

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



KUVVETSEL DARALMALAR İLE SABİT NOKTA TEORİSİ
ÜZERİNE

YAĞMUR YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Nihal TAŞ (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Doç. Dr. Elif KAPLAN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2026

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Kuvvetsel Daralmalar ile Sabit Nokta Teorisi Üzerine**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Yağmur YILMAZ

ÖZET

**KUVVETSEL DARALMALAR İLE SABİT NOKTA TEORİSİ ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YAĞMUR YILMAZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. NİHAL TAŞ)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2026

Toplam beş ana başlıktan meydana gelen bu tezde, metrik uzaylar bağlamında rasyonel yapılı kuvvetsel daralma dönüşümleri temel alınarak bir dizi sabit nokta sonucu ortaya konmuş ve doğruluğu kanıtlanmıştır. Teorik çerçevede ulaşılan bu bulgular, literatürdeki boşlukları dolduracak nitelikteki özgün örneklerle somutlaştırılarak pekiştirilmiştir.

Bu tezde birinci bölüm literatür özetinin ve çalışılan konunun tarihçesinin verildiği giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, metrik uzaylar üzerinde çeşitli rasyonel formda kuvvetsel daralmalar tanımlanıp, bu daralmalar kullanılarak sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, metrik uzaylar bünyesindeki sabit nokta kuramına geometrik bir perspektif kazandırmak amacıyla, literatüre özgün sabit disk bulguları kazandırılmıştır.

Beşinci bölüm ise sonuç ve öneriler bölümüdür.

ANAHTAR KELİMELELER: Kuvvetsel daralma, metrik uzay, sabit disk, sabit nokta

Bilim Kod / Kodları : 20405

Sayfa Sayısı : 52

ABSTRACT

**ON FIXED POINT THEORY WITH INTERPOLATIVE CONTRACTIONS
MSC THESIS
YAĞMUR YILMAZ
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. NİHAL TAŞ)

BALIKESİR, JUNE - 2026

This thesis, consisting of five main chapters, establishes and proves a series of fixed point results by employing rational-type interpolative contraction mappings within the framework of metric spaces. These findings, obtained within a theoretical context, are further substantiated through original examples that serve to bridge existing gaps in the literature.

In this thesis, the first chapter is the introduction, where the literature review and the history of the subject matter are presented.

The second chapter includes the fundamental concepts used in this thesis.

In the third chapter, various interpolative contractions in rational form on metric spaces are defined, and fixed point results are obtained using these contractions.

In the fourth chapter, in order to provide a geometric perspective to fixed point theory within the framework of metric spaces, original fixed-disc findings are introduced to the literature.

The fifth chapter is the conclusion and suggestions section.

KEYWORDS: Interpolative contraction, metric space, fixed disc, fixed point

Science Code / Codes : 20405

Page Number : 52

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
1. GİRİŞ	6
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
3. RASYONEL FORMDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	13
3.1 Dass-Gupta Formunda Sabit Nokta Sonuçları	13
3.2 Jaggi Formunda Sabit Nokta Sonuçları	22
3.3 Barada Formunda Sabit Nokta Sonuçları	31
4. RASYONEL FORMDA BAZI SABİT DİSK TEOREMLERİ	42
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
6. KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	52

SEMBOL LİSTESİ

(Δ, ρ)	: Metrik Uzay
$\{\xi_k\}$: Dizi
Φ	: Tüm karşılaştırma fonksiyonlarının sınıfı
Ψ	: Tüm (c) – karşılaştırma fonksiyonlarının sınıfı
$Fix(\kappa)$: κ fonksiyonunun sabit nokta kümesi
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
$C_{\xi_0, \mu}$: ξ_0 merkezli μ yarıçaplı çember
$D_{\xi_0, \mu}$: ξ_0 merkezli μ yarıçaplı disk

ÖNSÖZ

Tezimin hazırlanması sürecinde bilgi ve deneyimiyle bana yol gösteren, akademik desteğini ve kıymetli katkılarını her aşamada hissettiren danışman hocam Doç. Dr. Nihal Taş'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tez sürecinin planlanmasından tamamlanmasına kadar geçen süreçte göstermiş olduğu sabır, anlayış ve yönlendirmeleri için kendisine minnettarım. Akademik birikimi ve rehberliği, bu çalışmanın şekillenmesinde büyük rol oynamıştır.

Anneme ve babama; beni bugünlere getiren emekleri, hiçbir zaman eksilmeyen sevgileri, sabırları ve her koşulda yanımda oluşları için yürekten teşekkür ederim. En zor anlarımda bile bana inanan, yolumu aydınlatan ve her defasında yeniden ayağa kalkmamı sağlayan onların varlığı, bu sürecin en kıymetli gücü olmuştur.

Kardeşlerim Buse ve Yasemin ile Gülcan halama; hayatımın her döneminde yanımda oldukları, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemedikleri, zor zamanlarımda beni yalnız bırakmayarak güç verdikleri ve varlıklarını her an hissettirdikleri için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Biricik kızım Alara'ya; varlığıyla hayatıma kattığı tarifsiz anlam, bana verdiği güç ve her şeye rağmen ilerleyebilmem için en büyük motivasyonum olduğu için sonsuz teşekkür ederim. Onun gözlerindeki umut ve sevgisi, bu zorlu yolculukta bana her gün yeniden devam etme cesareti vermiştir.

Balıkesir, 2026

Yağmur YILMAZ

1. GİRİŞ

Matematiksel analizin en temel ve uygulama alanı en geniş dallarından biri olan sabit nokta teorisi, bir κ fonksiyonu için $\kappa\xi = \xi$ denklemini sağlayan ξ noktalarının varlığını, tekliğini ve bu noktalara ulaşma yöntemlerini inceler. Bu teoremin temelleri, 1922 yılında Stefan Banach tarafından ortaya atılan ve literatürde “Banach Daralma İlkesi” olarak bilinen çalışma ile atılmıştır [1]. Banach’ın bu teoremi, tam bir metrik uzay üzerindeki her daralma dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu garanti eder ve bu noktaya ardışık yaklaşımlar yöntemiyle nasıl ulaşılabileceğini gösterir. Banach’tan sonra sabit nokta teorisi, daralma koşullarının esnetilmesi ve farklı uzay yapılarının tanımlanmasıyla hızla gelişmiştir. 1960’lı ve 70’li yıllarda matematikçiler, rasyonel ifadeler içeren daralma koşulları üzerine yoğunlaşmışlardır. Özellikle Jaggi [2], Dass-Gupta [3] ve Barada [4] gibi araştırmacılar, klasik daralma koşullarını rasyonel fonksiyonlarla birleştirerek yeni teoremler geliştirmişlerdir. Bu tür rasyonel formdaki daralmalar, fonksiyonun davranışını daha esnek bir şekilde analiz etmeye olanak tanır.

Literatürdeki bir diğer önemli dönüm noktası, 1969 yılında Meir ve Keeler tarafından tanımlanan “Meir-Keeler tipi daralma” kavramıdır [5]. Bu kavram, klasik daralma sabitini (ε, δ) tipi bir süreklilik koşuluyla değiştirerek teoriyi daha genel bir boyuta taşımıştır. Son yıllarda ise bu geleneksel yaklaşımlar, “kuvvetsel” yaklaşımlarla birleştirilmiştir. Karapınar tarafından literatüre kazandırılan bu yaklaşım, sabit nokta sonuçlarını elde ederken metrik değerlerin kuvvetlerini kullanarak daha genel bir çerçeve sunar [6].

Ayrıca, sabit nokta teorisine son yıllarda eklenen dikkat çekici bir perspektif de geometrik yaklaşımlardır. Klasik teoride odak noktası genellikle fonksiyonun sabit bıraktığı tek bir “nokta” iken; Özgür ve Taş’ın çalışmalarıyla birlikte, fonksiyonun sabit bıraktığı “disk” $D_{x_0, r}$ veya “çember” $C_{x_0, r}$ gibi geometrik yapılar da incelenmeye başlanmıştır [7-10]. Bu bağlamda “sabit disk” ve “sabit çember” teoremleri, metrik uzayların geometrik özelliklerini anlamada kritik bir rol oynamaktadır.

Bu tez çalışması, yukarıda özetlenen tarihsel süreçten hareketle; Dass-Gupta, Jaggi ve Barada tipindeki daralma koşullarını rasyonel ve kuvvetsel formda yeniden tanımlayarak, metrik uzaylar üzerinde yeni sabit nokta ve sabit disk sonuçları elde etmeyi amaçlamaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması boyunca yardımcı olacak temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1. $\Delta \neq \emptyset$ ve $\kappa : \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun.

$$\kappa\xi = \xi$$

eşitliğini sağlayan bir $\xi \in \Delta$ elemanına κ fonksiyonunun bir sabit noktası denir. Bir κ fonksiyonunun sabit nokta kümesi $Fix(\kappa)$ ile gösterilir [11,12].

Örnek 2.2. $\Delta = \mathbb{R}$ olsun. $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\xi \in \mathbb{R}$ için $\kappa\xi = 7\xi + 5$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\kappa\xi = \xi \Rightarrow 7\xi + 5 = \xi \Rightarrow 6\xi = -5 \Rightarrow \xi = -\frac{5}{6}$$

ve böylece

$$Fix(\kappa) = \left\{ -\frac{5}{6} \right\}$$

elde edilir.

