



sırası ile, diğer $C_{n/2}$ çevresinin ayrıtları C_n 'nin v_2 tepesine bağlantılı olan iç tepeye bağlantılı ayrıttan başlayarak, pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile ve dış çevre ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar C_n 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, +1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında,

$$ef(-1) = ef(+1) = 3n / 2$$

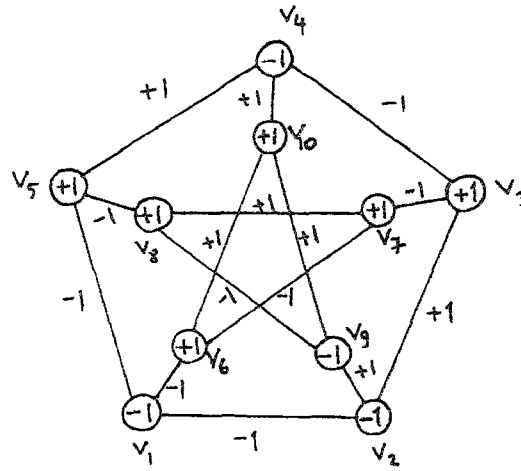
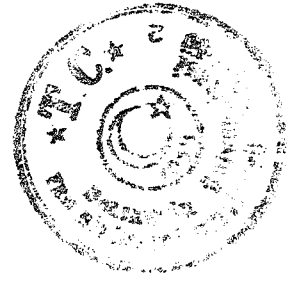
olup, Tanım 3.5'teki (3.20) koşulu sağlanır.

Bu ayrıt numaralanmasına göre, $P(n,2)$ Petersen grafinin her bir tepesine üç ayrıt bağlantılı olup, ardışık iki tepesinden birine bağlantılı olan ayrıtlardan ikisi -1, biri +1 iken, diğer tepesine bağlantılı olan ayrıtlardan ikisi +1 iken, biri -1'dir. Buradan, $P(n,2)$ grafinin ardışık iki tepesinden birinin numaralanması +1 iken, diğerinin -1 olur. Bundan dolayı, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen graf için,

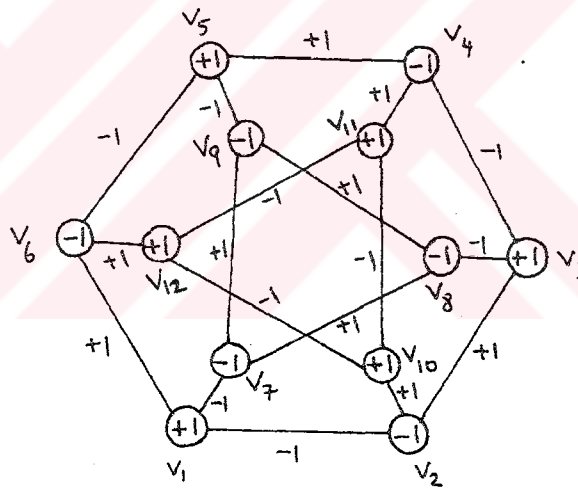
$$vf(-1) = vf(+1) = n$$

olup, Tanım 3.5'deki (3.19) koşulu sağlanır. Böylece, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k+1$ ve $n = 4k+3$ ($k \geq 1$) için, $P(n,2)$ Petersen grafi S-Kordiyaldır. O halde, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise $P(n,2)$ grafi S-Kordiyaldır.

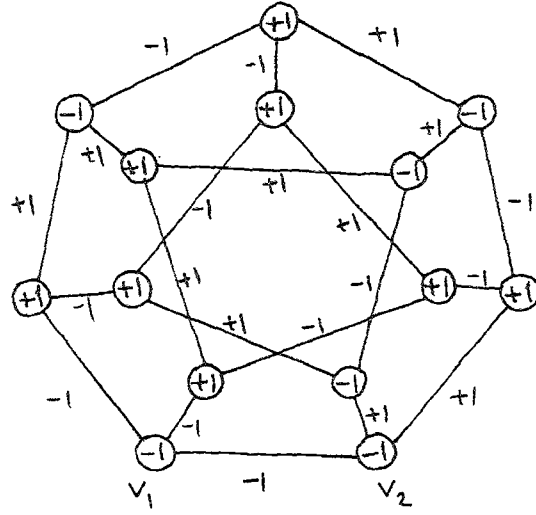
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.7'ye göre, $m = 2, n = 5,6,7,8$ için sırası ile, $P(5,2)$, $P(6,2)$, $P(7,2)$, $P(8,2)$ Petersen graflarının S-Kordiyal olan ve olmayan numaralanmaları Şekil 4.27, 4.28, 4.29 ve 4.30'da görülmektedir.



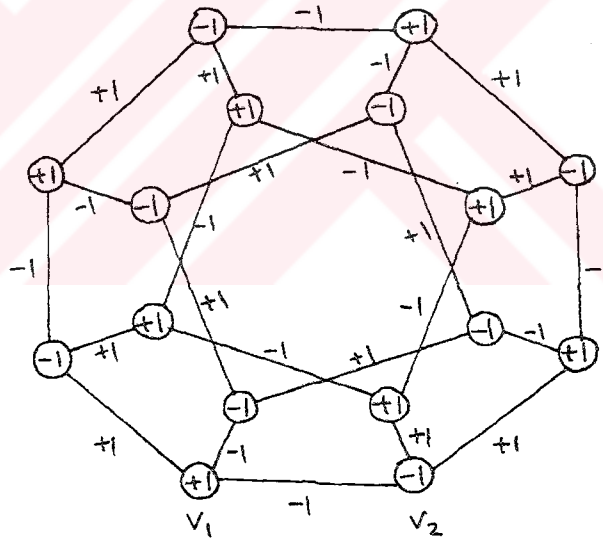
Şekil 4.27 P (5,2) Petersen Grafi ve onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.28 P (6,2) Petersen Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.29 P (7,2) Petersen Grafi ve onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.30 P (8,2) Petersen Grafi ve onun S-Kordiyal Numaralanması

Teorem 4.8 $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen grafinin (-1) -Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat :

Gereklilik : $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen grafi (-1) -Kordiyal ise, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür. Bu koşulun doğruluğu olmayana



ergi metodu ile ispatlanır. Buna göre $P(n,2)$ Petersen grafi (-1) -Kordiyal ise, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ olduğu varsayılır. Bu varsayıma göre,

$$n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ise, } n = 4k + 1 \text{ (} k \geq 1 \text{)}$$

