

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK**



**$H(\lambda_6)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT
GRUPLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NUR KESKİN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2012

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK**



**$H(\lambda_6)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT
GRUPLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NUR KESKİN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2012

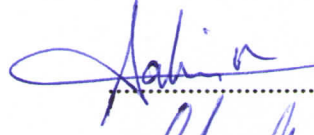
KABUL VE ONAY SAYFASI

Nur KESKİN tarafından hazırlanan “ $H(\lambda_6)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT GRUPLARI” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.06.2012 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

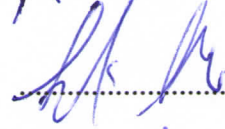
Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Recep ŞAHİN



Üye
Doç. Dr. Fırat ATEŞ



Üye
Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI

.....

ÖZET

**$H(\lambda_6)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT GRUPLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NUR KESKİN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2012

Bu tezde $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt grupları verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olan birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde gerekli olan temel tanımlar, kavramlar, teoremler ve metodlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin ana kısmıdır. $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER:Hecke grubu, üçgen grup.

ABSTRACT

**FINITE SUBGROUPS OF THE HECKE GROUP $H(\lambda_6)$
MSC THESIS
NUR KESKIN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: PROF. DR. RECEP SAHIN

BALIKESİR, JUNE 2012

In this thesis, normal subgroups of finite index in the $H(\lambda_6)$ Hecke group are given.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter which is the introduction the study is introduced.

In the second chapter, the fundamental definitions, notations, theorems and methods which are needed in the other chapters are given.

The third chapter is the main part of the thesis. In this chapter, group presentations, signatures and generators of normal subgroups of finite index in the $H(\lambda_6)$ Hecke group are given.

In the forth chapter, the results obtained in this thesis are given.

KEYWORDS:Hecke group, triangle groups,

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları.....	4
2.2 Ayrık Gruplar.....	5
2.3 Projektif Gruplar.....	5
2.4 Doğrusal Dönüşümler.....	6
2.5 Fuchsian Grupları.....	8
2.6 Permütasyon Metodu.....	9
2.7 Reidemeister-Schreier Metodu.....	12
2.8 Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar.....	12
2.9 Hecke Grupları.....	17
3. $H(\lambda_6)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT GRUPLARI	19
4. SONUÇLAR	57
5. KAYNAKLAR	58

SEMBOL LİSTESİ

$[G, X]$: Topolojik dönüşüm grubu
$GF(p^n)$: p^n mertebeli Galois cismi
$GL(2, K)$: Genel lineer grup
$Z(GL(2, K))$: Genel lineer grubun merkezi
$PGL(2, K)$: Projektif genel lineer grup
$SL(2, K)$: Özel lineer grup
$Z(SL(2, K))$: Özel lineer grubun merkezi
$PSL(2, K)$: Projektif özel lineer grup
C_∞	: Genişletilmiş karmaşık düzlem
$Aut(C_\infty)$: C_∞ un tüm otomorfizmlerinin kümesi
$\overline{Aut}(C_\infty)$: C_∞ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmlerinin kümesi
U	: Üst yarı düzlem $\{z \in \mathbf{C} : \text{Im}(z) > 0\}$
$PSL(2, \mathbf{R})$: $\{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad - bc = 1\}$
G_0	: $\{U \mid U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad - bc = -1\}$
Γ	: Fuchsian gruplar
$(g; m_1, \dots, m_r; t; u)$: Fuchsian grupların simgesi
$\mu(\Gamma)$: Fuchsian grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı
(l, m, n)	: $\langle x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I \rangle$ üçgen grubun simgesi
C_n	: Devirli grup
D_n	: Dihedral grup
S_n	: Simetrik grup
A_n	: Alterne grup
Σ	: Schreier transversali
$[a, b]$: a ile b elemanlarının komütatörü

- $A \times B$** : Direk çarpım grubu
- $A * B$** : Serbest çarpım grubu
- $A *_{\mathbb{H}} B$** : Birleştirilmiş serbest çarpım grubu
- $H(\lambda)$** : Hecke grubu
- $H(\lambda_q)$** : $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ için elde edilen Hecke grubu
- $H(\lambda_6)$** : $\lambda_6 = \sqrt{3}$ için elde edilen Hecke grubu

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkarılmasında akademik bilgi ve birikimiyle bana destek olan danışman hocam Prof. Dr. Recep Şahin'e; kaynaklara ulaşmamda ve çalışmamın birçok aşamasında yardımını gördüğüm hocam Doç. Dr. Sebahattin İkikardeş'e; her aşamada yanımda olan birlikte çalıştığım arkadaşım Betül Filiz'e ve yine yardımlarından dolayı arkadaşım Volkan Yılmaz'a içtenlikle teşekkür ediyorum.

Ayrıca beni yetiştiren ve her zaman yol gösterici olan Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi ve Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki hocalarıma teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde emeklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olup, kahrımı çeken aileme sonsuz teşekkürler.

1.GİRİŞ

Hecke grupları literatüre, E.Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung" isimli çalışması ile girmiştir. $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke grupları, λ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilir, [1]. Ayrıca E. Hecke, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli şartın $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$ olması gerektiğini göstermiştir, [1].

Fuchsian grup kavramı ise Jules Henry Poincare'nin 1880 li yıllarda Paris akademisinin açtığı matematik yarışmasına katılmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu yarışmaya katılan Jules Henry Poincare'nin amacı, 1820 li yıllarda Abel, Gauss ve Jacobi tarafından tanımlanmış Eliptik fonksiyonları genelleştirmektir.

Poincare L.Fuchs'un diferansiyel denklemler hakkındaki bir çalışmasından yararlanarak eliptik fonksiyonlar ailesini, adına Fuchsian fonksiyonlar dediği bir fonksiyon ailesine genişletmeyi başarır. Poincare tarafından Fuchsian fonksiyonlarla olan ilgisi nedeniyle, Fuchsian gruplar adı verilen gruplar literatüre girmiştir.

Literatürde $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarında, $q=3$ değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu daha çok Modüler grup olarak adlandırılır ve $PSL(2, \mathbf{Z})$ ile gösterilir. Modüler

grup matematikçiler tarafından çok çalışılan bir gruptur. Modüler grubun kendisinin yanı sıra önemli bazı alt grupları literatürde çokça kullanılmıştır. M. Newman 1962 ve 1964 yıllarında yaptığı [2-3] nolu makalelerde kuvvet ve komütatör alt gruplarını incelemiş ve bu alt gruplar aralarındaki ilişkiyi göstermiştir. Bununla beraber Newman kuvvet alt gruplarından yararlanarak Modüler grubun serbest alt grupları hakkında da bilgi vermiştir.

Hecke gruplarının $\lambda=\lambda_q=2\cos\frac{\pi}{q}$ için $q=4,6$ değerlerine karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile bunların normal alt grupları Cangül tarafından çalışılmıştır, [4].

Lang, Rosen, Sheingorn, Kulkarni, Schimidt, Fine, Rosenburger, Singerman, Jones, Knopp, Cangül gibi bir çok matematikçi tarafından Hecke gruplar ve Hecke grubunun normal alt grupları hakkında birçok çalışma yapmıştır, [5-10].

1980 li yıllardan itibaren Modüler gruptan yararlanarak tanımlanan, Genişletilmiş Modüler grup $\bar{\Gamma}=\text{PGL}(2,\mathbf{Z})$ ve onun alt gruplarının cebirsel, geometrik ve fonksiyonel özellikleri Jones, Thornton, Sibner ve Mushtag tarafından çalışılmıştır, [11-12].

Conder ve Dobcsányi [13] nolu makalede $4 \leq q \leq 12$ değerlerine karşılık gelen Hecke gruplarının sonlu indeksli normal alt gruplarının sayısını düşük indeksli alt grup algoritmasını kullanarak bulmuştur. Bu tezde Conder ve Dobcsányi'nin makalesindeki sonuçları kullanarak $q = 6$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal altgruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri bulundu.

Tezin ikinci bölümünde tezin daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız bazı temel tanımlar, teoremler, metodlar ve yöntemler verilmiştir. Ana hatlarıyla topolojik

dönüşüm grupları, ayrık gruplar, projektif gruplar, doğrusal dönüşümler, Fuchsian grupları, permütasyon metodu, Reidemeister-Scheier metodu ve Hecke gruplarından bahsedilmiştir.

Tezin son bölümünde ise Conder ve Dobcsányi'nin makalesindeki sonuçlar, Reidemeister-Scheier metodu, permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $q = 6$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal altgruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kavramlar tanımlanmış, temel teoremler ve metotlar verilmiştir.

2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları

2.1.1 Tanım : G bir grup ve X de bir topolojik uzay olsun. Eğer her $a, b \in G$ için

$$f : G \times G \rightarrow G ; f(a,b)=ab,$$

$$g : G \rightarrow G ; g(a)=a^{-1}$$

biçiminde tanımlanan f ve g işlemleri sürekli iseler, G ye bir *topolojik grup* denir, [15].