Örnek 2.3. $\Delta = \mathbb{R}$ olsun. $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\xi \in \mathbb{R}$ için $\kappa\xi = \xi^2 + 3\xi + 5$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \kappa\xi = \xi &\Rightarrow \xi^2 + 3\xi + 5 = \xi \Rightarrow \xi^2 + 2\xi + 5 = 0 \\ \Delta &= -16 < 0 \end{aligned}$$

ve böylece

$$Fix(\kappa) = \emptyset$$

elde edilir.

Örnek 2.4. $\Delta = \mathbb{C}$ olsun. $\kappa: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu her $\xi \in \mathbb{R}$ için $\kappa\xi = \xi^2 + 3\xi + 5$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\kappa\xi = \xi &\Rightarrow \xi^2 + 3\xi + 5 = \xi \Rightarrow \xi^2 + 2\xi + 5 = 0 \\ \Delta &= -16 \\ \xi_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i \\ \xi_1 &= -1 + 2i \\ \xi_2 &= -1 - 2i\end{aligned}$$

ve böylece

$$\text{Fix}(\kappa) = \{-1 + 2i, -1 - 2i\}$$

elde edilir.

Tanım 2.5 Δ boştan farklı bir küme ve $\rho: \Delta \times \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Her $\xi, \omega \in \Delta$ için

$$\begin{aligned}(M_1) \quad &\rho(\xi, \omega) = 0 \Leftrightarrow \xi = \omega, \\ (M_2) \quad &\rho(\xi, \omega) = d(\omega, \xi), \\ (M_3) \quad &\rho(\xi, \omega) \leq d(\xi, \nu) + d(\nu, \omega)\end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna metrik, (Δ, ρ) uzayına da metrik uzay denir [12,13].

Tanım 2.6. $\Delta = \mathbb{R}$ kümesi ve $\rho: \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu verilsin.

$$\rho(\xi, \omega) = |\xi - \omega|$$

Metriği varsa, (Δ, ρ) uzayına alışılmış metrik uzay denir [14].

Örnek 2.7. $\Delta = \mathbb{R}$ ve Δ kümesi üzerinde $\rho_A(\xi, \omega) = \begin{cases} 1 & , \xi \neq \omega \\ 0 & , \xi = \omega \end{cases}$ ayrık metriği verilsin.

$\xi = 10$ ve $\omega = 5$ olsun. Bu durumda

$$\rho(\xi, \omega) = \rho(10, 5) = |10 - 5| = 5 \text{ ve } \rho_A(\xi, \omega) = \rho_A(10, 5) = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, herhangi bir boştan farklı Δ kümesi üzerinde farklı metrik tanımlanabilir ve metrik kavramı değişikçe uzaklık da değişir.

Tanım 2.8. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\xi \in \Delta$ ve $\{\xi_n\} \subset \Delta$ bir dizi olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(\xi_n, \xi) < \varepsilon$$

ise $\{\xi_n\}$ dizisine ξ noktasına yakınsıyor denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \text{ veya } \xi_n \rightarrow \xi$$

şeklinde gösterilir [11].

Tanım 2.9. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\{\xi_n\} \subset \Delta$ bir dizi olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(\xi_n, \xi_m) < \varepsilon$$

ise $\{\xi_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [11].

Tanım 2.10. (Δ, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer bu uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise (Δ, ρ) metrik uzayı tamdır denir [11].

Tanım 2.11. Eğer $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu artan ve herhangi bir $t \in [0, \infty)$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi^n(t) \rightarrow 0$ ise φ fonksiyonuna bir karşılaştırma fonksiyonu denir. Tüm $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ karşılaştırma fonksiyonlarının sınıfı Φ ile gösterilir [15].

Lemma 2.12. [15] Eğer $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu bir karşılaştırma fonksiyonu ise bu durumda

- (1) $k \geq 1$ için φ nin her φ^k iterasyonu da bir karşılaştırma fonksiyonudur.
- (2) φ fonksiyonu 0 noktasında süreklidir.
- (3) Herhangi $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ dir.

Not 2.13. Ψ sınıfı herhangi $t > 0$ için ψ^n , ψ 'nin n . iterasyonu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$$

olacak şekilde tüm $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer $\Phi \subset \Psi$ ise bu durumda $\psi \in \Psi$ ve herhangi $t > 0$ için $\psi(t) < t$ olduğu açıktır [16].

Her $\psi \in \Psi$ fonksiyonuna bir (c) -karşılaştırma fonksiyonu denir. Eğer ψ bir (c) -karşılaştırma fonksiyonu ise bu durumda herhangi $t > 0$ için $\psi(t) < t$ ve $\psi(0) < 0$ dır [17].

Tanım 2.14. (Δ, ρ) bir metrik uzay olsun. Δ kümesi üzerinde

$$C_{\xi_0, \mu} = \{ \xi \in \Delta : \rho(\xi, \xi_0) = \mu \}$$

kümesine ξ_0 merkezli μ yarıçaplı çember denir. [8].

Örnek 2.15. $\Delta = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzayında $\rho(\xi, \omega) = |\xi - \omega|$ metriği verilsin. Bu durumda Δ üzerinde birim çember

$$C_{0,1} = \{ \xi \in \mathbb{R} : \rho(\xi, 0) = 1 \} = \{ \xi \in \mathbb{R} : |\xi - 0| = 1 \} = \{ \xi \in \mathbb{R} : |\xi| = 1 \} = \{-1, 1\}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.16. (Δ, ρ) bir metrik uzay olsun. Δ kümesi üzerinde

$$D_{\xi_0, \mu} = \{ \xi \in \Delta : \rho(\xi, \xi_0) \leq \mu \}$$

kümesine ξ_0 merkezli μ yarıçaplı disk denir [9-10].

Örnek 2.17. $\Delta = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzayında $\rho(\xi, \omega) = |\xi - \omega|$ metriği verilsin. Bu durumda, Δ kümesi üzerindeki birim disk

$$D_{0,1} = \{\xi \in \mathbb{R} : \rho(\xi, 0) \leq 1\} = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - 0| \leq 1\} = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 1\} = [-1, 1]$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.18. (Δ, ρ) herhangi bir metrik uzay, $\kappa : \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve $C_{\xi_0, \mu}$ bir çember olsun. Her $\xi \in C_{\xi_0, \mu}$ için $\kappa\xi = \xi$ oluyorsa, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberine κ fonksiyonunun bir sabit çemberi ya da κ fonksiyonu $C_{\xi_0, \mu}$ çemberini sabit bırakıyor denir [8].

Örnek 2.19. $\Delta = \mathbb{R}$, $\rho(\xi, \omega) = |\xi - \omega|$ metriği ile alışılmış metrik uzay olsun.

$$C_{2,2} = \{\xi \in \mathbb{R} : \rho(\xi, 2) = 2\} = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - 2| = 2\} = \{0, 4\}$$

ve

$$\kappa\xi = \begin{cases} 2\xi & ; \xi \in (-\infty, 0] \\ \xi & ; \xi \in (0, \infty) \end{cases}$$

olsun. Buradan

$$Fix(\kappa) = [0, \infty)$$

ve

$$\kappa 0 = 2 \cdot 0 = 0, \quad \kappa 4 = 4$$

elde edilir. Bu durumda, $C_{2,2}$ çemberi κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir. Ayrıca

$$C_{2,2} \subset Fix(\kappa) \Rightarrow C_{2,2} = \{0, 4\} \subset Fix(\kappa) = [0, \infty)$$

elde edilir.

Tanım 2.20. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Her $\xi \in D_{\xi_0, \mu}$ için $\xi = \kappa\xi$ oluyorsa $D_{\xi_0, \mu}$ diskinde κ fonksiyonunun bir sabit diski denir [9-10].

Örnek 2.21. $\Delta = \mathbb{R}$, $\rho(\xi, \omega) = |\xi - \omega|$ metriği ile alışılmış metrik uzay olsun.

$$D_{2,2} = \{\xi \in \mathbb{R} : \rho(\xi, 2) \leq 2\} = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - 2| \leq 2\} = [0, 4]$$

ve

$$\kappa\xi = \begin{cases} 2\xi & ; \xi \in (-\infty, 0] \\ \xi & ; \xi \in (0, \infty) \end{cases}$$

olsun. Buradan

$$Fix(\kappa) = [0, \infty)$$

elde edilir. Bu durumda, $D_{2,2}$ diski κ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Ayrıca

$$D_{2,2} \subset Fix(\kappa) \Rightarrow D_{2,2} = [0, 4] \subset Fix(\kappa) = [0, \infty)$$

elde edilir.

3. RASYONEL FORMDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde bazı kuvvetsel daralmalar tanımlanıp, bu daralmalar kullanılarak sabit nokta sonuçları elde edilecektir.

3.1 Dass-Gupta Formunda Sabit Nokta Sonuçları

Tanım 3.1.1. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\xi, \omega \in \Delta \setminus \text{Fix}(\kappa)$ için aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $\gamma \in (0, 1)$ var ise bu durumda κ fonksiyonuna bir rasyonel Dass-Gupta formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma denir.

Verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\mathfrak{R}(\xi, \omega) = (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\omega, \kappa\omega)(1 + \rho(\xi, \kappa\xi))}{1 + \rho(\xi, \omega)} \right)^{1-\gamma}$$

olmak üzere

$$\varepsilon \leq \mathfrak{R}(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır [17].

Lemma 3.1.2. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Dass-Gupta formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \mathfrak{R}(\xi, \omega)$$

dir [17].

