T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KARMA LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM

ALİ KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ramazan AKGÜN (Tez Danışmanı)**

Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, OCAK - 2026

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Karma Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

ALİ KAYA

ÖZET

KARMA LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ALİ KAYA
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)
BALIKESİR, OCAK - 2026

Bu tezde karma Lebesgue uzayında trigonometrik yaklaşımın temel özellikleri incelenmiştir.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, tezde kullanılan ve gerekli olan tanımlar, teoremler ve notasyonlar hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde karma Lebesgue uzayı ile ilgili bazı bilgilere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde açısal yaklaşım, fark operatörü, K-fonksiyoneli, Vallee-Poussin ortalamalarının yaklaşımıdan bahsedilmiştir.

Beşinci ve son bölüm sonuç bölümü olarak verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Düzgünlük modülü, Fourier serisi, Karma Lebesgue uzayı, Steklov operatörü
Bilim Kod / Kodları :20404 Sayfa Sayısı : 32

ABSTRACT

APPROXIMATION IN MIXED LEBESGUE SPACES
MSC THESIS
ALİ KAYA
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)
BALIKESİR, JANUARY - 2026

This thesis discusses trigonometrical approximation problems in the mixed Lebesgue spaces.

The thesis consists of five main sections.

The first section is introduction.

The second section gives informations about definitions, theorems and notations used and required in the thesis.

The third section describes some main properties the mixed Lebesgue space.

The fourth section discusses angular approximation, the difference operator, the K-functional, and approximation by Vallee-Poussin averages.

The fifth and final section contains the conclusions of this thesis.

KEYWORDS: Smoothness module, Fourier series, Mixed Lebesgue spaces, Steklov operator

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 32

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SEMBOL LİSTESİ

$:=$	**:** Tanım olarak eşittir
$\boldsymbol{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{L^p(T^2)}$	: Lebesgue uzayı $1 \le p \le \infty$
$\boldsymbol{S_{m,\infty}(f)}$	: $f \in L^1(T^2)$ fonksiyonunun Fourier serisinin x e göre kısmi toplamı
$\boldsymbol{S_{\infty,n}(f)}$	: $f \in L^1(T^2)$ fonksiyonunun Fourier serisinin y e göre kısmi toplamı
$\boldsymbol{S_{m,n}(f)}$	: $f \in L^1(T^2)$ fonksiyonunun Fourier serisinin hem x e göre hem y ye göre kısmi toplamı
$\boldsymbol{f^{(p_1,p_2)}}$	: $f(x,y)$ nin x e göre p_1 mertebeli ve y ye göre p_2 mertebeli türevi
$\boldsymbol{\omega_{\alpha_1,\alpha_1}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}}$	: $f(x,y)$ nin x e göre $\propto_1$ dereceli, y ye göre $\propto_2$ dereceli karma düzgünlük modülü
h.h.h	: Hemen hemen her yerde
$\boldsymbol{a \approx b}$	: Öyle $c_1 > 0, c_2 > 0$ vardır ki $c_1 a \le b \le c_2 a$ sağlanır
$\boldsymbol{a \lesssim b}$	: Öyle $C > 0$ vardır ki $b \le Ca$ sağlanır
Z	: Tam sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Tezin yazım sürecinde gerek bilği, gerekse anlayışı ile desteğini her zaman hissettiğim değerli hocam Prof. Dr. Ramazan AKGÜN başta olmak üzere Balıkesir Üniversitesi Matematik Bölümün Değerli hocalarına,

Yoğun çalışma sürecimin her aşamasında desteğini hissettiğim değerli eşim Gizem’ e

Her koşulda yanımda olan aileme,

TEŞEKKÜR VE SAYGILARIMI SUNARIM.

Balıkesir, 2026 **ALİ KAYA**

1.GİRİŞ

Bu tezde, karma Lebesgue uzayında yaklaşım kavramını ele alıcaz.Tarihi gelişim olarak bakıldığında: ilk önemli adım, Joseph Fourier'nin 19. yüzyılın başlarında ortaya koyduğu Fourier serileriyle atılmıştır. Fourier, periyodik fonksiyonların, trigonometrik fonksiyonların sonsuz toplamlarıyla ifade edilebileceğini göstermiştir. Bu fikir, fonksiyonların yaklaşık temsilinin mümkün olduğu düşüncesini doğurmuş ve yaklaşım teorisinin doğmasına zemin hazırlamıştır.

Yaklaşım teorisinde neler yapıldığına dair fikir olması açısından şunları söyleyebiliriz.

Bir fonksiyonu, daha basit fonksiyonlarla (mesela trigonometrik polinomlar,rasyonel fonksiyonlar,cebirsel polinomlar v.b. gibi) ne kadar iyi yaklaştırabiliriz sorusuna cevap aramaktadır. Karma Lebesgue uzaylarında bu soru daha detaylıdır çünkü, yaklaşımın araştırılması tek bir ölçüyle değil, birden fazla parammetrelerle ölçülebilir.Burada yaklaşan trigonometrik polinomlar olarak, Fourier kısmi toplamları kullanılmaktadır ki amaç; karmaşık haldeki fonksiyonları daha kontrollü ve hesaplanabilir araçlarla temsil etmeyi sağlayacaktır.

Karma Lebesgue uzaylarındaki temel fikire gelecek olursak.Fonksiyon ne kadar düzgünse, yaklaşım o kadar iyi olmaktadır.Bu yüzden klasik tek parametreli düzgünlük yerine,bizler her değişken için ayrı düzgünlük alıp, sonra bunların birlikte etkisini incelenir. Doğrudan yaklaşım fikrine göre, Fonksiyonun karma düzgünlüğü ne kadar iyiyse, trigonometrik polinomlarla o kadar hızlı yaklaşımı mümkün olur.Bu, yaklaşım teorisinin bir yönüdür.Tersine ele alacak olursak, Eğer bir fonksiyon nekadar hızlı yaklaşıma sahip ise, bu fonksiyon mutlaka karma düzgünlük ölçme aracı anlamında o kadar düzgündür..Bu sonuç, düzgünlüğün karaktirezsyonu sonucudur.

Karma Lebesgue uzayı, çok değişkenli bir fonksiyonun her değişken yönünde aynı şekilde davranmak zorunda olmadığını anlatır. Bir fonksiyon bir yönde çok düzgün, başka bir yönde daha düzensiz olabilir, karma Lebesgue uzayı bu farklılıkları tek bir ölçüye zorlamadan, her yönü kendi doğası içinde değerlendirir.Bu uzaylar, "fonksiyon ne kadar büyüktür?" sorusuna tek bir cevap vermek yerine, her değişkenin katkısını ayrı ayrı ve sıralı biçimde ölçer. Böylece fonksiyonun bazı yönlerde güçlü, bazı yönlerde zayıf olabilen yapısı doğru biçimde yansıtılır.Yaklaşım teorisi açısından bakıldığında, karma Lebesgue uzayları şunu söyler,bir fonksiyonun trigonometrik polinomlar veya Fourier serileriyle ne kadar iyi yaklaşabileceği, tüm değişkenlerdeki davranışının ortalama bir özetiyle değil, her yönün ayrı etkisiyle belirlenir. Bu nedenle yaklaşım hızı da tek bir düzgünlük ölçüsüne değil, karma düzgünlüğe bağlıdır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Tanım (Normlu Uzay) A bir lineer uzay alalım. $\|.\|: A \rightarrow R$ fonksiyonu x vektörüne karşılık gelen ve negatif olmayan değeri $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıda verilen üç özelliği sağlıyor ise $\|.\|$ fonksiyonuna A da bir norm ve $(A, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

1. " $\|x\| = 0_\theta \Leftrightarrow x = 0_\theta$ ". Burada 0_θ lineer uzayın toplamaya göre etkisiz elemanıdır,

2. $\forall$ $\lambda \epsilon R$ için$\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$,
3. $\forall$ x, y elamanı için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.2 Tanım (Banach Uzayı) $(A, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir.

2.3 Tanım (Ölçülebilir Küme) X boştan farklı bir küme olarak alınır ve X ' in alt kümelerinin boş olmayan bir S koleksiyonu için eğer

i) $\varnothing, S \in X$,

ii) $\forall \mathrm{E} \in S$ için $\mathrm{E}^c \in S$,

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{E}_n \in S$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n \in S$,

verilen koşullar sağlanıyor ise S koleksiyonuna X üzerinde bir $\sigma -$cebiri denir. Bu durumda (X, S) sıralı ikilisine de ölçülebilir uzay ayrıca S koleksiyonundaki her bir kümeye de ölçülebilir küme denir.

2.4 Tanım (Lebesgue Uzayı) $T \coloneqq [0,2\pi]$, $T^2 := T \times T$, $1 < p < \infty$ için,

$$\|f\|_p = \left(\int_{T^2} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan her $f: T^2 \rightarrow R$ ölçülebilir fonksiyonun oluşturduğu $L^p(T^2)$ kümesine Lebesgue uzayı denir [1]. (2.1)

2.5 Tanım Bir $M > 0$ alalım, $|f(x)| \leq M$ özelliği, T^2 üzerinde h.h.h sağlanıyor ise $f: T^2 \rightarrow R$ fonksiyonlarının, h.h.h yerde eşit olma bağıntısı için denklik sınıflarının oluşturduğu kümeye $L^\infty(T^2)$ denir.