2.1.2 Tanım : G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$$\Lambda : G \times X \rightarrow X ; \Lambda(g,x)=g \Lambda x$$

sürekli dönüşümü, eğer her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için

$$(i) \quad g \Lambda (h \Lambda x)=gh \Lambda x$$

$$(ii) \quad e \Lambda x=x$$

koşullarını sağlıyorsa $[G, X]$ ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* denir, [15].

2.2 Ayrık Gruplar

2.2.1 Teorem : G bir topolojik grup olsun.

(i) G nin elemanlarının hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değil ise G ye *ayrık grup* denir.

(ii) G nin her g elemanı için $\{g\}$ kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye *ayrık grup* denir.

(iii) G nin her g elemanı G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir.

(iv) G nin birim elemanı olan e, G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir, [15].

2.3 Projektif Gruplar

p bir asal sayı olmak üzere, $q=p^n$ biçimindeki her asal kuvveti için izomorfizm farkıyla GF(q) ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim vardır ve bu q elemanlı cisim Galois cismidir. Bütün sonlu cisimler bu formdadır, [4].

K, $q=p^n$ mertebeli sonlu bir cisim, yani $K=GF(q)$ olsun. $GL(2, K)$ ile gösterilen *genel lineer grup*,

$$GL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu grubun merkezi $Z(GL(2, K))$ ile gösterilir ve $GL(2, K)$ nin normal alt grubudur. Buradan $PGL(2, K)$ ile gösterilen *projektif genel lineer grup*

$$PGL(2, K) = GL(2, K) / Z(GL(2, K))$$

olarak tanımlanır, [4].

$GL(2, K)$ grubunda determinantı 1 olan matrisler bir alt grup oluştururlar ve $SL(2, K)$ ile gösterilen bu alt gruba *özel lineer grup* denir, yani

$$SL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$$

olur. Dolayısıyla $PSL(2, K)$ ile gösterilen *projektif özel lineer grup*,

$$PSL(2, K) = SL(2, K) / Z(SL(2, K))$$

biçiminde tanımlanır, [4].

Sadece sonlu cisimler üzerinde tanımladığımız yukarıdaki dört projektif grup genelde K nın sonsuz bir cisim olması halinde de tanımlanabilir. Bu durumda matrislerin ya da indirgenen kesirli lineer dönüşümlerin tüm katsayıları bu sonsuz cisimden alınır. En çok çalışılan projektif gruplar $PSL(2, \mathbf{Z})$, $PSL(2, \mathbf{R})$ ve $PSL(2, \mathbf{C})$ dir.

2.4 Doğrusal Dönüşümler

C_∞ genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindeki dönüşümlere *doğrusal dönüşüm* veya *Möbius dönüşümü* denir. Bu tip dönüşümlerin kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup $\text{Aut}(C_\infty) = PGL(2, \mathbf{C})$ ile gösterilir. $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$U(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

dönüşümleri de C_∞ un anti-otomorfizmleridir. İki anti-otomorfizmin birleşimi bir otomorfizm ve bir anti-otomorfizm ile bir otomorfizmin birleşimi bir anti-otomorfizmdir. Dolayısıyla C_∞ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmleri bir grup oluşturur ve bu grup $\overline{\text{Aut}}(C_\infty) = \overline{PGL}(2, \mathbf{C})$ biçiminde gösterilir. U bir anti-

otomorfizm olmak üzere $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ ve $\text{UPGL}(2, \mathbf{C})$, $\overline{\text{PGL}}(2, \mathbf{C})$ deki kosetlerdir, yani $[\overline{\text{PGL}}(2, \mathbf{C}) : \text{PGL}(2, \mathbf{C})] = 2$ dir ve buradan $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$, bu grubun normal bir alt grubudur.

U ile üst yarı düzlemi gösterelim yani, $U = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ olsun. Hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini kullanacağız. Bu çalışmada kullanacağımız gruplar hiperbolik geometrinin eşmetrilerinin grupları olduğundan ve hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini seçtiğimizden bu dönüşümlerin gerçel katsayılı olanları ile ilgileneceğiz. Bu nedenle $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ nin bazı dönüşümlerinden oluşan

$$\text{PSL}(2, \mathbf{R}) = \{T \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

ve

$$G_0 = \{U \mid U(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad - bc = -1\}$$

biçimindeki iki alt kümesini alalım ve $G = \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \cup G_0$ kümesini oluşturalım. G kümesinin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğu kolayca görülebilir.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, Möbius dönüşümleri ile matrisler arasında birebir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır.

Bunun için bazı teoremler verelim.

2.4.1 Teorem : $\theta : \text{GL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{C}_\infty)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir, [16].

Dikkat edilirse Teorem 2.4.1 deki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün, k katına da gidebilir. Dolayısıyla birebirlik yoktur.

2.5 Fuchsian Grupları

2.5.1 Tanım : (i) $[G, U]$ topolojik dönüşüm grubunun ayrık alt gruplarına *Öklidyen olmayan kristallografik grup* denir ve kısaca N.E.C. grup şeklinde yazılır.

(ii) $PSL(2, \mathbf{R})$ nin alt grubu olan N.E.C. gruplara *Fuchsian gruplar* denir ve Γ ile gösterilir.

Her Γ Fuchsian grubunun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler : $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

x_1, \dots, x_r (eliptik)

p_1, \dots, p_t (parabolik)

h_1, \dots, h_u (hiperbolik sınır elemanı)

$$\text{Bağıntılar} : x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \dots = x_r^{m_r} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^t p_k \prod_{l=1}^u h_l = 1$$

Γ Fuchsian grubuna

$$(g; m_1, \dots, m_r; t; u) \quad (2.1)$$

simgesine sahiptir denir. Burada $m_1, \dots, m_r \geq 2$ tamsayılarıdır ve bunlara Γ nin *periyotları* denir. g , Γ nin üzerinde ayrık olarak hareket ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir, [4].

2.5.2 Riemann-Hurwitz Formülü : Γ , simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir grup olsun. Γ nin hiperbolik alanını

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

olarak tanımlansın. Eğer $\mu(\Gamma) > 0$ ise simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir Fuchsian grup vardır. Eğer Γ , birinci türden Fuchsian grupsa $\mu(\Gamma) > 0$ dır. Şimdi Γ_1 , Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olsun. O halde

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur. Burada $\mu(\Gamma_1)$ ve $\mu(\Gamma)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir. Bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir, [4].

2.6 Permütasyon Metodu

$H(\lambda_6)$ Hecke grubunun simgesini bulmakta kullanılan bir metottur. Bu metot için şu teoremi verelim.

2.6.1 Teorem : $p+q=r+t$ ve $1 < k_i \leq \infty$ ($1 \leq i \leq q$) olmak üzere Γ grubunun simgesi $(g; m_1, \dots, m_p, n_1 k_1, \dots, n_q k_q)$ ve Γ_1 , Γ grubunun μ indeksli bir normal alt grubu ise Γ_1 alt grubu $(g_1; k_1^{(\mu/n_1)}, \dots, k_q^{(\mu/n_q)})$ simgesine sahiptir. Burada $k_i^{(\mu/n_i)}$, k_i mertebeli elemandan μ/n_i tane var demektir ve g_1 cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile bulunabilir, [17].

Şimdi üçgen gruplardan biraz bahsedelim.

$l, m, n \geq 2$ olacak şekildeki tamsayılar olsun. Açılırları $\pi/l, \pi/m, \pi/n$ olan hiperbolik üçgeni göz önüne alalım. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ yansımalar ve Γ^* grubu bu üç yansıma ile üretilen grup olsun.

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I \rangle$$

Burada σ_1, σ_2 ve σ_3 yön korumayan elemanlar, $\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1$ ve $\sigma_1\sigma_2$ ise yön koruyan elemanlardır. $x = \sigma_2\sigma_3$ ve $y = \sigma_3\sigma_1$ olarak alırsak $xy = \sigma_1\sigma_2$ olarak elde edilir.

Böylece;

- x , A etrafında $2\pi/l$ kadarlık dönme,
- y de B etrafında $2\pi/m$ kadarlık dönme,
- xy ise C etrafında $2\pi/n$ kadarlık dönmedir.

Buradan Γ^* grubunun sadece x, y ve xy yön koruyan eşmetrilerinden oluşan bir Γ alt grubunu

$$\Gamma = \langle x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I \rangle$$

elde ederiz. Bu alt grup bir Fuchsian gruptur ve simgesi $(0;l,m,n)$ dir. Kısaca (l,m,n) biçiminde gösterilir. Bu Γ alt grubuna bir *üçgen grup* denir. Γ alt grubu Γ^* grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur, [18].

