T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ MODELLEME SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL ÇALIŞMA ALANI TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

OZAN DENİZ KIYICI

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Devrim ÜZEL
Prof. Dr. Recai AKKAYA
Doç. Dr. Emine ÖZDEMİR
Doç. Dr. Emine Nur ÜNVEREN BİLGİÇ

BALIKESİR, KASIM- 2025

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Matematik Öğretmen Adaylarının Modelleme Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Alanı Teorisi Çerçevesinde İncelenmesi**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ozan Deniz KIYICI

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ MODELLEME SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL ÇALIŞMA ALANI TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ
DOKTORA TEZİ
OZAN DENIZ KIYICI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. FİLİZ TUBA DİKKARTIN ÖVEZ)

BALIKESİR, 2025

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme süreçlerini Matematiksel Çalışma Alanı teorisi çerçevesinde inceleyerek, modelleme yeterlikleri ile epistemolojik düzlem bileşenlerinin ve oluşum süreçlerinin etkileşimini ortaya koymaktır. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarının farklı matematiksel görevler sırasında gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalar, Matematiksel Çalışma Alanı teorisinin bileşenleri ve oluşum süreçleri dikkate alınarak analiz edilmiştir. Nitel araştırma desenine sahip olan çalışmada veriler, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının dört farklı modelleme görevine verdikleri yanıtlar üzerinden elde edilmiştir. Görevler, açık uçlu ve alan ölçme kavramına dayalı olarak bağlam temelli olacak şekilde yapılandırılmıştır. Dört hafta süren veri toplama sürecinde bireysel çalışmalar ve grup çalışmaları yapılarak çalışma yaprakları, grup raporları ve video kayıtları kullanılmıştır. Veriler, Matematiksel Çalışma Alanı Teorisine dayalı olarak betimsel olarak analiz edilmiştir. Araştırmanın bulguları, öğretmen adaylarının yoğun olarak temsil ve artefakt bileşenlerini kullandığını, ancak teorik referans kullanımında sınırlı kaldıklarını göstermektedir. Modelleme sürecinin tüm aşamalarında söylemsel oluşumun öne çıktığı, enstrümantal oluşumun ise bazı gruplarda kopukluklarla gerçekleştiği belirlenmiştir. Ayrıca, düzlemler arası geçişin sağlandığı matematiksel çalışmalarda, modelleme yeterlikleri açısından daha bütüncül ve nitelikli sonuçlar ortaya konulduğu görülmüştür. Özellikle artefaktların etkin şekilde kullanıldığı ve dikey düzlemler arası geçişlerin esnek bir biçimde gerçekleştirildiği durumlarda modelleme yeterliklerinin anlamlı biçimde geliştiği görülmüştür. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel model üretmelerinin yanı sıra, süreci yeniden yapılandırma, gerekçelendirme ve bağlamla ilişkilendirme becerilerinin de geliştiğini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla, Matematiksel Çalışma Alanı Teorisinin bileşenleriyle desteklenen modelleme sürecinin, öğretmen adaylarının derinlemesine matematiksel düşünme ve üretken problem çözme becerilerinin gelişimi açısından kritik bir rol oynadığı sonucuna varılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: İlköğretim matematik öğretmen adayları, matematiksel modelleme, matematiksel çalışma alanları, matematiksel çalışma, modelleme yeterlikleri

Bilim Kod / Kodları: 13401 Sayfa Sayısı: 347

ABSTRACT

AN INVESTIGATION OF THE MODELING PROCESSES OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' IN THE FRAMEWORK OF MATHEMATICAL WORKING SPACES

PHD THESIS

OZAN DENIZ KIYICI

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION

MATHEMATICS EDUCATION

(SUPERVISOR: PROF. DR. FILIZ TUBA DIKKARIN OVEZ)

BALIKESİR, 2025

The aim of this study is to examine the mathematical modeling process of preservice elementary mathematics teachers within the Theory of the Mathematical Working Spaces, and to reveal the interaction between modeling competencies and the components of the epistemological plane and genesis processes. In this regard, the mathematical work performed by the preservice teachers during different mathematics tasks was analyzed by taking into account the components and genesis processes defined by the Theory of Mathematical Working Spaces. The study employed a qualitative research design, and the data were obtained through the responses of preservice elementary mathematics teachers to four different modeling tasks. These tasks were structured as open-ended and based on measurement of area context; data collection lasted four weeks and involved both individual and group work using worksheets, group reports, and video recordings. The data were analyzed descriptively based on the Theory of Mathematical Working Spaces. The findings of the study indicate that preservice teachers predominantly used the components of representation and artifact, while their use of theoretical references remained limited. Discursive genesis was found to be prominent across all stages of the modeling process, whereas instrumental genesis occurred with discontinuities in some groups. Furthermore, it was observed that mathematical work involving transitions between planes resulted in more holistic and qualified outcomes in terms of modeling competencies. In particular, modeling competencies were meaningfully developed in situations where artifacts were used effectively and transitions between vertical planes were flexibly established. This indicates that the preservice teachers not only constructed mathematical models but also developed their ability to restructure the process, justify their reasoning, and connect it with the context. Therefore, it was concluded that modeling activities supported by the components of the Theory of MWS play a critical role in developing preservice teachers' deep mathematical thinking and productive problem-solving skills.

KEYWORDS: Preservice elementary mathematics teachers, mathematical modeling, mathematical working spaces, mathematical work, modeling competencies

Science Code / Codes: 13401 Page Number: 347

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
TABLO LİSTESİ ..... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **x**
ÖNSÖZ ..... **xviii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Araştırmanın Amacı ve Önemi 4
1.2 Problem Durumu ve Alt Problemler 8
1.3 Sayıltılar 9
1.4 Sınırlılıklar 9
1.5 Tanımlar 9
2. LİTERATÜR **11**
2.1 Matematiksel Çalışma Alanı Teorisi 11
2.1.1 MÇA Teorisinin Bileşenleri 14
2.1.1.1 Epistemolojik Düzlem 14
2.1.1.1.1 Temsiller 14
2.1.1.1.2 Artefakt 19
2.1.1.1.3 Teorik Referanslar 21
2.1.1.2 Bilişsel Düzlem 22
2.1.1.2.1 Görselleştirme 23
2.1.1.2.2 İnşa Etme 24
2.1.1.2.3 İspat 25
2.1.1.3 Oluşum Süreçleri 27
2.1.1.3.1 Semiyotik Oluşum 28
2.1.1.3.2 Enstrümantal oluşum 29
2.1.1.3.3 Söylemsel Oluşum 32
2.1.1.4 MÇA Diyagramında Bulunan Dikey Düzlemler 34
2.1.1.4.1 [Sem-Söy] Dikey Düzlemi 35
2.1.1.4.2 [Sem-Ens] Dikey Düzlemi 36
2.1.1.4.3 [Ens-Söy] Dikey Düzlemi 38
2.1.2 Bir Analiz Aracı Olarak MÇA ve MÇA Türleri 39
2.2 Matematiksel Modelleme 43
2.2.1 Model Oluşturma Etkinlikleri 49
2.3 Matematiksel Modelleme ve MÇA 52
2.4 Alan Ölçme Kavramına İlişkin Referans MÇA 54
2.5 İlgili Araştırmalar 56
2.5.1 MÇA ile İlgili Yurtiçinde Yapılan Çalışmalar 56
2.5.2 MÇA ile İlgili Yurtdışında Yapılan Çalışmalar 58
2.5.3 Matematiksel modelleme ile ilgili yapılan çalışmalar 64
2.5.4 MÇA ve matematiksel modelleme ile ilgili yapılan çalışmaların sentezi 67

İÇİNDEKİLER (devam) **Sayfa**

3. YÖNTEM 69
3.1 Araştırmanın Modeli 69
3.2 Çalışma Grubu 70
3.3 Araştırmanın Tasarlanması ve Yürütülmesi 72
3.3.1 Matematiksel Görevlerin Geliştirilme Süreçleri 77
3.3.1.1 Stadyum Görevinin Geliştirilme Süreci 77
3.3.1.1.1 Stadyum Görevine İlişkin Uygun MÇA 79
3.3.1.1.2 Stadyum Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma 81
3.3.1.2 Basketbol Görevinin Geliştirilme Süreci 83
3.3.1.2.1 Basketbol Görevine İlişkin Uygun MÇA 85
3.3.1.2.2 Basketbol Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma 87
3.3.1.3 Mostar Görevinin Geliştirilme Süreci 91
3.3.1.3.1 Mostar Görevine İlişkin Uygun MÇA 93
3.3.1.3.2 Mostar Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma 94
3.3.1.4 Epoksi Görevinin Geliştirilme Süreci 96
3.3.1.4.1 Epoksi Görevine İlişkin Uygun MÇA 98
3.3.1.4.2 Epoksi Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma 99
3.3.2 Pilot Çalışma Süreci 101
3.3.3 Veri Toplama Süreci 103
3.4 Veri Analizi 104
3.5 Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği 111
4. BULGULAR 115
4.1 Stadyum Görevinin Analizi 122
4.1.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Stadyum Görevi 122
4.1.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 123
4.1.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 125
4.1.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 127
4.1.1.4 Yenilenen Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 129
4.1.1.5 Yenilenen Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 130
4.1.1.6 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 131
4.1.1.7 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 132
4.1.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması 133
4.1.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 135
4.1.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 136
4.1.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 138
4.1.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamasının Analizi 139
4.1.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 141
4.1.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Stadyum Görevi 143
4.1.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 144
4.1.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 146
4.1.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 147
4.1.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 151

İÇİNDEKİLER (devam) **Sayfa**

4.1.3.5 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 152
4.1.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Stadyum Görevi 153
4.1.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 155
4.1.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 158
4.1.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 163
4.1.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 164
4.1.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 165
4.2 Basketbol Görevine İlişkin Bulgular 167
4.2.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi 167
4.2.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamasının Analizi 168
4.2.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 170
4.2.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 172
4.2.1.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamasının Analizi 175
4.2.1.5 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 175
4.2.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi 177
4.2.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 178
4.2.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 180
4.2.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 182
4.2.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 188
4.2.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 189
4.2.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi 191
4.2.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 193
4.2.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 194
4.2.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 195
4.2.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 197
4.2.3.5 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 198
4.2.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi 199
4.2.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 200
4.2.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 202
4.2.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 204
4.2.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 205
4.2.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 206
4.3 Mostar Problemine İlişkin Bulgular 207
4.3.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi 207
4.3.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 208
4.3.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 211
4.3.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 214
4.3.1.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 218

İÇİNDEKİLER (devam) **Sayfa**

4.3.1.5 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 219
4.3.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi 221
4.3.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 222
4.3.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 224
4.3.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 228
4.3.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 230
4.3.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 231
4.3.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi 232
4.3.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 233
4.3.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 235
4.3.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 239
4.3.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 243
4.3.3.5 Yenilenen Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 244
4.3.3.6 Yenilenen Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 246
4.3.3.7 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 247
4.3.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi 248
4.3.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 250
4.3.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 251
4.3.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 255
4.3.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 258
4.3.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 259
4.4 Epoksi Görevi İlişkin Bulgular 261
4.4.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi 261
4.4.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 262
4.4.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 264
4.4.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 268
4.4.1.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 272
4.4.1.5 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 273
4.4.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi 275
4.4.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 276
4.4.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 277
4.4.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 282
4.4.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 283
4.4.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 284
4.4.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi 286
4.4.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 287
4.4.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 289
4.4.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 293
4.4.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 294

İÇİNDEKİLER (devam) **Sayfa**

4.4.3.5 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 295
4.4.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi 297
4.4.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi 298
4.4.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi 299
4.4.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi 303
4.4.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi 305
4.4.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum 307
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 309
5.1 Matematiksel Görevlere İlişkin Sonuç ve Tartışma 309
5.1.1 Stadyum Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma 309
5.1.2 Basketbol Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma 311
5.1.3 Mostar Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma 313
5.1.4 Epoksi Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma 315
5.2 Bütüncül Sonuç ve Tartışma 317
5.3 Öneriler 319
6. KAYNAKÇA 321
EKLER 340
Ek A 340
Ek B Uygulama İzni 344
Ek C Etik Kurul Onayı 345
ÖZGEÇMİŞ 346

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1: Başlıca matematiksel modelleme döngüleri 45
Tablo 3.1: Oluşturulan gruplara ilişkin bilgiler 72
Tablo 3.2: Model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri ve prensipleri 75
Tablo 3.3: Modelleme Yeterliği Değerlendirme Rubriği 106
Tablo 3.4: MYDR Modelleme Yeterlik Düzeyleri Puanlaması 107
Tablo 3.5: MÇA bileşenleri ve tanımlayıcıları 110
Tablo 4.1: Matematiksel görevlere göre MYDR'den elde edilen puanlar ve yeterlik düzeyleri 115
Tablo 6.1: Matematiksel Modelleme Etkinlikleri ve Yönlendirilmiş Keşif Soruları 340

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: MÇA diyagramı (Kuzniak'tan (2016) uyarlanmıştır) 14
Şekil 2.2: Semiyotik Oluşum Süreci 29
Şekil 2.3: Enstrümantal Oluşum Süreci 31
Şekil 2.4: Söylemsel Oluşum Süreci 33
Şekil 2.5: MÇA dikey düzlemleri (Kuzniak (2016)'dan uyarlanmıştır) 35
Şekil 2.6: [Sem-Söy] Dikey Düzlemi 36
Şekil 2.7: [Sem-Ens] Dikey Düzlemi 37
Şekil 2.8: [Ens-Söy] Dikey Düzlemi 39
Şekil 2.9: Matematiksel modelleme döngüsü (Blum & Leiß, 2007) – Kotze'den uyarlanmıştır (2017, p. 193) 47
Şekil 2.10: Model oluşturma etkinliklerinin özellikleri (Tekin Dede ve Bukova Güzel (2014)'den uyarlanmıştır) 50
Şekil 2.11: Model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri 51
Şekil 2.12: Model oluşturma etkinliklerinin prensipleri 51
Şekil 3.1: Araştırma sürecine ilişkin akış şeması 72
Şekil 3.2: Referans nesne uzunluğunun belirlenmesi – Stadyum görevi 82
Şekil 3.3: Matematiksel temsillerin oluşturulması – Stadyum görevi 83
Şekil 3.4: Matematiksel temsillerin oluşturulması – Basketbol görevi 89
Şekil 3.5: Bölgelerin belirlenmesi – Basketbol görevi 90
Şekil 3.6: Geometrik nesnelerin oluşturulması – Mostar görevi 96
Şekil 3.7: Sürgülerin hareketi ile dikdörtgenin boyutlarının değiştirilmesi – Epoksi görevi 100
Şekil 3.8: Sürgülerin hareketi ile epoksi kullanılan alanın değişimi – Epoksi görevi 101
Şekil 3.9: Geçerlik ve Güvenirlik İçin Yapılan Uygulamalar 114
Şekil 4.1: Matematiksel çalışmalarda MYDR'den elde edilen puanlar ve yeterlik düzeyleri 118
Şekil 4.2: Grupların matematiksel modelleme döngüsü aşamalarındaki ortalama puanları .. 119
Şekil 4.3: Grupların matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarında elde ettiği ortalama puanlar 120
Şekil 4.4: Grup 1'in modelleme döngüsü aşamalarındaki modelleme yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi 123
Şekil 4.5: Grup 1'in uzunluk ölçme aracını kullanmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi . 125
Şekil 4.6: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 125
Şekil 4.7: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 126
Şekil 4.8: Grup 1'in problemin çözümünde kullanılacak verileri elde etmesine ilişkin görsel – Stadyum görevi 127
Şekil 4.9: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 128
Şekil 4.10: Grup 1'in yenilenen matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 129
Şekil 4.11: Grup 1'in yenilenen matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 131
Şekil 4.12: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 132
Şekil 4.13: Grup 1'in Stadyum görevindeki matematiksel çalışmalarının özeti 132

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.14: Grup 2'nin modelleme döngüsü aşamalarındaki modelleme yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi 134
Şekil 4.15: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 136
Şekil 4.16: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 137
Şekil 4.17: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 139
Şekil 4.18: Grup 2'nin çalışma yaprağı alıntısı 140
Şekil 4.19: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışmaları – Stadyum görevi 141
Şekil 4.20: Grup 2'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 141
Şekil 4.21: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi 143
Şekil 4.22: Grup 7'nin oluşturduğu elipslere ilişkin görsel – Stadyum görevi 145
Şekil 4.23: Grup 7'nin matematiksel çalışmasından ekran görüntüsü 145
Şekil 4.24: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 146
Şekil 4.25: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 147
Şekil 4.26: Grup 7'nin elipsin yarıçaplarını oluşturmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi 148
Şekil 4.27: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Stadyum görevi 149
Şekil 4.28: Grup 7'nin matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı 150
Şekil 4.29: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Stadyum görevi 151
Şekil 4.30: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 151
Şekil 4.31: Grup 7'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 152
Şekil 4.32: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi 154
Şekil 4.33: Grup 8'in dinamik geometri yazılımına görsel aktarmasına ilişkin ekran alıntısı 155
Şekil 4.34: Zümreler Grubu Çalışma Yaprağı Alıntısı 156
Şekil 4.35: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 158
Şekil 4.36: Grup 8'in fotoğrafı soluklaştırmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi 158
Şekil 4.37: Grup 8'in dik doğru oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi 159
Şekil 4.38: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Stadyum görevi 160
Şekil 4.39: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Stadyum görevi 161
Şekil 4.40: Grup 8'in GeoGebra dinamik çalışma sayfasına ilişkin ekran alıntısı – Stadyum görevi 162
Şekil 4.41: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Stadyum görevi 163

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.42: Grup 8'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Stadyum görevi 164
Şekil 4.43: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi 164
Şekil 4.44: Grup 8'in Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 165
Şekil 4.45: Grup 1'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – basketbol görevi 167
Şekil 4.46: Grup 1'in internetten basketbol sahası görseli aramasına ilişkin görsel – Basketbol görevi 168
Şekil 4.47: Grup 1'in problemin anlaşılmasına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 169
Şekil 4.48: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 170
Şekil 4.49: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki eylemlerine ilişkin görsel – Basketbol görevi 171
Şekil 4.50: Grup 1'in oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi 171
Şekil 4.51: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol Görevi 172
Şekil 4.52: Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 173
Şekil 4.53: Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 174
Şekil 4.54: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 174
Şekil 4.55: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 175
Şekil 4.56: Grup 1'in Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 176
Şekil 4.57: Grup 2'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Basketbol görevi 178
Şekil 4.58: Grup 2'nin problemi anlama aşamasına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 179
Şekil 4.59: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 180
Şekil 4.60: Grup 2'nin GeoGebra araçlarını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi 181
Şekil 4.61: Grup 2'nin oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi 181
Şekil 4.62: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 182
Şekil 4.63: Grup 2'nin çokgen oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi 183
Şekil 4.64: Grup 2'nin oluşturduğu çokgensel bölgeye ilişkin görsel – Basketbol görevi 183
Şekil 4.65: Grup 2'nin orta dikme oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi 184
Şekil 4.66: Grup 2'nin üç noktadan geçen çember oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi 185
Şekil 4.67: Grup 2'nin elde edilen verileri sunmak için oluşturduğu tablo – Basketbol görevi 185

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.68: Grup 2'nin matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 186
Şekil 4.69: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Basketbol görevi 186
Şekil 4.70: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Basketbol görevi 187
Şekil 4.71: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Basketbol görevi 187
Şekil 4.72: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 4 – Basketbol görevi 188
Şekil 4.73: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 5 – Basketbol görevi 188
Şekil 4.74: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 189
Şekil 4.75: Grup 2'nin Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 190
Şekil 4.76: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Basketbol görevi 192
Şekil 4.77: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 194
Şekil 4.78: Grup 7'nin oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi 194
Şekil 4.79: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 195
Şekil 4.80: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 197
Şekil 4.81: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 197
Şekil 4.82: Grup 7'nin Basketbol görevindeki matematiksel çalışması 198
Şekil 4.83: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Basketbol görevi 200
Şekil 4.84: Grup 8'in problemi anlama aşamasına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 201
Şekil 4.85: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 202
Şekil 4.86: Grup 8'in oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi 203
Şekil 4.87: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 204
Şekil 4.88: Grup 8'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi 204
Şekil 4.89: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 205
Şekil 4.90: Grup 8'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi 206
Şekil 4.91: Grup 8'in Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 206
Şekil 4.92: Grup 1'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi 208
Şekil 4.93: Grup 1'in referans nesnenin uzunluğunu ölçmesine ilişkin görsel – Mostar görevi 210

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.94: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi 211
Şekil 4.95: Grup 1'in doğru parçası oluşturması ve uzunluk ölçüsünü belirlemesini içeren görsel – Mostar görevi..... 211
Şekil 4.96: Grup 1 tarafından oluşturulan matematiksel model – Mostar Görevi..... 212
Şekil 4.97: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi 213
Şekil 4.98: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi 213
Şekil 4.99: Grup 1'in parabol aracını kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi..... 215
Şekil 4.100: Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi..... 216
Şekil 4.101: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi 217
Şekil 4.102: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi 218
Şekil 4.103: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – Mostar görevi 219
Şekil 4.104: Grup 1'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının özeti..... 219
Şekil 4.105: Grup 2'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi..... 221
Şekil 4.106: Grup 2'nin problemin çözümü için yaptığı plana ilişkin görsel – Mostar görevi 223
Şekil 4.107: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi..... 224
Şekil 4.108: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 - Mostar görevi 224
Şekil 4.109: Grup 2'nin oluşturduğu doğru parçasına ilişkin görsel – Mostar görevi..... 225
Şekil 4.110: Grup 2'nin orta dikme aracını kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi..... 226
Şekil 4.111: Grup 2'nin problemi matematikselleştirmesine ilişkin görsel – Mostar görevi 226
Şekil 4.112: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – 1 – Mostar görevi 227
Şekil 4.113: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – 2 – Mostar görevi 227
Şekil 4.114: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – 3 – Mostar görevi 228
Şekil 4.115: Grup 2'nin gerçekleştirdiği matematiksel işlemleri içeren çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi 229
Şekil 4.116: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi 230
Şekil 4.117: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi 230
Şekil 4.118: Grup 2'nin Mostar görevindeki matematiksel çalışması..... 231
Şekil 4.119: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi..... 233
Şekil 4.120: Grup 7'nin çözüm planına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi 234
Şekil 4.121: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamalarındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi..... 235

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.122: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamalarındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi 235
Şekil 4.123: Grup 7'nin kemeri temsil eden polinomu oluşturmasına ilişkin görsel – Mostar görevi 236
Şekil 4.124: Grup 7'nin problemi matematikselleştirmesine ilişkin görsel – Mostar görevi 237
Şekil 4.125: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi 238
Şekil 4.126: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi 239
Şekil 4.127: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışmaları – 1 – Mostar görevi 241
Şekil 4.128: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışmaları – 2 – Mostar görevi 242
Şekil 4.129: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışmaları – 3 – Mostar görevi 243
Şekil 4.130: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi 243
Şekil 4.131: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki ikinci matematiksel çalışması – Mostar görevi 245
Şekil 4.132: Grup 7'nin matematiksel işlemlerini içeren çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi 246
Şekil 4.133: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki ikinci matematiksel çalışması – Mostar görevi 246
Şekil 4.134: Grup 7'nin Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 247
Şekil 4.135: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi 249
Şekil 4.136: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi 251
Şekil 4.137: Grup 8'in nokta aracını ve polinom oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi 252
Şekil 4.138: Grup 8'in polinom komutunu uygulayarak oluşturduğu polinom grafikleri – Mostar görevi 253
Şekil 4.139: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi 254
Şekil 4.140: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi 254
Şekil 4.141: Grup 8'in belirli integral komutunu kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi 255
Şekil 4.142: Grup 8'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi 257
Şekil 4.143: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi 258
Şekil 4.144: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi 258
Şekil 4.145: Grup 8'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi 259
Şekil 4.146: Grup 8'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 260

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.147: Grup 1'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi 262
Şekil 4.148: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 263
Şekil 4.149: Grup 1'in GeoGebra kütüphanesinden eriştiği sinüs fonksiyonu çalışma sayfası – Epoksi görevi 264
Şekil 4.150: Grup 1'in GeoGebra kütüphanesinden eriştiği sinüs fonksiyonu çalışma sayfası – 2 – Epoksi görevi 265
Şekil 4.151: Grup 1 tarafından oluşturulan sinüs fonksiyonu grafikleri – Epoksi görevi 265
Şekil 4.152: Grup 1 tarafından problem durumuna uygun olarak oluşturulan sinüs grafikleri – Epoksi görevi 266
Şekil 4.153: Grup 1 tarafından GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulan matematiksel model – Epoksi görevi 267
Şekil 4.154: Grup 1 tarafından oluşturulan matematiksel modele ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Epoksi görevi 267
Şekil 4.155: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 268
Şekil 4.156: Grup 1'in integralde alan formülü uygulamasını incelediği dinamik çalışma sayfası – Epoksi görevi 269
Şekil 4.157: Grup 1 tarafından fark edilen 'integralarasında' komutu – Epoksi görevi 270
Şekil 4.158: Grup 1 tarafından iki eğri arasında kalan sınırlı bölgenin alanının belirlenmesi – Epoksi görevi 270
Şekil 4.159: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Epoksi görevi 271
Şekil 4.160: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Epoksi görevi 271
Şekil 4.161: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamalarındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 273
Şekil 4.162: Grup 1'in Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 273
Şekil 4.163: Grup 2'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi 275
Şekil 4.164: ÖA4'ün çalışma yaprağı alıntısı- Epoksi görevi 276
Şekil 4.165: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 277
Şekil 4.166: Grup 2'nin problem durumuna uygun olarak oluşturduğu fonksiyon grafikleri – Epoksi görevi 277
Şekil 4.167: Grup 2'nin 'integralarasında' komutunu kullanmasına ilişkin görsel – Epoksi görevi 278
Şekil 4.168: Grup 2'nin sürgüleri kullanarak gerçekleştirdiği denemelere ilişkin görseller – Epoksi görevi 279
Şekil 4.169: Grup 2'nin oluşturduğu matematiksel model – Epoksi görevi 280
Şekil 4.170: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Epoksi görevi 280
Şekil 4.171: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Epoksi görevi 281
Şekil 4.172: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Epoksi görevi 281

ŞEKİL LİSTESİ (devam) **Sayfa**

Şekil 4.173: Grup 2'nin matematiksel model üzerine yaptığı geliştirmelere ilişkin görsel – Epoksi görevi 282
Şekil 4.174: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 283
Şekil 4.175: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – epoksi etkinliği 284
Şekil 4.176: Grup 2'nin Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 285
Şekil 4.177: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi 287
Şekil 4.178: ÖA26'nın çalışma yaprağı alıntısı – Epoksi görevi 288
Şekil 4.179: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 288
Şekil 4.180: Grup 7'nin 'integralarasında' komutunu kullanmasına ilişkin görsel – Epoksi görevi 290
Şekil 4.181: Grup 7 tarafından oluşturulan matematiksel model – Epoksi görevi 291
Şekil 4.182: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Epoksi görevi 292
Şekil 4.183: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Epoksi görevi 292
Şekil 4.184: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Epoksi görevi 293
Şekil 4.185: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 294
Şekil 4.186: Grup 7'nin yorumlama ve değerlendirme aşamasındaki matematiksel çalışma – Epoksi görevi 295
Şekil 4.187: Grup 7'nin Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 295
Şekil 4.188: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi 298
Şekil 4.189: ÖA30'un çalışma yaprağı alıntısı – Epoksi görevi 299
Şekil 4.190: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 299
Şekil 4.191: Grup 8'in oluşturduğu sinüs fonksiyonlarına ilişkin görsel – Epoksi görevi 300
Şekil 4.192: Grup 8'in oluşturduğu matematiksel model – Epoksi görevi 301
Şekil 4.193: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması 1 – Epoksi görevi 302
Şekil 4.194: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması 2 – Epoksi görevi 302
Şekil 4.195: Grup 8'in 'integralarasında' komutu kullanmasına ilişkin görsel 304
Şekil 4.196: Grup 8'in incelediği farklı durumlara ilişkin görseller 304
Şekil 4.197: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 305
Şekil 4.198: Grup 8'in farklı durumları karşılaştırmak için oluşturduğu tablo – Epoksi görevi 306
Şekil 4.199: Grup 8'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi 307
Şekil 4.200: Grup 8'in Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti 307

ÖNSÖZ

Bu tez hem akademik hem de kişisel hayatımda oldukça yoğun, yorucu ve öğretici bir sürecin ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Akademik sorunların yanı sıra hayatın getirdiği birçok zorluğa karşı göğüs gererken olgunlaşan bu süreç, bana yeniden başlamanın, güçlenmenin ve ayağa kalkmanın gerekliliğini öğreten bir yolculuk oldu.

Tezimin hazırlanma sürecinde beni sürekli çalışmaya teşvik eden, düştüğümde kalkmam için cesaretlendiren, rehberliğini hiçbir zaman esirgemeyen ve bana her koşulda inancını gösteren danışmanım Prof. Dr. Filiz Tuba Dikkartın Övez'e sonsuz teşekkürler. Fikirleriyle çalışmama yön veren, uygulama sürecinde desteğini esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Devrim Üzel'e de teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tez izleme komitesi toplantılarındaki akademik rehberliği ve eleştirel bakış açısı ile çalışmama katkı sağlayan Prof. Dr. Recai Akkaya hocama da teşekkür ederim.

Verilerin analizi ve raporlaştırılması sırasında tıkanıklık yaşamışken katıldığım 8. Matematiksel Çalışma Sempozyumunda çalışmaları ile ilham veren Alain Kuzniak, Laurent Vivier, Assia Nechache ve Ines Maria Gomez-Chacon'a; fikirleri ve önerileri ile yol gösteren Gonzalo Espinoza-Vasquez, Paula Verdugo-Hernandez ve Romina Menares-Espinoza'ya yürekten teşekkür ederim.

Teşekkürlerin en büyüğü ise her daim yanımda olan aileme ve yakın dostlarıma... Annem, babam, kardeşim ve arkadaşlarım bu süreçte yaşadığım zorluklarda sessiz ama güçlü bir destek sundular. Onların varlığı, bu tezin tamamlanmasında en önemli dayanaklarımdan biri oldu. Minnettarım.

Ortaya çıkan bu çalışmanın hem matematik eğitimi alanına hem de bu alanda çalışma yapan diğer araştırmacılara katkı sağlamasını temenni ederim.

Balıkesir, 2025 **Ozan Deniz Kıyıcı**

1. GİRİŞ

Matematik, problem çözme, problem arama, bir konuyu organize etme faaliyeti olarak tanımlanmakta; aynı zamanda gerçek yaşam durumlarının modellenmesine dayanan, anlamlandırma ve problem çözme süreçleriyle gelişen bilgi ve beceriler bütünü olarak görülmektedir (Altun, 2020, p. 15; Freudenthal, 1971, pp. 137-138). Problem çözme sürecinde bireylerin ortaya koyduğu matematiksel düşünme süreçleri ile ulaştıkları sonuçlar; aritmetik, cebir, analiz, geometri, olasılık ve istatistik gibi farklı matematiksel alanlarda kendini göstermekte ve farklılaşmaktadır. Bu alanlardaki problemlerin çözümünde sınıflandırma, muhakeme, akıl yürütme ve ispat gibi üst düzey bilişsel beceriler etkin biçimde kullanılmaktadır.

Günlük yaşamın birçok farklı alanında matematiksel düşünme ve matematiksel ifadelerle karşılaşılmaktadır. Gerçek yaşam durumlarının matematiksel formüller, kurallar ve örüntüler aracılığıyla ifade edilmesi süreci, matematiksel modelleme olarak tanımlanmaktadır (Gravemeijer, 2002). Soyutlama ve somutlaştırma kavramlarına dayanan matematiksel modelleme, bireylerin problem durumlarını yorumlamaları ve tanımlamalarını sağlayan bilişsel etkinlikler bütünüdür ve problem çözme süreçlerinde iş planı oluşturma görevi görür (Altun, 2020). Matematiksel modelleme, gerçek yaşamda karşılaşılan bir problemin model aracılığıyla ifade edilmesini, modelin çözülmesini ve elde edilen sonucun tekrar gerçek yaşam bağlamına dönüştürülerek yorumlanmasını, doğrulanmasını ve yazılı olarak raporlanmasını içermektedir (Common Core State Standards Initiative, 2010).

Bu süreçte ortaya çıkan matematiksel modeller, fiziki modellerden farklı olarak, zihinsel temelli kavramsal yapılardır. Matematiksel modelin oluşturulması ve çözülmesi sırasında yürütülen bilişsel faaliyetler, matematiksel modelleme sürecinin bilişsel perspektiften incelenmesini mümkün kılmaktadır. Ancak, bu bilişsel süreçler doğrudan gözlemlenemediği için, araştırmalarda genellikle gözlemlenebilir eylemler üzerinden sürecin ayrıntılı açıklamaları yapılmaktadır (Leplat, 2004). Bu bağlamda modelleme sürecinin nasıl gerçekleştiği, farklı araştırmacılar tarafından çeşitli yönleriyle ele alınmıştır (Abrams, 2001; Ang, 2010; Blum and Borromeo Ferri, 2009; Blum and Leiß, 2007; Kaiser, 2007; Kaiser and Maaß, 2007; Lesh and Doerr, 2003; Mason, 1988; Niss et al., 2007).

Farklı araştırmacılar tarafından önerilen teorik yaklaşımların ortak noktası, matematiksel modelleme sürecinin genel olarak döngüsel bir yapı içerisinde gerçekleştiğidir. Bu süreçte yer alan işlemlerin sayısı ve sırası katı kurallara bağlı olmayıp, gerçek durumun bağlamına, bireylerin matematiksel düşünme stillerine ve önceki deneyimlerine bağlı olarak değişkenlik gösterebilmektedir (Blum and Borromeo Ferri, 2009). Bu nedenle, modelleme döngüsünde yer alan basamaklar arasında esnek geçişler yapılabilir; tüm basamakların sırasıyla ve tam olarak uygulanması her zaman gerekmemektedir (Bukova Güzel vd., 2016). Matematiksel modelleme sürecini ele alan teorik yaklaşımlar, uygulayıcılar için yalnızca kuramsal bir bakış açısı sunmakla kalmayıp; aynı zamanda, modelleme etkinliklerinin planlanması ve uygulanmasında karşılaşılabilecek zorlukların öngörülmesine, sürecin aşamalarının belirlenmesine ve öğretim tasarımında karar verme süreçlerinin desteklenmesine katkı sağlamaktadır (Kertil vd., 2014).

Matematiksel modelleme, gerçek dünya ile matematiksel kavramlar arasında karşılıklı geçişlerin gerçekleştiği karmaşık ve çok yönlü bir süreçtir. Bu süreci açıklamak için ortaya atılan matematiksel modelleme döngüleri, gerçek yaşam problemlerinin matematiksel yapılarla ilişkilendirilmesini açıklaması bakımından matematik eğitimi literatüründe önemli bir yere sahiptir. Matematiksel modelleme sürecinin ortaya koyulmasındaki temel elemanlardan biri olan modelleme etkinlikleri ise gerçek yaşam durumlarının anlamlandırılması, matematikselleştirilmesi, ilgili bilgilerin yorumlanması, problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi için strateji üretilmesi ve farklı temsil biçimlerinin oluşturulmasını gerektirmektedir (Lesh and Doerr, 2003). Bu etkinliklerin çözümü sırasında gerçekleştirilen eylemler ile ortaya çıkan matematiksel modelleme süreci, problem çözme süreçlerinde bireylere iş planı oluşturma olanağı sunan bir yapıdadır. Dolayısıyla, matematiksel modelleme süreci ile problem çözme süreci arasında yakın ve dinamik bir ilişki bulunduğu söylenebilir (Altun, 2020; Greefrath, 2015; Lesh and Zawojewski, 2007; Sriraman, 2005).

Problem çözme sürecinin gerçekleştirilmesinde önemli bir rol üstlenen matematiksel görev, açıkça formüle edilmiş varsayımlar ve sorulardan oluşan, öğrenciler tarafından makul sürelerde çözülebilir nitelikteki her türlü matematiksel problem olarak tanımlanmaktadır (Sierpinska, 2004). Bir matematiksel görevin yerine getirilmesi sırasında, problemle ilgili amaç, süreç ve sonuçlar dikkate alınarak yapılan açıklamalar ve gerçekleştirilen eylemler bütünü ise matematiksel çalışma olarak ifade edilmektedir (Kuzniak and Nechache, 2021). Bu bağlamda, matematiksel çalışma kavramı, problem çözme süreçlerini de kapsayan ve problem çözmenin ötesinde bireylerin matematiksel görevler sırasında gerçekleştirdikleri tüm bilişsel ve

epistemolojik etkinlikleri içeren daha geniş bir çerçeve sunmaktadır. Matematiksel çalışmanın incelenmesi, problem çözme sürecinde bireylerin kullandıkları işaretler, teknikler ve teorik bilgiler aracılığıyla matematiksel alanın nasıl yapılandırıldığını ortaya koymaktadır. Böylece, bireyden beklenen performans ile gerçekte ortaya konan ürün arasındaki farklar ve öğrenme ihtiyaçları belirlenebilmektedir.

Bu yönleriyle matematiksel çalışma, matematik eğitimi ve öğretiminin merkezinde yer almakta; öğretim tasarımından değerlendirmeye kadar birçok boyutta temel bir referans oluşturmaktadır (Kuzniak et al., 2016a). Özellikle, matematiksel modelleme süreçleri incelendiğinde; bireylerin gerçek yaşam problemlerini matematikselleştirme, model oluşturma, çözüm üretme ve gerçek bağlama geri dönüştürme gibi adımlarda gerçekleştirdikleri tüm matematiksel çalışmaların Matematiksel Çalışma Alanları (Mathematical Working Spaces) kuramı aracılığıyla epistemolojik ve bilişsel düzlemler ekseninde detaylı olarak analiz edilebildiği görülmektedir. Bu bağlamda, Matematiksel Çalışma Alanları (MÇA) Teorisi hem matematiksel modelleme süreçlerini hem de problem çözme temelli görevlerde ortaya çıkan epistemolojik ve bilişsel unsurları bütüncül biçimde açıklama potansiyeline sahiptir. Bu nedenle, MÇA Teorisi son yıllarda birçok araştırmacının temel çalışma konusu haline gelmiştir.

MÇA, matematiksel görevlerin bir öğretim ortamında öğrenciler veya öğretmenler tarafından yürütülmesi sırasında ortaya çıkan matematiksel çalışmaların yorumlanması ile ilgilenmektedir. Matematiksel çalışmanın yorumlanması, problem çözme süreçlerinde gerçekleştirilen eylemleri organize eden ve yönlendiren soyut yapının açığa çıkarılmasına olanak sağlamaktadır (Kuzniak and Nechache, 2021; Kuzniak et al., 2016a). Böylece, bireylerin matematiksel görevler sırasında ortaya koydukları performansın özgünlüğünü kavrayabilmek amacıyla, hem matematiğin doğasında yer alan epistemolojik farklılıkları hem de insani yönü temsil eden bilişsel boyutları bir arada ele alınmaktadır (Kuzniak et al., 2022b). Bu bütüncül bakış açısı, matematiksel görevlerin sadece çözümlerinin değil; aynı zamanda, bu çözümlere ulaşmak için kullanılan temsil biçimleri, araçlar, teorik referanslar ve bilişsel süreçlerin birlikte analiz edilmesini mümkün kılmaktadır.

Bu nedenle, matematiksel görevlerin yalnızca analiz edilmesinde değil, aynı zamanda tasarlanması, yapılandırılması ve yorumlanmasında MÇA yaklaşımının kullanılması, günümüzde matematik eğitimi araştırmalarında önemli bir tartışma konusu haline gelmiştir (Kuzniak et al., 2016a). Özellikle matematiksel modelleme gibi karmaşık problem çözme

süreçlerinin anlaşılması ve öğretim tasarımına aktarılması açısından MÇA Teorisi, güçlü bir teorik ve metodolojik çerçeve sunmaktadır.

1.1 Araştırmanın Amacı ve Önemi

Matematiksel modellemenin erken yaşlardan itibaren sınıf ortamlarında yer alması gerekliliği, birçok araştırmacı tarafından vurgulanmakta ve matematik eğitimi standartlarında belirtilmektedir (Blum and Borromeo Ferri, 2009; Common Core State Standards Initiative, 2010; Lesh and Doerr, 2003; MEB, 2009, 2018, 2023; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Benzer şekilde, matematiğin gerçek yaşamla ilişkilendirilmesini temel alan matematik okuryazarlığı becerilerinin değerlendirildiği Uluslararası Matematik ve Fen Bilimleri Eğilimleri Araştırması (Trends in Mathematics and Science Study – TIMMS) ve Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme for International Student Assesment – PISA) gibi uygulamalar, matematiksel modellemenin önemine dikkat çekmektedir. Ancak, bu değerlendirmeler Türkiye'de öğrenim gören öğrencilerin matematik okuryazarlığı becerilerinin pek çok ülkenin gerisinde kaldığını göstermektedir (MEB, 2019, 2023).

Gerçek yaşamdaki problemleri ele alarak başlayan matematiksel modelleme sürecinin, öğrencilerin matematiği gerçek yaşamla ilişkilendirme becerilerini geliştirdiği ve böylece matematik okuryazarlığına katkı sunduğu ifade edilmektedir (Şahin, 2019). Matematiksel modellemeyi odağına alarak yapılan tematik içerik analizi çalışmaları (Albayrak ve Çiltaş, 2017; Birgin ve Öztürk, 2021; Yenilmez ve Yıldız, 2019) matematiksel modelleme konusundaki akademik ilginin giderek arttığını ortaya koymaktadır. Bu doğrultuda, ilkokuldan başlayarak öğretmen eğitimine kadar pek çok eğitim kademesinde matematiksel modellemeyi ele alan çalışmalar yürütüldüğü görülmüştür (Albayrak, 2023; Didiş Kabar ve İnan Tutkun, 2021; Ergene, 2019; Hıdıroğlu vd., 2016; Kaygısız, 2022; Kula Ünver vd., 2018; Şahal ve Özdemir, 2021). Özellikle, matematiksel modelleme becerilerinin öğretim programlarında daha fazla vurgulanması, problem çözme odaklı öğrenme süreçlerinin teşvik edilmesi ve bilginin yapılandırılarak anlamlandırılmasına yönelik içeriklere yer verilmesi bu ilgiyi arttırmaktadır (Birgin ve Öztürk, 2021; Yenilmez ve Yıldız, 2019).

Türkiye'de matematiksel modelleme, Millî Eğitim Bakanlığı tarafından yayımlanan öğretim programlarında (MEB, 2009, 2013, 2018, 2024) üst düzey düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik bir yaklaşım olarak tanımlanmakta ve özellikle gerçek yaşam problemleriyle

ilişkilendirilerek çeşitli sınıf düzeylerinde yer almaktadır. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme süreçlerini kavramaları ve sınıf ortamına taşıyacak yeterlikler geliştirmeleri, matematik öğretiminin hedefleriyle doğrudan ilişkilidir. Bununla ilgili olarak yapılan çalışmalarda, öğretmen adaylarının modelleme eğitimi konusunda çeşitli zorluklar yaşadıkları ve bu zorlukların, modelleme etkinlerinin sınıf ortamına entegrasyonunda engeller oluşturabildiği belirtilmektedir (Çavuş Erdem vd., 2018; Deniz ve Akgün, 2016; Kang and Noh, 2012; Wickstrom and Aytes, 2018). Öğretmen adaylarının modelleme süreçlerinde ortaya koydukları matematiksel çalışmaları incelemek, hem öğretmen yetiştirme programlarının içeriklerinin geliştirilmesine, hem de öğretmen adaylarının modelleme eğitimine ilişkin öz yeterliklerinin artmasına katkı sunacaktır. Dolayısıyla, çalışmanın matematiksel modelleme becerilerini gelecekteki öğretim sürecine doğrudan yansıtacak olan ilköğretim matematik öğretmen adaylarına odaklanması, modelleme sürecinin açıklanması açısından önem taşımaktadır.

Bu noktada, matematiksel modelleme süreçlerinde gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların sistematik biçimde tanımlanabilmesi için güçlü bir teorik çerçeveye ihtiyaç duyulmaktadır. Montoya Delgadillo et al. (2017), MÇA Teorisinin, modelleme sürecinde özellikle matematikselleştirme aşamasında ortaya çıkan kavramların ve matematiksel nesnelerin derinlemesine analiz edilmesine olanak sağladığını belirtmektedir. Benzer şekilde, Verdugo Hernández et al. (2022) ve Derouet et al. (2017), MÇA Teorisinin matematiksel modelleme sürecinin analizini derinleştirdiğini ve bu süreci epistemolojik-bilişsel düzeyde anlamlandırmada güçlü bir teorik temel sunduğunu ifade etmektedir. Bu yönleriyle MÇA Teorisi, matematiksel modelleme sürecini bilişsel ve epistemolojik bir bütünlük içerisinde analiz edebilmek için kapsamlı bir çerçeve sunmaktadır. Modelleme görevleri sırasında öğretmen adayları temsil oluşturma ve yorumlama, araçları ve teknikleri model inşasında kullanma ve modelin geçerliliğini gerekçelendirme ve ifade etme süreçlerini etkin bir şekilde gerçekleştirmektedir. Bu süreçlerin, MÇA'nın epistemolojik düzlemde yer alan temsil, artefakt ve teorik referans sistemi ile nasıl etkileşime girdiğini incelemek, öğretmen adaylarının modelleme süreci boyunca yürüttükleri akıl yürütme adımlarını görünür kılmaktadır. Böylece MÇA Teorisi, yalnızca üretilen çözümleri değil, aynı zamanda matematiksel anlamın nasıl inşa edildiğini, temsil edildiğini ve gerekçelendirildiğini de analiz etmeye imkân tanımaktadır.

MÇA Teorisinde bireylerin matematiksel modelleri nasıl oluşturdukları, nasıl temsil ettikleri ve nasıl gerekçelendirdikleri, semiyotik oluşum, enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşum

üzerinden çözümlenmektedir (Lagrange et al., 2022). Semiyotik oluşum, bireyin modelleme sürecinde kullandığı temsilleri üretme ve dönüştürme süreçlerini; enstrümantal oluşum, araç kullanımını ve teknik üretimini; söylemsel oluşum ise matematiksel gerekçelendirme ve doğrulama etkinliklerini açıklamaya olanak tanımaktadır (Kuzniak, 2014). Bu oluşum süreçlerinin, epistemolojik düzlemde yer alan temsil, artefakt ve teorik referans sistemi ile nasıl etkileşime girdiğini incelemek, öğretmen adaylarının modelleme süreci boyunca yürüttükleri akıl yürütme adımlarını görünür kılmaktadır. Böylece MÇA Teorisi, yalnızca üretilen çözümleri değil, aynı zamanda matematiksel anlamın nasıl inşa edildiğini, temsil edildiğini ve gerekçelendirildiğini de analiz etmeye imkân tanımaktadır.

Matematiksel çalışmayı yalnızca problem çözme süreci ile sınırlı görmeyen MÇA Teorisi, modelleme döngüsünün tüm aşamalarını kapsayan geniş bir çerçeve sunmaktadır (Lagrange et al., 2022). Modelleme görevleri sırasında ortaya koyulan problem çözme süreci üst düzey bilişsel beceriler gerektirmesi nedeniyle matematiksel çalışma sürecinin önemli bir bileşeni olmakla birlikte, MÇA açısından ele alındığında, modelin oluşturulması, temsil edilmesi, dönüştürülmesi, gerekçelendirilmesi ve doğrulanması gibi tüm bilişsel ve epistemolojik etkinlikleri içeren bir bütündür. Bu kapsamda, matematiksel modelleme sürecinin içerisinde yer alan her bir aşama, MÇA Teorisinde matematiksel çalışmanın farklı yönlerini temsil etmektedir. Böylece MÇA, yalnızca problem çözme eylemlerini değil, aynı zamanda çözüm sürecinde kullanılan araçlar, temsil biçimleri ve teorik referanslar arasındaki ilişkileri analiz etmeye olanak tanımaktadır.

Son yıllarda, MÇA Teorisi ile matematiksel modelleme süreçlerini bütünleştiren uluslararası çalışmaların sayısı artmaktadır. Örneğin Derouet et al. (2017), modelleme görevinde öğrencilerin kullandıkları epistemolojik ve bilişsel bileşenleri MÇA Teorisi ile analiz etmiştir. Benzer şekilde, Verdugo Hernandez et al. (2023), cebir öğretiminde öğretmenlerin matematiksel çalışmalarını MÇA Teorisi çerçevesinde incelemiş ve modelleme süreçlerinin öğretim uygulamalarıyla ilişkisini ortaya koyuşlardır. Ayrıca, matematiksel bir görevle karşılaşan bireylerin yaşadıkları süreçleri anlamada MÇA Teorisinin metodolojik bir araç olarak kullanılmasının uygun olduğu vurgulanmaktadır (Lagrange et al., 2022). Bu çalışmalar, MÇA'nın yalnızca teorik bir çerçeve olarak kalmadığını, aynı zamanda modelleme görevlerinin analizinde metodolojik bir araç olarak etkin şekilde kullanıldığını göstermektedir.

Matematiksel modellemenin öğretim programlarında önemli bir yer tuttuğu göz önünde bulundurulduğunda, bu süreci öğrenme ortamlarına taşıyacak olan geleceğin matematik öğretmenlerinin, modelleme sürecinde gerçekleştirdikleri eylemlerin birbirini nasıl tetiklediğinin ve karşılaştıkları engelleri nasıl aştıklarının belirlenmesi kritik öneme sahiptir. Matematiksel çalışmaların incelenmesi, modelleme süreci boyunca ortaya çıkan epistemolojik ve bilişsel yönler arasındaki etkileşimi anlamayı mümkün kılmaktadır. Bu nedenle çalışmada, öğretmen adaylarının modelleme sürecindeki bu yeterlikleri nasıl harekete geçirdiği analiz edilerek, gerçekleştirdikleri eylemlerin açıklanmasına katkı sağlanabileceği düşünülmektedir.

Alan ölçme kavramı, gerçek yaşam bağlamındaki problem durumlarının matematiksel modele dönüştürülebilmesi noktasında bu ilişkiyi kurabilecek temel kavramlardan biri olarak öne çıkmaktadır. Alan ölçme kavramı bağlamındaki matematiksel görevlerin temsil üretme ve dönüştürme, ölçekleme ve ölçme araçlarıyla çalışma, alan bağıntısı gibi matematiksel özelliklerle çalışma ve gerekçelendirme yapabilme imkanı sunması nedeniyle MÇA Teorisinin oluşum süreçlerini destekleyecek nitelikte olduğu düşünülmektedir. Bunun yanında, modelleme döngüsünün basitleştirme aşamasında problem durumunun dikdörtgenlere, üçgenlere, çokgenlere ayrılabilecek olması göz önünde bulundurulmuştur. Böylece alan ölçme kavramı, gerçek yaşam durumlarını matematiksel bir yapıya dönüştürülmesi ve matematiksel görevlerin MÇA Teorisinin bileşenleri doğrultusunda incelenmesi için uygun bir bağlam hazırlamaktadır. Bu doğrultuda, çalışmanın amacı, alan ölçme kavramı bağlamında geliştirilen matematiksel modelleme görevlerinin çözümü sırasında ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların MÇA Teorisi çerçevesinde incelenmesi olarak belirlenmiştir.

Fransa, İspanya ve Latin Amerika ülkelerinde uzun yıllardır üzerinde çalışılan bir konu olmasına rağmen, matematiksel modelleme süreçlerini MÇA perspektifinden inceleyen çalışmaların (Derouet, 2019; Flores Salazar and Almonacid Adriano, 2020; Lagrange, 2021; Montoya Delgadillo et al., 2017; Moutet, 2019; Nechache, 2018; Psycharis et al., 2021; Verdugo Hernández et al., 2022; Vroutsis et al., 2018) sınırlı olduğu belirtilmektedir (Lagrange et al., 2022). Yapılan çalışmaların çoğunun lise düzeyindeki öğrencilerle veya mühendislik ve beşerî bilimler alanlarında lisans eğitimi alan öğrencilerle gerçekleştirildiği görülmektedir.

Türkiye'de ise MÇA temelli araştırmalar oldukça sınırlıdır. Yapılan az sayıdaki çalışmada, eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik bilişsel süreçlerin MÇA Teorisi çerçevesinde

incelendiği, geometri derslerinde kullanılan öğretim materyallerinin MÇA Teorisini göz önünde bulundurulmasıyla incelendiği, ilkokul ve ortaokul ders kitaplarındaki temel geometrik kavramların MÇA Teorisi çerçevesinde incelendiği görülmüştür (Deniz, 2024; İmamoğlu, Özcan vd., 2023; Karahan, 2021).

Bu bağlamda, yapılan çalışma hem ulusal hem de uluslararası literatürdeki eğilimle örtüşmekte ve öğretmen eğitimi bağlamında önemli bir boşluğu doldurmaktadır. Bu noktada, modelleme süreçlerini sınıf ortamına taşıyacak olan öğretmen adaylarının gerçekleştirdikleri eylemlerin analiz edilmesiyle hem uluslararası hem de ulusal literatüre katkı sağlanması hedeflenmektedir. Ayrıca, bu çalışmanın, Türkiye'de henüz sınırlı sayıda ele alınan MÇA Teorisinin tanıtılmasına ve matematiksel modelleme süreçlerine farklı bir bakış açısı kazandırılmasına katkıda bulunacağı öngörülmektedir.

1.2 Problem Durumu ve Alt Problemler

Çalışmanın amacı doğrultusunda, matematiksel modelleme sürecine ilişkin literatürde yer alan bulgular ve öğretmen adaylarının karşılaştıkları olası zorluklar göz önünde bulundurularak, bu araştırmanın problem durumu ve alt problemleri aşağıda sunulmuştur:

- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının, alan ölçme kavramı bağlamında geliştirilen modelleme görevlerini çözme sürecinde gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalarda, MÇA Teorisinin bileşenleri arasında nasıl bir etkileşim bulunmaktadır?
    - İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecindeki modelleme yeterlikleri nasıldır?
    - İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalarda MÇA'nın epistemolojik düzlemindeki bileşenler nasıl kullanılmaktadır?
    - İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalarda, MÇA'nın bileşenleri arasında ortaya çıkan oluşum süreçleri nelerdir?
    - İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan oluşum süreçlerinin birbiriyle etkileşimi sonucunda, matematiksel çalışma hangi dikey düzlemlerde gerçekleşmektedir?

1.3 Sayıltılar

Bu çalışmada aşağıdaki sayıltılar temel alınmıştır:

- Matematiksel modelleme görevlerinin ve yönlendirilmiş keşif sorularının hazırlanması sürecinde alınan uzman görüşlerinin içerik geçerliği sağlama açısından yeterli olduğu varsayılmaktadır.
- Pilot uygulama sırasında yapılan gözlemler ve bu doğrultuda alınan uzman görüşlerinin, veri toplama araçlarının uygulanabilirliğini ve anlaşılırlığını sağlamak için yeterli olduğu varsayılmaktadır.
- Öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların, görev talimatlarına uygun, dikkatli ve objektif şekilde yürütüldüğü varsayılmaktadır. Bu varsayım, analizlerin geçerliği ve elde edilen bulguların güvenirliği açısından önem taşımaktadır.

1.4 Sınırlılıklar

Bu çalışma, aşağıdaki sınırlılıklar doğrultusunda yürütülmüştür:

- Araştırma, 2022-2023 eğitim-öğretim yılında, Türkiye'nin batısında yer alan orta büyüklükteki bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmen adayları ile sınırlandırılmıştır.
- Çalışma grubu, gönüllülük esasına göre katılan 34 ilköğretim matematik öğretmen adayından oluşmaktadır.
- Matematiksel modelleme etkinlikleri hazırlanırken, alan ölçme kavramı esas alınmış ve etkinlikler yalnızca bu kavramla sınırlandırılmıştır.
- Araştırmada elde edilen veriler, öğretmen adaylarının matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirdikleri konuşmalar, çalışma yapraklarına verdikleri yazılı cevaplar ve GeoGebra dinamik geometri yazılımında gerçekleştirdikleri eylemlerle sınırlıdır.

1.5 Tanımlar

Matematiksel modelleme süreci: Gerçek dünya durumlarını matematiksel kavramlar ve ilişkilerle temsil etme ve bu temsiller aracılığıyla çözüm üretme süreci olarak tanımlanmaktadır. Bu süreçte bireyler, problem bağlamına ilişkin bilgileri analiz ederek bir matematiksel model oluşturmaktadır. Yürütülen matematiksel işlemler ile matematiksel model

çözülmekte ve matematiksel sonuçlar elde edilmektedir. Elde edilen matematiksel sonuçlar yorumlanarak çözümün geçerliliği değerlendirilmektedir. Böylece matematiksel modelleme tamamlanmaktadır (Lesh and Doerr, 2003).

Matematiksel modelleme yeterliği: Bireylerin gerçek yaşam durumlarını analiz ederek uygun matematiksel modeller geliştirme, bu modeller üzerinden işlemler gerçekleştirme, sonuçları yorumlama ve geçerli çıkarımlar yapabilme becerisidir (Maaß, 2006; Ural, 2018).

Model oluşturma etkinliği: Bireylerin gerçek dünya problemlerine yönelik matematiksel düşünme ve problem çözme süreçlerini içeren, bağlam temelli ve açık uçlu görevlerle desteklenen öğretim uygulamaları olarak tanımlanmaktadır (Bukova Güzel vd., 2016; Chamberlin and Moon, 2005; Tekin Dede ve Bukova-Güzel, 2018).

Matematiksel çalışma: Bireylerin matematiksel görevler sırasında gerçekleştirdikleri bilişsel faaliyetlerin bütünü olarak tanımlanmaktadır (Derouet and Parzysz, 2016).

Matematiksel Çalışma Alanları: Matematiksel çalışmayı bilişsel ve epistemolojik düzlemler ekseninde yapılandırılan bileşenler ve üç temel oluşum süreci çerçevesinde açıklayan kuramsal bir çerçevedir (Kuzniak and Richard, 2014).

2. LİTERATÜR

2.1 Matematiksel Çalışma Alanı Teorisi

Houdement ve Kuzniak (1999; Kuzniak'tan 2018) tarafından geometri öğretimi üzerine yürütülen çalışmalarda, lisans eğitimini felsefe bölümünde tamamlamış öğretmen adaylarının matematiksel çalışmalarında bazı hatalar yapıldığı fark edilmiştir. Bu durumun nedenlerini inceleyen araştırmacılar, felsefe eğitimi almış bireylerin genellikle iyi bir muhakeme etme yeteneğine sahip olmalarını beklerken, matematiksel çalışmalarda ortaya çıkan hataların yanlış muhakeme süreçlerinden kaynaklanabileceğini düşünmüşlerdir. Bu noktada, yanlış muhakeme etme süreçlerinin nasıl yorumlanabileceği araştırmacılar için merak konusu olmuştur.

Bunun yanında, muhakeme becerisinin önemi bir durumun farklı matematiksel eylemlerle nasıl ilişkilendirildiğinde, özellikle çeşitli matematiksel temsil biçimleri ve çizim araçlarının kullanımında kendini göstermektedir. Bu noktada, araçlar ile gerçekleştirilen bilişsel eylemler arasındaki ilişkinin derinlemesine analiz edilmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Tüm bu ihtiyaçlar doğrultusunda, matematiksel çalışmanın epistemolojik ve bilişsel yönlerini bütüncül biçimde tanımlamaya olanak sağlayan MÇA Teorisi geliştirilmiştir (Kuzniak, 2006, 2022; Kuzniak and Richard, 2014; Kuzniak et al., 2016a).

Matematiksel çalışma, matematiksel görevde yer alan problemin çözülmesini veya problem çözme sürecinde karşılaşılan matematiksel zorlukların aşılmasını hedefleyen bir süreçtir (Kuzniak et al., 2022b). Derouet and Parzysz (2016), 'matematiksel çalışma' kavramını, matematiksel görevin çözümü sırasında ortaya konan bilişsel faaliyetlerin bütünü olarak ifade etmektedir. Kuzniak et al. (2016b), matematiksel çalışmanın nasıl verimli ve yeterli bir şekilde yürütüldüğünün belirlenmesiyle, gerçekleştirilen eylemlerin doğasının ortaya koyulabileceğini belirtmektedir.

Matematiksel çalışma, okul bağlamında gerçekleşen bir süreç olduğundan, problem çözme sırasında yapılan seçimlerin altında yatan epistemolojik farkındalıkların bulunması önemli görülmektedir (Kuzniak, 2022). Bu doğrultuda, matematiksel çalışmanın epistemolojik yönünün tanımlanmasında Didaktik Durumlar Teorisi ve Antropolojik Didaktik Teori; bilişsel yönünün tanımlanmasında ise Kavramsal Alanlar Teorisi ve Semiyotik Yaklaşım, MÇA Teorisinin geliştirilmesinde temel destek noktaları olmuştur (Kuzniak et al., 2022a).