2.6 Tanım (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $1 < p < \infty$, $K(x,y)$ hem *x* değişkenine, hem de *y* değişkenine göre sürekli fonksiyon ve f klasik Lebesgue uzayı $L^p(T)$ 'ye ait ise

$$\left\{\int_T \left|\int_T f(y)K(x,y)dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_T \left(\int_T |f(y)K(x,y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$$\leq \int_T |f(y)| \left(\int_T |K(x,y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

2.7 Önerme (Jensen Eşitsizliği) $\alpha_k \geq 0$ ve $0 < \alpha \leq \beta$ olsun. Bu durumda

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\beta}\right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \quad [2].$$

2.8 Tanım $T^2 := T \times T$ olmak üzere $L^1(T^2)$ ailesi her bir *x,y* değişkeni için 2π-periyotlu, $f(x,y) : T^2 \to R$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarının kümesi olsun. Şimdi, $f \in L^1(T^2)$ için

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} A_{n_1,n_2}(x,y) :=$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_{n_1,n_2}(x,y)\big[a_{n_1,n_2}\cos n_1x\cos n_2y + b_{n_1,n_2}\sin n_1x\cos n_2y + c_{n_1,n_2}\cos n_1x\sin n_2y$$

$$+d_{n_1,n_2}\sin n_1x\sin n_2y\big],$$

$$\mu_{n_1,n_2} = \begin{cases} \frac{1}{4} & , n_1 = n_2 = 0, \\ \frac{1}{2}, & n_1 = 0, n_2 > 0 \text{ veya } n_2 = 0, n_1 > 0, \\ 1 & , n_1 > 0, n_2 > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

serisine *f* ye karşılık gelen Fourier serisi denir.

3. Karma Lebesgue Uzayı

Lebesgue Uzayları, $p \geq 1$ olduğu durum için bir Banach uzaylarının örneğini oluşturur. Ayrıca Karma Lebesgue Uzayları, Lebesgue Uzaylarının bir genellemesidir [2].

Karma Lebesgue Uzayı, çok değişkenli fonksiyonların her değişken yönünde aynı davranışı göstermek zorunda olmadığını ifade eden bir fonksiyon uzayıdır. Klasik Lebesgue uzaylarında fonksiyonun büyüklüğü tek bir ölçüyle değerlendirilirken, karma Lebesgue uzaylarında bu değerlendirme her değişken için ayrı ayrı ve sıralı olarak yapılır. Böylece fonksiyonun bazı yönlerde daha düzenli, bazı yönlerde ise daha düzensiz olabilen yapısı doğru biçimde yansıtılır.

Yaklaşım teorisi açısından bakıldığında, karma Lebesgue uzayları bir fonksiyonun trigonometrik polinomlar veya Fourier serileriyle ne kadar iyi yaklaştırılabileceğini, her değişkenin katkısını ayrı ayrı dikkate alarak belirler. Bu nedenle yaklaşım hızı, fonksiyonun yalnızca genel düzgünlüğüne değil, karma düzgünlük özelliklerine bağlıdır.

3.1 Tanım $\Omega \subset R$ ölçülebilir küme ve $p= (p_1, p_2)$ olmak üzere $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ alalım.

Ölçülebilir $f\colon \Omega x\, \Omega \to R$ fonksiyonu için karma Lebesgue normunun tanımı şu şekildedir:

$$\|f\|_{L^p \Omega x\, \Omega} = \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} .$$

Buna göre karma Lebesgue uzayı,

$L^P(\Omega x\, \Omega) = \{f$ ölçülebilir: $\|f\|_{L^p} < \infty\}$

olarak verilir. $L^P(\Omega x\, \Omega)$ bir Banach uzayıdır [3].

Ayrıca çalışmamızda kullanacağımız $L^P(\Omega x\, \Omega)$ iki değişkenli fonksiyonların her değişken yönünde farklı integrallenebilirlik derecelerine sahip olmasına izin veren karma Lebesgue uzayıdır [2].

3.2 Tanım Bir $\omega : T^2 \to R^{\geq} := [0,\infty)$ fonksiyonu T^2 üzerinde ölçülebilir ve T^2 üzerinde h.h.h pozitif ise ω ya ağırlık denir [6].

3.3 Tanım J'yi T^2 'de koordinat eksenlerine paralel kenarlara sahip dikdörtgenler ailesi olarak alalım. $A_p(T^2,J)$, $(1 < p < \infty)$, yerel integrallenebilir $\omega : T^2 \to R^{\geq}$ ağırlıklarından oluşur öyle ki ω (x,y) her bir x,y değişkeni için 2π-periyotludur ve

$$[\omega]_{A_p} := \sup_{G \in J} \left(\frac{1}{|G|} \iint_G \omega(x,y)dxdy\right) \left(\frac{1}{|G|} \iint_G [\omega(x,y)dxdy]^{-\frac{1}{p-1}} dxdy\right)^{p-1} < \infty . \qquad (3.1)$$

$[\omega]_{A_p}$ değerine bu ağırlığın Muckenhoupt sabiti denir [5].

3.4 Tanım $1 \leq p < \infty$, ω T^2üzerinde bir ağırlık olsun. Lebesgue integrallenebilir *f (x,y)* :$T^2 \rightarrow R$ her bir *x,y* değişkeni için 2π periyodik ve

$$\|f\|_{p,\omega} := \left(\iint_{T^2} |f(x,y)|^p \omega(x,y) dxdy\right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarından oluşur. $L^p_\omega(T^2)$ uzayına ağırlıklı Lebesgue uzayı deriz ve bu uzay $1 \leq p < \infty$, için bir Banach uzayıdır [7].

3.5 Tanım $T_{m,o}$ ile ($T_{o,n}$ ile) *x* değişkenine göre (*y* değişkenine göre) derecesi en fazla *m* olan (derecesi en fazla *n* olan) tüm iki değişkenli trigonometrik polinomların kümesini gösterelim. Fonksiyonlara kısmi en iyi trigonometrik polinomlarla yaklaşım hatası aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Y_{m,o}(f)_{p,\omega} = inf\{\|f - T\|_{p,\omega} : T \in T_{m,o}\},$$

$$Y_{o,n}(f)_{p,\omega} = inf\{\|f - U\|_{p,\omega} : U \in T_{o,n}\},$$

burada, $1 \leq p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2, J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$.

$f \in L^p_\omega(T^2)$ fonksiyonuna en iyi açısal trigonometrik yaklaşım hatası ise,

$$Y_{m,n}(f)_{p,\omega} = inf\{\|f - T - U\|_{p,\omega} : T \in T_{m,o}, U \in T_{o,n}\}$$

biçiminde tanımlanır [9,10].

4. Düz Ve Ters Yaklaşım Teoremleri

4.0.1 Tanım $1<p<\infty, \omega \in A_p(T^2,J)$ *ve* $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Steklov ortalamalarını aşağıdaki gibi tanımlayalım [2]:

$$\sigma_{h,k} f(x,y) = \frac{1}{hk}\int_{x-h}^{x+h}\int_{y-k}^{y+k} f(t,\tau)dtd\tau,$$

$$\sigma_{h,o} f(x,y) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} f(t,\tau)dt \quad , \quad \sigma_{o,k} f(x,y) = \frac{1}{k}\int_{y-k}^{y+k} f(t,\tau)d\tau.$$

4.0.2 Tanım $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$, $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. h, k adımlı fark operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım [4,3]:

$$\nabla_{h,o} f(x,y) = \left(I - \sigma_{h,o}\right)f(x,y) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(f(x,y) - f(t,\tau)\right)dt,$$

$$\nabla_{o,k} f(x,y) = \left(I - \sigma_{o,k}\right)f(x,y) = \frac{1}{k}\int_{y-k}^{y+k}\left(f(x,y) - f(t,\tau)\right)d\tau,$$

$$\nabla_{h,k} f(x,y) = \nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k} f\right)(x,y) = \frac{1}{hk}\int_{x-h}^{x+h}\int_{y-k}^{y+k}\left(f(x,y) - f(t,\tau)\right)dtd\tau.$$

4.0.3 Tanım $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$, $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Karma süreklilik modülü

$$\Omega\,(f,\delta_1,\delta_2)_{p,\omega} = \sup_{\substack{0\le h\le\delta_1 \\ 0\le k\le\delta_2}} \left\|\nabla_{h,k} f\right\|_{p,\omega}$$

olarak tanımlanır [6,8].

4.0.4 Tanım $W^{r,s}_{p,\omega}$ $(r \geq 0; s \geq 0)$ kümesi, $f \in L^1(T^2)$ ve

$$f^{(r,s)} := \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x^r \partial y^s} \in L^p_\omega(T^2) \tag{4.1}$$

Özelliklerini sağlayan tüm *f* fonksiyonlarının ailesidir.

4.0.5 Tanım $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Karma *K*-fonksiyoneli şu şekilde tanımlanır:

$$K(f,\delta,\xi,p,\omega,r,s) := \inf_{g_1,g_2,,g}\left\{\|g-g_1-g_2-g\|_{p,\omega} + \delta^r \left\|\frac{\delta^r g_1}{\delta x^r}\right\|_{p,\omega}\right.$$

$$\left. + \xi^s \left\|\frac{\delta^s g_2}{\delta y^s}\right\|_{p,\omega} + \delta^r \ \xi^s \left\|\frac{\delta^{r+s} g}{\delta x^r \delta y^s}\right\|_{p,\omega}\right\}.$$

Burada infimumun $g_1 \in W_{p,\omega}^{r,o}$, $g_2 \in W_{p,\omega}^{o,s}$, $g \in W_{p,\omega}^{r,s}$ koşulunu sağlayan tüm g_1, g_2, g'ler üzerinden alınır.

4.1 Potapov tipi düz teorem

Öncelikle süreklilik modülü ile *K*-fonksiyonelinin denkliği hakkındaki teoremi verelim [9,12].

4.1.1 Teorem $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L_\omega^p(T^2)$ olsun. Bu durumda,

$$\Omega\,(f,\delta,\xi)_{p,\omega} \approx K(f,\delta,\xi,p,\omega,2,2)\ ,\quad \delta,\ \xi \geq 0. \qquad (4.2)$$

Bu teoremi kullanarak Potapov tipli düz teorem elde edilebilir [11].