$n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 3$ ($k \geq 3$) olup, her iki durumda da n tek sayıdır. Bu durumda, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan C_n dış çevresinin, C_n^* iç çevresinin ayrıtları ve dış çevre ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtları $n = \text{tek sayıdır}$. Buna göre C_n dış çevresinin ayrıtları en alttaki $\{v_1, v_2\}$ ayrıtından başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile, C_n^* iç çevresinin ayrıtları C_n^* 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan v_{n+1} iç tepesine bağlantılı $\{v_{2n}, v_{n+1}\}$ ayrıtlarından başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, +1, +1, -1, \dots$$

sırası ile, C_n dış çevresi ile C_n^* iç çevresini birbirine bağlayan ayrıtlar, C_n 'nin ilk numaralanan ayrıtının v_1 tepesine bağlantılı olan ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, $3n$ ayrıtlı $P(n,2)$ Petersen grafi için,

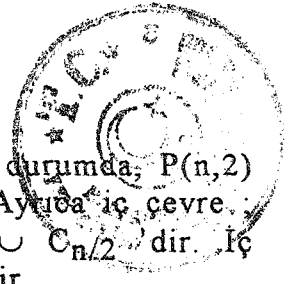
$$e_f(-1) = e_f(+1) + 1$$

olup, bu eşitlik Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlandığını gösterir. Bundan başka, C_n dış çevresi üzerindeki $n = \text{tek sayıdaki tepelerin tümü } -1$ ile numaralanır. Ancak, $n \equiv 1 \pmod{4}$ için C_n^* iç çevresinin $\lceil n/2 \rceil$ sayıda tepesi -1 ile numaralı olup, $\lfloor n/2 \rfloor$ sayıda tepesi $+1$ ile numaralanır. Ayrıca $n \equiv 3 \pmod{4}$ için C_n^* iç çevresinin $\lfloor n/2 \rfloor$ sayıda tepesi -1 ile ve $\lceil n/2 \rceil$ sayıda tepesi $+1$ ile numaralanır. Buna göre, $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen grafi için,

$$v_f(-1) = 2n$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu sağlanmaz. O halde, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $n = 4k + 1$ ve $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$) için $P(n,2)$ Petersen grafları (-1) -Kordiyal olmazlar. Bu durum, $P(n,2)$ 'nin (-1) -Kordiyal varsayılması ile çelişir. O halde, $P(n,2)$ Petersen grafi (-1) -Kordiyal ise $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür.

Yeterlik : $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise $P(n,2)$ Petersen grafi (-1) -Kordiyaldir. $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ olur. Buna göre, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 4$ ($k \geq 1$) ve $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 2$



($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n =$ çift sayıdır. Bu durumda, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan dış çevrenin n ayrıtı vardır. Ayrıca iç çevre ayrıtı sayıları $n/2$ olan iki çevreden oluşmakta olup ; $C_{n/2} \cup C_{n/2}$ dir. İç ve dış çevreyi birbirine bağlayan ayrıtların sayısı $n =$ çift tir.

Buna göre C_n dış çevresinin ayrıtları en alttaki $\{v_1, v_2\}$ ayrıtından başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile, C_n^* iç çevresini oluşturan iki çevreden birinin ayrıtları C_n 'nin v_1 tepesine bağlantılı ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile, diğerinin ayrıtları C_n 'nin v_2 tepesine bağlantılı olan iç tepeye bağlantılı ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile, iç ve dış çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar, C_n 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile numaralansın. Bu durumda $3n$ ayrıtlı $P(n,2)$ Petersen grafi için,

$$e_f(-1) = e_f(+1) = 3n/2$$

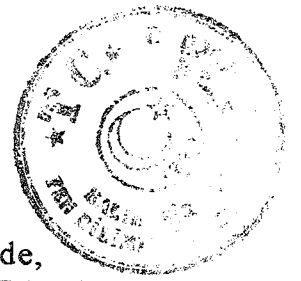
olup, bu eşitlik Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlandığını gösterir. Ayrıca dış çevre üzerindeki tepelerin sayısı ile iç çevre üzerindeki tepelerin sayısı eşit olup, $n =$ çift sayıdır. Tanım 2.7'ye göre $P(n,2)$ Petersen grafinin her bir tepesine üç ayrıtı bağlantılı idi. Bu ayrıtı numaralamasına göre, dış çevre üzerindeki her bir tepeye bağlantılı olan üç ayrıttan biri -1 ile, ikisi $+1$ ile numaralandığında, C_n dış çevre olmak üzere, $\forall v_i \in C_n$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = -1$$

elde edilir. Ayrıca, $C_n^* = C_{n/2} \cup C_{n/2}$ iç çevresini oluşturan çevrelerden birinin her bir tepesine bağlantılı olan ayrıtlardan üçü de -1 ile numaralanıyorken, diğer çevrenin her bir tepesine bağlantılı üç tane ayrıttan biri -1 ile, ikisi $+1$ ile numaralandığından, C_n^* iç çevre olmak üzere, $\forall v_i \in C_n^*$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = -1$$

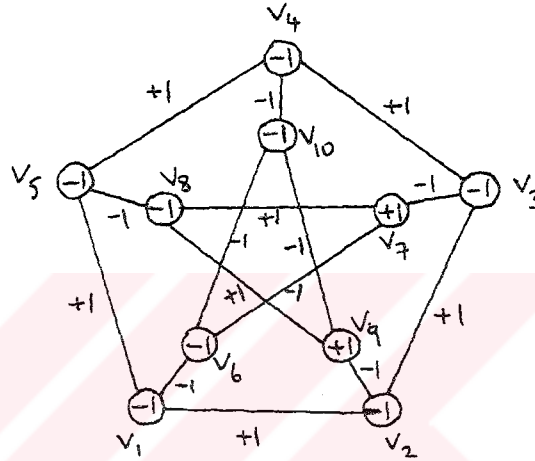
elde edilir. Böylece, $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen grafları için,



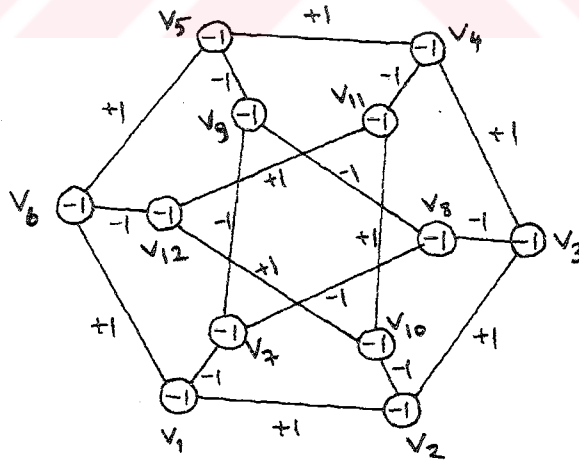
$$v_f(-1) = 2n$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.3) koşulu sağlanır. O halde, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 4$ ve $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$) için, $P(n,2)$ Petersen grafları (-1) -Kordiyaldır. Yani, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise, $P(n,2)$ Petersen grafi (-1) -Kordiyaldır.