Matematiksel görevlerin çözümü için gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, bireysel olarak ya da iş birliği içerisinde gerçekleştiğinde kişisel düzeyde; bir öğretmenin matematiksel görevleri nasıl planladığını ve uyguladığını gözlemleyerek öğrencilerin ortaya koyduğu çalışmaları analiz etme sürecinde ise sınıf düzeyinde ele alınabilmektedir (Kuzniak et al., 2016b).

Öğrencilerden beklenen matematiksel çalışmanın ne olduğu, bir kurum içerisinde uygulanmakta olan matematik öğretim programının neleri içerdiği, matematiksel çalışmada rol alan her bir bileşenin çalışmadaki rolünün ne olduğu, öğrencilerin gerçekleştirmekte olduğu matematiksel çalışmaları biçimlendirmenin veya geliştirmenin ne şekilde mümkün olduğu gibi sorulardan yola çıkarak matematiksel çalışmanın anlaşılabilmesi sağlanabilmektedir. Radford (2016), matematiksel çalışma sırasında ortaya çıkan sezgisel denemeler, keşifler, açıklamalar ve gerekçelendirmeler gibi akıl yürütme süreçlerinin anlaşılabilmesi için öğrenci, öğretmen ve kurum gibi faktörlerin bu sürece nasıl katkıda bulunduğunun dikkate alınması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu bağlamda, öğrenciden beklenen, matematiksel çalışma sonucunda ortaya çıkardığı ürünü sunması; öğretmenden beklenen ise öğrencilerin çözüm süreçlerine dair yöntemlerin nasıl kullanılacağına ilişkin açıklamalar yapmasıdır (Kuzniak, 2022).

Bir matematiksel çalışmanın gerçekleştirilmesi, matematiksel işaretlerin, araçların ve matematiksel teorilere dayalı kuralların çeşitli şekillerde birlikte kullanılması ile elde edilen sonuçların doğrulanmasını içeren bir süreç olarak ele alınmaktadır (Gómez-Chacón and Kuzniak, 2015). Bu süreç, matematiksel çalışmada gerçekleştirilen eylemler sırasında kullanılan farklı bileşenler arasındaki etkileşim ve dönüşüm süreçleriyle açıklanmaktadır. Bu etkileşim ve dönüşümler, *oluşum (genesis)* kavramı ile ifade edilir ve matematiksel anlam üretiminin temelini oluşturur (Kuzniak et al., 2016b).

Matematiksel çalışma sürecinde farklı bileşenler arasında gerçekleşen etkileşim ve dönüşümler sonucunda ortaya çıkan yapılandırılmış bütün, matematiksel çalışma alanı olarak adlandırılmaktadır. MÇA Teorisinde bahsedilen ‘çalışma alanı’ kavramı, matematiksel görevlerin çözümü sırasında matematiksel kavramların, araçların ve bilişsel süreçlerin organize edildiği epistemolojik ve bilişsel ortamı ifade etmektedir.

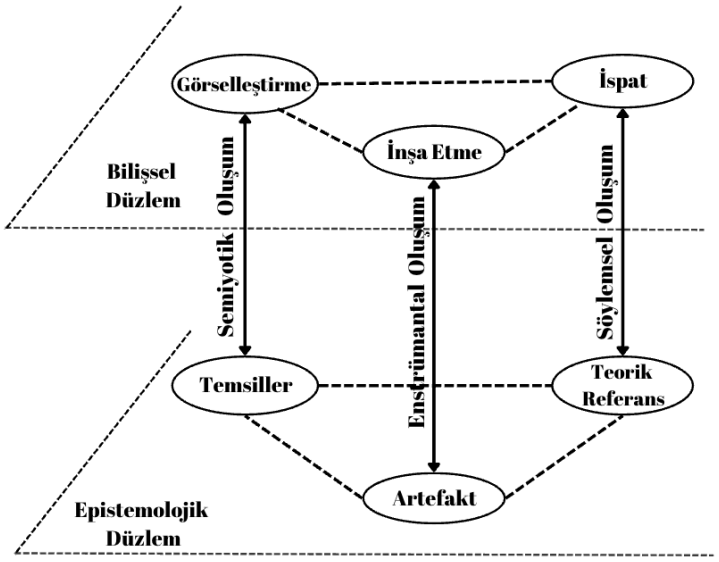
MÇA Teorisi, matematiksel problemlerle karşılaşan bireylerin yürüttükleri matematiksel çalışmaların analiz edilmesine yönelik olarak kurgulanmıştır (Kuzniak et al., 2016a). Bu

teorinin temel amacı, öğretmen ve öğrencilerin aktif şekilde dahil oldukları matematiksel çalışma süreçlerinde yer alan farklı bileşenlerin, matematiksel çalışmayı nasıl şekillendirdiğini ve birbiriyle nasıl etkileştiğini açıklamaktır (Kuzniak, 2022; Nechache and Gómez-Chacón, 2022).

MÇA Teorisi, epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasındaki etkileşimi ortaya koyarak, matematiksel çalışmanın farklı aşamalarının ve süreçlerinin anlaşılmasına olanak tanır. Bu teori, görsel olarak bir üçgen prizma modeli ile temsil edilmektedir. MÇA diyagramında, prizmanın alt tabanı epistemolojik düzlem, üst tabanı ise bilişsel düzlem olarak adlandırılmaktadır. *Temsiller, artefakt ve teorik referanslar* epistemolojik düzlemin bileşenlerini oluştururken; bilişsel düzlem *görselleştirme, inşa etme ve ispat* bileşenlerinden oluşmaktadır.

MÇA Teorisinin epistemolojik düzleminde yer alan üç bileşen, matematiğin kendi içinde bağlantılı olan içeriğini ve öğretim süreçlerindeki farklı paradigmaları dikkate alarak, matematiksel çalışmanın yürütülmesine yön vermektedir (Gómez-Chacón and Kuzniak, 2015). Duval'ın (2005) çalışmalarından uyarlanarak MÇA Teorisinin bilişsel düzleminde yer verilen üç bileşen ise, matematiksel çalışmada gerçekleştirilen eylemlerin gözlemlenmesiyle bireyin düşünme süreçlerini ortaya çıkarmaya odaklanmaktadır (Gómez-Chacón and Kuzniak, 2015).

Matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemler, epistemolojik düzlem ile bilişsel düzlem arasında çeşitli etkileşimlerin gerçekleşmesine neden olmaktadır. Bu etkileşimler, MÇA Teorisinde oluşum süreçleri olarak tanımlanır: temsil ile görselleştirme bileşenleri arasındaki etkileşim *semiyotik oluşum*; artefakt ile inşa etme bileşenleri arasındaki etkileşim *enstrümantal oluşum*; teorik referanslar ile ispat bileşenleri arasındaki etkileşim *söylemsel oluşum* olarak adlandırılmaktadır (Kuzniak, 2014; Kuzniak et al., 2016b). Bu oluşum süreçleri, bireylerin matematiksel çalışmaları sırasında matematiksel anlam üretimi, araç kullanımı ve gerekçelendirme etkinliklerinin nasıl bütünleştiğini anlamada önemli bir rol oynamaktadır. MÇA Teorisinde yer alan bileşenler ve oluşum süreçlerini gösteren MÇA diyagramı Şekil 2.1'de sunulmuştur.



Şekil 2.1: MÇA diyagramı (Kuzniak'tan (2016) uyarlanmıştır)

2.1.1 MÇA Teorisinin Bileşenleri

Bu başlık altında, MÇA Teorisinin epistemolojik ve bilişsel düzlemlerinde yer alan bileşenler, bileşenler arasında gerçekleşen etkileşim ile ortaya çıkan oluşum süreçleri ve oluşum süreçleri arasında bulunan ilişki ile ortaya çıkan dikey düzlemler tanıtılmıştır.

2.1.1.1 Epistemolojik Düzlem

Bir matematiksel görevin çözümü için yürütülen matematiksel çalışmanın anlaşılması ve nitelendirilmesi amacıyla, matematiksel kavramların doğasına ve içeriğine yönelik olarak birbiri ile etkileşim halinde olan üç bileşen tanımlanmıştır (Kuzniak, 2014):

- Temsiller: Matematiksel nesneleri ve kavramları ifade eden, somut veya sembolik gösterimlerdir.
- Artefaktlar: Matematiksel çalışmada kullanılan geometrik çizim araçları, hesap makineleri veya dijital yazılımlar gibi insan kaynaklı araçları ifade eder.
- Teorik referanslar: Matematiksel kavramların dayandığı aksiyom, tanım, teorem ve özellikleri içerir.

2.1.1.1.1 Temsiller

Temsil, genel anlamıyla bir şeyin yerine geçen veya onu sembolize eden unsur olarak kullanılırken; matematikte, bir nesneyi anlamlandırmak için kullanılan, kavrama dair bilgilerin

başkalarına aktarılmasına yardımcı olan araçlar olarak tanımlanmaktadır (Delice ve Sevimli, 2016). Duval (1999), temsilleri matematik öğreniminin merkezinde konumlandırmış, farklı temsillerin birbirini desteklemesiyle anlamın daha iyi yapılandırıldığını vurgulamıştır (Duval, 2002,2004; Reyes Avendaño'dan, 2020).

Temsiller, matematiksel modelleme ve problem çözme süreçlerinde temsil oluşturma veya temsilleri dönüştürme gibi bilişsel faaliyetlerle önemli bir rol üstlenmektedir (Duval, 1993, s.41-42). Matematiksel kavramların soyut doğası gereği, temsiller matematiksel kavramların ifade edilebilir ve üzerinde çalışılabilir hale gelmesi için gereklidir (Duval, 1999).

Matematiksel bir kavramın, işaretler ve semboller ile kodlanması, temsillerin semiyotik işlevini ortaya koymaktadır. Matematiksel düşüncenin gelişiminde, işaret ve sembollerin kullanımı temel semiyotik faaliyetler olarak görülmektedir. Bu bağlamda, Duval (1999) ve Goldin ve Kaput (1996) temsilleri farklı ikili kategoriler üzerinden sınıflandırılmıştır.

- *İç-dış temsiller,* bireylerin günlük yaşamda karşılaştıkları şekil, bilgi veya imgeleri zihinsel olarak yeniden yapılandırmalarıyla oluşur. İç temsiller, bireyin zihninde oluşturduğu modeller, matematiksel gösterimler ve bilişsel şemalardan oluşur. Zihinsel eylemlerden oluştukları için doğrudan gözlemlenemezler, ancak bireyin problem çözme sürecindeki davranışları, kullandığı açıklamalar ve çizimlerden dolaylı olarak çıkarılabilirler.

  İç temsiller, matematiksel fikir ve düşüncelerin zihinde organize edilmesini ve anlamlandırılmasını sağlar. Örneğin, bir öğretmen adayının dörtgen kavramına ilişkin zihinsel modeli, şeklin özelliklerini ve ilişkilerini kapsayan iç temsil olarak değerlendirilebilir.

  Buna karşılık, dış temsiller fiziksel olarak gözlemlenebilen, matematiksel kavram ve fikirlerin başkalarına aktarılmasını sağlayan araçlardır. Dış temsiller, fiziksel şekillendirmeler olarak da adlandırılır ve şu şekilde sınıflandırılabilir:

  - Sözel temsiller: Yazılı veya sözlü ifadeler, açıklamalar.
  - Grafik temsilleri: Koordinat sistemi üzerine çizilmiş grafikler.
  - Cebirsel/sembolik temsiller: Denklem, formül, semboller.

- Resim temsilleri: Diyagramlar, şekil çizimleri.
- Çizelge temsilleri: Değer tabloları, veri çizelgeleri.

İç ve dış temsillerin en temel farkı, iç temsillerin doğrudan gözlemlenememesi, dış temsillerin ise fiziksel olarak gözlemlenebilmesidir. Ancak, problem çözme veya modelleme süreçlerinde bireyin dış temsilleri üretme biçimi, iç temsillerine dair ipuçları sunmaktadır (Delice ve Sevimli, 2016).

- *Sembolik-görsel temsiller:* Temsillerin sınıflandırılması sürecinde, temsilin içeriği dikkate alınarak sembolik temsiller ve görsel temsiller olarak iki ana kategori belirlenmiştir (Gilbert, 2010; Delice ve Sevimli'den, 2016).

  - Sembolik temsiller: İşaretler, semboller, cebirsel ifadeler ve sözel söylemler gibi soyut yapıları ifade eder. Örneğin, πr^2 ifadesi bir dairenin alanını sembolik olarak temsil ederken; $x + y = z$ gibi cebirsel denklemler de sembolik temsillere örnektir. Bu temsiller, matematiksel düşüncenin formel dili olarak işlev görür.
  - Görsel temsiller: Resimler, çizimler, diyagramlar, grafikler gibi bilgiyi görselleştiren somut yapılardır. Örneğin, bir fonksiyon grafiği, dikdörtgen şekli veya bir veri setini gösteren sütun grafiği görsel temsiller kapsamındadır. Bu temsiller, özellikle soyut kavramların somutlaştırılmasında ve öğrenenlerin kavramlar arası ilişkileri anlamasında önemli rol oynar.

- *Girdi-çıktı temsilleri:* Temsillerin sınıflandırılması sürecinde, temsilin problem çözme sürecindeki işlevi dikkate alınarak girdi temsilleri ve çıktı temsilleri olarak iki kategoriye ayrılabileceği belirtilmiştir.
  - Girdi temsilleri: Problemin verilerini ve koşullarını betimleyen temsillerdir. Problemin anlaşılması, analiz edilmesi ve çözüm stratejisinin belirlenmesi için başlangıç noktası sağlamaktadır. Örneğin, eğim hesabına yönelik bir problemde, verilen değerleri içeren hesap tablosu bir girdi temsili olarak işlev görmektedir.
  - Çıktı temsilleri: Problem çözme sürecinde oluşturulan, kavramların anlamlandırılmasını ve çözümün ifade edilmesini sağlayan temsillerdir. Burada önemli olan, temsilin sadece üretilmesini değil, aynı zamanda bu temsilin kavramsal anlamının da çözüme dahil edilmesidir. Örneğin, eğim probleminin

çözümünde ortaya çıkan grafik, çıktı temsili olarak değerlendirilir; çünkü grafik, eğim kavramının görsel ve kavramsal ifadesini içermektedir.

Goldin and Kaput (1996) ve Duval (1999) tarafından yapılan sınıflamalardan farklı olarak, Lesh and Doerr (2003) ve Nakahara (2008) temsilleri farklı bakış açılarıyla sınıflandırmışlardır. Lesh and Doerr (2003), Duval'ın (1999) önerdiği dış temsilleri temel alarak geliştirdikleri Lesh Dönüşüm Modeli kapsamında, matematiksel düşünmenin ve problem çözmenin tanılanması ile yorumlanmasında sekiz tür temsilin kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Bu temsiller, denklem, tablo, grafik, diyagram, somut modeller, konuşulan dil, yazılı sembol ve metafor olarak sınıflandırılmıştır.

Delice ve Sevimli (2016), Lesh Dönüşüm Modelindeki bu temsilleri diziler kavramı üzerinden şu şekilde örneklendirmiştir:

- Dizinin genel terimi $((a_n)=1/n)$ *denklem*,
- n indisinin farklı değerlerine göre dizinin aldığı değerler *tablo*,
- indis ve dizi değerlerindeki değişimlerin koordinat sistemine karşılıkları *grafik*,
- dizinin artan veya azalanlığını göstermek için kullanılabilecek görseller *diyagram*,
- topun düşme hareketi üzerinden dizinin davranışını açıklamak *somut model*,
- dizinin karakteristiğini belirlemek için kullanılabilecek ifade ve söylemler *konuşulan dil*,
- dizilerin yakınsak veya ıraksak olduğunu belirlemek için kullanılan sembolik gösterimler *yazılı sembol*,
- dizinin bir ağaç dalındaki yaprak dizilişi şeklindeki benzeşimi üzerinden açıklanması *metafor*.

Nakahara (2008), Lesh Dönüşüm Modelinde yer alan temsilleri analiz ederek matematiksel temsilleri beş ana kategori altında sınıflandırmıştır:

- Sembolik temsiller: Matematiksel ifadelerin yazılmasında kullanılan sayı, sembol veya harfleri içerir. Örneğin, cebirsel denklemler, fonksiyon gösterimleri ve matematiksel formüller sembolik temsillere örnektir.

- Dilbilimsel temsiller: Matematiksel kavramların ifade edilmesinde kullanılan günlük dili kapsar. Kavram açıklamaları, problem metinleri veya sözel gerekçelendirmeler bu grupta yer alır.
- Görsel temsiller: Bilgiyi açıklayıcı şekilde sunan şekil, diyagram ve grafiklerden oluşur. Örneğin, geometri çizimleri, fonksiyon grafikleri ve veri görselleştirmeleri görsel temsillerdir.
- Gerçekçi temsiller: Gerçek dünya veya somut nesnelere dayalı modelleri içerir. Günlük yaşam durumlarını yansıtan modeller ve matematiksel kavramları açıklamak için kullanılan metaforlar gerçekçi temsiller kategorisinde değerlendirilir.
- Manipülatif temsiller: Kesir çubukları, sayı doğrusu, örüntü blokları, cebir karoları gibi nesneleri içerir. Matematiksel kavramın günlük hayat ile ilişkilendirilmesini sağlamaktadır.

MÇA Teorisinde, işaret ve sembollerden oluşan semiyotik temsillere dayalı olarak, somut ve elle tutulabilir nesneleri özetlemek için temsiller bileşeni kullanılmaktadır. Matematiksel çalışma alanı içinde temsiller; geometrik şekiller, cebirsel semboller ve grafikler gibi farklı formlarda ortaya çıkabilir. Modelleme görevinde ise, kullanılan simgeler, soyut modeller ve resimler de temsil kategorisine dahil edilmektedir (Kuzniak et al., 2022b). Bu temsiller, bireylerin matematiksel kavramları organize etmesi, işlem yapması ve başkalarına aktarmasında temel araçlar olarak işlev görmektedir.

Bu çalışmada, Goldin and Kaput (1996), Duval (1999), Lesh and Doerr (2003) ve Nakahara (2008) ve Kuzniak (2014) tarafından tanımlanan temsil sınıflandırmaları temel alınarak, MÇA Teorisinin epistemolojik düzleminde yer alan temsil bileşeni aşağıdaki beş kategori çerçevesinde ele alınmıştır:

- *Görsel temsiller:* Şekil, diyagram, grafik, resim, çizim, tablo, örüntü, çizelge gibi bilgiyi açıklama ve görselleştirme amacı taşıyan temsillerdir. Bu temsiller, özellikle kavramların somutlaştırılması ve öğrencilerin kavramlar arası ilişkileri anlamasında önemli rol oynar.
- *Sembolik temsiller:* Sayılar, semboller, harfler, işaretler ve denklemler gibi matematiğin soyut dilini oluşturan temsillerdir. Matematiksel düşünmenin formel ifadesini sağlar.

- *Dilbilimsel temsiller:* Matematiksel kavramların özelliklerini ifade eden, yazılı veya sözlü dil ve söylemlerden oluşur. Kavramsal anlamlandırma ve iletişimde temel araçlardır.
- *Manipülatif temsiller:* Kesir çubukları, sayı doğrusu, örüntü blokları, cebir karoları gibi sanal ve somut manipülatif araçları içerir. Öğrencilerin aktif katılımıyla kavramsal keşfi destekler.
- *Gerçekçi temsiller:* Günlük yaşam durumlarını ve somut nesneleri içeren modeller ile matematiksel kavramların anlaşılmasını destekleyen metaforları kapsar. Öğrencilerin matematiği gerçek yaşam ile ilişkilendirmelerine katkı sağlar.

2.1.1.1.2 Artefakt

Artefakt, matematiksel çalışma sürecinde genellikle fiziksel olarak kullanılan ve insan tarafından dönüştürülmüş nesneler olarak tanımlanmaktadır (Rabardel, 2002). Drijvers et al. (2013) artefakt kavramını şu örnekle açıklar:

> "harflerin ne amaçla kullanıldığı bilinmediği bir anda bir kalem, işe yaramaz bir artefakttır; ancak bu kalem, harfleri kullanarak yazı yazma eyleminin öğrenildiği anda sadece çizim olarak kullanılan bir artefakt değil yazı yazmak için de kullanılan bir artefakt haline gelmektedir"

Bu örnek, artefaktların işlevselliğinin, kullanıcının bilgi ve amacıyla belirlendiğini göstermektedir.

MÇA Teorisinde artefakt, matematiksel çalışma sırasında belirli bir amaç doğrultusunda kullanılan fiziksel veya dijital araçları ifade eder (Kuzniak et al., 2022b). Örneğin, cetvel, pergel, hesap makinesi gibi somut araçların yanı sıra, dinamik geometri yazılımları, bilgisayar cebir sistemleri ve GeoGebra gibi dijital araçlar da artefakt kapsamına girmektedir.

Artefaktlar, matematiksel çalışma sırasında farklı temsiller arasında geçişi sağlayan önemli bir işleve sahiptir. Etkili ve amacına uygun olarak kullanılan artefaktlar, matematiksel çalışmanın ilerlemesine ve kavramsal anlamlandırmanın derinleşmesine katkıda bulunur.

Tarihsel olarak, klasik geometride pergel ve cetvel gibi fiziksel artefaktların kullanımı, geometrik inşa ve ispat süreçlerinin temelini oluşturmuştur. Ancak, bilgisayar tabanlı araçların

ortaya çıkması ve hızlı gelişimi, artefakt kavramını genişletmiş ve matematiksel çalışma alanının önemli ve belirleyici bir bileşeni haline getirmiştir (Kuzniak, 2006).

Dijital artefaktlar, matematiksel çalışmada kullanılan elektronik cihazlar ve yazılımlardır. Bu araçlar, matematiksel kavramın temsil edilmesi, algoritmik işlemlerin gerçekleştirilmesi, kavramsal ilişkilerin dinamik olarak keşfedilmesi gibi eylemleri mümkün kılmaktadır (Flores Salazar et al, 2022; Lagrange and Richard, 2022). Bu noktada, matematiksel çalışma sırasında ihtiyaç duyulabilecek bilgi, fotoğraf, video, uygulama gibi kaynaklara ulaşmak amacıyla internetin etkin kullanılması önemli görülmektedir. (Kuzniak et al., 2016b).

Matematiksel çalışma sırasında artefakt olarak kullanılan manipülatifler, kendi içinde somut ve sanal manipülatifler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

- Somut manipülatifler: Grossnickle et al. (1951), manipülatifleri; öğrencilerin dokunarak hissetmesi ve hareket ettirmesi amacıyla özel olarak hazırlanan, gerçek hayatta var olan somut nesneler olarak tanımlamaktadır (Reys'den, 1971). Benzer şekilde Hartshorn and Boren (1990), Thompson (1992) ve Moyer (2001), manipülatifleri; görme, dokunma ve hareket ettirme eylemleri yoluyla matematiksel kavramların anlamlandırılmasına katkı sağlayan öğretim materyalleri olarak ifade etmektedir.

- Sanal manipülatifler: Teknolojik gelişmeler, geleneksel somut manipülatiflerin dijital ortamlara eklenmesine olanak sağlamıştır. Bu doğrultuda sanal manipülatifler, manipülatiflerin görsel temsillerinin web tabanlı bilgisayar ortamlarında, dinamik ve etkileşimli şekilde kullanılabilen dijital araçlar olarak tanımlanmaktadır (Mildenhall et al., 2008; Moyer, 2001). Ancak bu noktada, fiziki olarak karşılığı olmayan materyallerin dijital ortamda oluşturulabileceği göz önünde bulundurularak sanal manipülatiflerin, somut manipülatiflerin bir kopyası olmadığı ifade edilmektedir (Moyer et al., 2002).

Dinamik geometri yazılımları, yazılımda yer alan komutlar ve belirli işlemleri gerçekleştirmek amacıyla tasarlanmış araçlar kullanılarak geometrik şekillerin çizilebildiği, taşınabildiği, döndürülebildiği ve hareket ettirilebildiği etkileşimli yazılımlar olarak tanımlanmaktadır (Jones, 1997). Örneğin, GeoGebra gibi yazılımlar, öğrencilere geometrik nesneler üzerinde dinamik işlemler yapma ve bu işlemlerin sonuçlarını anlık olarak gözlemleme imkânı sunar.

Dinamik geometri yazılımlarının kullanılmasının temel amacı, manipülatiflere benzer şekilde, bazı matematiksel kavramların soyut yapısından kaynaklanan öğrenme güçlüklerinin aşılmasına yardımcı olmak ve öğrencilerin kavramlar arasındaki ilişkileri keşfetmesini desteklemektir. Bu yazılımlar, özellikle geometrik dönüşümler, benzerlik, doğruluk, açık ölçüleri ve şekil özelliklerinin keşfedilmesi gibi konularda güçlü bir öğrenme ortamı sağlar.

MÇA Teorisinde artefakt, matematiksel çalışmada problemin çözümüne yönelik olarak kullanılan her türlü araç olarak kabul edilmektedir. Kuzniak et al. (2016a), matematiksel çalışmada kullanılan araçları üç başlık altında incelemiştir:

- *Semiyotik araçlar:* Matematiksel kavramların semiyotik temsilleri üzerinde kullanılan, elle tutulabilir olmayan araçlardır.
- *Teknolojik araçlar:* Fiziksel veya dijital çizim araçları ile algoritmik işlem yapabilen hesap makineleri gibi araçları içerir.
- *Teorik araçlar:* Matematiksel kavramların teorik özelliklerini içeren ve akıl yürütme süreçlerine katkı sağlayan araçlardır.

Bu araçlara ek olarak, Verdugo-Hernandez (2018), problem çözümü için gerekli olan ancak problem durumunda yer alan matematiksel kavramlara ilişkin teorik referanslar içerisinde yer almayan teorik araçları açıklayan işlevsel araç kavramı tanımlanmıştır (Verdugo-Hernández and Espinoza-Vásquez'den, 2023). İşlevsel araçlar, öğrencilerin problem çözme sürecinde mevcut teorik bilgilerini, bağlamdan bağımsız bir şekilde kullanarak çözüm üretmelerine olanak tanır.

2.1.1.1.3 Teorik Referanslar

Teorik referanslar, matematiksel çalışmanın teorik boyutunu oluşturan tanım, teorem, özellik ve aksiyomları kapsayan epistemolojik bileşendir. Argün vd. (2014), tanımı; bir kavramın anlamını, kullanımını, işlevini ve niteliklerini açıkça betimleyen temel özelliklerin özeti olarak tanımlamaktadır. Bir kavram tanımı yapılırken; kavramın daha genel ve daha özel durumlarının olduğu belirtilmeli, farklı tanımları verilen kavramların birbirine denk olması, tanımın en az sayıda özelliği ifade ederek minimal bir şekilde verilmesi, matematiksel sembollerin uygun bir şekilde kullanılması, gerekirse tanımda kapsayıcı veya dışlayıcı şartların belirtilmesi gerekmektedir. Bu hususlar, kavramların epistemolojik tutarlılığı açısından önem taşımaktadır.

Tanım kavramına matematik eğitimi özelinde bakıldığında, matematiksel kavramların formal tanımı ve kavram imajı öne çıkmaktadır. Tall and Vinner (1981), kavram imajını; kavramla ilgili zihinsel resimler, özellikler veya süreçleri içeren, bireyin zihninde kavramla ilgili var olan bilişsel yapı olarak tanımlamaktadır. Argün vd. (2014) ise, kavram tanımı verildiğinde öğrencilerde beklenen kavram imajının oluşmayabileceğini veya farklı yapılandırmaların ortaya çıkabileceğini belirtmektedir. Ayrıca, problem çözme süreçlerinde öğrencilerin sıklıkla kavram tanımı yerine kavram imajını kullandıkları ifade edilmektedir.

Teorem ise, doğruluğu kanıtlanabilen ve matematiksel olarak geçerli olan önermeler olarak adlandırılmaktadır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2013; Hacısalihoğlu vd., 2000). Teoremler, matematiksel yapıların ispatlanmış özelliklerini ifade eder ve gerekçelendirilmiş bilgiler olarak öğrencilerin kavramsal anlayışlarını güçlendirir. Buna karşılık, aksiyom, doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen temel ifadelerdir. Argün vd. (2014), aksiyomları ikiye ayırmaktadır:

- Sistematik mantığa ait aksiyomlar: Doğruluğu herkes tarafından kabul edilen, temel mantıksal ifadeler.
- Sistematik mantığa ait olmayan aksiyomlar (postulatlar): Matematiğin çeşitli alanlarında, özellikle geometri gibi disiplinlerde teorilerin inşasında kullanılan ve doğruluğu ispatsız kabul edilen önermelerdir.

2.1.1.2 Bilişsel Düzlem

Matematiksel çalışmada kullanılan kavramlar, bu kavramlara ilişkin bilgiler ve problemin çözümünde başvurulan araçlar gibi çeşitli bileşenlerin nasıl kullanıldığını anlamak amacıyla, Duval (2005) tarafından geometrik faaliyetlerde yer alan üç temel bilişsel bileşeni içeren bir süreç fikri ortaya koyulmuştur. Bu yaklaşım, matematiksel çalışmalarda bireylerin düşünme süreçlerini analiz etmek için teorik bir temel sağlamaktadır.

MÇA Teorisinin bilişsel düzleminde tanımlanan bileşenler, matematiksel çalışma sırasında gerçekleşen bilişsel sürecin anlaşılmasına katkıda bulunur (Kuzniak, 2014):

- Görselleştirme: Matematiksel çalışma sırasında kullanılan temsiller ile ilişkilidir. Kavramların, nesnelerin veya problemlerin zihinsel ve dışsal temsiller aracılığıyla algılanması ve modellenmesini içerir.
- İnşa etme: Kullanılan artefakt ve enstrümanlar ile ilişkilidir. Geometrik çizimler, modellerin oluşturulması veya dijital araçlarla yapılan yapılandırma süreçleri gibi aktif inşa edici eylemleri kapsar.
- İspat: Kavram ile ilişkili teorik referanslara dayanır. Matematiksel akıl yürütme, gerekçelendirme ve doğrulama süreçlerini içerir; bireyin çözümlerini ve modellerini teorik olarak temellendirmesine olanak tanır.

2.1.1.2.1 Görselleştirme

Görme, fiziksel bir nesnenin birey tarafından doğrudan algılanması olarak ele alınmaktadır. Duval (1999), görmeyi nesnenin kendisine erişimi ile ilişkilendirirken, temsil etmenin ise başka bir şeyi göstermek için kullanılan farklı bir unsur olduğunu belirtmektedir. Bu bağlamda, görme kavramının temsil etmenin karşıtı olduğu ifade edilebilmektedir. Ayrıca, görme aynı anda birden fazla nesneyi veya bütün bir alanı kapsayabilme özelliğine sahiptir. Ancak, görselleştirme bundan farklıdır; nesne veya kavram doğrudan algılanmasa bile, sanki göz önündeymiş gibi bir temsilin üretilmesi sürecini ifade eder (Duval, 1999). Başka bir deyişle, görselleştirme, fiziksel nesnenin algısından bağımsız olarak, zihinsel veya dışsal bir temsilin oluşturulmasını içerir.

Arcavi (2003), literatürdeki farklı tanımları harmanlayarak görselleştirmeyi şöyle tanımlamaktadır: bilginin tasvir edilmesi, başka bir bireye aktarılması, daha önce bilinmeyen kavramlar hakkında düşünülmesi veya bilginin geliştirilmesi amacıyla; zihinde, kâğıt üzerinde veya teknolojik araçlar yardımıyla resim, görüntü, şekil ve diyagram gibi temsiller oluşturma, yorum yapma ve bu süreçlerin ürünlerini kullanma becerisidir.

Görselleştirme, birçok durumda bireylerin sahip olduğu yanlış sezgilerin, sembolik argümanlarla desteklenerek düzeltilmesine yardımcı olur. Aynı zamanda, matematiksel kavramlar ve anlamlar arasındaki ilişkilerin fark edilmesini ve yapılandırılmasını desteklemektedir.

MÇA Teorisinde görselleştirme, matematiksel çalışma sırasında temsillerin bir dizi manipülasyon veya işlem sonucunda dönüştürülmesi ve geliştirilmesiyle ilişkilendirilen bir süreç olarak ele alınmaktadır. Görselleştirme, yalnızca nesnelerin basitçe görülmesi ya da algılanması değil; aynı zamanda, diyagramlar ve işaretler kullanılarak bilginin yeniden yapılandırılması sürecidir (Kuzniak and Richard, 2014, s.6).

Farklı temsillerin kullanılması yoluyla gerçekleştirilen yorumlama ve sözlü iletişim süreçleri, bireylerin zihninde matematiksel imgelerin oluşmasına katkıda bulunur. Bu süreç, matematiksel çalışma sırasında yapılan gözlemlere anlam yüklenmesine dayanmaktadır (Miranda et al., 2016). Böylece, temsil dönüşümleri, diyagramlar ve işaretler aracılığıyla kavramsal bütünlük oluşturulur ve gerçekleştirilen matematiksel eylemler, görsel temsillerle desteklenerek doğrulanmalarına olanak sağlanmaktadır (Kuzniak and Richard, 2014). Ayrıca, elektronik tablolar, sayısal ifadeler ve farklı matematiksel alanlardaki işaretlerin rollerini incelemek mümkün hale gelmektedir (Kuzniak et al., 2022b).

2.1.1.2.2 İnşa Etme

Duval (1995), inşa etmeyi, temsil üzerinde gerçekleşen eylemler ve gözlemlenen sonuçların, temsil edilen matematiksel nesnelerle ilişkili olacak şekilde bir model işlevi görecek biçimde oluşturulması olarak tanımlamaktadır (Lagrange and Richard'dan, 2022). Bir başka deyişle, inşa etme; matematiksel çalışmada gerçekleştirilen eylemler sonucunda elde edilen verilerin ve sonuçların detaylandırılarak yeni matematiksel yapılandırmalar oluşturulmasıdır. Örneğin, dinamik geometri yazılımlarının kullanılmasıyla elde edilen verilerin ve sonuçların simülasyon haline getirilmesi, inşa etmeye örnek olarak verilebilir. Bu süreçte, kullanıcı geometrik nesneleri oluşturur, dönüştürür ve hareket ettirir; böylece kavramların dinamik özelliklerini keşfeder.

MÇA Teorisinde inşa etme, matematiksel çalışmada artefaktların kullanımıyla gerçekleştirilen ve şekil, grafik gibi somut ürünlerin ortaya çıkmasına yol açan eylemler olarak tanımlanmaktadır (Kuzniak et al., 2022b). Bu ürünler, keşfedilecek ve gözlemlenecek matematiksel yapıların somut temsilleri olarak değerlendirilir.

Reyes Avendaño (2020), inşa etmeyi artefaktların belirli bir amaç doğrultusunda kullanılması yoluyla matematiksel fikirlerin, kavramların, çizimlerin ve deneylerin yapılandırılması süreci olarak tanımlar. Bu süreç, kavrama ilişkin somut yapıların oluşturulmasını ve artefaktların,

kavramla ilgili tekniklerin uygulanmasında etkin ve anlamlı bir şekilde kullanılmasını gerektirir. Miranda et al. (2016), inşa etme sürecinin temelinde çizim yapma eyleminin yer aldığını belirtmektedir. Çizim hem geometri hem de genel modelleme çalışmalarında, inşa etme becerisinin gelişmesinde kritik rol oynamaktadır.

2.1.1.2.3 İspat

Matematiksel ispat, geleneksel olarak bir sonucu doğrulamak, keşfetmek ve bu sonucu yaygınlaştırarak tümdengelimsel matematik sistemine entegre etmek amacıyla yapılmaktadır (Almeida, 2001). İspat, matematiksel bilginin güvenilirliğini sağlamakla kalmaz, aynı zamanda kavramların birbirleriyle olan ilişkilerini de açığa çıkarır.

İspatın geleneksel yöntemlerinin yanında, görsel unsurlardan yararlanmak öğrencilerin kavramsal farkındalıklarının attırılmasına, dikkatlerinin çekilmesine, kavramlar arası bağlantıların kurulmasını sağlamalarına önemli katkı sağlamaktadır. Diyagram, grafik gibi görsel unsurların, akıl yürütme süreciyle bütünleştirilmesi, öğrencilerin ispatı yalnızca mantıksal bir süreç olarak değil, aynı zamanda anlamlandırılmış ve kavramsallaştırılmış bir süreç olarak görmelerini sağlamaktadır (Ugurel vd., 2016). Bu bağlamda görselleştirme, ispat sürecinde öğrencilerin düşünce yapılarını organize etmelerine ve sonuçlarını gerekçelendirmelerine yardımcı olan güçlü bir araçtır.

Sözel, görsel veya biçimsel ispatlar, eğitsel potansiyele sahip ispat türleri olarak değerlendirilmektedir (Hanna and de Villiers, 2008). Bu ispat türleri, öğrencilerin farklı düşünme stillerine hitap ederek matematiksel anlamlandırma süreçlerini desteklemektedir.

Sözsüz ispatlar, Alsina and Nelsen (2010) tarafından, bir ifadenin neden doğru olabileceğini göstermeye veya doğruluğunu kanıtlama sürecine başlamaya yardımcı olan görsel ipuçları sunan resim veya diyagramlar olarak tanımlanmaktadır. Bu tür ispatlar, özellikle sezgisel kavrayışları güçlendirmektedir. Bardelle (2009), sözsüz ispatları; tümdengelim sürecinde gerçekleştirilen adımların grafik, şekil ve diyagramlara dayandırıldığı, sayı, harf ve ok gibi sembollerin kullanılabildiği ve ispatın yapılandırılmasının okuyucuya bırakıldığı bir ispat türü olarak tanımlamaktadır. Bu yaklaşım, öğrencinin ispat sürecine aktif katılımını sağlamaktadır. Edwards (1997, s.190) ise matematikteki ispatı, *"sezgilerin veya genellemelerin, matematikçiler içerisinde açık, kesin ve herkes tarafından kabul gören bir dil ile ifade edilen kesinlik iddialarına dönüştürülmesinde yer alan süreçler kümesi"* olarak ifade etmektedir. Bu

tanım, biçimsel ispatların matematiksel bilginin doğruluğunu topluluk içinde kabul edilebilir kılan epistemolojik süreçler olduğunu ortaya koymaktadır.

Balacheff (1987), doğrulamayı iki ana türe ayırmaktadır: açıklama ve ispat. Açıklama, bireyin kendi fikirlerinden ve bilgilerinden oluşan, öznel bir söylem olarak tanımlanır. Açıklamanın temel amacı, bireyin edindiği önermelerin doğruluğunu başkalarına anlaşılır kılmak ve iletişim sağlamaktır. Bu süreçte, iletişimde kullanılan doğal dil önemli bir rol oynamaktadır. Matematikte ispat ise, anlama, kesinlik ve iletişim ihtiyaçlarını karşılamak için ortaya çıkar ve pragmatik ispat ile entelektüel (formal) ispat olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

Pragmatik ispat, matematiksel kavramla ilgili iddiaları haklı çıkarmaya yönelik eylemleri içermektedir (üçgenin iç açıları toplamının 180 derece olmasının ispatlanması gibi). Pragmatik ispat üç ayrı türde incelenebilir: *deneyerek gösterme*; iddia edilen durumun ölçme veya örnek verme yoluyla doğrulanması (üçgenin açılarını ölçerek toplamak gibi). *Önemli deneyim (ters örnek)*; bireyin iddia edilen durumun genelliğini dikkate alarak özel olmadığı bilinen bir durum kullanarak doğrulama (her açıda yay çizilip kesilerek bu parçaları bir araya getirerek sonuçları karşılaştırmak). *Genel örnek;* bireyin iddia edilen durumu kavrama dair tüm durumlar için gerekçelendirilmesi ile yapılması (açıklamalara ve bulgulara dayanarak tüm üçgenlerin iç açıları toplamının 180 derece olduğunun gerekçelendirilmesi).

Entelektüel (formal) ispat, kavramların arasındaki ilişkiler ve özelliklerin formülasyonuna dayanır. Akıl yürütme ve argümanların sistematik olarak kullanılması sürecidir. Entelektüel ispatlar üç ayrı türde incelenmektedir: *zihinsel deneyim;* açıklama amacıyla önerilen çözümlerin temellendirilmesini içermekte olup bir çeşit genelleme yapılmasını içermektedir. *Açıklamaya ilişkin hesaplama:* problemin çözüm sürecinde rol oynayan kavramlar ile yapılan hesaplamalara dayanan yapıları ifade etmektedir. *Gösteri;* doğrulamanın bilgi, tanım, teorem, çıkarım kurallarıyla desteklenmesine dayanmaktadır.

MÇA Teorisinde ispat süreci, teorik referanslara dayanan tümdengelimsel ve mantıksal söylemleri içermektedir. İspat, yalnızca doğrulama eylemi değil; aynı zamanda matematiksel bilginin gerekçelendirilmesi ve yapılandırılmasını sağlayan temel bir bilişsel süreçtir.

Tanım, hipotez, varsayım ve karşı örnekler; ispat sürecinde kullanılan temel epistemolojik araçlar olarak önemli rol oynamaktadır. Bu unsurlar, ispatın mantıksal tutarlılığını ve

geçerliliğini desteklemektedir. MÇA Teorisine göre, basit doğrulamalar, inşa etme veya görselleştirme ile ilgili iken; ispatlar, teorik referanslara dayanır ve matematiksel bilginin kavramsal temellendirilmesi için gereklidir (Kuzniak et al., 2022b).

2.1.1.3 Oluşum Süreçleri

Matematiksel çalışma sırasında bireylerin gerçekleştirdiği eylemler, MÇA Teorisinde farklı bileşenler arasındaki etkileşim ve dönüşüm süreçleri ile açıklanmaktadır (Kuzniak et al., 2016b). Bu etkileşimler, *oluşum* kavramı çerçevesinde ele alınır ve matematiksel düşüncenin yapılandırılma biçimlerini görünür kılmaktadır.

Şekil 2.1'de yer alan MÇA diyagramı incelendiğinde, epistemolojik düzlem bileşenleri ile bilişsel düzlem bileşenleri arasında üç temel oluşum sürecinin olduğu görülmektedir:

- *Semiyotik oluşum:* Temsiller ile görselleştirme bileşenleri arasındaki etkileşim.
- *Enstrümantal oluşum:* Artefaktlar ile inşa etme bileşenleri arasındaki etkileşim
- *Söylemsel oluşum:* Teorik referanslar ile ispat bileşenleri arasındaki etkileşim.

Kuzniak et al. (2022b), bu oluşum süreçlerinin her birinin, MÇA diyagramındaki iki temel düzleme göre iki bakış açısıyla tanımlanabileceğini belirtmektedir. Bu bakış açıları, oluşum süreçlerinin hem epistemolojik hem de bilişsel boyutlarını kapsamlı biçimde anlamayı mümkün kılmaktadır.

Matematiksel çalışmanın tutarlı ve eksiksiz olduğunun ortaya konabilmesi için, bu düzlemler arasında gerçekleşen oluşum süreçlerinin dikkatli bir şekilde analiz edilmesi ve açıklanması gerekmektedir (Kuzniak, 2014). Böylece, öğrencilerin problem çözme ve modelleme süreçlerinde kullandıkları temsil, araç ve teorik referansların; görselleştirme, inşa etme ve ispat süreçleriyle nasıl bütünleştiği anlaşılabilir.

Bu bölümde, MÇA Teorisinin bileşenleri arasında gerçekleşen etkileşimler sonucu ortaya çıkan semiyotik oluşum, enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşum süreçleri detaylı olarak tanıtılmıştır.

2.1.1.3.1 Semiyotik Oluşum

Semiyotik kavramı, İngilizce *'semiotic'* kelimesinden gelmekte olup, 'sembol ve göstergeler ile ilgili' anlamında kullanılmaktadır ve Türkçede 'semiyotik' olarak yerleşmiştir. Matematiksel kavramların epistemolojik yapısı, matematiksel çalışma sırasında farklı temsillerin oluşturulmasına, kullanılmasına ve sunulabilmesine olanak sağlamaktadır (Kabaca, 2016).

Duval (2005), semiyotik oluşum sürecini, çizimlerin kullanılarak soyut bir nesneye geçişin sağlanması, geometrik nesnelerin tanınması ve sınıflandırılması ile ilişkilendirmiştir. Ayrıca, şekil üzerinde yapılan görselleştirme çalışmalarının açıklanması ve matematiksel çalışmadaki algılama süreçlerinin bağlamında incelemiştir (Kuzniak'dan, 2014).

MÇA Teorisinde semiyotik oluşum, işaret ve sembol gibi semiyotik sistemlerle ifade edilebilen matematiksel kavramlara ait temsiller üzerindeki anlamsal ilişkileri görselleştirme süreci ile ilişkilendirir. Böylece, temsillerin yapısı ile işlevi arasındaki bağlantı kurulmuş olmaktadır (Kuzniak, 2022). Bu süreç, aşağıdan yukarıya bakıldığında, görselleştirme yoluyla bir temsili kullanarak işaretlerin kodunu çözme ve yorumlama sürecini; yukarıdan aşağıya bakıldığında ise, görselleştirmeden temsile doğru işaret üretilmesi sürecini ifade etmektedir (Kabaca, 2016; Kuzniak, 2022). Bu ikili süreç, bireylerin matematiksel kavramlara yükledikleri informal anlamlar ile formal matematiksel anlamlar arasındaki ilişkinin kurulmasına katkı sağlar.

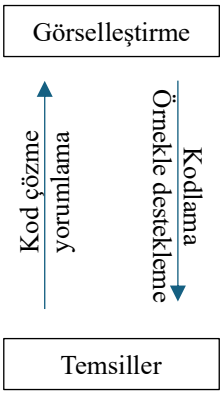
Duval (1993) ve Arzarello'nun (2006) yaklaşımlarına dayanarak, MÇA Teorisinde temsil bileşeni ile görselleştirme bileşeni arasındaki etkileşimin iki olası süreç ile gerçekleştiği öne sürülmektedir (Kuzniak et al.'dan, 2016a). Bu iki süreç, işaretlerin dönüştürülmesi ve anlamlandırılması bağlamında açıklanmaktadır.

- Kod çözme ve yorumlama, temsil bileşeninden görselleştirme bileşenine giden yolda işaretlerin kodunun çözülmesi ve yorumlanması olarak tanımlanmaktadır. Bu durum, temsilin bilişsel olarak algılanması ve kullanılması yoluyla ortaya çıkan görsel-bilişsel farkındalık süreci olarak yorumlanmaktadır.

- Kodlama ve örnekleme, görselleştirme bileşeninden temsil bileşenine giden yolda ortaya çıkmaktadır. Burada, temsilin oluşturulması ve kavranmasıyla birlikte, kavrama

dair bir bilince sahip olan bireyin zihninde durumu temsil eden bir örnek oluşturması söz konusudur (Reyes Avendaño, 2020; Verdugo Hernández et al., 2022).

Şekil 2.2'de, bu süreçlerin yönleri ve etkileşimleri şematik olarak gösterilmektedir. Temsillerin algılanması ve dönüştürülmesi süreci, matematiksel çalışmalarda semiyotik oluşumun epistemolojik ve bilişsel düzlemler arasındaki köprü rolünü ortaya koymaktadır.



Şekil 2.2: Semiyotik Oluşum Süreci

2.1.1.3.2 Enstrümantal oluşum

Matematiksel çalışmada kullanılan artefaktlar, bireylerin geliştirdiği beceriler ve zihinsel şemalar yoluyla enstrümana dönüşebilmektedir (Kuzniak et al., 2016a; Rabardel, 2002). Burada enstrüman, bireyin kullandığı artefakt ile o artefakta dair geliştirdiği ve uyguladığı şemaların birleşiminden oluşmaktadır. Matematiksel görevin gerçekleştirilmesi, bireyin problem çözme stratejilerini organize eden zihinsel şemaları geliştirmesiyle mümkün olmaktadır. Vergnaud (1996) şema kavramını, bir durum için değişmeyen eylemler dizisini, amaçları, yönergeleri, kuralları, bilgi parçalarını bir araya getiren ve kontrol eden dinamik bir yapı olarak tanımlamaktadır (Drijvers et al.'dan, 2013; Trouche'dan, 2004). Bu şemalar, bireyin gerçekleştirdiği eylemlerin yapısını belirlemekte olup, benzer durumlarda tekrarlanarak genellenebilmektedir.

Enstrümantal oluşum süreci, bir artefaktın, bireyin geliştirdiği şemalarla birleştirerek enstrümana dönüştürülmesi süreci olarak tanımlanmaktadır (Drijvers et al., 2013). Verillon and Rabardel (1995), enstrümantal oluşumu; bireyin matematiksel görevleri gerçekleştirirken yarattığı veya geliştirdiği şemaların oluşturduğu süreç olarak tanımlamaktadır (Tabach'dan,

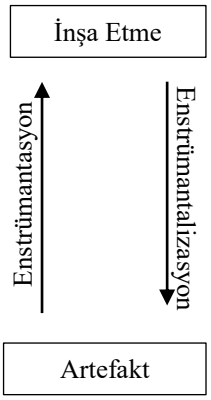
2011). Drijvers (2019), enstrümantal oluşumun anahtar eyleminin, artefaktın şemalar ile birleşerek enstrümanı oluşturması olduğunu vurgulamaktadır.

Enstrümanlı eylem şeması, artefakt kullanıldığı anda gelişen ve gözlemlenemeyen zihinsel/bilişsel yönü ifade etmektedir. Teknik ise, matematiksel görevi yerine getirmenin, akıl yürütmeyi de içeren bir yolu olarak görülmektedir (Artigue, 2002). Enstrümanlı eylem şemalarının gözlemlenebilen kısmı olan, matematiksel görevin gerçekleştirilmesi esnasında kişi ve araç arasında gerçekleşen somut etkileşimler ise enstrümanlı teknikler olarak adlandırılmaktadır (Drijvers, 2019).

MÇA Teorisinde enstrümantal oluşum, matematiksel çalışma sırasında kullanılan artefaktlar ile inşa etme süreçleri arasındaki bağlantıyı kurmaktadır (Kuzniak, 2022). Bu süreç, artefakt kullanımının yalnızca fiziksel bir araçla sınırlı olmadığını, aynı zamanda bilişsel yapıların şekillendirilmesinde etkin rol oynadığını göstermektedir.

Drijvers et al. (2013), enstrümantal oluşumun açıklanmasında artefakt ile birey arasında iki yönlü bir ilişki olduğunu vurgulamaktadır (Şekil 2.3):

- *Enstrümantasyon (enstrümanlaşma):* Artefaktın sınırlılıkları ve potansiyeli, bireyin görevi yerine getirme biçimini ve geliştirdiği kavramları etkiler. Örneğin, dinamik geometri yazılımındaki belirli komutlar, öğrencinin geometrik nesne inşa etme stratejilerini yönlendirir. Burada, bireyin artefakt kullanımında ustalaşması, artefaktı manipüle etmesi ve kullanılan teknikleri kendisine uygun hale getirmesi söz konusudur. Bu süreçte birey, artefaktın potansiyelini keşfeder ve problem çözme stratejilerini geliştirmek için aktif şekilde dönüştürür (Kuzniak, 2014, 2022).
- *Enstrümantasyon (enstrümanlaştırma)*: Bireyin mevcut bilgisi, artefaktı kullanma biçimini şekillendirir ve kullanımını optimize eder. Örneğin, öğrenci önceden öğrendiği geometrik özellikleri kullanarak yazılımda yeni çizimler üretir. Burada, matematiksel çalışmalarda artefaktın amaca uygun şekilde seçilerek kullanılması söz konusudur. Bu süreçte bireyin sahip olduğu geometrik ve matematiksel bilgi, artefaktların etkili kullanımında belirleyici rol oynamaktadır. Artefaktın kendisi, bireyin mevcut bilgi ve becerileri doğrultusunda şekillenmektedir (Kuzniak, 2014, 2022).



Şekil 2.3: Enstrümantal Oluşum Süreci

Verdugo Hernández et al. (2022), enstrümantal oluşum sürecinin, matematiksel çalışmanın başarılı bir şekilde yürütülmesi için görev kapsamında yer alan matematiksel kavramlara dair inşa süreçlerinde artefaktların etkili kullanımını sağladığını belirtmektedir. Bu süreç, yalnızca araç kullanım becerisini değil; aynı zamanda kavramsal yapıların geliştirilmesini de içermektedir. Lagrange and Richard (2022, p. 226), matematiksel çalışma sırasında kullanılan *gelişimsel*, *dönüştürür*, *anlam verir* gibi ifadelerin, gerçekleştirilen dönüşümlerin sadece birey üzerinde değil, aynı zamanda kurumsal düzeyde de etkili olduğunu vurgulamaktadır. Bu noktada enstrümantal oluşum, matematiksel görevlerin gerçekleştirilmesi sürecinde bireyleri ve matematiksel bilgiyi dönüştüren kavramsal bir boyuta sahiptir.

Enstrümantal oluşum, yalnızca artefakt kullanımına ilişkin bir süreç olmayıp, aynı zamanda iletişim kurmaya, bilgiyi temsil etmeye ve muhafaza etmeye yönelik teknolojiklerle ilişkilidir. Bu noktada, dil, yazı ve sayıların; enstrümantal oluşum bağlamında bu işlevi yerine getiren temel unsurlar olduğu belirtilmektedir (Verillon and Rabardel, 1995). Lagrange and Richard (2022, p. 221), şekil çizme eyleminin, tüm olası durumları düşünmeye yardımcı olan ve bu yönüyle inşa etmenin bir modeli olarak kabul edilebileceğini vurgulamaktadır. Çizim, yalnızca görselleştirme değil; aynı zamanda problem çözme ve modelleme süreçlerinde inşa etme becerisinin gelişmesini sağlar.

Matematiksel çalışmalarda gerçekleştirilen eylemler, gözlemlenebilir süreçlere bağlı olduğundan oluşum süreçleri nesnel bir nitelik taşımaktadır. Bu nesnellik, öğrencilerin gerçekleştirdiği eylemlerin izlenebilir ve değerlendirilebilir olmasını sağlamaktadır. Bu

noktada, enstrümantal oluşumun; bilinen tekniklerin pasif biçimde uygulanması değil, aksine eylemlerin sonuçlarını gözlemleyebilmek amacıyla aktif olarak seçilmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Böylece bireyler, araçları sadece kullanmakla kalmaz, aynı zamanda araç kullanımını problem bağlamına göre yeniden yapılandırmakta ve dönüştürmektedir (Chevallard, 2002; Lagrange and Richard, 2022).

2.1.1.3.3 Söylemsel Oluşum

Matematiksel çalışma sonucunda elde edilen matematiksel sonuçların geçerliliğini ortaya koymak ve pekiştirmek için çeşitli epistemolojik ve bilişsel bileşenler kullanılmaktadır. Ancak, matematiksel çalışmada kullanılan argümanların kelimelerle ifade edilmesi, başkalarının ikna edilmesi ve konuya ilişkin tartışmaların sürdürülebilmesi için söylemsel ifadelere ihtiyaç duyulmaktadır (Kuzniak, 2014).

Matematiksel söylem, matematiksel düşüncelerin ve işlemlerin konuşarak, yazarak veya soru sorarak ifade edilmesi süreci olarak tanımlanmaktadır (Blanke, 2009). Bu süreç, öğrencilerin hem kendi akıl yürütmelerini yapılandırmalarını hem de matematiksel fikirlerini paylaşmalarını sağlamaktadır.

MÇA Teorisinde söylemsel oluşum, matematiksel kavrama ait teorik referanslar üzerinde bulunan özelliklerin ve elde edilen sonuçların, matematiksel akıl yürütme ve söylemsel doğrulamalar kullanılarak organize edildiği süreç olarak tanımlanmaktadır (Kuzniak, 2022). Kuzniak (2022), söylemsel oluşumun; grafik gibi temsillerin kullanılması ile gerçekleşen doğrulamalar, tecrübeye bağlı olarak gerçekleştirilen deneysel doğrulamalar veya enstrümantal araçların kullanılması ile gerçekleştirilen doğrulamaların ötesinde; bu tür doğrulamalar tarafından tetiklenebilecek olan gerekçelendirme süreçleriyle ortaya çıktığını ifade etmektedir.

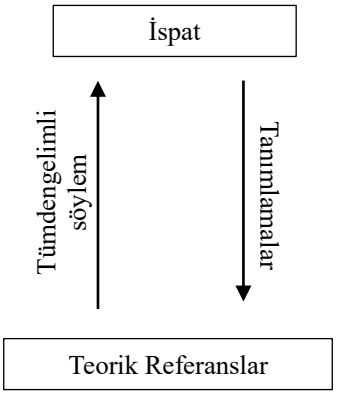
Miranda et al. (2016), matematiksel çalışma sırasında yaratılan küçük tartışma ortamlarında yapılan savunmaların, matematiksel çıkarım ve sonuçlara yönelik gerekçelendirme çabalarının söylemsel oluşumu desteklediğini belirtmektedir. Benzer şekilde, okul seviyesinde öğrencilerin ispat hakkında bilgi sahibi olmamaları durumunda dahi, grup çalışmaları tartışmalar yoluyla yapılan doğrulamaların söylemsel oluşumu tetikleyebileceği vurgulanmaktadır (Hitt et al., 2016).

Söylemsel oluşumun açıklanmasında, teorik referanslar bileşeni ile ispat bileşeni arasında gerçekleşen iki yönlü etkileşim temel alınmaktadır (Şekil 2.4). Bu etkileşim, matematiksel akıl yürütmenin yapılandırılmasında kritik rol oynamaktadır.

Teorik referanslar bileşeninden ispat bileşenine doğru olarak gerçekleşen etkileşimde, teorik referanslar üzerinde yapılandırılmış olan tanım, teorem, özellik gibi kavramlar, tümdengelimli söylemin yapı taşlarını oluşturmaktadır. Bu süreçte, matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen akıl yürütmeler desteklenir; ispatların üretilmesi sağlanır. Ayrıca, grafiksel, deneysel veya araçsal doğrulamalar tarafından tetiklenen süreçlerde, teorik referanslardaki kavramlar düzenlenerek doğrulayıcı argümanlar oluşturulur (Reyes Avendaño, 2020).

İspat bileşeninden teorik referanslar bileşenine doğru gerçekleşen etkileşimde ise, araçlar kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalar ve görsel süreçler, teorik referanslara yeni tanım, teorem ve özelliklerin dahil edilmesine olanak tanımaktadır (Kuzniak, 2022). Bu süreç, öğrenenin matematiksel bilgi yapısını genişletmesini sağlamaktadır.

Montoya-Delgadillo et al. (2014), teorik referanslarda yer alan teoremlerin anlamsal olarak değerlendirilmesinin, söylemsel oluşumun gerçekleşebilmesi için önemli olduğunu vurgulamaktadır. Bu değerlendirme, öğrencilerin teoremleri yalnızca ezberlemeyip, anlamlandırmalarına katkı sağlamaktadır. Bu açıklamalara dayanarak, söylemsel oluşumun matematiksel düşüncelerin doğruluğunu ve anlamını yorumlama, gerçekleştirilen çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma, mantıklı genellemeler ve çıkarımlar yapma süreçleriyle gerçekleştirildiği söylenebilir. Bu süreçler, öğrencilerin matematiksel argümantasyon ve gerekçelendirme becerilerinin gelişimini doğrudan desteklemektedir.



Şekil 2.4: Söylemsel Oluşum Süreci

2.1.1.4 MÇA Diyagramında Bulunan Dikey Düzlemler

MÇA diyagramında, epistemolojik düzlem ile bilişsel düzlem üzerinde yer alan bileşenler ve bu bileşenler arasında çift yönlü gerçekleşen oluşum süreçleri arasında güçlü ilişki bulunmaktadır. Bu ilişkinin analizi, matematiksel çalışmanın bütüncül olarak anlaşılmasına katkı sağlamaktadır.

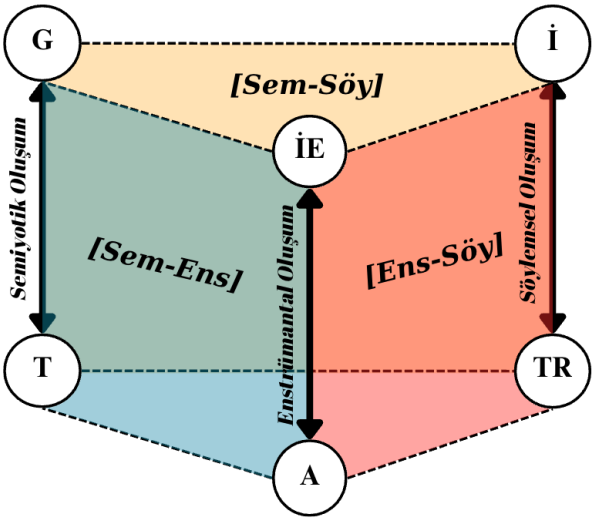
Bu doğrultuda tanımlanan MÇA dikey düzlemleri, matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemlerin; oluşum süreçleri arasındaki yakın ilişkiler dikkate alınarak incelenmesiyle, çözüm sürecinin yapısının belirlenmesini ve çalışma sırasında belirli bir bileşene ağırlık verildiğinde süreçte meydana gelen değişimlerin ortaya konmasını sağlayan bir analiz aracı olarak tanımlanmaktadır (Flores Salazar and Carrillo, 2019; Kuzniak et al., 2016a).