4.1.2 Teorem $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L_\omega^p(T^2)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{A_p}$ ve p ye bağlı olan öyle bir C sabiti mevcuttur ki,

$Y_{m,n}(f)_{p,\omega} \leq C_{[\omega]_{A_p},p}\Omega\left(f,\frac{1}{m+1},\frac{1}{n+1}\right)_{p,\omega}$

özelliği sağlanır [16].

4.1.3 Not Eğer $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L_\omega^p(T^2)$ ise bir $\lambda > 1$ için,

$L_\omega^p(T^2) \subset L^\lambda(T^2)$

içermesi doğru olur.

Böylece, $f \in L_\omega^p(T^2)$ için trigonometrik Fourier serileri tanımlanabilir [15].

4.1.4 Not Kabul edelim ki,

$\omega_{m,n}^* f := s_{m,0}(f) + s_{o,n}(f) - s_{m,n}(f)$.

Bu durumda,

$\left\|f - \omega_{m,n}^* f\right\|_{p,\omega} \leq C_{\omega_{A_p},p} Y_{m,n}(f)_{p,\omega}$

ve böylece

$Y_{m,n}(f)_{p,\omega} \searrow 0,\ m,n \nearrow \infty.$

Bu seferde ters yaklaşım teoremini verelim [12].

4.1.5 Teorem Eğer $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2, J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ ise $[\omega]_{A_p}$,p ye bağlı öyle bir *C* sabiti mevcuttur ki,

$$\Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \leq \frac{C_{[\omega]_{A_p},p}}{m^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} (k+1)(l+1) Y_{k,l}(f)_{p,\omega}.$$

4.2 Realizasyon Fonksiyoneli

4.2.1 Tanım $f \in L^1(T^2)$'ye karşılık gelen Fourier serisi (2.2) tanım'daki gibi olsun. Fourier serisin kısmi toplamları aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S_{m,o}(f)(x,y) = \sum_{n_1=0}^{m} \sum_{n_2=0}^{\infty} A_{n_1,n_2}(x,y,f), \quad S_{o,n}(f)(x,y) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{n} A_{n_1,n_2}(x,y,f),$$

$$S_{m,n}(f)(x,y) = S_{m,o}(S_{o,n}(f))(x,y) = \sum_{n_1=0}^{m} \sum_{n_2=0}^{n} A_{n_1,n_2}(x,y,f).$$

4.2.2 Tanım $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2, J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Realizasyon fonksiyonelini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$R(f, m, n, p, \omega, 2{,}2) :=$

$$\left\| f - S_{m,\circ}(f) - S_{\circ,n}(f) + S_{m,n}(f) \right\|_{p,\omega}$$

$$+ m^{-2} \left\| \frac{\partial^2 S_{m,\circ}\left(f - S_{\circ,n}(f)\right)}{\partial x^2} \right\|_{p,\omega}$$

$$+ n^{-2} \left\| \frac{\partial^2 S_{\circ,n}\left(f - S_{m,\circ}(f)\right)}{\partial y^2} \right\|_{p,\omega} + m^{-2} n^{-2} \left\| \frac{\partial^4 S_{m,n}(f)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{p,\omega}.$$

4.2.3 Teorem $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2, J)$, $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Bu durumda sadece $p, [\omega]_{A_p}$ değerlerine bağlı bir sabit için,

$$\Omega(f, m^{-1}, n^{-1}) \approx R(f, m, n, p, w, 2{,}2) \tag{4.3}$$

denkliği her $m, n \in N$ için sağlanır [17].

4.3 Steklov ortalamaları, fark operatörleri ve süreklilik modülü

4.3.1 Önerme $1 < p < \infty$ olsun. $\omega\,(x, y) \in A_p(T^2, J)$ koşulu verildiğinde her bir $I,J \subset T$ aralığı için

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x,y)dx \left(\frac{1}{|I|}\int_I [\omega(x,y)]^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\right) < \infty, \qquad \text{h.h.h } y,$$

$$\sup_J \left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega(x,y)dx\right)\left(\frac{1}{|J|}\int_J [\omega(x,y)]^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1} < \infty, \qquad \text{h.h.h } x,$$

özellikleri sağlanır.

4.3.2 Önerme $1<p<\infty$, $\omega(x,y) \in A_p(T^2, J)$, $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Bu durumda sadece $[\omega]_{A_p}$ve p'ye bağlı bir sabit için,

$$max\left\{\left\|\sigma_{h,o}f\right\|_{p,\omega}, \left\|\sigma_{o,k}f\right\|_{p,\omega}\right\} \lesssim \|f\|_{p,\omega}$$

eşitsizliği sağlanır [13].

4.3.3 Not Yukarıdaki son önerme gereği

(i) $max\left\{\left\|\nabla_{h,o}f\right\|_{p,\omega}, \left\|\nabla_{o,k}f\right\|_{p,\omega}, \left\|\nabla_{h,k}f\right\|_{p,\omega}\right\} \lesssim \|f\|_{p,\omega}$

elde ederiz.

(ii) Süreklilik modülünün tanımı göz önüne alındığında, $[\omega]_{A_p}$ ve p'ye bağlı bir sabit için,

$\Omega(f, \delta_1, \delta_2)_{p,\omega} \lesssim \|f\|_{p,\omega}$.

(iii) $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2, J)$, $f \in L^p_\omega(T^2)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\Omega(f, 0{,}0)_{p,\omega} = 0$.

(2) $\Omega(f, \delta_1, \delta_2)_{p,\omega}$ f'ye göre yarı toplamsaldır.

(3) $\Omega(f, \delta_1, \delta_2)_{p,\omega} \leq \Omega(f, t_1, t_2)_{p,\omega}$ eşitsizliği $0 \leq \delta_i \leq t_i$; $i = 1,2$ için sağlanır (4.4)

4.4 Fourier serisinin bazı ortalamaları

4.4.1 Önerme [7] Eğer $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(T^2, J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ ise bir $\lambda>1$ için $L^p_\omega(T^2) \subset L^\lambda(T^2)$ [14].

Kanıt

Bir $r\in(1,p)$ için $\omega \in A_r(T^2,J)$ olur. $\lambda := p/r > 1$ dersek, $f^{\lambda}\ \omega^{1/r}$ ve $\omega^{-1/r} \in L^{\frac{r}{r-1}}$ olduğundan, Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left(\iint_T |f(x,y)|^{\lambda} dxdy\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \left(\iint_T |f(x,y)|^{p} \omega(x,y) dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_T \omega(x,y)^{-\frac{1}{r-1}} dxdy\right)^{r-\frac{1}{p}}$$
$$\lesssim \|f\|_{p,\omega}$$

elde edilir. Burada sabit yalnızca $[\omega]_{A_p}$'ye ve p'ye bağlıdır. Buda ispatı bitirir.

$1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L^p_{\omega}(T^2)$ ve

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} A_{n_1,n_2}(x,y) :=$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_{n_1,n_2}(x,y)\left[a_{n_1,n_2}\cos n_1x\cos n_2y + b_{n_1,n_2}\sin n_1x\cos n_2y + c_{n_1,n_2}\cos n_1x\sin n_2y\right.$$
$$\left.+d_{n_1,n_2}\sin n_1x\sin n_2y\right]$$

$$\mu_{n_1,n_2} = \begin{cases} \frac{1}{4} & , n_1 = n_2 = 0, \\ \frac{1}{2}, & n_1 = 0, n_2 > 0 \text{ veya } n_2 = 0, n_1 > 0, \\ 1 & , n_1 > 0, n_2 > 0, \end{cases}$$

olsun.

$$S_{m,o}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_T f(x+t,y)D_m(t)dt,$$

$$S_{o,n}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_T f(x,y+u)D_n(u)du,$$

$$S_{m,n}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_T\int_T f(x+t,y+u)D_m(t)D_n(u)dudt,$$

yazılabilir. Burada

$$D_1(t) = \left(\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t\right)/\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{l} \cos kt$$

Dirichlet çekirdeğidir [5].

4.4.2 Önerme $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L^p_w(T^2)$ olsun. Bu durumda sadece $[\omega]_{A_p}$ ve p ye bağlı bir sabit için

$$\max\left\{\left\|S_{m,o}(f)\right\|_{p,\omega}, \left\|S_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega}, \left\|S_{m,n}(f)\right\|_{p,\omega}\right\} \lesssim \|f\|_{p,\omega} \text{ [18].} \tag{4.5}$$

4.4.3 Tanım $f \in L^1(T^2)$ Fourier serisinin Cesaro ortalamalarını ve Vallee Poussin ortalamalarını aşağıdaki gibi tanımlayalım [8,10]:

$$C_{m,o}(f)(x,y) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_{k,o}(f),$$

$$C_{o,n}(f)(x,y) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} S_{o,l}(f),$$

$$C_{m,n}(f)(x,y) = C_{m,o}\left(C_{o,n}(f)(x,y)\right) = \frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} S_{k,l}(f)$$

[19].

ve

$$V_{m,o}(f)(x,y) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m-1} S_{k,o}(f),$$

$$V_{o,n}(f)(x,y) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=n}^{2n-1} S_{o,l}(f),$$

$$V_{m,n}(f)(x,y) = V_{m,o}\left(V_{o,n}(f)(x,y)\right) = \frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{k=m}^{2m-1}\sum_{l=n}^{2n-1} S_{k,l}(f).$$

4.4.4 Not $f \in L^1(T^2)$ için

$$C_{m,o}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_T f(x+u,y)K_m(u)du,$$

$$C_{o,n}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_T f(x,y+v)K_n(v)dv,$$

$$C_{m,n}(f)(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_T\int_T f(x+u,y+v)D_m(u)D_n(v)dudv$$

eşitlikleri sağlanır.