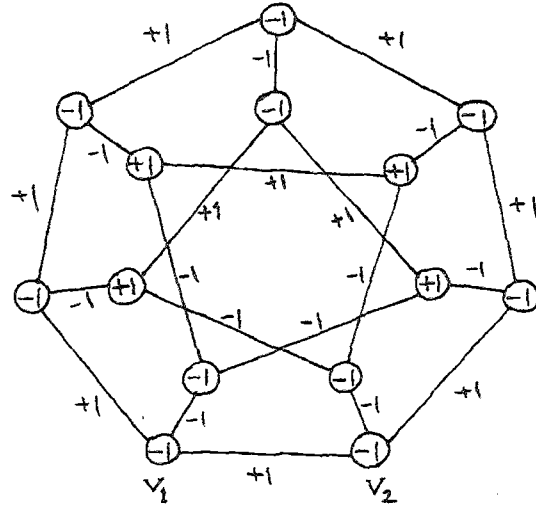
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.8'e göre, $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n = 5,6,7,8$ için sırası ile $P(5,2)$, $P(6,2)$, $P(7,2)$, $P(8,2)$ Petersen graflarının (-1) -Kordiyal olan ve olmayan numaralanmaları Şekil 4.31, 4.32, 4.33 ve 4.34'te görülmektedir.



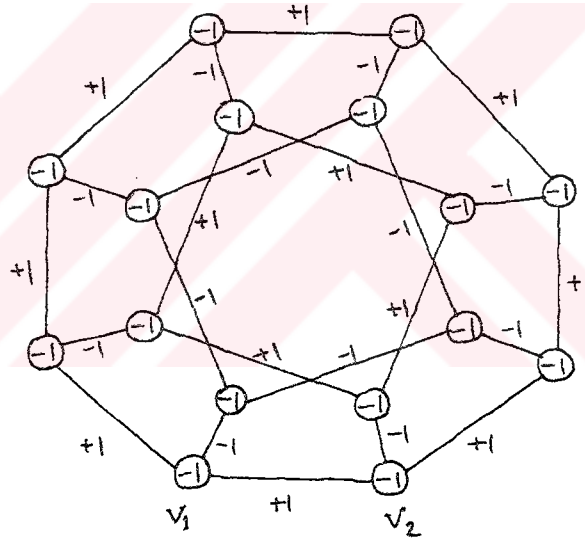
Şekil 4.31 $P(5,2)$ Petersen grafi ve onun (-1) -Kordiyal olmayan Numaralanması



Şekil 4.32 $P(6,2)$ Petersen grafi ve onun (-1) -Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.33 P(7,2) Petersen Grafi ve onun (-1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.34 P(8,2) Petersen grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması

Teorem 4.9 $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen grafinin (+1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ olmasıdır.

İspat :

Gereklilik: $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen grafi



(+1)-Kordiyal ise, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ' tür. Bu koşulun doğruluğu olmayana ergi metodu ile ispatlanır. Buna göre $P(n,2)$ Petersen grafi (+1)-Kordiyal ise, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ olduğu varsayılır. Bu varsayıma göre,

$$n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ise, } n = 4k + 1 \text{ (} k \geq 1 \text{) ve}$$

$n \equiv 3 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n = \text{tek sayıdır}$. Bu durumda, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan C_n dış çevresinin, C_n^* iç çevresinin ayrıtları, dış çevre ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar $n = \text{tek sayıdır}$. C_n dış çevresinin ayrıtları en alttaki $\{v_1, v_2\}$ ayrıtıdan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile, C_n^* iç çevresinin ayrıtları C_n 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan V_{n+1} iç tepesine bağlantılı $\{v_{2n}, v_{n+1}\}$ ayrıtıdan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, -1, -1, \dots$$

sırası ile, dış çevresi ile iç çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar, C_n 'nin ilk numaralanan ayrıtının v_1 tepesine bağlantılı olan ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında, $3n$ ayrıtlı $P(n,2)$ Petersen grafi için,

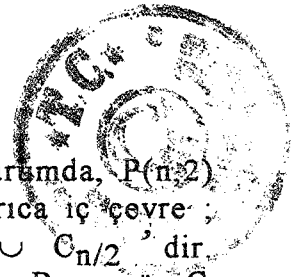
$$e_f(+1) = e_f(-1) + 1$$

olup, bu eşitlik Tanım 4.1'deki (4.4) koşulunun sağlandığını gösterir. Bundan başka, C_n dış çevresi üzerindeki $n = \text{tek sayıdaki}$ tepelerin tümü $+1$ ile numaralanır. Ancak, $n \equiv 1 \pmod{4}$ için C_n^* iç çevresinin $\lceil n/2 \rceil$ sayıda tepesi $+1$ ile numaralı olup, $\lfloor n/2 \rfloor$ sayıda tepesi -1 ile numaralanır. Ayrıca $n \equiv 3 \pmod{4}$ için C_n^* iç çevresinin $\lfloor n/2 \rfloor$ sayıda tepesi $+1$ ile ve $\lceil n/2 \rceil$ sayıda tepesi -1 ile numaralanır. Buna göre, $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen grafi için,

$$v_f(+1) = 2n$$

şekline dönüşen Tanım 4.1'deki (4.1) koşulu sağlanmaz. O halde, $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ 'ü sağlayan $n = 4k + 1$ ve $n = 4k + 3$ ($k \geq 1$) için $P(n,2)$ Petersen grafları (+1)-Kordiyal olmazlar. Bu durum, $P(n,2)$ 'nin (+1)-Kordiyal var sayılması ile çelişir. O halde, $P(n,2)$ Petersen grafi (+1)-Kordiyal ise $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ' tür.

Yeterlik : $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise $P(n,2)$ Petersen grafi (+1)-Kordiyaldir. $n \equiv 1,3 \pmod{4}$ ise, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ olur. Buna göre, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 4$ ($k \geq 1$) ve $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 2$



($k \geq 1$) olup, her iki durumda da $n =$ çift sayıdır. Bu durumda, $P(n,2)$ Petersen grafini oluşturan dış çevrenin n ayrıtı vardır. Ayrıca iç çevre ; ayrıtı sayıları $n/2$ olan iki çevreden oluşmakta olup ; $C_{n/2} \cup C_{n/2}$ 'dir. İç ve dış çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar, $n =$ çift sayıdır. Buna göre C_n dış çevresinin ayrıtları en alttaki $\{v_1, v_2\}$ ayrıtından başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile, $C_n^* = C_{n/2} \cup C_{n/2}$ iç çevresini oluşturan, çevrelerden birinin ayrıtları C_n 'nin v_1 tepesine bağlantılı olan iç tepeye bağlantılı ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$-1, -1, -1, \dots$$

sırası ile, diğer $C_{n/2}$ 'nin çevresinin ayrıtları C_n 'nin v_2 tepesine bağlantılı olan iç tepeye bağlantılı ayrıttan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile, iç ve dış çevreyi birbirine bağlayan ayrıtlar, C_n 'nin ilk numaralanan ayrıtına bağlantılı v_1 tepesine bağlantılı olan ayrıtıdan başlayarak pozitif dönme yönünde,