Radford (2016), dikey düzlemleri oluşum süreçleri arasındaki ilişkilere göre üç başlıkta tanımlamaktadır:

- *Semiyotik-Söylemsel Dikey Düzlem [Sem-Söy]:* Semiyotik oluşum ile söylemsel oluşum arasındaki ilişkiyi temsil eder ve doğrulama süreci ile ilişkilendirilir.
- *Semiyotik-Enstrümantal Dikey Düzlem [Sem-Ens]:* Semiyotik oluşum ile enstrümantal oluşum arasındaki ilişkiyi temsil eder ve modelleme ile ilişkilendirilir.
- *Enstrümantal-Söylemsel Dikey Düzlem [Ens-Söy]:* Enstrümantal oluşum ile söylemsel oluşum arasındaki ilişkiyi temsil eder ve keşif süreci ile ilişkilendirilir.

Dikey düzlemler, matematiksel çalışmanın yürütülmesi sırasında gerçekleştirilen matematiksel eylemlerin anlaşılmasına, analiz edilmesine ve yapılandırılmasına olanak sağlamaktadır. Böylece, öğrencilerin problem çözme ve modelleme süreçlerindeki epistemolojik ve bilişsel etkileşimler bütüncül olarak değerlendirilebilmektedir.

MÇA Teorisi çerçevesinde tanımlanan dikey düzlemler ve bunların diyagram üzerindeki yerleri Şekil 2.5'te sunulmuştur. Dikey düzlemlere ilişkin detaylı açıklamalar aşağıdaki alt başlıklarda yer almaktadır (Kuzniak, 2022; Menares Espinoza, 2019; Menares Espinoza and Vivier, 2022).



Şekil 2.5: MÇA dikey düzlemleri (Kuzniak (2016)'dan uyarlanmıştır)

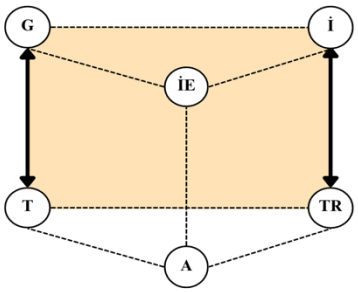
2.1.1.4.1 [Sem-Söy] Dikey Düzlemi

Matematiksel ispatlar, çeşitli yöntemler kullanılarak gerçekliklerin doğrulanması ve genelleştirilmesi amacıyla yapılmaktadır. Okul matematiğinde ise ispatlar, çoğunlukla semiyotik ve söylemsel oluşumlar arasındaki etkileşim ile gerçekleşmektedir (Kuzniak, 2022). Matematiksel çalışmanın yürütülmesi sırasında, kavrama ilişkin bilgilerin hangi amaçla kullanıldığının belirtilmesi, problem çözümünde kullanılacak yaklaşımların somutlaştırılması ve bu süreçlerin mantıksal bir söylemle desteklenmesi gerekmektedir.

MÇA Teorisine göre, yürütülen matematiksel çalışmalar sırasında; bireylerin gerçekleştirdiği akıl yürütme ve mantıksal açıklamalar, kavrama ilişkin bilgilerin geçerliliğinin sorgulanması, yürütülen süreçle ilgili tartışmalarda bulunulması gibi davranışların gözlemlenmesi, matematiksel çalışmanın [Sem-Söy] dikey düzleminde gerçekleştiğini göstermektedir. Bu düzlemde, semiyotik boyut; ispat söyleminin yapılandırılmasına rehberlik etmektedir (Kuzniak, 2022). Yürütülen matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemler, matematiksel kavramlara ilişkin basit görsellerin yanı sıra tanım, teorem ve özelliklere dayanan söylemlerle destekleniyorsa, çalışmanın söylemsel boyuta yakın olduğu; çalışmanın amacı tanım veya teorem oluşturmaksa, yine söylemsel oluşumun baskın olduğu; öte yandan, akıl yürütme süreci kavrama ilişkin görsellerle destekleniyorsa, çalışmanın semiyotik boyuta yakın olduğu ifade edilmektedir (Menares Espinoza, 2019; Reyes Avendaño, 2020).

Bunun yanında, matematiksel kavrama ilişkin özellik ve teoremlere dayalı olarak gerçekleştirilen yazılı ispatlar, ilgili şekillere eklenen kodlama işaretleri yardımıyla desteklenmektedir. Böylece ortaya koyulan söylemler semiyotik oluşum aracılığıyla yapılandırılmaktadır (Menares Espinoza, 2019). Burada semiyotik boyut, [Sem-Söy] düzlemindeki matematiksel çalışmaya rehberlik eden söylemsel oluşumun anlaşılmasına yardımcı olmaktadır (Kuzniak, 2022).

Matematiksel çalışma sırasında teorik doğrulamaların yapılması, temsilin gerekçelendirilmesi için söylemlerin kullanılması, gerekli ispatın ortaya konulmasında teorik referanslardan yararlanılması [Sem-Söy] dikey düzleminde gerçekleşen başlıca eylemler olarak belirtilmektedir (Kuzniak et al., 2016b). [Sem-Söy] dikey düzleminin MÇA diyagramındaki yeri Şekil 2.6'da sunulmuştur.



Şekil 2.6: [Sem-Söy] Dikey Düzlemi

2.1.1.4.2 [Sem-Ens] Dikey Düzlemi

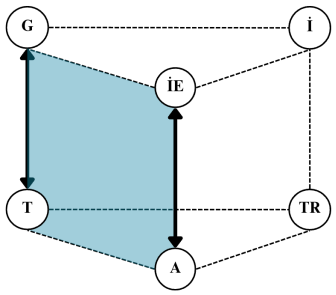
Semiyotik ve enstrümantal oluşum arasındaki etkileşim, MÇA Teorisinde [Sem-Ens] dikey düzlemi olarak tanımlanmaktadır. Bu etkileşim, matematiksel görevlerin çözümü sırasında bireyin dijital veya fiziksel artefaktlarla gerçekleştirdiği keşif faaliyetleri ile ortaya çıkmaktadır.

Kuzniak (2022), dijital artefaktların, bireyin matematiksel çalışmasında kullandığı kavramlara yol gösterici olabileceğini ve çeşitli temsillerin keşfedilmesine imkân tanıyarak kavramların anlaşılması ve yapılandırılmasına katkı sağladığını belirtmektedir. Bu doğrultuda, matematiksel çalışma sırasında kullanılan artefaktlar, semiyotik süreçlerle etkileşim halinde, matematiksel kavramların görselleştirilmesinde ve temsil edilmesinde bir araç işlevi görmektedir. Bu tür etkileşimle gerçekleştirilen doğrulamalar, deneysel veya mekanik ispatlar olarak

adlandırılmaktadır (Kuzniak, 2022). Bu tür ispatlara örnek olarak, dinamik geometri yazılımlarında yer alan sürükleme araçlarının kullanımıyla, bir geometrik şeklin bazı özelliklerinin değiştirilemeyeceğinin gösterilmesi, [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleşen deneysel ispatlara örnek teşkil etmektedir.

Matematiksel çalışma sırasında temsil, görselleştirme, artefakt ve inşa etme bileşenlerinin kullanılması; bireyin gerçekleştirdiği bilişsel süreçlerde bu bileşenler arasında etkileşimlerin ortaya çıkmasına yol açmakta ve böylece yürütülen matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzlemi üzerinde gerçekleştiği ifade edilmektedir (Reyes Avendaño, 2020). Bu bağlamda, bir dikey düzlemin etkinleştirilmesi için tüm bileşenlerin aynı anda kullanılmasına gerek yoktur; ancak, matematiksel çalışma sırasında hangi bileşenlerin etkin olduğunun belirlenmesi önem arz etmektedir.

Bu doğrultuda, daha fazla görsel unsur içeren bir matematiksel çalışmaların semiyotik boyuta daha yakın, artefaktların kullanımı veya gerçekleştirilen inşa süreçlerinin ön planda olduğu çalışmaların ise enstrümantal boyuta daha yakın olduğu söylenebilir (Reyes Avendaño, 2020, p. 107). Benzer şekilde, bir artefaktın enstrümantal oluşum sürecinde kullanılması; temsiller veya görselleştirme işlemleri ile desteklenmesi ve artefaktın matematiksel temsillerin kullanımına uygun hale getirilmesi, matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, problem durumlarının temsiller ve görselleştirme bileşenleri kullanılarak matematikselleştirilmesinin ardından, dijital artefaktlar gibi araçlar kullanılarak problemin çözümüne yönelik gerçekleştirilen somut keşifler ve araştırmalar da [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleşen eylemler olarak belirtilmektedir (Kuzniak et al., 2016b). [Sem-Ens] dikey düzleminin MÇA diyagramındaki yeri Şekil 2.7'de sunulmuştur.



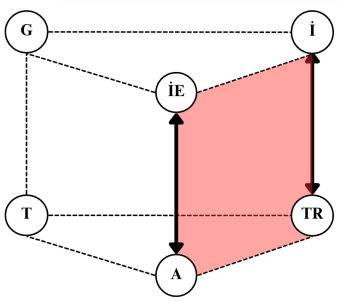
Şekil 2.7: [Sem-Ens] Dikey Düzlemi

2.1.1.4.3 [Ens-Söy] Dikey Düzlemi

Enstrümantal ve söylemsel oluşum arasındaki etkileşim, [Ens-Söy] dikey düzlemi olarak tanımlanmaktadır. Bu etkileşim, özellikle inşa etme sürecinin belirli bir inşa algoritmasına bağlı olması veya dijital artefaktların, birey tarafından yazılım içerisinde bulunan araçlar aracılığıyla kullanılması durumunda ortaya çıkmaktadır. Richard'a göre bu süreç, epistemolojik düzlemde yer alan teorik referanslara dayalı tümdengelimli bir akıl yürütme ile gerçekleşmekte olup, algoritmik ispat terimi ile ifade edilmektedir (Kuzniak'tan, 2022).

Genel olarak, matematiksel çalışmada gerçekleştirilen inşa süreçlerinin, geometrik akıl yürütme ile gerekçelendirilerek yapılandırıldığı görülmektedir. Geometrik akıl yürütme süreçlerinin, artefakt kullanımıyla yapılan doğrulamalarla ilişkilendirilmesi; söylemsel boyutun devreye girmesine ve tümdengelimsel akıl yürütmenin yapılandırılmasına olanak tanımaktadır (Kuzniak, 2022). Bilgisayar gibi teknolojik araçların etkin kullanılmasıyla yürütülen algoritmalar enstrümantal oluşum ile ilişkili görülmekte iken; bu algoritmaların akıl yürütme becerilerinin kullanılarak gerekçelendirilmesi ise söylemsel oluşum ile ilişkilendirilmektedir (Kuzniak, 2022). Dolayısıyla, inşa sürecinin teorik referanslardaki argümanlara dayanarak gerçekleştirilmesi ve deneme yoluyla yapılan keşifleri içermesi matematiksel çalışmanın [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştiğini göstermektedir (Kuzniak et al., 2016a).

Matematiksel çalışma sırasında elde edilen sonuçların ve gerçekleştirilen eylemlerin gerekçelendirilmesinde teorik referansların kullanılması [Ens-Söy] dikey düzlemine ilişkin eylemler olarak belirtilmektedir (Kuzniak et al., 2016a). Ayrıca, söylemsel oluşumun temelinde matematiksel kavramlara ait soyut düşüncelerin kullanılması yer almakta; deneme ve tümevarım yolu ile elde edilen çıkarımlar çalışmanın enstrümantal boyuta, artefaktların kullanımıyla doğrulanan ve tümdengelimli akıl yürütmeyle desteklenen çalışmalar ise söylemsel boyuta daha yakın olduğunu göstermektedir (Reyes Avendaño, 2020, p. 107). [Ens-Söy] dikey düzleminin MÇA diyagramında bulunduğu yer Şekil 2.8'de sunulmuştur.



Şekil 2.8: [Ens-Söy] Dikey Düzlemi

2.1.2 Bir Analiz Aracı Olarak MÇA ve MÇA Türleri

Matematiksel çalışmada kullanılan bileşenler arasındaki etkileşimin incelenmesi, sürecin ilerlemesini engelleyen tıkanıklıkların ve bu tıkanıklıkların nasıl giderilebileceğinin anlaşılmasına ışık tutmaktadır. Bu yönüyle MÇA Teorisi, matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemleri açıklığa kavuşturmakta; farklı çalışma biçimlerinin analizine olanak sağlayarak eksik ya da yanlış yapılandırılmış çalışma biçimlerini ortaya koyabilmektedir (Kuzniak, 2022; Nechache and Gómez-Chacón, 2022).

Bu noktada, matematiksel çalışmanın amaçlarının açıkça belirlenmesi ve bu çalışmanın diğer matematiksel çalışmalardan farkının ortaya koyulması önem taşımaktadır. Ayrıca, sürecin yürütülmesi sırasında uygulanacak kurallar ve kısıtlamaların belirlenmesi, sürecin yakından gözlemlenmesine ve sonunda elde edilen sonuçların matematiksel dünyada geçerli ve doğru olup olmadığının değerlendirilmesine katkı sağlamaktadır (Kuzniak et al., 2022b).

MÇA Teorisinde tanımlanan oluşum türleri ve dikey düzlemler, matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemlerin daha iyi anlaşılmasına, problem çözme sürecinde ortaya çıkan matematiksel yolların belirlenmesine yönelik analiz araçları olarak kullanılmaktadır (Flores Salazar and Carrillo, 2019; Kuzniak and Nechache, 2021; Kuzniak et al., 2016a; Montoya-Delgadillo et al., 2014). Bu sayede, matematiksel çalışmada kullanılan işaretler, teknikler ve teorik referanslar ayrıntılı bir şekilde incelenerek, ilgili matematiksel alanın nasıl yapılandırıldığı derinlemesine analiz edilebilmektedir.

MÇA Teorisinin temel özelliklerinden biri, matematiksel çalışmanın yalnızca sabit bir düzlemde gerçekleşen bir süreç olmaktan ziyade; farklı epistemolojik düzlem bileşenlerinin etkileşimiyle oluşum süreçlerinin ortaya çıktığı dinamik bir yapı olarak değerlendirilmesidir.

Bu bağlamda, *'çalışmanın dolaşımı'* kavramı, matematiksel çalışma sırasında birden fazla oluşum sürecinin gerçekleştirilmesi ya da birden fazla dikey düzlemde eylemlerin yürütülmesi durumunu ifade etmektedir (Kuzniak and Nechache, 2021).

Bu dolaşım, matematiksel çalışmanın yalnızca çözümün üretilmesini değil, aynı zamanda çözümün yeniden yapılandırılmasını, doğrulanmasını ve gerekçelendirmesini de kapsamaktadır. Dolayısıyla, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler yalnızca bir analiz kategorisi olmakla kalmayıp, matematiksel çalışmanın yürütüldüğü yolları da temsil etmektedir. Bu sayede, oluşumların birbirini nasıl desteklediği, düzlemler arasındaki geçişlerin nasıl gerçekleştiği ve matematiksel çalışma sırasında ortaya çıkan tıkanıklıkların nedenleri anlaşılabilmektedir.

Dolaşımın kesintisiz bir şekilde gerçekleştiği durumlar, *'tam matematiksel çalışma'* olarak adlandırılmaktadır (Kuzniak, 2022). Ayrıca, süreç içerisinde bireylerden beklenen çalışmalar ile ortaya koyulan ürünler arasındaki boşluk, gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların gözlemlenmesinin ve analiz edilmesinin önemli olduğunu vurgulamaktadır (Kuzniak, 2022).

Kuzniak (2022), Kuhn'un (1966) ortaya koyduğu *paradigma* kavramının, MÇA Teorisi içerisinde önemli bir yere sahip olduğunu ve gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların anlaşılmasında, epistemolojik farkındalığın geliştirilmesine katkı sağladığını belirtmektedir. Özellikle geometri alanında tanımlanan Geometri *I, Geometri II ve Geometri III* paradigmaları, geometrik düşünmeyi oluşturan unsurların farklı düzeylerde kullanılmasını içermekte ve farklı geometrik çalışmaların sınıflandırılmasına yönelik bir yapı sunmaktadır (Çalışkan-Dedeoğlu, 2016; Kuzniak, 2014).

MÇA Teorisi kapsamında yürütülen çeşitli çalışmalar, matematiğin farklı alanlarındaki paradigmaların analizi üzerine odaklanmıştır (Almonacid Adriano, 2018; Delgadillo and Vivier, 2016; Flores Salazar and Carrillo, 2019; Reyes Avendaño, 2020). Matematiksel bağlamda ortaya konan paradigmaların hiyerarşik bir yapı oluşturmadığı, aksine bir arada bulunarak problem çözme süreçlerinde farklı yaklaşımlarla düşünceleri desteklediği ve bu yolla matematiksel düşüncenin inşasına katkıda bulunduğu ifade edilmektedir (Kuzniak, 2022). Geometri bağlamında tanımlanan paradigmalar aşağıda özetlenen özelliklere sahiptir (Kuzniak, 2014):

- *Geometri I:* Doğal geometri olarak da adlandırılan paradigma, somut dünyayı temel almaktadır. Deney ve tümdengelime dayalı argümanların kullanılmasıyla üretilen fikirler, oluşturulan modeller ve gerçek dünyada var olan geometrik araç-gereçler kullanılarak gerekçelendirilmektedir. Özellikle geometrik araç-gereçlerle yapılan çizimler, gözlemler ve katlama, kesme gibi fiziksel eylemler, üretilen fikirlerin kanıtlanmasında önemli bir rol oynamaktadır.
- *Geometri II:* Doğal aksiyomatik geometri olarak adlandırılan bu paradigma, klasik Öklid geometrisini temel almaktadır. Bu bağlamda, gerçekleştirilen ispatlar aksiyomatik sistem içerisinde yer almakta ve modelleme bakış açısı ön plana çıkmaktadır. Böylece, Geometri II paradigması hem teorik hem de uygulamalı yönüyle dinamik bir süreç olarak değerlendirilmektedir.
- *Geometri III:* Okul matematiğinde doğrudan yer almayan bu paradigma, genellikle öğretmenlerin kullandığı öğretim programlarının ve üniversite düzeyindeki matematiksel çalışmaların referans kaynağı olarak görülmektedir. Aksiyomlar sistemini temel alan Geometri III'te, mantıksal çıkarımlara dayalı soyut uygulamalar hedeflenmekte; diğer geometrik paradigmaların aksine somut uygulamalardan ziyade, soyut matematiksel yapıların inşası ön plana çıkmaktadır.

Kuzniak et al. (2016a), matematik eğitimi alanında yürütülen çalışmaların incelenmesinde, eğitim kurumlarının politikaları ile sınıf içerisindeki matematiksel çalışmaları yönlendiren öğretmenlerin belirleyici bir role sahip olduğunu vurgulamaktadır. Bu doğrultuda, MÇA; epistemolojik, didaktik ve bilişsel uyanıklık olmak üzere üç alt başlıkta ele alınmaktadır. Matematiksel çalışmanın genel olarak matematiksel kriterlere dayandığı, ancak sosyal, ekonomik ve politik koşulların bu çalışmalara yön verebildiği göz önünde bulundurularak, *referans MÇA* kavramı tanımlanmıştır (Kuzniak et al., 2016a).

Referans MÇA, bireyin bilgi birikimine göre matematiksel kriterler temelinde tanımlanmakta; ekonomik, sosyal ve politik şartlara bağlı olarak şekillenmektedir. Özellikle okul ortamında yetkili kişi (çoğunlukla öğretmen) tarafından belirlenen referans MÇA'nın en önemli bileşenlerden biri teorik referans olarak ifade edilmektedir. Bu bağlamda, referans MÇA tanımlanırken okul ders kitapları, ilgili epistemolojik yaklaşımlar ve eğitim alanında yapılmış olan çalışmalar dikkate alınmalıdır. Her matematiksel çalışmanın gereksinimlerinin belirlenmesi için referans MÇA'nın tanımlanması kritik öneme sahiptir.

Referans MÇA, öğretimin yapıldığı kurumun dinamikleri ve öğretmenlerin matematiksel kavramları sınıf ortamına aktarma biçimleriyle sürekli yeniden şekillenen dinamik bir yapı niteliği taşımaktadır. Bir problemin çözümü sırasında öğretmenin hedeflediği çözüm yolu veya ders kitabında sunulan içerik referans MÇA'yı temsil etmektedir (Montoya Delgadillo and Reyes Avendaño, 2022).

Matematiksel çalışmanın yürütülmesi sürecinde, öğretmenin beklentileri ile matematiksel çalışma ortamının yeniden tanımlanması arasındaki boşluğu doldurmak amacıyla ortaya koyulması gereken bilgi aktarımı ve arabuluculuğu ifade etmek için *uygun MÇA* kavramı tanımlanmıştır. Uygun MÇA, öğrencilerin matematiksel kavramları yapılandırmasını ve bunları uygun biçimde kullanabilmesini sağlayacak şekilde, matematiksel çalışmanın detaylı, zengin ve kapsamlı olarak hazırlanmasını içermektedir. Bu süreçte, öğretmenin beklentilerine karşılık gelen potansiyel durumlar ile sınıfta yürütülen çalışmalar arasında ortaya çıkan gerçek durumlar birlikte değerlendirilmelidir (Henríquez-Rivas et al., 2022).

Son olarak, matematiksel görevin çözümü sırasında gerçekleştirilen çalışmaların incelenmesi ile *kişisel MÇA* ortaya konulabilmektedir. Kişisel MÇA, öğrencinin kendisine özgü çalışmasını yansıtır ve matematiksel görevi çözen bireyin gerçekleştirdiği sürecin gerçekliğini doğrudan temsil etmektedir (Menares Espinoza and Vivier, 2022).

Matematiksel görevin çözümüne yönelik olarak potansiyel matematiksel çalışmanın ortaya koyulması, matematiksel görevin ayrıntılı olarak analiz edilmesine dayanmaktadır. Matematiksel görev, MÇA'nın ortaya çıkması için önemli bir role sahiptir. Potansiyel matematiksel çalışmanın ortaya koyulmasıyla semiyotik, teknolojik ve teorik araçların görevin çözümünde nasıl kullanılabileceğinin öngörülmesi, bu bileşenlerin çalışmanın gözlemlenebilir unsurları olan bilişsel süreçleri, yöntemleri ve akıl yürütme süreçlerinin belirlenmesi sağlanabilmektedir. Böylece, süreç sırasında hangi epistemolojik bileşenlerin ortaya koyulabileceği ve hangi bilişsel süreçlerin tetiklenebileceği belirlenerek matematiksel çalışmanın analizi için sistematik bir bakış açısı kazanılmaktadır (Nechache and Gomez-Chacon, 2022). Ayrıca, matematiksel çalışmanın gelişim evrelerinin öngörülmesi ile uygun MÇA içindeki dolaşım süreci belirlenerek bireylerin görevin çözüm sürecindeki muhtemel ilerleme yolları anlaşılabilmektedir.

2.2 Matematiksel Modelleme

Problem çözme sürecinde, gerçek yaşam durumlarının yorumlanmasına ve açıklanmasına olanak sağlayacak şekilde matematiksel olarak inşa edilen yapılar matematiksel modeller olarak adlandırılmaktadır (English et al., 2005; Lesh and Doerr, 2003). Günlük yaşam durumları; fonksiyon, eşitsizlik, dizi, grafik ve cebirsel ifade gibi çeşitli matematiksel kavramlar aracılığıyla ifade edilebilmektedir (Altun, 2020; Ural, 2018). Bu bağlamda, günlük yaşam durumlarının matematikselleştirilmesi, matematiksel çözüm yollarının oluşturulması ve elde edilen matematiksel sonuçların yorumlanmasını kapsayan döngüsel süreç matematiksel modelleme süreci olarak tanımlanmaktadır (Lesh and Doerr, 2003).

Carlson et al. (2016), matematiksel modelleme sürecini, gerçek yaşam ile matematik arasında bir köprü kuran döngüsel bir yapı olarak tanımlamaktadır. Soyutlama ve somutlaştırma kavramlarına dayanan bu süreç, öğrencilerin problemi anlamaları ve yorumlamaları için bir iş planı oluşturmalarını gerektiren bir yapı sunmaktadır (Altun, 2020). Özellikle, soyut kavramlara ilişkin ön yargıları bulunan öğrenciler için matematiksel modelleme; günlük yaşamdaki somut modellerle matematiği ilişkilendirerek, matematiğe yönelik olumsuz tutumların dönüştürülmesinde katkı sağlamaktadır (Baki, 2008).

Matematiksel modelleme, matematik ile günlük yaşam durumları arasında bağlantılar kurarak, öğrencilerin matematiksel kavramları algılamalarında ve öğrenmelerine yönelik gerçek bağlamlar sağlamaktadır. Bu yönüyle, matematiksel yetkinliklerin gelişimine katkıda bulunmakta ve bu nedenle öğretim programlarında geniş yer bulmaktadır (Ledezma et al., 2023). Böylece, matematiksel modelleme yalnızca problemleri çözmeye yönelik bir araç değil, aynı zamanda matematiğin doğasını ve kavramsal yapısını anlamada da güçlü bir öğretim yaklaşımı olarak öne çıkmaktadır.

Matematiksel modelleme etkinlikleri, gerçek yaşam durumunun anlamlandırılarak matematikselleştirilmesini, etkinlikte yer alan bilgilerin yorumlanmasını, çözümde kullanılacak verilerin seçilmesini ve gerektiğinde yeni verilerin elde edilmesi için uygun yolların belirlenmesini kapsayan karmaşık temsil süreçlerini içermektedir (Lesh and Doerr, 2003). Genel olarak problem çözme etkinlikleri, çözüm için gerekli tüm verileri doğrudan sunmaktadır. Bu tür etkinliklerde öğrencilerden beklenen, verilen verileri kullanarak önceki bilgilerini işe koşarak çözüme ulaşmalarıdır. Buna karşın, matematiksel modelleme etkinliklerinde çoğu zaman problem durumunda çözüm için gerekli tüm veriler açıkça

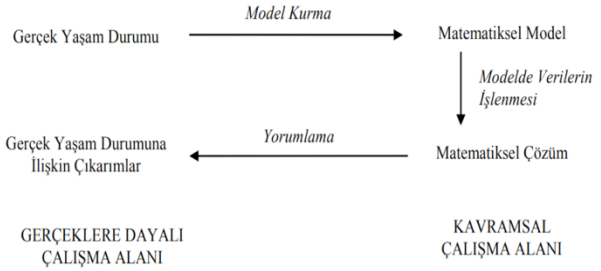
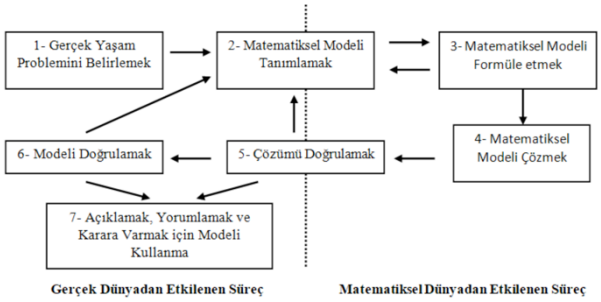
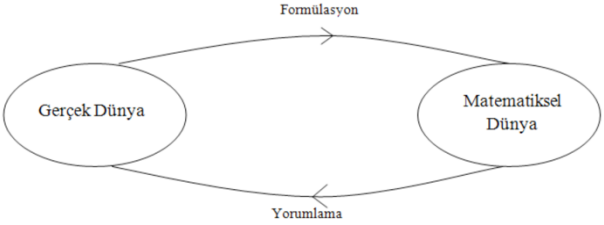
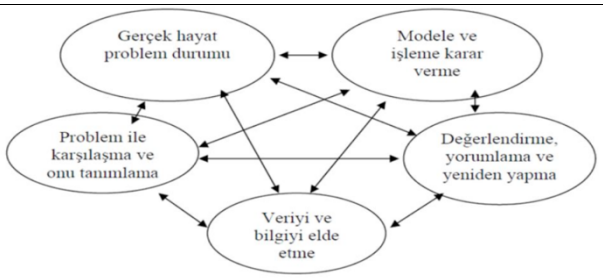
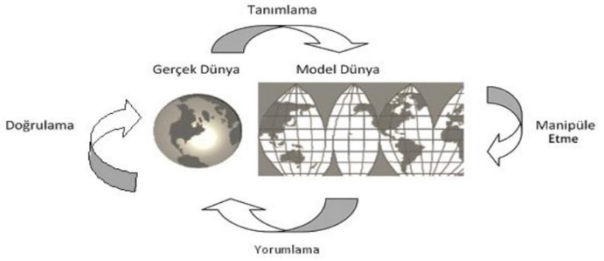
belirtilmemektedir. Bu durumda öğrenciler, çözüm sürecini ilerletebilmek için problem durumunda verilmeyen ancak çözüm için gerekli olan bilgileri belirlemek zorunda kalmaktadır. Bu noktada, kendi deneyimlerinden, sahip oldukları bilgiden veya problemde yer alan görsel ve metinsel ipuçlarından yola çıkan öğrenciler çeşitli varsayımlar oluşturabilmektedir. Böylece, öğrencilerin problem durumuna uygun, çözüm sürecine katkı sağlayacak ve gerçek yaşam bağlamında anlamlı varsayımlar geliştirmeleri beklenmektedir (Bukova Güzel vd., 2016).

Matematiksel modelleme, yapılan tanımların çeşitlliliği ve modellemenin matematik eğitiminde kullanım amaçları doğrultusunda farklı yaklaşımlar temelinde gelişmiştir. Matematiksel modelleme sürecini incelemek amacıyla birçok çalışma gerçekleştirilmiş ve bu süreçleri açıklamak üzere çeşitli matematiksel modelleme döngüleri önerilmiştir (Abrams, 2001; Ang, 2010; Blum and Borromeo Ferri, 2009; Blum and Leiß, 2007; Mason, 1988). Kaiser and Sriraman (2006), matematiksel modelleme yaklaşımlarını altı başlık altında sınıflandırmıştır:

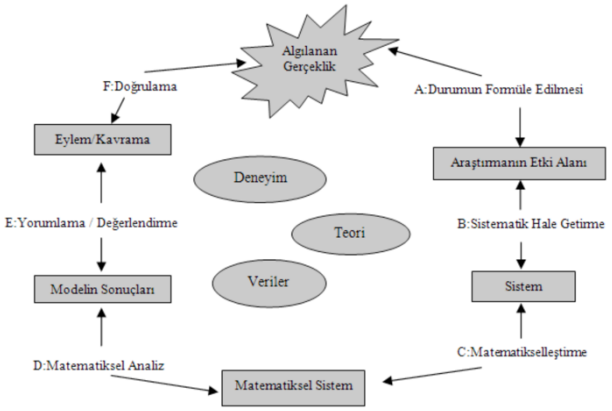
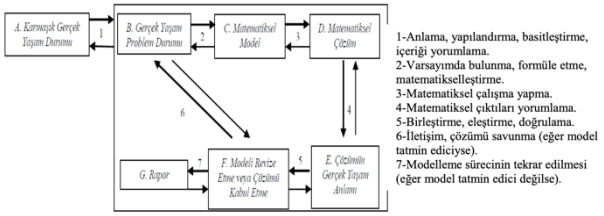
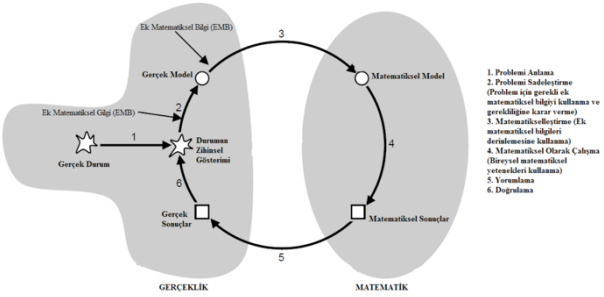
- *Gerçekçi modelleme:* Gerçek yaşam problemlerine yaratıcı çözümler üreterek problem durumunu modelleme.
- *Epistemolojik modelleme:* Matematiksel teorilerin gelişimine katkı sağlama.
- *Eğitimsel modelleme:* Matematiksel modellemeyi öğretim ortamlarının tasarımında kullanarak matematiksel kavramların öğretimini destekleme.
- *Bağlamsal modelleme:* Bir konuya ilişkin bağlamların yer aldığı sözel ve açık uçlu problemlerin çözülmesi.
- *Sosyo-eleştirel modelleme:* Gerçek yaşam durumlarının eleştirel bakış açısıyla incelenmesi.
- *Bilişsel modelleme:* Problem çözme sürecinde ortaya çıkan bilişsel süreçlerin incelenmesi.

Bu farklı yaklaşımlar doğrultusunda geliştirilen başlıca matematiksel modelleme döngülerine ilişkin özet Tablo 2.1'de sunulmuştur.

Tablo 2.1: Başlıca matematiksel modelleme döngüleri

	Başlıca Özellikler	Şema
Müller and Wittmann (1984)	Üç temel aşamadan oluşmaktadır. Modelleme süreci bileşenler ve aşamalar yardımıyla sunulmuştur.	
Mason (1988)	Basamaklar arasında doğrusal olmayan geçişlerin söz konusu olabileceği vurgulanmıştır. Gerçek dünya ve matematiksel dünya birbirinden ayrılmıştır. Sürecin döngüsel olduğu görülmektedir.	
Berry and Houston (1995)	Gerçek yaşam ve matematiksel dünya birbirinden ayrılmıştır. Gerçek yaşamdan matematiksel dünyaya geçiş formülasyon yoluyla sağlanmaktadır.	
Doerr (1997)	Matematiksel modelleme sürecinin doğrusal olmadığını ifade etmektedir. Basamaklar arasındaki ilişkiler ve geçişler vurgulanmıştır. Zihinsel yapıların karmaşık olabileceği ifade edilmiştir.	
Lesh and H. Doerr (2003)	Gerçek dünya ile matematiksel dünya arasında bağlantı tanımlama, yorumlama ve doğrulama aşamaları ile kurulmaktadır.	

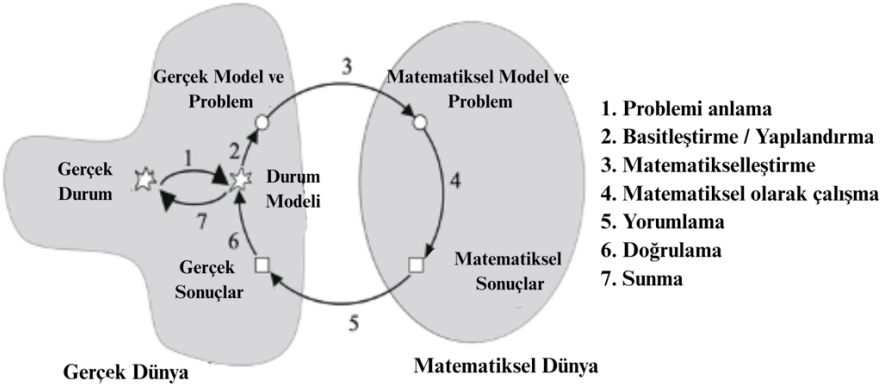
Tablo 2.1 (devam)

Blomhøj and Jensen (2007)	Matematiksel modelleme sürecinin döngüsel olarak gerçekleştirildiği, verilerin deneyimler doğrultusunda teorik unsurların dikkate alınmasıyla kullanıldığı vurgulanmaktadır.	
Galbraith and Stillman (2006)	Matematiksel modelleme sürecinde teknolojinin desteği alınmıştır.	
Borromeo Ferri (2006)	Matematiksel modelleme sürecini bilişsel perspektiften incelemektedir. Döngüsel bir şekilde ilerleyen aşamaların birbirini yinelemeli bir şekilde gerçekleştirilebileceği vurgulanmaktadır.	

Blum and Leiß (2005, 2007) ve Borromeo Ferri (2006) tarafından önerilen matematiksel modelleme döngüleri, modelleme sürecinde gerçekleştirilen eylemleri bilişsel yönden ele almaktadır. Matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan bilişsel imgelerin ve yapıların incelenmesi, öğrencilerin hangi aşamalarda zorlandıklarının belirlenmesine olanak tanımaktadır. Bu sayede, matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesine yönelik etkili öğretim ortamlarının tasarlanmasına katkı sağlayacak veriler elde edilebilmektedir (Bukova Güzel vd., 2016).

Blum ve Leiß (2007) modelleme döngüsü (**Şekil 2.9**), gerçek yaşam durumunun tanımlanması ile başlamaktadır. Bu aşamada, gerçek yaşam durumu bağlamı açıklanarak yazılı veya görsel biçimde sunulmakta ve matematiksel bir problem olarak ele alınmaktadır. Gerçek modelin oluşturulabilmesi için, problem durumu basitleştirilerek okuyucu tarafından anlaşılır hale getirilmelidir. Bu süreçte, probleme uygun olarak oluşturulan zihinsel gösterimler; şekiller,

diyagramlar ve benzeri dış temsiller kullanılarak desteklenmekte, matematiksel problem basitleştirilerek yapılandırılmaktadır.



Şekil 2.9: Matematiksel modelleme döngüsü (Blum & Leiß, 2007) – Kotze'den uyarlanmıştır (2017, p. 193)

Matematikselleştirme olarak adlandırılan, gerçek modelden matematiksel modele geçiş sürecinde, sunulan bağlamın matematiksel temsilinin geliştirilmesi söz konusudur. Problemin çözümü için gerekli her bilginin problem durumunda açıkça yer almaması nedeniyle, bireylerin tecrübelerini ve mevcut matematik dışı bilgilerini kullanmaları büyük önem taşımaktadır. Gerçek durumun matematiksel kavramlar aracılığıyla açıklanması, gerçek modelin matematikselleştirilmesinin, yani matematiksel dile aktarılması sağlanmaktadır.

Matematikselleştirilerek matematiksel dünyaya aktarılan problem durumu üzerinde, bireyin kişisel yeterliklerini kullanarak gerçekleştirdiği matematiksel çalışmalar sonucunda çeşitli matematiksel sonuçlar elde edilmektedir. Bu sonuçlar, gerçek durum bağlamında yorumlanarak yeniden gerçek dünyaya aktarılır ve gerçek sonuç elde edilir. Elde edilen gerçek sonucun, durumun zihinsel temsili ve gerçek model bileşenleriyle karşılaştırılmasıyla doğrulama sağlanır. Böylece, karşılaşılan problem durumuna ilişkin matematiksel modelleme döngüsü tamamlanarak, probleme yeterli ve geçerli bir yanıt üretilmiş olur (Borromeo Ferri, 2018).

Bunun yanında, matematiksel modelleme etkinliklerinin çözümünde bireylerin belirli yeterliklere sahip olması beklenmektedir. Modelleme yeterliği, matematiksel modelleme sürecinin etkili bir şekilde yürütülebilmesi ve tamamlanabilmesi için bireylerin sahip olması gereken bilgi, beceri ve tutumları içeren donanım olarak tanımlanmaktadır (Tekin Dede, 2015). Maaß (2006) ve Kaiser and Maaß'a (2007) göre modelleme yeterliği, gerçek yaşam durumlarını

modelleme becerisini ifade etmekte olup, yalnızca modelleme becerisini değil, aynı zamanda bu becerileri uygulama isteğini de kapsamaktadır. Ayrıca, matematiksel modelleme sürecinin amacına uygun bir şekilde gerçekleştirilebilmesi için matematiksel bilginin nasıl ve ne zaman kullanılacağının bilinmesi de modelleme yeterliği kapsamında değerlendirilmektedir (Ural, 2018).

Matematiksel modelleme yeterlikleri, modelleme sürecinin her bir basamağıyla doğrudan ilişkilidir ve bu bağlamda Blum and Kaiser (1997) tarafından modelleme yeterlikleri ve alt yeterlikleri aşağıdaki şekilde açıklanmaktadır (Maaß'tan, 2006):

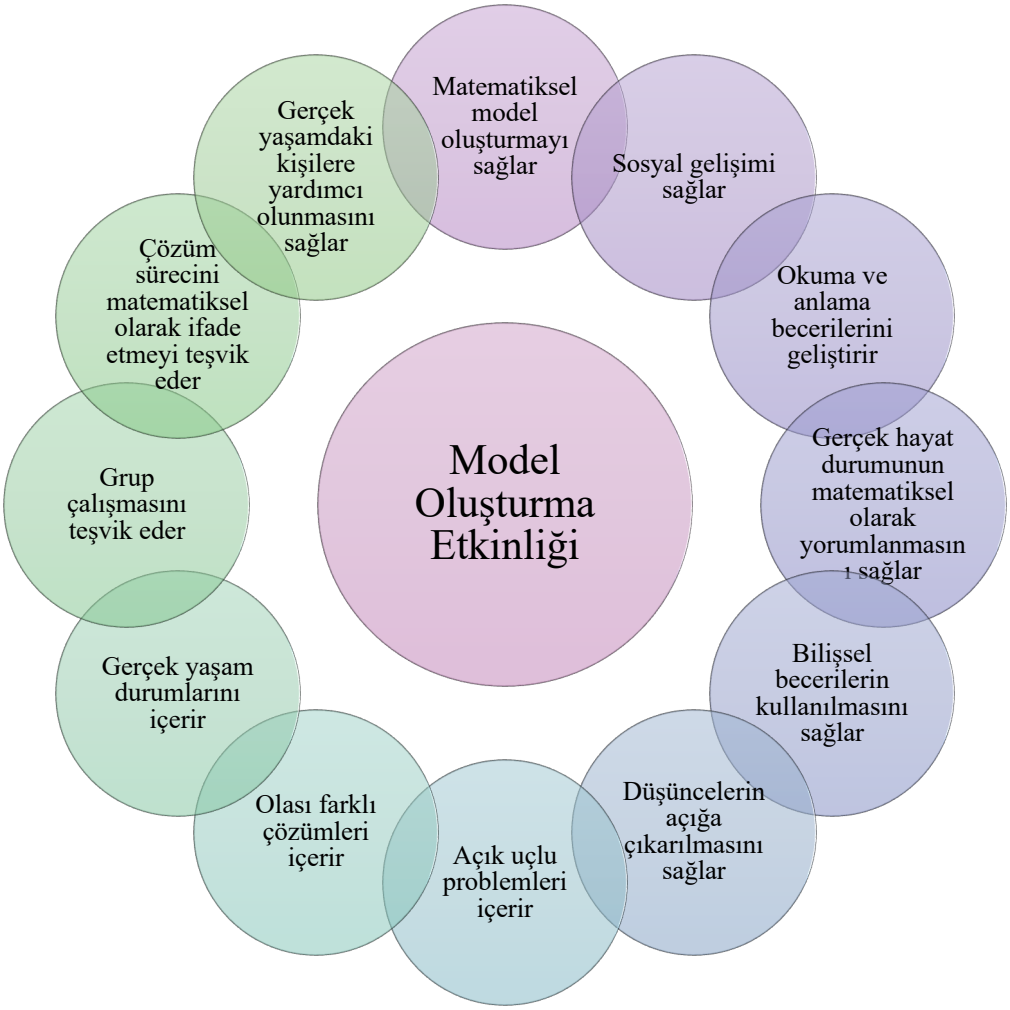
- Gerçek problemi anlama ve gerçekliğe dayalı bir model kurma yeterliği
    - Problem için varsayımlarda bulunmak ve durumu sadeleştirmek
    - Durumu etkileyen nicelikleri fark etmek, bunları isimlendirmek ve ilgili değişkenleri belirlemek
    - Değişkenler arasında ilişkiler oluşturmak
    - Uygun bilgileri aramak ve ilgili olan veya olmayan bilgiyi ayırt etmek
- Gerçek modelden matematiksel model oluşturma yeterliği
    - İlgili nicelikleri ve aralarındaki ilişkileri matematikselleştirmek
    - Gerektiğinde ilgili nicelikleri ve nicelikler arasındaki ilişkileri sadeleştirmek ve niceliklerin sayısını ve karmaşıklığını azaltmak
    - Uygun matematiksel gösterimleri seçmek ve durumları grafiksel olarak sunmak
- Oluşturulan matematiksel modeli çözme yeterliği
    - Problemi parçalara bölmek, benzer problemler ile ilişki kurmak, problemi farklı şekilde ifade etmek ve incelemek, nicelikleri veya uygun verileri çeşitlendirmek gibi sezgisel stratejileri kullanmak
    - Problemi çözmek için matematiksel bilgileri kullanmak
- Gerçek bir durumda matematiksel sonuçları yorumlama yeterliği
    - Matematiksel sonuçları matematik dışı bağlamlarda yorumlamak
    - Özel bir durum için geliştirilmiş olan çözümleri genellemek
    - Uygun matematikel dili kullanarak ve/veya çözümler hakkında iletişim kurarak bir probleme çözümler sunmak
- Çözümü doğrulama yeterliği
    - Bulunan çözümleri eleştirel olarak kontrol etmek

- Çözümlerin duruma uygun olmaması halinde modelin bazı kısımlarını gözden geçirmek veya tekrar modelleme sürecinden geçmek
- Problemin farklı çözümleri veya çözümün geliştirilip geliştirilemeyeceği üzerinde düşünmek
- Genel olarak modeli sorgulamak

Blum and Kaiser (1997) ver Borromeo Ferri (2006)'nın modelleme yeterlikleri ve alt yeterlikleri incelendiğinde, Blum and Leiß (2007)'in matematiksel modelleme döngüsü sürecinin basamakları ile örtüştüğü söylenebilir. Bunun yanında, Blum and Leiß (2005, 2007) ve Borromeo Ferri (2006) tarafından sunulan matematiksel modelleme döngüleri büyük ölçüde benzerlik gösterse de Borromeo Ferri (2006), sürecin son basamağını *sunma* olarak tanımlamaktadır. Hıdıroğlu ve Güzel (2013), iki model arasındaki bir diğer farkın, sözel problemlerde sıkça karşılaşılan durum modeli teriminin Borromeo Ferri (2006) tarafından kullanılmayarak, bunun yerine durumun zihinsel temsili ifadesinin tercih edilmesi olduğunu belirtmiştir. Durumun zihinsel temsili, görevin anlaşılmasının ardından problemin zihinsel olarak yeniden yapılandırılması ve problemin bireye çağrıştırdığı durumlar kapsamaktadır (Ledezma et al., 2023).

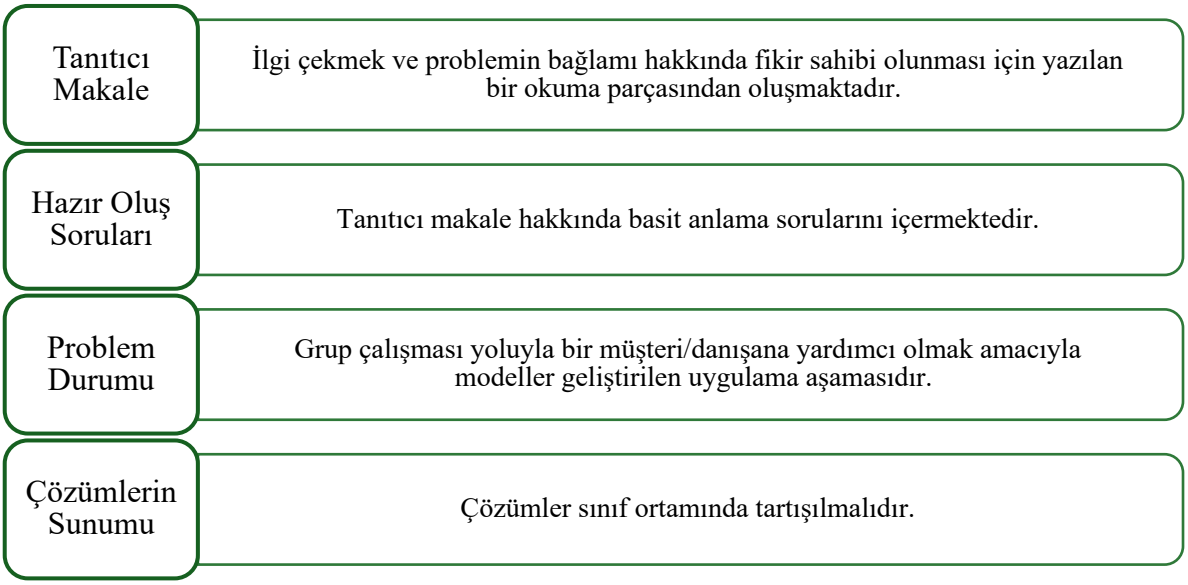
2.2.1 Model Oluşturma Etkinlikleri

Matematiksel modelleme, gerçek yaşam durumlarını anlamayı ve bu durumlara yönelik çözüm geliştirmeyi amaçlayan dinamik bir süreç olarak ele alınmaktadır. Bu süreci desteklemek amacıyla tasarlanan etkinliklerde, gerçek nesnelere yer verilmesi, bu nesnelere ilişkin farklı temsillerin kullanılmasına olanak tanımaktadır (Blum and Leiß, 2007; Ekol and Greenop, 2023; Jablonski, 2023). Gerçek nesne temelli etkinlikler, yalnızca hesaplama becerilerini geliştirmekle kalmaz; aynı zamanda öğrencilerin düşünme, analiz etme ve planlama becerilerinin de ortaya çıkarılmasına katkıda bulunur (Herget and Torres-Skoumal, 2007). Bu bağlamda, literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri Şekil 2.10'da özetlenmiştir (Tekin Dede ve Bukova Güzel, 2014).

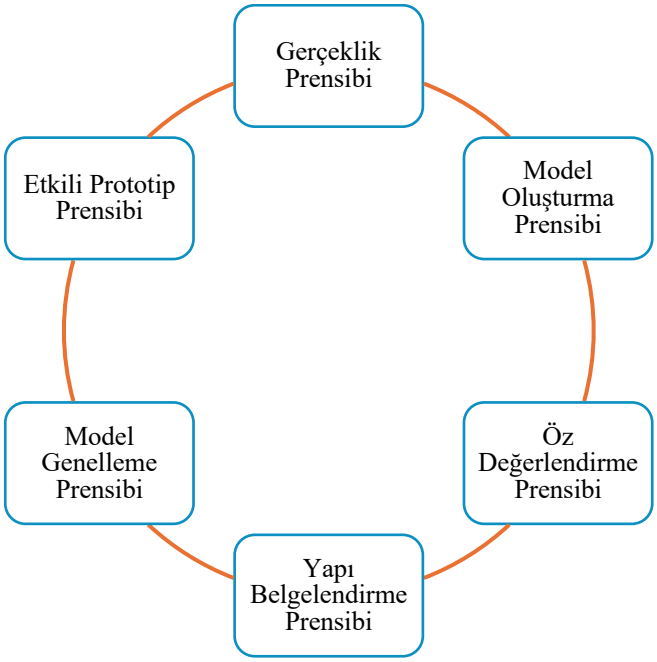


Şekil 2.10: Model oluşturma etkinliklerinin özellikleri (Tekin Dede ve Bukova Güzel (2014)'den uyarlanmıştır)

Gerçek nesneleri içeren matematiksel görevin geliştirilmesinde, model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri ile bileşenlerin özellikleri Şekil 2.11'de model oluşturma etkinliklerinin temel prensipleri ise Şekil 2.12'de sunulmaktadır (Bukova Güzel vd., 2016; Chamberlin and Moon, 2005; Tekin Dede ve Bukova-Güzel, 2018):



Şekil 2.11: Model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri



Şekil 2.12: Model oluşturma etkinliklerinin prensipleri

- *Gerçeklik prensibi:* model oluşturma etkinliğinin içeriği gerçek yaşam ile bağlantılı ve anlamlı olabilecek durumları içermelidir. Öğrenciler kendilerinden yardım isteyen gerçek bir kişi için model oluşturmalıdır.
- *Model oluşturma prensibi:* problem durumu öğrencilerin ürün olarak bir sayı üretmeleri yerine model oluşturmalarını gerektirmelidir.

- *Öz değerlendirme prensibi:* problem durumu, öğrencilerin geliştirdikleri çözümlerin ne ölçüde geçerli olduğuna grup arkadaşları ile tartışarak kendilerinin karar verebilmelerini gerektirmelidir.
- *Yapı belgelendirme prensibi:* problem durumu öğrencilerin çözümlerinde tüm düşündüklerini ayrıntılarıyla ifade etmelerine olanak sağlamalıdır.
- *Model genelleme prensibi:* oluşturulan model, benzer durumlar için genellenebilir ve yeniden kullanılabilir olmalıdır.
- *Etkili prototip prensibi:* oluşturulan model, ileride karşılaşılabilecek benzer durumlar için geçerliliğini korumalı ve bir ilk örnek oluşturmalıdır.

2.3 Matematiksel Modelleme ve MÇA

Matematiksel modelleme, gerçek problemin anlaşılmasıyla başlayan; matematiksel modelin oluşturulması ve modelin çözülmesiyle devam eden; elde edilen matematiksel sonuçların gerçek yaşam bağlamında yorumlanması ve doğrulanmasıyla tamamlanan bir süreç olarak tanımlanmaktadır. Gerçek yaşam ile matematik arasında kurulan ilişki, gerçek yaşam durumlarının anlamlandırılmasını, yapılandırılmasını ve değerlendirmesini kapsamaktadır (Blum and Leiß, 2007; Kaiser and Sriraman, 2006). Matematiksel modelleme etkinliklerinin çözümü sırasında, birçok eylemin bir arada gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Bu eylemler sırasında farklı matematiksel kavramların kullanılmasına bağlı olarak çeşitli bilişsel süreçler ortaya çıkmaktadır. Kuzniak (2011) tarafından geliştirilen MÇA Teorisi, matematiksel modelleme sürecinin analiz edilmesi için güçlü bir kuramsal çerçeve sunmaktadır. MÇA Teorisinde tanımlanan bileşenler ve bu bileşenler arasında gerçekleşen oluşum süreçleri, matematiksel modelleme sürecinde gerçekleştirilen temsillerin oluşturulması, artefaktların kullanımı ve akıl yürütme eylemlerinin değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır.

Matematiksel modelleme döngüsü, öncelikle problemin anlaşılması ve basitleştirilmesi aşamaları ile başlamaktadır. Bu aşamalarda, gerçek yaşam durumunun anlamlandırılmasına yönelik ifadelerin sergilenmesi; problemin çözümünde kullanılacak gerekli ve gereksiz verilerin ayırt edilmesi; bu veriler arasında ilişkiler kurulması ve gerçekçi varsayımlar geliştirilmesi beklenmektedir. Dolayısıyla, problemde yer alan bağlamın ifade edilmesi, problem durumuna ilişkin önemli verilerin belirlenmesi ve matematiksel temsillerin kullanılması, MÇA Teorisinin epistemolojik düzleminde yer alan bileşenlerle doğrudan ilişkilidir. Gerçekleştirilen bu eylemler, matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan

MÇA'nın ilk yapıtaşlarını oluşturmakta ve süreç boyunca inşa edilecek matematiksel modellerin temelini teşkil etmektedir (Lagrange et al., 2022).

Matematikselleştirme aşamasında, denklem, fonksiyon, dizi ve grafik gibi matematiksel yapıların oluşturulması beklenmektedir. Gerçek yaşam durumlarının matematiksel dünyaya aktarılabilmesi için, soyut matematiksel nesnelerin kullanılması ve düşüncelerin matematiksel kavramlar aracılığıyla ifade edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, gerçekleştirilen görselleştirme, akıl yürütme ve inşa etme süreçleri MÇA Teorisinin epistemolojik ve bilişsel düzlemleri arasındaki etkileşimle doğrudan ilişkilidir. Bu etkileşim, modelleme sürecinde ortaya çıkan oluşum süreçlerinin yapılandırılmasına katkıda bulunmakta ve matematiksel kavrayışın derinleştirilmesine olanak tanımaktadır.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında, oluşturulan model üzerinde çeşitli işlemler gerçekleştirilerek matematiksel sonuçlara ulaşılması beklenmektedir. Bu aşamada yürütülen eylemler; denlem çözme, gerekçelendirme, matematiksel çözüme ulaşmak amacıyla gerçekleştirilen yardımcı görselleştirmeler ve inşa etme süreçlerini kapsamaktadır. Dolayısıyla, bu eylemler ile MÇA Teorisinin bileşenleri arasında doğrudan ve güçlü bir ilişki bulunduğu söylenebilir.

Yorumlama ve doğrulama aşamalarında, elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında anlamlandırılması, doğruluğunun değerlendirilmesi ve alternatif çözüm önerilerinin geliştirilmesi beklenmektedir. Bu süreçte, genel olarak akıl yürütme becerileri ön plana çıkmakta ve çeşitli bişişsel eylemler gerçekleştirilmektedir. Blum and Borromeo Ferri (2009), bu aşamada sorulacak sorular aracılığıyla modelin geçerliliğinin değerlendirilebileceğini belirtmektedir. Ayrıca, yapılacak gerekçelendirmeler ve modelin geçerliğinin değerlendirmesi sırasında gerçekleştirilen görselleştirme ve yapılandırma gibi eylemler, matematiksel çalışmanın yeniden yapılandırılmasına katkı sağlamaktadır (Lagrange et al., 2022). Bu yönüyle, yorumlama ve doğrulama aşamalarında yürütülen eylemler ile MÇA Teorisinin bileşenleri arasında güçlü bir ilişki olduğu görülmektedir.

Matematiksel modelleme, temsillerin oluşturulması sırasında çeşitli araçların kullanıldığı ve akıl yürütme becerileriyle gerekçelendirmelerin yapıldığı bir matematiksel çalışma biçimi olarak öne çıkmaktadır. MÇA Teorisi, matematiksel modelleme sürecinde ortaya konan eylemlerin epistemolojik ve bilişsel boyutlarını anlamaya yönelik güçlü bir kuramsal çerçeveye

sahiptir. Nitekim, matematiksel modelleme süreçlerini MÇA Teorisi bağlamında analiz eden çalışmalar, bu teorinin matematiksel modelleme süreçlerinin açıklanmasında önemli bir yere sahip olduğunu göstermektedir (Almonacid Adriano, 2018; Henríquez-Rivas and Kuzniak, 2021; Reyes Avendaño, 2020; Verdugo Hernández et al., 2022).

2.4 Alan Ölçme Kavramına İlişkin Referans MÇA

Ölçme, matematikte yer alan temel işlerin başında gelmektedir (Argün vd., 2014). Nesnelerin uzunluğu, alanı, hacmi, kütlesi ve olayların süresi ölçülebilir durumlar olarak günlük yaşamda sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Aynı türdeki birimin sayılması olarak tanımlanan ölçme işleminin sonuçları sayı ve kod gibi işaretlemeler ile gösterilmektedir (Altun, 2015). Ölçme, yalnızca nesnel niceliklerin belirlenmesiyle sınırlı olmayıp, karşılaşılan durumlara ilişkin çözüm stratejilerinin geliştirilmesi ve matematiksel düşünme becerilerinin etkinleştirilmesini sağlamaktadır (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Bu yönüyle bireylerin ölçme ile ilgili kavramlar hakkında bilgi sahibi olması önemli görülmektedir.

Alan kavramı, yüzeysel bir şekli veya nesneyi kaplamak için gerekli malzeme miktarını temsil eden miktar olarak tanımlanmaktadır (Argün vd., 2014). Bir odayı kaplayacak olan fayans sayısı ya da bir duvarı boyamak için gerekli boya miktarı gibi durumlar, alan ölçme kavramının yayın kullanımlarına örnek olarak verilebilir. Bu bağlamda, alan kavramı yüzeyin ölçülebilir niteliği olarak ön plana çıkmakta ve bir yüzeyin kaplanmasına yönelik geometrik bir ölçü olarak görülmektedir. Örtme kavramının her uzayda anlamlı olmaması sebebiyle, alan kavramı genellikle iki boyutlu yüzeyler için kullanılmaktadır. Alanı ölçülebilir hale getirmek amacıyla, her karesel bölgeye kenar uzunluğunun karesi kadar bir sayı atanmasını ifade eden ‘alan aksiyomu’ kullanılmaktadır. Bu aksiyoma göre her karesel bölge için yalnızca bir tek pozitif sayı alanı belirlemektedir.