Burada,

$$K_1(t) = \left(\frac{1}{2(l+1)}\right)\left(\frac{sin(2l+1)t/2}{sint/2}\right)^2 \tag{4.6}$$

Fejer çekirdeğidir [20].

Yukarıdaki veriler ışığında şu sonuca sahip oluruz:

4.4.5 Sonuç $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{A_p}$ ve p'ye bağlı bir sabit için,

$$\max\left\{\left\|V_{m,o}(f)\right\|_{p,\omega}, \left\|V_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega}, \left\|V_{m,n}(f)\right\|_{p,\omega}\right\} \lesssim \|f\|_{p,\omega},$$

4.4.6 Önerme $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ *ve* $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Ayrıca

$$W_{m,n}f(x,y) = (V_{m,o}(f) + V_{o,n}(f) - V_{m,n}(f))(x,y)$$

diyelim. Bu durumda sadece $[\omega]_{Ap}$ *ve* p'ye bağlı bir sabit için

$$\left\|f - W_{m,n}f\right\|_{p,\omega} \lesssim Y_{m,n}(f)_{p,\omega}$$ [21].

Kanıt

$T_1 \in T_{m,o}, T_2 \in T_{o,n}, T_3 \in T_{m,n}$ keyfi alalım ve

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - T_1(x,y) - T_2(x,y) + T_3(x,y)$$

diyelim.

$$f\text{-}W_{m,n}f = \varphi - V_{m,o}(\varphi) - V_{o,n}(\varphi) + V_{m,n}(\varphi)$$

olduğundan

$$\left\|f - W_{m,n}f\right\|_{p,\omega} = \left\|\varphi - V_{m,o}(\varphi) - V_{o,n}(\varphi) + V_{m,n}(\varphi)\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \|\varphi\|_{p,\omega} = \|f - T_1 - T_2 + T_3\|_{p,\omega}.$$

Burada T_1, T_2, T_3

keyfi olarak seçildiğinden

$\left\|f - W_{m,n}f\right\|_{p,\omega} \lesssim Y_{m,n}(f)_{p,\omega}$. Buda kanıtı bitirir.

Yukarıdaki sonuç yardımıyla artık şunu elde edebiliriz:

$1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ ise

$$max\left\{\left\|C_{m,o}(f)\right\|_{p,\omega}, \left\|C_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega}, \left\|C_{m,n}(f)\right\|_{p,\omega}\right\} \lesssim \|f\|_{p,\omega}.$$

Burada sabit sadece $[\omega]_{Ap}$ ve p'ye bağlıdır [22].

4.5 Bernstein eşitsizlikleri

4.5.1 Not (i) $T_1 \in T_{m,o}$, $T_2 \in T_{o,n}$, $T_3 \in T_{m,n}$ olması durumunda,

$$T_1(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_T T_1(t,y)D_m(t-x)dt,$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_T T_2(x,s)D_n(s-y)ds,$$

$$T_3(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_T\int_T T_3(t,s)\,D_m(t-x)D_n(s-y)\,dtds.$$

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial x}T_1(x,y)=\frac{-1}{\pi}\int_T T_1(t,y)\frac{\partial}{\partial x}\big(D_m(t-x)\big)dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}T_2(x,y)=\frac{-1}{\pi}\int_T T_2(s,x)\frac{\partial}{\partial y}\big(D_n(s-y)\big)ds,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}T_3(x,y)=\frac{-1}{\pi^2}\int_T\int_T T_3(t,s)\frac{\partial}{\partial x}\big(D_m(t-x)\big)\frac{\partial}{\partial y}\big(D_n(s-y)\big)dtds. \qquad (4.7)$$

Aşağıdaki Bernstein eşitsizlikleri geçerlidir [23].

4.5.2 Önerme *1<p<∞*, $\omega \in A_p(T^2,J)$, $T_1 \in T_{m,o}, T_2 \in T_{o,n}, T_3 \in T_{m,n}$ olsun. Bu durumda, $[\omega]_{A_p}$ve p'ye bağlı sabitler için [11-12],

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}T_1\right\|_{p,\omega} \lesssim m\|T_1\|_{p,\omega},$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}T_2\right\|_{p,\omega} \lesssim n\|T_2\|_{p,\omega},$$

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}T_3\right\|_{p,\omega} \lesssim mn\|T_3\|_{p,\omega}.$$

[10,11].

4.5.3 Sonuç *1<p<∞*, $\omega \in A_p(T^2,J)$, $T_1 \in T_{m,o}$, $T_2 \in T_{o,n}$, $T_3 \in T_{m,n}$, $k,l \in N$ olsun. Bu durumda, $[\omega]_{Ap}$ ve p'ye bağlı sabitler için

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}T_1\right\|_{p,\omega} \lesssim m^k\|T_1\|_{p,\omega},$$

$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial x^l}T_2\right\|_{p,\omega} \lesssim n^l\|T_2\|_{p,\omega},$$

$$\left\|\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial x^l} T_3\right\|_{p,\omega} \lesssim m^k n^l \|T_3\|_{p,\omega}.$$

4.5.4 Önerme *1<p<∞,* $\omega \in A_p(T^2, J)$ ve $f \in L_\omega^p(T^2)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{A_p}$ve p'ye bağlı bir sabit için [13].

$$\left\|\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial x^l} \varphi_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{ik} 2^{jl} Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}.$$

Burada,

$$V_{2^i 2^j}(f) - V_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f) - V_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f) + V_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f) =: \varphi_{i,j}(f) \in T_{2^{i+1}-1, 2^{j+1}-1}$$

ve

$$\lfloor x \rfloor := max\{z \in \boldsymbol{Z}: z \leq x\}. \tag{4.8}$$

Kanıt Kolayca görülebilir ki

$$\varphi_{i,j}(f) = V_{2^i 2^j}(f) - V_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f) - V_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f) + V_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)$$

$$= W_{2^i 2^j}(f) - W_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f) - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f) + W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)$$

$$= W_{2^i 2^j}(f) - f + f - W_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f) + f - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f) - f + W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f).$$

Daha önceki sonuçtan dolayı

$$\|\varphi_{i,j}(f)\|_{p,\omega} \leq \|W_{2^i 2^j}(f) - f\|_{p,\omega} + \left\|f - W_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)\right\|_{p,\omega} + \left\|f - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$+ \left\|f + W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)\right\|_{p,\omega},$$

$$\|\varphi_{i,j}(f)\|_{p,\omega} \leq \|W_{2^i 2^j}(f) - f\|_{p,\omega} + \left\|f - W_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)\right\|_{p,\omega} + \left\|f - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$+ \left\|f + W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim Y_{2^i 2^j}(f)_{p,\omega} + Y_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega} + Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}(f)_{p,\omega} + Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}$$

$$\lesssim Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}.$$

Böylece

$$\left\|\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial x^l} \varphi_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{ik} 2^{jl} \|\varphi_{i,j}(f)\|_{p,\omega} \lesssim 2^{ik} 2^{jl}\, Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}.$$

Bu da kanıtın ispatını sonlandırır. [12].

4.5.5 Önerme *1<p<∞,* $\omega \in A_p(T^2, J)$ ve $f \in L_\omega^p(T^2)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{Ap}$ ve *p'ye* bağlı bir sabit için,

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{ik} Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j}(f)_{p,\omega}.$$

Burada,

$$V_{2^i,o}\left(f - V_{o,2^i}(f)\right) - V_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,o}\left(f - V_{o,2^j}(f)\right) =: \varphi_{i,j}(f) \in T_{2^{i+1}-1,o}.$$

Kanıt Aşağıdaki eşitliği kolayca görebiliriz:

$$\varphi_{i,j}(f) = V_{2^i,o}\left(f - V_{o,2^i}(f)\right) - V_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,o}\left(f - V_{o,2^j}(f)\right) = W_{2^i,2^j}(f) - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j}.$$

Bunu kullanarak

$$\left\|\varphi_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \leq \left\|W_{2^i 2^j}(f) - f\right\|_{p,\omega} + \left\|f - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j}(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim Y_{2^i 2^j}(f)_{p,\omega} + Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j}(f)_{p,\omega}$$

$$\lesssim Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j}(f)_{p,\omega}.$$

Dolayısıyla

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{ik}\left\|\varphi_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{ik} Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j}(f)_{p,\omega}$$

elde edilir.

4.5.6 Önerme *1<p<∞,* $\omega \in A_p(T^2,J)$ ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{Ap}$ ve p'ye bağlı bir sabit için,

$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l} h_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{jl} Y_{2^i,\lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}.$$

Burada,

$$V_{o,2^i}\left(f - V_{2^i,o}(f)\right) - V_{o,\lfloor 2^{j-1}\rfloor}\left(f - V_{2^i,o}(f)\right) =: h_{i,j}(f) \in T_{o,2^{j+1}-1}.$$

Kanıt $h_{i,j}(f) = V_{o,2^j}\left(f - V_{2^i,o}(f)\right) - V_{o,\lfloor 2^{j-1}\rfloor}\left(f - V_{2^i,o}(f)\right) = W_{2^i 2^j}(f) - W_{2^i\lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)$ olarak tanımlandığında

$$\left\|h_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \leq \left\|W_{2^i 2^j}(f) - f\right\|_{p,\omega} + \left\|f - W_{2^i\lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim Y_{2^i 2^j}(f)_{p,\omega} + Y_{2^i\lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}$$

$$\lesssim Y_{2^i\lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega}.$$

Son eşitsizliği kullanarak,

$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}h_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{jl}\left\|h_{i,j}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim 2^{jl}Y_{2^i,\lfloor 2^{j-1}\rfloor}(f)_{p,\omega} \tag{4.9}$$

elde edilir.