Şimdi (l,m,n) gösterimine sahip herhangi bir üçgen grup için şu teoremi verelim:

2.6.2 Teorem : Eğer $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$ ise üçgen grup sonlu, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 1$ ise

sonsuz mertebelidir, [19].

Şimdi çalışmamızda kullandığımız sonlu mertebeli bazı üçgen grupları tanıtalım.

(i) C_n Devirli gruplar : C_n devirli grupların gösterimleri

$$C_n \cong \langle \alpha \mid \alpha^n = I \rangle$$

biçimindedir. Bunların üçgen grubu olarak gösterimleri de her $n \in \mathbb{N}$ için $(1, n, n)$ biçimindedir. Ayrıca m tek sayı olduğunda

$$C_{2m} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^m = I, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$$

olacağından C_{2m} in üçgen grubu olarak gösterimi $(2, m, 2m)$ biçiminde olur, [18].

(ii) D_n Dihedral Gruplar : D_n dihedral gruplar, düzgün n -genlerin simetri grubudur. D_n dihedral grupların grup gösterimleri

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

biçimindedir ve $|D_n| = 2n$ dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi $(2, 2, n)$ veya $(2, n, 2)$ veya $(n, 2, 2)$ biçimindedir, [18].

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar : n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir.

$|S_n| = n!$ ve $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2, 2, 3)$, $A_4 \cong (2, 3, 3)$, $S_4 \cong (2, 3, 4)$ ve $A_5 \cong (2, 3, 5)$ gruplarıdır, [18].

2.7 Reidemeister-Schreier Metodu

Bu kısımda $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçlerini bulmakta kullanılacak bir teknik olan Reidemeister-Schreier metodu verilecektir.

$G, \{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Metot önce H için bir Schreier transversali seçmekle ve sonra da bu transversalin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alınmasıyla, aşağıdaki gibi uygulanır.

Bir Σ Schreier transversali aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(i) $I \in \Sigma$

(ii) Σ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_r} \in \Sigma$

ise $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_{r-1}}$ elemanı da Σ kümesinde olmalı.

Σ, H için Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üreteci aşağıdaki biçimde olacaktır, [4].

$$(\Sigma \text{ nin bir elemanı})x(G \text{ nin bir üreteci})x(\text{önceki çarpımın koset gösterimi})^{-1}$$

2.8 Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar

Şimdi $H(\lambda_q)$ bir serbest çarpım olarak bazı serbest alt gruplara sahip olduğundan, bu alt grupların yapısıyla ilgili bazı sonuçları verelim.

2.8.1 Tanım : X bir F grubunun alt kümesi ve G herhangi bir grup olmak üzere,

$$\phi_0 : X \rightarrow G$$

şeklinde herhangi bir dönüşüm için,

$$\phi : F \rightarrow G$$

ϕ_0 dönüşümünün uzantısı olan tek bir ϕ homomorfizması varsa F grubuna X üzerinde *serbesttir* denir, [20].

X bir F grubunun bir alt kümesi olsun. F , aşağıdaki koşulları sağlayan X tabanı ile bir serbest gruptur: Eğer ϕ , X kümesinden bir H grubu içine herhangi bir fonksiyon ise ϕ homomorfizminin F den H ye bir ϕ^* homomorfizmine tek bir genişlemesi vardır. Burada X e F nin *serbest tabanı* denir, [20].

X serbest tabanının mertebesine F nin *rankı* denir. Eğer $|X|=n$ ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise F , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üzerinde *serbesttir* diyeceğiz ve bunu F_n ile göstereceğiz, [20].

2.8.2 Teorem : İki serbest grubun izomorf olması için gerek ve yeter koşul ranklarının aynı olmasıdır, [20].

0 ranklı bir serbest grup aşıkardır ve 1 ranklı bir serbest grup sonsuz devirlidir.

2.8.3 Teorem : F grubunun bir serbest grup olması için gerek ve yeter koşul F nin $F = \langle X \rangle$ biçiminde bir gösterimi olmasıdır, [21].

2.8.4 Teorem : Her G grubu bir serbest grubun bir homomorfik görüntüsüdür, [20].

2.8.5 Teorem : Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free), yani bir serbest grupta birim eleman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur, [21].

2.8.6 Teorem (Nielsen-Screier) : Bir serbest grubun her alt grubu da serbesttir, [21].

Biçim ve özellik bakımından serbest gruplara en yakın kavram, grupların serbest çarpımlarıdır. Burada çalışmamızda kullanacağımız kadarıyla serbest çarpımların genel özelliklerini [21] nolu kaynaktan yararlanarak vereceğiz.

2.8.7 Tanım : $A = \langle a_1, \dots; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots; S_1, \dots \rangle$ iki grup olsun. A ve B gruplarının $A * B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$\langle a_1, \dots, b_1, \dots; R_1, \dots, S_1, \dots \rangle$$

gösterimli gruptur. Yani G grubunun üreteçleri, A ve B gruplarının üreteçlerinin tümünden ve bağıntıları da A grubunun R_i ve B grubunun S_j bağıntılarının tümünden oluşur. A ve B gruplarına G grubunun *çarpanları* denir, [21].

2.8.8 Tanım : Eğer $A_\alpha = \langle \text{ür}A_\alpha : \text{bağ}A_\alpha \rangle$, $\alpha \in I$ grupların bir koleksiyonu ise bu grupların $G = * A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α gruplarının üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α gruplarının bağıntılarının ayrık birleşimlerinden oluşan gruptur, [21].

2.8.9 Teorem : $G = A * B$ olsun. O zaman $A \rightarrow G$ ve $B \rightarrow G$ eşlemeleri birebir eşlemelerdir. A nın üreteçleri ile üretilen G grubunun alt grubu $\langle A$ grubunun

üreteçleri, A grubunun bağıntıları> biçiminde gösterime sahiptir. Yani A grubuna izomorftur. Benzer durum B içinde geçerlidir. Bu yüzden A ve B, G grubunun alt grupları olarak düşünülebilir, [21].

Bir G grubunun bir serbest çarpım olarak ayrışıp ayrıştırılmayacağını belirlemek önemlidir. G için verilen bir gösterimde G grubunun üreteçlerini, bağıntılar da ayrışacak biçimde iki kümeye bölmeye çalışmak basit bir yöntemdir. Yani $G = \langle R \cup S; \{ \text{sadece R deki üreteçleri içeren bağıntılar} \} \cup \{ \text{sadece S deki üreteçleri içeren bağıntılar} \} \rangle$ biçiminde yazmaya çalışmaktır. Artık G,

$$G_1 = \langle R ; R \text{ deki üreteçleri içeren bağıntılar} \rangle$$

ve

$$G_2 = \langle S; S \text{ deki üreteçleri içeren bağıntılar} \rangle$$

gruplarının serbest çarpımıdır.

Serbest çarpımlar, serbest gruplarla bir çok özelliği paylaşır. Örneğin Kurosh'un teoremi ile serbest gruplar için verilmiş olan Nielsen-Schreier teoremi serbest çarpımlara genişletilmiştir.

2.8.10 Teorem (Kurosh) : G, A_α alt gruplarının çarpımı yani,

$$G = \prod_{\alpha} * A_{\alpha}$$

olsun. Eğer H, G nin bir alt grubu ise

$$H = F * \prod_{\beta} * B_{\beta}$$

olur. Burada F bir serbest grup ve her bir β için B_{β} , bir A_{α} alt grubuna eşleniktir, [4].

2.8.11 Teorem : Eğer $G=A * B$ ve $H \subset A$, $K \subset B$ ise H ve K ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani $\langle H,K \rangle = H * K$ dir, [21].

2.8.12 Tanım : $A = \langle a_1, \dots; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots; S_1, \dots \rangle$ iki grup, $H \subset A$, $K \subset B$ has alt grupları ve $\Phi : H \rightarrow K$ bir izomorfizm olsun. A ve B nin, H yi K ya birleştirerek elde edilen serbest çarpımı, gösterimi

$$G = \langle a_1, \dots, b_1, \dots; R_1, \dots, S_1, \dots, H = \Phi(H) \rangle$$

olan G grubudur. G grubunun üreteçleri A ve B nin üreteçlerinin ayık birleşimidir ve bağıntıları da A ve B nin bağıntıları ile birlikte alt grup izomorfizmini veren bağıntıların ek bir kümesinden oluşur.

H izomorfik resmi ile özdeşlendiği için G , A ve B gruplarının H ile *birleştirilmiş serbest çarpımıdır* denir. Bu çarpım $G = A *_H B$ ile gösterilir. A ile B gruplarına G nin çarpanları denir, [21].

Bir G grubu eğer aşikar olmayan bir H has alt grubu ve her ikisi de aşikar olmayan G_1 ve G_2 grupları için $G = G_1 *_H G_2$ ise G birleştirilmiş bir serbest çarpımdır.

$H = \{1\}$ alınrsa bir serbest çarpım elde edilir. Bu nedenle serbest çarpımlar, birleştirilmiş serbest çarpımların özel halleridir.