Alan kavramının öğretimi sırasında bazı nesnelerin kaplama niteliğine sahip olduğu bazı nesnelerin ise bu niteliğe sahip olmadığının fark ettirilmesi önemli görülmektedir. Alana yönelik olarak öğretim sırasında yer verilecek karşılaştırma etkinlikleri, alan ile şekil, uzunluk ve diğer kavramlar arasındaki ilişkinin anlaşılmasına faydalı olmaktadır. Ayrıca, alan ölçmenin öğretiminde parçalama, tekrarlayan birim, alan korunumu, birimlerden bir dizi oluşturma ve uzunluk ölçme gibi temel kavramların gerekli olduğu belirtilmektedir (Stephan and Clements, 2003). Bu kavramların doğru şekilde yapılandırılması, alan ve ölçme kavramlarının doğru şekilde yapılandırılması için önemli görülmektedir. Özellikle, farklı şekillerin eş alanlara sahip

olabileceğini gösteren dönüşüm ve yapılandırma etkinlikleri, öğrencilerin alan korunumunu kavramalarını pekiştirmektedir (Clements and Sarama, 2007).

Alan ölçme, matematik eğitimindeki temel ölçme alanlarından biri olarak, iki boyutlu yüzeylerin nicel olarak belirlenmesini içermektedir. Tarihsel olarak yüzeylerin kaplanması ve karşılaştırılması yoluyla geliştirilmiş; birim kare kavramı, kaplama ve karşılaştırma yöntemleri, alan aksiyonları, formüllerin türetilmesi ve eş alanlı dönüşümler gibi kavramlar bu sürecin merkezinde yer almıştır. Alan ölçme, Kuzniak (2011) tarafından tanımlanan geometri paradigmaları içerisinde özellikle Geometri II çerçevesinde konumlanmakla birlikte, geometrik nesneler üzerinde araçlar ve teknikler aracılığıyla yapılan işlemler gerekçelendirilmekte ve ölçme araçları ile doğrulanmaktadır.

Alan ölçme kavramı, Türkiye'deki öğretim programlarında ilkokul seviyesinden itibaren sistematik olarak yer almaktadır. Öğretim programları (MEB, 2009, 2018, 2024), öğrencilerin alan ölçme kavramına ilişkin temel kavramları yaparak-yaşayarak öğrenmelerini, farklı temsiller kullanabilmeleri ve bu temsiller arasında karşılaştırmalar yapabilmelerini; eş alan kavramını kavramalarını ve farklı temsillerle ifade edebilmelerini hedeflemektedir. Bu doğrultuda, Türkiye'deki öğretim programları yalnızca formül bilgisi ve nicel hesaplamalara değil, aynı zamanda öğrencilerin farklı çözüm stratejilerini deneyimlemeyi ve ölçme ile ilgili temsil dönüşümlerini gerçekleştirebilmesini kapsamakla beraber, görsel, kavramsal ve bağlamsal düzeyde düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik etkinliklerle desteklemektedir.

Alan ölçme kavramının öğretimi sürecinde, GeoGebra gibi dinamik geometri yazılımları, sanal manipülatifler ve farklı dijital araçlar sıklıkla kullanılmakta ve öğrencilerin kavramsal yapıları oluşturmalarını destekleyecek ortamlar sunmaktadır. Teknolojinin öğrenme ortamlarına entegrasyonu, geometrik şekillerin dönüşümlerinin dinamik biçimde gözlemlenmesine, farklı çözüm stratejilerinin deneyimlenmesine olanak sağlamaktadır (Zbiek et al., 2007).

Bu bağlamda alan ölçme kavramına ilişkin referans MÇA'nın belirlenmesinde alanın tarihsel gelişimi, öğretim programlarındaki yeri ve görselleştirme, inşa etme ve gerekçelendirme süreçlerindeki gelişimlerinin belirlenmesi önemli görülmektedir (Montoya Delgadillo and Reyes Avendaño, 2022). Bu doğrultuda, MÇA Teorisinin bileşenleri alan ölçme kavramı göz önünde bulundurularak incelendiğinde referans MÇA'nın epistemolojik bileşenleri arasında kullanılan temsiller olarak kareli kâğıt, geometri tahtası gibi somut modeller, geometrik

şekillere ilişkin çizimler, ölçekli planlar ve cebirsel ifadeler yer almaktadır. Alan ölçme kavramına ilişkin artefaktlar arasında cetvel, pergel, şablon, kareli kâğıt gibi fiziksel artefaktlar ile GeoGebra, CAD tabanlı yazılımlar ve sanal manipülatifler gibi dijital artefaktlar bulunmaktadır. Alan aksiyomu, dikdörtgen, üçgen, paralelkenar, yamuk ve daire gibi geometrik şekillere ilişkin temel alan formülleri, alan korunum ilkesi ve eş alanlı dönüşüm ilişkileri ise teorik referanslar arasında yer almaktadır. Alan ölçme sürecinde bireylerden beklenen bilişsel eylemler ise alanın kaplama yoluyla zihinde canlandırılarak görselleştirilmesi, şekillerin parçalanması ve yeniden düzenlenmesi yoluyla eş alanlı şekiller oluşturularak inşa edilmesi ve formüllerin ya da alan korunumunun gerekçelendirilmesi olarak sıralanabilmektedir. Bu süreçte, çevre ve alan kavramlarının karıştırılması, birim kare kavrayışındaki eksiklikler, farklı temsiller arasında geçişte yaşanan zorluklar ve teknolojik araçların işlevsel hale getirilmesinde yetersizlikler bulunması gibi zorluklar yaşanabilmesi beklenmektedir.

Özellikle soyut ve çok adımlı süreçlerin görselleştirilmesinde, çözüm stratejilerinin geliştirilmesi ile matematiksel modellerin üretilmesi sağlanmakta, böylece enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmesine katkı sağlanmaktadır (Trouche, 2004). Alan ölçme öğretimi sırasında teknolojik araçların işlevselleştirilmesi hem kavramsal anlayış sürecini derinleştirmekte hem de modelleme yaklaşımıyla gerçekleştirilen öğrenme ortamlarında aktif matematiksel çalışma sürdürülmesine olanak sağlamaktadır. Böylece, matematiksel çalışma sırasında epistemolojik ve bilişsel düzlemler arası geçişleri kolaylaştıracak eylemlerin gözlemlenmesi mümkün olmaktadır. Matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemler ile ortaya koyulan alan ölçme çalışmaları enstrümantal oluşumun yanı sıra semiyotik oluşum ve söylemsel oluşum süreçlerinin de etkin ve dengeli bir şekilde gerçekleştirilmesini gerektirmektedir. Bu doğrultuda çizim, ölçüm ve alan hesaplama, şekil ve gerekçelendirme veya ölçüm ve teorik doğrulama gibi dikey düzlemlerde gerçekleşen geçişleri içeren eylemlerin gerçekleştirilmesi alan ölçme kavramına ilişkin referans MÇA'da önemli bir yer almaktadır.

2.5 İlgili Araştırmalar

2.5.1 MÇA ile İlgili Yurtiçinde Yapılan Çalışmalar

Türkiye'de MÇA Teorisi üzerine yapılan çalışmalar oldukça sınırlıdır. Ülkemizde MÇA'yı temel alarak yapılan ilk çalışma, Karahan (2021) tarafından gerçekleştirilen yüksek lisans tezidir. Bu çalışmanın amacı, 3., 4., ve 5. sınıf matematik ders kitaplarında yer alan geometrik kavramların sunumunu MÇA Teorisi çerçevesinde incelemektir. Nitel araştırma

yöntemlerinden doküman analizi kullanılarak yürütülen çalışmada, ders kitaplarındaki içerikler MÇA'nın epistemolojik ve bilişsel düzlemlerinde yer alan bileşenler ve oluşum süreçleri dikkate alınarak analiz edilmiştir. Bulgular, 3. ve 4. sınıf kitaplarında geometrik kavramların daha çok görseller aracılığıyla sezgisel olarak sunulduğu, 5. sınıf kitaplarında ise kavramların teorik yönlerine ağırlık verilerek sembolik gösterimlerin kullanıldığını ortaya koymuştur. Ayrıca, kitaplarda sıklıkla [Sem-Söy] dikey düzlemine ilişkin etkinliklerin yer aldığı, [Ens-Söy] dikey düzlemine ilişkin etkinliklerin bulunmadığı belirlenmiştir. Çalışmada, MÇA Teorisinin matematik ders kitaplarının hazırlanmasında bir analiz ve tasarım aracı olarak kullanılabileceği vurgulanmış; epistemolojik ve bilişsel düzlem bileşenlerinin dengeli bir şekilde kullanılmasını destekleyen etkinliklerin geliştirilmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

İmamoğlu vd., (2023), geometri öğretimi dersinde kullanılan sınıf içi etkinlikleri 'geometrik çalışma düzlemleri' modeline çerçevesinde incelemiştir. Bu çalışmada, nitel araştırma yöntemlerinden içerik analizi kullanılarak, ders kapsamında yürütülen sınıf içi etkinlikler analiz edilmiştir. Veriler, oluşum süreçleri ve geometri paradigmalarına göre sınıflandırılmıştır. Bulgular, sınıf içi etkinliklerin çoğunlukla Geometri II paradigmasına dayandığını ve [Sem-Söy] ile [Ens-Söy] dikey düzlemlerinde yer aldığını göstermiştir. Geometri I paradigmasına dayalı etkinliklerin eksikliği, öğretmen adaylarının farklı geometri paradigmalarına ilişkin farkındalıklarının geliştirilmesi gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu nedenle, her iki paradigmaya yönelik etkinliklerin dengeli bir biçimde sunulmasının önemli olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca, 'geometrik çalışma düzlemleri' modelinin öğretim tasarımında etkili bir araç olarak kullanılabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Deniz (2024) tarafından yürütülen doktora tezi çalışmasında, ortaokul öğrencilerinin eşitlik ve değişken kavramlarını anlamlandırma süreçleri MÇA Teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmada, öğretim deneyi yöntemi benimsenmiş ve dört öğrencinin bireysel gelişimleri ayrıntılı olarak takip edilmiştir. Bulgular, öğrencilerin eşitlik işaretini farklı şekillerde yorumladığını; terazi modelini ve değişkenlerin farklı temsil biçimlerini birer enstrüman olarak kullanmada gelişim gösterdiklerini ortaya koymuştur. Ayrıca, öğrencilerin kullandıkları tekniklerin ve kavram imajlarının zenginleştiği, eşitlik ve değişken kavramlarını uygulama süreçlerinde kişisel MÇA'larının farklılaştığı belirlenmiştir. Araştırmada, öğrencilerin kavramsal anlayışlarının geliştirilmesi için uygun MÇA'nın oluşturulması gerektiği vurgulanmış; öğretmenlerin epistemolojik düzlemde yer alan bileşenleri etkin bir şekilde kullanmalarının önemi ifade edilmiştir.

2.5.2 MÇA ile İlgili Yurtdışında Yapılan Çalışmalar

Kuzniak (2011) ile Kuzniak and Richard (2014) tarafından yürütülen çalışmalar, MÇA Teorisini tanıtmakta ve teorinin epistemolojik ve bilişsel düzlemleri arasında gerçekleşen oluşum süreçlerini ayrıntılı biçimde açıklamaktadır. Bu çalışmalar, teorik bir çerçeve sunmaları nedeniyle, MÇA'daki farklı oluşum süreçlerinin birbirleriyle etkileşiminin matematiksel bilginin inşasında kritik bir role sahip olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca, MÇA Teorisinin hem matematiksel çalışmaların hem de öğretim süreçlerinin analizinde güçlü bir teorik araç olarak kullanılabileceği belirtilmiş; öğretim süreçlerinin MÇA bileşenleri göz önünde bulundurularak tasarlanmasının önemine dikkat çekilmiştir.

Kuzniak et al. (2016b) tarafından yürütülen çalışma, sınıf içi matematiksel çalışmaları ve öğretmenin bu süreçteki rolünü incelemek amacıyla MÇA Teorisini kullanmıştır. Çalışmada, olasılık konusuna ilişkin olarak 9. ve 10. sınıflardaki iki farklı durum, MÇA'nın semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumları bağlamında değerlendirilmiştir. Çalışmada, araç ve sembollerin kullanım biçimlerinin öğrencilerin matematiksel anlam oluşturma süreçlerini doğrudan etkilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca, epistemolojik ve bilişsel düzlemde yer alan bileşenlerin uygun şekilde bütünleştirilmesiyle tam anlamıyla bir matematiksel çalışmanın gerçekleştirilebileceği ifade edilmiştir. Bu bağlamda, MÇA Teorisinin öğretim sürecindeki eksikliklerin belirlenmesinde ve sürecin işleyişinin ortaya konulmasında etkili bir analiz aracı olduğu vurgulanmaktadır.

Gómez-Chacón and Kuzniak (2015) tarafından yürütülen çalışma, teknoloji destekli öğrenme ortamlarında öğrencilerin geometrik akıl yürütme süreçlerini MÇA Teorisi çerçevesinde incelemektedir. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı araştırmada veriler, öğrencilerin dijital ortamdaki çalışmalarından elde edilmiştir. MÇA Teorisinin bileşenleri temel alınarak yapılan analizlerde, teknolojik araçlar yardımıyla kullanılan dinamik görsellerin öğrencilerin şekilsel algılarını zenginleştirdiği; enstrümantal oluşum süreçlerinin kavramsal anlama düzeylerinde etkilediği ve söylemsel bileşenlerin gerekçelendirme becerilerini şekillendirdiği bulgularına ulaşılmıştır. Çalışmada ayrıca, dijital artefaktların öğrencilerin bilgiyi yapılandırma süreçlerindeki rollerini belirlemede MÇA Teorisinin oldukça etkili bir teorik çerçeve sunduğu ifade edilmiştir.

Henríquez-Rivas and Montoya Delgadillo (2015) tarafından yürütülen çalışmada, yeni mezun iki matematik öğretmeninin geometriye ilişkin MÇA'larının analiz edilmesi amaçlanmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasının kullanıldığı çalışmada, iki öğretmenin dersleri MÇA Teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Analiz sonucunda, her iki öğretmenin de sentetik ve analitik yaklaşımları bütünleştiremedikleri; söylemsel doğrulama süreçlerinde ve ispat süreçlerinde yetersiz kaldıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğretmenlerin, öğretim süreçlerinde çoğunlukla semiyotik ve enstrümantal oluşumlara odaklandıkları, buna karşın söylemsel oluşumu büyük ölçüde ihmal ettikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Miranda et al. (2016), fonksiyon kavramının öğretimi için gerçekleştirilen öğretim uygulamalarını MÇA Teorisi çerçevesinde incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırmada, 2-3 kişilik gruplarla GeoGebra dinamik geometri yazılımı destekli üç farklı etkinlik uygulanmıştır. Etkinlikler, matematiksel görevlerin yanı sıra öğrenci görüşlerini ortaya çıkaracak şekilde tasarlanmıştır. Çalışmada ACODESA yaklaşımı benimsenerek bireysel çalışma, grup tartışması, sınıf tartışması ve öz değerlendirme aşamaları yürütülmüştür. Öğrenci yanıtları, PISA sisteminde kullanılan açık uçlu soru kodlama sistemiyle değerlendirilmiş ve MÇA bileşenlerine göre gruplandırılmıştır. Veri analizine göre, öğrencilerin görsel sorularda başarı oranının yüksek, akıl yürütme gerektiren sorularda ise düşük olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, görselleştirme ve araç kullanımında başarılı olan öğrencilerin soyut gerekçelendirme yapmakta zorlandığı sonucuna ulaşılmıştır.

Montoya Delgadillo et al. (2017) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, öğretmen adaylarının modelleme görevinin çözümü sırasında kullandıkları kişisel MÇA'nın analiz edilmesi ve öğretimin matematiksel çalışma tercihleri üzerindeki etkisinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmada, Arjantin ve Fransa'daki öğretmen adaylarının matematiksel çalışmaları karşılaştırılmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel modelleme görevine verdikleri yanıtlar, çözüm yollarına ve kullanılan matematiksel araçlara göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca, yanıtlarda hangi MÇA paradigmasının baskın olduğu belirlenmiştir. Çalışmanın sonucuna göre, modelleme başarısı ile öğrencilerin bulundukları sınıf seviyesi ve analiz alanında aldıkları ders arasında ilişki olduğu; kişisel MÇA'ların ise büyük ölçüde öğretim ortamında kullanılan uygun MÇA'nın yapısıyla şekillendiği görülmüştür.

Flores Salazar and Carrillo Lara (2019) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmenlerinin parçalı fonksiyon konusundaki matematiksel çalışmalarının analiz edilerek

kişisel MÇA'larında oluşum süreçlerinin nasıl gerçekleştiğinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışmaya, 10 matematik öğretmeninin katıldığı bir atölyeye sonrasında, 2 öğretmeninin çalışmaları ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Alan ölçümü ve parçalı fonksiyon oluşturma kavramlarını içeren matematiksel görevi GeoGebra yazılımı desteği ile çözen öğretmen adaylarının yazılı cevapları ve GeoGebra dosyaları, MÇA bileşenleri doğrultusunda incelenmiştir. Analiz sonuçlarına göre, her iki öğretmenin artefaktları etkin biçimde kullandığı ve GeoGebra dinamik geometri yazılımı sayesinde şekilsel ve cebirsel temsilleri başarılı bir şekilde birleştirdiği görülmüştür.

Flores Salazar and Almonacid Adriano (2020) tarafından yapılan çalışmanın, modelleme görevi aracılığı ile ikinci dereceden fonksiyon kavramının incelenmesi sırasında öğrencilerin kişisel MÇA'larında ortaya çıkan semiyotik ve enstrümantal oluşum süreçlerinin analiz edilmesi amaçlanmıştır. Bir öğrencinin matematiksel çalışmasının detaylı şekilde incelendiği çalışmada, a priori ve a posteriori analizler MÇA Teorisi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. Analiz sonucunda, öğrencinin görev sürecinde bulunduğu paradigmalar belirlenmiş; süreç boyunca semiyotik ve enstrümantal oluşumun birlikte gerçekleştiği, ancak gerekçelendirmelerin eksik sunulması ve yeterli çözüm önerilerinin geliştirilmemesi nedeniyle söylemsel oluşumun zayıf kaldığı sonucuna ulaşılmıştır.

Santos-Trigo et al. (2016) tarafından yapılan çalışmada, dijital teknolojilerin problem çözme sürecinde öğretmen adaylarının kişisel MÇA'larını nasıl şekillendirdiğini ve süreç içerisinde MÇA bileşenlerinin nasıl kullanıldığı incelenmiştir. 8 lise matematik öğretmeni adayı ile gerçekleştirilen çalışma, GeoGebra yazılımı kullanılarak dinamik yapı oluşturma, problem oluşturma ve çözme sürecini içeren görevler gerçekleştirilmiştir. Bireysel çalışma, grup çalışması ve sınıf tartışmalarından elde edilen veriler, MÇA bileşenleri doğrultusunda nitel analiz yöntemleri ile çözümlenmiştir. Çalışmanın bulgularına göre, dijital ortamda birçok matematiksel temsil yapılandırılmış, ilişkiler keşfedilmiş ve matematiksel ilişkiler üzerinde gerekçelendirmeler ortaya konulmuştur. Ayrıca, öğretmen adaylarının problem durumlarını yapılandırırken ve farklı çözüm stratejileri geliştirirken dijital araçlardan etkin bir şekilde yararlandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Kuzniak et al. (2016b) tarafından yapılan çalışmada, öğretmen ile öğrenci arasındaki etkileşime odaklanılarak matematiksel çalışmanın sınıf ortamında nasıl gerçekleştirildiğini analiz edilmiştir. Nitel araştırma yönteminin benimsendiği çalışmada, video kayıtları ve

transkriptlerin incelenmesi yoluyla öğretmenlerin hedeflediği uygun matematiksel çalışmalar ile öğrenciler tarafından gerçekleştirilen çalışmalar arasında belirgin farklar bulunduğu gözlemlenmiştir. Bulgular, öğrencilerin matematiksel çalışmalarının çoğunlukla [Sem-Ens] dikey düzleminde yer aldığını, buna karşılık öğretmenlerin matematiksel çalışmalarının çoğunlukla [Sem-Söy] dikey düzleminde yoğunlaştığını ortaya koymuştur. Çalışmada, bu farklılığın sınıf ortamında yanlış anlamalara ve tamamlanmamış matematiksel çalışmaların ortaya çıkmasına neden olabileceği vurgulanmıştır. Ayrıca, öğretmenlerin farkındalıklarının arttırılmasının, öğrencilerin bütüncül ve kapsamlı matematiksel çalışmalar gerçekleştirmelerini desteklenebileceği ifade edilmiştir.

Gómez-Chacón, Kuzniak and Vivier (2016) tarafından yapılan çalışmada, öğretmenin öğretim sürecindeki rolü MÇA Teorisi çerçevesinde açıklanmıştır. Bu doğrultuda, çalışma konusu MÇA'nın matematik eğitiminde kullanımı olan dördüncü MÇA sempozyumunda sunulan çalışmalar incelenmiştir. Araştırmada, öğretmenlerin epistemolojik düzlemi tasarlarken, bilişsel düzlemde yapılacak olan çalışmaları da yönlendirdiği; dolayısıyla öğretmenlerin yalnızca bilgi aktaran değil, aynı zamanda öğrenme ortamındaki bileşenleri organize eden bir yapı üstlendiği bulgusuna ulaşılmıştır. Bu durum, öğretmenlerin sınıf ortamındaki rollerini belirlemede MÇA Teorisinin önemli bir yere sahip olduğunu ve özellikle öğretmen eğitiminde MÇA Teorisine yer verilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır.

Dördüncü MÇA sempozyumunda sunulan başlıca çalışmalar incelendiğinde, Nikolantonakis and Vivier (2016) tarafından Yunanistan ve Fransa'daki ilkokul öğretmen adaylarıyla karşılaştırmalı olarak yapılan çalışmada, sayı sistemlerine ilişkin kişisel ve uygun MÇA'nın, onluk sayı tabanları tarafından yönlendirildiği sonucuna ulaşılmıştır. Henríquez-Rivas and Montoya-Delgadillo (2016)'nın çalışmasında ise ortaöğretim öğretmen eğitimine yönelik olarak Öklid geometrisindeki kavramlara ilişkin referans durumlar sunularak öğretmen adaylarının kişisel MÇA'ları analiz edilmiştir. Gómez-Chacón et al. (2016) tarafından yapılan çalışmada ise, geometrik yer kavramının öğretiminde öğretmen adaylarının hem öğrenci olarak ve hem de gelecekteki mesleki uygulamalarındaki rolleri MÇA Teorisi çerçevesinde incelemiştir. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı bu çalışmada, matematiksel araçların öğretim ortamlarındaki öneminin, enstrümantal oluşum ile gerçekleşen bilişsel süreçlerle bütünleştirilmesinden kaynaklandığı sonucuna ulaşılmıştır.

Rodd (2016) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin geometrik çalışma sırasında sezgisel düşünmeden matematiksel gerekçelendirmeye geçişindeki bilişsel süreçler incelenmektedir. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı çalışmada, MÇA Teorisi kuramsal çerçeve olarak benimsenmiştir. Matematiksel çalışma sürecine ilişkin gözlemler ve öğrencilerin çözüm süreçleri analiz edildiğinde, görsel benzerliklere dayalı gerekçelendirmeye geçiş sürecinde güven ve dikkat ortamının gerekli olduğu bulgusuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda, MÇA Teorisinin yalnızca bilişsel süreçlerin analiz edilmesinde değil, aynı zamanda duyuşsal bileşenlerin etkilerini ortaya koymada da önemli bir teorik araç olduğu belirtilmiştir.

Gómez-Chacón et al. (2016) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin teknoloji destekli ve iş birlikli çalışma ortamında gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalarda ortaya koydukları geometrik akıl yürütme süreçlerinin hem bilişsel hem de duyuşsal boyutlarda incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı çalışmada, öğrencilerin akıl yürütme süreçleri 'zig-zag' akıl yürütme metaforu ile modellenmiştir. Verilerin analizinde, MÇA Teorisinin bileşenleri ile duygu ve motivasyon gibi duyuşsal boyutlar da dikkate alınmıştır. 'Zig-zag' metaforu, öğrencilerin çözüm sürecinde dalgalı bilişsel hareketler sergilemelerini ifade etmek için kullanılmıştır. Çalışmada, bilişsel süreçlerin teknolojik araçların desteğiyle kolaylaşabildiği, ancak duygusal tıkanmalar nedeniyle aksayabildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca, iş birlikli ortamda öğrencilerin hissettikleri güven duygusunun akıl yürütme stratejilerini etkilediği belirlenmiştir. Bu doğrultuda, MÇA Teorisinin yalnızca bilişsel süreçlerin değil, duyuşsal etkileşimlerin analiz edilmesinde de etkili bir teorik araç olduğu sonucuna varılmıştır.

Elia et al. (2016) tarafından yapılan çalışmada, Türk ve Kıbrıslı lise öğrencilerin mutlak değer kavramına ilişkin matematiksel çalışmaları incelenmiş; öğrencilerin yaptıkları hata türleri ve karşılaştıkları engeller belirlenmiştir. Nicel araştırma yönteminin kullanıldığı çalışmada, öğrencilerin çoktan seçmeli ve açık uçlu sorulara verdikleri yanıtlar analiz edilerek hata türleri sınıflandırılmış ve kavramsal bilgiler kategorilere ayrılmıştır. Bulgulara göre, Türk öğrencilerin mutlak değer kavramını genellikle 'sıfırdan uzaklık' yaklaşımı ile ele aldıkları, Kıbrıslı öğrencilerin ise 'işaretsiz sayı' yaklaşımını benimsedikleri görülmüştür. Ayrıca, söylemsel düzlemde gerekçelendirme gerektiren sorularda Türk öğrencilerin daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Çalışmada, öğrencilerin matematiksel çalışmaları sırasında yaptıkları hataların çoğunlukla semiyotik ve söylemsel kökenli olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Flores-Medrano et al. (2016) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, matematik öğretmenlerinin bilgi yapısı 'Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)' modeli ile incelenmiş ve öğretmenlerin MÇA'lardaki rolleri teorik olarak ortaya konulmuştur. Çalışmada, öğretmen bilgisinin kişisel, uygun ve referans MÇA'lar arasında ilişki kuran temel bir bileşen olduğu belirtilmiş; ayrıca MTSK modelinin alt bileşenlerinin öğretmenin MÇA'larını yapılandırmada önemli bir etkiye sahip olduğu vurgulanmıştır.

Henríquez-Rivas and Montoya-Delgadillo (2016) tarafından yapılan çalışmada, bir lise öğretmeninin kişisel MÇA'sı incelenmiştir. Durum çalışmasının kullanıldığı araştırmada, öğretmenin sınıf içi uygulamaları MÇA Teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Çalışmanın bulgularına göre, öğretmenin geometri alanındaki MÇA'sının sentetik paradigma ile sınırlı kaldığı ve semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşumlar arasında yeterli etkileşim olmadığı belirlenmiştir. Araştırmada, bu oluşum süreçleri arasındaki etkileşimin ancak eğitim ortamının uygun şekilde tasarlanması ile gerçekleştirilebileceği belirtilmiştir.

Cervantes-Barraza et al. (2020) tarafından yapılan çalışmada, öğretmen adaylarının kişisel MÇA'larının tanımlanması amaçlanmıştır. Nitel araştırma yöntemi ile gerçekleştirilen çalışmanın verilerini, öğretmen adaylarının geometrik görevler sırasında ortaya koyduğu yazılı ve sözlü dokümanlar oluşturmuştur. Veriler, MÇA Teorisinin bileşenleri doğrultusunda analiz edilmiştir. Çalışma bulgularına göre, matematiksel çalışmalar sırasında semiyotik oluşumun daha sık gerçekleştiği belirlenmiştir. Ayrıca, geometri problemlerinin çözümünde kullanılan akıl yürütme süreçlerinin, Öklid geometrisi ile analitik geometri arasında anahtar role sahip olduğu ifade edilmiştir.

Morales (2018) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının alan kavramına yönelik hazırladıkları öğretim planlarının MÇA Teorisi çerçevesinde analiz edilmesi amaçlanmıştır. Vaka çalışması yönteminin kullanıldığı araştırmada, veriler öğretmen adaylarının öğretim planları, sınıf içi uygulamaları ve yansıtıcı raporları aracılığıyla toplanmıştır. Geliştirilen öğretim uygulamaları hem üniversitede öğretmen adaylarına hem de gerçek bir sınıf ortamında uygulanmış ve bu iki ortam karşılaştırılmıştır. Araştırma bulguları, öğretmen eğitimi sürecinin, öğretmen adaylarının öğretim planlarını yapılandırmalarında önemli bir rol oynadığını ortaya koymaktadır.

2.5.3 Matematiksel modelleme ile ilgili yapılan çalışmalar

Çiltaş (2011) tarafından yapılan doktora tezi çalışmasında, diziler ve seriler kavramının matematiksel modelleme yoluyla öğretilmesi sürecinin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının modelleme becerilerine ve öğrenme sürecine etkisi araştırılmıştır. Karma yöntemin kullanıldığı çalışmada, veriler modelleme testi ile toplanmıştır. Çalışmanın sonucuna göre, öğrencilerin kavrama ilişkin zorluklara sahip olduğu ve ön testte birtakım sorunlar yaşadıkları belirlenmiş, ayrıca son testte ön teste göre başarının arttığı fakat yorumlama aşamasında yine sorunlar yaşandığı belirlenmiştir.

Tekin Dede ve Bukova Güzel (2013) tarafından yapılan çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinliği tasarım süreçleri ve etkinliklere yönelik görüşlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Odak grup görüşmeleri ile toplanan verilerin analizi ile, öğrencilerin dikkatinin çekilmesi, konuların bağlamlarının bütünleştirilmesi gibi sebeplerle model oluşturma etkinliklerinin sınıflarda kullanabilecekleri sonucuna ulaşılmıştır.

Erbaş vd. (2014) tarafından yapılan çalışmada, matematik eğitiminde modelleme kavramının kuramsal temelleri ve farklı yaklaşımlar çerçevesinde nasıl değerlendirildiği ele alınmıştır. Kuramsal bir nitelik taşıyan çalışmada, modelleme sürecinin döngüsel yapısı vurgulanarak, öğrencilerin gerçek yaşam problemlerini matematiksel dile çevirme, çözme, yorumlama ve doğrulama aşamalarında çeşitli bilişsel beceriler geliştirdiği belirtilmiştir.

Hıdıroğlu ve Bukova Güzel (2016) tarafından yapılan çalışmada teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasındaki geçişlerin açıklanması amaçlanmıştır. Durum çalışması yöntemi kullanılarak yürütülen çalışmaların verileri simülasyon, deneysel ve teorik modelleme problemlerini çözerken yapılan video kayıtları, yazılı cevaplar, GeoGebra dosyaları ve gözlem notları ile toplanmıştır. Verilerin analizi ile elde edilen bulgular sonucunda öğretmen adaylarının teorik modelleme probleminde zihinsel geçişi fazla sergilediği, ancak deneysel modellemede az sayıda geçiş gerçekleştirdiği belirlenmiştir. En çok planlama, en az tahmin eylemi ile karşılaşılan modelleme sürecinde, üst bilişsel eylemler modelleme süreci boyunca düzensiz geçişleri etkilemiş ve süreci düzenlemiştir.

Çakmak Gürel (2018) tarafından yapılan doktora tezi çalışmasında, matematiksel modellemeyi öğrenme ortamının katılması sırasında öğretmen adaylarının modelleme süreçlerinin

gelişiminin incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden eylem araştırmasının kullanıldığı çalışmada iki modelleme etkinliği kullanılmış ve elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular, kısmi destekli bütüncül yaklaşıma göre hazırlanan öğrenme ortamının, modelleme sürecinde ve modelleme yeterliklerinin gelişiminde önemli gelişim gösterdiklerini ortaya koymuştur.

Kula Ünver et al. (2018) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme problemi kurma süreçlerinde dikkate aldığı faktörler incelenmiştir. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı çalışmada, öğretmen adaylarının oluşturdukları modelleme problemleri, bu problemlere verdikleri çözümler ve yansıtıcı günlükleri analiz edilmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının problem kurarken gerçek yaşamla ilişkilendirilebilirlik, anlaşılabilirlik, ilgi çekicilik ve model kurma yönünden uygunluk gibi faktörleri dikkate aldıklarını göstermiştir. Çözüm süreçlerinde ise öğretmen adaylarının matematiksel ifadeler kullanma, modelleme sürecine uygunluk, gerçek yaşamla anlamlı ilişki kurma ve farklı matematiksel kavramları kullanma gibi etkenleri önemsediği belirlenmiştir. Çalışma, öğretmen adaylarının modelleme problemleri oluşturma ve çözme süreçlerinde modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi için deneyim kazanmalarının ve yapılandırılmış geri bildirimler almalarının önemini vurgulamaktadır.

Tanju (2020) tarafından yapılan yüksek lisans tezi çalışmasında, öğretmen adaylarının matematiksel ilişkilendirme ve temsil bileşenlerinin matematiksel modelleme sürecine etkisi, matematiksel modelleme yeterlikleri, ilişkilendirme türleri ve temsil becerileri doğrultusunda incelenmiştir. Bir matematiksel modelleme etkinliğinin kullanıldığı çalışmada, veriler fonksiyon, türev ve integral kavramlarına yönelik olan beceri testi, yarı yapılandırılmış görüşme soruları ve modelleme yeterlikleri göstergeleri kullanılarak toplanmış ve betimsel analiz ile çözümlenmiştir. Araştırmanın sonuçları, en çok sözel temsil kullanan öğretmen adaylarının cebirsel gösterimde başarılı olduğunu, problemi anlama aşamasında temsil türleri arasında geçiş yapmakta zorlanıldığını ve genellikle başarısız olduklarını göstermiştir. Ayrıca, modelleme görevinde yer alan kavramlar hakkında ezbere bilgilere sahip olunduğu için beceri testinden başarısız olunduğu belirlenmiştir.

Birgin ve Öztürk (2021) tarafından yapılan sistematik tarama çalışmasında, 2010-2020 yılları arasında Türkiye'de yapılan matematiksel modelleme çalışmalarındaki eğilimin belirlenmesi amaçlanmıştır. Yayın sınıflama formu kullanılarak kodlanan veriler, tematik içerik analizi ile

analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçları ülkemizde matematiksel modellemeye olan ilginin artış gösterdiğini, çoğunlukla matematiksel modelleme sürecinin ve ortamının analiz edilmesine, katılımcıların görüş ve yeterliklerinin belirlenmesine, modellemeye dayalı öğretim ortamlarında öğrencilerin başarılarının ve modelleme becerilerinin belirlenmesine odaklanan çalışmaların yapıldığını göstermektedir.

Didiş Kabar ve İnan Tutkun (2021) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, ortaokul matematik öğretmeninin matematiksel modelleme probleminin öğrenciler ile uygulama sürecini planlama, öğretmen müdahaleleri ve değerlendirme açısından incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel durum çalışmasının benimsendiği çalışmada bir modelleme problemi sınıf ortamında uygulanmıştır. Ders planları, yarı yapılandırılmış görüşmeler ile elde edilen verilerin içerik analizi ile analiz edilmesi ile elde edilen bulgular, öğretmenlerin müdahalelerinin öğrenci düşüncelerini belirlemek amacı ile olduğunu göstermektedir. Ayrıca araştırmanın bulguları, öğretmenlerin modelleme problemlerini sınıflarda uygulamasına yönelik pratiğe ve desteğe ihtiyacı olduğunu göstermiştir.

Şahal ve Özdemir (2021) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, matematiksel modelleme eğitiminin ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modellemenin doğasına ilişkin bilgilerine katkısı, eylem araştırması yoluyla incelenmiştir. Açık uçlu anket, gözlem ve eğitim sürecinin kayıt altına alınmasıyla elde edilen veriler içerik analizi ile çözümlenmiştir. Araştırmanın bulguları, öğretmen adaylarının model ve modelleme kavramlarına ilişkin algılarının kavramların tanımlarına yönelik değiştiğini ortaya koymuştur. Böylece, çalışmada yürütülen eğitim sürecinin matematiksel modellemenin doğasına ilişkin bilgileri geliştirme noktasında olumlu bir etki sağladığı sonucuna ulaşılmıştır.

Guerrero-Ortiz (2021) tarafından yapılan çalışmada, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının dijital ortamlar için modelleme temelli matematik dersi tasarlama süreçleri incelenmiştir. Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi bileşenlerinin bütüncül olarak analiz edilebilmesine olanak sağlayan kuramsal çerçeve geliştirilmiş ve bu çerçeve deneysel bir çalışma ile örneklendirilmiştir. Nitel durum çalışmasının yürütüldüğü çalışmada, öğretmen adaylarının pedagojik, içerik ve teknolojik bilgi yapılarının nasıl ilişkilendirildiği ortaya konulan çalışmanın bulguları modelleme ve teknolojinin öğretim uygulamalarına entegrasyonun sağlanması için bilgi yapılarının ve öğretimsel kaynakların geliştirilmesine katkı sunmaktadır.

Alwast and Vorhölter (2022) tarafından yapılan çalışmada, matematiksel modelleme öğretiminde öğretmenlerin fark etme yeterliklerini ölçmeye yönelik geliştirilen video temelli bir ölçme aracının geçerlik yapısı incelenmiştir. Üç ayrı çalışmayla içerik geçerliği, unsur geçerliği ve yapı geçerliği değerlendirilmiştir. Doğrulayıcı faktör analizi ile modelleme bağlamında fark etme yeterliğini temsil eden tek faktörlü bir yapının varlığı belirlenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, geliştirilen video temelli ölçme aracının modelleme öğretiminde geçerli bir değerlendirme aracı olduğu ortaya konulmuştur.

Greefrath et al. (2022) tarafından yapılan çalışmada, öğretmen adaylarının mesleki yeterliklerinden biri olan matematiksel modellemenin pedagojik alan bilgisi incelenmiştir. Bu amaçla geliştirilen ölçme aracı ile öğretmen adaylarının matematiksel modelleme görevlerine ve müdahale stratejilerine yönelik bilgi düzeylerinin düzenlenen eğitimlerle geliştirilip geliştirilemeyeceği araştırılmıştır. Bu doğrultuda, modelleme eğitimi temelli bir eğitime katılan üç farklı grup karşılaştırılmıştır. Varyans analizi sonucunda, deney gruplarındaki öğretmen adaylarının modelleme görevleri, süreçleri ve müdahalelerine ilişkin bilgi düzeylerinde anlamlı artışlar gözlemlenmiştir. Kontrol grubunda ise pedagojik alan bilgisi düzeylerinde anlamlı bir değişim olmadığı belirlenmiştir.

2.5.4 MÇA ve matematiksel modelleme ile ilgili yapılan çalışmaların sentezi

Matematiksel modelleme ve MÇA Teorisi, birbirini tamamlayıcı biçimde öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ve bilgi üretim yollarını anlamlandırmak amacıyla kullanılabilecek kuramsal yapılar sunmaktadır. Ulusal ve uluslararası matematiksel modelleme araştırmaları, özellikle öğretmen adaylarının ve öğrencilerin modelleme sürecinde karşılaştıkları zorluklara, süreç boyunca gerçekleştirdikleri eylemlere ve öğretim programlarının yapısal sınırlılıklarına vurgu yapmaktadır. Gerçekleştirilen çalışmalarda matematiksel modelleme döngüsünün özellikle matematikselleştirme, yorumlama ve doğrulama aşamalarında bilişsel zorluklar yaşandığı belirtilmektedir. Ancak söz konusu araştırmalarda, öğrencilerin matematiksel çalışmalarının nasıl şekillendiği, hangi araçları kullandıkları, hangi temsilleri oluşturdukları ve nasıl gerekçelendirmelerde bulundukları genellikle yüzeysel şekilde ele alınmaktadır.

MÇA Teorisi ise, matematiksel çalışmaları sistematik olarak inceleyerek epistemolojik ve bilişsel düzlem üzerinde sunulan çözümlemeler ile güçlü bir analiz aracı olduğunu

göstermektedir. Bu kapsamda yapılan çalışmalar, bireylerin matematiksel kavramları hangi düzlemde yapılandırdığını, hangi oluşum yoluyla bilgi ürettiklerini detaylı şekilde ortaya koymaktadır. Bu çalışmalarda, matematiksel modelleme gibi bağlamsal ve problem çözme odaklı matematiksel görevlerin MÇA Teorisi ile incelendiği sınırlı sayıda çalışma yer almaktadır.

Matematiksel modelleme sürecinin MÇA Teorisi üzerinden ele alınarak MÇA'nın bileşenleri çerçevesinde analiz edilmesi hem teorik hem uygulamalı olarak önemli bir bakış açısı sunmaktadır. Doğası gereği gerçek yaşam durumlarını anlamayı, problem durumlarını sadeleştirmeyi, temsiller oluşturmayı, uygun araçlarla çözüm geliştirmeyi ve sonuçları bağlamsal olarak yorumlamayı içeren kapsamı bir yapıya sahip olan matematiksel modelleme süreci; bu süreçte oluşturulan temsillerin semiyotik oluşum, kullanılan dijital ve fiziksel araçların enstrümantal oluşum ve gerekçelendirme süreçlerinin ise söylemsel oluşum ile değerlendirilebileceği bir ortam sunmaktadır. Bu doğrultuda matematiksel modelleme, MÇA Teorisinin epistemolojik bileşenlerinin ve oluşum süreçlerinin doğrudan gözlemleneceği ortam sunarak, bireylerin matematiksel kavramlara ilişkin üretim süreçlerinin niteliksel olarak çözümlenmesine imkân sunmaktadır.

Türkiye'de yapılan matematiksel modelleme çalışmalarının MÇA Teorisi çerçevesinde incelendiği çalışmalara rastlanmamakla birlikte, öğretmen adaylarının modelleme sürecinde gerçekleştirdikleri matematiksel eylemleri MÇA Teorisi doğrultusunda çözümlemeye odaklanan bu çalışma hem ulusal alandaki boşluğun giderilmesine hem de uluslararası boyutta öğretmen eğitimi bağlamında kuramsal ve uygulamalı bir katkı sunmayı amaçlamaktadır.

3. YÖNTEM

3.1 Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada, matematiksel modelleme etkinliği içeren matematiksel görevlerin çözümü sırasında ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların MÇA Teorisi çerçevesinde incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmada, gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar sırasında ortaya koyulan eylemlerin derinlemesine analiz edilmesi hedeflenmiştir. Bu doğrultuda, olayların gerçekleştiği doğal ortamlarda verilere ulaşılmasına olanak tanıyan ve nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseni kullanılmıştır (Büyüköztürk ve., 2008). Durum çalışması, olay ile bağlamın kesin sınırlarla ayrılmadığı, birden fazla veri kaynağının bulunduğu ve araştırmacının kontrol edemediği olguların 'nasıl' ve 'niçin' sorularına odaklanarak derinlemesine incelenmesine olanak sağlayan bir yöntem olarak tanımlanmaktadır (Yin, 1994, s.23; Yıldırım ve Şimşek, 2021). Creswell (2013) ise durum çalışmasını, bir ya da birden fazla duruma ilişkin olarak gözlem ve görsel-işitsel materyal gibi çeşitli bilgi kaynakları kullanılarak toplanan verilerin betimlenmesi ya da temalar oluşturularak incelendiği nitel bir araştırma türü olarak ifade etmektedir. Matematiksel modelleme görevleri, katılımcıların bireysel bilgi yapılarını ve grup etkileşimlerini doğal ortamlarında inceleme gerektirdiğinden dolayı deneysel desenler yerine durum çalışması deseni tercih edilmiştir.

Durum çalışmalarında dört tür desen bulunmaktadır: bütüncül tek durum deseni, iç içe geçmiş tek durum deseni, bütüncül çoklu durum deseni, iç içe geçmiş çoklu durum deseni (Yin, 1994). Bütüncül tek durum deseninde tek bir analiz birimi bulunmaktadır. Kuramların teyit edilmesi veya çürütülmesi durumlarında, standartlara uymayan aşırı, aykırı veya kendini özgü durumlarda, daha önce çalışılmamış durumlarda bütüncül tek durum deseni kullanılabilmektedir. İç içe geçmiş tek durum deseninde, tek bir durumun içinde birden fazla analiz birimi bulunmaktadır. Bütüncül çoklu durum deseninde, tek başına düşünüldüğünde bütüncül olarak düşünülebilecek birden fazla durumun tek bir analiz birimi ile incelenmesi söz konusudur. İç içe geçmiş çoklu durum deseni, bütüncül çoklu durum desenine benzer olarak birden fazla durum içermektedir, ancak ele alınan her durum kendi içinde birden fazla analiz birimi içermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2021).

Matematiksel görevlerin çözümü sırasında ortaya koyulan eylemlerin incelenmesi amacıyla, matematiksel modellemeye uygun olarak geliştirilen farklı matematiksel görevler heterojen

gruplara ayrılan öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Çalışmada, farklı matematiksel görevlere ilişkin olarak farklı gruplarda yer alan öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların derinlemesine incelenmesi hedeflenmiştir. Bu nedenle araştırmada bütüncül çoklu durum deseni benimsenmiştir. Yıldırım ve Şimşek (2021)'e göre, bütüncül çoklu durum deseninde yer alan durumlar kendi başına bir bütün olarak ele alınmakta ve birbirleriyle karşılaştırılmaktadır. Bu doğrultuda, araştırmada farklı matematiksel görevlerde öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, 'durum' olarak ele alınmıştır. Böylece farklı görev türlerinde ortaya çıkan benzerlikler ve farklılıklar karşılıklı olarak incelenebilmiştir.

3.2 Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu, amaçlı örnekleme yöntemlerinden olan ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme yöntemi, önceden belirlenen ölçüte sahip olan kişi, olay veya nesnelerin gözlem birimi olarak kullanıldığı çalışmaların yürütülmesinde tercih edilmektedir (Büyüköztürk et al., 2008). Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilmesinin nedeni, araştırmanın amacına uygun olarak gözlemlenecek durumun, belirli niteliklere sahip olan ilköğretim matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirilecek olmasıdır. Çalışma grubuna dahil edilecek öğretmen adaylarının belirlenmesinde iki temel ölçüt belirlenmiştir: (i) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının lisans eğitimleri sırasında matematiksel modelleme içeren bir dersi tamamlamış olmaları ve (ii) matematik eğitiminde teknoloji kullanımı konusunda deneyim sahibi olmaları. Bu ölçütler, katılımcıların araştırma sürecinde sunulan matematiksel modelleme görevlerini kavrayabilmeleri ve gerekli dijital araçları etkin biçimde kullanabilmeleri için belirlenmiştir. Bu doğrultuda, 2022-2023 eğitim-öğretim yılı güz döneminde, Türkiye'nin batısında yer alan orta büyüklükteki bir üniversitenin eğitim fakültesinde öğrenim gören ve matematiksel modelleme ile teknoloji kullanımına yönelik dersleri tamamlamış olan toplam 34 ilköğretim matematik öğretmen adayı araştırmanın çalışma grubunu oluşturmuştur.

Çalışmaya, gönüllülük esasına dayalı olarak katılan öğretmen adayları lisans öğrenimleri süresince materyal tasarımı, algoritma, geometri ve cebir öğretimi derslerini tamamlamışlardır. Bu derslerin içeriği doğrultusunda, öğretmen adaylarının dinamik yazılımlar, web 2.0 araçları, blok kodlama araçları ile sanal ve somut manipülatifleri kullanma konusunda tecrübeye sahip oldukları bilinmektedir. Ayrıca, çalışmaya katılan öğretmen adayları, uygulamanın yapıldığı yarıyılda öğretmenlik uygulaması dersini almakta olup, bu kapsamda ortaokullarda haftalık

gözlem ve öğretim uygulamaları gerçekleştirmiştir. Bu durum, katılımcıların yalnızca kuramsal değil, aynı zamanda sınıf ortamıyla ilişkili deneyimlere de sahip olmalarını sağlamıştır. Çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarının her birine 'Gönüllü Katılımcı Onam Formu' dağıtılarak yapılan çalışmanın amacı hakkında bilgilendirme yapılmış ve katılımlarına dair onayları alınmıştır. Araştırma, Balıkesir Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Etik Komisyonunun E-49683895-108.01-233798 sayılı yazısı ile onaylanmıştır.

Yapılan çalışmada öğretmen adaylarının tercih edilmesinin bir diğer nedeni, modelleme öğretimine yönelik alan bilgisinin henüz gelişmekte olduğu dönemin, öğretmen adaylarının inançları, bilişsel stratejileri ve epistemolojik yönelimleri açısından esnek ve biçimlenebilir durumda olmasıdır. Bu yönüyle, matematiksel modellemeye yönelik bakış açılarını ve araç kullanımına ilişkin eğilimlerini yapılandırma aşamasında oldukları için, yapılacak analizlerin modelleme öğretiminin niteliğini etkileyebilecek bilişsel ve epistemolojik çıktıları ortaya koyma potansiyeline sahip olacağı düşünülmüştür. Ayrıca, literatürde yer alan çalışmaların, öğretmen adaylarının modelleme etkinliklerine yönelik direnç gösterdiği, kavramsal olarak zorlandığı ve strateji eksikliği yaşadığı gibi çeşitli sonuçlara ulaşması nedeniyle öğretmen adayları ile çalışılması önemli görülmektedir (Albayrak ve Çiltaş, 2017; Albayrak, 2023; Birgin ve Öztürk, 2021; Didiş Kabar ve İnan Tutkun, 2021; Ergene, 2019; Hıdıroğlu vd., 2016; Kaygısız, 2022; Kula Ünver vd., 2018; Şahal ve Özdemir, 2021; Şahin, 2019; Yenilmez ve Yıldız, 2019).

Gruplar oluşturulmadan önce, öğretmen adaylarına iki hafta süren bir matematiksel modelleme eğitimi verilmiştir. Bu eğitimde öğretmen adayları matematiğin günlük yaşamdaki yeri, model, matematiksel model, matematiksel modelleme süreci, matematiksel modelleme döngüsü hakkında bilgilendirilmiştir. Bunun yanında, Saman Balyası Problemi (Borromeo Ferri, 2007) eğitim sırasında öğretmen adaylarına matematiksel görev olarak sunulmuştur. Eğitim sonunda asıl uygulamanın gerçekleştirilebilmesi amacıyla öğretmen adayları 3 veya 4 kişilik gruplara ayrılmıştır. Bu gruplar, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme derslerindeki başarı durumları dikkate alınarak heterojen biçimde oluşturulmuş ve Grup 1, Grup 2, … şeklinde isimlendirilmiştir. Gruplarda yer alan öğretmen adayların kimlikleri gizli tutulmuş; Ö1, Ö2, … şeklinde kodlanmıştır. Gruplara ilişkin ayrıntılı bilgiler Tablo 3.1'de sunulmuştur.

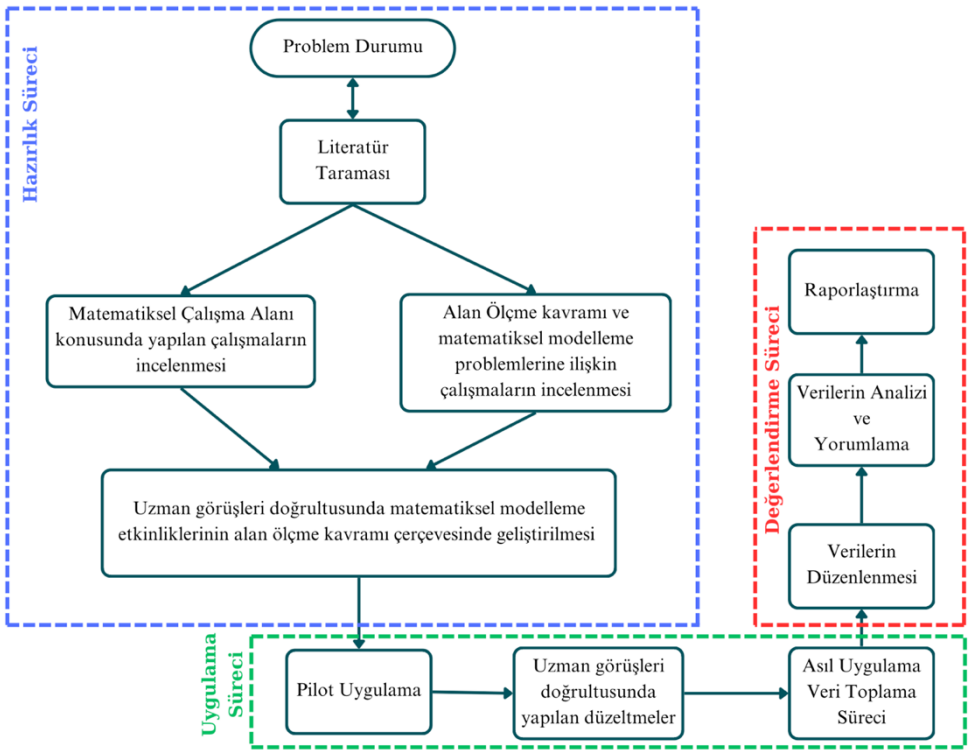
Tablo 3.1: Oluşturulan gruplara ilişkin bilgiler

Gruplar	Grup 1	Grup 2	Grup 3	Grup 4	Grup 5	Grup 6	Grup 7	Grup 8	Grup 9
Cinsiyet	3 Kadın	3 Kadın 1 Erkek	2 Kadın 2 Erkek	1 Kadın 3 Erkek	2 Kadın 2 Erkek	4 Kadın	1 Kadın 3 Erkek	4 Kadın	3 Kadın
Matematiksel Modelleme Dersi Akademik Ortalama	3.33	3	2.75	3.25	2.62	3.12	2.87	3.37	3.5

Katılımcıların daha önce aldıkları matematiksel modelleme dersine ilişkin başarı notları, 0 ile 4 arasında değişen dörtlü başarı sistemiyle değerlendirilmiştir. Bu sistemde 4 puan en yüksek başarı düzeyini temsil etmektedir. Katılımcıların modelleme sürecine dair önceki yeterliklerinin genel profili hakkında fikir vermesi amacıyla bu notlara çalışmada referans verilmiştir.

3.3 Araştırmanın Tasarlanması ve Yürütülmesi

Bu bölümde, araştırmanın planlanması, yürütülmesi ve veri toplama süreçlerinin nasıl yapılandırıldığı ayrıntılı olarak sunulmaktadır. Araştırma süreci, problem durumunun belirlenmesinden veri analizine kadar birbirini takip eden aşamalardan oluşmaktadır. Sürecin bütüncül bir bakış açısıyla anlaşılabilmesi amacıyla, Şekil 3.1'de araştırmanın tasarlanması ve yürütülmesine ilişkin genel akış şeması sunulmuştur.



Şekil 3.1: Araştırma sürecine ilişkin akış şeması

Şekil 3.1 incelendiğinde, araştırmanın üç ana süreci olduğu görülmektedir: hazırlık süreci, uygulama süreci ve değerlendirme süreci. Hazırlık süreci; problem durumunun belirlenmesi, literatür taraması yapılması ve etkinliklerin geliştirilmesi aşamalarını kapsamaktadır. Uygulama sürecinde pilot uygulama gerçekleştirilmiş ve uzman görüşleri doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Son olarak, asıl uygulama sonrasında elde edilen veriler düzenlenerek analiz edilmiş ve raporlaştırılmıştır. Bu şema, çalışmanın her aşamasının sistematik bir yaklaşımla planlandığını ve yürütüldüğünü göstermektedir.

Araştırmanın problem durumunun belirlenmesiyle birlikte, MÇA Teorisi, matematiksel modelleme problemleri ve alan ölçme kavramına ilişkin kapsamlı bir literatür taraması gerçekleştirilmiştir. Bu taramada, matematiksel çalışma esnasında ortaya konan eylemleri oluşum süreçleriyle ilişkilendiren, bu süreçler arasındaki etkileşimi inceleyen ve matematiksel modelleme sürecinin açıklanmasına yönelik olarak yapılan çalışmalara odaklanılmıştır. Literatür taraması sonucunda, matematiksel modelleme etkinliklerinin çözümü sırasında ortaya çıkan matematiksel çalışmaların MÇA Teorisi çerçevesinde derinlemesine analiz edilebileceği sonucuna ulaşılmış ve bu doğrultuda modelleme etkinliği içeren matematiksel görevlerin geliştirilmesine karar verilmiştir.

Bu çalışmada matematiksel modelleme sürecinin analizinde Blum ve Leiß (2007) tarafından önerilen modelleme döngüsünün tercih edilmesinin nedeni, bu yapının matematik eğitiminde yaygın olarak kabul görmesi ve özellikle bireylerin modelleme sürecinde gerçekleştirdiği bilişsel eylemlere odaklanmasıdır. Bu döngü, modelleme sürecini altı alt görev üzerinden sistematik bir biçimde yapılandırarak problem durumu ile matematiksel çözüm arasındaki geçişlerde bireyin gerçekleştirdiği temsil kurma, matematiksel ilişki kurma, değerlendirme ve doğrulama gibi bilişsel süreçleri görünür kılmaktadır. Bu yapı, çalışmanın amacı doğrultusunda matematiksel modelleme sürecinin MÇA Teorisinin epistemolojik bileşenleri ve oluşum süreçleri ile analiz edilmesine olanak sağlamaktadır.

MÇA Teorisinde matematiksel çalışma, sadece problem çözme sürecini değil, temsil oluşturma, süreçte kullanılan araçlarla etkileşim, matematiksel gerekçelendirme ve teorik bilgi kullanımı gibi epistemolojik ve bilişsel eylemleri kapsayan bir süreci ifade etmektedir. Bu yönüyle, matematiksel modelleme döngüsünde yer alan aşamalar, matematiksel çalışmanın bir bileşeni olarak değerlendirilebilir. Dolayısıyla, bu çalışmada MÇA Teorisi, öğretmen adaylarının sadece problem çözme eylemlerini değil, aynı zamanda kullandıkları temsilleri nasıl

oluşturduklarını, hangi araçlarla nasıl çalıştıklarını ve hangi gerekçelere dayandıklarını açıklamayı mümkün kılan bir analiz çerçevesi olarak kullanılmıştır.

Bu yönleriyle, Blum ve Leiß (2007) tarafından tanımlanan modelleme döngüsü ile MÇA Teorisi birbirini tamamlayan iki çerçeve olarak kullanılmıştır. Matematiksel modelleme döngüsü, modelleme sürecini aşamalı bir yapı olarak tanımlarken, bu işlem basamaklarında yürütülen bilişsel ve epistemolojik eylemler, MÇA Teorisinin sunduğu bileşenler ve oluşum süreçleri aracılığıyla açıklanabilir. Böylece, modelleme süreci yalnızca yapısal olarak değil, aynı zamanda kavramsal ve epistemolojik olarak analiz edilebilir hale gelmektedir.

Matematiksel modelleme etkinliklerinin geliştirilmesi sürecinde, öncelikle etkinliklerin hangi bağlamda oluşturulacağı belirlenmiştir. Çalışmanın amacı doğrultusunda, Millî Eğitim Bakanlığı Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programları (MEB, 2018, 2024) ve ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında alınan alan eğitimi ders içerikleri detaylı şekilde incelenmiştir. İnceleme sonucunda öğretmen adaylarının; Matematiğin Temelleri I-II, Matematik Tarihi, Analiz I-II-III, Soyut Matematik, Lineer Cebir I-II, Analitik Geometri, Matematik Öğretme ve Öğrenme Yaklaşımları, Ortaokul Matematik Öğretim Programı, Algoritma ve Programlama, Olasılık, Sayıların Öğretimi, Geometri ve Ölçme Öğretimi, İstatistik, Cebir, Cebir Öğretimi, İstatistik ve Olasılık Öğretimi, Matematik Öğretiminde İlişkilendirme, Matematikte Problem Çözme, Matematik Öğretiminde Kavram Yanılgıları, Mantıksal Akıl Yürütme, Matematik Felsefesi, Matematik Öğretiminde Modelleme dersleri aldıkları belirlenmiştir (Balıkesir Üniversitesi, 2022).

Yapılan analizler sonucunda, tüm öğretim seviyelerinde yer alan ve farklı geometrik şekillere yönelik çeşitli tekniklerin uygulanmasına olanak sağlayan alan ölçmeye yönelik gerçek yaşam bağlamlı problemler geliştirilmesine karar verilmiştir. Görevlerde alan ölçümüne odaklanılmasının temel nedeni, bu kavramın hem geometri öğretiminde temel bir içerik olması hem de farklı geometrik şekil ve çözüm stratejilerinin denenmesine olanak tanımasıdır. Ayrıca, alan ölçme kavramı, öğretmen adaylarının hem soyut hem somut temsilleri ilişkilendirme becerilerini geliştirme potansiyeline sahiptir. Alan ölçümü, özellikle modelleme süreçlerinde temsil oluşturma, çözüm üretme, gerekçelendirme ve doğrulama gibi çoklu bilişsel süreçleri içeren görevlerin geliştirilmesine olanak sağlamaktadır. Ayrıca, öğretmen adaylarının çeşitli varsayımlar oluşturabilmeleri ve farklı matematiksel araçları birlikte kullanabilmeleri açısından da alan ölçümü zengin bir modelleme bağlamı sunmaktadır. Bu doğrultuda geliştirilen

matematiksel görevler, MÇA Teorisinde tanımlanan oluşum süreçleriyle analiz edilmesi için uygun problem durumları oluşturmaktadır.