4.6 Favard tipi Jackson eşitsizlikleri

4.6.1 Önerme *$1<p<\infty$, $\omega\in A_p(T^2,J)$* ve $f\in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{Ap}$ ve p'*ye* bağlı sabitler için [13-14],

$Y_{m,n}(g_1)_{p,\omega} \lesssim \dfrac{1}{(m+1)^2}\left\|g_1^{(2,o)}\right\|_{p,\omega}, \quad \forall g_1 \in W^{2,o}_{p,\omega}$,

$Y_{m,n}(g_2)_{p,\omega} \lesssim \dfrac{1}{(n+1)^2}\left\|g_2^{(o,2)}\right\|_{p,\omega}, \quad \forall g_2 \in W^{o,2}_{p,\omega}$,

$Y_{m,n}(g)_{p,\omega} \lesssim \frac{1}{(m+1)^2(n+1)^2}\left\|g^{(2,2)}\right\|_{p,\omega}, \quad \forall g \in W^{2,2}_{p,\omega}.$

[13,14].

Kanıt $\left\|g_1 - S_{m,o}(g_1) - S_{o,n}(g_1) + S_{m,n}(g_1)\right\|_{p,\omega} =$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} A_{i,j}(x,y,g_1)\right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} i^2 A_{i,j}(x,y,g_1)\right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} cos\pi\frac{1}{i^2} A_{i,j}\left(x+\left(\frac{\pi}{2}\right),y,g_1^{(2,o)}\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} A_{i,j}\left(x,y,g_1^{(2,o)}\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}(S_{i,j}\left(g_1^{(2,o)}\right) - S_{i,j-1}\left(,g_1^{(2,o)}\right) - S_{i-1,j}\left(g_1^{(2,o)}\right) + S_{i-1,j-1}\left(,g_1^{(2,o)}\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\sum_{i=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(i+1)^2}-\frac{1}{i^2}\right](S_{i,m}\left(,g_1^{(2,o)}\right) + \frac{1}{(m+1)^2}S_{m,n}\left(g_1^{(2,o)}\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{\infty}\left|\frac{1}{(i+1)^2}-\frac{1}{i^2}\right|\left\|S_{i,n}\left(,g_1^{(2,o)}\right)\right\|_{p,\omega} + \frac{1}{(m+1)^2}\left\|S_{m,n}\left(g_1^{(2,o)}\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$\leq \left\| \left(g_1^{(2,o)} \right) \right\|_{p,\omega} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \right) + \frac{1}{(m+1)^2} \right)$$

$$\leq \frac{C}{(m+1)^2} \left\| \left(g_1^{(2,o)} \right) \right\|_{p,\omega}$$

[13].

olduğundan,

$$Y_{m,n}(g_1)_{p,\omega} = Y_{m,n}\left(g_1 - S_{m,o}(g_1) - S_{o,n}(g_1) + S_{m,n}(g_1) \right)_{p,\omega}$$

$$\leq \left\| g_1 - S_{m,o}(g_1) - S_{o,n}(g_1) + S_{m,n}(g_1) \right\|_{p,\omega}$$

olur ve aranan eşitsizlik buradan çıkar.

Benzer olarak,

$$\left\| g_2 - S_{o,n}(g_2) - S_{m,o}(g_2) + S_{m,n}(g_2) \right\|_{p,\omega} \lesssim \frac{1}{(n+1)^2} \left\| g_2^{(o,2)} \right\|_{p,\omega}$$

ve dolayısıyla,

$$Y_{m,n}(g_2)_{p,\omega} = Y_{m,n}\left(g_2 - S_{o,n}(g_2) - S_{m,o}(g_2) + S_{m,n}(g_2) \right)_{p,\omega}$$

$$\leq \left\| g_1 - S_{o,n}(g_1) - S_{m,o}(g_1) + S_{m,n}(g_1) \right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{(n+1)^2} \left\| g_2^{(o,2)} \right\|_{p,\omega}$$

için,

$$\left\| g - S_{m,o}(g) - S_{o,n}(g) + S_{m,n}(g) \right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} A_{i,j}(x,y,g) \right\|_{p,\omega} = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2} i^2 j^2 A_{i,j}(x,y,g) \right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2} A_{i,j}\left(x,y,g^{(2,2)}\right) \right\|_{p,\omega} = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2} A_{i,j}(x,y,Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2} A_{i,j}(x,y,Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2} \left(S_{i,j}(Y) - S_{i,j-1}(Y) - S_{i-1,j}(Y) + S_{i-1,j-1}(Y) \right) \right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right] \left[\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}\right] S_{i,j}(Y) \right.$$

$$+ \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}\right] S_{m,j}(Y)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right] S_{i,m}(Y)$$

$$\left. + \frac{1}{(m+1)^2} \frac{1}{(n+1)^2} S_{m,n}(Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right) \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}\right) \left\| S_{i,j}(Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}\right] \left\| S_{m,j}(Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right] \left\| S_{n,j}(Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)^2} \frac{1}{(n+1)^2} \left\| S_{m,n}(Y) \right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{(m+1)^2} \frac{1}{(n+1)^2} \|Y\|_{p,\omega} = \frac{1}{(m+1)^2} \frac{1}{(n+1)^2} \left\| g^{(2,2)} \right\|_{p,\omega}$$

olur ve buradan da,

$$Y_{m,n}(g)_{p,\omega} = Y_{m,n} \left(g - S_{m,o}(g) - S_{o,n}(g) + S_{m,n}(g)\right)_{p,\omega}$$

$$\leq \left\| g - S_{m,o}(g) - S_{o,n}(g) + S_{m,n}(g) \right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{(m+1)^2} \frac{1}{(n+1)^2} \left\| g^{(2,2)} \right\|_{p,\omega}$$

kanıt tamamlanır.

4.7 Karma *K*-fonksiyoneli

4.7.1 Teorem $1<p<\infty$ ve $\omega \in A_p(T^2, J)$ olsun. Bu durumda $[\omega]_{Ap}$ ve p'ye bağlı sabitler için,

$$\Omega\,(g_1, \delta, .)_{p,\omega} \lesssim \delta^2 \left\| \frac{\delta^2 g_1}{\delta x^2} \right\|_{p,\omega}, \qquad \forall g_1 \in W^{2,o}_{p,\omega},$$

$$\Omega\,(g_2, ., \xi)_{p,\omega} \lesssim \xi^2 \left\| \frac{\delta^2 g_1}{\delta y^2} \right\|_{p,\omega}, \quad \forall g_2 \in W^{o,2}_{p,\omega},$$

$$\Omega\,(g, \delta, \xi)_{p,\omega} \lesssim \delta^2\, \xi^2 \left\| \frac{\delta^4 g}{\delta x^2 \delta y^2} \right\|_{p,\omega}, \quad \forall g \in W^{2,2}_{p,\omega}, \tag{4.10}$$

özellikleri ∀ δ, ξ > 0 için geçerlidir [15].

Kanıt Aşağıda verilen adımları takip ederek

$$\|\nabla_{h,o}(\nabla_{o,k}\, g_1)\|_{p,\omega} = \|(l-\sigma_{h,o})(l-\sigma_{o,k})\|_{p,\omega} = \|(l-\sigma_{h,o})F\|_{p,\omega}$$

$$= \left\| \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \big(F(x,y) - F(x+t,y)\big)dt \right\|_{p,\omega} = \left\| \frac{-1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_{0}^{t}\int_{-u}^{u} \frac{d^2}{dx^2}F(x+s,y)dsdudt \right\|_{p,\omega}$$

$$\leq \frac{1}{2h}\int_{0}^{h}\int_{0}^{t} 2u \left\| \frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} \frac{d^2}{dx^2}F(x+s,y)ds \right\|_{p,\omega} dudt$$

$$\lesssim \frac{1}{2h}\int_{0}^{h}\int_{0}^{t} 2u \left\| \sigma_{u,o}\left(\frac{d^2}{dx^2}F\right) \right\|_{p,\omega} dudt \lesssim h^2 \left\| \frac{d^2}{dx^2}F \right\|_{p,\omega} = h^2 \left\| \frac{d^2}{dx^2}\left[(l-\sigma_{o,k})g_1\right] \right\|_{p,\omega}$$

$$= h^2 \left\| (l-\sigma_{o,k})\left(\frac{d^2}{dx^2}g_1\right) \right\|_{p,\omega} \lesssim h^2 \left\| \frac{d^2}{dx^2}g_1 \right\|_{p,\omega} = h^2 \left\| g_1^{(2,o)} \right\|_{p,\omega}$$

buluruz. Böylece

$$\Omega\,(g_1, \delta, .)_{p,\omega} \lesssim \delta^2 \left\| g_1^{(2,o)} \right\|_{p,\omega} \quad g_1 \in W^{2,o}_{p,\omega}.$$

Benzer şekilde,

$$\Omega\,(g_2, ., \xi)_{p,\omega} \lesssim \xi^2 \left\| g_2^{(o,2)} \right\|_{p,\omega} \quad g_2 \in W^{o,2}_{p,\omega},$$

$$\Omega\,(g, \delta, \xi)_{p,\omega} \lesssim \delta^2\, \xi^2 \left\| g^{(2,2)} \right\|_{p,\omega} \quad g \in W^{2,2}_{p,\omega}.$$