İspat. Hipotezden, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \mathfrak{R}(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Buradan,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon \leq \mathfrak{R}(\xi, \omega) \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \mathfrak{R}(\xi, \omega)$$

elde edilir. \square

Teorem 3.1.3. (Δ, ρ) bir tam metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Dass-Gupta formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda, κ fonksiyonunun bir sabit noktası vardır [17].

İspat. $\xi_0 \in \Delta$ herhangi bir nokta ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\xi_k\}$ dizisi

$$\xi_k = \kappa \xi_{k-1} = \kappa^k \xi_0$$

şeklinde tanımlı olsun. Her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\xi_k \neq \xi_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Eğer değilse,

$$\xi_{k_0} = \xi_{k_0+1} = \kappa \xi_{k_0}$$

olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vardır. Bu durumda ξ_{k_0} noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktası olur ve ispat biter.

Şimdi $\rho(\kappa \xi, \kappa \omega) < \mathfrak{R}(\xi, \omega)$ eşitsizliğini kullanalım. Burada, $\xi = \xi_{k-1}$ ve $\omega = \xi_k$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) &= \rho(\kappa \xi_{k-1}, \kappa \xi_k) \\ &< \mathfrak{R}(\xi_{k-1}, \xi_k) \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \kappa \xi_k)(1 + \rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_{k-1}))}{1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})(1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k))}{1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \\ \Rightarrow \frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})}{(\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma}} &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \\ \Rightarrow (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-(1-\gamma)} &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \\ \Rightarrow (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^\gamma &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisinin kesin azalan olduğunu gösterir. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) > 0$$

olduğundan $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisi yakınsaktır ve böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) = \ell$$

olacak şekilde bir $\ell \geq 0$ noktası vardır. $\ell = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Tersine, $\ell > 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon = \ell$ alalım. Hipotezden,

$$\ell < \mathfrak{R}(\xi_{k-1}, \xi_k) < \ell + \delta(\ell) \Rightarrow \rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^\xi, \kappa_{\xi_k}^\xi) \leq \ell$$

olacak şekilde $\delta(\ell) > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan, $\delta(\ell) > 0$ sayısı için

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \rightarrow \ell$$

olduğundan, herhangi $k \geq N$ için

$$\begin{aligned} & \ell < \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < \mathfrak{R}(\xi_{k-1}, \xi_k) \\ & = (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \kappa_{\xi_k}^\xi)(1 + \rho(\xi_{k-1}, \kappa_{\xi_{k-1}}^\xi))}{1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\ & = (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})(1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k))}{1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\ & = (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \\ & \leq \rho(\xi_{k-1}, \xi_k) < \ell + \delta(\ell) \end{aligned}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. Buradan, her $k \geq N$ için

$$\rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^\xi, \kappa_{\xi_k}^\xi) = \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \leq \ell$$

elde edilir. Bu ise, $\ell < \rho(\xi_k, \xi_{k+1})$ ile çelişir. O halde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) = \ell = 0$$

olmalıdır. Şimdi $\{\xi_k\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Lemma 3.1.2'den,

$$\begin{aligned} \rho(\xi_k, \xi_l) &= \rho(\kappa \xi_{k-1}, \kappa \xi_{l-1}) = \rho(\kappa \xi_{l-1}, \kappa \xi_{k-1}) \\ &< \mathfrak{R}(\xi_{l-1}, \xi_{k-1}) \\ &= (\rho(\xi_{l-1}, \xi_{k-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{l-1}, \kappa \xi_{l-1})(1 + \rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_{k-1}))}{1 + \rho(\xi_{l-1}, \xi_{k-1})} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{l-1}, \xi_{k-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{l-1}, \xi_l)(1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k))}{1 + \rho(\xi_{l-1}, \xi_{k-1})} \right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. $k, l \rightarrow \infty$ iken $\rho(\xi_{l-1}, \xi_l) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\rho(\xi_k, \xi_l) \rightarrow 0$$

olur. Bu durumda, $\{\xi_k\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Tamlık hipotezinden,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi^*$$

olacak şekilde $\xi^* \in \Delta$ vardır ve ayrıca

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa \xi_k = \xi^*$$

olduğu elde edilir. Şimdi, ξ^* noktasının κ fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Tersine $\kappa \xi^* \neq \xi^*$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
& 0 < \rho(\xi^*, \kappa\xi^*) \\
& \leq \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\xi_{k+1}, \kappa\xi^*) \\
& = \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\kappa\xi_k, \kappa\xi^*) \\
& < \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \mathfrak{R}(\xi_k, \xi^*) \\
& = \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \left(\rho(\xi_k, \xi^*) \right)^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \kappa\xi_k)(1 + \rho(\xi^*, \kappa\xi^*))}{1 + \rho(\xi^*, \xi_k)} \right)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

olur ve $k \rightarrow \infty$ iken

$$0 < \rho(\xi^*, \kappa\xi^*) < 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak,

$$\kappa\xi^* = \xi^*$$

olmalıdır, yani ξ^* noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. \square

Örnek 3.1.4. [17] $\Delta = [1, \infty)$ ve $\rho: \Delta \times \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $\xi, \omega \in \Delta$ için

$$\rho(\xi, \omega) = \begin{cases} \max\{\xi, \omega\} & , \xi \neq \omega \\ 0 & , \xi = \omega \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, (Δ, ρ) bir metrik uzaydır. Ayrıca, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için

$$\kappa\xi = \begin{cases} 1 & , \xi \in [1, 2] \\ \frac{1}{2} & , \xi \in (2, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi, aşağıdaki durumlar altında κ fonksiyonunun rasyonel Dass-Gupta formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olduğunu gösterelim:

Durum 1: $\xi, \omega \in [1, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = \rho(1, 1) = 0 < \varepsilon$$

her zaman sağlanır.

Durum 2: $\xi, \omega \in (2, \infty)$ olsun. Bu durumda,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = \rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 < \varepsilon$$

her zaman sağlanır.

Durum 3: $\xi \in [1, 2], \omega \in (2, \infty)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\rho(\xi, \omega) &= \max\{\xi, \omega\} = \omega, \\ \rho(\xi, \kappa\xi) &= \max\{\xi, \kappa\xi\} = \max\{\xi, 1\} = \xi, \\ \rho(\omega, \kappa\omega) &= \max\{\omega, \kappa\omega\} = \max\left\{\omega, \frac{1}{2}\right\} = \omega, \\ \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) &= \max\{\kappa\xi, \kappa\omega\} = \max\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = 1,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\xi, \omega) &= (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\omega, \kappa\omega)(1 + \rho(\xi, \kappa\xi))}{1 + \rho(\xi, \omega)} \right)^{1-\gamma} \\ &= \omega^\gamma \left(\frac{\omega(1 + \xi)}{1 + \omega} \right)^{1-\gamma} = \frac{\omega^\gamma \omega^{1-\gamma} (1 + \xi)^{1-\gamma}}{(1 + \omega)^{1-\gamma}} = \frac{\omega(1 + \xi)^{1-\gamma}}{(1 + \omega)^{1-\gamma}}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\gamma = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$\mathfrak{R}(\xi, \omega) = \omega \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \omega}}$$

ve

$$1 < \mathfrak{R}(\xi, \omega) < \omega$$

olur.

Durum 4: $\xi \in (2, \infty), \omega \in [1, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\rho(\xi, \omega) &= \max\{\xi, \omega\} = \xi, \\ \rho(\xi, \kappa\xi) &= \max\{\xi, \kappa\xi\} = \max\left\{\xi, \frac{1}{2}\right\} = \xi, \\ \rho(\omega, \kappa\omega) &= \max\{\omega, \kappa\omega\} = \max\{\omega, 1\} = \omega, \\ \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) &= \max\{\kappa\xi, \kappa\omega\} = \max\left\{\frac{1}{2}, 1\right\} = 1,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\xi, \omega) &= (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\omega, \kappa\omega)(1 + \rho(\xi, \kappa\xi))}{1 + \rho(\xi, \omega)} \right)^{1-\gamma} \\ &= \xi^\gamma \left(\frac{\omega(1 + \xi)}{1 + \xi} \right)^{1-\gamma} = \frac{\omega^\gamma \omega^{1-\gamma} (1 + \xi)^{1-\gamma}}{(1 + \xi)^{1-\gamma}} = \xi^\gamma \omega^{1-\gamma}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\gamma = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$\mathfrak{R}(\xi, \omega) = \sqrt{\xi\omega}$$

ve

$$1 < \mathfrak{R}(\xi, \omega) < \sqrt{2\xi} < \xi$$

olur.

ϖ (ξ ya da ω) $\in (2, \infty)$ alalım. $\delta(\varepsilon)$ sayısını

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \varpi - \varepsilon & , \quad \varepsilon \geq 1 \\ \varpi & , \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$1 < \mathfrak{R}(\xi, \omega) < \varepsilon + \varpi - \varepsilon = \varpi$$

olduğundan

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) \leq 1$$

elde edilir. Sonuç olarak κ fonksiyonu rasyonel Dass-Gupta formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralmasıdır. Ayrıca, κ fonksiyonu

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \mathfrak{R}(\xi, \omega)$$

eşitsizliğini de sağlar. Çünkü,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = 1 < \mathfrak{R}(\xi, \omega) < \varpi$$

dir. Teorem 3.1.3'den, κ ilgili fonksiyonu, yalnızca bir sabit noktaya sahip olup bu nokta $\xi = 1$ olarak belirlenmiştir.