Matematiksel modelleme süreci, gerçek yaşam durumlarını anlamayı ve bu durumlara yönelik çözüm yolları geliştirmeyi amaçlayan süreç olarak ele alınmaktadır (Ekol and Greenop, 2023). Modelleme etkinliklerinde gerçek nesnelere yer verilmesi, süreç içerisinde bu nesnelerin farklı temsillerinin kullanılmasına olanak sağlayarak öğrencilerin kavramsal anlayışlarını derinleştirebilmektedir (Jablonski, 2023). Bu şekilde geliştirilen görevler, yalnızca hesaplama becerilerini değil, aynı zamanda düşünme, akıl yürütme ve planlama becerilerini de ortaya koymalarına imkân tanımaktadır (Herget and Torres-Skoumal, 2007).

Bu doğrultuda, gerçek bir nesneyi içeren matematiksel modelleme görevlerinin geliştirilmesi amacıyla model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri ve bu etkinliklerin problem durumu aşamasında dikkate alınması gereken prensipler göz önünde bulundurulmuştur (Bukova Güzel et al., 2016; Chamberlin and Moon, 2005; Tekin Dede ve Bukova-Güzel, 2018). Model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri ve problem durumu aşamasında dikkate alınan prensipler Tablo 3.2'de sunulmaktadır.

Tablo 3.2: Model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri ve prensipleri

Bileşenler/Prensipler		Özellikler
Tanıtıcı Makale		İlgi çekmek ve problemin bağlamı hakkında fikir sahibi olunması için yazılan bir okuma parçasından oluşmaktadır.
Hazır Oluş Soruları		Tanıtıcı makale hakkında basit anlama sorularını içermektedir.
Problem Durumu	Gerçeklik P.	Gerçek yaşamda anlamlı olabilecek durumları içermelidir.
	Model Oluşturma P.	Problem durumu bir model oluşturmayı gerektirmelidir.
	Öz Değerlendirme P.	Çözümlerin geçerli olup olmadığına grup tartışmaları ile karar verilebilmeli, yardım alma ihtiyacı duyulmamalıdır.
	Yapı Belgelendirme P.	Problemin çözümü ayrıntılı olarak ifade edilebilmelidir.
	Model Genelleme P.	Matematiksel model benzer durumlara genellenebilir, benzer durumlarda yeniden kullanılabilir olmalıdır.
	Etkili Prototip P.	Matematiksel model benzer durumlarda geçerliğini korumalıdır.
Çözümlerin Sunumu		Gerçekleştirilen çözümler sınıf ortamında tartışılmalıdır, oluşturulan modeller gerektiğinde revize edilebilir.

Tablo 3.2'de model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri ve prensipleri özetlenmektedir. Bu bileşenler, özellikle semiyotik oluşum, enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşumu

destekleyecek niteliktedir. Tanıtıcı makale, problemin bağlamına yönelik ilgi çekici bir okuma parçası sunarken; hazır oluş soruları, bu makale hakkında basit anlama sorularından oluşmaktadır. Problem durumu bileşeni, gerçeğe uygun, model oluşturmayı gerektiren, öz değerlendirme yapmayı destekleyen, çözümlerin ayrıntılı şekilde ifade edilmesine imkân tanıyan, genelleştirilebilir ve etkili prototip niteliği taşıyan özelliklere sahip olmalıdır. Çözümlerin sunumu ise sınıf ortamında tartışma ve oluşturulan modellerin gerektiğinde revize edilmesini kapsamaktadır.

Matematiksel görevlerin tasarımı sürecinde, öğretmen adaylarından beklenen matematiksel çalışma, MÇA Teorisi çerçevesinde üç oluşum sürecini harekete geçirecek şekilde yapılandırılmıştır. Matematiksel görevlerde, öncelikle referans alınabilecek bir nesnenin veya uzunluğun belirlenmesi ve bu nesneye göre diğer ölçümlerin yapılması, araç kullanımını ve teknik üretimi içerdiğinden enstrümantal oluşumun gerçekleşmesi beklenmiştir. Sonrasında, farklı geometrik şekiller üzerinden model kurma, bu şekillerin uygun temsillerini oluşturma ve alan hesaplamaları için kullanılan oranlar ve formüller, semiyotik oluşumun gerçekleşmesini gerekli kılmaktadır. Gerçekleştirilen eylemlerin gerekçelendirilmesi, elde edilen sonucun geçerliliğini tartışılması, varsayımların sorgulanması ve kullanılan çözüm yollarının gerekçelendirmesi gibi eylemler ile söylemsel oluşumun gerçekleşmesi öngörülmüştür. Bulgular bölümünde analiz edilen öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği matematiksel çalışmalar, bu çerçevede tanımlanan ‘beklenen matematiksel çalışma’ göz önünde bulundurularak ele alınmıştır. Böylece, öğretmen adaylarının stratejik tercihleri ve eylemleri, MÇA Teorisi açısından anlaşılır hale getirilmiştir.

Model oluşturma etkinliklerinin geliştirilmesinin ardından, matematiksel görevin yürütülmesine yönelik olarak yönlendirilmiş keşif soruları hazırlanmıştır. Bu soruların oluşturulmasındaki amaç, matematiksel çalışmaların modelleme döngüsünün adımlarına uygun şekilde ilerlemesini sağlamak ve MÇA Teorisinin epistemolojik düzleminde yer alan temsil, artefakt ve teorik referans bileşenlerinin kullanımını teşvik etmektir. Bu doğrultuda, matematiksel modelleme döngüsünün altı basamağı ve MÇA bileşenleri dikkate alınarak yönlendirilmiş keşif soruları geliştirilmiştir. Yönlendirilmiş keşif soruları hazırlanırken, matematiksel modelleme döngüsünün ‘problemi anlama ve basitleştirme’ aşamaları ile ‘yorumlama ve doğrulama’ aşamalarının içerik ve zamanlama açısından birbirine yakın süreçler barındırdığı göz önünde bulundurulmuş; bu nedenle ilgili sorular birlikte ele alınmıştır. Her problem durumu için, öncelikle problemin anlaşılması ve bağlamının kavranmasına

yönelik olarak hazır oluş soruları hazırlanmıştır. Bu sorular, öğretmen adaylarının problem durumu ile zihinsel bağlantı kurmalarını ve gerekli ön bilgilerini etkinleştirmelerini sağlamayı amaçlamaktadır. Hazır oluş sorularının ardından, problemin çözümüne yönelik eylemleri harekete geçirecek ve süreci yönlendirecek nitelikte yönlendirilmiş keşif soruları oluşturulmuştur. Yönlendirilmiş keşif soruları, özellikle temsil bileşeninde görselleştirme, artefakt bileşeninde araç kullanımı ve teorik referans bileşeninde kavramsal tanım ve teorem ilişkilerini harekete geçirecek şekilde yapılandırılmıştır.

Matematiksel görevlerin ve yönlendirilmiş keşif sorularının geliştirilme sürecinde matematik eğitimi alanında doktora derecesine sahip üç öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarının alan ölçme kavramı bağlamında çeşitli matematiksel çalışmalar yapabilmelerini destekleyecek 10 adet matematiksel modelleme etkinliği geliştirilmiştir. Uzman görüşleri, görevlerin pedagojik uygunluğu, kavramsal doğruluğu ve MÇA bileşenlerine entegrasyonu açısından değerlendirilmiştir. Matematiksel görevlerin içeriği, yapısı ve bağlamı göz önünde bulundurularak Stadyum Görevi, Basketbol Görevi, Mostar Görevi ve Epoksi Görevinin kullanılmasına karar verilmiştir. Geliştirilen matematiksel görevler ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yaprakları Ek A'da sunulmuştur.

3.3.1 Matematiksel Görevlerin Geliştirilme Süreçleri

3.3.1.1 Stadyum Görevinin Geliştirilme Süreci

Stadyum görevinin geliştirilme süreci, model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri ve prensipleri dikkate alınarak yapılandırılmıştır. Göreve yönelik dikkat çekici ve bağlamsal bir giriş sağlamak amacıyla, internet kaynaklarından (Enerjisa, 2022.; Galatasaray Spor Kulübü, 2022) elde edilen bilgiler doğrultusunda ilgi uyandırıcı bir metin hazırlanmıştır. Bu metni anlamaya yönelik basit anlama sorularını içeren hazırlık soruları çalışma kağıtlarında sunulmuştur. Gerçeklik prensibine uygun olarak, stadyumun çatısına yerleştirilen güneş panellerinin kapladığı alanın belirlenmesi gibi gerçek yaşamla anlamlı bağlar kurulabilecek bir problem durumu geliştirilmiştir. Model oluşturma prensibine uygun olarak, geometrik şekiller dikkate alınarak matematiksel model üretilebileceği düşünülmüştür. Öz değerlendirme prensibi doğrultusunda, öğretmen adaylarının yardıma ihtiyaç duymadan grup çalışması yoluyla fikir alışverişi yapmaları, çözümlerin geçerliliğini tartışmaları ve gerçek yaşam bağlamına uygunluklarını değerlendirmeleri amaçlanmıştır. Sürecin ayrıntılı bir şekilde belgelenmesi için öğretmen adaylarının çözüm sürecini yüksek sesle ifade etmeleri ve kamera ile kaydedilmeleri

sağlanmıştır. Ayrıca, çözüm sürecini yazılı olarak raporlamaları da istenmiştir. Modelin benzer durumlara genellenebilirliği ve geçerliliği dikkate alınarak, geliştirilen modellerin farklı bağlamlarda da örnek teşkil edebileceği düşünülmüştür. Etkinlik sonunda ise, sınıf ortamında bir tartışma ortamı oluşturularak her grubun matematiksel çalışmalarını sunmaları sağlanmıştır. Bu görevin yapılandırma süreci, öğretmen adaylarının hem modelleme yeterliklerini hem de işbirlikçi düşünme ve değerlendirme becerilerini geliştirmeyi amaçlamaktadır.

Stadyum görevinin oluşturulmasının ardından yönlendirilmiş keşif sorularının oluşturulmasına geçilmiştir. Bu doğrultuda, problemde yer alan ifadelerin fark edilmesi, problemin anlaşılması ve problem metni ile zihinsel bir ilişki kurulması amacıyla öğretmen adaylarına iki hazır oluş sorusu yöneltilmiştir:

- "Spor kulübü ve enerji şirketi arasında nasıl bir anlaşma yapılmıştır?"
- "Yapılan bu anlaşmanın amacı nedir?"

Bu soruların temel amacı, öğretmen adaylarının problem durumunu içeren tanıtıcı makale üzerine düşünmelerini sağlamak ve problem bağlamına yönelik ilgilerini arttırmaktır. Böylece, problem durumuna geçiş öncesinde adayların kavramsal hazırlıklarının desteklenmesi hedeflenmiştir. Bu yaklaşım, matematiksel modelleme sürecinde gerçek yaşam bağlamının etkin şekilde kavranmasında katkıda bulunmaktadır.

Matematiksel modelleme döngüsünün problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında, problem durumunu anlaşılıp anlaşılmadığını belirlemek amacıyla öğretmen adaylarının problem durumunu kendi cümleleriyle ifade etmesi beklenmektedir. Bu aşamalar, probleme ilişkin kavramsal temellerin oluşturulmasını ve çözüm stratejilerinin belirlenmesini sağlamaktadır (Blum and Leiß, 2007). Ayrıca, problemde yer alan gerekli ve gereksiz verilerin ayırt edilmesi ve problem durumunun daha basit bir forma indirgenmesi önem taşımaktadır. Problemin çözüm sürecine yönelik yapılan ön analiz doğrultusunda, problemin çözümü sırasında kullanılabilecek bir görselin dinamik geometri yazılımına aktarılması ve çözüm için izlenecek adımların planlanması da sürecin hedefleri arasındadır. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarına yöneltilen 3-10. sorular ile aşağıdaki kazanımlar hedeflenmiştir:

- Problem durumunun anlaşılması,

- Çözüm sürecine ilişkin basitleştirme işlemleri üzerine düşünülmesi,
- Problemin çözümünde kullanılabilecek matematiksel kavramlara yönelik *temsil*, *artefakt, teorik referans* gibi bileşenlerin farkına varılması,
- Süreç içerisinde bu bileşenlerin işlevsel olarak kullanılabileceğinin fark edilmesi.

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarının ardından, problemde yer alan matematiksel kavramların fark edilmesi ve bu kavramların kullanılmasıyla problemin matematikselleştirilmesi beklenmektedir. Bu doğrultuda, 11-14. sorular ile öğretmen adaylarının problem durumundaki matematiksel kavramları tanımaları ve bu kavramları kullanarak problem durumunu matematiksel bir ifadeye dönüştürmeleri amaçlanmıştır. Böylece, problemin çözümüne yönelik uygun bir matematiksel model oluşturulması hedeflenmektedir. Bu aşamada yer alan yönlendirilmiş keşif soruları, MÇA Teorisinde temsillerin görselleştirilmesi ve artefakt kullanımı ile semiyotik oluşum ve enstrümantal oluşum süreçlerini teşvik etmektedir.

Oluşturulan matematiksel modelin, çeşitli stratejiler kullanılarak ve matematiksel işlemler gerçekleştirilerek çözümlenmesi ve bu yolla matematiksel sonuçlara ulaşılması beklenmektedir. Bu doğrultuda, 15-17. sorular ile öğretmen adaylarının probleme ilişkin matematiksel işlemler gerçekleştirmeleri ve çözüm sürecini sonuçlandırmaları hedeflenmiştir. Bu aşamada sunulan sorular, öğretmen adaylarının oluşum süreçlerini gerçekleştirecek eylemler sergilemelerini teşvik etmektedir.

Matematiksel modelin çözümüyle elde edilen matematiksel sonuçların, gerçek yaşam bağlamında yorumlanması; matematiksel sonuçların geçerliliği hakkında çıkarım yapılması, farklı sonuçlarla karşılaştırılarak veya çeşitli araştırmalarla doğruluğunun değerlendirilmesi ve elde edilen sonuçların paylaşılması amaçlanmaktadır. Bu kapsamda, 18 ve 19. sorular ile sürecin gözden geçirilmesi, sonuçların günlük yaşam bağlamıyla ilişkilendirilmesi ve süreç boyunca yapılan çalışmaların gerekçelendirilmesi hedeflenmiştir.

3.3.1.1.1 Stadyum Görevine İlişkin Uygun MÇA

Stadyum görevi, çevresel sürdürülebilirlik bağlamında matematiksel modelleme ile geometrik düşünmeyi bütünleştiren bir problem durumu olarak tasarlanmıştır. Öğretmen adaylarının gerçek yaşamda karşılaşabilecekleri fiziksel bir yapının analizini yaparak, ölçme ve geometri

odaklı matematiksel modeller geliştirmeleri beklenmektedir. Bu görev yalnızca alan hesabını değil, problem çözme ve modelleme yoluyla öğretmen adaylarının kişisel MÇA'larının ortaya çıkarılmasını sağlayacak şekilde yapılandırılmıştır. Problemin çok adımlı çözüm yapısı ve buna uygun şekilde oluşturulan yönlendirilmiş keşif sorularıyla anlamlı matematiksel eylemlerin ortaya konulabilmesi amaçlanmıştır. Böylece, öğretmen adaylarının hem keşif hem de gerekçelendirme yapmalarına olanak sağlanmıştır.

Stadyum görevi, yalnızca alan hesabının yapılabilmesi için gerçekleştirilen matematiksel işlemleri değil, öğretmen adaylarının problem bağlamını anlamlandırmalarını, sadeleştirmelerini, temsiller oluşturmalarını ve çözüm stratejileri geliştirmelerini gereken bir yapıda geliştirilmiştir. Bu özellik, Henríquez-Rivas ve arkadaşları (2022) tarafından belirtilen, görevlerin yalnızca teknik becerilere değil, aynı zamanda matematiksel çalışmanın epistemolojik yönünün ortaya konulması ifadesiyle örtüşmektedir.

Görevde yer alan yönlendirilmiş keşif soruları, MÇA Teorisinin üç oluşum sürecinin gerçekleştirilerek birbirini tamamlayacak eylemlerin ortaya çıkarılmasını hedeflemektedir. Görsel materyalin geometrik olarak yorumlanması, dinamik geometri yazılımlarının kullanılması ve elde edilen çözümün gerekçelendirilmesi ile oluşum süreçlerinin ortaya konulması beklenmektedir. Böylece, farklı oluşum süreçlerinin gerçekleştirilmesi ile dikey düzlemler arasındaki dolaşım mümkün hale gelmektedir.

Matematiksel görevin yapısı, kavrama ilişkin olarak tanımlanan referans MÇA temel alınarak geliştirilmiştir. Matematiksel modelleme, ölçme ve temsil biçimleri gibi referans MÇA'nın bileşenleri dikkate alınarak yapılandırılan matematiksel görev, referans MÇA ile kişisel MÇA arasında tutarlı bir köprü kurulmasını amaçlamaktadır (Henríquez-Rivas et al., 2022). Görevde yer alan yönlendirilmiş keşif soruları ile öğretmen adaylarının aktif bir şekilde sürece dahil olmaları hedeflenmektedir. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarından problem durumunun anlaşılması, stratejilerin geliştirilmesi, artefaktların kullanılması ve çözüm sürecinin gerekçelendirilmesi beklenmektedir.

Matematiksel görevin referans MÇA'da yer alan ölçme, geometri, oran-orantı gibi matematiksel konularla doğrudan ilişkili olması ve gerçek yaşam durumuyla bağlantılı olması, matematiksel çalışmanın hem kuramsal hem toplumsal düzlemde anlamlandırılmasını sağlamaktadır. Ayrıca, görevin referans MÇA temel alınarak açık bir şekilde yapılandırılması

ve görev öncesi beklentilerin öğretmen adaylarına belirtilmesiyle sürecin sesli düşünme, video kaydı ve yazılı raporlarla kayıt altına alınması, öğretmen adaylarının kişisel MÇA'larının analizini mümkün hale getirmektedir. Bunun yanı sıra, modelleme döngüsü, model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri ve prensipleri, öz değerlendirme, grup çalışması, artefakt ve temsil kullanımı gibi kuramsal ve pedagojik ilkelere dayanan matematiksel görevin yapısı, Henríquez-Rivas ve arkadaşları (2022)'nın bağlama özgü esnek ve gerekçeli öğretim tasarımı anlayışı ile örtüşmektedir.

3.3.1.1.2 Stadyum Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma

Stadyum görevinde öğretmen adaylarından, fotoğrafta görülen güneş panellerinin kapladığı alanı hesaplamaları beklenmektedir. Fotoğrafta yer alan panellerin gerçek ölçüleri problem metninde verilmediğinden dolayı, çözüm sürecinin ölçekleme yöntemi ile sürdürülmesi beklenmektedir. Bu sebeple, fotoğraf üzerinde yer alan otomobil gibi nesneler, bilinen yaklaşık uzunlukları dikkate alınarak referans nesne olarak kullanılabilir. Böylece öğretmen adayları, görüntüdeki nesneler arasında orantısal ilişkiler kurarak panel boyutlarını tahmin edebilir ve bu tahminlerden yola çıkarak toplam alanın hesaplanmasına ilişkin eylemler gerçekleştirebilir.

Bu eylemler epistemolojik düzlemde yer alan bileşenler açısından incelendiğinde, üç temel bileşenin de kullanılması beklenmektedir. Fotoğrafın kendisi ve öğretmen adaylarının çizim veya ölçümler ile elde ettiği görseller ile temsil bileşeni; ölçekleme sürecinde kullanılan cetvel ve GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile artefakt; orantı, benzerlik ve alan hesaplama kavramları ile teorik referanslar bileşenin kullanılması beklenmektedir.

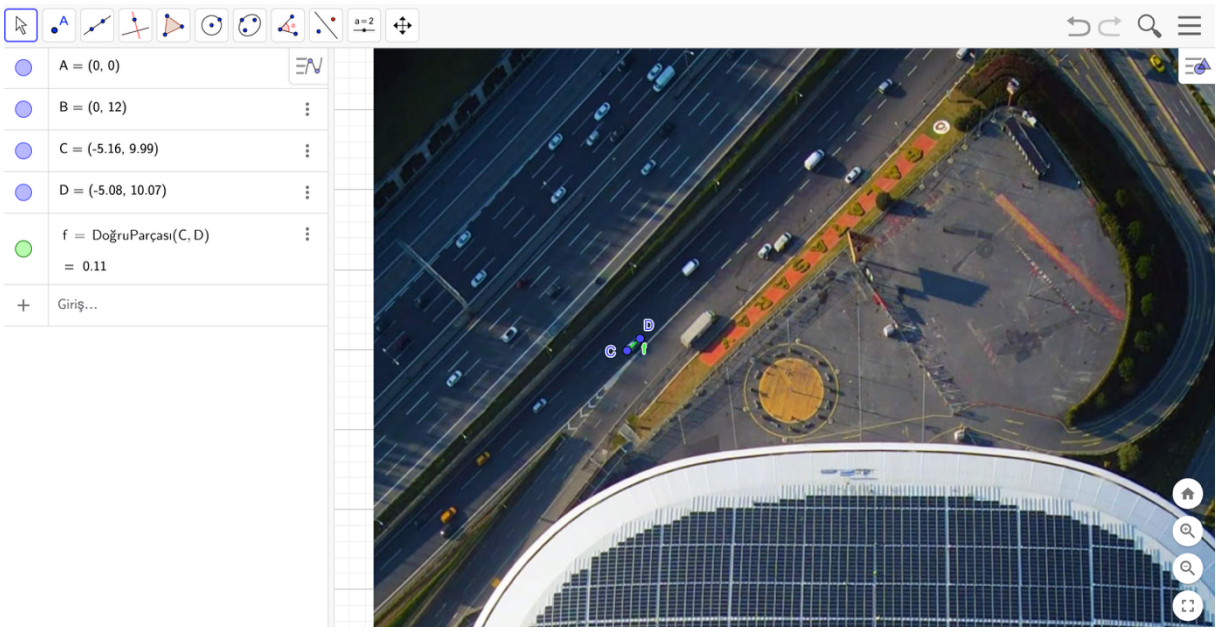
Bunun yanı sıra, öğretmen adaylarının farklı bilişsel süreçleri harekete geçirmesi beklenmektedir. Güneş panellerinin ve otomobilin uzunluğunu temsil eden doğru parçasının oluşturulmasıyla görselleştirme süreci; ölçek oranının belirlenmesi için doğru parçalarının, geometrik şekillerin veya matematiksel nesnelerin inşa edilmesiyle inşa etme süreci; gerçekleştirilen eylemlerin gerekçelendirilmesi, yapılan hesaplamaların doğruluğunun kontrol edilmesiyle ispat sürecinin gerçekleştirilmesi beklenmektedir.

Matematiksel görevin çözümü sırasında fotoğrafın ölçümler için bir görselleştirme aracı olarak kullanılmasıyla semiyotik oluşumun, dinamik geometri yazılımı GeoGebra gibi araçların matematiksel nesneleri inşa etme süreçlerinde kullanılmasıyla enstrümantal oluşumun; gerçekleştirilen eylemlerin matematiksel özelliklere dayandırılarak gerekçelendirilmesiyle

söylemsel oluşumun gerçekleştirilmesi beklenmektedir. Bu yönleriyle Stadyum görevi, üç oluşum sürecini harekete geçirme potansiyeli taşımaktadır.

Stadyum görevi için öngörülen potansiyel matematiksel çalışma, öğretmen adaylarının görselleştirme, orantısal akıl yürütme ve alan hesaplamalarını kullanarak sürecin anlamlı bir şekilde yürütülmesine olanak sağlamaktadır. Bu doğrultuda gerçekleştirilen örnek çözüm sürecine aşağıda yer verilmiştir:

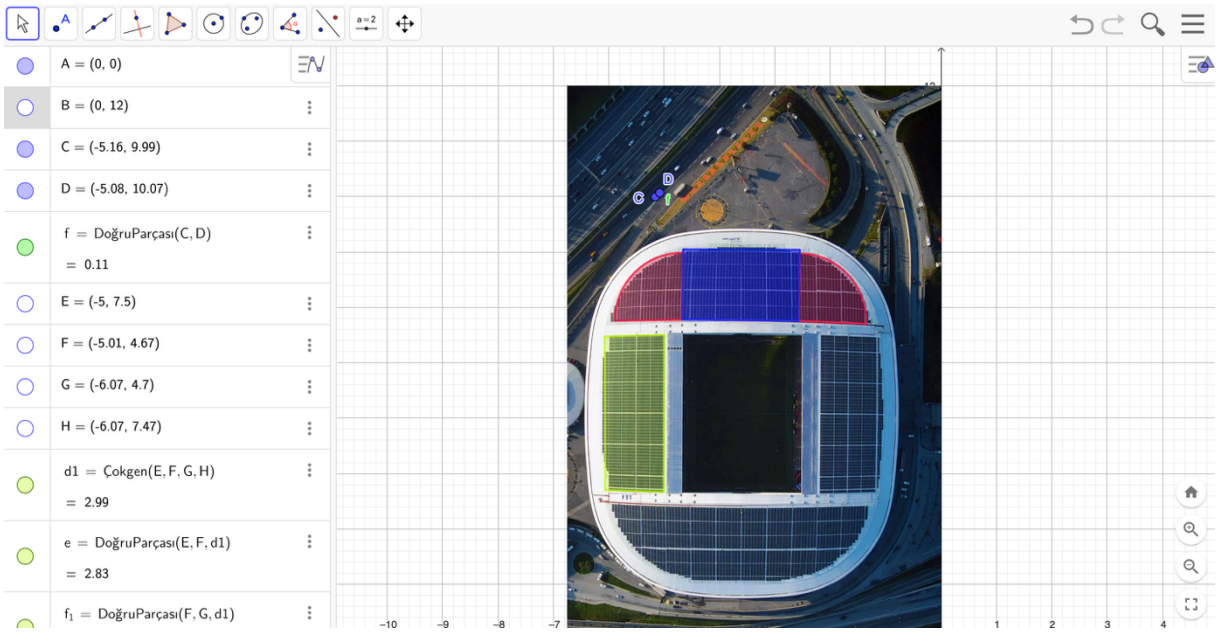
- Bir otomobilin uzunluğu 4,5 metre olarak varsayılır.
- Fotoğrafta yer alan bir otomobilin görüntü uzunluğu GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla belirlenir (Şekil 3.2). Aracın uzunluğunun belirlenmesi için doğru parçası oluşturma aracı, uzunluk ölçme aracı, cebir penceresi kullanılabilir.



Şekil 3.2: Referans nesne uzunluğunun belirlenmesi – Stadyum görevi

- Referans nesnenin fotoğraftaki uzunluğu 0.11 birim olarak belirlenir. Bu uzunluğun gerçek yaşamdaki karşılığı 4,5 metre olarak kabul edilir. Fotoğraftaki uzunluk ölçüsü ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüsü arasında bir oran oluşturulur.
- Güneş panellerine ait verilerin elde edilmesi için gerekli matematiksel temsillere ilişkin inşalar yapılır (Şekil 3.3). Matematiksel şekillerin inşaları yapılırken alanı hesaplanması

bilinen geometrik şekillerden yararlanılabilir. Bu noktada şekil dışında kalan panel miktarı, şekil içindeki boşluklar göz önünde bulundurularak ihmal edilebilir.



Şekil 3.3: Matematiksel temsillerin oluşturulması – Stadyum görevi

- Oluşturulan geometrik şekillerin alan ölçüleri cebir penceresi kullanılarak belirlenir. Stadyumun çatısında yer alan güneş panellerinin simetrik yapısı göz önünde bulundurularak hesaplanan alanın 2 katının alınması gerektiği göz önünde bulundurulur.
- Oluşturulan geometrik şekillerin toplam alanının 8,04 birim kare olduğu, bu doğrultuda toplam güneş paneli alanının 16,08 birim kare olduğu sonucuna ulaşılır.
- Seçilen referans nesnenin fotoğraftaki uzunluk ölçüsü ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüsü arasındaki oran kullanılarak 'benzerlik oranının karesi alanlar oranına eşittir' teoremi doğrultusunda yapılan işlemler sonucunda stadyum üzerinde yer alan güneş panellerinin alanının yaklaşık 27 bin metrekare olduğu sonucuna ulaşılır.

3.3.1.2 Basketbol Görevinin Geliştirilme Süreci

Basketbol sahasının renklendirilmesi problem durumu, model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri ve prensipleri dikkate alınarak matematiksel düşünmenin teşvik edildiği bir modelleme süreci olarak yapılandırılmıştır. Giriş metni, Türkiye Basketbol Federasyonunun resmi yönergesine dayanan gerçek bir bağlam sunarak, problemi ilgi çekici ve anlamlı bir hale getirmektedir. Hazırlık soruları aracılığıyla öğrencilerin yönergeyi anlama düzeylerinin kontrol

edilmesi ve problemde yer alan ifadelerin anlaşılıp anlaşılmadığının değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Gerçeklik ilkesine uygun olarak, salon zemininin renklendirilmesi gibi pratik bir ihtiyaca dayanılmasıyla, matematiksel bilginin günlük yaşamla ilişkilendirilmesi sağlanmıştır. Model oluşturma ilkesi doğrultusunda, farklı bölgelerin geometrik temsillerinden yola çıkılarak alan hesaplamalarının yapılması ve bu hesaplamalarla bir teklif hazırlanması beklenmektedir. Öz değerlendirme ilkesine göre, öğrencilerin grup çalışması içinde fikir alışverişi yaparak çözüm yollarını tartışmaları ve gerçek yaşam bağlamına uygunluklarını sorgulaması amaçlanmıştır. Ayrıca, çözüm sürecinin ayrıntılı şekilde ifade edilip yazılı hale getirilmesi istenmiştir. Modelin genellenebilirliği, benzer spor salonlarının zeminlerinde de bu tür hesaplamaların uygulanabilirliği ile ilişkilendirilmiştir. Etkin bir prototip oluşturmak adına, öğretmen adayları tarafından geliştirilen matematiksel modelin farklı salon koşullarında da geçerliliğini koruyup korumadığının tartışılması amaçlanmıştır. Son olarak, sınıf ortamında yapılacak sunum ve tartışmalarla farklı çözüm yollarının karşılaştırılması ve modelleme sürecinin farklı aşamalarının bütüncül şekilde değerlendirilmesi planlanmıştır. Bu görevin yapılandırma süreci, öğretmen adaylarının hem modelleme yeterliklerini hem de işbirlikçi düşünme ve değerlendirme becerilerini geliştirmeyi amaçlamaktadır.

Basketbol görevinin geliştirilmesinin ardından, öğretmen adaylarının problem bağlamını kavramaları ve matematiksel modelleme sürecine bilişsel olarak hazırlanmalarını sağlamak amacıyla yönlendirilmiş keşif soruları yapılandırılmıştır. İlk üç soru, öğretmen adaylarının gerçek yaşam bağlamına ilişkin ön bilgilerini harekete geçirmeyi ve Türkiye Basketbol Federasyonunun Salon Standartları ve Güvenlik Talimatı (Türkiye Basketbol Federasyonu, 2022) doğrultusunda belirlenen ölçü ve kuralları fark etmelerini hedeflemektedir. Bu sorular, probleme ilişkin kavramsal temelin oluşturulmasına katkı sağlamakta ve bağlamın anlaşılmasını amaçlamaktadır.

Matematiksel modelleme döngüsünün problemi anlama ve basitleştirme aşamalarına yönelik olarak, 4-6. sorular oluşturulmuştur. Bu sorular aracılığıyla öğretmen adaylarının problem durumunu kendi ifadeleriyle açıklamaları, problemde yer alan değişkenleri ve sınırlılıkları fark etmeleri ve çözüm süreci için gerekli varsayımları oluşturmaları amaçlanmaktadır. Böylece, problem karmaşık bir bağlamdan soyutlanarak çözüm için uygun bir forma dönüştürülmektedir.

7-11. sorular, modelleme sürecinin matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarını desteklemek amacıyla oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarından, kullanılabilecek

problem çözme stratejilerini, teknolojik araçları, uygun geometrik şekilleri ve temsil biçimlerini belirlemeleri istenmektedir. Bu aşamada sorular, adayların temsil, artefakt ve teorik referans bileşenleriyle etkileşim kurmalarını desteklemektedir. Ayrıca semiyotik ve enstrümantal oluşum süreçlerinin tetiklenmesi hedeflenmektedir.

12-13. sorular, modelleme sürecinin yorumlama ve doğrulama aşamasının gerçekleştirilmesine yönelik olarak oluşturulmuştur. Bu sorularla öğretmen adaylarının elde ettikleri matematiksel sonuçları bağlamla ilişkilendirmeleri, sonuçların anlamlılığını sorgulamaları ve modelleme süreci üzerine düşünmelerini teşvik etmeleri amaçlanmıştır. Bu adım, modelin bağlamla yeniden bütünleştirilmesine olanak sağlamakta ve söylemsel oluşumu desteklemektedir.

Son olarak, 14. soru öğretmen adaylarının sürece yönelik eleştirel düşünmelerini ve tasarım odaklı düşünme becerilerini geliştirmeyi amaçlamaktadır. Öğretmen adaylarından problem durumunu iyileştirmeye yönelik öneriler geliştirmeleri istenerek, modelleme sürecine ilişkin pedagojik ve yapısal farkındalıklarının derinleştirilmesi hedeflenmiştir.

Bu yönlendirilmiş keşif sorularının geliştirilmesi ile MÇA Teorisi çerçevesinde hem oluşum süreçlerinin hem de epistemolojik düzlemin bileşenlerinin harekete geçirilmesi, bunun yanında modelleme sürecinin aşamalarının sistematik bir şekilde desteklenmesi amaçlanmıştır.

3.3.1.2.1 Basketbol Görevine İlişkin Uygun MÇA

Basketbol sahasının renklendirilmesine yönelik olarak geliştirilen matematiksel görev, geometrik şekillerin temsil edilmesine dayanarak matematiksel modelleme ile geometrik düşünmeyi bir arada ele alan bir bağlam doğrultusunda geliştirilmiştir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının, gerçek yaşamda karşılaşabilecekleri fiziksel yapıların analizini yaparak, geometrik ve ölçmeye dayalı matematiksel modeller geliştirmeleri beklenmektedir. Bu görev yalnızca alan hesabını değil, problem çözme ve modelleme yoluyla öğretmen adaylarının kişisel MÇA'larının ortaya çıkarılmasını sağlayacak şekilde yapılandırılmıştır. Problemin çok adımlı çözüm yapısı ve buna uygun şekilde oluşturulan yönlendirilmiş keşif sorularıyla anlamlı matematiksel eylemlerin ortaya konulabilmesi amaçlanmıştır.

Basketbol görevi, Türkiye Basketbol Federasyonunun resmi yönergesine dayalı gerçek bir bağlam sunarak matematiğin kuramsal boyutunu günlük yaşamla bütünleştirmektedir. Alan ölçümü, geometrik şekillerin tanımlanması, temsil biçimlerinin seçilmesi ve modelleme

çıktılarının yorumlanması gibi çoklu beceriler içeren görev, teknik bilginin yanı sıra kavramsal analiz ve eleştirel düşünmeyi de gerektirmektedir. Böylece uygun MÇA'nın gerçek yaşam bağlamında anlamlı matematiksel eylemler üretme amacına ulaşılması hedeflenmiştir (Henríquez-Rivas et al., 2022).

Matematiksel görev kapsamında hazırlanan yönlendirilmiş keşif soruları, oluşum süreçleri arasındaki geçişi desteklemeyi amaçlamaktadır. Basketbol sahasında yer alan farklı bölgelerin geometrik şekillerle temsil edilmesi ve temsiller arasındaki dönüşümün sağlanmasıyla semiyotik oluşum; dinamik geometri yazılımları gibi teknolojik araçların kullanılmasıyla geometrik şekillerin inşası ve hesaplamaların desteklenmesiyle enstrümantal oluşum; matematiksel sonuçların gerçek yaşam bağlamıyla ilişkilendirilmesi, modelleme sürecine ilişkin öz değerlendirme ve gerekçelendirilme yapılması söylemsel oluşum sürecinin ortaya konulması beklenmektedir. Böylece, üç oluşum sürecinin birbiri arasındaki etkileşimin gerçekleşmesi hedeflenmiştir.

Görevde kullanılan basketbol saha ölçülerine ve kurallarına ilişkin standartların doğrudan kurumsal referans belgelerden alınmasıyla öğretmen adaylarının kurumsal bilgileri yapılandırabilecekleri uygun bir epistemolojik düzlemin oluşturulması hedeflenmiştir. Böylece, alan hesaplanmasının yanı sıra problem durumunu yeniden formüle etmeleri, varsayımlar oluşturmaları, stratejileri belirlemeleri ve matematiksel çalışma sürecini değerlendirmeleri beklenmektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının süreç içerisinde görevin aktif bir uygulayıcısı olduğunu göstermektedir (Henríquez-Rivas et al., 2022).

Matematiksel görevde problemin bağlamı ve yönlendirilmiş keşif sorularının net bir şekilde anlamlandırılması ile birlikte öğretmen adaylarının yaşadığı süreci sesli olarak düşünmeleri, çalışma yapraklarına ve grup raporlarına yazdıkları yanıtlar ile yazılı olarak ifade etmeleri, tartışma ortamında fikirlerini ifade etmeleri ve öz değerlendirme gerçekleştirmeleri MÇA'nın gözlemlenmesini ve potansiyel MÇA yapısı ile karşılaştırılmasına olanak sağlamaktadır.

Basketbol görevinde doğrudan basketbol federasyonunun yönergesine dayalı olarak yapılandırılan problem bağlamı, öğretim programları ve ders kitaplarındaki içeriklerle tutarlı bir çerçeve sunmaktadır. Böylece, öğretmen adaylarının yalnızca matematiksel bilgiye değil, aynı zamanda matematiksel kavramların kuramsal yönleri ile ilişki kurmalarının sağlanması amaçlanmıştır. Geometriye ilişkin bilgi ve becerilerin yanı sıra, modelleme, ölçme, temsil

biçimleri ve yorumlama gibi becerileri de harekete geçirmeyi amaçlayan basketbol görevi, farklı gerçek yaşam durumlarına uyarlanabilir yapısı sayesinde öğretmen adaylarının matematiksel çalışmalarına ışık tutabilecek niteliktedir.

Basketbol görevinde gerçekleştirilecek olan matematiksel çalışmalarda epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanılması ve teknolojik araçlar, temsil biçimleri ve teorik referansların etkin kullanımı ile bilişsel süreçleri tetiklemesi gibi eylemler, matematiksel düşünmenin gözlemlenebilmesine olanak sağlamaktadır. Böylece, öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerinin yanı sıra matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirdikleri sürecin detaylı olarak incelenmesi sağlanabilmektedir.

3.3.1.2.2 Basketbol Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma

Basketbol görevinde öğretmen adaylarından, bir basketbol sahasının farklı bölgelerini hem renklendirmeleri hem de her bir bölgenin kapladığı alanın hesaplanması beklenmektedir. Matematiksel görevde, MÇA'nın temsil bileşeni kullanılarak bir basketbol sahasının görseli üzerinden bölgelerin tanımlanması beklenmektedir. Tanımlanan bölgelere ait verilerin cetvel veya dinamik geometri yazılımında yer alan koordinat sistemi ve uzunluk ölçme aracı gibi artefaktların kullanılmasıyla belirlenebileceği öngörülmektedir. Bu süreçte kullanılması öngörülen teorik referanslar ise geometriye ilişkin uzunluk, alan ve geometrik şekillere ilişkin alan hesaplama bağıntılarıdır.

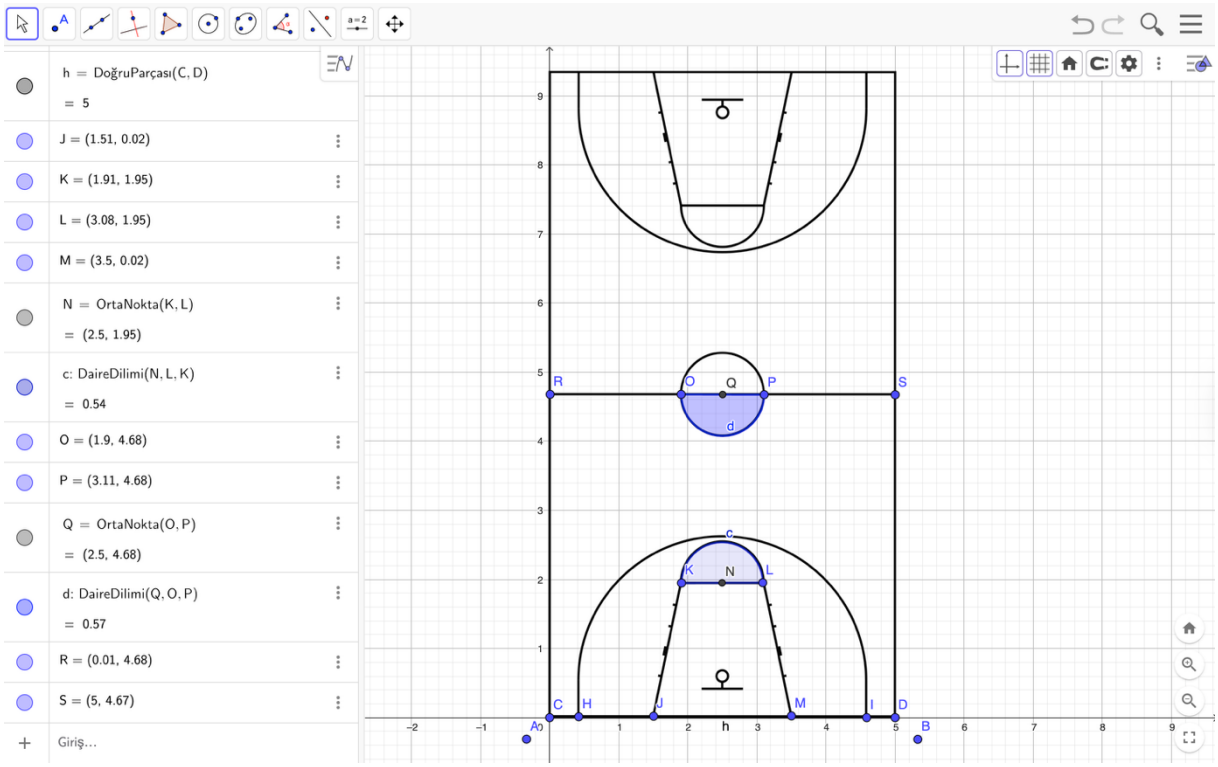
Basketbol görevi, öğretmen adaylarının farklı bilişsel süreçlerinin harekete geçirilmesi için dikdörtgen, yarım daire, üçlük bölgesini temsil eden bölge, serbest atış bölgesi gibi farklı geometrik şekillere sahiptir. Böylece, farklı geometrik şekillere ilişkin muhakeme süreçlerinin ortaya çıkmasıyla görselleştirme sürecinin zenginleştirileceği öngörülmektedir. Matematiksel temsillerin GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarılan fotoğraf üzerinde oluşturulmasıyla çeşitli inşa etme süreçlerinin gerçekleştirilmesi beklenmektedir. Böylece problemin çözümüne ilişkin gerekli olan verilerin elde edilmesi, elde edilen veriler kullanılarak matematiksel işlemler gerçekleştirilmesi, süreç boyunca yapılan eylemlerin ve elde edilen sonuçların matematiksel gerekçelerle açıklanması ve doğruluğunun kontrol edilmesi öngörülmektedir.

Matematiksel görevin çözümü için gerçekleştirilmesi beklenen eylemlerde fotoğraf üzerinden yapılan çizimler veya öğrencilerin kâğıt kalem gibi araçlarla dijital araç kullanmadan yapacakları görselleştirme eylemleri ile semiyotik oluşumun ortaya koyulacağı

öngörülmektedir. Bunun yanında fiziksel araçlarla yapılacak inşa süreçleri veya GeoGebra dinamik geometri yazılımında kullanılacak araçlar yardımıyla yapılacak inşa süreçlerinin enstrümantal oluşumu gerçekleştirmesi beklenmektedir. Bu noktada gerçekleştirilecek eylemlerde görselleştirme ve inşa etme süreçlerinin eş zamanlı olarak birbirini destekleyecek şekilde gerçekleştirilmesi ile matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde yoğunlaşması öngörülmektedir.

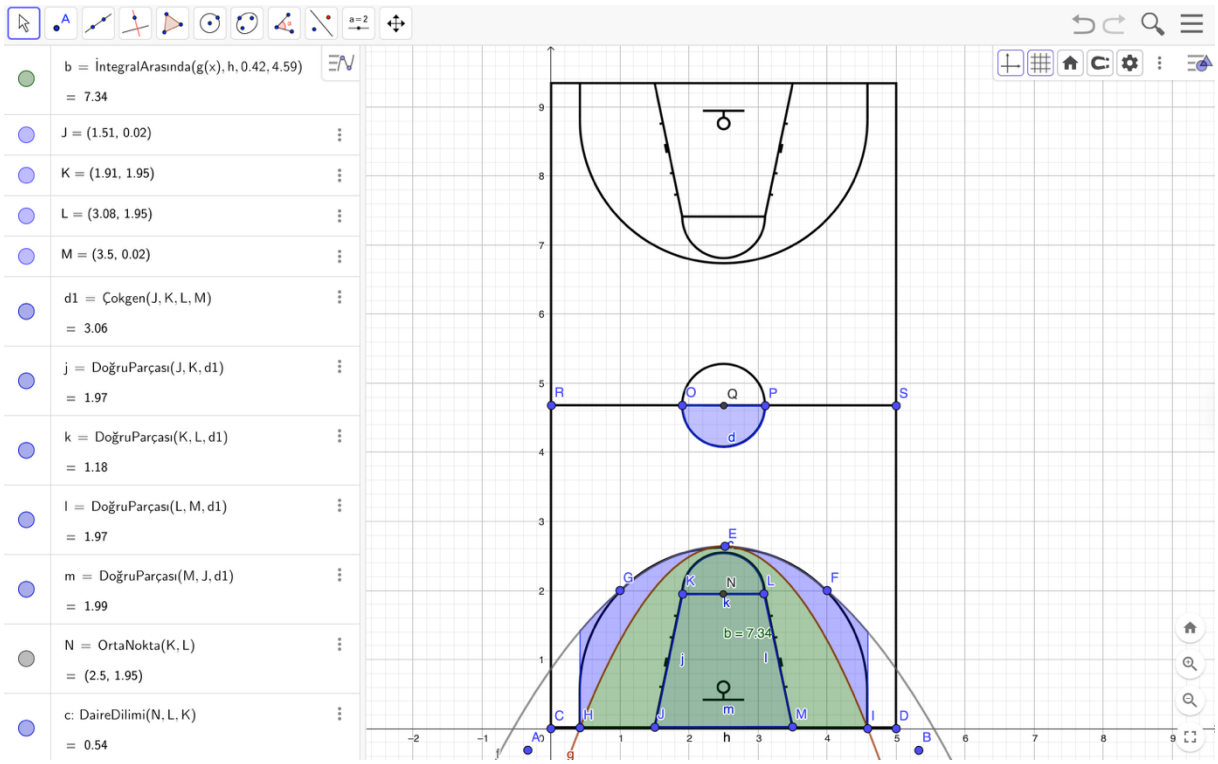
Basketbol görevi için öngörülen potansiyel matematiksel çalışma, öğretmen adaylarının gerçek yaşamla ilişkili bir bağlamda geometri bilgilerini uygulamalarına, epistemolojik düzlemin farklı bileşenlerini kullanarak akıl yürütme sürecinin anlamlı bir şekilde yürütülmesine olanak sağlamaktadır. Bu doğrultuda gerçekleştirilen örnek çözüm sürecine aşağıda yer verilmiştir.

- Türkiye Basketbol Federasyonu Salon Standartları ve Güvenlik Talimatları yönergesinde yer alan standart basketbol saha ölçülerine göre kısa kenarın 15 metre, uzun kenarın 28 metre olduğu bilgisi kullanılır.
- Böylece basketbol sahasının alanının 420 metrekare olduğu sonucuna ulaşılır.
- Bölgelerin alanları ve uzunlukları belirlenirken bölgenin sınırlarını oluşturan çizgilerin kalınlıkları ihmal edilir.
- Basketbol sahası sınırlarından en az iki metre uzunluğunda olmak üzere, basketbol sahasından farklı bir renge boyanması gereken bölgenin kısa kenarı 19 metre, uzun kenarı 32 metre olduğundan 608 metrekarelik bir sonuca ulaşılır. Ancak bu alanın içerisinde basketbol sahası olduğundan 420 metrekarelik ölçünün çıkarılmasıyla basketbol sahasından farklı bir renge boyanacak olan bölgenin alanı 188 metrekare olarak belirlenir.
- Basketbol sahası içerisinde farklı bir renge boyanacak alanlar içerisinde orta sahada yer alan daire ve her iki yarı sahada boyalı bölge olarak adlandırılan serbest atış çizgisini oluşturulan yarım dairelerin alanlarının hesaplanması gerekmektedir. Bu alanların hesaplanması için GeoGebra dinamik geometri yazılımında daire oluşturma aracı kullanılır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4: Matematiksel temsillerin oluşturulması – Basketbol görevi

- Bu noktada, basketbol sahasının kısa kenarının gerçek yaşamda 15 metre, GeoGebra dinamik çalışma sayfasında ise yaklaşık 5 birim olduğu belirlenir. Bu doğrultuda, fotoğraftaki uzunluk ölçüsü ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüsü arasındaki oran belirlenir.
- Orta sahada oluşturulan yarım dairenin alanının 0.57 birim kare, serbest atış bölgesinde oluşturulan yarım dairenin alanının 0.54 birim kare olduğu sonucuna cebir penceresi yardımı ile ulaşılır.
- Boyalı bölgenin sınırlarını temsil eden noktaların çokgen oluşturma aracı ile birleştirilmesiyle elde edilen çokgenin alanının 3.06 birim kare olduğu belirlenir.
- Üçlük çizgisi ile basketbol sahasını sınırlayan bölgenin tam bir çember olmadığının fark edilmesiyle üçlük çizgisini temsil eden polinom, polinom oluşturma aracı ile inşa edilir. Oluşturulan polinom, üçlük çizgisini tam olarak temsil etmediği için farklı bir polinom daha oluşturulur. Polinomlar arasında kalan bölgenin alanı üçlük bölgesini en iyi temsil edecek şekilde sınırlandırılır. Oluşturulan sınırlı bölgenin alanı ve ikinci polinom ile basketbol sahasını sınırlayan bölgenin alanı GeoGebra dinamik geometri sayfasının giriş bölümüne yazılan ‘integralarasında’ komutu ile belirlenir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5: Bölgelerin belirlenmesi – Basketbol görevi

- Oluşturulan bölgelerin alanları cebir penceresinden belirlenir.
    - G, E, F noktalarından geçen polinom ile H, E, I noktalarından geçen polinomlar arasında kalan, H ve I noktalarının x eksenindeki koordinatları ile sınırlı kalan mavi bölgenin alanı 1.95 birim kare,
    - H, E, I noktalarından geçen polinom ile basketbol sahasının kısa kenarı arasında kalan yeşil bölgenin alanı 7.34 birim kare olarak belirlenir.
    - Oluşturulan yeşil bölgenin içerisinde alanı daha önceden hesaplanan ve farklı bir renk ile temsil edilen yarım daire ve boyalı bölge olarak adlandırılan bölgelerin alanı hesaplanan alan ölçüsünden çıkarılır.
    - Böylece üçlük çizgisinin içerisinde yer alan ve farklı bir renge boyanacak olan bölgenin alanı 5.69 birim kare olarak belirlenir.
- Fotoğraftaki uzunluk ölçüsü ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüsü arasındaki oran kullanılarak ‘benzerlik oranının karesi, alanlar oranına eşittir’ teoremi doğrultusunda işlemler yapılır.
- Bu doğrultuda basketbol sahasının simetrik yapısı göz önünde bulundurularak,
    - Orta sahada bulunan dairenin alanı 10,26 metrekare,

- Serbest atış bölgesinde bulunan iki yarım dairenin alanları toplamı 9,72 metrekare,
- Boyalı bölge olarak adlandırılan serbest atış çizgisinin altında bulunan bölgelerin alanları toplamı 55,08 metrekare,
- Üçlük atış çizgilerinin kapladığı boyalı bölge ile yarım daire bölge hariç alanlar toplamı yaklaşık 102, 42 metrekare olarak belirlenir.

3.3.1.3 Mostar Görevinin Geliştirilme Süreci

Mostar köprüsü bağlamında yapılandırılan bu problem durumu, model oluşturma etkinliklerinin temel bileşenleri ve prensipleri doğrultusunda geliştirilmiştir. Bu görev, tarihi ve kültürel unsurlarla ilişkilendirilerek öğretmen adaylarının ölçme ve modelleme becerilerini geliştirebilecekleri özgün bir matematiksel çalışma imkânı sunmaktadır. Giriş metni, köprünün tarihçesi ve sosyal önemi üzerinden ilgi çekici ve gerçek yaşamla ilişkili bir bağlam sunmaktadır. Böylece, modellemenin anlamlı bir problem durumu içerisinde gerçekleştirilmesi sağlanmıştır. Hazırlık soruları aracılığıyla öğrencilerin metindeki tarihi, kültürel ve geometrik bilgileri anlayıp anlamadığının kontrol edilmesi amaçlanmıştır. Gerçeklik ilkesi doğrultusunda, ışık gösterisi hazırlığı gibi güncel ve teknolojik bir ihtiyaç üzerinden problem kurgulanmış, böylece öğrencilerin matematiği gerçek yaşamda bir araç olarak kullanmaları teşvik edilmiştir. Model oluşturma prensibi çerçevesinde, köprünün kemerli yapısının geometrik şekillerle modellenmesi ve bu yapının yüzey alanının hesaplanması hedeflenmiştir. Grup çalışmasıyla yürütülecek bu süreçte, öz değerlendirme ilkesine uygun olarak öğrenciler çözümlerini tartışarak doğruluklarını birlikte sorgulamaları amaçlanmıştır. Problem çözümünün sözlü ve yazılı olarak detaylı bir şekilde ifade edilmesiyle yapı belgelendirme prensibi; modelin benzer yapılar veya farklı ışık projeksiyonları için kullanılabilirliğinin değerlendirilmesiyle genellenebilirlik ve etkin prototip prensipleri desteklenmektedir. Son olarak, sınıf içi sunumlarla çözümlerin tartışılması, öğretmen adaylarının matematiksel temsilleri farklı bakış açılarıyla değerlendirilebilmesine olanak sağlayacaktır. Bu yönüyle Mostar görevi, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirmelerinin yanı sıra tarihi ve estetik bir yapının ölçülebilir yönlerini keşfetmelerine olanak sağlamaktadır.

Mostar görevi kapsamında geliştirilen yönlendirilmiş keşif soruları, öğretmen adaylarının bağlamsal farkındalıklarını arttırmayı ve modelleme sürecinin her aşamasında düşünmelerini desteklemeyi hedeflemektedir. İlk üç soru, öğretmen adaylarının Mostar Köprüsü'ne ilişkin tarihsel, kültürel ve mimari bilgiye odaklanmalarını sağlamaktadır. Bu sorular aracılığıyla

öğretmen adaylarının problem bağlamıyla duygusal ve kavramsal bir ilişki kurmalarını amaçlamaktadır. Böylece, modelleme süreci ile duygusal bir bağlılık geliştirilmesi ve gerçek yaşam bağlamının kavranmasına katkıda bulunulması beklenmektedir.

Modelleme döngüsünün problemi anlama ve basitleştirme aşamalarına yönelik olarak yapılandırılan 4-6. sorular, öğretmen adaylarının problem durumunu kendi ifadeleriyle açıklamalarını, problemde yer alan verileri ve değişkenleri tanımalarını ve çözüm için gerekli varsayımları geliştirmelerini amaçlamaktadır. Bu sorular, modelleme sürecinin ilk aşamasında öğretmen adaylarının epistemolojik düzlem bileşenlerini kullanarak oluşum süreçlerini gerçekleştirmelerini teşvik etmeyi hedeflemektedir.

7-11. sorular, matematiksel modelin oluşturulması ve matematiksel olarak çalışma aşamalarını desteklemeyi amaçlamaktadır. Bu sorularla öğretmen adaylarından, kullanmayı planladıkları stratejileri belirlemeleri, gerekli teknolojik araçları seçmeleri, problemi çözmek için kullanılabilecek geometrik şekilleri ve temsil biçimlerini tanımaları beklenmektedir. Bu aşamada, temsil, artefakt ve teorik referans bileşenlerinin fark edilmesi ve işlevsel kullanımı amaçlanmaktadır. Aynı zamanda semiyotik ve enstrümantal oluşumların gerçekleştirilmesi beklenmektedir.

12-13. sorular ise yorumlama ve değerlendirme aşamalarının gerçekleştirilmesine yöneliktir. Öğretmen adaylarından elde ettikleri matematiksel sonuçları bağlamla ilişkilendirmeleri ve modelleme süreci üzerine düşünmeleri istenmektedir. Bu durum, elde edilen modelin bağlamla ilişkilendirilerek sorgulama ve sürecin değerlendirilmesini içermektedir.

Son olarak, 14. soru ile öğretmen adaylarının özgün ve eleştirel bakış açısı geliştirmeleri beklenmektedir. Problemi yeniden yapılandırma önerisiyle öğretmen adaylarının modelleme sürecine ilişkin tasarım becerilerini kullanmaları beklenmekte ve süreç hakkındaki pedagojik farkındalıklarının arttırılması amaçlanmaktadır.

Mostar görevine ilişkin geliştirilen yönlendirilmiş keşif sorularının bütünsel yapısı, MÇA Teorisinin epistemolojik düzlem bileşenleri ve oluşum süreçlerini harekete geçirecek şekilde kurgulanmıştır. Böylece, öğretmen adaylarının modelleme sürecinin aşamalarını sistematik bir şekilde desteklenmesi amaçlanmıştır.

3.3.1.3.1 Mostar Görevine İlişkin Uygun MÇA

Mostar görevi, fotoğraf ve şema gibi temsili unsurları, ölçüm araçları ve dinamik geometri yazılımları gibi artefaktları ve geometrik şekillere ilişkin özellikleri içeren teorik referans bileşenlerini bütüncül bir şekilde içerecek şekilde yapılandırılmıştır. Böylece epistemolojik düzlem üzerindeki üç bileşenin uygun olarak bütünleştirilmesi ve oluşum süreçleriyle birlikte bunlar arasındaki geçişin ortaya konulmasına olanak sağlamak amaçlanmıştır.

Bu görevde, Mostar köprüsünün kemer formunun şematik temsili ile görselleştirme; ölçüm, hesaplama ve ölçekleme gibi eylemlerle inşa etme; elde edilen sonuçların bağlamla uyumu ve doğruluğunun değerlendirilmesi ile ispat ve gerekçelendirme süreçlerinin harekete geçirilmesi amaçlanmıştır. Matematiksel çalışma sırasında bu süreçler ayrı ayrı gerçekleştirilebilmesinin yanı sıra birbiri ile ilişkili olarak bütüncül şekilde sürdürülebilmektedir. Özellikle, sunulan yönlendirilmiş keşif soruları bu amaca yönelik olarak geliştirilmiştir. Böylece, görevde gerçekleştirilen eylemlerin dikey düzlemler üzerinde dolaşım göstererek öğretmen adaylarının epistemolojik ve bilişsel düzlem bileşenleri arasında anlamlı geçişler yapmaları hedeflenmiştir.

Mostar görevi, geometri ve ölçme alanı üzerinde yapılandırılarak matematiksel modelleme yaklaşımı ile öğretmen adaylarının ölçme kavramına ilişkin yapılarını kültürel-tarihi bir yapının teknik hesaplamalarına uygulayarak düşünme biçimlerini ortaya koyacak şekilde yapılandırılmıştır. Mostar köprüsünün kemer formunun analizi, geometri, ölçme ve tarih-kültür bağlamlarının ortak noktasında bulunmaktadır. Böylece Mostar görevi, farklı alanların birleştirilmesiyle matematiksel görevin hem kültürel hem de matematiksel temsil gücünü sağlayan bir nitelik taşımaktadır (Henríquez-Rivas et al., 2022). Bu doğrultuda, geliştirilen görevdeki bir köprünün yüzey alanının hesaplanması probleminin benzer tarihi yapılar veya mühendislik projelerinde uygulanabilirliği, matematiksel görevin genellenebilirliğini göstermektedir.