4.1.1 Teoremin Kanıtı

Üst değerlendirmeyi kanıtlayalım. Bunun için

$$U_{h,o}f(x,y) := \frac{1}{h^3}\int_0^h \int_0^{t_1} \int_{-u_1}^{u_1} f(x+s_1,y)ds_1du_1dt_1,$$

$$U_{o,k}f(x,y) := \frac{1}{k^3}\int_0^k \int_0^{t_2} \int_{-u_2}^{u_2} f(x,y+s_2)ds_2du_2dt_2,$$

$$U_{h,k}f(x,y) := U_{h,o}\big(U_{o,k}f\big)(x,y)$$

$$= \frac{1}{h^3k^3}\int_0^h \int_0^k \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_{-u_1}^{u_1} \int_{-u_2}^{u_2} f(x+s_1,y+s_2)ds_1ds_2du_1du_2dt_1dt_2,$$

ve

$$g_1(x,y) := U_{h,o}\big(l-U_{o,k}\big)f(x,y)$$

$$g_2(x,y) := U_{o,k}\big(l-U_{h,o}\big)f(x,y)$$

$$g(x,y) := U_{h,o}\big(U_{o,k}f\big)(x,y) = \big(U_{h,k}f\big)(x,y)$$

tanımlamalarını yapalım. Sonra,

$$\|f-g_1-g_2-g\|_{p,\omega} = \big\|f-U_{h,o}f-U_{o,k}f+U_{h,k}f\big\|_{p,\omega}$$

$$= \big\|\big(l-U_{h,o}\big)\big(l-U_{o,k}\big)\big\|_{p,\omega} = \big\|\big(l-U_{h,o}\big)F\big\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\frac{1}{h^3}\int_0^h \int_0^{t_1} \int_{-u_1}^{u_1} (F(x,y)-F(x+s_1,y))+s_1,y)ds_1du_1dt_1 \right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{h^3}\int_0^h \int_0^{t_1} u_1 \left\|\frac{1}{2u_1}\int_{-u_1}^{u_1} (F(x,y)-F(x+s_1,y))ds_1\right\|_{p,\omega} du_1dt_1$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_0^h \int_0^{t_1} u_1\big\|\big(l-\sigma_{u_1,o}\big)F\big\|_{p,\omega} du_1dt_1$$

$$\lesssim \sup_{0\le u\le h} u_1 \big\|\big(l-\sigma_{u,o}\big)F\big\|_{p,\omega} \frac{1}{h^3}\int_0^h \int_0^{t_1} u_1du_1dt_1$$

$$\lesssim \sup_{0\le u\le h} u_1 \big\|\big(l-\sigma_{u,o}\big)F\big\|_{p,\omega} = C \sup_{0\le u\le h}\big\|\big(l-\sigma_{u,o}\big)\big(l-\sigma_{o,k}\big)f\big\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \sup_{0\le u\le h}\big\|\big(l-U_{o,k}\big)\big(l-\sigma_{u,o}\big)f\big\|_{p,\omega}$$

$$= \sup_{0\le u\le h}\big\|\big(l-U_{o,k}\big)\mathfrak{Z}\big\|_{p,\omega}.$$

Aynı şekilde,

$$\big\|\big(l-U_{o,k}\big)\mathfrak{Z}\big\|_{p,\omega} \lesssim \sup_{0\le v\le k}\big\|\big(l-\sigma_{o,v}\big)\mathfrak{Z}\big\|_{p,\omega} = \sup_{0\le v\le k}\big\|\big(l-\sigma_{o,v}\big)\big(l-\sigma_{u,o}\big)f\big\|_{p,\omega}$$

ve dolayısıya,

$$\|f-g_1-g_2-g\|_{p,\omega} \lesssim \sup_{\substack{0\le u\le h\\ 0\le v\le k}} \left\|\left(l-\sigma_{o,v}\right)\left(l-\sigma_{u,o}\right)f\right\|_{p,\omega}$$

bulunur. Öte yandan

$$\left\|\frac{\delta^2 g_1}{\delta x^2}\right\|_{p,\omega} = \left\|\frac{\delta^2}{\delta x^2} U_{h,o}\left(l-U_{o,k}\right)f\right\|_{p,\omega}$$

$$\left\|\frac{\delta^2}{\delta x^2}\frac{1}{h^3}\int_0^h\int_0^{t_1}\int_{-u_1}^{u_1}\left[\left(l-U_{o,k}\right)f(x+s_1,y)\right]ds_1du_1dt_1\ \right\|_{p,\omega}$$

$$=\frac{2}{h^2}\left\|\left(l-U_{h,o}\right)\left(l-U_{o,k}\right)f\right\|_{p,\omega}$$

ve

$$h^2\left\|\frac{\delta^2 g_1}{\delta x^2}\right\|_{p,\omega} = 2\left\|\left(l-U_{h,o}\right)\left(l-U_{o,k}\right)f\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim 2 \sup_{\substack{0\le u\le h\\ 0\le v\le k}} \left\|\left(l-\sigma_{o,v}\right)\left(l-\sigma_{u,o}\right)f\right\|_{p,\omega}.$$

Benzer şekilde,

$$\left\|\frac{\delta^2 g_2}{\delta y^2}\right\|_{p,\omega} = \left\|\frac{\delta^2}{\delta y^2} U_{o,k}\left(l-U_{h,o}\right)f\right\|_{p,\omega}$$

$$=\left\|\frac{\delta^2}{\delta y^2}\frac{1}{k^3}\int_0^h\int_0^{t_2}\int_{-u_2}^{u_2}\left[\left(l-U_{h,o}\right)f\right](x,y+s_2)ds_2du_2dt_2\ \right\|_{p,\omega}$$

$$=\frac{2}{h^2}\left\|\left(l-U_{o,k}\right)\left(l-U_{h,o}\right)f\right\|_{p,\omega}$$

ve

$$k^2\left\|\frac{\delta^2 g_1}{\delta x^2}\right\|_{p,\omega} = 2\left\|\left(l-U_{o,k}\right)\left(l-U_{h,o}\right)f\right\|_{p,\omega} \lesssim 2 \sup_{\substack{0\le u\le h\\ 0\le v\le k}} \left\|\left(l-\sigma_{o,v}\right)\left(l-\sigma_{u,o}\right)f\right\|_{p,\omega}.$$

Ayrıca,

$$k^2h^2\left\|\frac{\delta^4 g}{\delta x^2\delta y^2}\right\|_{p,\omega} = k^2h^2\left\|\frac{\delta^4 g}{\delta y^2\delta x^2}U_{h,o}\left(U_{o,k}f\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$=k^2\left\|\frac{\delta^2}{\delta y^2}h^2\frac{\delta^2}{\delta x^2}U_{h,o}\left(U_{o,k}f\right)\right\|_{p,\omega} = k^2\left\|\frac{\delta^2}{\delta y^2}\left(l-\sigma_{h,o}\right)\left(U_{o,k}f\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$=k^2\left\|\frac{\delta^2}{\delta y^2}U_{o,k}\left(l-\sigma_{h,o}\right)(f)\right\|_{p,\omega} = \left\|k^2\frac{\delta^2}{\delta y^2}U_{o,k}\left(l-\sigma_{h,o}\right)(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$= \left\|\left(l-\sigma_{o,k}\right)\left(l-\sigma_{h,o}\right)f\right\|_{p,\omega} \leq \sup_{\substack{0\leq u\leq h\\ 0\leq v\leq k}} \left\|\left(l-\sigma_{o,v}\right)\left(l-\sigma_{u,o}\right)f\right\|_{p,\omega}.$$

Bundan dolayı

$K(f,\delta,\xi,p,\omega,2,2) \lesssim \Omega\,(f,\delta,\xi)_{p,\omega}$.

Alt eşitsizlik için de,

$$\Omega\,(f,\delta,\xi)_{p,\omega} \lesssim \Omega(f-g_1-g_2-g,\delta,\xi)_{p,\omega} + \Omega\,(g_1,\delta,\xi)_{p,\omega} + \Omega\,(g_2,\delta,\xi)_{p,\omega}$$

$$+\Omega\,(g,\delta,\xi)_{p,\omega} \lesssim \|f-g_1-g_2-g\|_{p,\omega} + \delta^2 \left\|\frac{\delta^2 g_1}{\delta x^2}\right\|_{p,\omega} + \xi^2 \left\|\frac{\delta^2 g_2}{\delta y^2}\right\|_{p,\omega}$$

$$+\delta^2\ \xi^2 \left\|\frac{\delta^4 g}{\delta x^2 \delta y^2}\right\|_{p,\omega}.$$

Son eşitsizlikte infimum alırsak (4.1) den,

$\Omega\,(f,\delta,\xi)p,\omega\ \approx\ K(f,\delta,\xi,p,\omega,2,2)$.

4.7.3 Sonuç *$1<p<\infty$, $\omega \in A_p(T^2,J)$* ve $f \in L^p_\omega(T^2)$ olsun. Bu durumda sadece $[\omega]_{A_p}$ve p ye bağlı sabitler için,

$$\Omega\,(f,\lambda\,\delta,\eta\,\xi)_{p,\omega} \lesssim (1+\lambda)^2(1+\eta)^2\Omega\,(f,\delta,\xi)_{p,\omega}\,,\ \delta,\xi>0,$$

ve

$$\frac{\Omega\,(f,\ \delta_1,\ \delta_2)_{p,\omega}}{{\delta_1}^2\,{\delta_2}^2} \lesssim \frac{\Omega\,(f,\ t_1,\ t_2)_{p,\omega}}{{t_1}^2\,{t_2}^2}\,, \qquad 0<\ t_i \leq\ \delta_i, \qquad i=1{,}2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

4.8 Potapov tipi düz teorem

4.1.2 Teoremin Kanıtı

Burada Potapov tipi düz teoremin kanıtını verelim. Herhangi $g_1 \in W^{r,o}_{p,\omega}$, $g_2 \in W^{o,s}_{p,\omega}$, $g \in W^{r,s}_{p,\omega}$ alalım. Bu durumda

$$Y_{m,n}(f,\delta,\xi\,)_{p,\omega} \leq Y_{m,n}(f-g_1-g_2-g,\delta,\xi)_{p,\omega} + Y_{m,n}(g_1,\delta,\xi\,)_{p,\omega}$$

$$+Y_{m,n}(g_2,\delta,\xi\,)_{p,\omega} + Y_{m,n}(g,\delta,\xi\,)_{p,\omega}$$

$$\lesssim \|f-g_1-g_2-g\|_{p,\omega} + \frac{1}{(m+1)^2}\left\|\frac{\delta^2 g_1}{\delta x^2}\right\|_{p,\omega} + \frac{1}{(n+1)^2}\left\|\frac{\delta^2 g_2}{\delta y^2}\right\|_{p,\omega}$$

$$+\frac{1}{(m+1)^2}\frac{1}{(n+1)^2}\left\|\frac{\delta^4 g}{\delta x^2\delta y^2}\right\|_{p,\omega}.$$

g_1, g_2, g ler üzerinden infimumunu alırsak,

$$Y_{m,n}(f)_{p,\omega} \lesssim K(f,\frac{1}{(m+1)},\frac{1}{(n+1)},p,\omega,2,2) \lesssim \Omega\left(f,\frac{1}{(m+1)},\frac{1}{(n+1)}\right)_{p,\omega}$$

elde ederiz [16,19].