Tanım 3.1.5. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa : \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\xi, \omega \in \Delta$ için aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\gamma \in [0, 1)$ varsa bu durumda κ fonksiyonuna Δ üzerinde bir rasyonel *Dass-Gupta* _{ψ} formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma denir:

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \psi(\mathfrak{R}(\xi, \omega)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır [18].

Lemma 3.1.6. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa : \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel *Dass-Gupta* _{ψ} formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \psi(\mathfrak{R}(\xi, \omega))$$

dir [18].

İspat. Hipotezden, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \psi(\mathfrak{R}(\xi, \omega)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon \leq \psi(\mathfrak{R}(\xi, \omega)) \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \psi(\mathfrak{R}(\xi, \omega))$$

elde edilir. \square

Teorem 3.1.7. (Δ, ρ) bir tam metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel *Dass-Gupta* _{ψ} formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Buna göre, κ fonksiyonunun en az bir sabit noktasının varlığı garanti edilmektedir [18].

İspat. Her $k \geq 0$ için Δ de $\{\xi_k\}$ dizisi

$$\xi_{k+1} = \kappa\xi_k$$

şeklinde tanımlansın. Eğer bazı k_0 için

$$\xi_{k_0} = \xi_{k_0+1}$$

ise bu durumda ξ_{k_0} , κ nin bir sabit noktasıdır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_k \neq \xi_{k+1}$$

olduğunu kabul edelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(\xi_{k+1}, \xi_k) &= \rho(\zeta_k, \kappa \xi_{k-1}) = \rho(\kappa \xi_{k-1}, \kappa \xi_k) \\
&< \psi(\mathfrak{R}(\xi_{k-1}, \xi_k)) \\
&= \psi \left(\left(\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \right)^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \kappa \xi_k)(1 + \rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_{k-1}))}{1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \right) \\
&= \psi \left(\left(\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \right)^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})(1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k))}{1 + \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \right) \\
&= \psi \left(\left(\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \right)^\gamma \left(\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \right)^{1-\gamma} \right) \\
&< \left(\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \right)^\gamma \left(\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \right)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)^\gamma < \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)$$

elde edilir. Bu da $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisinin kesin olarak azalan olduğunu gösterir. Teorem 3.1.3’de kullanılan tekniğe benzer şekilde $\{\xi_k\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve tamlık hipotezinden bu $\{\xi_k\}$ dizisi bir ξ noktasına yakınsar. Sonuç olarak, bu ξ noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. \square

3.2 Jaggi Formunda Sabit Nokta Sonuçları

Bu bölümde, Jaggi formunda daralmalar kullanarak yeni kuvvetsel daralmalar tanımlayıp bazı sabit nokta sonuçları elde edeceğiz.

Tanım 3.2.1. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\xi, \omega \in \Delta \setminus \text{Fix}(\kappa)$ için aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $\gamma \in (0, 1)$ var ise bu durumda κ fonksiyonuna bir rasyonel Jaggi formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma denir.

Verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$J(\xi, \omega) = \left(\rho(\xi, \omega) \right)^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa \xi) \rho(\omega, \kappa \omega)}{\rho(\xi, \omega)} \right)^{1-\gamma}$$

olmak üzere

$$\varepsilon \leq J(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa \xi, \kappa \omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır [18].

Lemma 3.2.2. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Jaggi formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < J(\xi, \omega)$$

dir [18].

İspat. Hipotezden, verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq J(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Buradan,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon \leq J(\xi, \omega) \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < J(\xi, \omega)$$

elde edilir. \square

Teorem 3.2.3. (Δ, ρ) bir tam metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Jaggi formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda, κ fonksiyonunun bir sabit noktası vardır [18].

İspat. $\xi_0 \in \Delta$ herhangi bir nokta ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\xi_k\}$ dizisi

$$\xi_k = \kappa\xi_{k-1} = \kappa^k \xi_0$$

şeklinde tanımlı olsun. Her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\xi_k \neq \xi_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Eğer değilse,

$$\xi_{k_0} = \xi_{k_0-1} = \kappa\xi_{k_0}$$

olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vardır. Bu durumda ξ_{k_0} noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktası olur ve ispat biter.

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < J(\xi, \omega)$$

eşitsizliğini kullanalım. Buradan, $\xi = \xi_{k-1}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) &= \rho(\kappa\xi_{k-1}, \kappa\xi_k) \\
&< J(\xi_{k-1}, \xi_k) \\
&= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \kappa\xi_{k-1})(\rho(\xi_k, \kappa\xi_k))}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\
&= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)(\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\
&= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \\
\Rightarrow \frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})}{(\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma}} &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \\
\Rightarrow (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-(1-\gamma)} &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \\
\Rightarrow (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^\gamma &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < \rho(\xi_{k-1}, \xi_k)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisinin kesin azalan olduğunu gösterir. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) > 0$$

olduğundan $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisi yakınsaktır ve böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) = \ell$$

olacak şekilde bir $\ell \geq 0$ noktası vardır.

$\ell = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Tersine, $\ell > 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon = \ell$ alalım. Hipotezden,

$$\ell < J(\xi_{k-1}, \xi_k) < \ell + \delta(\ell) \Rightarrow \rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^\xi, \kappa_{\xi_k}^\xi) \leq \ell$$

olacak şekilde $\delta(\ell) > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan, $\delta(\ell) > 0$ sayısı için

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \rightarrow \ell$$

olduğundan, herhangi $k \geq N$ için

$$\begin{aligned} \ell &< \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < J(\xi_{k-1}, \xi_k) \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \kappa_{\xi_{k-1}}^\xi) \rho(\xi_k, \kappa_{\xi_k}^\xi)}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \rho(\xi_k, \xi_{k+1})}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \\ &< (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^{1-\gamma} \\ &= \rho(\xi_{k-1}, \xi_k) < 1 + \delta(1) \end{aligned}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. Buradan, her $k \geq N$ için

$$\rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^\xi, \kappa_{\xi_k}^\xi) = \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \leq \ell$$

elde edilir. Bu ise,

$$\ell < \rho(\xi_k, \xi_{k+1})$$

ile çelişir. O halde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) = \ell = 0$$

olmalıdır. Şimdi $\{\xi_k\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Lemma 3.2.2'den,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi_k, \xi_l) &= \rho(\kappa \xi_{k-1}, \kappa \xi_{l-1}) < J(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}) \\
&= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_{k-1}) \rho(\xi_{l-1}, \kappa \xi_{l-1})}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1})} \right)^{1-\gamma} \\
&= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{p-1}, \xi_k) \rho(\xi_{k-1}, \xi_l)}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1})} \right)^{1-\gamma} \\
&= \frac{(\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^\gamma}{(\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^{1-\gamma}} (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) (\rho(\xi_{l-1}, \xi_l))^{1-\gamma}) \\
&= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^{2\gamma-1} (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) (\rho(\xi_{l-1}, \xi_l))^{1-\gamma})
\end{aligned}$$

elde edilir. $k, l \rightarrow \infty$ iken $\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \rightarrow 0$ ve $\rho(\xi_{l-1}, \xi_l) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\rho(\xi_k, \xi_l) \rightarrow 0$$

olur. Bu durumda, $\{\xi_k\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Tamlık hipotezinden,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi^*$$

olacak şekilde $\xi^* \in \Delta$ vardır ve ayrıca

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa \xi_k = \xi^*$$

olduğu elde edilir. Şimdi, ξ^* noktasının κ fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Tersine $\kappa \xi^* \neq \xi^*$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
0 &< \rho(\xi^*, \kappa \xi^*) \\
&\leq \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\xi_{k+1}, \kappa \xi^*) \\
&= \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\kappa \xi_k, \kappa \xi^*) \\
&< \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\xi_k, \xi^*) \\
&= \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + (\rho(\xi_k, \xi^*))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) (\rho(\xi^*, \kappa \xi^*))}{\rho(\xi_k, \xi^*)} \right)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

olur ve $k \rightarrow \infty$ iken

$$0 < \rho(\xi^*, \kappa\xi^*) < 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak,

$$\kappa\xi^* = \xi^*$$

olmalıdır. Yani ξ^* noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. \square

Örnek 3.2.4. [18] $\Delta = [1, \infty)$ ve $\rho: \Delta \times \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $\xi, \omega \in \Delta$ için

$$\rho(\xi, \omega) = \begin{cases} \max\{\xi, \omega\} & , \quad \xi \neq \omega \\ 0 & , \quad \xi = \omega \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. (Δ, ρ) bir metrik uzaydır. Ayrıca, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için

$$\kappa\xi = \begin{cases} 1 & , \quad \xi \in [1, 2] \\ \frac{1}{2} & , \quad \xi \in (2, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın [17]. Şimdi κ fonksiyonunun rasyonel Jaggi formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olduğunu gösterelim:

Durum 1: $\xi, \omega \in [1, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = \rho(1, 1) = 0 < \varepsilon$$

her zaman sağlanır.

Durum 2: $\xi, \omega \in (2, \infty)$ olsun. Bu durumda,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = \rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 < \varepsilon$$

her zaman sağlanır.

Durum 3: $\xi \in [1, 2], \omega \in (2, \infty)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi, \omega) &= \max \{ \xi, \omega \} = \omega, \\
\rho(\xi, \kappa\xi) &= \max \{ \xi, \kappa\xi \} = \max \{ \xi, 1 \} = \xi, \\
\rho(\omega, \kappa\omega) &= \max \{ \omega, \kappa\omega \} = \max \left\{ \omega, \frac{1}{2} \right\} = \omega, \\
\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) &= \max \{ \kappa\xi, \kappa\omega \} = \max \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = 1,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
J(\xi, \omega) &= (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)(\rho(\omega, \kappa\omega))}{\rho(\xi, \omega)} \right)^{1-\gamma} \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{\xi\omega}{\omega} \right)^{1-\gamma} = \omega^\gamma \xi^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\gamma = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$1 < J(\xi, \omega) < \omega$$

olur.