$$+1, +1, +1, \dots$$

sırası ile numaralandığında $3n$ ayrıtlı $P(n,2)$ Petersen grafi için,

$$e_f(+1) = e_f(-1) = 3n/2$$

olup, elde edilen bu eşitlik Tanım 4.1'deki (4.2) koşulunun sağlandığını gösterir. Ayrıca dış çevre üzerindeki tepelerin sayısı ile iç çevre üzerindeki tepelerin sayısı eşit olup, $n =$ çift sayıdır. Tanım 2.7'ye göre $P(n,2)$ Petersen grafinin her bir tepesine üç ayrıtı bağlantılı idi. Bu ayrıtı numaralamasına göre, dış çevre üzerindeki herbir tepeye bağlantılı olan üç ayrıttan ikisi -1 ile, biri de $+1$ ile numaralandığından, C_n dış çevre olmak üzere, $\forall v_i \in C_n$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = +1$$

elde edilir. Ayrıca, $C_n^* = C_{n/2} \cup C_{n/2}$ iç çevresini oluşturan çevrelerden birinin herbir tepesine bağlantılı olan üç ayrıtı da $+1$ ile numaralanıyorken, diğer çevrenin her bir tepesine bağlantılı olan üç ayrıtıdan ikisi -1 ile, biri $+1$ ile numaralandığından, C_n^* iç çevre olmak üzere, $\forall v_i \in C_n^*$, ($i = 1, 2, \dots, n$) için,

$$f(v_i) = +1$$

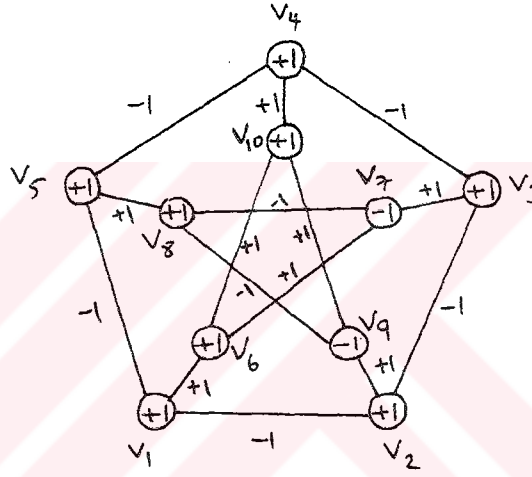


elde edilir. Böylece, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ ü sağlayan $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen grafları için,

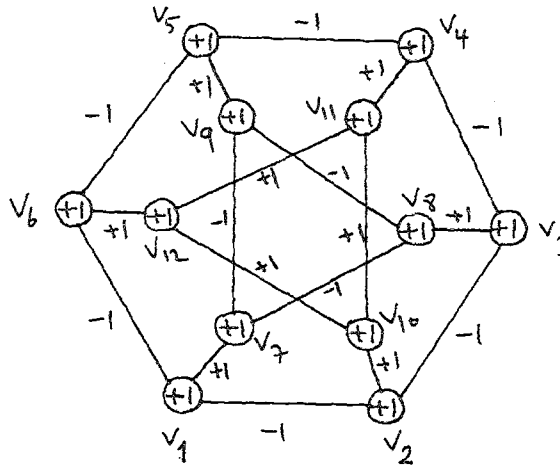
$$v_f(+1) = 2n$$

şekline dönüşen Tanım 4.1 deki (4.1) koşulu sağlanır. O halde, $n \equiv 0,2 \pmod{4}$ ise, $n = 4k + 4$ ve $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$) için, $P(n,2)$ Petersen grafları (+1)-Kordiyaldır. Yani, $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ ise, $P(n,2)$ Petersen grafi (+1)-Kordiyaldır.

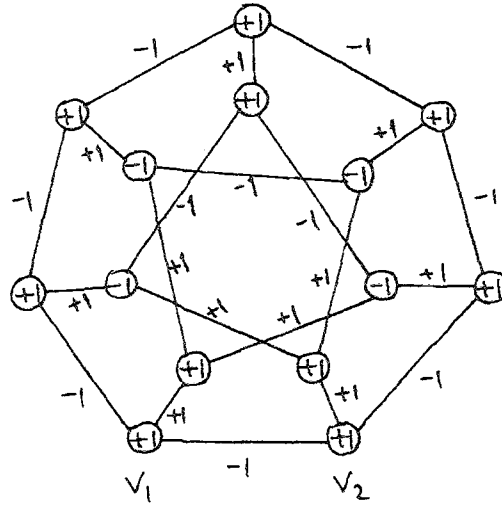
Yukarıda genel ispatı verilen Teorem 4.9'a göre, $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n = 5,6,7,8$ için sırası ile $P(5,2)$, $P(6,2)$, $P(7,2)$, $P(8,2)$ Petersen graflarının (+1)-Kordiyal olan ve olmayan numaralanmaları Şekil 4.35, 4.36, 4.37, 4.38'de görülmektedir.



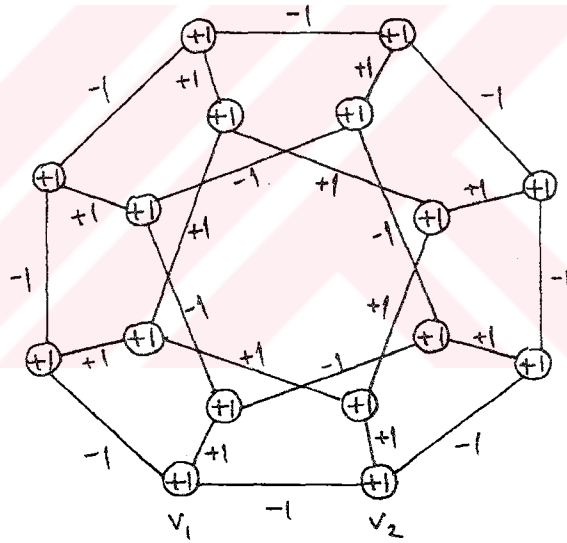
Şekil 4.35 $P(5,2)$ Petersen Grafi ve onun (+1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması



Şekil 4.36 $P(6,2)$ Petersen grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 4.37 $P(7,2)$ Petersen Grafi ve onun (+1)-Kordiyal Olmayan Numaralanması

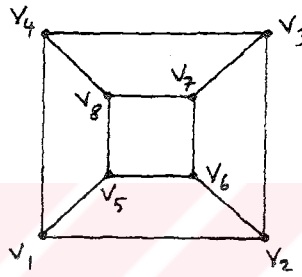


Şekil 4.38 $P(8,2)$ Petersen grafi ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



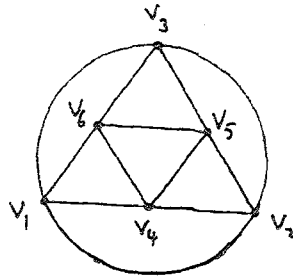
5 . DÜZGÜN ALTIYÜZLÜNÜN, DÜZGÜN SEKIZYÜZLÜNÜN, DÜZGÜN ONİKİYÜZLÜNÜN, DÜZGÜN YİRMİYÜZLÜNÜN GRAFININ S-KORDİYALİTESİ İLE (-1)-KORDİYALİTESİ VE (+1)-KORDİYALİTESİNİN İNCELENMESİ

Tanım 5.1 Düzgün Altıyüzlünün Grafi : Birleştirilmiş graflar sınıfına giren ve aynı zamanda kübik graf olan düzgün altıyüzlü "küp" olarak adlandırılır ve Q_3 ile gösterilir [11]. Düzgün altıyüzlünün grafi, 8 tepeli, 12 ayrıtlı bir graf olup, Şekil 5.1'de görülmektedir.