2.9 Hecke Grupları

Eric Hecke, 1936 yılında “Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen” adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.9.1 Tanım : λ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Burada $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

elde edilir, [1].

2.9.2 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke gruplarının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$ olmasıdır, [1].

$\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır.

$q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ durumuna karşılık gelen

Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir.

2.9.3 Teorem : $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının grup gösterimi,

$$H(\lambda_q) = \langle T, S \mid T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

şeklinde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır, [4].

3. $H(\lambda_6)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ NORMAL ALTGRUPLARI

Conder ve Dobcsányi [13] nolu makalede $4 \leq q \leq 12$ değerlerine karşılık gelen Hecke gruplarının sonlu indeksli normal alt gruplarının sayısını düşük indeksli alt grup algoritmasını kullanarak bulmuştur. Tezin bu bölümünde Conder ve Dobcsányi'nin bu makalesindeki sonuçlar, Reidemeister-Scheier metodu, permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $q = 6$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal altgruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri verilmiştir.

3.1.1. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 2 indeksli 3 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt gruplar

$$N_1 = \langle TS, TS^2T \mid (TS^2T)^3 = I \rangle$$

$$N_2 = \langle S, TST \mid S^6 = (TST)^6 = I \rangle$$

$$N_3 = \langle T, S^2, STS^5 \mid T^2 = (S^2)^2 = (STS^5)^2 = I \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların grup gösterimleri sırasıyla

$$(0; 3, \infty^{(2)}), (0; 6^{(2)}, \infty), (0; 2^{(2)}, 3, \infty)$$

şeklindedir.

İspat: (i) Eğer N_1 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 2 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_1$ bölüm grubu $(g_1; 2, 2, 1)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_1 = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^1 = I \rangle \cong C_2$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T \}$ transversalini seçersek ve $TS = I$ ($S = T$) olduğunu düşünürsek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(T)^{-1} = ST,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(I)^{-1} = TS,$$

Böylece N_1 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_1 = \langle TS, TS^2T \mid (TS^2T)^3 = I \rangle \cong C_3 * Z$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_1 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$2 = \frac{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_1 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

ii) Eğer N_2 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 2 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_2$ bölüm grubu $(g_2; 2, 1, 2)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_2 = \langle T, S \mid T^2, S^1, (TS)^2 = I \rangle \cong C_2$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T \}$ transversalini seçersek ve $S = I$ olduğunu düşünürsek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(I)^{-1} = S,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(T)^{-1} = TS$$

Böylece N_2 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_2 = \langle S, TST \mid S^6 = (TST)^6 = I \rangle \cong C_6 * C_6$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_2 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$2 = \frac{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_2 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 6^{(2)}, \infty)$$

olarak bulunur.

iii) Eğer N_3 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 2 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_3$ bölüm grubu $(g_3; 1, 2, 2)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_3 = \langle T, S \mid T^1, S^2, (TS)^2 = I \rangle \cong C_2$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, S \}$ transversalini seçersek ve $T = I$ olduğunu düşünürsek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(I)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(S)^{-1} = STS^5,$$

$$T.S.(I)^{-1} = S^2,$$

Böylece N_3 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_3 = \langle T, S^2, STS^5 \mid T^2 = (STS^5)^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_3 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$2 = \frac{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_3 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(2)}, 3, \infty)$$

olarak bulunur

3.1.2. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 3 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt grup;

$$N = \langle T, S^3, S^2TS^4, STS^5 \mid T^2 = (S^3)^2 = (STS^5)^2 = (S^2TS^4)^2 = I \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grubun grup gösterimi

$$(0; 2^{(4)}, \infty)$$

şeklindedir.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 3 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 1, 3, 3)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^1, S^3, (TS)^3 = I \rangle \cong C_3$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, S, S^2 \}$ transversalini seçersek ve $T = I$ olduğunu düşünürsek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$\begin{aligned} I.T.(I)^{-1} &= T, & I.S.(S)^{-1} &= I, \\ S.T.(S)^{-1} &= STS^5, & S.S.(S^2)^{-1} &= I, \\ S^2.T.(S^2)^{-1} &= S^2TS^4, & S^2.S.(I)^{-1} &= S^3, \end{aligned}$$

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$N = \langle T, S^3, S^2TS^4, STS^5 \mid T^2 = (S^3)^2 = (STS^5)^2 = (S^2TS^4)^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$\begin{aligned} [H(\lambda_6) : N] &= (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6))) \\ 3 &= \frac{(2g-2) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + 1}{(2g-2) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{6}\right) + 1} \end{aligned}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N normal alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(4)}, \infty)$$

olarak bulunur.

3.1.3. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 4 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt grup;

$$N = \langle S^2, TS^2T, TSTS^5 \mid (TS^2T)^3 = (S^2)^3 = (TSTS^5) = (S^2TS^5)^\infty = I \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grubun grup gösterimi

$$(0; 3^{(2)}, \infty^{(2)})$$

şeklindedir.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 4 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 2)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T, S, TS \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.(TS)^{-1} = STS^5T,$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2,$$

$$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^5,$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T,$$

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$N = \langle S^2, TS^2T, TSTS^5 \mid (TS^2T)^3 = (S^2)^3 = (TSTS^5)^3 = (S^2TS^5)^\infty = I \rangle \cong C_3 * C_3 * Z$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$4 = \frac{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(2)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.1.4. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 6 indeksli 5 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt gruplar

$$N_1 = \langle TSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T \mid (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = I \rangle$$

$$N_2 = \langle S^3, TS^3T, TSTS^4, TS^2TS^5 \mid (S^3)^2 = (TS^3T)^2 = I \rangle$$

$$N_3 = \langle T, STS^5, S^2TS^4, S^3TS^3, S^4TS^2, S^5TS \mid T^2 = (STS^5)^2 = (S^2TS^4)^2 = (S^3TS^3)^2 = (S^4TS^2)^2 = (S^5TS)^2 = I \rangle$$

$$N_4 = \langle TS^3, STS^2, S^2TS \mid - \rangle$$

$$N_5 = \langle S^3, TS^3T, TSTS^5, TS^2TS^4 \mid (S^3)^2 = (TS^3T)^2 = I \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların grup gösterimleri sırasıyla

$$(0; 3^{(3)}, \infty^{(2)}), (0; 2^{(2)}, \infty^{(3)}), (0; 2^{(6)}, \infty), (1; \infty^{(2)}), (1; 2^{(2)}, \infty)$$

şeklindedir.

İspat: (i) Eğer N_1 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 6 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_1$ bölüm grubu $(g_1; 2, 2, 3)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_1 = \langle T, S \mid T^2 = S^2 = (TS)^3 = I \rangle \cong D_3$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(T)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.(TSTS)^{-1} = STS^5TS^5T,$$

$$S.S.(S)^{-1} = S^2,$$

$$TS.T.(TST)^{-1}=I,$$

$$TS.S.(TST)^{-1}=TS^2T,$$

$$TST.T.(TS)^{-1}=I,$$

$$TST.S.(TS)^{-1}=I,$$

$$TSTS.T.(S)^{-1}=TSTSTS^5,$$

$$TSTS.S.(S)^{-1}=TSTS^2TS^5T,$$

Böylece N_1 normal alt grubunun gösterimi;

$N_1 = \langle TSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T \mid (S^2)^3, (TS^2T)^3, (TSTS^2TS^5T)^3 = I \rangle$ olarak bulunur.

Ayrıca N_1 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N_1] = (\mu(N_1)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$6 = \frac{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_1 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(3)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

ii) Eğer N_2 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 6 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_2$ bölüm grubu $(g_2; 2, 3, 2)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_2 = \langle T, S \mid T^2 = S^3 = (TS)^2 = I \rangle \cong D_3$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T, S, S^2TS, TS^2 \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(I)^{-1} = I,$$

$$\begin{array}{ll}
T.T.(I)^{-1} = I, & T.S.(T)^{-1} = I, \\
S.T.(TS^2)^{-1} = STS^4T, & S.S.(I)^{-1} = I, \\
S^2.T.(TS)^{-1} = S^2TS^5T, & S^2.S.(TST)^{-1} = S^3, \\
TS.T.(S^2)^{-1} = TSTS^4, & TS.S.(TS)^{-1} = I, \\
TS^2T.T.(S)^{-1} = TS^2TS^5, & TS^2T.S.(S)^{-1} = TS^3T,
\end{array}$$

Böylece N_2 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_2 = \langle S^3, TS^3T, TSTS^4, TS^2TS^5 \mid (S^3)^2 = (TS^3T)^2 = I \rangle$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_1 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$\begin{aligned}
[H(\lambda_6) : N_2] &= (\mu(N_2)) / (\mu(H(\lambda_6))) \\
6 &= \frac{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}
\end{aligned}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_1 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(2)}, \infty^{(3)})$$

olarak bulunur.