4.9 Realizasyon Fonksiyoneli ile denklik

4.2.3 Teoremin Kanıtı

h, k > 0 ve m, n $\in$ N alalım. Bu durumda,

$$\left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}f\right)\right\|_{p,\omega} = \left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}\left[f - S_{m,o}(f) - S_{o,n}(f)+S_{m,n}(f)\right]\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$+\left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}S_{m,o}(f - S_{o,n}(f)\right)\right\|_{p,\omega} + \left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}S_{m,o}(f - S_{o,n}(f)\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$+\left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}S_{m,n}f\right)\right\|_{p,\omega} \coloneqq l_1 + l_2 + l_3 + l_4.$$

Diyelim ki,

$$f(x,y) - S_{m,o}(f)(x,y) - S_{o,n}(f)(x,y)+S_{m,n}(f)(x,y) \coloneqq \varphi(x,y).$$

Bu durumda, h.h.h y için,

$$\left(\int_T\left|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}\right)\varphi(x,y)\right)\right|^p\omega(x,y)dx\right)^{1/p} \lesssim \left(\int_T\left|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_T\left|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}\right)\varphi(x,y)\right)\right|^p\omega(x,y)dx \lesssim \int_T\left|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx\,,$$

$$\int_T\int_T\left|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}\right)\varphi(x,y)\right)\right|^p\omega(x,y)dxdy \lesssim \int_T\int_T\left|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dxdy\,.$$

Buradan,

$$l_1 = \left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right)\right\|_{p,\omega} \lesssim \left\|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right\|_{p,\omega}.$$

h.h.h x için,

$$\left(\int_T\left|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dy\right)^{1/p} \lesssim \left(\int_T|\varphi(x,y)|^p\omega(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_T\left|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dy \lesssim \int_T|\varphi(x,y)|^p\omega(x,y)dy,$$

$$\int_T\int_T\left|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dydx \lesssim \int_T\int_T|\varphi(x,y)|^p\omega(x,y)dydx.$$

Buradan,

$$\left\|\nabla_{o,k}\varphi(x,y)\right\|_{p,\omega} \lesssim \|\varphi(x,y)\|_{p,\omega} = \left\|f - S_{m,o}(f) - S_{o,n}(f)+S_{m,n}(f)\right\|_{p,\omega}.$$

Diyelim ki;

$$f(x,y) - S_{o,n}(f)(x,y) \coloneqq \psi(x,y).$$

h.h.h *x* için.

$$\left(\int_T\left|\nabla_{h,o}(\nabla_{o,k})S_{m,o}(\psi)(x,y)\right|^p\omega(x,y)dy\right)^{1/p} \lesssim \left(\int_T\left|\nabla_{h,o}S_{m,o}(\psi)(x,y)\right|^p\omega(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_T\left|\nabla_{h,o}(\nabla_{o,k})S_{m,o}(\psi)(x,y)\right|^p\omega(x,y)dy \lesssim \int_T\left|\nabla_{h,o}S_{m,o}(\psi)(x,y)\right|^p\omega(x,y)dy,$$

$$\int_T\int_T\left|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k})S_{m,o}(\psi)(x,y)\right)\right|^p\omega(x,y)dydx \lesssim \int_T\int_T\left|\nabla_{h,o}S_{m,o}(\psi)(x,y)\right|^p\omega(x,y)dxdy.$$

Buradan,

$$l_2 = \left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k}S_{m,o}(\psi)\right)\right\|_{p,\omega} \lesssim \left\|\nabla_{o,k}S_{m,o}(\psi)\right\|_{p,\omega}.$$

Nikolskii-Stechkin tipi tek değişikenli eşitsizliği kullanarak,

$$\left(\int_T|\nabla_hT_m(x)|^p\omega(x)dx\right)^{1/p} \lesssim \frac{1}{m^2}\left(\int_T\left|\frac{d^2}{dx^2}T_m(x)\right|^p\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < h < \frac{1}{m}.$$

h.h.h *y* için ve $0 < h < \frac{1}{m}$ için,

$$\left(\int_T\left|\nabla_{h,o}S_{m,o}\psi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx\right)^{1/p} \lesssim \frac{1}{m^2}\left(\int_T\left|S_{m,o}{}^{(2,o)}\psi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_T\left|\nabla_{h,o}S_{m,o}\psi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx\right)^{1/p} \lesssim \frac{1}{m^{2p}}\left(\int_T\left|S_{m,o}{}^{(2,o)}\psi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_T\int_T\left|\nabla_{h,o}S_{m,o}\psi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx \lesssim \frac{1}{m^{2p}}\int_T\int_T\left|S_{m,o}{}^{(2,o)}\psi(x,y)\right|^p\omega(x,y)dx.$$

Buradan;

$$\left\|\nabla_{h,o}S_{m,o}(\psi)\right\|_{p,\omega} \lesssim \frac{1}{m^2}\left\|S_{m,o}{}^{(2,o)}(\psi)\right\|_{p,\omega}.$$

böylece

$$l_2 \lesssim \frac{1}{m^2}\left\|S_{m,o}{}^{(2,o)}(f - S_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega}.$$

Benzer yöntemle, $0 < k < \frac{1}{k}$, $0 < h < \frac{1}{m}$ için

$$l_3 \lesssim \frac{1}{n^2}\left\|S_{o,n}{}^{(o,2)}(f - S_{m,o}(f)\right\|_{p,\omega}$$

ve

$$l_3 \lesssim \frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}\left\|S_{m,n}{}^{(2,2)}(f)\right\|_{p,\omega}.$$

Elde edilen değerlendirmeleri yerlerine yazarak ve (4.1) den,

$\Omega\,(f, m^{-1}, n^{-1})p, \omega \;\approx\; K(f, m, n, p, \omega, 2, 2).$

Öte yandan,

$$A_1 = \left\|f - S_{m,o}(f) - S_{o,n}(f) + S_{m,n}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim Y_{m,n}(f)_{p,\omega} \lesssim \Omega\,(f,\, m^{-1},\, n^{-1})_{p,\omega}.$$

$A_2 = \left\|S_{m,o}{}^{(2,o)}(f - S_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega}$ ve

$\gamma(x,y) = f(x,y) - S_{o,n}(f)(x,y)$ olsun [1].

Tek değişkenli eşitsizlikten,

$$\left(\int_T \left|\frac{d^2}{dx^2}T_m(x)\right|^p \omega(x,y)dx\right)^{1/p} \lesssim m^2\left(\int_T \left|\nabla_{\frac{1}{m}}T_m(x)\right|^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

h.h.h y için,

$$\left(\int_T \left|\frac{d^2}{dy^2}S_{m,o}(\gamma)\right|^p \omega(x,y)dx\right)^{1/p} \lesssim m^2\left(\int_T \left|\nabla_{\frac{1}{m}}S_{m,o}(\gamma)\right|^p \omega(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_T \left|\frac{d^2}{dy^2}S_{m,o}(\gamma)\right|^p \omega(x,y)dx \lesssim m^{2p}\int_T \left|\nabla_{\frac{1}{m}}S_{m,o}(\gamma)\right|^p \omega(x,y)dx,$$

$$\int_T\int_T \left|\frac{d^2}{dy^2}S_{m,o}(\gamma)\right|^p \omega(x,y)dxdy \lesssim m^{2p}\int_T\int_T \left|\nabla_{\frac{1}{m}}S_{m,o}(\gamma)\right|^p \omega(x,y)dxdy.$$

Buradan,

$$A_2 \lesssim m^2\left\|\nabla_{\frac{1}{m},o}S_{m,o}(\gamma)\right\|_{p,\omega} = m^2\left\|S_{m,o}\left(\nabla_{\frac{1}{m},o}\gamma\right)\right\|_{p,\omega} = m^2\left\|\nabla_{\frac{1}{m},o}\gamma\right\|_{p,\omega}$$

$$= m^2\left\|\nabla_{\frac{1}{m},o}(f - S_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega} = m^2\left\|\nabla_{\frac{1}{m},o}f - \nabla_{\frac{1}{m},o}S_{o,n}(f)\right\|_{p,\omega}$$

$$= m^2\left\|\nabla_{\frac{1}{m},o}f - S_{0,o}\left(\nabla_{\frac{1}{m},o}f\right) - S_{o,n}\left(\nabla_{\frac{1}{m},o}f\right) + S_{0,n}\left(\nabla_{\frac{1}{m},o}f\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim m^2 Y_{0,n}\left(\nabla_{\frac{1}{m},o}f\right)_{p,\omega} \lesssim m^2\Omega\left(f, 1, \frac{1}{n+1}\right)_{p,\omega} = m^2 \sup_{\substack{0\le h\le 1\\ 0\le k\le 1/n}}\left\|\nabla_{h,o}\nabla_{o,k}\left(\nabla_{\frac{1}{n},o}f\right)\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim m^2 \sup_{0\le k\le \frac{1}{n}} \left\| \nabla_{o,k}\left(\nabla_{\frac{1}{m},o} f\right)\right\|_{p,\omega} \lesssim m^2 \sup_{\substack{0\le h\le \frac{1}{m}\\ 0\le k\le \frac{1}{n}}} \left\|\nabla_{h,o}\left(\nabla_{o,k} f\right)\right\|_{p,\omega} = m^2 \Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega}.$$

Benzer şekilde,

$$A_3 = \left\| {S_{o,n}}^{(o,2)}\left(f - S_{m,o}(f)\right)\right\|_{p,\omega} \lesssim n^2 \Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega},$$

$$A_4 = \left\| {S_{m,n}}^{(2,2)}(f)\right\|_{p,\omega} \lesssim m^2 n^2 \Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega}$$

diyelim. Bundan sonra,

$R(f, m, n, p, w, 2{,}2) \lesssim \Omega(f, m^{-1}, n^{-1})_{p,\omega}$,

ve

$\Omega\,(f, m^{-1}, n^{-1})p,\omega \;\approx\; K(f, m, n, p, \omega, 2, 2)$.