Şekil 5.1 Q_3 Düzgün Altıyüzlünün Grafi

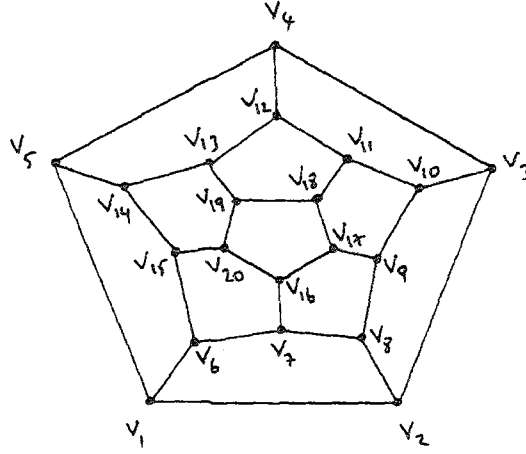
Tanım 5.2 Düzgün Sekizyüzlünün Grafi : Birleştirilmiş graflar sınıfından olup, 6 tepeli, 12 ayrıtlı bir graftır [11]. Şekil 5.2'de Düzgün Sekizyüzlünün Grafi görülmektedir.



Şekil 5.2 Düzgün Sekizyüzlünün Grafi

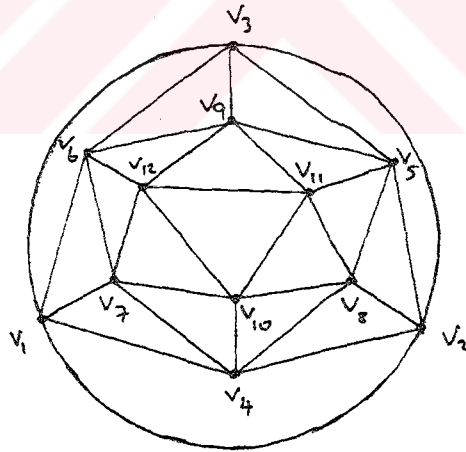


Tanım 5.3 Düzgün Onikiyüzlünün Grafi : Birleştirilmiş graflar sınıfına giren ve aynı zamanda kübik graf olan, 20 tepeli, 30 ayrıtlı düzgün onikiyüzlünün grafi, Şekil 5.3 'de görülmektedir [11].



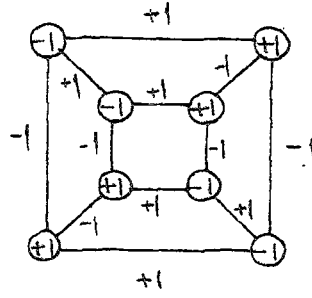
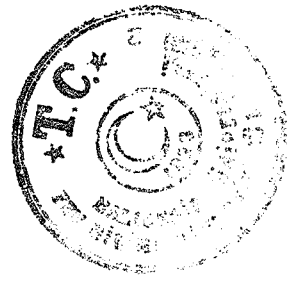
Şekil 5.3 Düzgün Onikiyüzlünün Grafi

Tanım 5.4 Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi : Birleştirilmiş graflar sınıfına giren, 12 tepeli, 30 ayrıtlı düzgün yirmiyüzlünün grafi Şekil 5.5 'de görülmektedir [11]:

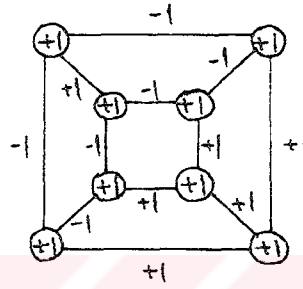


Şekil 5.4 Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi

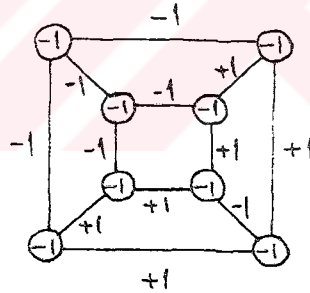
Tanım 5.1 de verilen Düzgün Altıyüzlünün grafının sırasıyla S-Kordiyal , (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralanması Şekil 5.5 , 5.6 ve 5.7 'de görülmektedir.



Şekil 5.5 Düzgün Altıyüzlünün Grafi ve Onun S-Kordiyal Numaralanması

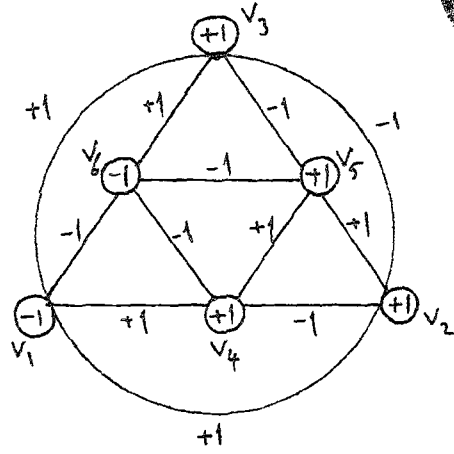
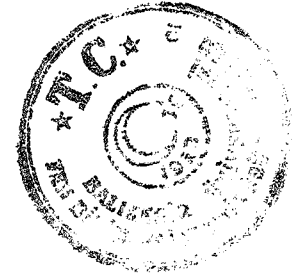


Şekil-5.6 Düzgün Altıyüzlünün Grafi ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması

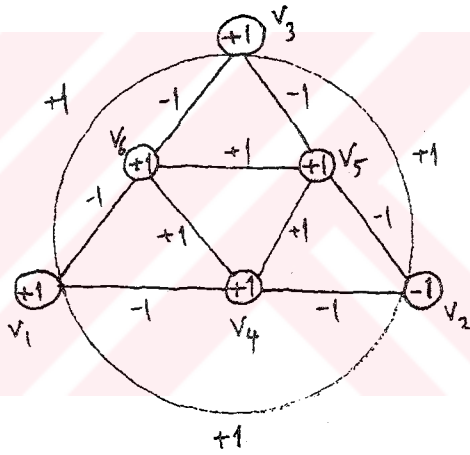


Şekil 5.7 Düzgün Altıyüzlünün Grafi ve Onun (-1)-Kordiyal Numaralanması

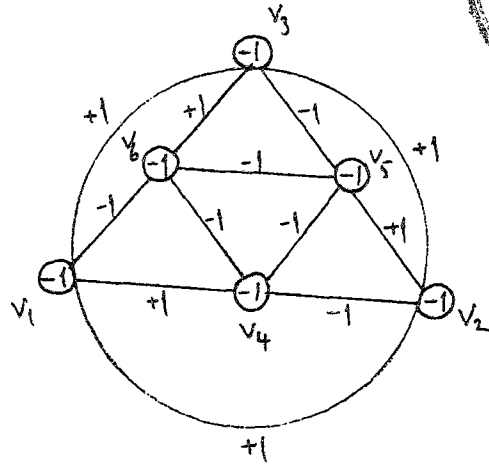
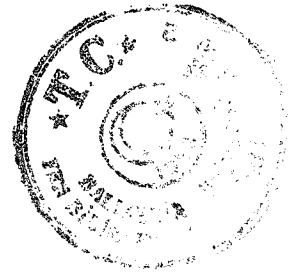
Tanım 5.2 'de verilen Düzgün Sekizyüzlünün Grafi sırasıyla S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal olan ve olmayan numaralanması. Şekil 5.8, 5.9 ve 5.10'da görülmektedir.



Şekil 5.8 Düzgün Sekizyüzlünün Grafi ve Onun S-Kordiyal Olmayan Numaralanması

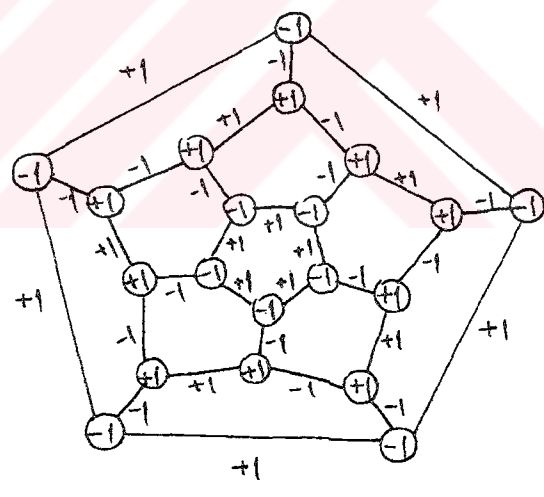


Şekil 5.9 Düzgün Sekizyüzlünün Grafi ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması

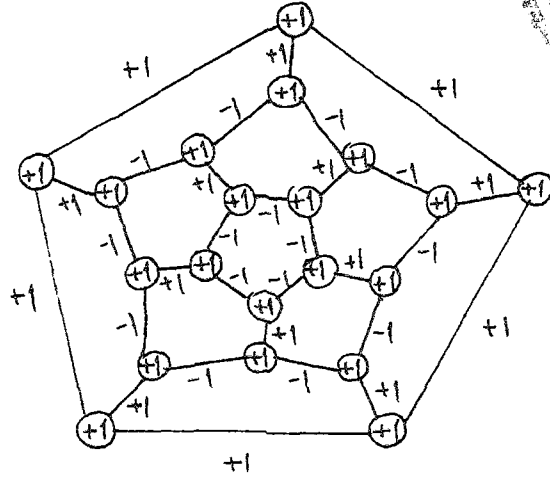


Şekil 5.10 Düzgün Sekizyüzlünün Grafı ve Onun (-1)-Kordiyal Numaralanması

Tanım 5.3 'de verilen Düzgün Onikiyüzlünün Grafının sırasıyla S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal Numaralanması Şekil 5.11, 5.12 ve 5.13 'te görülmektedir.



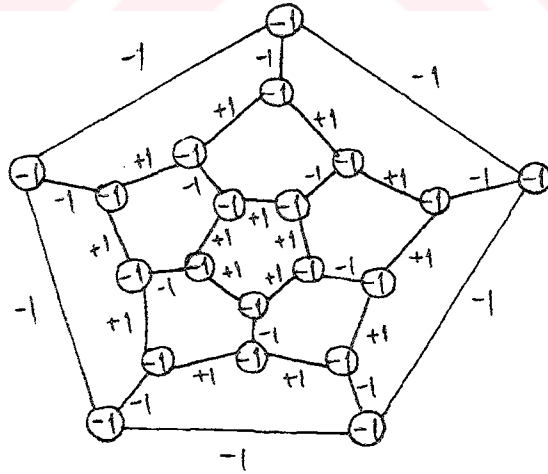
Şekil 5.11 Düzgün Onikiyüzlünün Grafı ve Onun S-Kordiyal Numaralanması



Şekil 5.12 Düzgün Onikiyüzlünün Grafi ve Onun (+1)-Kordiyal Numaralanması

Sonuç Olarak ;

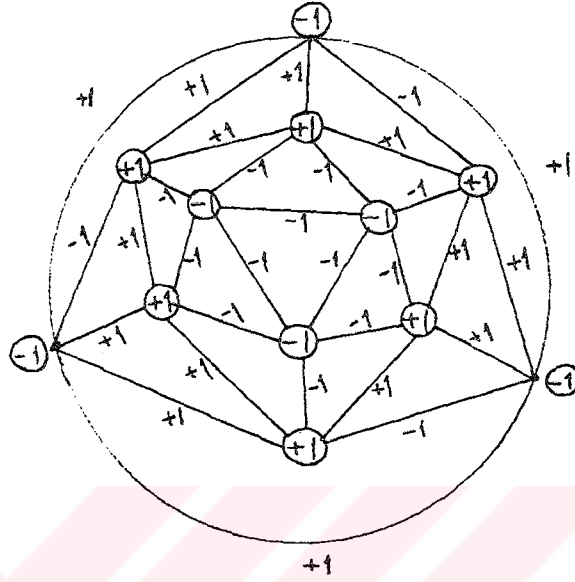
- $\forall n \geq 6, k \in \mathbb{N}^+, n = 4 + 2^k$ için , düzgün n yüzlünün S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $k \neq 2$ olmasıdır.
- $\forall n \geq 6, k \in \mathbb{N}^+, n = 4 + 2^k$ için , düzgün n yüzlü (+1)-Kordiyaldir.
- $\forall n \geq 6, k \in \mathbb{N}^+, n = 4 + 2^k$ için , düzgün n yüzlü (-1)-Kordiyaldir.