(iii) Eğer N_3 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 6 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_3$ bölüm grubu $(g_1; 1, 6, 6)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_3 = \langle T, S \mid T^1 = S^6 = (TS)^6 = I \rangle \cong C_6$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, S, S^2, S^3, S^4, S^5 \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(I)^{-1} = T,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$S.T.(S)^{-1} = STS^5,$$

$$S.S.(S^2)^{-1} = I,$$

$$S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS^4,$$

$$S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$$

$$S^3.T.(S^3)^{-1} = S^3TS^3,$$

$$S^3.S.(S^4)^{-1} = I,$$

$$S^4.T.(S^4)^{-1} = S^4TS^2,$$

$$S^4.S.(S^5)^{-1} = I,$$

$$S^5.S.(I)^{-1} = I,$$

$$S^5.T.(S^5)^{-1} = S^5TS,$$

Böylece N_3 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_3 = \langle T, STS^5, S^2TS^4, S^3TS^3, S^4TS^2, S^5TS \mid T^2 = (STS^5)^2 = (S^2TS^4)^2 = (S^3TS^3)^2 = (S^4TS^2)^2 = (S^5TS)^2 = I \rangle$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_3 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N_3] = (\mu(N_3)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$6 = \frac{(2g-2) + 6\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_3 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(6)}, \infty)$$

olarak bulunur.

(iv) Eğer N_4 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 6 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_4$ bölüm grubu $(g_1; 2, 6, 3)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_4 = \langle T, S \mid T^2 = S^6 = (TS)^3 = I \rangle \cong C_6$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, S, S^2, S^3, S^4, S^5 \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(S^3)^{-1} = T,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$S.T.(S^4)^{-1} = STS^5,$$

$$S.S.(S^2)^{-1} = I,$$

$$S^2.T.(S^5)^{-1} = S^2TS^4,$$

$$S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$$

$$S^3.T.(I)^{-1} = S^3TS^3,$$

$$S^3.S.(S^4)^{-1} = I,$$

$$S^4.T.(S)^{-1} = S^4TS^2$$

$$S^4.S.(S^5)^{-1} = I,$$

$$S^5.T.(S^2)^{-1} = S^5TS,$$

$$S^5.S.(I)^{-1} = I,$$

Burada $(S^3T)^{-1} = TS^3$, $(S^4TS^5)^{-1} = STS^2$, $(S^5TS^4)^{-1} = S^2TS$ olduğundan N_4 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_4 = \langle TS^3, STS^2, S^2TS \mid -- \rangle$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_4 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N_4] = (\mu(N_4)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$6 = \frac{(2g-2) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=1$ elde edilir ve N_4 normal alt grubunun simgesi

$$(1; \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

(v) Eğer N_5 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 6 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_5$ bölüm grubu ($g_1; 2, 3, 6$) simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_5 = \langle T, S \mid T^2, S^3, (TS)^6 = I \rangle \cong C_6$$

Burada $T = u^3$ ve $S = u^2$ dönüşümü yapılırsa $TS = u^5$ olur ve böylece bölüm grubu $\langle u \rangle$ grubuna izomorf olur.

$\Sigma = \{ I, T, S, S^2, TS, TS^2 \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.(TS)^{-1} = STS^5T,$$

$$S.S.(S^2)^{-1} = I,$$

$$S^2.T.(TS^2)^{-1} = S^2TS^4T,$$

$$S^2.S.(I)^{-1} = S^3,$$

$$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^5,$$

$$TS.S.(TS^2)^{-1} = I,$$

$$TS^2.T.(S^2)^{-1} = TS^2TS^4,$$

$$TS^2.S.(T)^{-1} = TS^3T,$$

Burada $(STS^5T)^{-1} = TSTS^5$, $(S^2TS^4T)^{-1} = TS^2TS^4$ olduğundan N_5 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_5 = \langle S^3, TS^3T, TSTS^5, TS^2TS^4 \mid (S^3)^2 = (TS^3T)^2 = I \rangle$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_5 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N_5] = (\mu(N_5)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$6 = \frac{(2g-2) + 2\left(1-\frac{1}{2}\right) + 1}{(2g-2) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=1$ elde edilir ve N_5 normal alt grubunun simgesi

$$(1; 2^{(2)}, \infty)$$

olarak bulunur.

3.1.5. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 8 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt grup;

$$N = \langle TSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T \mid (TSTSTSTS^5)^\infty = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 = I \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grubun grup gösterimi

$$(0; 3^{(4)}, \infty^{(2)})$$

şeklindedir.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 8 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 4)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2 = S^2 = (TS)^4 = I \rangle \cong D_4$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.(TSTSTS)^{-1} = STS^5 TS^5 TS^5T,$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2,$$

$$TS.T.(TST)^{-1} = I,$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T,$$

$$TST.T.(TS)^{-1}=I,$$

$$TST.S.(TSTS)^{-1}=I,$$

$$TSTS.T.(TSTST)^{-1}=I,$$

$$TSTS.S.(TST)^{-1}=TSTS^2TS^5T,$$

$$TSTST.T.(TSTS)^{-1}=I,$$

$$TSTST.S.(TSTSTS)^{-1}=I,$$

$$TSTSTS.T.(S)^{-1}=TSTSTSTS^5,$$

$$TSTSTS.S.(TSTST)^{-1}=TSTSTS^2TS^5TS^5T,$$

Burada $(STS^5 TS^5 TS^5T)^{-1} = TSTSTSTS^5$ dir.

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$N= \langle TSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T \mid (TSTSTSTS^5)^\infty = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 = I \rangle \cong C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$8 = \frac{(2g-2) + 4\left(1-\frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(4)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.1.6. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 10 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt grup;

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$N = \langle TSTSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T, TSTSTSTS^2TS^5TS^5T S^5T \mid (TSTSTSTSTS^5)^\infty = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T)^3 = I \rangle \cong C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$10 = \frac{(2g-2) + 5 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan g=0 elde edilir ve N normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(5)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.1.7. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 12 indeksli cinsi 0 olan 2 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt gruplar

$$N_1 = \langle TS^2TSTS^4TS^5T, TS^2TS^2TS^5, TSTSTS^4, S^3, TS^3T, TSTS^3TS^5T, TS^2TS^3TS^4T \mid (S^3)^2 = (TS^3T)^2 = (TS^2TSTS^4TS^5T)^3 = (TSTS^3TS^5T)^2 = (TSTSTS^4)^3 = (TS^2TS^3TS^4T)^3 = (TS^2TS^2TS^5)^3 = I \rangle$$

$$N_2 = \langle TSTSTSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T, TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T \mid (TSTSTSTSTSTS^5)^\infty = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 = ((TS)^3TS^2T(S^5T)^3)^3 = ((TS)^4TS^2T(S^5T)^4)^3 = I \rangle$$
 biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların grup gösterimleri sırasıyla

$$(0; 2^{(4)}, \infty^{(4)}), (0; 2^{(2)}, \infty^{(3)})$$

şeklindedir.

İspat: i) Eğer N_1 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 12 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_1$ bölüm grubu $(g; 2, 3, 3)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_1 = \langle T, S \mid T^2, S^3, (TS)^3 = I \rangle \cong A_4$$

olur. Burada $\Sigma = \{ I, T, S, S^2, TS, TST, TSTS, TS^2T, TS^2TS, TS^2TS^2 \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.(TS^2TS^2)^{-1} = STS^4TS^4T,$$

$$S.S.(S^2)^{-1} = I,$$

$$S^2T.T.(TSTS)^{-1} = S^2TS^5TS^5T,$$

$$S^2.S.(I)^{-1} = S^3,$$

$$TS.T.(TST)^{-1} = I,$$

$$TS.S.(TS^2)^{-1} = I,$$

$$TST.T.(TS)^{-1} = I,$$

$$TST.S.(TSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTS.T.(S^2)^{-1} = TSTSTS^4,$$

$$TSTS.S.(TSTS^2)^{-1} = I,$$

$$TSTS^2.T.(TS^2TS)^{-1} = TSTS^2TS^5TS^4T,$$

$$TSTS^2.S.(TST)^{-1} = TSTS^3TS^5T,$$

$$TS^2.T.(TS^2T)^{-1} = I,$$

$$TS^2.S.(T)^{-1} = TS^3T,$$

$$TS^2T.T.(TS^2)^{-1} = I,$$

$$TS^2T.S.(TS^2TS)^{-1} = I,$$

$$TS^2TS.T.(TSTS^2)^{-1} = TS^2TSTS^4TS^5T,$$

$$TS^2TS.S.(TS^2TS^2)^{-1} = I,$$

$$TS^2TS^2.T.(S)^{-1} = TS^2TS^2TS^5,$$

$$TS^2TS^2.S.(TS^2T)^{-1} = TS^2TS^3TS^4T,$$

Burada $(TSTS^2TS^5TS^4T)^{-1} = TS^2TS^2TS^5$, $(STS^4TS^4T)^{-1} = TS^2TS^2TS^5$, $(S^2TS^5TS^5T)^{-1} = TSTSTS^4$ dir.