Durum 4: $\xi \in (2, \infty), \omega \in [1, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi, \omega) &= \max \{ \xi, \omega \} = \omega, \\
\rho(\xi, \kappa\xi) &= \max \{ \xi, \kappa\xi \} = \max \left\{ \xi, \frac{1}{2} \right\} = \xi, \\
\rho(\omega, \kappa\omega) &= \max \{ \omega, \kappa\omega \} = \max \{ \omega, 1 \} = \omega, \\
\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) &= \max \{ \kappa\xi, \kappa\omega \} = \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} = 1,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
J(\xi, \omega) &= (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)\rho(\omega, \kappa\omega)}{\rho(\xi, \omega)} \right)^{1-\gamma} \\
&= \xi^\gamma \left(\frac{\xi\omega}{\xi} \right)^{1-\gamma} = \xi^\gamma \omega^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\gamma = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$J(\xi, \omega) = \sqrt{\xi\omega}$$

ve

$$1 < J(\xi, \omega) < \xi$$

olur. ϖ (ξ ya da ω) $\in (2, \infty)$ alalım. $\delta(\varepsilon)$ sayısını

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \varpi - \varepsilon & , \quad \varepsilon \geq 1 \\ \varpi & , \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$1 < J(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta = \varepsilon + \varpi - \varepsilon = \varpi$$

olduğundan

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) \leq 1$$

elde edilir. Sonuç olarak κ fonksiyonu rasyonel Jaggi formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralmadır. Ayrıca, κ fonksiyonu

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < J(\xi, \omega)$$

eşitsizliğini de sağlar. Çünkü,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = 1 < J(\xi, \omega) < \varpi$$

dir. Teorem 3.2.2'den, κ ilgili fonksiyonu, yalnızca bir sabit noktaya sahip olup bu nokta $\xi = 1$ olarak belirlenmiştir.

Tanım 3.2.5. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\xi, \omega \in \Delta$ için aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\gamma \in [0,1)$ varsa bu durumda κ fonksiyonuna Δ üzerinde bir rasyonel $Jaggi_\psi$ formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma denir:

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \psi(J(\xi, \omega)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır [18].

Lemma 3.2.6. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde rasyonel $Jaggi_\psi$ formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \psi(J(\xi, \omega))$$

dir [18].

İspat. Hipotezden, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \psi(J(\xi, \omega)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon \leq \psi(J(\xi, \omega)) \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \psi(J(\xi, \omega))$$

elde edilir. \square

Teorem 3.2.7. (Δ, ρ) bir tam metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel $Jaggi_\psi$ formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Buna göre, κ fonksiyonunun en az bir sabit noktasının varlığı garanti edilmektedir [18].

İspat. Her $k \geq 0$ için Δ de $\{\xi_k\}$ dizisi

$$\xi_{k+1} = \kappa \xi_k$$

şeklinde tanımlansın. Eğer bazı k_0 için

$$\xi_{k_0} = \xi_{k_0+1}$$

ise bu durumda ξ_{k_0} , κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_k \neq \xi_{k+1}$$

olduğunu kabul edelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(\xi_{k+1}, \xi_k) &= \rho(\kappa \xi_k, \kappa \xi_{k-1}) \\ &< \psi(J(\xi_k, \xi_{k-1})) \\ &= \psi \left((\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \kappa \xi_k)(\rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_{k-1}))}{\rho(\xi_k, \xi_{k-1})} \right)^{1-\gamma} \right) \\ &= \psi \left((\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})(\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))}{\rho(\xi_k, \xi_{k-1})} \right)^{1-\gamma} \right) \\ &= \psi \left((\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \right) \\ &< (\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma (\rho(\xi_k, \xi_{k+1}))^{1-\gamma} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < \rho(\xi_k, \xi_{k-1})^\gamma < \rho(\xi_k, \xi_{k-1})$$

elde edilir. Bu da $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisinin kesin olarak azalan olduğunu gösterir. Teorem 3.2.3'de kullanılan tekniğe benzer şekilde $\{\xi_k\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve tamlık hipotezinden bu $\{\xi_k\}$ dizisi bir ξ noktasına yakınsar. Sonuç olarak, bu ξ noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. \square

3.3 Barada Formunda Sabit Nokta Sonuçları

Bu bölümde, Barada formunda daralmalar kullanarak yeni kuvvetsel daralmalar tanımlayıp bazı sabit nokta sonuçları elde edeceğiz.

Tanım 3.3.1. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\xi, \omega \in \Delta \setminus \text{Fix}(\kappa)$ için aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $\gamma \in (0, 1)$ var ise bu durumda κ fonksiyonuna bir rasyonel Barada formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma denir:

Verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$B(\xi, \omega) = (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)\rho(\xi, \kappa\omega) + \rho(\omega, \kappa\xi)\rho(\omega, \kappa\omega)}{\max\{\rho(\xi, \kappa\omega), \rho(\omega, \kappa\xi)\}} \right)^{1-\gamma}$$

olmak üzere

$$\varepsilon \leq B(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır [18].

Lemma 3.3.2. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Barada formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < B(\xi, \omega)$$

dir [18].

İspat. Hipotezden, verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq B(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Buradan,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon \leq B(\xi, \omega) \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < B(\xi, \omega)$$

elde edilir. \square

Teorem 3.3.3. (Δ, ρ) bir tam metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Barada formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda, κ fonksiyonunun bir sabit noktası vardır [18].

İspat. $\xi_0 \in \Delta$ herhangi bir nokta ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\xi_k\}$ dizisi

$$\xi_k = \kappa \xi_{k-1} = \kappa^k \xi_0$$

şeklinde tanımlı olsun. Her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\xi_k \neq \xi_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Eğer değilse,

$$\xi_{k_0} = \xi_{k_0+1} = \kappa \xi_{k_0}$$

olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vardır. Bu durumda ξ_{k_0} noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktası olur ve ispat biter.

$$\rho(\kappa \xi, \kappa \omega) < B(\xi, \omega)$$

eşitsizliğini kullanalım. Buradan, $\xi = \xi_{k-1}$ ve $\omega = \xi_k$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) &= \rho(\kappa \xi_{k-1}, \kappa \xi_k) \\ &< B(\xi_{k-1}, \xi_k) \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_{k-1}) \rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_k) + \rho(\xi_k, \kappa \xi_k) \rho(\xi_k, \kappa \xi_{k-1})}{\max \{ \rho(\xi_{k-1}, \kappa \xi_k), \rho(\xi_k, \kappa \xi_{k-1}) \}} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1}) + \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \rho(\xi_k, \xi_k)}{\max \{ \rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1}), \rho(\xi_k, \xi_k) \}} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1})}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1})} \right)^{1-\gamma} \\ &= \rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisinin kesin azalan olduğunu gösterir. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) > 0$$

olduğundan $\{\rho(\xi_k, \xi_{k+1})\}$ dizisi yakınsaktır ve böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) = \ell$$

olacak şekilde bir $\ell \geq 0$ noktası vardır. $\ell = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Tersine, $\ell > 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon = \ell$ alalım. Hipotezden,

$$\ell < B(\xi_{k-1}, \xi_k) < \ell + \delta(\ell) \Rightarrow \rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi}, \kappa_{\xi_k}^{\xi}) \leq \ell$$

olacak şekilde $\delta(\ell) > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan, $\delta(\ell) > 0$ sayısı için

$$\rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \rightarrow \ell$$

olduğundan, herhangi $k \geq N$ için

$$\ell < \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) < B(\xi_{k-1}, \xi_k) = \rho(\xi_{k-1}, \xi_k) < \ell + \delta(\ell)$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. Buradan, her $k \geq N$ için

$$\rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi}, \kappa_{\xi_k}^{\xi}) = \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \leq \ell$$

elde edilir. Bu ise,

$$\ell < \rho(\xi_k, \xi_{k+1})$$

ile çelişir. O halde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) = \ell = 0$$

olmalıdır. Şimdi $\{\xi_k\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Lemma 3.3.2'den,

$$\begin{aligned} \rho(\xi_k, \xi_l) &= \rho(\kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi}, \kappa_{\xi_{l-1}}^{\xi}) < B(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}) \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi})\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}) + \rho(\xi_{l-1}, \kappa_{\xi_{l-1}}^{\xi})\rho(\xi_{l-1}, \kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi})}{\max\{\rho(\xi_{k-1}, \kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi}), \rho(\xi_{l-1}, \kappa_{\xi_{k-1}}^{\xi})\}} \right)^{1-\gamma} \\ &= (\rho(\xi_{k-1}, \xi_{l-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)\rho(\xi_{k-1}, \xi_l) + \rho(\xi_{l-1}, \xi_l)\rho(\xi_{l-1}, \xi_k)}{\max\{\rho(\xi_{k-1}, \xi_l), \rho(\xi_{l-1}, \xi_k)\}} \right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. $k, l \rightarrow \infty$ iken $\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \rightarrow 0$ ve $\rho(\xi_{l-1}, \xi_l) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\rho(\xi_k, \xi_l) \rightarrow 0$$

olur. Bu durumda, $\{\xi_k\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Tamlık hipotezinden,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi^*$$

olacak şekilde $\xi^* \in \Delta$ vardır ve ayrıca

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa \xi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{k+1} = \xi^*$$

olduğu elde edilir. Şimdi, ξ^* noktasının κ fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Tersine $\kappa \xi^* \neq \xi^*$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} 0 &< \rho(\xi^*, \kappa \xi^*) \\ &\leq \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\xi_{k+1}, \kappa \xi^*) \\ &= \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \rho(\kappa \xi_k, \kappa \xi^*) \\ &< \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + B(\xi_k, \xi^*) \\ &= \rho(\xi^*, \xi_{k+1}) + \left(\rho(\xi_k, \xi^*) \right)^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_k, \kappa \xi_k) \rho(\xi_k, \kappa \xi^*) + \rho(\xi^*, \kappa \xi^*) \rho(\xi^*, \kappa \xi_k)}{\max \{ \rho(\xi_k, \kappa \xi^*), \rho(\xi^*, \kappa \xi_k) \}} \right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

olur ve $k \rightarrow \infty$ iken

$$0 < \rho(\xi^*, \kappa \xi^*) < 0$$

bulunur. Bu ise başlangıçtaki varsayımızla çelişmektedir. Bu sebeple,

$$\kappa \xi^* = \xi^*$$

olmalıdır. Yani ξ^* noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. \square