Buda kanıtı bitirir.

4.1.5 Teoremin Kanıtı

Süreklilik modülünün altoplamsallığı gereği

$$\Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \lesssim \Omega\left(f - W_{2^u,2^v} f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} + \Omega\left(W_{2^u,2^v} f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega}$$

ve

$$\Omega\left(f - W_{2^u,2^v} f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \lesssim \left\| f - W_{2^u,2^v} f\right\|_{p,\omega} \lesssim Y_{2^u,2^v}\,(f)_{p,\omega}.$$

Öte yandan

$$W_{2^u,2^v} f - W_{0,0} f \le \sum_{i=0}^{u}\left(W_{2^v,2^v} f - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^v} f\right) + \sum_{j=0}^{v}\left(W_{2^u,2^j} f - W_{2^u,\lfloor 2^{j-1}\rfloor} f\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{u}\sum_{j=0}^{v} W_{2^i 2^j} f - W_{2^i,\lfloor 2^{j-1}\rfloor} f - W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,2^j} f + W_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor,\lfloor 2^{j-1}\rfloor} f$$

eşitliği gereği

$$\Omega\left(W_{2^u,2^v} f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} = \Omega\left(W_{2^u,2^v} f - W_{0,0} f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega}$$

$$\le \sum_{i=0}^{u} \Omega\left(\psi_{i,v}(f), \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} + \sum_{j=0}^{v} \Omega\left(h_{u,j}(f), \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} + \sum_{i=0}^{u}\sum_{j=0}^{v} \Omega\left(\varphi_{i,j}(f), \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{u}\left\|\psi_{i,v}(f)^{(2,o)}\right\|_{p,\omega} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{v}\left\|h_{u,j}(f)^{(o,2)}\right\|_{p,\omega} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{u}\sum_{j=0}^{v}\left\|\varphi_{i,j}(f)^{(2,2)}\right\|_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{u} 2^{2i}\, Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}\,(f)_{p,\omega} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{v} 2^{2j}\, Y_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}\,(f)_{p,\omega}$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{u}\sum_{j=0}^{v} 2^{2i+2j}\, Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}\,(f)_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{u} 2^{2i}\, Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, 2^j}\,(f)_{p,\omega} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{v} 2^{2j}\, Y_{2^i, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}\,(f)_{p,\omega}$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{u}\sum_{j=0}^{v} 2^{2i+2j}\, Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}\,(f)_{p,\omega}.$$

Bu durumda, $2^u \leq m < 2^{u+1}$, $2^v \leq n < 2^{v+1}$ alırsak,

$$\Omega\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \lesssim \frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{u}\sum_{j=0}^{v} 2^{2i+2j}\, Y_{\lfloor 2^{i-1}\rfloor, \lfloor 2^{j-1}\rfloor}\,(f)_{p,\omega}$$

$$\lesssim \frac{1}{m^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+1)(j+1)\ \ Y_{i,j}(f)_{p,\omega}$$

elde edilir [21,23].

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sürekli olup 2π periyota sahip olan fonksiyonlar ve L^p, $1 \le p < \infty$ uzayına ait fonksiyonlarındaki karma düzgünlük modülü ile yaklaşımın tıpkı karma Lebesgue uzaylarındaki gibi olduğu görülmektedir. Karma Lebesgue uzayları, Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olduğundan bu durum olağan bir sonuçtur. Sonuç olarak, bu çalışmada Karma Lebesgue Uzayları çerçevesinde yaklaşım problemleri incelenmiş ve çok değişkenli fonksiyonların farklı davranışlarının klasik Lebesgue Uzaylarıyla yeterince açıklanamadığı görülmüştür. Karma Lebesgue uzayları, her değişkenin fonksiyon üzerindeki etkisini ayrı ayrı ele alaran yapıları doğru biçimde inceleme imkânı sunmaktadır. Bu bağlamda, Fourier yaklaşımları ve Trigonometrik polinomlar ile elde edilen veriler, fonksiyonun karma düzgünlüğü ile yaklaşım hızı arasındaki güçlü ilişkiyi ortaya koymuştur. Ayrıca doğrudan ve ters yaklaşım teoremleri, karma süreklilik modülü ve K-fonksiyoneli aracılığıyla birleştirilerek yaklaşım teorisinin bu uzaylardaki yapısı modellenmiştir. Elde edilen bulgular, Karma Lebesgue uzaylarının çok değişkenli problemlerin incelenmesinde doğal ve etkili bir ortam sağladığını göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Akgün** R. Realization and characterization of modulus of smoothness in weighted Lebesgue spaces. Algebra i Analiz 2014; 26: 64-87.

[2] **Cottin** C. Mixed K-functionals: a measure of smoothness for blending-type approximation. Math Z 1990; 204: 69–83.

[3] **Fefferman** R, Stein E. Singular integrals in product spaces. Adv Math 1982; 45: 117-143.

[4] **Guven** A, Kokilashvili V. On the mean summability by Cesaro method of Fourier trigonometric series in two weighted setting. J Inequal Appl 2006, 41837.

[5] **Hunt** R, Muckenhoupt B, Wheeden R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. T Am Math Soc 1973; 176: 227-251.

[6] **Kokilasvili** VM. Maximal functions in weighted spaces. Akad Nauk Gruzin SSR Trudy Tbiliss Mat Inst Razmadze 1980; 65: 110-121 (in Russian).

[7] **Kurtz** DS. Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted Lp spaces. T Am Math Soc 1980; 259: 235-254.

[8] **Muckenhoupt** B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. T Am Math Soc 1972; 165: 207-226.

[9] **Potapov** MK. Approximation by “angle. In: Proceedings of the Conference on the Constructive Theory of Functions and Approximation Theory, Budapest, 1969, Akademiai Kiado, 1972, pp. 371-399 (in Russian).

[10] **Potapov** MK. The Hardy-Littlewood and Marcinkiewicz-Littlewood-Paley theorems, approximation “by an angle” and the imbedding of certain classes of functions. Mathematica (Cluj) 1972; 14: 339-362 (in Russian).

[11] **Potapov** MK. A certain imbedding theorem. Mathematica (Cluj) 1972; 14: 123-146 (in Russian).

[12] **Potapov** MK. Approximation “by angle”, and imbedding theorems. Math Balkanica 1972; 2: 183-198 (in Russian).

[13] **Potapov** MK. Imbedding of classes of functions with a dominating mixed modulus of smoothness. Trudy Mat Inst Steklov 1974; 131: 199-210 (in Russian).

[14] **Potapov** MK, Simonov BV. On the relations between generalized classes of Besov-Nikolski and Weyl-Nikolski functions. Proc Steklov Inst Math 1996; 214: 243-259.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[15] **Potapov** MK, Simonov BV, Lakovich B. On estimates for the mixed modulus of continuity of a function with a transformed Fourier series. Publ Inst Math (Beograd) (N S) 1995; 58: 167-192

[16] **Potapov** MK, Simonov BV, Tikhonov SY. Embedding theorems for Besov-Nikolski and Weyl-Nikolski classes in a mixed metric. Moscow Univ Math Bull 2005; 59: 19-26.

[17] **Potapov** MK, Simonov BV, Tikhonov SY. Transformation of Fourier series using power and weakly oscillating sequences. Math Notes 2005; 77: 90-107.

[18] **Potapov** MK, Simonov BV, Tikhonov SY. Relations between mixed moduli of smoothness and embedding theorems for the Nikolski classes. Proc Steklov Inst Math 2010; 269: 197-207.

[19] **Potapov** MK, Simonov BV, Tikhonov SY. Mixed moduli of smoothness in Lp, $1 < p < \infty$: a survey. Surv Approx Theory 2013; 8: 1-57.

[20] **Runovski** KV. Several questions of approximation theory. PhD, Moscow State University, Moscow, USSR, 1989.

[21] **Timan** AF. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. London, UK: Pergamon Press, 1963.

[22] **Timan** MF. Approximation and Properties of Periodic Functions. Dnepropetrovsk, Ukraine: Fedorchenko, 2011.

[23] **Y. Soykan**, Fonksiyonel Analiz, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık TİC. LTD. ŞTİ., Türkiye, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :ALİ KAYA

Doğum tarihi ve yeri : **25.09.1990/**Balıkesir

e-posta :alikaya1019@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2026
Lisans	Sivas Cumhuriyet Üniversitesi/Eğitim Fakültesi	2014
Lise	Kırkağaç Eczacı Engin Ümmetoğlu Anadolu Lisesi	2008