Mostar görevinde gerçekleştirilecek olan matematiksel çalışmalarda epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanılması ve teknolojik araçlar, temsil biçimleri ve teorik referansların etkin kullanımı ile bilişsel süreçleri tetiklemesi gibi eylemler, matematiksel düşünmenin gözlemlenebilmesine olanak sağlamaktadır. MÇA'nın kritik unsurlarının tüm özelliklerini karşılayan Mostar görevinde, öğretmen adaylarının bağlamla ilişkiler kurması, epistemolojik düzlem bileşenleri ile etkileşim sağlaması, oluşum süreçleri arasında dolaşımı gerçekleştirmesi ve disiplinler arası bağlantılar kurması beklenmektedir. Böylece, öğretmen adaylarının

modelleme yeterliklerinin yanı sıra matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirdikleri sürecin detaylı olarak incelenmesi hedeflenmektedir.

3.3.1.3.2 Mostar Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma

Mostar görevinde öğretmen adaylarından, fotoğrafta görülen Mostar Köprüsü'nün video mapping uygulamaları için gerekli olan görünen yüzey alanını hesaplamaları beklenmektedir. Doğrudan ölçüm yapma imkânı bulunmadığından dolayı, çözüm sürecinde ölçekleme yönteminin kullanılması beklenmektedir. Fotoğrafta yer alan insan figürünün yaklaşık boy uzunluğunun 1,75 metre olduğu dikkate alınarak referans nesne olarak kullanılması öngörülmektedir. Böylece öğretmen adayları, görüntüdeki referans nesne ile köprü arasında orantısal ilişkiler kurarak köprünün boyutlarını tahmin edebilir ve bu tahminlerden hareketle alan hesaplamasına ulaşabilir.

Mostar görevi, köprü fotoğrafı ve çizimler ile oluşturulan şematik modeller ile temsil bileşenini ortaya çıkarabilmektedir. Ölçüm ve ölçekleme sürecinde kullanılabilecek olan cetvel, hesaplama araçları ve dinamik geometri yazılımındaki araçlar ile artefaktların kullanılacağı öngörülmektedir. Fotoğrafta yer alan geometrik şekillerin alanları, oran-orantı gibi matematiksel kavramların kullanılması ile teorik referanslar bileşeninin kullanılması beklenmektedir.

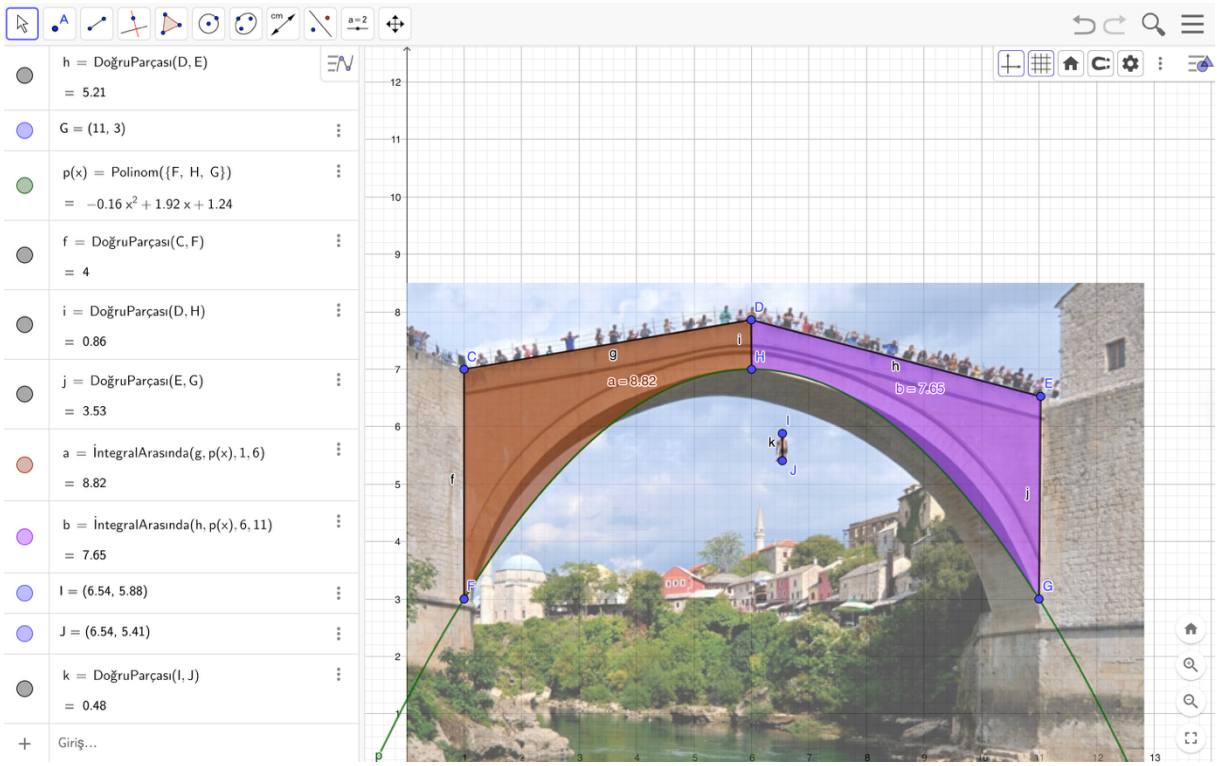
Bu görevde aynı zamanda köprünün yarım daire, dikdörtgen ve üçgen gibi şekillere indirgenerek görselleştirilmesi beklenmektedir. Dinamik geometri yazılımı yardımıyla oluşturulan matematiksel modellerle inşa etme sürecin gerçekleştirileceği öngörülmektedir. Böylece köprüye ilişkin veriler elde edilmesi ve ölçekleme yoluyla hesaplamalar yapılması beklenmektedir. Elde edilen sonuçların matematiksel gerekçeler kullanılarak açıklanması ve ortaya çıkabilecek hata paylarının tartışılmasıyla ispat sürecinin gerçekleştirilmesi öngörülmektedir.

Matematiksel görevin çözümü sırasında fotoğrafın kullanılması ve köprünün yüzeyini temsil eden geometrik şekillerin kullanılmasıyla semiyotik oluşumun gerçekleştirilmesi, görselleştirme sırasında geometrik şekillerin dinamik geometri yazılımında oluşturulmasıyla enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmesi, gerçekleştirilen eylemlerin matematiksel gerekçelerle ifade edilmesiyle söylemsel oluşumun gerçekleştirilmesi beklenmektedir. Bu sırada gerçekleştirilen görselleştirme eylemleri ile inşa etme eylemlerinin benzer zamanlarda

gerçekleştirileceği öngörülerek matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde yoğunlaşacağı düşünülmektedir.

Mostar görevi, öğretmen adaylarının gerçek yaşamla ilişkili bir bağlamda geometri bilgilerini uygulamalarına olanak sağlamaktadır. Bu doğrultuda gerçekleştirilen örnek çözüm süreci aşağıda verilmiştir:

- Fotoğrafta görünen köprüden atlayan adam referans nesne olarak ele alınır ve dizlerini katladığı için boyu yaklaşık 1,5 metre olarak kabul edilir.
- GeoGebra dinamik çalışma sayfasında referans nesneyi temsil eden doğru parçası oluşturulur. Uzunluk ölçüsü cebir penceresi yardımıyla 0.48 birim olarak belirlenir.
- Gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüsü 1,5 metre olan nesnenin fotoğraftaki uzunluğu 0.48 birim olmasıyla bir oran kurulur.
- Köprünün sınırlarını temsil eden doğru parçaları doğru parçası oluşturma aracı ile oluşturulur.
- Köprünün kemeri üzerinde belirlenen noktalar üzerinden geçen ve köprünün kemerini temsil eden polinom, giriş bölümüne yazılan polinom oluşturma komutu ile belirlenir. Bu noktada, oluşturulan polinomun köprünün kemerini temsil ettiği varsayılır.
- Köprünün sınırlarını oluşturan doğru parçalarının kesişim noktasından köprünün yüzeyini iki parçaya bölen doğru parçası, doğru parçası oluşturma aracı ile oluşturulur.
- Köprünün sınırlarını oluşturan doğru parçaları ile köprünün kemerini temsil eden polinom arasında kalan alan ‘integralarasında’ komutu kullanılarak belirlenir (Şekil 3.6).



Şekil 3.6: Geometrik nesnelerin oluşturulması – Mostar görevi

- Oluşturulan bölgelerin alanları 8.82 ve 7.65 birim kare olarak belirlenir. Böylece Mostar Köprüsü'nün fotoğraftaki yüzey alanının 16.47 birim kare olduğu sonucuna ulaşılır.
- Elde edilen sonucun gerçek yaşamdaki karşılığını hesaplamak için referans nesne aracılığıyla belirlenen oran kullanılır. 'Benzerlik oranının karesi, alanları oranına eşittir' teoremi doğrultusunda gerçekleştirilen matematiksel işlemler sonucunda Mostar Köprüsü'nün yüzey alanının yaklaşık 161 metrekare olduğu sonucuna ulaşılır.

3.3.1.4 Epoksi Görevinin Geliştirilme Süreci

Ahşap ve epoksi reçine kullanılarak masa üretimi bağlamında yapılandırılan bu matematiksel görev, model oluşturulma etkinliklerinin temel bileşenleri ve prensipleri dikkate alınarak geliştirilmiştir. Bu görev, öğretmen adaylarının hem estetik ve pratik bir üretim sürecini hem de fonksiyonel bir matematiksel ilişkiyi modellemelerine olanak sağlamaktadır. Giriş metni, tek parça ağaçlardan masa üretimi sürecini ve epoksi kullanımının işlevselliğini açıklayarak öğretmen adaylarına özgün, gerçek yaşamla ilişkili ve güncel bir bağlam sunmaktadır. Hazırlık soruları aracılığıyla öğretmen adaylarının görevde sunulan fiziksel ve geometrik verileri anlayıp anlamadığını belirlemek amaçlanmıştır. Gerçeklik ilkesi doğrultusunda, marangozluk mesleğinde sıklıkla karşılaşılan bir durum kurgulanmıştır. Böylece, öğrencilerin soyut

matematiksel ilişkileri somut bir üretim bağlamında kullanmaları teşvik edilmiştir. Model oluşturma prensibi kapsamında, sinüs eğrisi formuna sahip ahşapların arasında kalan alanın epoksi ile doldurulması süreci dikkate alınarak, masa ve epoksi alanı ile masa boyutları arasındaki ilişkiyi temsil eden bir matematiksel model geliştirilmesi amaçlanmıştır. Grup çalışması çerçevesinde yürütülecek bu süreçte, öğretmen adayları çözümlerini karşılaştırarak ve tartışarak öz değerlendirme gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir. Problem çözümünün detaylı biçimde ifade edilmesiyle yapı belgelendirme prensibi; modelin farklı masa boyutlarına uygulanabilirliği yoluyla genellenebilirlik ve etkin prototip ilkeleri de desteklenmektedir. Son olarak, sınıf ortamında gerçekleştirilecek sunumlar, öğretmen adaylarının oluşturdukları matematiksel modelleri paylaşmalarına ve farklı çözüm yollarını değerlendirmelerine katkı sunmaktadır. Bu yönüyle Epoksi görevi, öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme, modelleme ve temsil becerilerini geliştirmeyi amaçlayan bütüncül bir matematiksel çalışma ortamı sunmaktadır.

Epoksi görevinin çözümüne yönelik oluşturulan yönlendirilmiş keşif soruları, öğretmen adaylarının problem bağlamını kavramalarını, çözüm sürecine yönelik bilişsel hazırlık yapmalarını ve modelleme sürecinin tüm aşamalarını deneyimlemelerini hedeflemektedir. İlk iki soru, öğretmen adaylarının mobilya üretim sürecine, özellikle doğal ahşap ve epoksi kullanılarak masa üretimi bağlamına dair bilgi edinmelerini amaçlamaktadır. Bu sorular, bağlamsal farkındalığı arttırarak öğretmen adaylarının problem durumuyla ilişki kurmalarını sağlamakta ve gerçek yaşam durumunun modelleme sürecine taşınmasını desteklemektedir.

3-5. sorular, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarına yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu aşamada öğretmen adaylarından, problemi kendi sözcükleriyle ifade etmeleri, temel varsayımları belirlemeleri ve gerçek yaşam bağlamını matematiksel ifadeye dönüştürmeleri beklenmektedir. Bu sorular, öğretmen adaylarının problemi zihinsel olarak yapılandırmalarını ve çözüm sürecinde takip edecekleri stratejileri belirlemelerine olanak sağlamaktadır.

6-10. sorular, matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarına yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu sorular, öğretmen adaylarının kullanacakları problem çözme stratejilerini belirlemeleri, uygun teknolojik araçları tanımaları, çözümde kullanılacak geometrik şekilleri ve temsil biçimlerini ortaya koymaları amaçlanmaktadır. Böylece, matematiksel modelin işlevsel hale getirilmesi ve bu süreçte matematiksel araçların doğru biçimde kullanılması

hedeflenmiştir. Bu sorular ile, MÇA Teorisi kapsamında özellikle epistemolojik düzlem bileşenlerinin fark edilmesi ve oluşum süreçlerinin gerçekleştirilmesi beklenmektedir.

11-13. sorular ise yorumlama ve değerlendirme aşamalarına yönelik oluşturulmuştur. Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanmasını, modelleme süreciyle ilgili öz değerlendirme yapılmasını ve problemde iyileştirme önerilerinin geliştirilmesini hedefleyen sorular ile öğretmen adaylarının bilişsel ve epistemolojik düzlemde derinlemesine düşünmeleri ve süreç hakkındaki farkındalıklarının arttırılması amaçlanmıştır.

Epoksi görevi kapsamında geliştirilen bu yönlendirilmiş keşif soruları, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde bulunan aşamalarda eylemler gerçekleştirebilmeleri amacıyla oluşturulmuştur. Sorular yalnızca çözüm üretilmesine değil, aynı zamanda süreçte MÇA bileşenlerinin etkin biçimde kullanılmasına yönelik olarak hazırlanmıştır.

3.3.1.4.1 Epoksi Görevine İlişkin Uygun MÇA

Epoksi görevinin tasarımında hedeflenen ve öğretmen adaylarının modelleme sürecinde gerçekleştirmeleri beklenen matematiksel çalışmayı içeren uygun MÇA, geometri, fonksiyonlar, ölçme ve alan hesaplama gibi içerik alanlarını bütünleştirecek şekilde kurgulanmıştır. Bu görev, sinüs eğrisi formuna sahip ahşap parçalar ve bu parçalar arasına dökülen epoksi bölümün yüzey alanını belirlemeye yönelik özgün bir problem durumu üzerinden modelleme sürecinin tüm aşamalarını kapsayacak şekilde yapılandırılmıştır. Böylece matematiksel görevin, estetik ve işlevsel bir üretim sürecinin matematiksel modelleme ile ilişkilendirilmesini sağlamak hedeflenmiştir.

Epistemolojik düzlemde, temsil olarak masa ve epoksi bölümünün şematik gösterimleri ile sinüs eğrisi grafikleri; artefakt olarak dinamik geometri yazılımları, ölçüm araçları ve hesap makineleri; teorik referans olarak ise alan formülleri ve fonksiyon tanımları bulunmaktadır. Bu tasarım semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşum süreçlerinin dengeli bir biçimde gerçekleştirilmesini amaçlamaktadır. Böylece dikey düzlemler arasındaki dolaşım teşvik edilmektedir.

Bu görev sırasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmada, öğretmen adaylarının sinüs fonksiyonunun alanını integral kavramını kullanarak ilişkilendirmekte zorlanmaları, araç kullanımının epistemolojik amaca bağlanamaması ve söylemsel oluşumun sınırlı kalması gibi

durumların gözlemlenebileceği düşünülmüştür. Epoksi görevi, öğretmen adayları arasındaki etkileşimi destekleyecek şekilde yapılandırılmıştır. Yönlendirilmiş keşif soruları arayıcılığıyla problem durumuna ilişkin somutlaştırma adımları atılmakta, engelleri aşmak için gerekli bilişsel geçişlerin gerçekleştirilmesine olanak sağlamakta ve modellemenin anlamlı bir gerçek yaşam bağlamında yürütülmesine imkân sağlamaktadır.

Matematiksel görevde yer alan bağlamın farklı masa boyutları ve şekillerine uyarlanabilmesi sayesinde oluşturulan matematiksel modellerin genellenebilirlik özelliği taşıması hedeflenmiştir. Böylece hem matematiksel modelleme becerilerinin hem de akıl yürütme süreçlerinin kullanılması teşvik edilmiş ve öğretmen adayları tarafından bir üretim sürecinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu yönleriyle epoksi görevi, gerçek yaşam bağlamı ile oldukça ilişkili olarak MÇA bileşenlerinin ve oluşum süreçlerinin dengeli bir şekilde kullanılmasını amaçlayan bir yapıdadır.

3.3.1.4.2 Epoksi Görevine İlişkin Potansiyel Matematiksel Çalışma

Epoksi görevinde öğretmen adaylarından, tek parça ağaçlardan masa üretiminde karşılaşılan sınırlılıklar nedeniyle farklı tahta parçalarının sinüs eğrisi biçiminde kesilip aralarında epoksi reçine eklenerek masa yüzeyinin oluşturulmasını matematiksel olarak modellemeleri beklenmektedir. Bu görev, öğretmen adaylarının gerçek yaşam bağlamı ile ilişki kurarak geometrik ve trigonometrik kavramları kullanmalarına olanak sağlamaktadır. Görevin amacı, masanın toplam yüzey alanının ve epoksi ile doldurulan bölümün alanının, uzunluk ölçülerine bağlı olarak nasıl değiştiğini gösteren bir matematiksel araç oluşturmaktır.

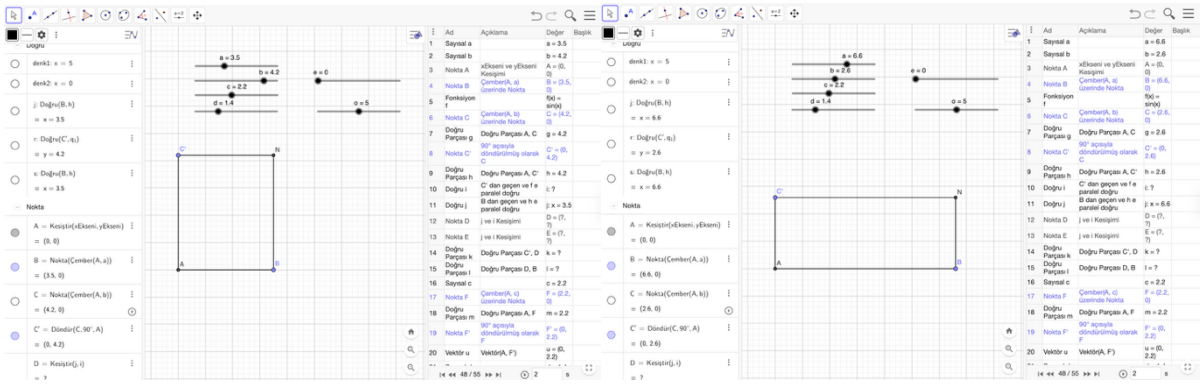
Epoksi görevinde, masanın dikdörtgen şeklinde şematik çizimi, dalgalı kenarların sinüs fonksiyonu ile modellenmesi ile MÇA'nın temsil bileşeninin kullanılması beklenmektedir. Matematiksel eylemlerin gerçekleştirilmesi için GeoGebra dinamik geometri yazılımın kullanılmasının yanı sıra kâğıt-kalem hesaplamaları ile birlikte tablo ve elektronik tabloların kullanımıyla MÇA'nın artefakt bileşeninin etkin bir şekilde kullanılması öngörülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlerde alan hesaplamaları, trigonometrik fonksiyonlar, integral ve oran-orantı kavramlarının kullanımı ile teorik referanslar bileşeninin kullanılması beklenmektedir.

Görevin gerçekleştirilmesi sırasında masa yüzeyinin dikdörtgen ve sinüs eğrileri ile temsil edilecek şekilde görselleştirilmesi sırasında masaya ait uzunlukların ve sinüs dalgalarının genliklerinin inşa edilmesi öngörülmektedir. Bu eylemler doğrultusunda gerçekleştirilmesi

beklenen semiyotik oluşum ve enstrümantal oluşum ile matematiksel çalışmanın yoğunlukla [Sem-Ens] dikey düzleminde yürütülmesi beklenmektedir. Epoksi kullanılacak bölgenin alanının belirlenmesinde gerçekleştirilmesi beklenen eylemlerin matematiksel gerekçeler kullanılarak ifade edilmesi, eğriler arasında kalan bölgenin integral kavramı kullanılarak belirlenmesi ile söylemsel oluşumun gerçekleştirileceği öngörülmektedir.

Böylece, epoksi görevi sırasında öğretmen adaylarının MÇA bileşenlerini bütüncül olarak harekete geçirmeleri beklenmektedir. Gerçek yaşam bağlamını içeren bu görev, matematiksel akıl yürütme ve gerekçelendirme süreçlerinin kullanılmasını teşvik ederek öğretmen adaylarının farklı düzlemler arasında dolaşım gerçekleştirmelerini sağlayan matematiksel çalışma ortamı sunmaktadır. Bu doğrultuda gerçekleştirilen örnek çözüm süreci aşağıda verilmiştir:

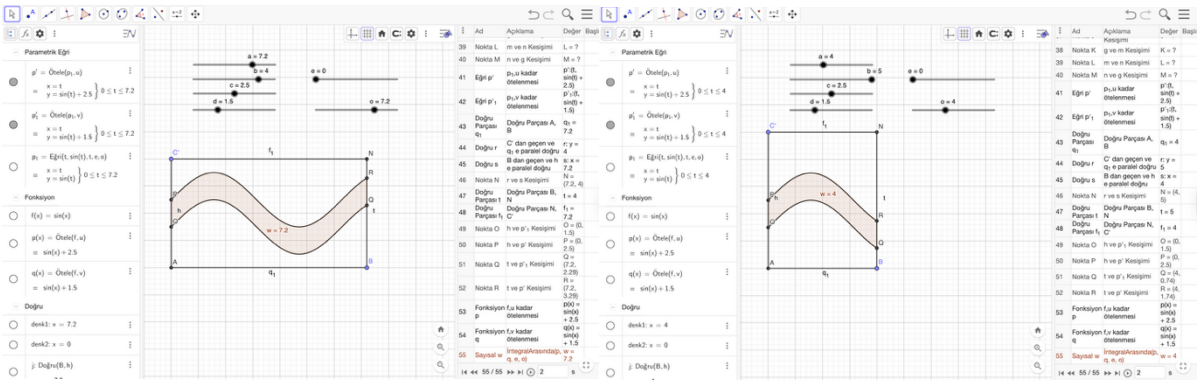
- Öncelikle GeoGebra dinamik geometri çalışma sayfasında dikdörtgenin kısa ve uzun kenarlarının uzunluğu ile ilişkilendirilecek sürgüler oluşturulur.
- Dikdörtgenin inşa edilebilmesi için doğru parçasını döndürme, paralel doğru oluşturma, vektör oluşturma araçları kullanılır.
- Dikdörtgenin köşelerinde bulunan noktalar, sürgüler ile ilişkilendirilir. Sürgüler hareket ettirildiğinde dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarının değişebilmesi sağlanır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7: Sürgülerin hareketi ile dikdörtgenin boyutlarının değiştirilmesi – Epoksi görevi

- Sinüs eğrilerini temsil eden grafikler, giriş bölümüne fonksiyonların yazılmasıyla oluşturulur.

- Oluşturulan sinüs eğrisi grafiklerinin dikey eksenler ile sınırlandırılması amacıyla dikey eksenleri temsil eden sürgüler ile ilişkilendirilir.
- İki sinüs eğrisinin arasında kalan alanın belirlenmesi için ‘integralarasında’ komutu kullanılır (Şekil 3.8).



Şekil 3.8: Sürgülerin hareketi ile epoksi kullanılan alanın değişimi – Epoksi görevi

- Sürgülerin hareketleri ile gerçekleştirilen çeşitli değişimlerin, dikdörtgenin uzun ve kısa kenarı ile nasıl bir değişim gösterdiği gözlemlenir.
- GeoGebra dinamik çalışma sayfasında yer alan uzunluk ölçü birimleri ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüleri arasında ilişki kurulur.

3.3.2 Pilot Çalışma Süreci

Pilot çalışma, belirlenen çalışma grubu ile aynı özelliklere sahip olan öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma sırasında ayrıntılı gözlemler yapılmış, öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği matematiksel çalışmalar video ile kayıt altına alınmıştır. Pilot çalışma süreci kapsamında, matematiksel modelleme etkinlikleri ve yönlendirilmiş keşif soruları kullanılarak bir her etkinlik için bir çalışma yaprağı oluşturulmuştur. Çalışma yaprakları, alan uzmanı tarafından çözüldüğünde her bir matematiksel görevin yaklaşık 45 dakikada tamamlanabileceği öngörülmüştür. Bu nedenle, 90 dakikalık ders süresi içerisinde iki matematiksel modelleme etkinliğinin çözülmesi planlanmıştır. Ancak pilot uygulama sırasında, problemi anlama ve basitleştirme basamaklarının beklenenden daha fazla zaman aldığı, matematiksel çalışmaları eşzamanlı olarak tamamlanamadığı ve sınıf içi tartışma ortamına yeterince zaman ayrılamadığı gözlemlenmiştir. Bu durum doğrultusunda, asıl uygulamada her ders gününde yalnızca bir matematiksel modelleme etkinliği uygulanmasına karar verilmiştir.

Pilot çalışma sonrasında, geliştirilen matematiksel modelleme etkinlikleri üç alan uzmanı tarafından incelenmiş ve benzer geometrik şekiller ile çözüm süreçlerini içeren görevler arasından uygun olanların seçilmesine karar verilmiştir. Asıl uygulamada kullanılacak matematiksel modelleme etkinlikleri; Stadyum Görevi, Basketbol Sahası Görevi, Mostar Köprüsü Görevi ve Epoksi Masa Görevi olarak belirlenmiştir.

Pilot çalışma sırasında yapılan gözlemler doğrultusunda, tanıtıcı makaleler ve yönlendirilmiş keşif sorularında yer alan ve cümle akışını bozarak problemin anlaşılmasına engel olduğu düşünülen ifadeler, uzman görüşleri doğrultusunda uygun şekilde düzenlenmiştir. Yapılan bu düzenlemeler, asıl uygulamada öğretmen adaylarının süreci daha verimli yönetebilmesine katkı sağlamayı hedeflemektedir. Pilot uygulama sonucunda elde edilen bulgular doğrultusunda yapılan düzenlemeler aşağıda sunulmaktadır.

- Stadyum Görevi: Pilot uygulama sırasında, çalışma yaprağında verilen görselin problem durumunun anlaşılmasına yeterince katkı sağlamadığı belirlenmiştir. Bu nedenle, problemin daha iyi kavranabilmesi için stadyumun kuşbakışı görünümünü içeren yeni bir görsel kullanılması uygun görülmüştür.

- Basketbol Görevi: Pilot uygulamada, basketbol saha çizgilerinin çizimi ve sahanın boyanmasıyla ilgili kuralların anlaşılmasında öğretmen adaylarının zorluk yaşadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, basketbol sporuna ilgi duymayan veya takip etmeyen öğretmen adaylarının basketbola özgü terimleri bilmemesi nedeniyle problem durumunu anlamada güçlük çektikleri tespit edilmiştir. Bu doğrultuda, problemin daha anlaşılır hale getirilmesi amacıyla saha ölçüleri ve boyama kurallarının Türkiye Basketbol Federasyonunun Salon Standartları ve Güvenlik Talimatları doğrultusunda açık ve net ifadelerle düzenlenmesine; ayrıca, basketbol ile ilgili kullanılan terimlerin açıklayıcı biçimde tanımlanmasına karar verilmiştir.

- Mostar Görevi ve Epoksi Görevine ilişkin pilot çalışmalar sonrasında matematiksel görevlerin içeriklerinde değişiklik yapılmamasına uzman görüşleri doğrultusunda karar verilmiştir.

3.3.3 Veri Toplama Süreci

Modelleme görevleri, her biri farklı başarı düzeyinde öğrenci içeren 3 veya 4 kişilik heterojen gruplara sunulmuştur. Görevlerin tamamlanması için her gruba yaklaşık 60 dakikalık bir süre tanınmıştır. Grup çalışması, modelleme sürecinde söylem üretimi, karar alma ve temsil yapılandırma gibi süreçlerin daha görünür hale gelmesine olanak tanıdığı için tercih edilmiştir.

Asıl uygulama sürecinde, her bir öğretmen adayına çalışma yaprakları dağıtılmış ve ilk olarak 10 dakika süren bireysel çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu sürecin ardından, grup çalışmasına geçilerek matematiksel görevlerin çözümü üzerinde ortak çalışmalar yapılmıştır. Matematiksel çalışmalar sırasında öğretmen adaylarının doğal ortamlarında gözlemlenmesi ve matematiksel düşünme süreçlerini ortaya koyabilecek eylemlerin izlenebilmesi amacıyla, katılımcı gözlem yoluyla veri toplanmıştır.

Katılımcı gözlem, araştırmacının yalnızca pasif bir gözlemci rolünde bulunmadığı, aynı zamanda çalışma içerisinde çeşitli roller üstlenerek sürece dahil olduğu bir gözlem türü olarak tanımlanmaktadır (Yin, 1994). Yıldırım (1999), katılımcı gözlemin, araştırmacının bilgi kaynağına yakınlaşmasını sağladığını; bu sayede durumun daha derinlemesine anlaşılmasına, bireylerin düşünce yapılarını ve süreç içerisindeki anlamlandırmalarını ortaya koymasına olanak tanıdığını ifade etmektedir.

Bu doğrultuda, uygulama sırasında katılımcı gözlemci rolünü üstlenen araştırmacı, öğretmen adaylarının çalışma yapraklarına yansımayan davranışlarını, grup içi etkileşimlerini ve matematiksel süreçte ortaya çıkan stratejik eylemlerini kayıt altına alma fırsatı bulmuştur. Ayrıca, matematiksel çalışmalar sırasında sürecin ilerlemesini engelleyebilecek sorunlarla karşılaşıldığında, araştırmacı tarafından anlık müdahalelerde bulunulmuştur. Bu müdahalelerin temel amacı, uygulamanın akışının ve matematiksel çalışma sürecinin kesintisiz ve anlamlı bir şekilde devam etmesini sağlamak olmuştur (Bukova Güzel vd., 2016).

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarına, yapılacak matematiksel çalışmaların herhangi bir başarı değerlendirmesi amacı taşımadığı, çalışmaların yalnızca matematiksel düşünme süreçlerini ortaya koymak amacıyla gerçekleştirileceği açıklanmıştır. Ayrıca, matematiksel görevlerin çözümü sırasında bilgisayar, tablet ve internet gibi teknolojik araçları kullanabilecekleri konusunda bilgilendirme yapılmıştır. Bu doğrultuda, uygulama ortamı internet erişimine sahip olacak şekilde düzenlenmiş ve her grupta en az bir bilgisayar bulunması

sağlanmıştır. Sınıf düzeni, grup çalışmalarını destekleyecek şekilde yeniden organize edilmiş, öğretmen adaylarının rahatça etkileşim kurabilecekleri bir oturma planı oluşturulmuştur.

Buna ek olarak, öğretmen adaylarından matematiksel çalışmalar sırasında gerçekleştirdikleri eylemleri ve düşünceleri sesli düşünme yöntemi ile açıkça ifade etmeleri istenmiştir. Bu uygulamanın amacı, öğretmen adaylarının düşünce süreçlerini, stratejilerini ve problem çözme yaklaşımlarını başarı kaygısı duymaksızın ayrıntılı bir şekilde ifade etmelerini sağlamaktır (Ericsson and Simon, 1998). Böylece, matematiksel çalışma süreçlerine ilişkin daha kapsamlı ve derinlemesine veriler elde edilebilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının sesli düşünme ifadeleri, MÇA analizinde söylemsel oluşum ve gerekçelendirme kodlarının oluşturulmasında kullanılmıştır.

Uygulama süresince, gruplar içerisinde gerçekleşen diyalogların ve problem çözüm süreçlerinin gözden kaçırılmaması ve veri kaybının önlenmesi amacıyla tüm süreç video ve ses kaydı ile kayıt altına alınmıştır. Bu doğrultuda, kameralar çalışma yapraklarını ve bilgisayar ekranlarını görebilecek şekilde yerleştirilmiş, böylece öğretmen adaylarının hem grup içi hem de sınıf içi etkileşimlerine ilişkin ayrıntılı veriler elde edilmiştir.

Ayrıca, çalışma yaprağında yer alan yönlendirilmiş keşif sorularına verilen yanıtların yanı sıra, matematiksel çalışmalar sırasında gerçekleştirilen eylemlerin de grup raporlarında ifade edilmesi istenmiştir. Uygulama sonunda, öğretmen adayları tarafından hazırlanan grup raporları yazılı olarak toplanmıştır. Böylece, gözlem verilerinin çalışma yapraklarına verilen yanıtlar ve grup raporları ile üçgenlemesi sağlanarak, verilerin geçerliği ve tutarlılığı güçlendirilmiştir (Patton, 1999). Ayrı oturumlarda her bir görev için 60 dakika sürenin verildiği veri toplama süreci 4 haftada tamamlanmıştır.

3.4 Veri Analizi

Bu bölümde, toplanan verilerin analiz süreci ve kullanılan değerlendirme araçları açıklanmaktadır. Matematiksel görevlerin geliştirilmesinde model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri ve prensiplerinin dikkate alınmasından dolayı, öğretmen adaylarının matematiksel çalışmalarını modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda gerçekleştirilmesi beklenmiştir. Bu nedenle, matematiksel çalışmalar sırasında ortaya konulan eylemlerin modelleme döngüsüne nasıl uyum sağladığının belirlenmesi önem kazanmıştır.

Bu amaçla, Tekin Dede ve Bukova-Güzel (2018) tarafından geliştirilen Modelleme Yeterliklerini Değerlendirme Rubriği (MYDR) kullanılmıştır (Tablo 3.3). MYDR; problemi anlama, basitleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama yeterliklerini kapsamaktadır. Rubriğin geliştirilmesi sürecinde geçerlik ve güvenirliği artırmak amacıyla farklı sınıf düzeylerinde çeşitli matematiksel modelleme görevleri uygulanmış, iki matematik eğitimi uzmanının yaptığı kodlamalar arasındaki uyum %73,3 olarak belirlenmiştir. Miles and Huberman (1994)'a göre bu oran kabul edilebilir düzeydedir. Ayrıca, üç matematiksel modelleme görevi aynı araştırmacı tarafından altı ay sonra tekrar değerlendirdiğinde kodlar arası uyum %88,8 olarak bulunmuştur. Bu bulgu, kodlamaların zaman içi güvenirliğinin yüksek olduğunu göstermektedir.

MYDR, Blum and Leiß (2007)'in matematiksel modelleme döngüsünün aşamaları ile uyumludur. Bu döngü; problemi anlama, basitleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama aşamalarından oluşmaktadır. Rubrik, modelleme döngüsünün her bir aşaması için hangi durumda kaç puan alınacağına dair detaylı açıklamalar içermektedir. Böylece, öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği eylemlerin hangi yeterlik düzeyinde bulunduğu belirlenebilmektedir.

Uygulama sırasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, rubrikte belirtilen dereceli puanlama anahtarı doğrultusunda incelenmiş ve her bir grubun modelleme yeterlikleri nicel veriler olarak ifade edilmiştir. MYDR analiz sürecinde, öğretmen adaylarının video kayıtları transkript edilmiş; yorumlama yaklaşımları, düşünme süreçleri ve yazılı çözümleri incelenerek hangi aşamada hangi yaklaşımları gerçekleştirdikleri belirlenmiştir.

Tablo 3.3: Modelleme Yeterliği Değerlendirme Rubriği

	Düzey- Puan	Tanımlama
Problemi Anlama	Düzey 1- 0 p	Problemi anlamadığını gösteren ifadelere yer verme, verilenleri ve istenenleri belirleyememe ve aralarında ilişki kurmama/yanlış ilişki kurma
	Düzey 2- 1 p	Problemi bir ölçüde anladığını gösteren ifadelere yer verme, verilenleri ve istenenleri bir ölçüde belirleme ancak aralarında ilişki kurmama/yanlış ilişki kurma.
	Düzey 3- 2 p	Problemin tam olarak anlamlandırdığını gösteren ifadelere yer verme, verilenleri ve istenenleri belirleme ancak aralarında ilişki kurmama/yanlış ilişki kurma.
	Düzey 4- 3 p	Problemin tam olarak anlamlandırdığını gösteren ifadelere yer verme, ancak verilen ve istenenleri belirlerken önemsiz hatalar yapmasına rağmen aralarında ilişki kurma.
	Düzey 5- 4 p	Problemin tam olarak anlamlandırdığını gösteren ifadelere yer verme, verilenleri ve istenenleri belirleme ve aralarında ilişki kurma.
Basitleştirme	Düzey 1- 0 p	Problemi sadeleştirmeme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirlememe ve yanlış varsayımlarda bulunma.
	Düzey 2- 1 p	Problemi bir ölçüde sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri bir ölçüde belirleme ancak yanlış varsayımlarda bulunma.
	Düzey 3- 2 p	Problemi sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirleme ve bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlarda bulunma.
	Düzey 4- 3 p	Problemi sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirleme ve gerçekçi varsayımlarda bulunma.
Matematikselleştirme	Düzey 1- 0 p	Matematiksel model oluşturmama veya yanlış model/ler oluşturma.
	Düzey 2- 1 p	Bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar doğrultusunda eksik/hatalı matematiksel model/ler oluşturma.
	Düzey 3- 2 p	Bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlara dayalı doğru matematiksel model/ler oluşturma.
	Düzey 4- 3 p	Gerçekçi varsayımlar doğrultusunda eksik/hatalı matematiksel model/ler oluşturma ve birbiriyle ilişkilendirme
	Düzey 5- 4 p	Gerçekçi varsayımlara göre gerekli matematiksel model/leri doğru bir şekilde oluşturma, model/modelleri açıklama ve birbiriyle ilişkilendirme.
Matematiksel Çalışma	Düzey 1- 0 p	Matematiksel çözüm sunmama, oluşturulan matematiksel modelleri yanlış çözme veya yanlış matematiksel modeli çözmeye çalışma.
	Düzey 2- 1 p	Eksik / hatalı oluşturulan matematiksel modellerin çözümünde hatalar/eksiklikler içerme.
	Düzey 3- 2 p	Eksik / hatalı oluşturulan matematiksel modelleri doğru çözme.
	Düzey 4- 3 p	Doğru oluşturulan matematiksel modellerin çözümünde hatalar/eksiklikler içerme
	Düzey 5- 4 p	Doğru oluşturulan matematiksel model/leri kullanarak doğru matematiksel çözüme ulaşma
Yorumlama	Düzey 1- 0 p	Elde edilen matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında yanlış yorumlama veya hiç yorumlamama.
	Düzey 2- 1 p	Hatalar içeren / eksik matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlama
	Düzey 3- 2 p	Hatalar içeren / eksik matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında doğru bir şekilde yorumlama.
	Düzey 4- 3 p	Elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumlama.
	Düzey 5- 4 p	Elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında doğru bir şekilde yorumlama.
Doğrulama	Düzey 1- 0 p	Doğrulama yaklaşımında bulunmama veya yanlış doğrulama yapma.
	Düzey 2- 1 p	Kısmen / bir ölçüde doğrulama yaklaşımında bulunma, hatalar belirlenmesine rağmen bu hataları düzeltmeme.
	Düzey 3- 2 p	Kısmen / bir ölçüde doğrulama yaklaşımında bulunma, belirlenen hataları bir ölçüde düzeltme.
	Düzey 4- 3 p	Kısmen / bir ölçüde doğrulama yaklaşımında bulunma, belirlenen hataları düzeltme.
	Düzey 5- 4 p	Doğrulama yaklaşımında bulunma, hatalar belirlenmesine rağmen bu hataları düzeltmeme.
	Düzey 6- 5 p	Doğrulama yaklaşımında bulunma, belirlenen hataları bir ölçüde düzeltme.
	Düzey 7- 6 p	Doğrulama yaklaşımında bulunma, belirlenen hataları düzeltme.

Tablo 3.3'te yer alan MYDR'nin temel amacı, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme görevlerindeki yeterlik düzeylerini değerlendirmektir. Modelleme yeterliği, bireyin modelleme sürecini başarıyla yürütebilmesi için gerekli bilgi, beceri ve tutumları kapsamaktadır (Tekin Dede, 2015). Bu rubriğin araştırmada tercih edilmesinin nedeni, modelleme sürecinin tüm aşamalarını kapsayan bütüncül bir değerlendirme aracı olmasıdır.

Rubrik, problemi anlama, basitleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama olmak üzere altı aşamadan oluşmaktadır. Her aşamada Düzey 1, 0 puan ile değerlendirilmekte; sonraki her düzey için 1 puan artırılmaktadır. Problemi anlama, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma ve yorumlama aşamaları beş düzeyden oluşurken; basitleştirme aşaması dört, doğrulama aşaması ise yedi düzeyden oluşmaktadır. Bu doğrultuda, rubrikten elde edilebilecek maksimum puan 25, minimum puan ise 0'dır.

Matematiksel modelleme süreci, dinamik yapısı gereği tıkanıklık yaşanan noktalarda döngünün önceki basamaklarına geri dönülmesine olanak tanımaktadır. Bu nedenle, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme düzeyleri gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın sonunda belirlenmiştir. MYDR ile elde edilen toplam puanlar, Tablo 3.4'te belirtilen kategorilere göre modelleme yeterlik düzeylerine dönüştürülmüştür (Tekin Dede, 2015).

Tablo 3.4: MYDR Modelleme Yeterlik Düzeyleri Puanlaması

Puan Aralığı	Modelleme Yeterlik Düzeyi
0-6 Puan	Modelleme yeterliliğine sahip değil
7-12 Puan	Bir ölçüde modelleme yeterliğine sahip
13-21 Puan	Kabul edilebilir ölçüde modelleme yeterliliğine sahip
22-25 Puan	Üst düzey modelleme yeterliliğine sahip

Tablo 3.4, MYDR'den elde edilen puanların modelleme yeterlik düzeylerine nasıl dönüştürüldüğünü göstermektedir. Buna göre; 0-6 puan modelleme yeterliğinin bulunmadığını, 7-12 puan bir ölçüde yeterlik olduğunu, 13-21 puan kabul edilebilir düzeyde yeterlik olduğunu ve 22-25 puan ise üst düzey modelleme yeterliğini ifade etmektedir.

Matematiksel çalışmalar MYDR ile değerlendirildiğinde 0-6 aralığında puan alan gruplar, modelleme yeterliğine sahip olmadıkları gerekçesiyle değerlendirme dışı bırakılmıştır. Ayrıca, tüm uygulama sürecine tam katılım sağlamayan Grup 3, Grup 4 ve Grup 9'un çalışmaları da

uzman görüşleri doğrultusunda değerlendirme kapsamından çıkarılmıştır. Bu doğrultuda, tüm matematiksel görevlerde MYDR'den en az 7 puan alan grupların çalışmaları analiz kapsamına alınmıştır.

Bu çalışmada sayısal puanlama doğrudan bilişsel süreçleri ortaya koymak amacıyla değil, modelleme yeterliğini asgari düzeyde gerçekleştiren grupları belirlemek amacıyla kullanılmıştır. Bu noktada MYDR, grupların modelleme sürecindeki eylemlerini genel olarak sınıflandırmak için nicel gösterge sunmuştur. Yeterli modelleme düzeyinde bulunan grupların yazılı ve sözlü verileri, MÇA Teorisinin bileşenleri ve üç oluşum süreci temel alınarak detaylı analiz sürecine dahil edilmiştir.

Geliştirilen matematiksel görevlerde alan ölçme kavramı ön planda tutulmuştur. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının farklı matematiksel görevlerde epistemolojik düzlem bileşenlerini nasıl kullandıkları ve bu kullanımlarının süreç içerisinde ne şekilde değişim gösterdiği incelenmiştir. Ayrıca, bu bileşenlerin kullanımı sırasında ortaya çıkan zihinsel süreçlerin belirlenmesi de araştırmanın hedefleri arasındadır. Belirtilen amaçlar doğrultusunda, öğretmen adaylarının matematiksel çalışma alanlarını yapılandırma biçimlerini detaylı şekilde incelemeye olanak sağlayan Kuzniak and Nechache (2021) tarafından tanımlanan analiz yöntemi tercih edilmiştir.

Kuzniak and Nechache (2021) tarafından tanımlanan analiz yöntemi, görevlerin yerine getirilmesi sırasında ortaya çıkan bilişsel eylemleri incelemeyi amaçlayan bilişsel görev analizine (Darses, 2001) dayanmaktadır. Bilişsel görev analizi, görev performanslarındaki bilişsel süreçlerin doğrudan gözlemlememesi nedeniyle, bu süreçleri gözlemlenebilir eylemler aracılığıyla analiz etmeyi hedeflemektedir (Leplat, 2004). Bu yaklaşım, MÇA Teorisinin epistemolojik ve bilişsel düzlem bileşenlerinin kullanım biçimlerini sistematik şekilde ortaya koymayı sağlamaktadır. Bu doğrultuda, bilişsel görev analizine dayanarak MÇA Teorisi bağlamında geliştirilen bu analiz yöntemi, matematiksel çalışmaların incelenmesini üç temel aşamada gerçekleştirmektedir.

'Yukarıdan aşağıya analiz' olarak ifade edilen ilk aşamada, matematiksel görevin çözümü sırasında gerçekleştirilen eylemler sınıflandırılmaktadır. Bu analiz türü, matematiksel çalışmanın hangi bileşenler üzerinden yürütüldüğünü ve çözüm sürecindeki organizasyonu ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu çalışmada kullanılan matematiksel görevler, model oluşturma etkinliklerinin temel özellikleri ve prensipleri dikkate alınarak geliştirildiğinden,

eylemlerin sınıflandırılması matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre gerçekleştirilmiştir. Matematiksel modelleme döngüsünde problemi anlama ve basitleştirme aşamaları ile yorumlama ve doğrulama aşamaları benzer eylemleri içermesi ve eş zamanlı gerçekleşebilmeleri nedeniyle birlikte ele alınmıştır. Bu doğrultuda, transkript edilen matematiksel çalışmalar incelenerek modelleme döngüsünün aşamalarının gerçekleştiği bölümler belirlenmiştir. Kuzniak and Nechache (2021)'ye göre yukarıdan aşağıya analiz, gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın ayrıntılı olarak analiz edilebilmesine olanak sağlayan bir *'yakınlaştırma'* yaklaşımıdır.

'Aşağıdan yukarıya analiz' olarak adlandırılan ikinci aşama, matematiksel çalışmalarda gerçekleştirilen bilişsel eylemleri epistemolojik ve bilişsel bileşenler düzeyinde detaylandırmayı hedeflemektedir. Bu analiz sürecinde, yukarıdan aşağıya analiz ile elde edilen bölümler MÇA Teorisinin bileşenleri doğrultusunda sistematik biçimde incelenmiştir. Böylece, matematiksel çalışmada gerçekleştirilen eylemlerin MÇA diyagramı üzerindeki konumları ve aralarındaki ilişkiler ortaya koyulmuştur. Bu doğrultuda, öğretmen adayları tarafından yürütülen matematiksel çalışmalar, MÇA bileşenleri arasında gerçekleşen oluşum süreçleri ve dikey düzlemler dikkate alınarak betimsel olarak yorumlanmıştır.

Verilerin analiz edilmesinde kullanılan MÇA bileşenleri ve oluşum süreçleri, modelleme sürecinde öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği farklı bilişsel eylemleri anlamlandırmak amacıyla kullanılmıştır. Semiyotik oluşum, öğretmen adaylarının problem durumunu modellemek için oluşturdukları çizimi sembol ve şekil gibi temsillerin üretimi ve bu temsiller arasında yaptıkları dönüşümleri açıklamaktadır. Enstrümantal oluşum, öğretmen adaylarının ölçüm, hesaplama ve oranlama işlemlerinde kullandıkları dijital ve fiziksel araçların matematiksel nesne üretimine katkısını açıklamaktadır. Söylemsel oluşum ise, öğretmen adaylarının çözüm yollarını gerekçelendirmeleri, matematiksel doğruluk tartışmaları gerçekleştirmeleri ve varsayımlarını ifade etmeleri gibi söylem temelli bilişsel süreçleri anlamak için kullanılmaktadır. Bu üç oluşum süreci, modelleme döngüsündeki farklı aşamalarda ortaya çıkan temsilleri, artefakt kullanımlarını ve gerekçelendirme etkinliklerini çözümlemek için bir çerçeve sağlamaktadır. Böylece, öğretmen adaylarının modelleme sürecinde sergiledikleri bilişsel ve epistemolojik eylemler değerlendirilebilmiştir. Matematiksel çalışmaların MÇA Teorisi doğrultusunda incelenmesi sırasında kodlayıcılar tarafından dikkate alınan durumlar Tablo 3.5'te ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Tablo 3.5: MÇA bileşenleri ve tanımlayıcıları

		Oluşum	Bileşenler	Tanımlayıcı
Matematiksel Çalışma Alanı	Oluşum Süreçleri	Semiyotik Oluşum	Temsiller	Matematiksel nesnelerin, sembollerin, şekillerin kullanılması ve birbiri ile ilişkilendirilmesi
			Görselleştirme	Gerçekleştirilen eylemlerde matematiksel temsilleri farklı biçimlerde ifade etme, düşünceleri sözlü veya yazılı olarak ifade etme
		Enstrümantal Oluşum	Artefakt	Geometrik çizim araçlarının veya yazılım gibi araçların kullanılması
			İnşa Etme	Artefaktlar tarafından başlatılan eylemler, dinamik geometri yazılımıyla gerçekleştirilen inşalar
		Söylemsel Oluşum	Teorik Referanslar	Matematiksel kavrama ait özelliklerin kullanılması
			İspat	Akıl yürütme süreci, gerekçelendirme yapılması
	Dikey Düzlemler	[Sem-Ens]		Matematiksel nesnelerin görselleştirilerek temsil edilmesi sürecinde artefaktlardan yararlanılması, Artefaktın matematiksel temsilin kullanılabileceği şekilde uygun hale getirilmesi Dinamik geometri yazılımları kullanarak şeklin belirlenmesi ve görselleştirilmesi
		[Ens-Söy]		Akıl yürütme sürecinin artefaktlar ile doğrulanması, gerekçelendirilmesi Teorik referansların artefaktlar ile zenginleştirilmesi Teorik referansta yer alan argümanlar ile inşa sürecinin gerçekleşmesi
		[Sem-Söy]		Akıl yürütme ile mantıksal açıklamalar yapmak Teorik referansları kullanarak görselleştirme, farklı temsil biçimlerine dönüştürme Görselleştirme sürecinin akıl yürütme ile koordine bir şekilde kullanılması

Analizin son aşamasında, yukarıdan aşağı analiz ve aşağıdan yukarı analiz aşamalarında elde edilen bulgular bütüncül olarak değerlendirilmiştir. Bu aşamada, tamamlanan matematiksel çalışmaların eksiksiz olup olmadığı, ulaşılan matematiksel sonucun doğruluğu, kavramsal tutarlılığı ve modelleme sürecinin geçerliliği incelenmiştir. Ayrıca, gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın hangi oluşum süreçleri ve hangi dikey düzlemler ile sınırlı kaldığı belirlenmiştir. Bu değerlendirme, modelleme sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve epistemolojik unsurların bütünsel analizini sağlamayı amaçlamaktadır.

Video kayıtlarının izlenmesinin ardından, her grubun modelleme sürecine ilişkin tüm söylemleri yazılı olarak transkript edilmiştir. Transkriptler ayrıntılı şekilde incelenerek grupların gerçekleştirdiği matematiksel çalışmalar betimsel olarak ifade edilmiştir. Betimsel

olarak ifade edilen matematiksel çalışmalar MAXQDA 24 nitel analiz yazılımında modelleme döngüsünün her bir aşaması (Blum and Leiß, 2007) temel alınarak bölümlere ayrılmış ve kodlanmıştır. Modelleme döngüsünün aşamalarına göre ayrılarak kodlanan bölümler, öncelikle MYDR çerçevesinde incelenerek grupların modelleme yeterlikleri belirlenmiştir. 'Bir ölçüde modelleme yeterliğine sahip' ve üzerindeki seviyede modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenen grupların matematiksel çalışmaları Kuzniak and Nechache (2021) tarafından tanımlanan analiz yöntemi doğrultusunda analiz edilmiştir. Bu noktada, grupların gerçekleştirdiği her bir eylem MÇA Teorisinin bileşenleri temel alınarak kodlanmıştır. Hangi eylemde hangi bileşenlerin kullanıldığı, söz konusu eylemlerde hangi oluşum süreçlerinin gerçekleştirildiği ve matematiksel çalışmanın hangi dikey düzlemler üzerinde yürütüldüğü belirlenerek MAXQDA 24 yazılımında kodlanmıştır. Son olarak, matematiksel çalışmanın modelleme döngüsü ve MÇA diyagramı içerisinde nasıl bir dolaşım gösterdiği belirlenmiş ve bu dolaşım raporlaştırılarak, süreç tabloları ile desteklenmiştir.

Kodlamalar bir matematiksel görev için her biri araştırma kapsamında görev almış iki araştırmacı tarafından bağımsız olarak yürütülmüş ve elde edilen kodlamalar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte, öğretmen adaylarının matematiksel görevler sırasında gerçekleştirdiği eylemler Tablo 3.5'te yer alan MÇA bileşenleri ve tanımlayıcıları göz önünde bulundurularak kodlanmıştır. Kodlayıcılar arası uyum, yüzdelik uyum yöntemiyle hesaplanmış ve iki kodlayıcı arasındaki uyumun %82,14 olduğu belirlenmiştir. Bu bulgu, veri analiz sürecinin tutarlılığı açısından yeterli görülmektedir (Miles and Huberman, 1994). Bu doğrultuda, diğer matematiksel görevlere ilişkin analiz süreci araştırmacı tarafından yürütülmüştür.

3.5 Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Lincoln and Guba (1985), bilimsel çalışmalarda geleneksel olarak kullanılan geçerlik ve güvenirlik kavramları yerine doğruluk (trustworthiness) kavramını öne sürerek, nitel çalışmalarda geçerlik ve güvenirliğin inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlık ve teyit edilebilirlik boyutlarında ele alınması gerektiğini belirtmiştir (Erlandson et al.'dan, 1993; Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu çalışmada, araştırmanın doğruluğunu ve niteliğini artırmak amacıyla bu stratejiler dikkate alınmıştır. Kullanılan stratejiler ve yapılan uygulamalar aşağıda sunulmuştur.

*İnandırıcılık, b*ilimsel çalışma sürecinde elde edilen bulguların gerçekliğini ve sonuçların güvenilirliğini ifade etmektedir. Yıldırım ve Şimşek (2021)'e göre, çalışmanın inandırıcı olabilmesi için bulguların nesnel kanıtlarla desteklenmesi, sürecin tutarlı yürütülmesi ve

sonuçların benzer durumlarda geçerli olması gerekmektedir. Bir çalışmanın inandırıcılığının artırılması amacıyla farklı stratejiler önerilmektedir (Lincoln and Guba, 1988; Miles and Huberman, 1994; Shenton, 2004). Bu çalışmada inandırıcılığın sağlanabilmesi amacıyla aşağıda sunulan stratejiler uygulanmıştır:

- Uzun süreli etkileşim amacıyla 4 haftalık uygulama süreci yürütülmüştür.
- Sürekli gözlem için bilgisayar ekranı, çalışma kağıtları ve grup tartışmaları video ve ses kaydına alınmıştır.
- Çeşitleme stratejisi kapsamında video, ses, yazılı çalışma yaprakları ve grup raporları birlikte analiz edilmiştir.
- Uzman görüşleri doğrultusunda matematiksel görevlerde düzenlemeler yapılmıştır.
- Kodlayıcılar arası güvenlik için iki uzman tarafından yapılan kodlamalar karşılaştırılarak uyum oranı belirlenmiştir.
- Ayrıntılı betimleme amacıyla transkriptlerden doğrudan alıntılara yer verilmiştir.
- Katılımcı dürüstlüğünün desteklenmesi amacıyla gönüllü katılımcılar seçilerek, açık sözlülük teşvik edilmiş ve elde edilen sonuçların doğru-yanlış şeklinde değerlendirilmediği belirtilmiştir.

Bu stratejiler, çalışmanın inandırıcılığını artırarak bulguların güvenilir ve geçerli olmasına katkı sağlamıştır.

Aktarılabilirlik, nicel araştırmalarda elde edilen bulguların, benzer özelliklere sahip farklı ortamlarda uygulanabilirliğini ifade etmektedir. Nicel araştırmalarda istatistiksel yöntemlerle evrene genelleme yapılabilirken, nitel çalışmalarda genelleme mümkün görülmemektedir. Bu nedenle Lincoln and Guba (1985), nitel çalışmalarda genelleme yerine aktarılabilirlik kavramının kullanılmasını önermektedir. Araştırma sonuçları doğrudan genellenemese de farklı ortamlarda fikir verici nitelikte olabilmektedir.

Erlandson et al. (1993), bir çalışmanın aktarılabilirliğini artırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerinin kullanılmasını önermektedir. Bu çalışmada da aktarılabilirliği sağlamak amacıyla, problem durumu ve amacı, katılımcıların seçimi, matematiksel modelleme etkinliklerinin geliştirilmesi, yönlendirilmiş keşif soruları, pilot ve asıl uygulama süreçleri ile veri toplama ve analiz aşamaları ayrıntılı şekilde betimlenmiştir.

Böylece, farklı araştırmacıların çalışmanın yürütülüşünü ve bağlamını anlaması ve benzer ortamlara aktarması kolaylaştırılmıştır.

Tutarlık, nitel çalışmalarda olay ve olguların dinamik yapısı nedeniyle önemli bir kavram olarak öne çıkmaktadır. Çalışma sırasında ortaya çıkan eylemler, zamana ve koşullara bağlı olarak değişebilir. Bu nedenle, nicel çalışmalardaki gibi doğrudan güvenirlik çalışması yapılmamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2021).

Tutarlık, olaylardaki değişkenliği kabul ederek, bu değişkenliği araştırma sürecine yansıtabilmeyi amaçlamaktadır. Erlandson et al. (1993), tutarlılığın arttırılması için tutarlık incelemesi yapılmasını önermektedir. Tutarlık incelemesi; veri toplama araçlarının geliştirilmesi, verilerin toplanması ve analiz süreçlerinde araştırmacının tutarlı davranıp davranmadığını ortaya koymaktadır.

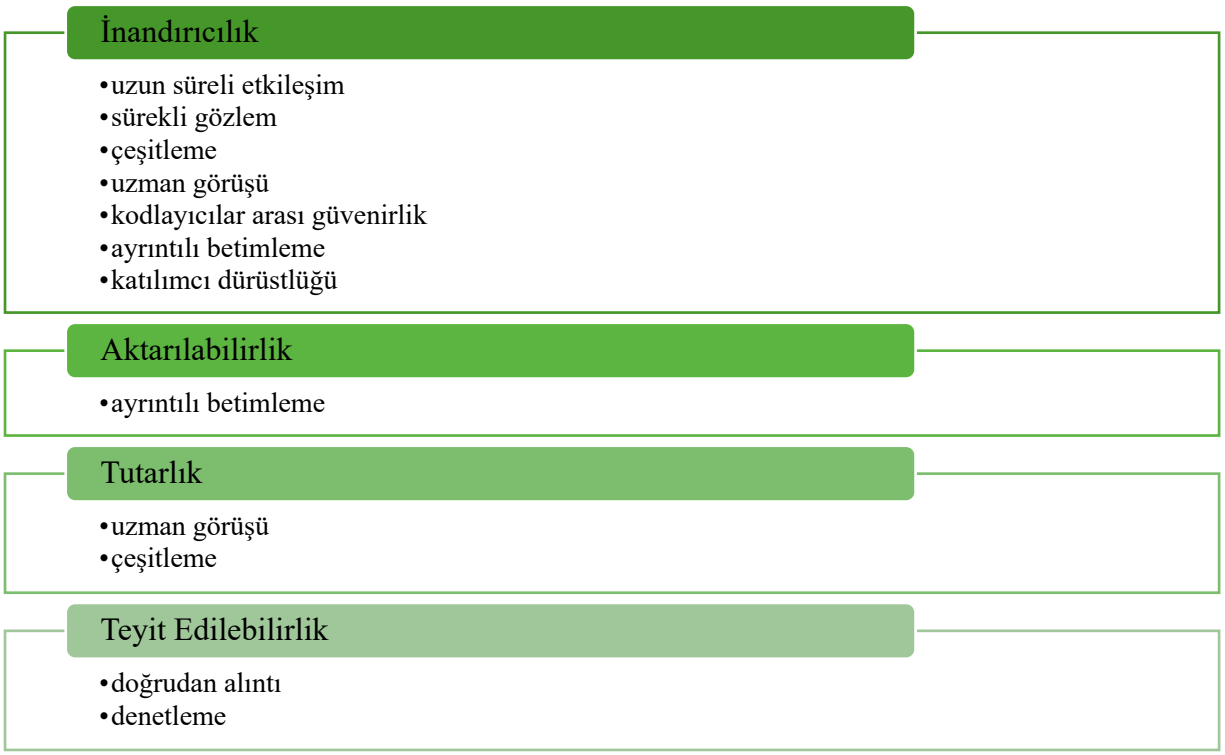
Bu çalışmada, tutarlılığı sağlamak amacıyla, araştırma sorularının oluşturulması, desenin belirlenmesi, modelleme etkinliklerinin geliştirilmesi, veri toplama ve analiz süreçlerinin her aşamasında tez izleme komitesinde yer alan uzmanların görüşleri alınmıştır. Ayrıca, video ve ses kayıtlarının çalışma yapraklarıyla karşılaştırmalı olarak analiz edilmesi, verilerin tutarlı ve bütüncül şekilde değerlendirilmesine katkı sağlamıştır.