Örnek 3.3.4. [18] $\Delta = [1, \infty)$ ve $\rho : \Delta \times \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $\xi, \omega \in \Delta$ için

$$\rho(\xi, \omega) = \begin{cases} \max \{ \xi, \omega \} & , \quad \xi \neq \omega \\ 0 & , \quad \xi = \omega \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. (Δ, ρ) bir metrik uzaydır. Ayrıca, $\kappa : \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için

$$\kappa_{\xi} = \begin{cases} 1 & , \quad \xi \in [1, 2] \\ \frac{1}{2} & , \quad \xi \in (2, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın [17]. Şimdi κ fonksiyonunun rasyonel Barada formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olduğunu gösterelim:

Durum 1: $\xi, \omega \in [1, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\rho(\kappa_{\xi}, \kappa_{\omega}) = \rho(1, 1) = 0 < \varepsilon$$

her zaman sağlanır.

Durum 2: $\xi, \omega \in (2, \infty)$ olsun. Bu durumda,

$$d(\kappa_{\xi}, \kappa_{\omega}) = \rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 < \varepsilon$$

her zaman sağlanır.

Durum 3: $\xi \in [1, 2], \omega \in (2, \infty)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(\xi, \omega) &= \max\{\xi, \omega\} = \omega, \\ d(\xi, \kappa_{\xi}) &= \max\{\xi, \kappa_{\xi}\} = \max\{\xi, 1\} = \xi, \\ d(\omega, \kappa_{\omega}) &= \max\{\omega, \kappa_{\omega}\} = \max\left\{\omega, \frac{1}{2}\right\} = \omega, \\ d(\xi, \kappa_{\omega}) &= \max\{\xi, \kappa_{\omega}\} = \max\left\{\xi, \frac{1}{2}\right\} = \xi, \\ d(\omega, \kappa_{\xi}) &= \max\{\omega, \kappa_{\xi}\} = \max\{\omega, 1\} = \omega, \\ d(\kappa_{\xi}, \kappa_{\omega}) &= \max\{\kappa_{\xi}, \kappa_{\omega}\} = \max\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B(\xi, \omega) &= (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)\rho(\xi, \kappa\omega) + \rho(\omega, \kappa\omega)\rho(\omega, \kappa\xi)}{\max\{\rho(\xi, \kappa\omega), \rho(\omega, \kappa\xi)\}} \right)^{1-\gamma} \\
&= \omega^\gamma \left(\frac{\xi\xi + \omega\omega}{\max\{\xi, \omega\}} \right)^{1-\gamma} = \omega^\gamma \left(\frac{\xi^2 + \omega^2}{\omega} \right)^{1-\gamma} = \omega^{2\gamma-1} (\xi^2 + \omega^2)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\gamma = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$B(\xi, \omega) = \sqrt{\xi^2 + \omega^2}$$

ve

$$1 < B(\xi, \omega) < \varpi, \quad (\varpi > \omega)$$

olur.

Durum 4: $\xi \in (2, \infty), \omega \in [1, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi, \omega) &= \max\{\xi, \omega\} = \xi, \\
\rho(\xi, \kappa\xi) &= \max\{\xi, \kappa\xi\} = \max\left\{\xi, \frac{1}{2}\right\} = \xi, \\
\rho(\omega, \kappa\omega) &= \max\{\omega, \kappa\omega\} = \max\{\omega, 1\} = \omega, \\
\rho(\xi, \kappa\omega) &= \max\{\xi, \kappa\omega\} = \max\{\xi, 1\} = \xi, \\
\rho(\omega, \kappa\xi) &= \max\{\omega, \kappa\xi\} = \max\left\{\omega, \frac{1}{2}\right\} = \omega, \\
\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) &= \max\{\kappa\xi, \kappa\omega\} = \max\left\{\frac{1}{2}, 1\right\} = 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B(\xi, \omega) &= (\rho(\xi, \omega))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)\rho(\xi, \kappa\omega) + \rho(\omega, \kappa\omega)\rho(\omega, \kappa\xi)}{\max\{\rho(\xi, \kappa\omega), \rho(\omega, \kappa\xi)\}} \right)^{1-\gamma} \\
&= \xi^\gamma \left(\frac{\xi\xi + \omega\omega}{\max\{\xi, \omega\}} \right)^{1-\gamma} \\
&= \xi^\gamma \left(\frac{\xi^2 + \omega^2}{\xi} \right)^{1-\gamma} \\
&= \xi^{2\gamma-1} (\xi^2 + \omega^2)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\gamma = \frac{1}{2}$ olsun. O halde

$$B(\xi, \omega) = \sqrt{\xi^2 + \omega^2}$$

ve

$$1 < B(\xi, \omega) < \varpi', \quad (\varpi' > \xi)$$

olur. ϖ^* (ϖ ya da ϖ') $\in (2, \infty)$ alalım. $\delta(\varepsilon)$ sayısını

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \varpi^* - \varepsilon & , \quad \varepsilon \geq 1 \\ \varpi^* & , \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$1 < B(\xi, \omega) < \varepsilon + \delta = \varepsilon + \varpi^* - \varepsilon = \varpi^*$$

olduğundan

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) \leq 1$$

elde edilir. Sonuç olarak κ fonksiyonu rasyonel Barada formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralmadır. Ayrıca, κ fonksiyonu

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < B(\xi, \omega)$$

eşitsizliğini de sağlar. Çünkü,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) = 1 < B(\xi, \omega) < \varpi^*$$

dir. Teorem 3.3.3'den, κ ilgili fonksiyonu, yalnızca bir sabit noktaya sahip olup bu nokta $\xi = 1$ olarak belirlenmiştir.

Tanım 3.3.5 (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\xi, \omega \in \Delta$ için aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\gamma \in [0, 1)$ varsa bu durumda κ fonksiyonuna Δ üzerinde bir rasyonel Barada ψ formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma denir:

Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \psi(B(\xi, \omega)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır [17].

Lemma 3.3.6. (Δ, ρ) bir metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde rasyonel Barada ψ formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Bu durumda

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \psi(B(\xi, \omega))$$

dir [17].

İspat. Hipotezden, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \psi(B(\xi, \omega)) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Buradan,

$$\rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \varepsilon \leq \psi(B(\xi, \omega)) \Rightarrow \rho(\kappa\xi, \kappa\omega) < \psi(B(\xi, \omega))$$

elde edilir. \square

Teorem 3.3.7. (Δ, ρ) bir tam metrik uzay ve $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu Δ üzerinde bir rasyonel Barada _{ψ} formunda kuvvetsel Meir-Keeler daralma olsun. Buna göre, κ fonksiyonunun en az bir sabit noktasının varlığı garanti edilmektedir [17].

İspat. Her $k \geq 0$ için Δ kümesinde $\{\xi_k\}$ dizisi

$$\xi_{k+1} = \kappa \xi_k$$

şeklinde tanımlansın. Eğer bazı k_0 için

$$\xi_{k_0} = \xi_{k_0+1}$$

ise bu durumda ξ_{k_0} , κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_k \neq \xi_{k+1}$$

olduğunu kabul edelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho(\xi_{k+1}, \xi_k) &= \rho(\kappa \xi_k, \kappa \xi_{k-1}) < \psi(B(\xi_k, \xi_{k-1})) \\ &= \psi \left((\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) \rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1}) + \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \rho(\xi_k, \xi_k)}{\max\{\rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1}), \rho(\xi_k, \xi_k)\}} \right)^{1-\gamma} \right) \\ &= \psi \left((\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) (\rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1}))^{1-\gamma}}{\rho(\xi_{k-1}, \xi_{k+1})} \right) \right) \\ &= \psi \left((\rho(\xi_k, \xi_{k-1}))^\gamma (\rho(\xi_{k-1}, \xi_k))^{1-\gamma} \right) = \psi(\rho(\xi_{k-1}, \xi_k)) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarımla

$$\rho(\xi_{k+1}, \xi_k) < \psi^k(\rho(\xi, \xi_0))$$

olduğu görülür. Şimdi $\{\xi_k\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k \geq n(\varepsilon)} \psi^k(\rho(\xi, \xi_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olsun. $m > n > n(\varepsilon)$ ile $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$\rho(\xi_n, \xi_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(\xi_k, \xi_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(\rho(\xi_1, \xi_0)) \leq \sum_{k \geq n(\varepsilon)}^{m-1} \psi^k(\rho(\xi_1, \xi_0)) < \varepsilon$$