Böylece N_1 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_1 = \langle TS^2TSTS^4TS^5T, TS^2TS^2TS^5, TSTSTS^4, S^3, TS^3T, TSTS^3TS^5T, TS^2TS^3TS^4T \mid (S^3)^2 = (TS^3T)^2 = (TS^2TSTS^4TS^5T)^3 = (TSTS^3TS^5T)^2 = (TSTSTS^4)^3 = (TS^2TS^3TS^4T)^3 = (TS^2TS^2TS^5)^3 = I \rangle$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_1 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N_1] = (\mu(N_1)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$12 = \frac{(2g-2) + 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 + 1 + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_1 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(4)}, \infty^{(4)})$$

olarak bulunur.

ii) Eğer N_2 , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 12 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N_2$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 6)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N_2 = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^6 = I \rangle \cong D_6 \text{ olur.}$$

Burada ;

$$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS \}$$

transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$\begin{aligned} I.T.(T)^{-1} &= I, & I.S.(S)^{-1} &= I, \\ T.T.(T)^{-1} &= I, & T.S.(TS)^{-1} &= I, \\ S.T.(TSTSTSTSTS)^{-1} &= ST(S^5T)^5, & S.S.(I)^{-1} &= S^2, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
TS.T.(TST)^{-1} = I, & TS.S.(T)^{-1} = TS^2T, \\
TST.T.(TS)^{-1} = I, & TST.S.(TSTS)^{-1} = I, \\
TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I, & TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^5T \\
TSTST.T.(TSTS)^{-1} = I, & TSTST.S.(TSTSTS)^{-1} = I, \\
TSTSTS.T.(TSTSTST)^{-1} = I, & (TS)^3.S.(TSTST)^{-1} = TSTSTS^2TS^5TS^5T, \\
TSTSTST.T.(TSTSTS)^{-1} = I, & TSTSTST.S.(TSTSTSTS)^{-1} = I, \\
TSTSTSTS.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I, & (TS)^4.S.(TSTSTST)^{-1} = (TS)^3TS^2T(S^5T)^3, \\
TSTSTSTST.T.(TSTSTSTS)^{-1} = I, & TSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTS)^{-1} = I \\
(TS)^5.T.(S)^{-1} = TSTSTSTSTSTS^5 & (TS)^5.S.((TS)^4T)^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^5T)^4,
\end{array}$$

Burada $(STS^5 TS^5 TS^5TS^5TS^5T)^{-1} = TSTSTSTSTSTS^5$ dir.

Böylece N_2 normal alt grubunun gösterimi;

$$\begin{aligned}
N_2 = \langle & TSTSTSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T, TSTSTSTS^2TS^5T \\
& S^5TS^5T, TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T \mid (TSTSTSTSTSTS^5)^\infty = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = \\
& (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 = ((TS)^3TS^2T(S^5T))^3 = ((TS)^4TS^2T(S^5T)^4)^3 = I \rangle \\
& \cong C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca N_2 normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N_2] = (\mu(N_2)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$12 = \frac{(2g-2) + 6 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N_2 normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(6)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.1.8. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 14 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt grup;

$$\begin{aligned} N = \langle & TSTSTSTSTSTSTST^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTST^2TS^5TS^5T, (TS)^3TS^2T \\ & (S^5T)^3, (TS)^4TS^2T(S^5T)^4, TSTSTSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5T \mid (TSTSTSTSTSTSTST)^\infty \\ & = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTST^2TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\ & (TSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = ((TS)^5TS^2T(S^5T)^5)^3 = ((TS)^6TS^2T(S^5T)^6)^3 = I \rangle \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların grup gösterimi

$$(0; 3^{(7)}, \infty^{(2)})$$

şeklindedir.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 14 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 7)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^7 = I \rangle \cong D_7 \text{ olur.}$$

Burada ;

$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTST, TSTSTSTST, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTST \}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$\begin{array}{ll}
S.T.(TS)^6)^{-1}=ST(S^5 T)^6 & S.S.(I)^{-1}= S^2, \\
TS.T.(TST)^{-1}= I, & TS.S.(T)^{-1}= TS^2T, \\
TST.T.(TS)^{-1}= I, & TST.S.(TSTS)^{-1}=I, \\
TSTS.T.(TSTST)^{-1}= I, & TSTS.S.(TST)^{-1}= TSTS^2TS^5T, \\
TSTST.T.(TSTS)^{-1}= I, & TSTST.S.(TSTSTS)^{-1}=I, \\
TSTSTS.T.(TSTSTST)^{-1}= I, & (TS)^3.S.(TSTST)^{-1}= TSTSTS^2TS^5TS^5T, \\
TSTSTST.T.(TSTSTS)^{-1}=I, & TSTSTST.S.(TSTSTS)^{-1}=I, \\
TSTSTSTS.T.(TSTSTSTST)^{-1}=I, & (TS)^4.S.((TS)^3T)^{-1}= (TS)^3TS^2T(S^5T)^3, \\
TSTSTSTST.T.(TSTSTSTS)^{-1}=I & TSTSTSTST.S.(TSTSTSTS)^{-1}=I \\
TSTSTSTSTS.T.(TSTSTSTSTST)^{-1}=I & (TS)^5.S.((TS)^4T)^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^5T)^4, \\
TSTSTSTSTST.T.(TSTSTSTSTS)^{-1}=I & TSTSTSTSTST.S.((TS)^5)^{-1}= I, \\
(TS)^6.T.(S)^{-1}= TSTSTSTSTSTSTS^5 & (TS)^6.S.((TS)^5T)^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^5T)^5
\end{array}$$

Burada $(STS^5 TS^5 TS^5TS^5TS^5TS^5T)^{-1} = TSTSTSTSTSTSTS^5$ dir.

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$\begin{aligned}
N=<TSTSTSTSTSTSTS^5,S^2,TS^2T,TSTS^2TS^5T,TSTSTS^2TS^5TS^5T,(TS)^3TS^2T(S^5T)^3, \\
(TS)^4TS^2T(S^5T)^4,TSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T|(TSTSTSTSTSTSTS^5)^\infty= \\
(S^2)^3=(TS^2T)^3=(TSTS^2TS^5T)^3=(TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3=(TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T)^3= \\
(TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3=((TS)^5TS^2T(S^5T)^5)^3=((TS)^6TS^2T(S^5T)^6)^3=I> \cong \\
C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$14 = \frac{(2g-2) + 7\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan $g=0$ elde edilir ve N normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(7)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.1.9. Teorem: $H(\lambda_6)$ Hecke grubu 16 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir.

Bu alt grup;

$$\begin{aligned} N = \langle & TSTSTSTSTSTSTSTSTSTST^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTST^2TS^5TS^5T, TSTSTSTST^2TS^5T \\ & S^5TS^5T, TSTSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, \\ & TSTSTSTSTSTSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T \mid (TSTSTSTSTSTSTSTSTSTST^5)^\infty = (S^2)^3 = \\ & (TS^2T)^3 = (TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTST^2TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\ & (TSTSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTSTST^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TS)^6 T \\ & S^2(TS^5T)^6 \rangle = I \end{aligned}$$

Ayrıca bu alt grupların grup gösterimi

$$(0; 3^{(8)}, \infty^{(2)})$$

şeklindedir.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 16 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 8)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^8 = I \rangle \cong D_8 \text{ olur.}$$

Burada ;

$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS \}$

transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.((TS)^7)^{-1} = ST(S^5T)^7,$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2,$$

$$TS.T.(TST)^{-1} = I,$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T,$$

$$TST.T.(TS)^{-1} = I,$$

$$TST.S.(TSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I,$$

$$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^5T,$$

$$TSTST.T.(TSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTST.S.(TSTSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTSTS.T.(TSTSTST)^{-1} = I,$$

$$TSTSTS.S.(TSTST)^{-1} = TSTSTS^2TS^5TS^5T,$$

$$TSTSTST.T.(TSTSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTSTST.S.(TSTSTSTST)^{-1} = I,$$

$$TSTSTSTS.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I,$$

$$(TS)^4.S.(TSTSTST)^{-1} = (TS)^3TS^2TS^5TS^5TS^5T,$$

$$TSTSTSTST.T.(TSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$TSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^5.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^5.S.(TSTSTSTST)^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^5T)^4,$$

$$(TS)^5.T.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$TSTSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^6.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^6.S.((TS)^5T)^{-1} = (TS)^5TS^2T(S^5T)^5,$$

$$(TS)^6.T.(TSTSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^6.T.S.(TSTSTSTSTSTSTST)^{-1} = I,$$