Teyit Edilebilirlik, nitel araştırmalarda nesnellik kavramının karşılığı olarak kullanılmaktadır. Bilimsel çalışmaların öznel yargılardan uzak olması beklenmektedir. Ancak nitel araştırmalarda nesnelliğin tam olarak sağlanamayacağı, az da olsa araştırmacı etkisinin bulunabileceği belirtilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Lincoln and Guba (1985), bu nedenle nicel araştırmalarda kullanılan nesnellik kavramı yerine teyit edilebilirlik kavramını önermektedir.

Teyit edilebilirlik, elde edilen sonuçların toplanan verilerle karşılaştırılarak doğrulanmasını ve sonuçların raporlaştırılarak sunulmasını içerir. Erlandson et al. (1993), bu kapsamda teyit incelemesi kavramını öne sürmüş ve araştırmada ulaşılan sonuç, yorum ve önerilerin, toplanan ham veriler aracılığıyla alandaki uzmanlar tarafından teyit edilebilir olması gerektiğini belirtmiştir.

Bu çalışmada, teyit edilebilirliği sağlamak amacıyla, bulguların sunulması sırasında ses kayıtlarının yazıya dökülmesiyle elde edilen transkriptlerden yapılan doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Bunun yanı sıra, verilerin güvenirliğini arttırmak için video kayıtları, çalışma yaprakları ve grup raporları arasında üçgenleme yapılmıştır. Ayrıca, veri analiz sürecinde yapılan kodlamalar ve oluşturulan temalar tez danışmanı ve alan uzmanlarıyla birlikte gözden geçirilmiştir. Asıl uygulama sürecine ilişkin video ve ses kayıtları ile çalışma yaprakları güvenli şekilde saklanmış ve gerektiğinde uzman erişimine açık tutulmuştur.

Bu çalışmada güvenirlik ve geçerliğin sağlanabilmesi için gerçekleştirilen uygulamalara ilişkin özet Şekil 3.9'da verilmiştir:



Şekil 3.9: Geçerlik ve Güvenirlik İçin Yapılan Uygulamalar

4. BULGULAR

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme etkinliği içeren matematiksel görevleri çözmek için gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalar, MÇA Teorisinin bileşenleri ışığında incelenmiştir. Matematiksel görevlerin modelleme etkinliği içermesi nedeniyle gerçekleştirilen matematiksel çalışmaların modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda yürütülmesi beklenmiştir. Analiz sürecinde, bazı grupların matematiksel çalışmalarını modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda sıralı ve bütüncül şekilde yürüttüğü, bazı grupların ise önceki aşamalara geri dönüşler yaparak yürüttüğü belirlenmiştir. Matematiksel çalışmaların modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda ideal olarak sıralı bir şekilde gerçekleştirilmesi düzenli, modelleme döngüsünün geride kalan aşamalarına geri dönüşlerin gerçekleştirilmesi düzensiz matematiksel çalışma olarak değerlendirilmiştir (Şahal ve Özdemir, 2025). Asıl uygulama süreci boyunca en az bir matematiksel çalışmaya katılmamış olan gruplara ait veriler çalışmanın bütünlüğü düşünülerek analiz dışı bırakılmıştır. Bu noktada, analiz dışı bırakılan gruplar Grup 3, Grup 4 ve Grup 9'dur. Bulgular bölümünde, her bir matematiksel görevin çözümü sırasında ortaya konan çalışmalar, modelleme döngüsü aşamaları ve MÇA Teorisi bağlamında ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Matematiksel çalışmaların derinlemesine analizine geçmeden önce, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterliklerini değerlendirmek amacıyla kullanılan MYDR'den elde edilen puanların genel dağılımına yer verilmiştir. Bu puanlar, her bir grubun matematiksel modelleme görevindeki yeterlik düzeylerini ortaya koymakta ve bulguların yorumlanmasında temel bir referans oluşturmaktadır. Tablo 4.1'de grupların her bir matematiksel görev için MYDR'den aldıkları puanlar ve ilgili yeterlik düzeyleri sunulmuştur.

Tablo 4.1: Matematiksel görevlere göre MYDR'den elde edilen puanlar ve yeterlik düzeyleri

		Matematiksel Modelleme Döngüsü							Modelleme
		PA	B	M	MOÇ	Y	D	Toplam	Yeterliği
Stadyum	G1	3	2	2	3	1	1	12	Bir ölçüde yeterli
	G2	4	2	2	4	4	2	18	Kabul edilebilir
	G5	3	3	3	2	0	0	11	Bir ölçüde yeterli
	G6	3	3	2	2	0	0	10	Bir ölçüde yeterli
	G7	3	2	2	4	3	2	16	Kabul edilebilir
	G8	3	2	1	2	0	0	8	Bir ölçüde yeterli

Tablo 4.1 (Devam)

Basketbol	G1	3	2	1	1	1	0	8	Bir ölçüde yeterli
	G2	3	3	4	3	1	0	14	Kabul edilebilir
	G5	3	2	2	2	1	0	10	Bir ölçüde yeterli
	G6	2	2	2	2	0	0	8	Bir ölçüde yeterli
	G7	3	2	2	3	1	0	11	Bir ölçüde yeterli
	G8	3	2	2	3	1	0	11	Bir ölçüde yeterli
Mostar	G1	3	3	4	4	3	1	18	Kabul edilebilir
	G2	3	3	4	4	3	1	18	Kabul edilebilir
	G5	2	2	1	1	0	0	6	Yetersiz
	G6	2	1	1	0	0	0	4	Yetersiz
	G7	3	3	4	3	2	2	17	Kabul edilebilir
	G8	3	2	2	4	3	1	15	Kabul edilebilir
Epoksi	G1	4	3	3	1	2	1	14	Kabul edilebilir
	G2	4	3	4	4	4	4	23	Üst düzey
	G5	2	1	1	0	0	0	4	Yetersiz
	G6	1	1	1	0	0	0	3	Yetersiz
	G7	4	3	4	3	1	1	16	Kabul edilebilir
	G8	4	3	4	4	3	2	20	Kabul edilebilir

Tablo 4.1 incelendiğinde, grupların her bir matematiksel görevde MYDR'den elde ettikleri puanlar ve buna karşılık gelen modelleme yeterlik düzeyleri görülmektedir. Yapılan değerlendirme sonucunda, en az bir etkinlikte MYDR'den 0-6 puan alan Grup 5 ve Grup 6'nın matematiksel çalışmaları, modelleme yeterliğine sahip olmamaları nedeniyle değerlendirme dışı bırakılmıştır. Buna karşılık, tüm etkinliklerde MYDR'den en az 7 puan alan Grup 1, Grup 2, Grup 7 ve Grup 8'in matematiksel çalışmaları, MÇA Teorisinin bileşenleri doğrultusunda detaylı olarak incelenmiş ve bulgular bölümünde sunulmuştur. Bu tablo, bulguların yorumlanmasında temel bir referans oluşturarak her grubun modelleme sürecindeki konumunu ortaya koymaktadır.

MYDR sonuçları incelendiğinde, Stadyum görevinde Grup 2 ve Grup 7'nin kabul edilebilir düzeyde modelleme yeterliği gösterdiği, Grup 1 ve Grup 8'in ise bir ölçüde yeterli düzeyde modelleme yeterliğine sahip olduğu görülmektedir. Stadyum görevine ilişkin modelleme döngüsü analizinde, öğretmen adaylarının problemi anlama, basitleştirme, matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında ortalama düzeyde yeterlik sergilediği; ancak yorumlama ve doğrulama aşamalarında zayıf kaldıkları belirlenmiştir.

Basketbol görevinde ise Grup 1, Grup 7 ve Grup 8'in kabul edilebilir, Grup 2'nin ise bir ölçüde yeterli düzeyde modelleme yeterliği sergilediği görülmektedir. Basketbol görevinde de Stadyum görevine benzer şekilde, problemi anlama, basitleştirme ve matematikselleştirme aşamalarında ortalama düzeyde, yorumlama ve doğrulama aşamalarında ise düşük düzeyde yeterlik sergilenmiştir.

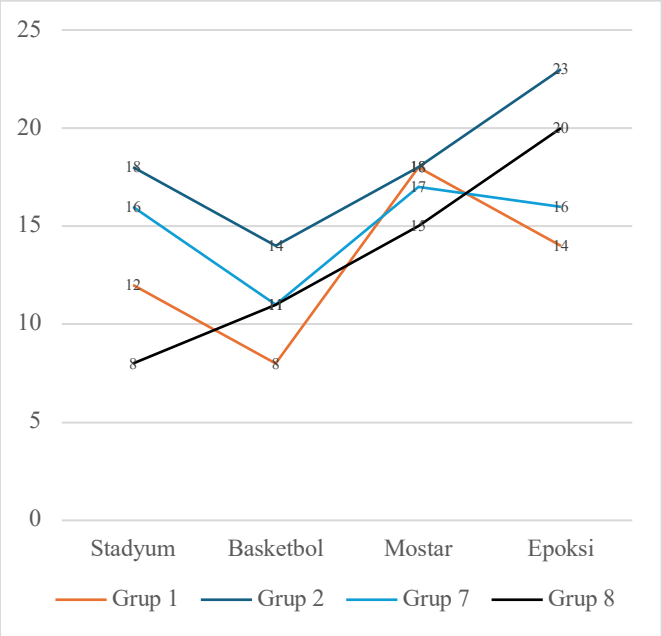
Mostar görevinde, tüm grupların kabul edilebilir düzeyde modelleme yeterliği sergilediği görülmektedir. Bu görevde, öğretmen adaylarının matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında süreci daha etkili yönettikleri; ancak yorumlama ve doğrulama aşamalarında yine zayıflıklar bulunduğu fark edilmiştir.

Epoksi görevinde ise Grup 2'nin üst düzey modelleme yeterliğine ulaştığı, diğer grupların ise kabul edilebilir düzeyde modelleme yeterliği sergilediği görülmektedir. Matematiksel görevlerin sırayla gerçekleştirildiği göz önünde bulundurulduğunda, grupların modelleme yeterliklerinde genel bir artış eğilimi olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada MÇA Teorisi çerçevesinde analiz edilen dört grup dışında kalan Grup 5 ve Grup 6'nın matematiksel çalışmaları incelendiğinde, verilen ve istenen niceliklerin belirlenmesine rağmen bu nicelikler arasında anlamlı ilişkiler kurulamadığı, geçersiz varsayımlar oluşturulduğu ve problemleri sadeleştirmekte güçlük yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca alan ölçme kavramına yönelik olarak gerçekleştirilen gerekçelendirmelerde yetersiz kalındığı, teknolojik araçları kullanmakta tereddüt edildiği ve matematiksel temsiller yerine sezgisel yaklaşımlar sergilediği belirlenmiştir. Bu bulgular, özellikle modelleme sürecinin ilk aşamalarında epistemolojik düzlemdeki bileşenlerin kullanılmasının önemli olduğunu göstermektedir. Söz konusu grupların, temsil oluşturma, artefakt kullanımı ve akıl yürütme süreçlerinde yaşadığı tıkanmalar matematiksel görevin tamamlanmamasına neden olmuştur. Bu doğrultuda, modelleme döngüsünün ilk aşamasında devreye sokulamayan MÇA bileşenleri modelleme sürecinin nasıl sekteye uğrayabileceğine dair ipuçları sunmaktadır.

Genel olarak, öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerinin görev türüne bağlı olarak değişkenlik gösterdiği ve özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında gelişime ihtiyaç duydukları belirlenmiştir. Matematiksel modelleme sürecini başarıyla tamamlayan ve

MYDR'den 7 ve üzerinde puan elde eden grupların puanlarına ilişkin grafik Şekil 4.1'de sunulmuştur.



Şekil 4.1: Matematiksel çalışmalarda MYDR'den elde edilen puanlar ve yeterlik düzeyleri

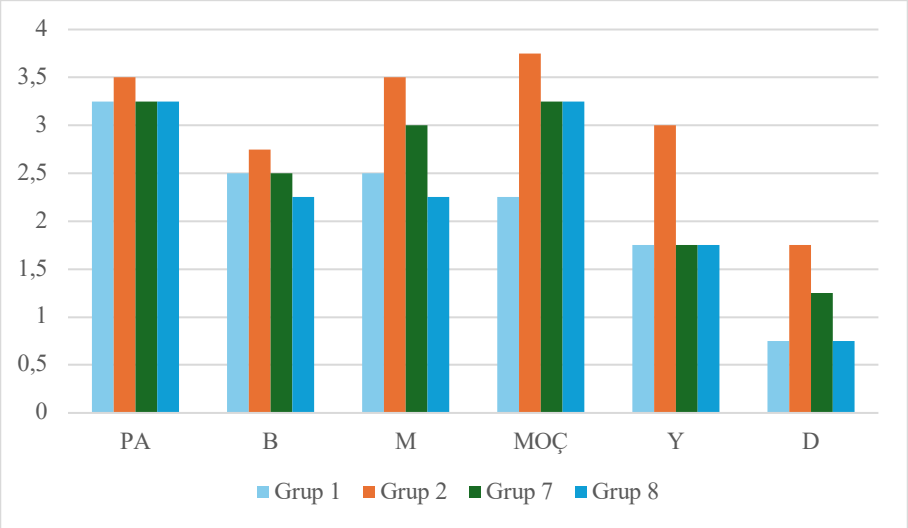
Şekil 4.1 incelendiğinde, matematiksel görevlerin ilerlemesiyle birlikte grupların modelleme yeterliklerinde genel olarak bir gelişim eğilimi olduğu görülmektedir. Özellikle Grup 8, sürece düşük seviyede modelleme yeterliği sergileyerek başlamış, ancak süreç sonunda üst düzeye yakın bir yeterlik seviyesine ulaşmıştır. Bu gelişimin, matematiksel modelleme döngüsünün son aşamasında gerçekleştirilen sunumlar ve sınıf tartışmalarından etkilendiği söylenebilir.

Grup 1 ve Grup 7'nin, Basketbol görevinde modelleme yeterliklerinde geçici bir düşüş yaşadığı, ancak sürecin sonunda tekrar gelişim gösterdiği dikkat çekmektedir. Bu durum, farklı görevlerin içerik ve temsil gereksinimlerinin modelleme yeterliklerini farklı şekillerde etkileyebileceğini göstermektedir.

Grup 2'nin ise süreç boyunca dengeli bir performans sergilediği ve her görevde modelleme yeterliklerini istikralı bir şekilde sürdürdüğü görülmektedir. Özellikle Epoksi görevinde Grup 2'nin üst düzey yeterlik seviyesine ulaşması, sürecin sonunda elde edilen deneyimlerin modelleme yeterliği üzerinde önemi bir katkısı olduğunu göstermektedir.

Genel olarak, grupların modelleme yeterliklerinde görevler ilerledikçe olumlu yönde gelişmeler yaşandığı; ancak gelişimin grup dinamikleri, görev içeriği ve tartışma ortamları gibi faktörlere bağlı olarak değişkenlik gösterdiği söylenebilir.

Bu genel yeterlik bulgularının yanı sıra, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde problemi anlama, basitleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama aşamalarında sergiledikleri performans düzeylerini ayrıntılı olarak incelemek amacıyla, grupların dört görev boyunca ilgili aşamalarda elde ettikleri ortalama puanlar Şekil 4.2'de sunulmuştur.



Şekil 4.2: Grupların matematiksel modelleme döngüsü aşamalarındaki ortalama puanları

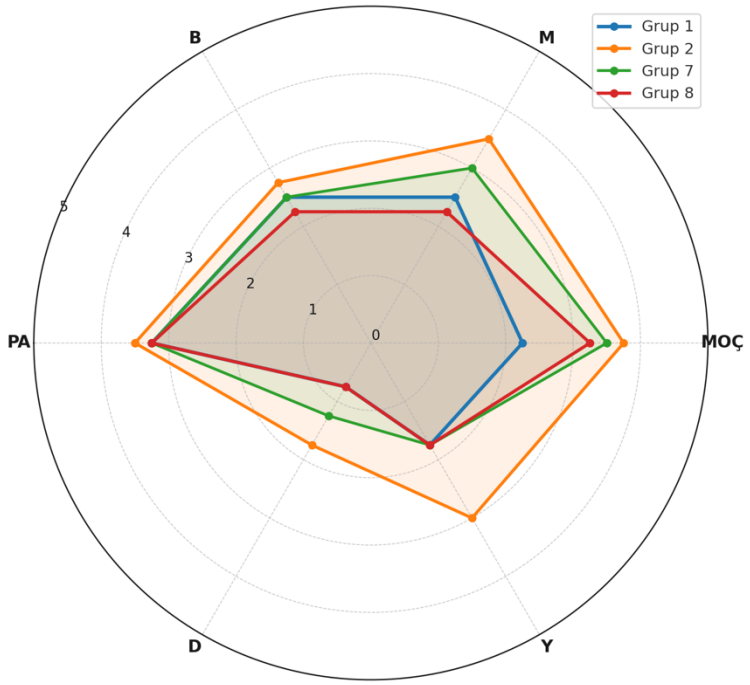
Şekil 4.2 incelendiğinde, matematiksel görevler bir bütün olarak değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında zorluk yaşadığı görülmektedir. Matematiksel sonuçların günlük yaşam bağlamında yorumlanması sürecinde, özellikle sonuçların doğrulanmasına yönelik çalışmaların eksik kaldığı dikkat çekmektedir.

Problemi anlama aşamasında grupların ortalama 3 puanın üzerinde başarı göstermesi, öğretmen adaylarının matematiksel görevlerin bağlamsal yapısını kavrayabildiğini ortaya koymaktadır. Basitleştirme aşamasında ise Grup 8'in diğer grupların gerisinde kaldığı görülmektedir. Bu durum Grup 8'in problem çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi ve gerçekçi varsayımlar oluşturulması noktasında zorlandığını göstermektedir.

Matematikselleştirme aşamasında Grup 2'nin diğer gruplara göre daha yüksek bir ortalamaya sahip olduğu görülmektedir. Bu bulgu, Grup 2'nin gerçek yaşam durumlarını matematiksel dünyaya aktarma konusunda yüksek modelleme yeterliği sergilediğine işaret etmektedir. Matematiksel olarak çalışma aşamasında ise Grup 1'in diğer gruplara göre düşük ortalamaya sahip olması, oluşturulan matematiksel modellerle ilgili çözümlerin gerçekleştirilmesi sırasında çeşitli zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Ayrıca, Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasında yaşadığı bu zorlukların, yorumlama ve doğrulama aşamalarındaki performansını da olumsuz etkilediği söylenebilir.

Genel olarak, grupların gerçekleştirdiği matematiksel çalışmaların çoğunda elde edilen matematiksel sonuçların günlük yaşam bağlamında yorumlanması ve doğrulanması aşamalarında yetersizlikler gözlemlenmiştir. Benzer şekilde, matematiksel modellerin geçerliliğinin sorgulanması, kontrol edilmesi, sonuçların doğruluğunun değerlendirilmesi ve hata düzeltme süreçleri çoğunlukla uygulanmamış veya yüzeysel olarak gerçekleştirilmiştir.

Grupların gerçekleştirdiği matematiksel çalışmaların MYDR ile incelenmesi sonucunda, modelleme döngüsünün aşamalarındaki ortalama puanların radar grafiği ile gösterimine ilişkin bulgular Şekil 4.3'te sunulmuştur.



Şekil 4.3: Grupların matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarında elde ettiği ortalama puanlar

Şekil 4.3 incelendiğinde, Grup 2'nin diğer gruplara kıyasla daha yüksek performans sergilediği görülmektedir. Matematiksel modelleme döngüsünün problemi anlama aşamasında grupların ortalama puanların birbirine yakın olduğu ve ortalama puanın 3'ün üzerinde olması Düzey 4 ve üzeri modelleme yeterliği sergilendiğini göstermektedir. Bu bulgu, matematiksel modelleme görevlerinin çözümü sırasında problem durumunun bağlamsal yönünün iyi algılandığını ve problemin başarılı şekilde tanımlandığını ortaya koymaktadır.

Basitleştirme aşamasında, grupların benzer seviyede modelleme yeterliği sergilediği görülmektedir. Bu durum, matematiksel modelleme sürecinde varsayımların geliştirilmesi ve gereksiz bilgilerin ayıklanmasında öğretmen adaylarının yeterli düzeyde başarı gösterdiğine, dolayısıyla problemin sadeleştirilmesinde etkili adımlar atıldığına işaret etmektedir.

Matematikselleştirme aşamasında, Grup 2 ve Grup 7'nin öne çıktığı görülmektedir. Gerçek yaşam durumlarının matematiksel dünyaya aktarılmasında orta düzeyde yeterlik sergileyerek matematiksel modeller oluşturabildikleri söylenebilir.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında, Grup 2'nin en yüksek ortalamaya sahip olduğu görülmektedir. Oluşturulan modellerin çözümü sırasında tüm süreç boyunca Düzey 4'e yakın performans sergilenmesi, bu grubun matematiksel stratejileri etkili biçimde kullandığını göstermektedir.

Yorumlama aşamasında, grupların elde ettiği ortalama puanların Düzey 3'e yakın olması, matematiksel sonuçları gerçek yaşam bağlamıyla ilişkilendirme noktasında eksiklikler bulunduğunu ortaya koymaktadır. Benzer şekilde, doğrulama aşamasında tüm grupların oldukça düşük modelleme yeterliği sergilediği görülmektedir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının matematiksel modellerin geçerliliğini sorgulama, farklı stratejiler üretme ve sonuçların doğruluğunu değerlendirme konusunda zorluk yaşadığını göstermektedir.

Tüm matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları dikkate alınarak değerlendirildiğinde, Grup 1'in problemi anlama ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında iyi performans sergilediği, buna karşılık yorumlama ve doğrulama aşamalarında düşük performans gösterdiği görülmektedir. Grup 2'nin genel olarak tüm aşamalarda yüksek performans sergilediği, yalnızca doğrulama aşamasında diğer aşamalara kıyasla daha düşük bir

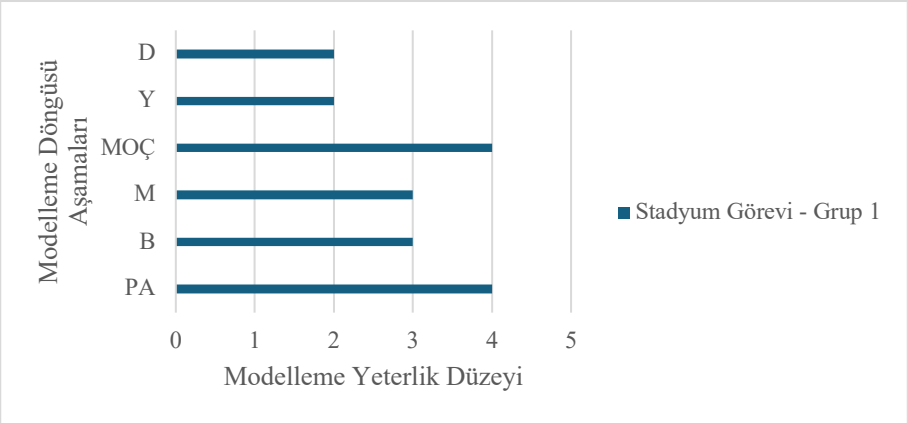
performans sergilediği belirlenmiştir. Grup 7'nin özellikle basitleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında başarılı olduğu, ancak yorumlama ve doğrulama aşamalarında zayıf kaldığı dikkat çekmektedir. Son olarak Grup 8'in problemi anlama ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında iyi performans sergilediği, buna karşın matematikselleştirme ve doğrulama aşamalarında düşük performans sergilediği görülmektedir.

4.1 Stadyum Görevinin Analizi

4.1.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Stadyum Görevi

Grup 1'in Stadyum görevini çözmek için gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin anlamlandırılmasına yönelik ifadelere yer verdikleri görülmüştür. Problemin tam olarak anlaşıldığı; ancak çözümde kullanılacak verilerin belirlenmesi sırasında bazı önemsiz hatalar yapıldığı, buna rağmen veriler arasında ilişki kurulabildiği için problemi anlama aşamasında Düzey 4'te yer aldıkları yönünde değerlendirme yapılmıştır. Basitleştirme aşamasında ise belirlenen veriler doğrultusunda bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar ortaya koydukları için Düzey 3'te oldukları belirlenmiştir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 1'in, oluşturduğu matematiksel modelin genel olarak doğru ancak kısmen eksik olduğu, bu nedenle matematikselleştirme aşamasında Düzey 3'te yer aldığı görülmüştür. Oluşturulan kısmen eksik ancak doğru modele rağmen çözüm sürecinde bazı eksikliklerin bulunduğu, buna karşın matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 4 düzeyinde performans sergilendiği belirlenmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yetersiz yorumlandığı, yalnızca kısmen doğrulama girişiminde bulunulduğu ve tespit edilen hatalar düzeltilmediği için yorumlama ve doğrulama aşamalarında Düzey 2'de kaldıkları görülmüştür.

Bu doğrultuda, Grup 1'in Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasına ilişkin MYDR sonuçlarının özeti Şekil 4.4'te sunulmuştur.



Şekil 4.4: Grup 1'in modelleme döngüsü aşamalarındaki modelleme yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 1'in problemi anlama, basitleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında yüksek, buna karşın yorumlama ve doğrulama aşamalarında düşük performans gösterdiği görülmektedir. Stadyum görevinin çözümü için gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 12 puan elde eden Grup 1'in *'bir ölçüde yeterli'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1 öğretmen adaylarının, modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için temel düzeyde matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 1 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak, MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında detaylı olarak analiz edilmiştir.

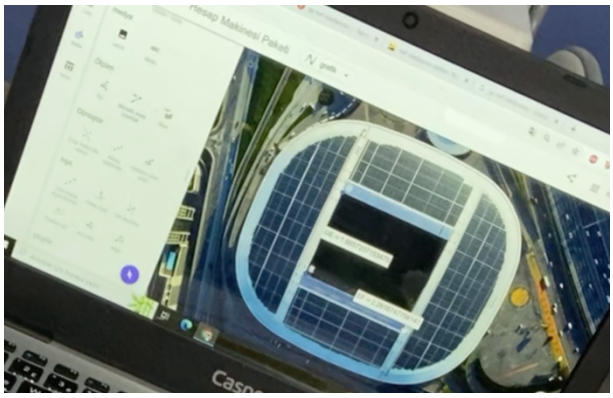
4.1.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 1 öğretmen adayları, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından, 10 dakika süreyle bireysel çalışma gerçekleştirmiştir. Bireysel çalışma sırasında öğretmen adaylarının, problem metnini okuyarak çalışma yaprağındaki yönlendirilmiş keşif sorularını yanıtlamaya çalıştığı ve bu süreçte hazır oluş sorularının yardımıyla problem durumunu anlamaya ve çözüm sürecine yönelik stratejiler belirlemeye odaklandığı görülmüştür. Grup çalışmasına geçilmesiyle birlikte, problem durumunda yer alan geometrik şekilleri belirleme çabaları dikkat çekmiş; ilk bakışta dikdörtgen şeklinin rahatlıkla tanımlandığı, ancak dikdörtgen olmayan kısımlar için net bir şekil tanımlaması yapılamadığı ifade edilmiştir. Fotoğraftaki güneş panellerinin dikdörtgen birimlerden oluştuğunu fark eden grup, problemin GeoGebra dinamik geometri yazılımı yardımıyla kolayca çözülebileceğini düşünmüştür. Ayrıca, fotoğrafta yer alan futbol sahasına

ait verilerin çözüm için kullanılabileceğini belirten Grup 1 öğretmen adayları, internet üzerinden yaptıkları araştırmada standart bir futbol sahasının kısa kenarının 68 metre, uzun kenarının ise 105 metre olduğunu öğrenmiştir. Bu doğrultuda, uygun bir fotoğraf bulmak amacıyla internet araması yapan öğretmen adaylarının, elde ettikleri fotoğrafı "kopyala-yapıştır" yöntemiyle GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktardıkları görülmüştür.

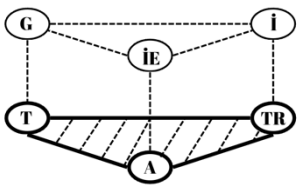
Grup 1 öğretmen adayları, futbol sahasına ait uzunluk ölçülerinin sahadaki beyaz çizgilere karşılık geldiğini ifade ederek, fotoğrafta görülen yeşil zemine ait uzunlukların farklı olabileceği düşüncesiyle hareket etmiştir. Bu doğrultuda, stadyumun çatısındaki dikdörtgen şeklinin köşelerini GeoGebra yazılımında nokta aracı ile işaretleyen Grup 1, işaretlenen noktalar arasındaki mesafeleri uzunluk ölçme aracını kullanarak belirlemiştir. Köşeleri belirlenen dikdörtgenin kenar uzunluklarının, futbol sahasının ölçülerinden büyük olması gerektiğini düşünen Grup 1, yuvarlama stratejisini kullanarak dikdörtgenin uzun kenarını 110 metre, kısa kenarını ise 70 metre olarak kabul etmiştir. Ardından, "gerçek hayatta 110 metre olan uzunluk fotoğrafta 3,36 santimetre olmaktadır" ifadesiyle, gerçek yaşam ile fotoğraf üzerindeki ölçümler arasında bir ilişki kurulduğu görülmüştür.

Bu aşamada, futbol sahasını temsil eden dikdörtgenin kenarlarının birbirine dik olması gerektiğini fark eden Grup 1, dik doğru oluşturma aracıyla köşe noktaları arasında diklik ilişkisini sağlamıştır. Nokta aracı kullanılarak işaretlenen köşeler, doğru parçası oluşturma aracıyla birleştirilerek dikdörtgen şekli tamamlanmıştır. Oluşturulan doğru parçalarının uzunlukları ise uzunluk ölçme aracı kullanılarak belirlenmiştir (Şekil 4.5). Dikdörtgen şeklinin fotoğraftaki uzunluk ölçüleri ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüleri arasında oluşturulan oran ile bir orantı sabiti elde edilmiş, bu sabit kullanılarak gerçekleştirilen matematiksel işlemler sonucunda futbol sahasının kısa kenarının 1,68 santimetre, uzun kenarının ise 2,64 santimetre olduğu hesaplanmıştır. Son olarak, bu ölçümlerin en yakın onda birler basamağına yuvarlandığı ifade edilmiştir.



Şekil 4.5: Grup 1'in uzunluk ölçme aracını kullanmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, problemin çözümünde kullanılacak olan verileri ve gerekli fotoğrafı elde etmek için interneti bir araştırma aracı olarak etkin şekilde kullandıkları görülmüştür. Ayrıca, GeoGebra dinamik geometri yazılımında nokta oluşturma ve uzunluk ölçme araçlarının kullanılması sonucunda yapılan matematiksel işlemlerde hesap makinesinden yararlanılması, epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin aktif olarak kullanıldığını göstermektedir. Bunun yanında, matematiksel düşüncelerin temsil edilmesi amacıyla fotoğraf kullanımının temsil bileşenlerinin, oran ve diklik kavramlarının özelliklerinin kullanılmasının yanı sıra yuvarlama, tahmin etme gibi akıl yürütme becerilerinin sergilenmesi ise teorik referanslar bileşenlerinin sürece dahil edildiğini ortaya koymaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.6'da sunulmuştur.



Şekil 4.6: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, referans nesne olarak kullanılacak futbol sahasının uzunluk ölçülerini dikkate alan Grup 1 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA2: Neden dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulmaya çalışıyoruz?

ÖA1: Dikdörtgenin alanını bulmak için.

ÖA2: Nasıl yani?

ÖA1: Ortadaki futbol sahası dikdörtgen olduğu için çatının alanından dikdörtgenin alanını çıkartınca panellerin alanını kalacak.

ÖA2: Ancak çatının üzerinde panel olmayan yerler var, beyaz renkle görünen. Onları da çıkarmamız gerekmez mi?

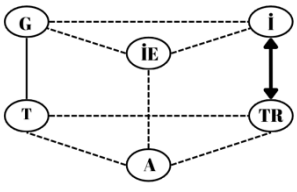
ÖA2: Panelleri tek tek, ayrı ayrı hesaplarsak daha kolay olacak bence. Senin yaptığın gibi yaparsak panel olmayan beyaz alanları da işin içine katmış oluyoruz. Bakın şimdi üstteki panellerin olduğu yeri dikdörtgen olarak kabul edelim, yukarıda kalan panelleri düşünmeyelim onlar çok küçük bir alan kaplayacak.

ÖA1: Ama saçma olacak, diğer panellerin olduğu alanı nasıl bulacağız?

ÖA2: Diğer tarafı da aynı hizadan böleriz, böylece arada kalan yer dikdörtgen olur. Sağ ve solda kalan bölgeleri de üçgen olarak düşünürüz.

ÖA3: Yani dikdörtgen ve üçgen olarak ayıracak mıyız diğer tarafı?

Bu diyalog, Grup 1 öğretmen adaylarının problemin çözümüne yönelik bir plan geliştirerek problemi matematikselleştirdiklerini göstermektedir. Ayrıca, problemin matematikselleştirilmesi sürecinde fotoğrafta yer alan geometrik şekillerin belirlenmesi ve bu şekillerin parçalara ayrılması yönünde akıl yürütme gerçekleştirdikleri görülmüştür. Alan hesaplamalarında bilinen şekillerin kullanılması, epistemolojik düzlemin teorik referanslar bileşeninin etkin biçimde işe koşulduğunu ve teorik referansların matematiksel akıl yürütme sürecini desteklediğini ortaya koymaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.7'de sunulmuştur.

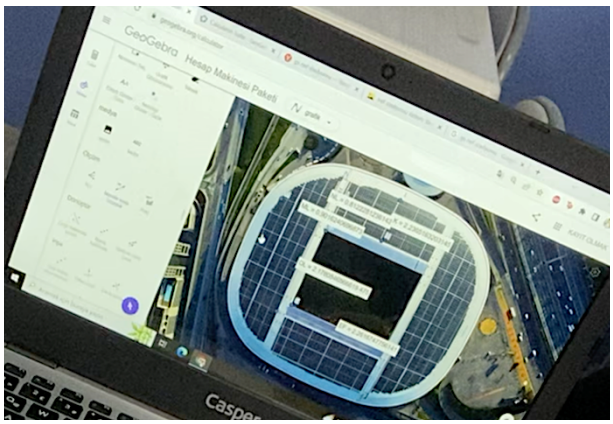


Şekil 4.7: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

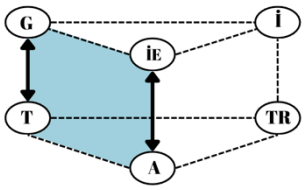
Grup tartışmasının ardından oluşturdukları matematiksel modeli çözmeye çalışan Grup 1 öğretmen adayları, stadyumun çatısında yer alan paneller arasındaki ince boşlukları da dikkate almıştır. Bu doğrultuda, oluşturulacak doğru parçalarının 90 derecelik bir açı ile kesişmesini sağlamak amacıyla, nokta oluşturma aracı kullanılarak boşlukların uçlarına noktalar eklenmiş ve bu noktalar doğru parçası oluşturma aracı ile birleştirilerek panellerin kapladığı geometrik şekli temsil eden olan dikdörtgen şekli oluşturulmuştur. Dikdörtgen oluşturulduktan sonra, paneller arasındaki ince boşlukların ihmal edileceği ifade edilmiş ve kenar uzunlukları uzunluk ölçme aracı kullanılarak belirlenmiştir (Şekil 4.8).

Stadyumun çatısının diğer tarafında kalan panellerin alanlarını hesaplamak amacıyla, panellerin şekillerine göre parçalara ayrılmasının planlandığı görülmüştür. Bu süreçte öğretmen adayları, şekillerin dört üçgen şeklinde düşünülebileceğini ifade etmiş ve "bir üçgenin alanını bulduktan sonra sonucu 4 ile çarparız, toplam alanı bulmuş oluruz" şeklinde bir çözüm stratejisi geliştirmiştir.



Şekil 4.8: Grup 1'in problemin çözümünde kullanılacak verileri elde etmesine ilişkin görsel – Stadyum görevi

Bu aşamada, artefaktın amaca yönelik şekilde nokta ve doğru parçası oluşturma araçları ile dikdörtgen şeklindeki matematiksel temsilin inşa edilmesi, enstrümantal oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, dikdörtgen temsilinin inşa edilerek düzenlenmesi ve alan hesaplamalarında bilinen geometrik şekillere ayrılması, semiyotik oluşumun gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Gerçekleştirilen bu eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.9'da sunulmuştur.



Şekil 4.9: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

GeoGebra dinamik çalışma sayfasında elde edilen verileri kullanarak matematiksel işlemler gerçekleştiren Grup 1 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA1: Yanlış yaptın galiba.
ÖA2: Hesap makinesiyle yaptım, yanlış olmaması lazım.
ÖA1: Doğru ya, çarptığımız kenar uzunluklarından biri 1'den küçük olduğu için uzun kenarın sayı değerinden küçük çıkıyor sonuç. O zaman üçgen olarak düşündüğümüz yerin alanını hesaplayalım şimdi. Üçgenin tabanının fotoğraftaki uzunluğunu 0,9 birim olarak buldum.
ÖA3: Aslında biz sayıları 1'e yuvarlarsak daha kolay işlem yaparız. Yaklaşık bir sonuç bulmak istiyoruz sonuçta.
ÖA1: Diğer kenarı da 0,8 birim olarak buldum.
ÖA2: O zaman yanlış olmaz mı bulacağımız sonuç? 0,9 ile 0,8 aynı değil. Tabi ikizkenar üçgen olarak da düşünebiliriz aslında.
ÖA1: Bence almayalım. Çünkü ikizkenar üçgen değil bunlar şu an.
ÖA2: Tamam sonucu bulduktan sonra 4 ile çarpacağız çünkü 4 tane üçgenimiz var.
ÖA3: Bir de üçgenlerin arasındaki dikdörtgen var.
ÖA1: Diğer panellerin alanıyla aynı değil mi orasının alanı?
ÖA2: Oradaki panellerin olduğu yere başka bir noktalar koyarak yine uzunluk hesaplamamız lazım. Çünkü panel olmayan bölge bu tarafta yok. İki taraf birbirinden farklı.

Bu tartışma, Grup 1 öğretmen adaylarının problemin çözümü için gerekli verileri GeoGebra dinamik geometri yazılımındaki araçları kullanarak elde ettiğini ve problemi basitleştirmek amacıyla parçalama stratejisinden yararlandıklarını göstermektedir. Ancak, bu noktaya kadar sürdürülen matematiksel çalışmanın çözüm aşamasına taşınamadığı ve problemi çözebilmek için yeniden farklı bir strateji belirlenmesi gerektiğinden dolayı matematikselleştirme aşamasına geri dönüldüğü anlaşılmaktadır.

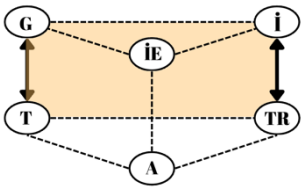
4.1.1.4 Yenilenen Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Matematikselleştirme aşamasına geri dönen Grup 1 öğretmen adayları, GeoGebra dinamik çalışma sayfasına aktarılan fotoğrafı yeniden incelemeye başlamıştır. Yapılan inceleme sırasında, stadyumun çatısındaki güneş panellerini oluşturan küçük birimlerin kullanılabileceğine dair bir akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. Bu noktada Grup 1 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA2: Küçük dikdörtgen olarak görünen yerdeki paneller 4'e 4 olacak şekilde dizilmiş. Diğer paneller de 5'e 6 olacak şekilde dizilmiş. Dikdörtgen birimler şeklinde olan panelleri düşünerek toplam alana daha kolay ulaşabiliriz.
ÖA3: O zaman sadece bir panelin kapladığı alanı bulup oradan tüm alanı hesaplayabiliriz. Böyle daha net olacak.

Bu diyalogda görüldüğü üzere, problemin çözümüne yönelik farklı bir strateji belirleyen Grup 1 öğretmen adayları, stadyum çatısındaki güneş panellerini dikdörtgen şeklinde birimlere ayırarak, çatının tamamında yer alan panellerin toplam alanına ulaşabileceklerine dair bir akıl yürütme gerçekleştirmiştir. Panellerinin dikdörtgen birimlere ayrılması, dikdörtgen şeklinin özelliklerinden yararlanılarak probleme yönelik yeni bir matematiksel model oluşturulmasına olanak sağlamıştır.

Matematiksel modelin oluşturulması sırasında, dikdörtgen temsilinin kullanılması, matematiksel nesnenin fotoğraf üzerinde görselleştirilmesi ve mantıksal akıl yürütme süreçlerinin işe koşulması semiyotik oluşum ve söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.10'da sunulmuştur.



Şekil 4.10: Grup 1'in yenilenen matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.1.5 Yenilenen Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Yeni bir strateji geliştirerek Stadyum görevini tamamlamak için matematiksel model oluşturan Grup 1 öğretmen adayları, modelin çözümü için gerekli verileri belirlemek amacıyla fotoğrafta yer alan bir tırı referans nesne olarak kullanmaya karar vermiştir. Referans nesnenin uzunluğundan yararlanarak, fotoğraftaki ölçüler ile gerçek yaşam ölçüleri arasında bir oran oluşturulmuştur. Ayrıca, dikdörtgen şeklindeki güneş panellerini temsil etmek için doğru parçaları oluşturulmuş ve uzunluk ölçme aracıyla kenar uzunlukları belirlenmiştir. Kısa ve uzun kenarların uzunluk ölçülerinin çarpılmasıyla bir panelin alanı hesaplanmış; elde edilen alan ölçüsünün gerçek yaşamdaki karşılığı, referans nesne ile kurulan oran kullanılarak bulunmaya çalışılmıştır.

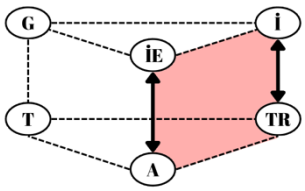
Matematiksel işlemler sırasında Grup 1 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA1: Bir panelin fotoğraftaki kısa kenarını 0,20 birim olarak bulduk. O zaman 0,20 ile 0,44'ü çarpalım. Yani panelin fotoğraftaki kısa kenarı ile uzun kenarını çarptık. Bir panelin alanını 0,088 birim kare olarak bulduk.
ÖA2: Bunu 13 metreyle çarpalım, yani tırın gerçek uzunluğu ile.
ÖA1: 1.144 bulduk.
ÖA2: Tamam, bu sonucu 0.31 ile bölelim, orantıda içler dışlar çarpımı olduğu için.
ÖA1: 3.69 çıktı.
ÖA2: Bir dakika, yanlış bulduk galiba. Çünkü 13'ten büyük bir sayı bulmamız lazımdı.
ÖA1: Niye böyle çıktı?
ÖA2: Bilmiyorum.
ÖA1: Yanlış yaptık galiba. Alanı bulmak için aslında kenarların gerçek uzunluğunu bularak mı çarpsak? Evet, burada yanlış yaptık çünkü alanda benzerlik oranının karesini almamız gerekiyordu. Orada hata yaptık.

Bu diyalog, Grup 1 öğretmen adaylarının yaptığı hatayı fark etmelerinde alan ve orantı kavramlarına ilişkin teorik referansları kullanmalarının etkili olduğunu göstermektedir. Hata fark edildikten sonra, matematiksel işlemler ilgili teorik referanslar dikkate alınarak yeniden gerçekleştirilmiştir. Bir panele ait alanın bulunmasının ardından, çatı üzerindeki toplam panel sayısı fotoğraf üzerinden sayılarak belirlenmiş ve panel sayısı ile bir panelin alanı çarpılarak

toplam alana ulaşılmıştır. Grup 1 öğretmen adayları, Stadyum görevine ilişkin matematiksel sonucu 20400 metrekare olarak bulmuştur.

Bu aşamada gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, referans nesneye ait verilerin elde edilmesi için nokta ve doğru parçası oluşturma araçlarının kullanılarak referans nesneyi temsil eden doğru parçasının oluşturulması enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği; referans nesne üzerinden fotoğraftaki uzunluk ile gerçek yaşamdaki uzunluk arasında bir oran kurulması ve bu oranın diğer nesnelere uygulanarak alan hesaplamaları yapılması sırasında teorik referansların ve akıl yürütme sürecinin işe koşulması söylemsel oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, artefaktların kullanımı ile gerçekleştirilen inşa etme süreçlerinin, teorik referanslar tarafından desteklenen akıl yürütme süreçleriyle birleşerek matematiksel çalışmanın [Ens-Söy] dikey düzleminde yürütüldüğü belirlenmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.11'de sunulmuştur.

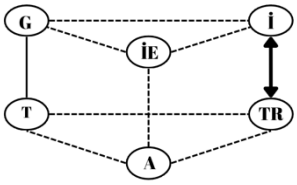


Şekil 4.11: Grup 1'in yenilenen matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.1.6 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Matematiksel sonuca ulaşılmasının ardından Grup 1 öğretmen adaylarının, *"aslında ilk yaptığımız yöntem ile işlemlerimizi devam ettirsek, bu yöntemle bulduğumuz sonuç ile karşılaştırsak, gerçek sonuç bulacağımız iki sonucun arasında bir değer olacaktır"* ifadesini kullandıkları; bu ifadeyle, ulaşılan matematiksel sonucun geçerliliğini değerlendirmeye yönelik bir karşılaştırma ve gerekçelendirme yapıldığı anlaşılmaktadır. Gerçekleştirilen bu gerekçelendirme söylemsel oluşumun ortaya konduğunu göstermektedir.

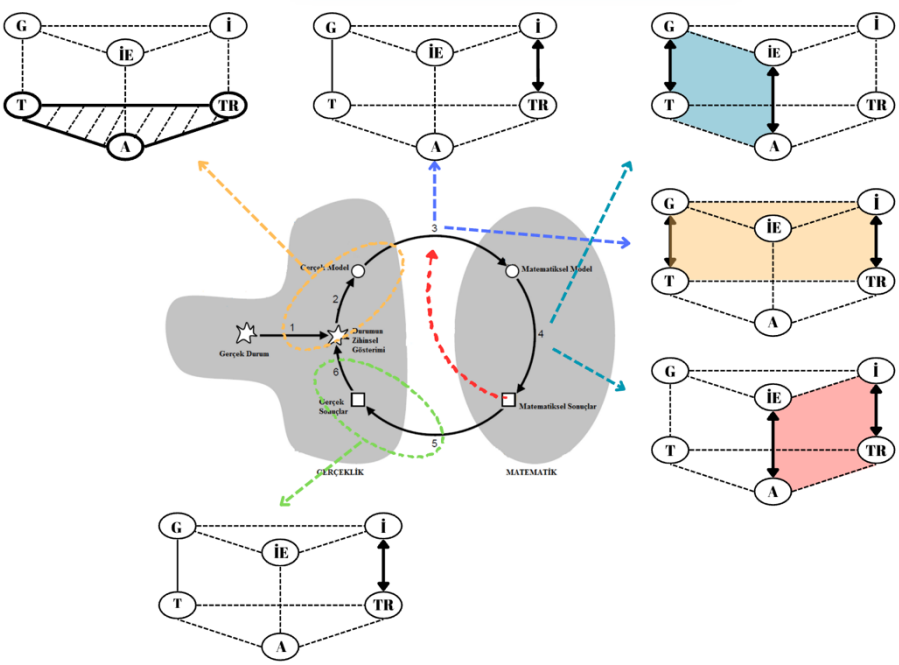
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.12'de sunulmuştur.



Şekil 4.12: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.1.7 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Stadyum görevinin çözümü için Grup 1 öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, matematiksel modelleme döngüsünün aşamaları ve MÇA Teorisi bileşenleri doğrultusunda analiz edilmiştir. Bu analize ilişkin özet Şekil 4.13'te sunulmuştur.



Şekil 4.13: Grup 1'in Stadyum görevindeki matematiksel çalışmalarının özeti

Grup 1'in çalışmasının, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında epistemolojik düzlem bileşenlerinin etkin kullanımı ile gerçekleştiği görülmektedir. Bu aşamada öğretmen adaylarının, kavramsal analiz, çıkarım yapma ve sezgisel düşünme gibi bilgiyi yapılandırma süreçlerini etkinleştirdikleri belirlenmiştir. Modelleme sürecinin ilk adımında bu eylemlerin gerçekleştirilmesi, sürecin ilerlemesi açısından kritik bir rol oynamaktadır.

Matematikselleştirme aşamasında, akıl yürütme ve matematiksel gerekçelendirme eylemleriyle söylemsel oluşumun gerçekleştiği belirlenmiştir. Böylece Grup 1, problem durumunu sözel ifadelerle destekleyerek matematiksel olarak ifade etmiştir. Ancak oluşturulan matematiksel modelin, [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemlerle çözülmeye çalışılmasına rağmen sonuca ulaşılamadığı görülmektedir. Bu eylemler sırasında teknik yetersizliklerin ve gerekçelendirme eksikliklerinin bulunduğu belirlenmiştir. Bu durum, oluşturulan matematiksel modelin yetersiz olduğu ve problemin çözümü için gerekli ilişkilerin kurulamadığını göstermektedir.

Modelin çözülememesinin ardından, Grup 1 matematikselleştirme aşamasına geri dönerek [Sem-Söy] dikey düzleminde yeni bir matematiksel model oluşturmuştur. Bu noktada, matematiksel modelleme döngüsünün esnek yapısı öne çıkmaktadır. Yeni model, artefaktların kullanımıyla gerçekleştirilen yapılandırma süreçleri ve gerekçelendirmeler sayesinde [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemler doğrultusunda çözülmüş ve matematiksel sonuca ulaşılmıştır. Son aşamada, ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanması ve doğrulanmasına yönelik gerekçeler ortaya konularak yapılan grup tartışmalarıyla söylemsel oluşumun gerçekleştiği ve matematiksel çalışmanın tamamlandığı görülmüştür.

Sonuç olarak, Grup 1'in Stadyum görevinde yürüttüğü matematiksel çalışmada, epistemolojik düzlem bileşenlerinin etkili biçimde kullanıldığı, üç oluşum sürecinin farklı aşamalarda gerçekleştirildiği ve düzlemler arası geçişin başarıyla yürütüldüğü belirlenmiştir. Ayrıca sürecin başında epistemolojik bileşenlere odaklanılması, farklı çözüm yollarının üretilmesine ve sürecin ilerletilmesine katkı sağlamıştır.

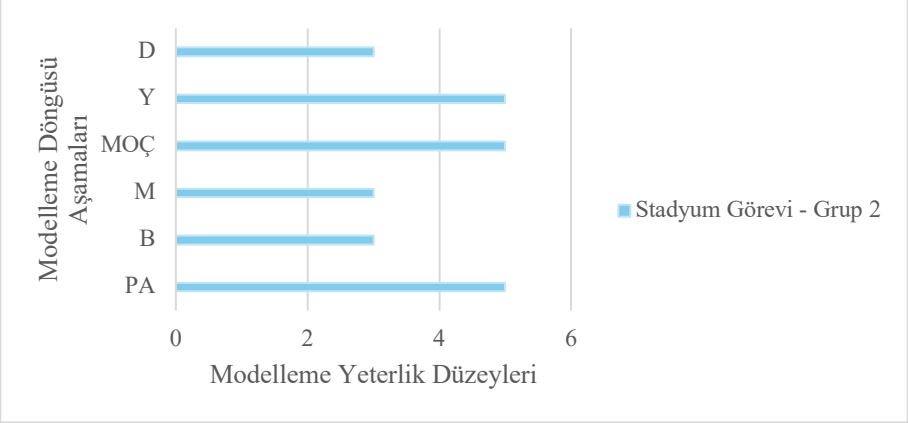
4.1.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması

Grup 2'nin Stadyum görevini çözmek için gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere verildiği; verilenle ile istenenlerin belirlenerek aralarında ilişki kurulduğu görülmüştür. Bu nedenle, problemi anlama aşamasında Düzey 5'te bulundukları belirlenmiştir. Problemin çözümünde kullanılacak veriler göz önünde bulundurularak bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar ortaya koydukları için basitleştirme aşamasında Düzey 3'te oldukları yönünde değerlendirilmiştir.

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 2, bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar doğrultusunda matematiksel görevin çözümüne yönelik doğru bir matematiksel model oluşturmuş ve bu nedenle matematikselleştirme aşamasında Düzey 3'te bulunmuştur. Doğru oluşturulan matematiksel modelin çözümünün başarıyla gerçekleştirilmesiyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 5'te oldukları görülmüştür.

Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında doğru bir şekilde yorumlanmasından dolayı yorumlama aşamasında Düzey 5'te bulundukları, ancak herhangi bir doğrulama yaklaşımında bulunmamalarından dolayı doğrulama aşamasında Düzey 1'de oldukları tespit edilmiştir.

Bu doğrultuda, Grup 2'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.14'te sunulmuştur.



Şekil 4.14: Grup 2'nin modelleme döngüsü aşamalarındaki modelleme yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, problemi anlama, matematiksel olarak çalışma ve yorumlama aşamalarında yüksek performans sergilendiği, buna karşın doğrulama aşamasında en düşük performansın gözlendiği belirlenmiştir.

Stadyum görevine ilişkin gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 16 puan elde eden Grup 2'nin, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu görülmüştür. Bu doğrultuda, Grup 2 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren

matematiksel görevin çözümünde yeterli düzeyde matematiksel çalışma yürütebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Grup 2 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında detaylı şekilde analiz edilmiştir.

4.1.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 2 öğretmen adayları, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakika süreyle bireysel çalışma gerçekleştirmiştir. Bu süreçte, problem durumu okunarak çalışma yaprağında verilen yönlendirilmiş keşif soruları yanıtlanmaya çalışılmıştır.

Google arama motorunu kullanarak problem durumunda yer alan stadyumun kuşbakışı fotoğrafını bulan öğretmen adayları, fotoğrafı bilgisayara kaydedip GeoGebra dinamik geometri yazılımına resim ekleme aracı ile aktarmıştır. Fotoğrafın incelenmesiyle bir referans nesne belirlenmesi gerektiğine karar verilmiş, stadyumun yanında bulunan bir otomobil referans nesne olarak seçilmiştir. Nokta oluşturma aracıyla otomobilin iki ucu işaretlenmiş, bu noktalar doğru parçası aracıyla birleştirilerek bir doğru parçası oluşturulmuştur. Doğru parçasının uzunluğu, yapılan inşaların görüntülendiği cebir penceresi kullanılarak 0,17 birim olarak belirlenmiştir.

Problemin anlaşılmasına yönelik olarak, stadyumun tamamının dikdörtgen mi yoksa daire/çember olarak mı ele alınacağı tartışılmıştır. Bu tartışmaya ilişkin Grup 2 öğretmen adayları arasında şu diyalog gerçekleşmiştir:

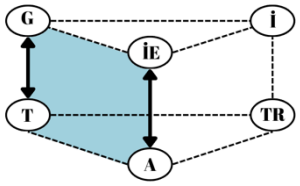
ÖA6: Aslında bir çembere benziyor stadyum. Fotoğrafta stadyumun üzerine çizilebilecek en büyük çemberi çizelim.
ÖA7: Ben de çember olarak düşünsek daha iyi olacak diye düşünüyorum.
ÖA4: Ben şekli tam anlayamadım ama dikdörtgene de benziyor bu şekil, dikdörtgen olarak da düşünebiliriz.
ÖA6: Stadyumun tamamını çember olarak düşünsek…
ÖA4: Sonra içindeki çim saha olan bölgenin alanını çıkartırız, bize çatının alanı kalır.

ÖA5: Bu stadın çatısı oval bir şekilde, ortasında da dikdörtgen bir kısım var. Bütün alandan dikdörtgenin alanını çıkartmamız gerekecek.

Yukarıdaki tartışmada, öğretmen adaylarının problem durumunda yer alan stadyumu bildikleri bir şekle benzetmeye çalışarak problemi basitleştirilmeye yönelik bir strateji izledikleri görülmektedir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesi aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Google arama motoru ve GeoGebra dinamik geometri yazılımının problemin çözüm sürecinde etkili biçimde kullanıldığı belirlenmiştir. Uygun bir fotoğrafın bulunması, epistemolojik düzlemin artefakt ve temsil bileşenlerinin kullanıldığına işaret etmektedir.

Ayrıca, referans nesnenin nokta oluşturma ve doğru parçası oluşturma araçlarıyla fotoğraf üzerinde inşa edilmesi, dinamik geometri yazılımının probleme yönelik olarak amacına uygun şekilde kullanıldığını ve bu süreçte enstrümantal oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Bunun yanında, referans nesnenin ve dikdörtgen, daire gibi geometrik şekillerin çözüm sürecinde temsil olarak kullanılması ve doğru parçaları kullanılarak durumun görselleştirilmesi semiyotik oluşumun gerçekleştiğini ortaya koymaktadır.

Gerçekleştirilen bu eylemlerin, inşa edilen matematiksel nesnelerin görselleştirme amacıyla kullanılmasına dayandığı ve bu nedenle matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde yürütüldüğü söylenebilir. Bu aşamadaki eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.15'te sunulmuştur.



Şekil 4.15: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

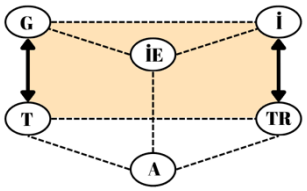
4.1.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 2 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA4: Stadyumun tamamını dikdörtgen olarak düşünürsek… fotoğraftan da görüldüğü gibi oval kısımlarda çok az bir fazlalık kısmın alanını hesaplamış olacağız. Ama biz bunu bir çember olarak düşünürsek sanki diğerine göre daha çok alanı fazladan hesaplamış olacağız.
ÖA5: Bence de dikdörtgen olarak düşünmek daha mantıklı. Oval kısımlardan daha az kayıp oluyor.
ÖA4: Tamam o zaman stadyumun şeklini dikdörtgen olarak düşünelim. Sonra ortadaki dikdörtgen sahanın alanını çıkartacağız. Kenar uzunluklarını ölçelim o zaman dikdörtgenin. Tam panellerin başladığı kısımdan ölçelim kenar uzunluklarını.
ÖA6: Nokta mı koyalım yine?
ÖA4: Direkt olarak doğru parçası oluşturabiliriz.
ÖA5: Stadyumun ortasından geçecek şekilde iki doğru parçası çizsek yeterli olur.
ÖA6: O zaman stadyumun en geniş olduğu yerlerden doğru parçası çiziyorum.
ÖA7: Tam o küçük panellerin arasında kalan beyaz görünen boşluklardan geçirelim doğru parçalarını.

Bu diyalog, Grup 2 öğretmen adaylarının problemi matematikselleştirme sürecine geçtiklerini göstermektedir. Öğretmen adaylarının stadyumu dikdörtgen veya çember şeklinde düşünmelerine yönelik yürüttükleri tartışma, akıl yürütme stratejilerinin kullanıldığını ortaya koymaktadır. Ayrıca, geometrik şekillerin özelliklerinden yararlanarak çözüm adımlarını ifade etmeleri, söylemsel oluşumun; stadyumun dikdörtgen şeklinde düşünülerek çözüm sürecinde görselleştirilmesi ise semiyotik oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir.

Gerçekleştirilen eylemlerin, akıl yürütme süreçleri doğrultusunda geometrik şekillerin görselleştirilmesine dayanması nedeniyle matematiksel çalışmanın [Sem-Söy] dikey düzleminde yürütüldüğü görülmektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.16'da sunulmuştur.



Şekil 4.16: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Problem durumunun matematikselleştirilmesinin ardından Grup 2 öğretmen adayları, oluşturdukları matematiksel modeli çözmeye başlamıştır. Stadyumun dikdörtgen şeklinde olduğu varsayımıyla, kenar uzunluklarını belirlemek amacıyla stadyumun tam ortasından geçen doğru parçaları inşa etmişlerdir. İnşa edilen bu doğru parçalarının uzunlukları sırasıyla 6,86 birim ve 8,15 birim olarak ölçülmüştür. Doğru parçalarının uzunluklarının belirlenmesi için cebir penceresinin kullanıldığı görülmüştür.