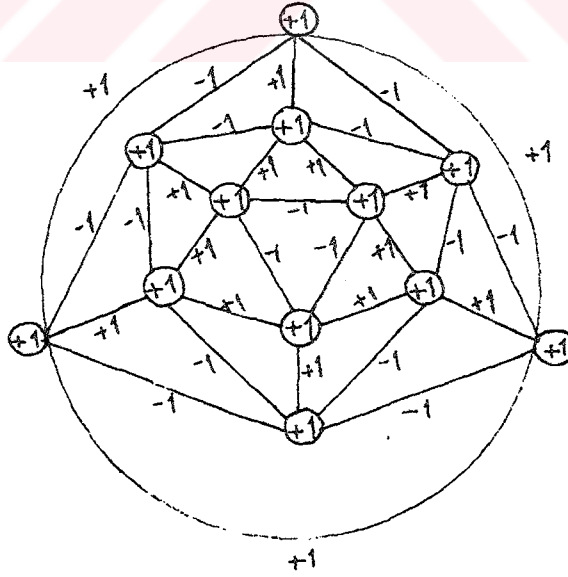
Şekil 5.13 Düzgün Onikiyüzlünün Grafi ve onu (-1)-Kordiyal Numaralanması



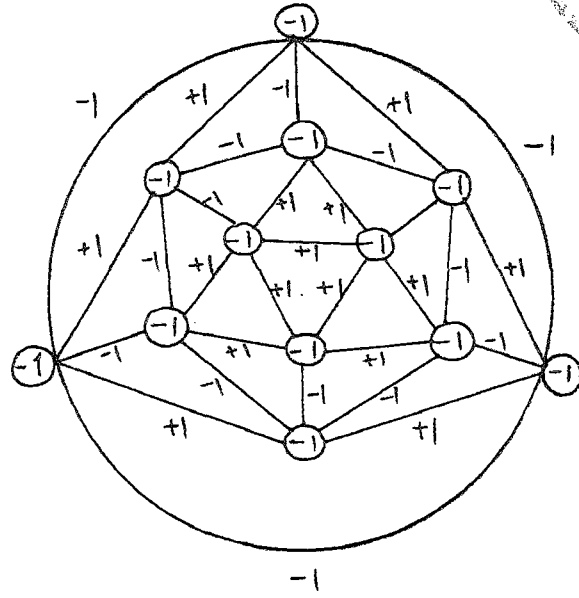
Tanım 5.4 ile verilen Düzgün yirmiyüzlünün Grafının sırasıyla S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal Numaralanmaları Şekil 5.14, 5.15 ve 5.16'da görülmektedir.



Şekil 5.14 Düzgün Yirmiyüzlünün Grafı ve onun S-Kordiyal Numaralanması



Şekil 5.15 Düzgün Yirmiyüzlünün Grafı ve onun (+1)-Kordiyal Numaralanması



Şekil 5.16 Düzgün Yirmiyüzlünün Grafi ve onun (-1)-Kordiyal Numaralanması



6. YÖNTEM

İncelemenin yapılabilmesi için birtakım teoremler ortaya atılmıştır. Bu teoremlerin ispatında, I.Cahit'in S-Kordiyal Graflar adlı makalesinde uyguladığı yöntemle benzer bir yöntem uygulandı. Ayrıca, her bir teoremin gereklik koşulu olmayana ergi metodu ile ispatlandı. Teoremin genel ispatı yapıldıktan sonra, konuya açıklık getiren örnekler, şekiller çizilerek verildi.

W_n Çarklarının S-Kordiyalitesi ile (+1)-Kordiyalitesinin ve (-1)-Kordiyalitesinin incelenmesinde ; $W_n = C_n \cup S_n$ çarkını oluşturan S_n yıldız ağacının dalları ile C_n çevresinin ayrıtları pozitif dönme yönünde, $\{-1, +1\}$ kümesinin elemanları ile numaralandı.

F_n yelpazelerinin S-Kordiyalitesi ile (+1)-Kordiyalitesinin ve (-1)-Kordiyalitesinin incelenmesinde ; $F_n = P_{n-1} \cup S_n$ yelpazesini oluşturan S_n yıldız ağacının dalları ve P_{n-1} yolunun ayrıtları soldan sağa doğru $\{-1, +1\}$ kümesinin elemanları ile numaralandı.

$P(n,2)$ Petersen Graflarının S-Kordiyalitesi ile (+1)-Kordiyalitesi ve (-1)-Kordiyalitesinin incelenmesinde ; Bu Grafi oluşturan dış çevrenin, iç çevrenin ve dış çevre ile iç çevrenin karşılıklı her bir tepesini birbirine bağlayan ayrıtları, pozitif dönme yönünde $\{-1, 1\}$ kümesinin elemanları ile numaralandı.

Benzer şekilde, düzgün çok yüzlülülerden düzgün altıyüzlünün, düzgün sekizyüzlünün, düzgün onikiyüzlünün ve düzgün yirmiyüzlünün grafinin S-Kordiyalitesi ile (+1)-Kordiyalitesi ve (-1)-Kordiyalitesinin incelenmesinde ; pozitif dönme yönü kullanıldı.



7. SONUÇ VE TARTIŞMA

İ. Cahit'in konjektürü, bütün birleştirilmiş grafları kapsadığından, birçok birleştirilmiş grafin S-Kordiyal olup olmadığının incelenmesini gerektirir. Bu nedenle, "*n* tepeli birleştirilmiş grafin S-Kordiyal olması için gerek ve koşul $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ olmasıdır" konjektürünün ispatı kolay değildir. Bu ispatın yapılabilmesi için, İ. Cahit'in çalışmalarında kullandığı numaralama yöntemi diğer birleştirilmiş graflar üzerinde de uygulanmalıdır.

Bu çalışmada, öncelikle daha önce ispatlanmış olan " $\forall n \geq 3$ için W_n çarkının S-kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ 'tür" teoremi incelendi. $n+1$ tepeli W_n çarkı için, $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ denklğine göre, $n+1 \not\equiv 2 \pmod{4}$ olup, yukarıdaki konjektürün sağlandığı görülür. Çarkların (-1)-Kordiyalitesi incelendiğinde; $\forall n \geq 3$ için W_n çarkının (-1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 0,2 \pmod{4}$ olmasıdır. "teoremi ispatlandı. Bundan başka, " $\forall n \geq 3$ için W_n çarkı (+1)-Kordiyaldır." teoremi ispatlandı.

F_n yelpazeleri üzerinde yapılan çalışmalarda, " $\forall n \geq 2$ için, F_n yelpazesinin S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ 'tür" teoremi ispatlandı. Buna göre, $n+1$ tepeli F_n yelpazesi için, $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ için, $n+1 \not\equiv 2 \pmod{4}$ olup, İ. Cahit'in konjektürü sağlanır. Ayrıca, " $\forall n \geq 2$ için F_n yelpazesinin (-1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 0,2 \pmod{4}$ 'tür." teoremi ile " $\forall n \geq 2$ için, F_n yelpazesinin (+1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 2,3 \pmod{4}$ 'tür" teoremi ispatlandı.