$$(TS)^7.T.(S)^{-1} = (TS)^7TS^5$$

$$(TS)^7.S.((TS)^6T)^{-1} = (TS)^6TS^2T(S^5T)^6,$$

$$\begin{array}{ll}
TSTSTS.T.(TSTSTST)^{-1}=I, & TSTSTS.S.(TSTST)^{-1}=TSTSTS^2TS^5TS^5T, \\
TSTSTST.T.(TSTSTS)^{-1}=I, & TSTSTST.S.(TSTSTSTS)^{-1}=I, \\
TSTSTSTS.T.(TSTSTSTST)^{-1}=I, & (TS)^4.S.((TS)^3T)^{-1}=(TS)^3S^2TS^5TS^5TS^5T, \\
TSTSTSTST.T.(TSTSTSTS)^{-1}=I & TSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTS)^{-1}=I \\
(TS)^5.T.(TSTSTSTSTST)^{-1}=I & (TS)^5.S.((TS)^4T)^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^5T)^4, \\
(TS)^5T.T.(TSTSTSTSTS)^{-1}=I & TSTSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTSTS)^{-1}=I \\
(TS)^6.T.(TSTSTSTSTSTSTST)^{-1}=I & (TS)^6.S.((TS)^5T)^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^5T)^5, \\
(TS)^6T.T.(TSTSTSTSTSTS)^{-1}=I & (TS)^6T.S.(TSTSTSTSTSTSTS)^{-1}=I, \\
(TS)^7.T.(TSTSTSTSTSTSTST)^{-1}=I & (TS)^7.S.((TS)^6T)^{-1}=(TS)^6TS^2T(S^5T)^6, \\
(TS)^7T.T.((TS)^8)^{-1}=I & (TS)^7T.S.(TSTSTSTSTSTSTSTS)^{-1}=I, \\
(TS)^8.T.(S)^{-1}=(TS)^8TS^5, & (TS)^8.S.((TS)^7T)^{-1}=(TS)^7TS^2T(S^5T)^7
\end{array}$$

Burada $(STS^5 TS^5 TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^{-1} = TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^5$ dir.

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$\begin{aligned}
N= < TSTSTSTSTSTSTSTSTS^5, S^2,TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T, \\
TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T,TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T,TSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5 \\
TS^5TS^5TS^5T,TSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T,TSTSTSTSTSTSTS \\
TS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T| \\
(TSTSTSTSTSTSTSTSTS^5)^\infty=(S^2)^3=(TS^2T)^3=(TSTS^2TS^5T)^3= (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 \\
=(TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T)^3=(TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3= \\
(TSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3=(TSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5 \\
TS^5T)^3=(TSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = I > \cong C_3 \times C_3 \times C_3 \\
\times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 20 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 10)$ simgesine sahiptir.

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^{10} = I \rangle \cong D_{10} \text{ olur.}$$

Burada ;

$$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTS \}$$

transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.(T)^{-1} = I,$	$I.S.(S)^{-1} = I,$
$T.T.(I)^{-1} = I,$	$T.S.(TS)^{-1} = I,$
$S.T.((TS)^9)^{-1} = ST(S^5T)^9,$	$S.S.(I)^{-1} = S^2,$
$TS.T.(TST)^{-1} = I,$	$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T,$
$TST.T.(TS)^{-1} = I,$	$TST.S.(TSTS)^{-1} = I,$
$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I,$	$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^5T$
$TSTST.T.(TSTS)^{-1} = I,$	$TSTST.S.(TSTST)^{-1} = I,$
$TSTSTS.T.(TSTSTST)^{-1} = I,$	$(TS)^3.S.(TSTST)^{-1} = TSTSTS^2TS^5TS^5T,$
$TSTSTST.T.(TSTSTS)^{-1} = I,$	$TSTSTST.S.(TSTST)^{-1} = I,$
$TSTSTSTS.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I,$	$(TS)^4.S.((TS)^3T)^{-1} = (TS)^3TS^2T(S^5T)^3,$
$TSTSTSTST.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I,$	$TSTSTSTST.S.(TSTSTSTST)^{-1} = I,$
$TSTSTSTSTS.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I,$	$(TS)^5.S.((TS)^4T)^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^5T)^4,$
$TSTSTSTSTST.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I,$	$TSTSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I,$

$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS \}$

transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I$$

$$S.T.((TS)^{10})^{-1} = ST(S^5T)^{10}$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2,$$

$$TS.T.(TST)^{-1} = I,$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$$

$$TST.T.(TS)^{-1} = I,$$

$$TST.S.(TSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I,$$

$$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^5T$$

$$TSTST.T.(TSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTST.S.(TSTSTS)^{-1} = I$$

$$TSTSTS.T.(TSTSTST)^{-1} = I,$$

$$(TS)^3.S.(TSTST)^{-1} = TSTSTS^2TS^5TS^5T$$

$$TSTSTST.T.(TSTSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTSTST.S.(TSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$TSTSTSTS.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I,$$

$$(TS)^4T.S.((TS)^3T)^{-1} = (TS)^3 TS^2T(S^5T)^3$$

$$TSTSTSTST.T.(TSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$TSTSTSTST.S.(TSTSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$TSTSTSTSTS.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^5.S.((TS)^4T)^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^5T)^4$$

$$TSTSTSTSTST.T.(TSTSTSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$(TS)^5T.S.(TSTSTSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$(TS)^6.T.(TSTSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^6.S.((TS)^5T)^{-1} = (TS)^5TS^2T(S^5T)^5,$$

$$(TS)^6T.T.(TSTSTSTSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$(TS)^6T.S.(TSTSTSTSTSTSTS)^{-1} = I$$

$$(TS)^7.T.(TSTSTSTSTSTSTST)^{-1} = I$$

$$(TS)^7.S.((TS)^6T)^{-1} = (TS)^6TS^2T(S^5T)^6,$$

$$\begin{aligned}
(TS)^7.T.(TSTSTSTSTSTSTSTS)^{-1} &= I & (TS)^7T.S.((TS)^6T)^{-1} &= I, \\
(TS)^8T.T.(TSTSTSTSTSTSTST)^{-1} &= I & (TS)^8.S.((TS)^7)^{-1} &= (TS)^7TS^2T(S^5T)^7, \\
(TS)^8.T.(TSTSTSTSTSTSTSTSTS)^{-1} &= I & (TS)^8T.S.(TSTSTSTSTSTSTSTSTS)^{-1} &= I \\
(TS)^9T.T.(TSTSTSTSTSTSTSTST)^{-1} &= I, & (TS)^9.S.((TS)^8T)^{-1} &= (TS)^8TS^2T(S^5T)^8, \\
(TS)^9.T.((TS)^9)^{-1} &= I & (TS)^9T.S.((TS)^{10})^{-1} &= I \\
(TS)^{10}.T.(S)^{-1} &= (TS)^{10}TS^5, & (TS)^{10}.S.((TS)^9T)^{-1} &= (TS)^9TS^2T(S^5T)^9
\end{aligned}$$

Burada ;

$$(STS^5 TS^5 TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^{-1} = TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^5 \text{ dir.}$$

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$\begin{aligned}
N = < TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T, \\
TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTS^2TS^5T \\
S^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, \\
TSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTS \\
TS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T \\
S^5TS^5TS^5TS^5TS^5T | (TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^5)^\infty = (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = \\
(TSTS^2TS^5T)^3 = (TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\
(TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\
(TSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTSTS \\
TS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5T \\
S^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T \\
S^5TS^5TS^5T)^3 = I > \cong C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

İspat: Eğer N , $H(\lambda_6)$ Hecke grubunun 24 indeksli bir normal alt grubu ise, $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, 12)$ simgesine sahiptir.

$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^{12} = I \rangle \cong D_{12}$ olur.