olur. Böylece $\{\xi_k\}$ dizisi bir (Δ, ρ) tam metrik uzayı üzerinde bir Cauchy dizisidir. O halde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi_k = \xi$$

olacak şekilde $\xi \in \Delta$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 0 &< \rho(\xi, \kappa\xi) \leq \rho(\xi, \kappa\xi_k) + \rho(\kappa\xi_k, \kappa\xi) \\ &= \rho(\kappa\xi_k, \xi) + \rho(\kappa\xi_k, \kappa\xi) < \rho(\xi_{k+1}, \xi) + \psi(B(\xi_k, \xi)) \\ &= \rho(\xi_{k+1}, \xi) + \psi^\gamma \left(\left(\rho(\xi_k, \xi) \right)^\gamma \frac{\rho(\xi_k, \kappa\xi_k)\rho(\xi_k, \kappa\xi) + \rho(\xi, \kappa\xi)\rho(\xi, \kappa\xi_k)}{\max\{\rho(\xi_k, \kappa\xi), \rho(\xi, \kappa\xi_k)\}} \right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir ve $k \rightarrow \infty$ iken

$$0 \leq \rho(\xi, \kappa\xi) \leq 0$$

olur. O halde

$$\rho(\xi, \kappa\xi) = 0 \Rightarrow \xi = \kappa\xi$$

elde edilir. Sonuç olarak, ξ noktası κ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. \square

4. RASYONEL FORMDA BAZI SABİT DİSK TEOREMLERİ

Bu bölümde geometrik bir yaklaşım olarak bazı sabit disk sonuçları elde edilecektir.

Teorem 4.1. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve μ sayısı

$$\mu = \inf \{ \rho(\kappa\xi, \xi) : \xi \neq \kappa\xi, \xi \in \Delta \}$$

şeklinde tanımlı olsun. Her $\xi \in \Delta - \text{Fix}(\kappa)$ ve $\gamma \in (0,1)$ için

$$0 < \rho(\kappa\xi, \xi) < \mathfrak{R}(\xi_0, \xi)$$

olacak şekilde bir $\xi_0 \in \Delta$ var ise bu durumda $D_{\xi_0, \mu}$ diski κ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Ayrıca, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberi de κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir [18].

İspat. $\mu = 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} D_{\xi_0, \mu} &= \{ \xi \in \Delta : \rho(\xi, \xi_0) \leq \mu \} \\ &= \{ \xi \in \Delta : \rho(\xi, \xi_0) \leq 0 \} \\ &= \{ \xi_0 \} \end{aligned}$$

olur. ξ_0 noktasının κ fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu göstermek için $\xi_0 \neq \kappa\xi_0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden,

$$\begin{aligned} 0 &< \rho(\kappa\xi_0, \xi_0) < \mathfrak{R}(\xi_0, \xi_0) \\ &= (\rho(\kappa\xi_0, \xi_0))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)(1 + \rho(\xi_0, \kappa\xi_0))}{1 + \rho(\xi_0, \xi_0)} \right)^{1-\gamma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. O halde

$$\kappa\xi_0 = \xi_0$$

elde edilir. $\mu > 0$ ve $\xi \in D_{\xi_0, \mu}$ ($\xi \notin \text{Fix}(\kappa)$) olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned}
& 0 < \rho(\kappa\xi, \xi) < \mathfrak{R}(\xi_0, \xi) \\
& = (\rho(\xi, \xi_0))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)(1 + \rho(\xi_0, \kappa\xi_0))}{1 + \rho(\xi, \xi_0)} \right)^{1-\gamma} \\
& \leq \mu^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)}{1} \right)^{1-\gamma} \\
& = \mu^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)}{1} \right)^{1-\gamma} \\
& \leq (\rho(\xi, \kappa\xi))^\gamma (\rho(\xi, \kappa\xi))^{1-\gamma} \\
& = \rho(\xi, \kappa\xi)
\end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. Bu durumda

$$\kappa\xi = \xi$$

elde edilir. Sonuç olarak, $D_{\xi_0, \mu}$ diski Δ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Benzer şekilde, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberi $D_{\xi_0, \mu}$ diskinin bir sınırı olduğundan bu çember de κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir. \square

Örnek 4.2. [18] $\Delta = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzay olsun ve $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\kappa\xi = \begin{cases} 49 & , \quad \xi = 50 \\ \xi & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $50 \notin \text{Fix}(\kappa)$ olduğundan $\xi = 50$, $\xi_0 = 0$ ve $\gamma = \frac{3}{4}$ için

$$\begin{aligned}
& 0 < \rho(\kappa 50, 50) < \mathfrak{R}(0, 50) \\
& \Rightarrow 0 < \rho(49, 50) < \mathfrak{R}(0, 50) \\
& = (\rho(0, 50))^\gamma \left(\frac{\rho(50, 49)(1 + \rho(0, 0))}{1 + \rho(0, 50)} \right)^{1-\gamma} \\
& \Rightarrow 0 < 1 < 50^\gamma \left(\frac{1}{51} \right)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

$\gamma = \frac{3}{4}$ alınırsa,

$$0 < 1 < \frac{50^{\frac{3}{4}}}{51^{\frac{1}{4}}} \cong \frac{18,8}{2,6} \cong 7,2$$

olur. Ayrıca

$$\mu = \inf \{ \rho(\kappa\xi, \xi) : \xi = 50 \} = 1$$

elde edilir. O halde $D_{0,1} = [-1,1]$ diski ve $C_{0,1} = \{-1,1\}$ çemberi κ nin sırasıyla sabit diski ve sabit çemberidir.

Teorem 4.3. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve μ sayısı da Teorem 4.1'deki gibi tanımlı olsun. Her $\xi \in \Delta - \text{Fix}(\kappa)$ ve $\gamma \in (0,1)$ için

$$0 < \rho(\kappa\xi, \xi) = \mu$$

ve

$$0 < \rho(\kappa\xi, \xi) < B(\xi_0, \xi)$$

olacak şekilde bir $\xi_0 \in \Delta$ var ise bu durumda $D_{\xi_0, \mu}$ diski κ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Ayrıca, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberi de κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir [18].

İspat. $\mu = 0$ olsun. O halde $D_{\xi_0, \mu} = \{\xi_0\}$ olur. $\xi_0 \neq \kappa\xi_0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden,

$$\begin{aligned} & 0 < \rho(\kappa\xi_0, \xi_0) < B(\xi_0, \xi_0) \\ & = (\rho(\xi_0, \xi_0))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)\rho(\xi_0, \kappa\xi_0) + \rho(\xi_0, \kappa\xi_0)\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)}{\max \{ \rho(\xi_0, \kappa\xi_0), \rho(\xi_0, \kappa\xi_0) \}} \right)^{1-\gamma} \\ & = 0 \end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. O halde,

$$\kappa\xi_0 = \xi_0$$

elde edilir. $\mu > 0$ ve $\xi \in D_{\xi_0, \mu}$ ($\xi \notin \text{Fix}(\kappa)$) olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned}
0 &< \rho(\kappa\xi, \xi) < B(\xi_0, \xi) \\
&= (\rho(\xi_0, \xi))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)\rho(\xi_0, \kappa\xi) + \rho(\xi, \kappa\xi)\rho(\xi, \kappa\xi_0)}{\max\{\rho(\xi_0, \kappa\xi), \rho(\xi, \kappa\xi_0)\}} \right)^{1-\gamma} \\
&\leq \mu^\gamma \left(\frac{\rho(\xi, \kappa\xi)\mu}{\mu} \right)^{1-\gamma} \\
&\leq (\rho(\xi, \kappa\xi))^\gamma (\rho(\xi, \kappa\xi))^{1-\gamma} \\
&= \rho(\xi, \kappa\xi)
\end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. Bu durumda

$$\kappa\xi = \xi$$

elde edilir. Sonuç olarak, $D_{\xi_0, \mu}$ diski κ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Benzer şekilde, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberi $D_{\xi_0, \mu}$ diskinin bir sınırı olduğundan bu çember de κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir. \square

Örnek 4.4. [18] $\Delta = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzay ve $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da Örnek 4.2'deki gibi tanımlı olsun. $\xi = 50$, $\xi_0 = 0$ ve $\gamma = \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned}
0 &< \rho(\kappa 50, 50) < B(0, 50) \\
\Rightarrow 0 &< 1 < (\rho(0, 50))^\gamma \left(\frac{\rho(0, \kappa 0)\rho(0, \kappa 50) + \rho(50, \kappa 50)\rho(50, \kappa 0)}{\max\{\rho(0, \kappa 50), \rho(50, \kappa 0)\}} \right)^{1-\gamma} \\
&= 50^\gamma \left(\frac{50}{50} \right)^{1-\gamma} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\mu = 1$$

elde edilir. O halde, $D_{0,1} = [-1,1]$ diski ve $C_{0,1} = \{-1,1\}$ çemberi κ fonksiyonunun sırasıyla sabit diski ve sabit çemberidir.