$P(n,m)$ Petersen grafları üzerinde yapılan incelemede; " $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için $P(n,2)$ Petersen grafinin S-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür" teoremi ispatlandı. Buna göre, $2n$ tepeli $P(n,2)$ Petersen grafi için $n \not\equiv 1 \pmod{4}$ ise, $n+1 \not\equiv 2 \pmod{4}$ olup, İ. Cahit'in konjektürü sağlanır. Ayrıca, " $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen Grafinin (-1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür" teoremi ile " $1 < m < n/2$, $m = 2$, $n \geq 5$ için, $P(n,2)$ Petersen Grafinin (+1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşul $n \not\equiv 1,3 \pmod{4}$ 'tür" teoremi ispatlandı.

Ayrıca, birleştirilmiş graflar sınıfına giren düzgün altıyüzlünün, düzgün sekizyüzlünün, düzgün onikiyüzlünün ve düzgün yirmiyüzlünün grafları üzerinde yapılan inceleme sonunda, düzgün sekizyüzlünün grafi dışındaki grafların, S-Kordiyal oldukları görülür. Düzgün sekizyüzlünün grafi $n = 6$ tepeli olduğundan, $n \equiv 2 \pmod{4}$ denkliği elde edilir. Bu durumda, yukarıda belirtilen konjektürün sağlanmadığı görülür. Bunlardan başka, incelenen tüm düzgün çokyüzlülerin graflarının hem (-1)-Kordiyal hem de (+1)-Kordiyal oldukları saptanır.



KAYNAKÇA

- [1] Arısoy, M., "Bir Grafın Karakteristik Polinomunun Çarpanlara Ayrılması" , Eğitim Bilimleri Dergisi, Buca Eğitim Fak. Yayın Organı, Yıl:2 Sayı:2, İzmir, (1993), 33-39.
- [2] Arısoy, M., "Bir Grafın Verilen Bir Yüzeyde Yerleştirilmesi ve Düzlemsel Graflar", Yıldız Teknik Üniv. Dergisi, Sayı:4, İstanbul, (1994), 36-42.
- [3] Biggs, N., "Algebraic Graph Theory", Cambirdge University Press., (1974).
- [4] Cahit, I., "Cordial Graphs : A Weaker Version of Graceful and Harmonious Graphs", Ars Combinatoria, 23, (1987).
- [5] Cahit, I., ve Ünveren A., "M-Cordiyal Graphs", 7. Ulusal Matematik Sempozyumu, Bilkent Üniversitesi, Ankara, Ağustos, (1994).
- [6] Cahit, I., ve Yılmaz, R., " E_3 -Kordiyal Graphs", Ars Combinatoria, submitted.
- [7] Cahit, I., "S-Cordial Graphs", Ars Combinatorics, Probability and computing, submitted.
- [8] Cahit, I., "H-Cordial Graphs", Bull. of the ICA, submitted.
- [9] Cahit, I., "Recent Results and open Problems on Cordial Graphs", in : Comtemporary Methods in Graphs Theory , (ed.R.Bodendiek), Wissenschaftsverlag, Mannheim, (1990).
- [10] Gibbons, A., "Algorithmic Graph Theory", Department of Computer Sciences, University of Worwikk, London, (1985).
- [11] Hartsfield, N., and Ringel, G., "Pearls in Graph Theory", Academic Press inc. (1990), p.15 .



- [12] Holton, D.A., and Sheedon J., "The Petersen Graph", Cambridge University Press, (1993), 43-45.
- [13] Hovey, M., "A-Cordial Graphs", Discrete Math., (1991), 3, 183-184.
- [14] Kirchher, W.W., "Algebraic Approaches to Cordial Labelling", in : Graph Theory, Combinatics, Algorithms and Applications, (eds. Y. Alavi, F.Chung, R.Graham, D.Hsn), SIAM Procceding Series, 2nd Edition, Philadelphia, Chapter 27, (1989).
- [15] Wilson, R.J., "Introducation to graph theory", Academic Press, New York, (1972).



TÜRKÇE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :

(TÜBİTAK/TÜRDOK'un Abstrakt Hazırlama Kılavuzunu kullanınız.)

ÖZ

KORDİYAL GRAFLAR VE
UYGULAMALARI

Nuran KEMANKAŞLI

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi/Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet Arısoy)

Balıkesir, 1996

Bu çalışmada, birleştirilmiş graflar sınıfına giren çarkların, yelpazelerin, petersen graflarının S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralanması incelenmiştir. Bu grafların S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal olması için gerek ve yeter koşullu teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Bu teoremlerin ispatı için gerekli temel kavramlar saptanmış, bu temel kavramların tanımları yapılmış ve birer örnek yardımı ile ikinci bölümde açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, literatürde görülen bazı kordiyal graflar hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, çarklar, yelpazeler ve petersen grafları ile ilgili teoremler ortaya atılmıştır. Beşinci bölümde, düzgün altı yüzlü, düzgün sekizyüzlü, düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmi yüzünün tanımları verilerek, bu grafların S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal numaralanmaları incelenmiştir.

Bu çalışmada ortaya atılan teoremlerde belirtilen grafların ayrıtlarının ve tepelerinin numaralanmasında $\{-1, +1\}$ kümesinin elemanları kullanılmıştır. Her bir teoremin gereklilik koşulu almayan birgi metodu ile ispatlanmıştır. Teoremin genel ispatı verildikten sonra incelenen grafin S-Kordiyal, (+1)-Kordiyal ve (-1)-Kordiyal olan ya da olmayan numaralanmaları şekiller çizilerek gösterilmiştir.

Yapılan inceleme sonunda, $n \equiv 2 \pmod{4}$ denkleğini sağlayan n tepeli birleştirilmiş grafların S-Kordiyal olmadıkları görülmüştür.

ABSTRACT

CORDIAL GRAPHS AND
APPLICATIONS

Nuran KEMANKAŞLI

Balıkesir University, Institute of Science, Department of
Mathematics Education

(M.Sc. Thesis / Supervisor: Doç. Dr. Mehmet ARISOY)

Balıkesir, TURKEY-1996

In this thesis, S -Kordial, $(+1)$ -Kordial and (-1) -Kordial labelling of wheels, fans and Petersen graphs, which are subclasses of connected graphs have been investigated. In order to prove related theorems, the fundamental concepts have been determined and shown by examples in chapter 2. In chapter 3, it has been given the knowledge about some of the cordial graphs found in the literature. In chapter 4, new theorems due to wheels, fans and Petersen graphs have been performed. In chapter 5, definitions of cube, Octahedron, Dodecahedron, Icosahedron have been given and S -Kordial, $(+1)$ -Kordial and (-1) -Kordial labelling of these graphs have been investigated.

In this work, we have used $\{-1, +1\}$ set in order to number of vertex and edges of the graphs which have been defined by the theorems and the necessity of each theorem has been proved by contradiction.

After giving the general proof of the theorem, the graphs which are investigated here, have been labelled with figures according to whether they are S -Kordial, $(+1)$ -Kordial and (-1) -Kordial or not.

As a result, it has been seen that for $n \equiv 2 \pmod{4}$ the connected graphs with n vertex have been not found S -Kordial