Burada ;

$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS \}$

transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.(T)^{-1} = I,$	$I.S.(S)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$T.S.(TS)^{-1} = I$
$S.T.((TS)^{11})^{-1} = ST(S^5T)^{11}$	$S.S.(I)^{-1} = S^2$
$TS.T.(TST)^{-1} = I,$	$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$
$TST.T.(TS)^{-1} = I,$	$TST.S.(TSTS)^{-1} = I$
$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I,$	$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^5T$
$TSTST.T.(TSTS)^{-1} = I$	$TSTST.S.(TSTSTST)^{-1} = I$
$TSTSTST.T.(TSTSTST)^{-1} = I$	$(TS)^3.S.((TS)^2T)^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^5T)^2$
$TSTSTST.T.(TSTSTST)^{-1} = I$	$TSTSTST.S.(TSTSTSTST)^{-1} = I$
$TSTSTSTST.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I$	$(TS)^4.S.((TS)^3T)^{-1} = (TS)^3TS^2T(S^5T)^3$
$TSTSTSTST.T.(TSTSTSTST)^{-1} = I$	$TSTSTSTST.S.(TSTSTSTST)^{-1} = I$
$TSTSTSTSTST.T.(TSTSTSTSTST)^{-1} = I$	$(TS)^5.S.((TS)^4T)^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^5T)^4$

$TSTSTSTSTST.T.(TSTSTSTSTS)^{-1}=I$	$TSTSTSTSTST.S.(TSTSTST)^{-1}=I$
$(TS)^6.T.((TS)^6T)^{-1}=I$	$(TS)^6.S.((TS)^5T)^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^5T)^5$
$(TS)^6T.T.((TS)^6)^{-1}=I)^{-1}=I$	$(TS)^6T.S.((TS)^7)^{-1}=I$
$(TS)^7.T.((TS)^7T)^{-1}=I$	$(TS)^7.S.((TS)^6T)^{-1}=(TS)^6TS^2T(S^5T)^6$
$(TS)^7T.T.((TS)^7)^{-1}=I)^{-1}=I$	$(TS)^7T.S.((TS)^8)^{-1}=I$
$(TS)^8.T.((TS)^8T)^{-1}=I$	$(TS)^8.S.((TS)^7T)^{-1}=(TS)^7TS^2T(S^5T)^7$
$(TS)^8T.T.((TS)^8)^{-1}=I$	$(TS)^8T.S.((TS)^9)^{-1}=I$
$(TS)^9.T.((TS)^9T)^{-1}=I$	$(TS)^9T.S.((TS)^8T)^{-1}=(TS)^8TS^2T(S^5T)^8$
$(TS)^9T.T.((TS)^9)^{-1}=I$	$(TS)^9.S.((TS)^{10})^{-1}=I$
$(TS)^{10}.T.((TS)^{10}T)^{-1}=I$	$(TS)^{10}T.S.((TS)^9T)^{-1}=(TS)^9TS^2T(S^5T)^9$
$(TS)^{10}T.T.((TS)^{10})^{-1}=I$	$(TS)^{10}.S.((TS)^{11})^{-1}=I$
$(TS)^{11}.T.(S)^{-1}=(TS)^{11}TS^5$	$(TS)^{11}T.S.((TS)^{10}T)^{-1}=(TS)^{10}TS^2T(S^5T)^{10}$

Burada ;

$$(ST(S^5T)^{11})^{-1}=(TS)^{11}TS^5 \text{ dir.}$$

Böylece N normal alt grubunun gösterimi;

$$\begin{aligned}
N= < TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^5, S^2, TS^2T, TSTS^2TS^5T, TSTSTS^2TS^5TS^5T, \\
TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T, \\
TSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T \\
S^5T, TSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTSTS \\
TS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T \\
S^5TS^5TS^5TS^5TS^5T, TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T \\
S^5TS^5TS^5TS^5T|(TSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^5)^\infty=(S^2)^3=(TS^2T)^3= \\
(TSTS^2TS^5T)^3=(TSTSTS^2TS^5TS^5T)^3=(TSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5T)^3=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (TSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\
& (TSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5T \\
& S^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = (TSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\
& = (TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 = \\
& (TSTSTSTSTSTSTSTSTSTS^2TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5TS^5T)^3 \Rightarrow \cong C_3 \\
& \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times Z
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca N normal alt grubunun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$[H(\lambda_6) : N] = (\mu(N)) / (\mu(H(\lambda_6)))$$

$$24 = \frac{(2g-2) + 12 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + 1}{(2g-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1}$$

buradan g=0 elde edilir ve N normal alt grubunun simgesi

$$(0; 3^{(12)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.1.13. $m \geq 2$ Tamsayı, $2m$ Mertebeli Normal Altgruplar:

Eğer $H(\lambda_6) / N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, m)$ simgeli ise; yani

$$H(\lambda_6) / N = \langle T, S \mid T^2, S^2, (TS)^m = I \rangle \cong D_m \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$\Sigma = \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS, \dots, (TS)^{(m-1)} \}$

transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$I.T.(T)^{-1} = I,$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I,$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I,$$

$$S.T.((TS)^{(m-1)})^{-1} = ST(S^5T)^{(m-1)}$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2,$$

$$TS.T.(TST)^{-1} = I,$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T,$$

$$TST.T.(TS)^{-1} = I,$$

$$TST.S.(TSTS)^{-1} = I,$$

$$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I,$$

$$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^5T,$$

$$TSTST.T.(TSTST)^{-1} = I,$$

$$TSTST.S.(TSTST)^{-1} = I,$$

...

...

$$(TS)^{(m-1)}.T.(S)^{-1} = (TS)^{(m-1)}TS^5,$$

$$(TS)^{(m-1)}.S.((TS)^{(m-2)}T)^{-1} =$$

$$(TS)^{(m-2)}TS^2T(S^5T)^{(m-2)}$$

Burada ;

$$(ST(S^5T)^{(m-1)})^{-1} = (TS)^{(m-1)}TS^5 \text{ olduğundan}$$

N normal alt grubunun üreteçleri;

$$a_1 = (TS)^{(m-1)}TS^5, a_2 = S^2, a_3 = TS^2T, a_4 = TSTS^2T$$

...

$$a_{m+1} = (TS)^{(m-2)}TS^2T(S^5T)^{(m-2)},$$

olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi;

$$N = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m+1} \mid (a_2)^3 = (a_3)^3 = (a_4)^3 \dots = (a_{m+1})^3 = I \rangle$$

olarak bulunur. Ayrıca Riemann Hurwitz formülünden N normal altgrupunun simgesini $(0; 3^{(m)}, \infty^{(2)})$ olarak buluruz.

4.SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü bölümde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibidir.

Conder ve Dobcsányi [13] nolu makalede $4 \leq q \leq 12$ değerlerine karşılık gelen Hecke gruplarının sonlu indeksli normal alt gruplarının sayısını düşük indeksli alt grup algoritmasını kullanarak bulmuştur. Bu tezde Conder ve Dobcsányi'nin makalesindeki sonuçları kullanarak $q = 6$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal altgruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri Reidemeister-Scheier metodu, permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak bulundu.

5.KAYNAKLAR

- [1] Hecke, E., “Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen”, *Math. Ann.*, 112, 664-699, (1936).
- [2] Newman, M., “The Structure of Some Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 480-487, (1962).
- [3] Newman, M., “Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1962).
- [4] Cangül, İ. N., “Normal Subgroups of Hecke Groups”, Ph.D. Thesis, *Southampton University*, (1993).
- [5] Lang, Mong-Lung; Lim, Chong-Hai; Tan, Ser Peow Subgroups of the Hecke groups with small index. *Linear and Multilinear Algebra* 35, 75–77, (1993).
- [6] Lang, Mong-Lung The signatures of the congruence subgroups $G_0(\tau)$ of the Hecke groups G_4 and G_6 *Comm. Algebra* 28 / 8, 3691–3702, (2000).
- [7] Rosen, David The substitutions of Hecke group $\Gamma(2\cos(\pi/5))$ *Arch. Math. (Basel)* 46 /6, 533–538, (1986).
- [8] Schmidt, Thomas A.; Sheingorn, Mark Length spectra of the Hecke triangle groups. *Math. Z.* 220 / 3, 369–397, (1995).
- [9] Kulkarni, Ravi S. An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group. *Amer. J. Math.* 113/ 6, 1053–1133, (1991).
- [10] Cangül, İ. N.; Singerman, D. “Normal subgroups of Hecke groups and regular maps”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 123/1, 26–40, (1986).
- [11] Jones, Gareth A.; Thornton, John S. “Automorphisms and congruence subgroups of the extended modular group”, *J. London Math. Soc.* 34, 26-40, (1986).
- [12] Mushtaq, Qaiser Coset diagrams for an action of the extended modular group on the projective line over a finite field. *Indian J. Pure Appl. Math.* 20/ 8, 747–754, (1989).

- [13] Conder, M.; Dobcsányi, P. “Normal subgroups of the modular group and other Hecke groups.” *Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory, Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* 421, 65-86, (2006).
- [14] Jones, G. A., Singerman, D., *Complex Functions, Cambridge University Press, Cambridge.* 60, (1987).
- [15] Başkan, T., *Ayrık Gruplar, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara,* 7-9, (1980).
- [16] Sahin, R., Koruoğlu, Ö., İkikardes, S., “On the extended Hecke groups $\bar{H}(\lambda_5)$ ” , *Algebra Colloq.*, 13, 17-23, (2006).
- [17] Singerman, D., “Subgroups of Fuschian groups and finite permutation groups” *Bull. London Math. Soc.*, 2, 319, (1970).
- [18] Malik, D. S., Mordeson, J. M., Sen, M. K., “Fundamentals of Abstract Algebra”, *McGraw-Hill, New York,* (1997).
- [19] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., “Generators and relations for discrete groups”, second ed., *Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York,* 35-38, (1965).
- [20] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., “Combinatorial Group Theory”, *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,* (1977).
- [21] Fine, B., Rosenberger, G., “Algebraic Generalizations of Discrete Groups”, *Marcel Dekker, Inc, New-York,* (1999).