$I_\xi: \Delta \rightarrow \Delta$ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için $I_\xi(\xi) = \xi$ şeklinde tanımlı özdeşlik fonksiyonu olsun. Aşağıdaki teoremden bir fonksiyonun Jaggi formunda bir koşul altında özdeşlik fonksiyonuna eşitliği araştırılmaktadır:

Teorem 4.5. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\kappa : \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve $D_{\xi_0, \mu}$ bir disk olsun. κ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için

$$0 < \rho(\kappa\xi, \xi) < J(\xi_0, \xi)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\kappa = I_\xi$ olmasıdır [18].

İspat. (\Rightarrow): İlk olarak κ fonksiyonunun $D_{\xi_0, \mu}$ diskinin ξ_0 noktasını sabit bıraktığını gösterelim. Bunun için, tersine $\xi_0 \neq \kappa\xi_0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden,

$$\begin{aligned} 0 < \rho(\kappa\xi_0, \xi_0) < J(\xi_0, \xi_0) \\ &= (\rho(\xi_0, \xi_0))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)}{\rho(\xi_0, \xi_0)} \right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. Bu durumda

$$\kappa\xi_0 = \xi_0$$

olmalıdır. $\xi \in \Delta - \{\xi_0\}$ ve $\xi \neq \kappa\xi$ olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned} 0 < \rho(\kappa\xi, \xi) < J(\xi_0, \xi) \\ &= (\rho(\xi_0, \xi))^\gamma \left(\frac{\rho(\xi_0, \kappa\xi_0)\rho(\xi, \kappa\xi)}{\rho(\xi_0, \xi)} \right)^{1-\gamma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise başlangıçtaki varsayımımızla çelişmektedir. Bu sebeple, her $\xi \in \Delta$ için

$$\kappa\xi = \xi$$

Yani,

$$\kappa = I_\xi$$

olmalıdır.

(\Leftarrow): $\kappa = I_\xi$ ise ispatın bu yönü açıktır. \square

Uyarı 4.6. Eğer verilen bir κ fonksiyonu Teorem 4.1 ve Teorem 4.3'ün şartlarını sağlayıp Teorem 4.5'in şartını sağlamıyorsa bu durumda κ fonksiyonu bir özdeşlik dönüşümü olamaz [18].

$\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ yerel integrallenebilir ($[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt kümesi üzerinde integrali sonlu) ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t) dt > 0$$

biçiminde bir fonksiyon olsun [19].

Sonuç 4.7. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve μ sayısı Teorem 4.1'deki gibi tanımlı olsun. Her $\xi \in \Delta - \text{Fix}(\kappa)$ ve $\gamma \in (0, 1)$ için

$$0 < \int_0^{\rho(\kappa\xi, \xi)} \varphi(t) dt < \int_0^{\mathfrak{R}(\xi_0, \xi)} \varphi(t) dt$$

olacak şekilde bir $\xi_0 \in \Delta$ var ise bu durumda $D_{\xi_0, \mu}$ diski κ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Ayrıca, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberi de κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

Uyarı 4.8. Sonuç 4.7'de $\varphi(t) = 1$ alınırsa Teorem 4.1 ve Sonuç 4.7 çakışır.

Sonuç 4.9. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve μ sayısı da Teorem 4.1'deki gibi tanımlı olsun. Her $\xi \in \Delta - \text{Fix}(\kappa)$ ve $\gamma \in (0, 1)$ için

$$0 < \rho(\kappa\xi, \xi_0) = \mu$$

ve

$$0 < \int_0^{\rho(\kappa\xi, \xi)} \varphi(t) dt < \int_0^{\mathfrak{B}(\xi_0, \xi)} \varphi(t) dt$$

olacak şekilde bir $\xi_0 \in \Delta$ var ise bu durumda $D_{\xi_0, \mu}$ diski κ fonksiyonunun bir sabit diskidir. Ayrıca, $C_{\xi_0, \mu}$ çemberi de κ fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

Uyarı 4.10. Sonuç 4.9' da $\varphi(t) = 1$ alınırsa Teorem 4.3 ve Sonuç 4.9 çakışır.

Sonuç 4.11. (Δ, ρ) bir metrik uzay, $\kappa: \Delta \rightarrow \Delta$ bir fonksiyon ve $D_{\xi_0, \mu}$ bir disk olsun. κ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için

$$0 < \int_0^{\rho(\kappa\xi, \xi)} \varphi(t) dt < \int_0^{J(\xi_0, \xi)} \varphi(t) dt$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\kappa = I_\xi$ olmasıdır.

Uyarı 4.12. Sonuç 4.11' de $\varphi(t) = 1$ alınırsa Teorem 4.5 ve Sonuç 4.11 çakışır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisine hem analitik hem de geometrik açılardan yeni yaklaşımlar getirilmiştir. Literatürde yer alan Dass-Gupta, Jaggi ve Barada tipi daralma koşulları, rasyonel ve kuvvetsel formlar kullanılarak Meir-Keeler tipi yaklaşımlarla yeniden tanımlanmıştır. Bu yeni tanımlamalar, fonksiyonların davranışlarını analiz etmede daha esnek bir çerçeve sunmuştur. Tanımlanan rasyonel formdaki kuvvetsel Meir-Keeler daralmaları kullanılarak, tam metrik uzaylar üzerinde çeşitli sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Bu teoremler, klasik daralma prensiplerinin kapsamını genişletmiştir. Sabit nokta teorisine geometrik bir bakış açısı getirilerek, rasyonel formdaki daralmalar altında "sabit disk" ve "sabit çember" sonuçları elde edilmiştir. Özellikle belirli metrik koşullar altında bir fonksiyonun sadece noktaları değil, disk veya çember gibi geometrik yapıları da sabit bırakabileceği gösterilmiştir. Elde edilen tüm teorik sonuçlar, hem sabit nokta varlığını hem de sabit disk oluşumunu gösteren özgün ve açıklayıcı örneklerle desteklenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen bulgular ışığında, gelecekte şu konularda araştırmalar yapılması önerilmektedir:

- Bu tezde metrik uzaylar üzerinde elde edilen sonuçlar; çeşitli geliştirilmiş metrik uzay yapılarına genişletilebilir.
- Rasyonel formdaki kuvvetsel daralmalar, literatürde var olan çeşitli daralma yaklaşımlarıyla birleştirilerek yeni sabit nokta sonuçları araştırılabilir.
- Elde edilen rasyonel formdaki sabit nokta sonuçlarının, integral denklemlerinin çözümü veya dinamik sistemlerin kararlılık analizi gibi uygulamalı matematik alanlarındaki karşılıkları incelenebilir.
- Sabit disk ve sabit çember kavramları, daha yüksek boyutlu uzaylarda sabit küreler veya sabit hiper-yüzeyler gibi yapılar için geliştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Banach, S.** (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
- [2] **Jaggi, D. S.** (1977). Some unique fixed point theorems, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 8(2), 223-230.
- [3] **Dass, B. K. and Gupta, S.** (1975). An extension of Banach contraction principle through rational expression, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(12), 1455-1458.
- [4] **Ray, B. K. and Singh, S. P.** (1978). Fixed point theorems in Banach spaces, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(3), 216-221.
- [5] **Meir, A. and Keeler, E.** (1969). A theorem on contraction mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 28, 326-329.
- [6] **Karapınar, E.** (2021). Interpolative Kannan-Meir-Keeler type contraction, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, 5(4), 611-614.
- [7] **Mlaiki, N., Özgür, N., Taş, N. and Santina, D.** (2023). On the fixed circle problem on metric spaces and related results, *Axioms*, 12, 401.
- [8] **Özgür, N. Y. and Taş, N.** (2019). Some fixed-circle theorems on metric spaces, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42, 1433-1449.
- [9] **Özgür, N.** (2019). Fixed-disc results via simulation functions, *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 2794-2805.
- [10] **Taş, N., Mlaiki, N., Aydi, H. and Özgür, N.** (2021). Fixed-disc results on metric spaces, *Filomat*, 35(2), 447-457.
- [11] **Lipschutz, S.** (1965). General topology, Schaum's Outlines.
- [12] **Munkres, J. R.** (2000). Topology, Prentice Hall.
- [13] **Willard, S.** (1970). General topology, Addison-Wesley Publishing Company.
- [14] **Kılıç, S. A. ve Erdem, M.** (1999). Metrik uzaylar ve topoloji, Vipaş A. Ş..
- [15] **Rus, I. A.** (2001). Generalized contractions and applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca.
- [16] **Hussain, N., Kadelburg, Z., Radenovic, S. and Al-Solamy, F.** (2012). Comparison functions and fixed point results in partial metric spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 605781, 15.
- [17] **Öztürk, A.** (2023). On interpolative R-Meir-Keeler contractions of rational forms, *Filomat*, 37(9), 2879-2885.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [18] **Yılmaz, Y. and Taş, N.** (2026). Some interpolative Meir-Keeler type contractions of rational forms with a fixed-circle application, *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 16(1), 37-56.
- [19] **Branciari, A.** (2022). A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 29 (9), 531-536.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Yağmur Yılmaz

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi	Devam ediyor
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2017
Lise	Kurtuluş Anadolu Lisesi	2012

Yayın Listesi

Yılmaz, Y. and Taş, N. (2026). Some interpolative Meir-Keeler type contractions of rational forms with a fixed-circle application, *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 16(1), 37-56. [**Tezden türetilmiştir**]

Yılmaz, Y. and Taş, N. (2026). Genelleştirilmiş kuvvetsel Meir-Keeler tipi rasyonel daraltmalar üzerine, *Trakya Üniversiteler Birliği, 9. Lisansüstü Öğrenci Kongresi*. [**Tezden türetilmiştir**]