Futbol sahasının alanını belirlemek için de bir dikdörtgen oluşturan Grup 2 öğretmen adayları, doğru parçası aracını kullanarak sahanın kenar uzunluklarını 3,9 birim ve 2,9 birim olarak hesaplamıştır. Bu noktada, elde edilen uzunlukların fotoğraftaki geometrik şekillere ait olduğu, ancak gerçek yaşamdaki karşılıklarının belirlenmesi gerektiği ifade edilmiştir.

Bu doğrultuda, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında belirlenen referans nesne kullanılarak fotoğraftaki uzunluk ölçüsü ile gerçek yaşamdaki uzunluk ölçüsü arasındaki ilişki kurulmaya çalışılmış ve aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA4: Referans olarak aldığımız otomobilin gerçek hayattaki uzunluğunu kaç olarak belirlemiştik? 4,5 metre mi demiştik?
ÖA5: Otomobilin fotoğraftaki uzunluğunu 0,17 birim olarak ölçmüştük. O zaman fotoğraftaki 0,17 birim gerçek hayatta 4,5 metre ise… 6,86 birim kaç metreye karşılık gelir?

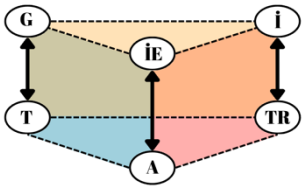
Yukarıdaki diyalogda, orantı kavramı kullanılarak gerçekleştirilen matematiksel işlemler sonucunda, dikdörtgen şeklinde temsil edilen stadyumun ve futbol sahasının kenar uzunlukları belirlenmiştir. Uzun kenar ve kısa kenarın çarpılmasıyla dikdörtgenin alanını hesaplayan öğretmen adayları, stadyumun tamamının alanını yaklaşık 39000 metrekare, futbol sahasının alanının yaklaşık olarak 7800 metrekare olarak hesaplamıştır.

Bu iki alan ölçüsü arasındaki fark hesaplanarak, stadyumun çatısının kapladığı alanın 31100 metrekare olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak, hesaplamalar sırasında fazladan alanın da hesaplamaya dahil edilmiş olabileceğini belirten öğretmen adayları, gerçek sonucun 30000 metrekare ile 31100 metrekare arasında olabileceğini ifade etmiştir.

Matematiksel modelin çözümü için gerçekleştirilen matematiksel çalışmada, stadyumun dikdörtgen şeklinde kabul edilmesiyle kenar uzunluklarının belirlenmesi amacıyla doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak ilgili doğru parçaları inşa edilmiştir. Bu doğru parçalarının uzunluk ölçülerinin, cebir penceresi yardımıyla belirlendiği ve elde edilen değerlerin matematiksel temsillerle ifade edildiği görülmektedir.

Bu süreçte, dikdörtgen şeklinin oluşturulmasıyla gerçekleştirilen inşa etme süreci enstrümantal oluşumun gerçekleştiğini, dikdörtgen temsilinin inşa edilerek matematiksel temsile dönüştürülmesi sürecinin ise semiyotik oluşumu ortaya koyduğunu göstermektedir.

Ayrıca, Grup 2 öğretmen adaylarının referans nesnenin uzunluğu ile gerçek yaşamdaki uzunluk arasında kurduğu oranı kullanarak yaptığı matematiksel işlemler sırasında, kavramsal teorik referanslardan yararlanıldığı ve matematiksel eylemlerin gerekçelendirilerek gerçekleştirildiği, dolayısıyla söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.17'de sunulmuştur.



Şekil 4.17: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamasının Analizi

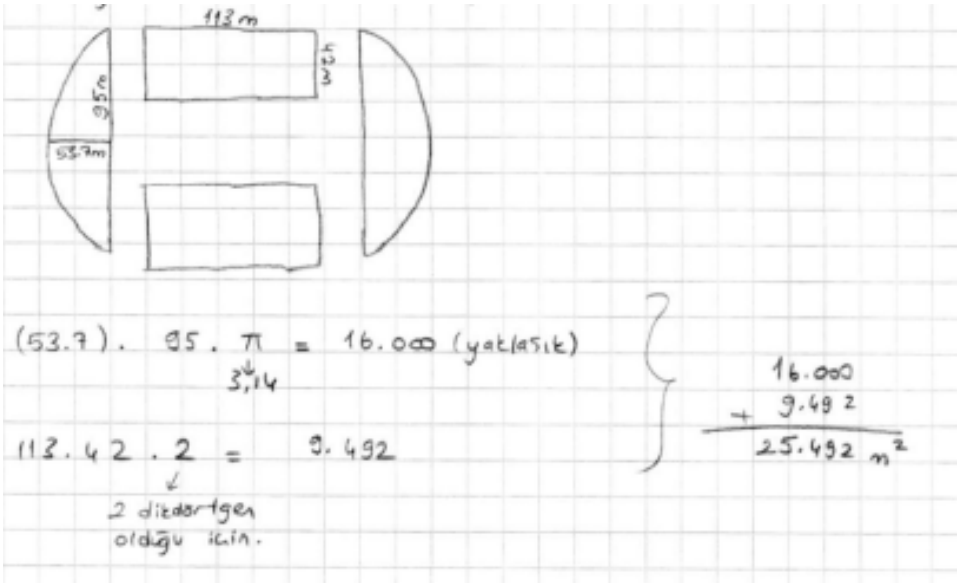
Matematiksel bir sonuca ulaşan Grup 2 öğretmen adaylarının, gerçekleştirdikleri işlemler gözden geçirerek süreci özetledikleri ve *"Alan ölçüsünü iki değer arasında bulmamızın sebebi, stadyumu dikdörtgen olarak düşündüğümüz için oval kenarların oluşturacağı alan ölçülerini yok saydık."* ifadesiyle elde edilen sonucun geçerliliğine ilişkin bir yorumda bulundukları görülmüştür.

Sonucun doğrulanması amacıyla problem durumu yeniden değerlendirilmiş; çatı üzerindeki panellerin karşılıklı olarak aynı şekle sahip olduğu ve ikişerli birleştirildiğinde elips ve kare şekillerinin elde edilebileceği belirtilmiştir. Ancak GeoGebra'da elips çizme aracı kullanılarak

çizilen şeklin güneş panellerini tam olarak kaplamayabileceği, ayrıca elips inşasında hangi tekniğinin kullanılacağı konusunda bilgi eksikliği olduğu görülmüştür.

Bu nedenle, GeoGebra üzerinde şekil inşası yapmak yerine, panellere ait uzunluk ölçülerinin belirlenmesi ve elips ile dikdörtgen alan formüllerinin kullanılması gerektiğine karar verilmiştir. Referans nesneye ait orantı sabiti kullanılarak panellere ait uzunluk ölçüleri belirlenmiş ve yapılan işlemler sonucunda elde edilen matematiksel sonucun 25492 metrekare olarak güncellendiği görülmüştür.

Yorumlama ve doğrulama aşamasında, Grup 2 öğretmen adaylarının ifade ettiği düşünceler doğrultusunda gerçekleştirilen bu matematiksel işlemlere ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.18'de sunulmuştur.



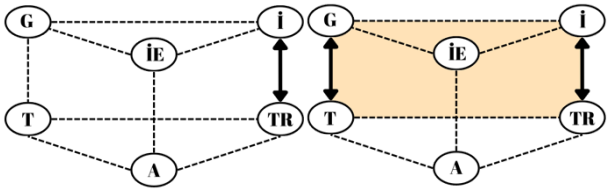
Şekil 4.18: Grup 2'nin çalışma yaprağı alıntısı

Matematiksel çalışmanın yorumlanması ve doğrulanması için yapılan eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının iki temel eylem gerçekleştirdiği görülmüştür. İlk olarak, matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemler gözden geçirilmiş; yapılan yorumların gerekçeleriyle ifade edilmesi, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir.

Ayrıca, Şekil 4.18'de yer alan eylemleri gerçekleştiren Grup 2 öğretmen adaylarının, panellerin sahip olduğu geometrik şekilleri ele alarak matematiksel temsilleri kullanmaları ve problem

durumunu görselleştirmeleri, semiyotik oluşumu gerçekleştirildiğini göstermektedir. Referans nesne aracılığıyla elde edilen oranların kullanılmasıyla gerçekleştirilen matematiksel işlemler ise söylemsel oluşumun bir diğer göstergesi olarak değerlendirilmektedir.

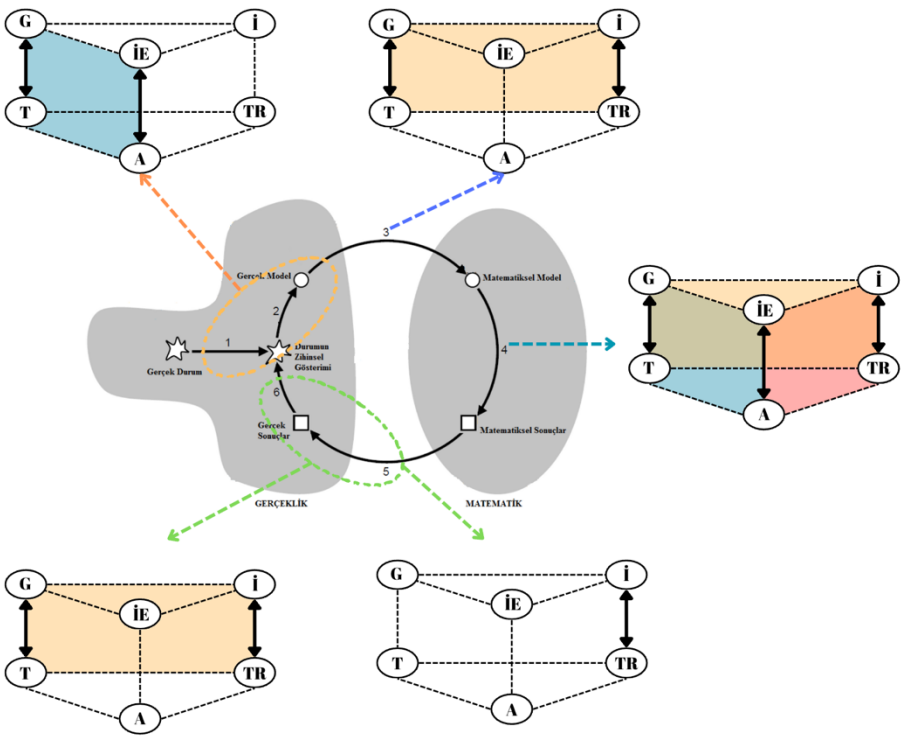
Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramları Şekil 4.19'da sunulmuştur.



Şekil 4.19: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışmaları – Stadyum görevi

4.1.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Stadyum görevinin çözümü için Grup 2 öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, matematiksel modelleme döngüsünün aşamaları ve MÇA Teorisi bileşenleri doğrultusunda analiz edilmiştir. Bu analize ilişkin özet Şekil 4.20'de sunulmuştur.



Şekil 4.20: Grup 2'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 2'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti incelendiğinde, modelleme sürecinin [Sem-Ens] dikey düzlemindeki eylemlerle başladığı görülmektedir. Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında semiyotik oluşum ve enstrümantal oluşum süreçlerinin etkin bir şekilde kullanılması, problemin yapısal olarak analiz edilmesine ve uygun araçlar yardımıyla yeniden ifade edilmesine olanak sağlamıştır. Bu durum, öğretmen adaylarının teknik ve görsel becerilerini kullanarak problem çözümüne yönelik önemli bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir.

Problemin matematiksel dünyaya aktarılması sürecinde, Grup 2 öğretmen adaylarının temsil araçlarını akıl yürütme ve gerekçelendirme becerileriyle bütünleştirerek matematiksel yapılar oluşturduğu görülmüştür. Böylece, oluşturulan matematiksel model, matematiksel dil, gerekçelendirme ve akıl yürütme becerilerinin birbirini desteklemesiyle [Sem-Söy] dikey düzleminde yapılandırılmıştır. Oluşturulan matematiksel modelin çözümü sırasında Grup 2 öğretmen adaylarının tam ve esnek bir matematiksel çalışma yürüttükleri; tek bir düzleme sıkışmadan, MÇA Teorisinde yer alan her bir bileşeni işlevsel olarak kullanarak matematiksel sonuca ulaştıkları söylenebilir.

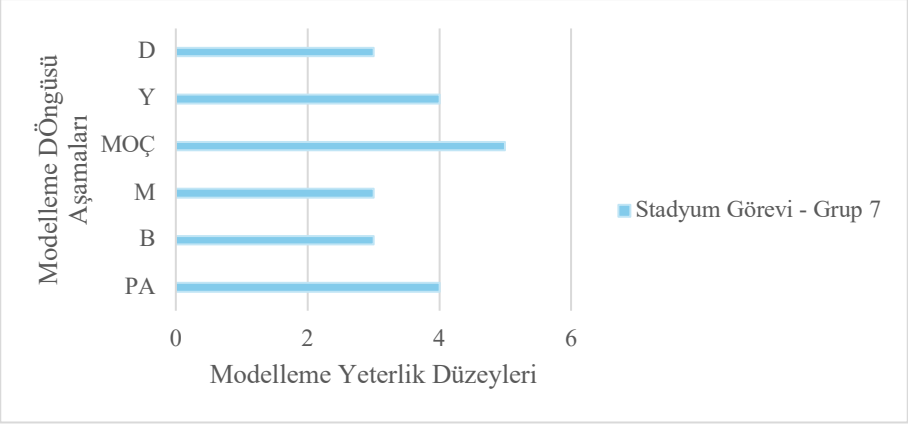
Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanması ve doğrulanması sürecinde, Grup 2 öğretmen adaylarının iki farklı eylem gerçekleştirdiği görülmektedir. İlk olarak, ulaşılan matematiksel sonuç bağlam içinde gerekçelendirilerek ifade edilmiş; ardından farklı matematiksel temsiller kullanılarak problemin çözümünün doğrulanması sağlanmış ve bu süreçte gerçekleştirilen eylemler gerekçelendirilerek matematiksel çalışma [Sem-Söy] dikey düzleminde tamamlanmıştır. Böylece, yorumlama ve doğrulama aşamasında yürütülen bu iki eylem ile matematiksel çözüm ile gerçek yaşam arasında anlamlı bir bağlantı kurma çabası sergilendiği söylenebilir.

Grup 2'nin Stadyum görevinin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışmada, üç oluşum sürecinin de problem çözme sürecinin farklı aşamalarında çeşitli eylemlerle gerçekleştirildiği görülmektedir. Bu eylemler bir bütün olarak MÇA Teorisi çerçevesinde değerlendirildiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının matematiksel çalışmalarını farklı oluşum süreçleri ile çeşitlendirdikleri, farklı boyutlarda derinlemesine düşündükleri ve matematiksel görevin bağlamı ile güçlü ilişkiler kurabildikleri anlaşılmaktadır. Sürecin başında problemin teknik ve görsel becerilerle yeniden ifade edilmesinin, sonraki aşamalara katkı sağladığı ve bu

katkının matematiksel modelleme döngüsünün herhangi bir engelle karşılaşmadan tamamlanmasına olanak tanıdığı söylenebilir.

4.1.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Stadyum Görevi

Grup 7'nin Stadyum görevini çözmek için gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmüştür. Ancak, problemin çözümünde kullanılacak olan verilerin belirlenmesi sırasında bazı önemsiz hatalar yapılmasına rağmen aralarında ilişki kurulabilmesi nedeniyle problemi anlama aşamasında Düzey 4'te bulundukları yönünde değerlendirilmiştir. Belirlenen veriler doğrultusunda bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar ortaya koymaları nedeniyle basitleştirme aşamasında Düzey 3'te yer aldıkları belirlenmiştir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, Grup 7 öğretmen adaylarının bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar doğrultusunda matematiksel görevin çözümüne yönelik doğru matematiksel model oluşturdukları için matematikselleştirme aşamasında Düzey 3'te; oluşturulan matematiksel modelin çözümünü doğru bir şekilde gerçekleştirdikleri için matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 5'te bulundukları görülmüştür. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlanması nedeniyle yorumlama aşamasında Düzey 4'te; doğrulama aşamasında ise bir ölçüde gerçekleştirilen doğrulama yaklaşımıyla belirlenen hataların kısmen düzeltilmesi sonucunda Düzey 3'te bulundukları yönünde değerlendirme yapılmıştır. Bu doğrultuda Grup 7'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesine ait bulguların özeti Şekil 4.21'de sunulmuştur.



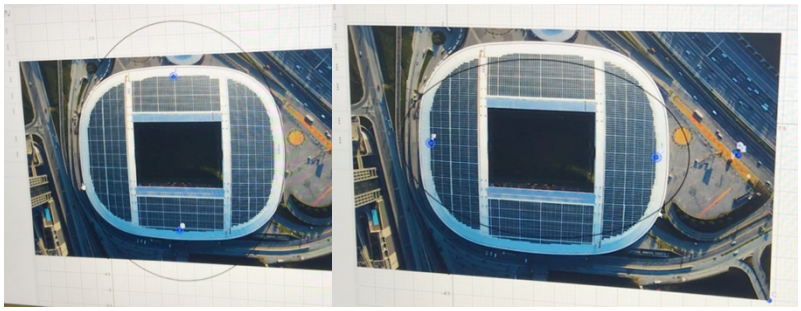
Şekil 4.21: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 7'nin matematiksel çalışmasına dengeli bir şekilde başladığı ve matematiksel olarak çalışma aşamasında en yüksek performansı gösterdiği görülmektedir. Stadyum görevine ilişkin gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 16 puan elde eden Grup 7'nin, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 7 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümüne yönelik olarak etkili bir matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 7 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak, MÇA Teorisinin bileşenleri arasında gerçekleşen oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.1.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

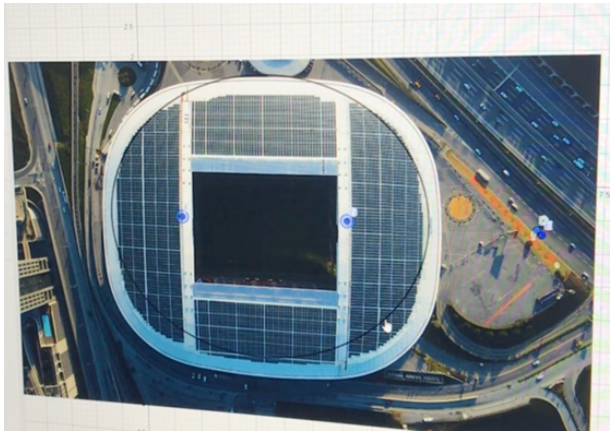
Grup7'de yer alan öğretmen adayları, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakika süreyle bireysel çalışma gerçekleştirmiştir. Bu süreçte, problem durumunu anlamaya ve yönlendirilmiş keşif sorularını yanıtlamaya yönelik bireysel değerlendirmeler yapılmıştır. Grup çalışmasına geçilmesiyle birlikte, öğretmen adayları stadyumun kuşbakışı görüntüsüne ihtiyaç duyduklarını ifade etmiş ve bu doğrultuda internet üzerinden yaptıkları araştırmayla ilgili görsele ulaşmışlardır. Elde edilen görsel, GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarılmıştır.

GeoGebra dinamik çalışma sayfasına aktarılan fotoğraf üzerinde inceleme yapan öğretmen adayları, stadyumun yanında yer alan bir otomobili referans nesne olarak belirlemiştir. Bu referans nesne üzerinde doğru parçası oluşturma aracı kullanarak bir doğru parçası inşa edilmiş ve uzunluğu ölçülmüştür. Aynı zamanda stadyumun genel formunun elipse benzediği düşünülerek, GeoGebra'nın elips oluşturma aracı yardımıyla stadyumu çevreleyen bir elips şekli oluşturulmaya çalışılmıştır. Ancak ilk oluşturulan elipsin yeterince uygun olmadığı düşünülerek farklı bir elips daha çizilmiştir. Bu sürece ilişkin görseller Şekil 4.22'de sunulmuştur.



Şekil 4.22: Grup 7'nin oluşturduğu elipslere ilişkin görsel – Stadyum görevi

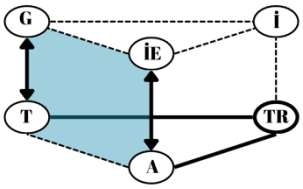
Şekil 4.22'te sunulan ekran görüntüsü incelendiğinde, Grup 7 öğretemen adayları tarafından oluşturulan elipslerin stadyumu tam olarak çevrelemediği, ayrıca elipslerin odak noktalarının güneş panellerinin sınırlarına yerleştirildiği görülmektedir. Bu duruma bağlı olarak öğretmen adayları arasında yapılan fikir alışverişi sonucunda, stadyumun daire ya da dikdörtgen şekillerinde modellenebileceğine ilişkin çeşitli fikirler ortaya atılmıştır. Ancak GeoGebra'da elips oluşturma aracı kullanılırken iki odak noktası seçilmesi gerektiğinin fark edilmesi üzerine, odak noktalarının konumu yeniden düzenlenmiş ve güneş panellerini daha uygun biçimde çevreleyen bir elips şekli oluşturulmuştur. Oluşturulan bu elipse ilişkin görsel Şekil 4.23'te sunulmuştur.



Şekil 4.23: Grup 7'nin matematiksel çalışmasından ekran görüntüsü

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesi aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, stadyumun kuşbakışı fotoğrafına ulaşmak amacıyla internetin kullanıldığı, ardından bu fotoğrafın GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarıldığı ve fotoğraf üzerinde bir referans nesneyi temsil eden doğru parçasının oluşturulduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra, stadyumun

elips şekline benzediği düşünülerek GeoGebra'daki elips oluşturma aracının kullanıldığı ve stadyumu çevreleyen elipslerin inşa edildiği görülmektedir. Bu süreçte internet aracılığıyla fotoğrafa ulaşılması ve GeoGebra dinamik çalışma sayfasındaki araçların amaca uygun biçimde kullanılması, enstrümantal oluşum ve semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen bu eylemlerin, inşa edilen matematiksel nesnelerin görselleştirilmesine yönelik olması nedeniyle, yürütülen matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştiği görülmektedir. Ayrıca, oluşturulan elipsin düzenlenmesi sırasında elips kavramına ait teorik referansların kullanılması hem inşa etme hem görselleştirme süreçlerine katkı sağlamış ve böylece matematiksel çalışma zenginleştirilmiştir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.24'te sunulmuştur.



Şekil 4.24: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

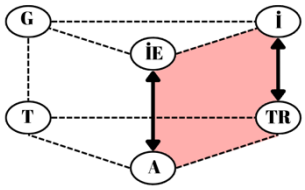
Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 7 öğretmen adayları, problem durumunun matematikselleştirilmesi amacıyla bir süre fikir alışverişinde bulunmuştur. Tartışmalar sırasında, problemin çözümü için fotoğrafta yer alan geometrik şekillerden yararlanılması ve gerçek yaşama ait verilerin bir referans nesne aracılığıyla belirlenmesi gerektiği ifade edilmiştir. Bu bağlamda, Grup 7 öğretmen adaylarından ÖA25'in aşağıdaki ifadeleri kullanılarak problemin matematikselleştirilmesine yönelik bir akıl yürütme gerçekleştirdiği görülmektedir.

ÖA25: Stadyumun yandaki bir otomobilin fotoğraftaki uzunluğunu üzerinde doğru parçası çizerek hesapladık. Sonra elipse geçeceğiz, otomobilin uzunluğu ile oranlayıp oradan veriler elde edeceğiz. En son ortadaki dikdörtgenin alanını çıkartıp güneş panellerinin olduğu yüzey alanını bulacağız.

Verilen ifade göz önünde bulundurulduğunda, öğretmen adaylarının fotoğraf üzerinde yer alan geometrik şekilleri dikkate alarak gerçek yaşam verileriyle ilişkilendirme yoluyla matematiksel

bir model oluşturmayı hedefledikleri anlaşılmaktadır. Bu süreçte hem problem bağlamının hem de çözüm stratejisinin açık bir şekilde yapılandırıldığı ve probleme ilişkin temel matematiksel unsurların belirlenerek modele dönüştürüldüğü görülmektedir.

Problem durumunu matematikselleştirmeye çalışan Grup 7 öğretmen adaylarının yürüttüğü matematiksel çalışma incelendiğinde, referans nesne üzerinde doğru parçası oluşturularak uzunluk ölçüsünün belirlendiği; oluşturulan elips üzerinde bu uzunluğun kullanılmasıyla bir oran elde edildiği ve bu oran üzerinden matematiksel işlemler gerçekleştirilerek sonuca ulaşılmasının planlandığı görülmektedir. Bu bağlamda, GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla doğru parçası oluşturulması ve uzunluk ölçüsünün belirlenmesi süreci, enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Öte yandan, referans nesne ile elde edilen oranın kullanılması ve bu orana ilişkin teorik bilgilerin dikkate alınarak bir çözüm planı yapılması, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.25'te sunulmuştur.



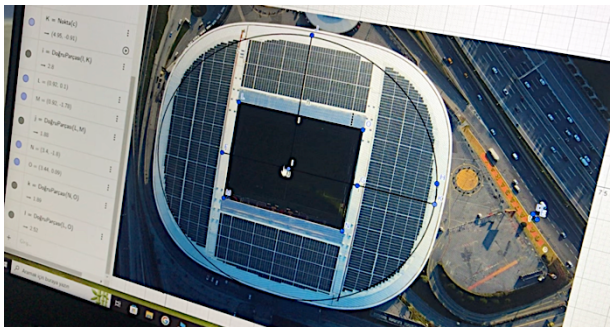
Şekil 4.25: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak matematiksel çalışma sürecine başlayan Grup 7 öğretmen adaylarının, elipsin yarıçap uzunluklarının gerçek yaşamdaki karşılıklarını referans nesne yardımıyla belirlemeyi amaçladıkları görülmüştür. Bu doğrultuda, elipsin fotoğraf üzerindeki yarıçap uzunluklarını belirlemeye yönelik çeşitli eylemler gerçekleştirilmiştir. Süreçte yapılan çalışmalara ilişkin ekran görüntüsü Şekil 4.26'da sunulmuştur. Elipsin yarıçaplarının belirlenmesi sırasında öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA25: Elipsin merkez noktasını belirleyelim. Nasıl belirleyeceğiz ki? Odaklardan çizdik elipsi, ikisinin ortasını bulmak için bir doğru parçası çizelim.
ÖA26: Mantıklı.

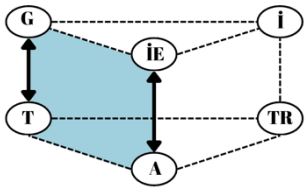
ÖA25: Odak noktalarını birleştiren bir doğru parçası çizelim. Bir de orta noktasını bulalım. Orta nokta belirleme aracı vardı GeoGebra'da. Şimdi yarıçapları da çizmiş olduk. Şu doğru parçalarının uzunluğunu yaz bakalım biri 2,48 diğeri 2,8 birim. İkisinin uzunluk ölçüsünü çarpalım, pi sayısını da 3,14 olarak alalım, nasıl olsa hesap makinesiyle yapıyoruz işlemleri. 21,8 birim kare çıktı elipsin alanı. Elipsin alanını bulduk ama bu GeoGebra'daki alanı. Şimdi oranlayacağız ve gerçek yaşamdaki ölçüsünü bulacağız.
ÖA24: O zaman işaretlediğimiz arabanın uzunluğuna bakalım. Arabanın uzunluğu 0,11 GeoGebra'da.



Şekil 4.26: Grup 7'nin elipsin yarıçaplarını oluşturmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi

Yukarıda gerçekleştirilen diyalog doğrultusunda, Grup 7 öğretmen adaylarının elipsin merkezini belirlemek amacıyla elipsin odak noktaları arasındaki mesafeyi kullandıkları görülmektedir. Bu doğrultuda, doğru parçası oluşturma aracı ile iki odak noktası arasında bir doğru parçası inşa edilmiş ve bu doğrunun orta noktasını belirlemek amacıyla orta nokta belirleme aracı kullanılmıştır. Elipsin merkezinin belirlenmesinin ardından, elipsin yarıçaplarını temsil edecek doğru parçaları oluşturularak GeoGebra dinamik çalışma sayfası üzerinde görselleştirme gerçekleştirilmiştir.

Gerçekleştirilen bu eylemler, GeoGebra araçlarının amaca uygun şekilde kullanılması ve inşa süreçlerine entegre edilmesi bağlamında enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Aynı zamanda, elipsin merkezinin belirlenmesi ve yarıçapların temsil edilmesi için oluşturulan doğru parçalarının, elipsin yapısını görselleştirmeye hizmet etmesi bakımından semiyotik oluşumun da gerçekleştiği görülmektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.27'de sunulmuştur.

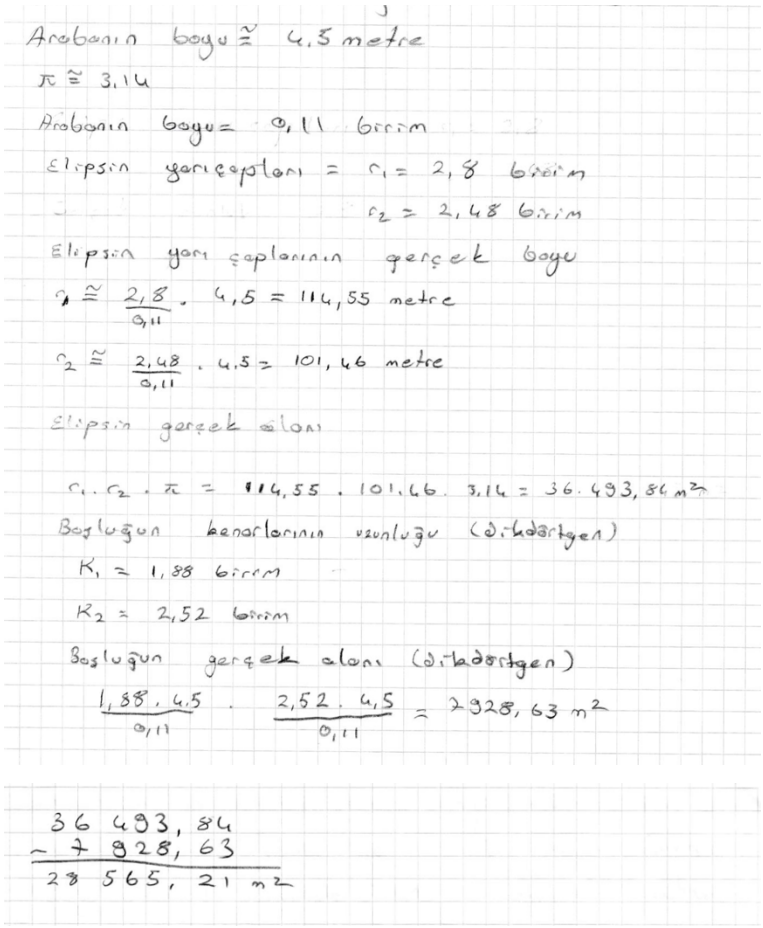


Şekil 4.27: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Stadyum görevi

Elipsin yarıçaplarının fotoğraf üzerinde inşa edilerek uzunluk ölçülerinin belirlenmesinin ardından, elde edilen bu verilerin gerçek yaşamdaki karşılıklarının bulunabilmesi amacıyla referans nesnenin uzunluk ölçüsünden yararlanılarak bir orantı sabiti oluşturulmaya çalışılmıştır. Ancak bu işlem sırasında, fotoğraftaki bir alan ölçüsü ile fotoğraftaki bir uzunluk ölçüsünün birbirine oranlandığı, dolayısıyla farklı büyüklükteki nicelikler (metrekare ve metre) arasında orantı kurulmaya çalışıldığı görülmüştür. Bu hatayı fark eden Grup 7 öğretmen adayları, *"metrekareyi metreye oranlıyorsun"* ifadesiyle bu kavramsal yanlışı dile getirerek hatayı düzeltmiş ve işlem stratejisini yeniden yapılandırmıştır.

Gerçek uzunlukları hesaplayabilmek için öğretmen adayları, futbol sahasının alanını temsil eden dikdörtgeni fotoğraf üzerinde oluşturmak amacıyla GeoGebra'da nokta oluşturma aracını kullanarak sahanın köşelerine noktalar yerleştirmiş, ardından bu noktaları doğru parçası oluşturma aracı ile birleştirerek dikdörtgen şekli elde etmişlerdir. Oluşturulan bu doğru parçalarının uzunlukları, GeoGebra'nın cebir penceresi aracılığıyla belirlenmiştir. Son olarak, referans nesne üzerinden daha önce belirlenen orantı sabiti kullanılarak, fotoğraftaki uzunlukların gerçek yaşamdaki karşılıkları hesaplanmıştır.

Grup 7 öğretmen adaylarının bu sürece ilişkin gerçekleştirdiği matematiksel işlemleri içeren çalışma yaprağı alıntısına Şekil 4.28'de yer verilmiştir.

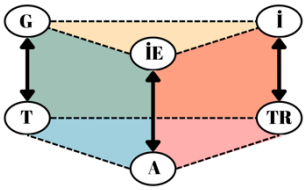


Şekil 4.28: Grup 7'nin matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı

Şekil 4.28'de verilen çalışma yaprağı alıntısı incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adayları tarafından yürütülen matematiksel çalışmada elde edilen verilerin sistematik şekilde not edildiği, fotoğraf üzerinde belirlenen uzunluk ölçülerinin gerçek yaşamdaki karşılıklarını belirlemek için orantı sabitinden yararlanıldığı ve bu doğrultuda matematiksel işlemlerin gerçekleştirildiği görülmektedir. Ayrıca, elips ve dikdörtgen şekillerine ait alan ölçümlerinin hesaplanmasında ilgili kavramların teorik referanslarına başvurulduğu dikkat çekmektedir.

Matematiksel çalışmanın devamında, referans nesneye dayanarak oluşturulan oranın başlangıçta yanlış belirlendiği, ancak grup içi yapılan tartışmalar sonucunda bu hatanın fark edilerek giderildiği anlaşılmaktadır. Bu düzeltme sürecinde, alan ve uzunluk gibi farklı niceliklerin karıştırıldığının fark edilmesi ve kavramlara ait teorik referansların kullanılarak yapılan akıl yürütmeyle hatanın düzeltilmesi, sürecin söylemsel oluşuma katkı sağladığını göstermektedir.

Bunun yanında, GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılarak dikdörtgenin fotoğraf üzerinde inşa edilmesi, temsilin somutlaştırılmasına ve ölçümlerin yapılmasına olanak tanımıştır. Bu bağlamda, GeoGebra araçlarının amaca uygun şekilde kullanılmasıyla enstrümantal oluşum, dikdörtgenin görsel olarak ifade edilmesiyle de semiyotik oluşum süreçlerinin gerçekleştiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.29'da sunulmuştur.

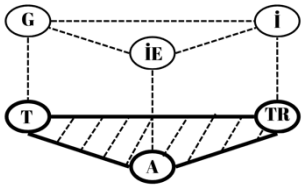


Şekil 4.29: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Stadyum görevi

4.1.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Grup 7 öğretmen adaylarının ulaştıkları matematiksel sonucu gerçek yaşam bağlamında değerlendirmek amacıyla gerçekleştirdikleri internet araştırması sonucunda, ortalama bir futbol sahasının uzunluk ölçülerinin 120 metreye 90 metre, stadyumun ise 190 metreye 228 metre olduğu bilgisine ulaştıkları görülmüştür. Bu ölçüler doğrultusunda elips ve dikdörtgen şekillerinin alanlarını hesaplayan öğretmen adayları, elde ettikleri matematiksel sonuçların gerçek yaşam verileriyle yakınlık taşıdığını ifade ederek Stadyum görevinin çözümüne ilişkin yürüttükleri matematiksel çalışmayı sonlandırmıştır.

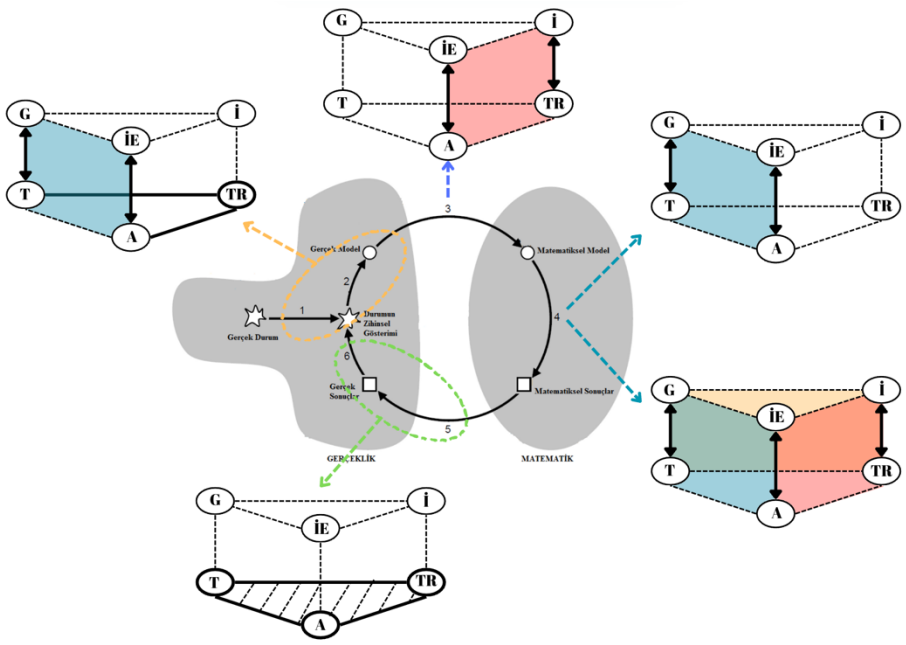
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler; internetin bir bilgi kaynağı olarak kullanılması, geometrik şekil temsilleriyle çalışılması ve bu temsillere ilişkin alan bağıntılarından yararlanılarak hesaplamaların yapılması gibi yönleriyle epistemolojik düzlemin artefakt, temsil ve teorik referans bileşenlerinin etkin biçimde kullanıldığını göstermektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.30'da sunulmuştur.



Şekil 4.30: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.3.5 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 7 öğretmen adaylarının Stadyum görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.31'de sunulmuştur.



Şekil 4.31: Grup 7'nin Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında, öğretmen adaylarının matematiksel temsilleri GeoGebra gibi artefaktlar aracılığıyla yapılandırdığı ve bu süreçte teorik referanslardan yararlanıldığı görülmüştür. Bu durum, Grup 7'nin probleme ilişkin temel kavramsal yapıları dikkate alarak bir anlayış geliştirdiğini ve problemi görselleştirerek anlamaya çalıştığını göstermektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlerin [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştiği görülmektedir.

Matematikselleştirme aşamasında ise, oluşturulan matematiksel yapılar yalnızca teknik olarak inşa edilmemiş, aynı zamanda akıl yürütme, gerekçelendirme ve açıklama gibi söylemsel eylemlerle desteklenmiştir. Böylece bu aşamanın [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştirildiği ve geliştirilen modelin kavramsal tutarlılığının sağlandığı görülmüştür.

Modelin çözümüne yönelik çalışmada Grup 7, iki aşamalı bir süreç izlemiştir. İlk aşamada, [Sem-Ens] dikey düzleminde yürütülen eylemler ile geometrik temsiller inşa edilerek çözüm için gerekli veriler elde edilmiştir. Bu eylemler, ara işlemler olarak değerlendirilmiş ve çözüm sürecinin hazırlık adımlarını oluşturmuştur. Takip eden süreçte ise, tüm oluşum süreçlerini kapsayan ve her üç dikey düzlemi de içeren tam bir matematiksel çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu bütünsel yaklaşım, Kuzniak ve Nechache (2021) tarafından tanımlanan "tam matematiksel çalışma" kavramı ile örtüşmektedir. Böylece, Grup 7'nin çalışmasının farklı aşamalarında oluşum süreçleri etkin şekilde kullanılmış, epistemolojik düzlemin bileşenleri arasında geçişler sağlanmış ve matematiksel modelleme döngüsü büyük ölçüde tutarlı ve bütüncül biçimde yürütülmüştür.

Yorumlama ve doğrulama aşamasında, yalnızca epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanıldığı görülmektedir. Bu durum, Grup 7 öğretmen adaylarının. Ulaştıkları matematiksel sonucu bağlamsal olarak temellendirme çabası içerisinde, problemde yer alan kavramların doğasına odaklanıldığını göstermektedir. Bu bağlamda, elde edilen matematiksel sonucun kuramsal olarak tutarlılığı ve bağlamsal geçerliliği sorgulanmış, bu da problem çözümünün kavramsal yönünün göz önünde bulundurulduğuna işaret etmektedir.

Grup 7'nin Stadyum görevine yönelik yürüttüğü matematiksel çalışmanın genelinde, üç oluşum sürecinin farklı aşamalarda devreye girdiği; özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında bu oluşumların yerini yalnızca epistemolojik düzlem bileşenlerine bıraktığı görülmektedir. Sürecin başlangıç ve bitiş noktalarında teorik referansların işe koşulması, matematiksel çalışmaların kavramsal bütünlükle desteklendiğini göstermektedir.

Tüm bu bulgular doğrultusunda, Grup 7 öğretmen adaylarının matematiksel modelleme sürecinde farklı dikey düzlemler arasında geçiş yaparak çok boyutlu bir çalışma yürüttüğü ve bu sayede modelleme sürecinin kesintisiz biçimde sürdürülebildiği sonucuna ulaşılabilir.

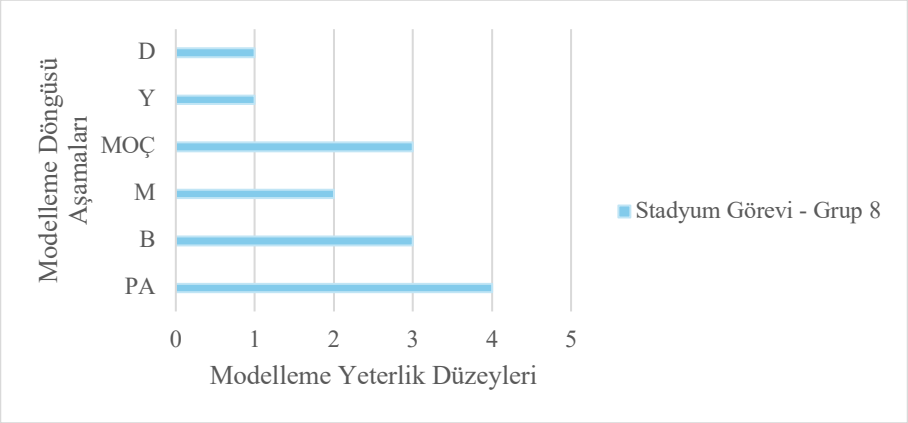
4.1.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Stadyum Görevi

Grup 8'in Stadyum görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR çerçevesinde incelendiğinde, problem durumunun genel olarak doğru bir şekilde anlaşıldığı, ancak çözümde kullanılacak verilerin belirlenmesinde bazı önemsiz hataların yapıldığı görülmüştür. Bu bağlamda, problemi anlama aşamasında Düzey 4'te yer aldıkları; elde edilen

veriler doğrultusunda bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar geliştirdikleri için basitleştirme aşamasında Düzey 3'te bulundukları yönünde değerlendirilmiştir.

Ancak, geliştirilen matematiksel modelin eksik ve hatalı olması nedeniyle matematikselleştirme aşamasında Düzey 2, modelin çözüm sürecinde eksikliklerin gözlenmesi nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 3'te bulunulduğu belirlenmiştir. Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanması ve doğrulanmasına yönelik herhangi bir girişimde bulunulmadığı için yorumlama ve doğrulama aşamalarında Düzey 1'de bulundukları tespit edilmiştir.

Bu doğrultuda Grup 8 öğretmen adaylarının Stadyum görevine ilişkin matematiksel çalışması MYDR düzeylerine göre değerlendirilerek Şekil 4.32'de özetlenmiştir.



Şekil 4.32: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Stadyum görevi

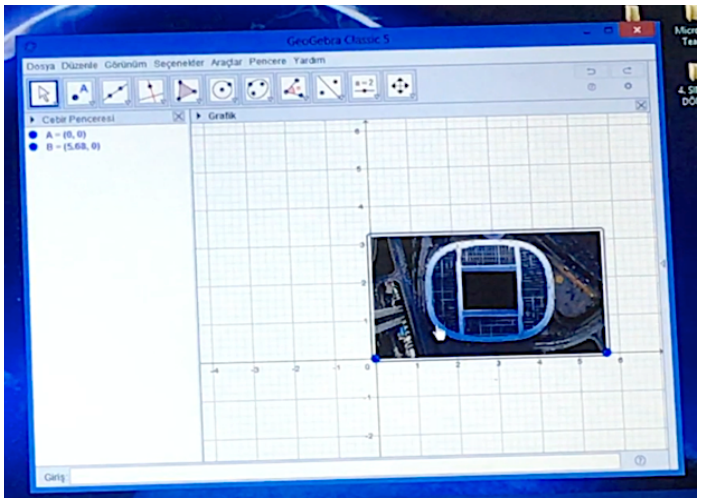
Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 8 öğretmen adaylarının matematiksel çalışmaya dengeli bir başlangıç yaptıkları; ancak özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında düşük performans sergiledikleri görülmektedir. Bu doğrultuda, MYDR'den toplam 8 puan elde eden Grup 8'in *'bir ölçüde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu görülmüştür. Böylece, Grup 8 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümüne yönelik temel düzeyde matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir.

Bununla birlikte, öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, yalnızca ulaşılan sonuç üzerinden değil; aynı zamanda sürece dair ortaya konan oluşum türleri, araç kullanımları,

akıl yürütme biçimleri ve sembolik temsiller üzerinden de değerlendirilmiştir. Bu bağlamda, Grup 8 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.1.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 8 öğretmen adayları, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakika süreyle bireysel çalışma gerçekleştirmiştir. Bireysel çalışma sürecinde, problem durumu okunmuş ve çalışma yaprağında yer alan yönlendirilmiş keşif soruları yanıtlanmaya çalışılmıştır. Hazır oluş sorularının da katkısıyla, problemde yer alan veriler ile çözüm sürecinde kullanılabilecek stratejiler belirlenmeye çalışılmıştır. Grup çalışmasına geçilmesiyle birlikte, öğretmen adaylarının problemde yer alan geometrik şekilleri tespit etmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu doğrultuda, stadyumun üzerindeki güneş panellerinin daire dilimleri ve dikdörtgen gibi geometrik şekillere benzediği ifade edilmiştir. Şekillerin daha net bir biçimde belirlenebilmesi amacıyla stadyuma ait farklı bir görsel araştırılmış; yapılan internet araştırması sonucunda elde edilen görsel, dijital bir artefakt olan GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarılmıştır. Yapılan bu eyleme ilişkin görsel Şekil 4.33'te sunulmuştur.



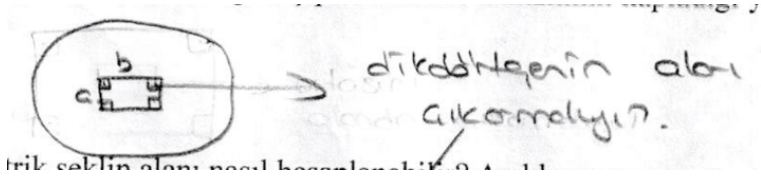
Şekil 4.33: Grup 8'in dinamik geometri yazılımına görsel aktarmasına ilişkin ekran alıntısı

Problemin çözümüne yönelik bir başlangıç noktası arayan Grup 8 öğretmen adayları, çeşitli fikirler üzerinde tartışmalar gerçekleştirmiştir. İlk olarak, bir güneş panelinin ortalama uzunluk

ölçüsünün internetten bulunabileceği düşünülmüş; ancak farklı güneş paneli türlerinin farklı uzunluklara sahip olabileceği belirtilerek bu fikirden vazgeçilmiştir. Ardından, otomobil, otobüs ve tır gibi taşıtların gerçek uzunluklarının internetten kolaylıkla öğrenilebileceği ifade edilmiş ve GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarılan fotoğraf üzerindeki bir aracın referans nesne olarak kullanılabileceği önerilmiştir. Bu sayede, fotoğraftaki uzunluk ile gerçek yaşam arasındaki ölçü birimleri arasında bir ilişki kurulabileceği öne sürülmüştür. Bu düşünce doğrultusunda Grup 8 öğretmen adayları arasında yaşanan diyalog aşağıda verilmiştir:

ÖA31: … o zaman referans nesne olarak bir araç belirleyelim. Fotoğrafı GeoGebra'ya aktardığımızda fotoğraftaki arabaların uzunlukları üzerinden düşünebiliriz.
ÖA28: Oradaki bir arabayı kullanarak bir panelin uzunluğunu bulabiliriz. Panelin uzunluğunu bulursak daha sonra stadyumun alanını bulabiliriz. Stadyum daireye benziyor çünkü. Aradaki dikdörtgenin alanını çıkarırsak stadyumun çatısının alanını bulabiliriz diye düşünüyorum.
ÖA30: Ama araçlar yerde, paneller yukarıda değil mi? Bu nesneler arasında yükseklik farkı var sanki…

Grup 8 öğretmen adayları arasında gerçekleşen diyalogda, problemin çözümüne yönelik gerekli verilerin belirlenmesi amacıyla bir akıl yürütme gerçekleştirildiği ve çözüm sürecine dair planlamalar yapıldığı görülmektedir. Aynı zamanda, fotoğrafta yer alan taşıtlar ile stadyum çatısının aynı düzlemde bulunmadığı düşünülerek, görselde bir perspektif etkisinin olabileceği tartışılmıştır. Ancak öğretmen adayları, çözümün ilerletilebilmesi için stadyum çatısının düz olduğu ve çatının bulunduğu düzlem ile taşıtların yer aldığı zeminin aynı düzlemde kabul edilebileceği yönünde fikir birliğine varmıştır. Bu doğrultuda, stadyumun daire şeklinde olduğu varsayımıyla dairenin alanının belirlenmesi ve bu alanından dikdörtgen şeklindeki yeşil sahanın alanının çıkarılması esasına dayalı bir çözüm planı yapılmıştır. Grup 8 tarafından geliştirilen bu çözüm planına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.34'te sunulmuştur.

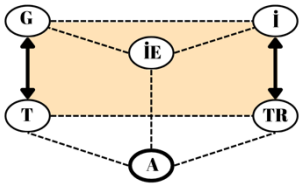


Şekil 4.34: Zümreler Grubu Çalışma Yaprağı Alıntısı

Bu düşüncenin ardından, futbol sahasının uzunluk ölçüleri ya da otoyoldaki iki şerit çizgisi arasındaki mesafenin kullanılabileceği; böylece problemin çözüm sürecinde ihtiyaç duyulabilecek diğer verilerin elde edilebileceği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, problemin çözümü için gerekli verilerin belirlenmesi, bu verilerin nasıl kullanılacağına yönelik açıklamaların yapılması, çözüm stratejilerinin belirlenmesi ve bu stratejilerin uygunluğunun değerlendirilmesi gerçekleştirilmiştir. Grup 8 öğretmen adayları, fotoğraf üzerinde referans nesne olarak belirleyecekleri bir nesnenin uzunluğunu GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla ölçmeyi planlamıştır. GeoGebra'ya aktarılan fotoğraf üzerinde referans nesnenin uzunluğunun ölçülmesiyle, bu ölçünün gerçek yaşamdaki karşılığının belirlenmesinde oran kavramının kullanılabileceği ifade edilmiştir. Bu bağlamda ÖA31 aşağıdaki ifadeleri kullanmıştır:

ÖA31: Diyelim ki fotoğrafta bir santimetre gerçek hayatta üç metreye karşılık geliyor. Yani iki uzunluk arasındaki oran 1'e 3 olur. Buna göre fotoğraftaki 10 santimetre gerçek hayatta 30 metredir diyeceğiz.

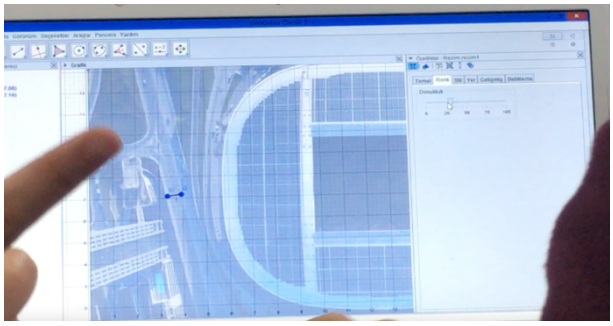
Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, internet üzerinden yapılan araştırmalar yoluyla matematiksel düşüncelerin ifade edilmesinde kullanılan resim ve şekil gibi somut görsel temsillere ulaşıldığı ve bu bağlamda epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin kullanıldığı görülmektedir. Bilgisayar ve internetin etkin biçimde kullanılması ise epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin kullanıldığına işaret etmektedir. Problemin basitleştirilmesine yönelik olarak çeşitli varsayımların yapılması, çözümde kullanılacak verilerin elde edilmesine ilişkin söylemler geliştirilmesi ve çözüm planı oluşturulması, söylemsel oluşumun gerçekleştiği şeklinde değerlendirilmiştir. Ayrıca, çözüm planının çalışma yaprağında görselleştirilmesiyle semiyotik oluşumun gerçekleştirildiği görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlerin akıl yürütme ile gerekçelendirilmesi ve matematiksel temsiller aracılığıyla görselleştirilmesi, matematiksel çalışmanın [Sem-Söy] dikey düzleminde yürütüldüğünü göstermektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.35'te sunulmuştur.



Şekil 4.35: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin çözümünde kullanılacak verilerin elde edilmesi amacıyla referans nesne olarak otoyol üzerindeki şerit çizgilerini kullanmayı planlayan Grup 8 öğretmen adayları, internet araştırması sonucunda iki şerit çizgisi arasındaki uzunluk ölçüsünün 3 metre ile 3,65 metre arasında değiştiğini belirlemiştir. Bu bilgi doğrultusunda, daha kolay matematiksel işlem yapılabilmesi için iki şerit çizgisi arasındaki uzunluk ölçüsünün 3,5 metre olarak varsayılması konusunda fikir birliğine varılmıştır. Bu uzunluğun temsili için şerit çizgileri arasına doğru parçası inşa etmek isteyen öğretmen adayları, GeoGebra'da nokta oluşturma aracını kullanarak şerit çizgileri üzerinde karşılıklı iki nokta belirlemiş, ardından bu noktaları doğru parçası oluşturma aracıyla birleştirerek bir doğru parçası oluşturmuşlardır. Ancak, oluşturulan bu doğru parçasının şerit çizgilerine dik olup olmadığı konusunda emin olamayan Grup 8 öğretmen adayları, fotoğrafı soluklaştırma özelliğinden yararlanarak doğru parçasını incelemeye başlamıştır. Bu inceleme sırasında, doğru parçasının üzerindeki şerit çizgileri ile dik açı oluşturup oluşturmadığına ilişkin bir sorgulama süreci yürütülmüştür. Yapılan bu eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.36'da sunulmuştur.

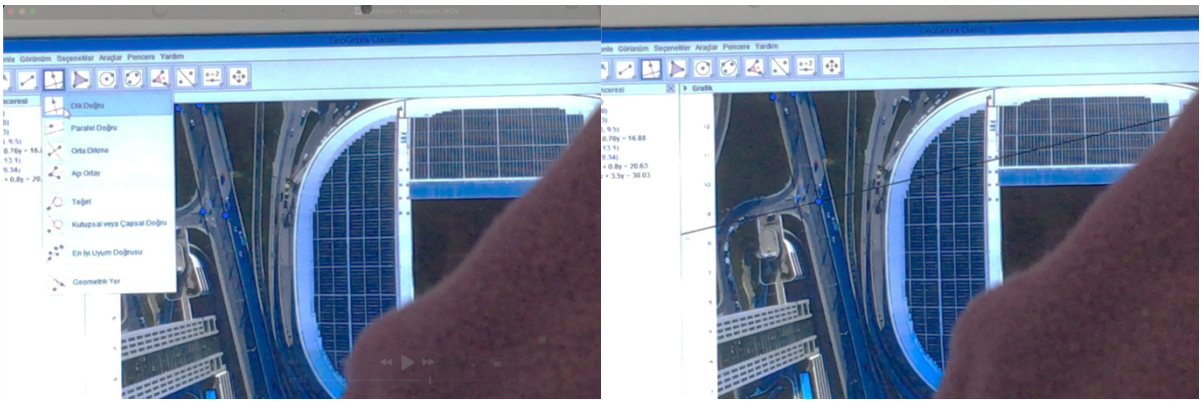


Şekil 4.36: Grup 8'in fotoğrafı soluklaştırmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi

Yapılan sorgulamanın ardından, paralel iki doğru arasındaki en kısa mesafenin, bu doğruları dik açıyla kesen bir doğru parçası ile elde edileceği bilgisi göz önünde bulundurularak, fotoğrafta yer alan şerit çizgileri üzerinde doğru oluşturma aracı kullanılarak birbirine paralel

olduğu düşünülen iki doğru inşa edilmiştir. Paralel doğrular arasındaki mesafenin belirlenmesi amacıyla GeoGebra'daki araçları inceleyen Grup 8 öğretmen adayları, araç çubuğu üzerinde dik doğru oluşturma aracını fark etmiştir. Bu aracı kullanarak, şerit çizgilerini temsil eden doğruları dik açıyla kesen doğru oluşturulmuştur (Şekil 4.37). Ardından, bu doğruların kesişim noktaları, nokta kesiştirme aracı yardımıyla belirlenmiş ve bu noktalar, doğru parçası oluşturma aracıyla birleştirilerek iki şerit çizgisi arasındaki mesafeyi temsil eden bir doğru parçası elde edilmiştir. Son olarak, bu doğru parçasının uzunluğu GeoGebra'daki uzunluk ölçme aracıyla belirlenmiştir. Elde edilen uzunluk ölçüsünün gerçek yaşam karşılığıyla ilişkilendirmesine yönelik olarak Grup 8 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

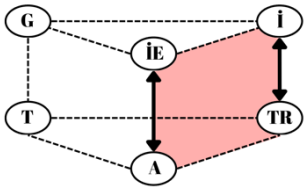
ÖA28: Gerçek uzunluğu 10,5 metre genişliğinde olan yolun fotoğraftaki genişliğini GeoGebra'da 0,69 birim olarak bulduk."
ÖA31: Bir şey diyeceğim, fotoğraftaki uzunluğu birim olarak mı bulduk santimetre olarak mı?
ÖA30: O önemli değil, oran orantı kuracağımız için birbirine dönüştüreceğiz sonra.



Şekil 4.37: Grup 8'in dik doğru oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Stadyum görevi

Gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının referans nesneye ilişkin gerçek yaşam verilerine ulaşmak amacıyla internet araştırması gerçekleştirdiği görülmüştür. Referans nesneyi temsil eden doğru parçasının oluşturulabilmesi için, otoyol şeritlerini temsil eden doğrularla dik açı yapan bir doğrunun inşa edilmesi gerektiği ifade edilmiştir. Bu süreçte, paralel iki doğru arasındaki en kısa mesafenin dik doğruyla elde edileceği yönündeki matematiksel gerçeğe dayalı olarak, teorik referanslara başvurulmuş ve söylemsel akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. Bu söylemsel akıl yürütme doğrultusunda, doğru oluşturma aracı kullanılarak şeritleri temsil eden iki doğru inşa edilmiş; ardından dik doğru oluşturma aracıyla

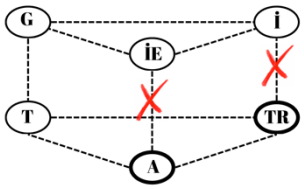
bu doğruları dik açıyla kesen bir doğru parçası çizilmiş; kesişim aracı yardımıyla doğruların kesişim noktaları belirlenmiş ve bu noktalar doğru parçası oluşturma aracıyla birleştirilerek referans nesneyi temsil eden doğru parçası elde edilmiştir. Gerçekleştirilen bu eylemler, dijital araçların amaca uygun kullanımı açısından enstrümantal oluşumun; matematiksel kavramlara ilişkin özelliklerin gerekçelendirilerek ifade edilmesi yönüyle ise söylemsel oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Teorik referanslara dayalı gerekçelendirme ile birlikte gerçekleştirilen bu inşa sürecinde matematiksel çalışmanın [Ens-Söy] dikey düzleminde yürütüldüğü görülmektedir. Bu aşamaya ilişkin eylemlere MÇA diyagramı Şekil 4.38'de sunulmuştur.



Şekil 4.38: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Stadyum görevi

Problemin çözümünde kullanılacak verilere ulaşmak amacıyla bir oran belirleyen Grup 8 öğretmen adayları, GeoGebra dinamik çalışma sayfasında yer alan fotoğraf üzerindeki şekilleri yeniden incelemiştir. Bu doğrultuda, oluşturulan çözüm planını uygulanabilmesi için stadyumu çevreleyen bir çember çizilmesine karar verilmiş ve bu amaçla GeoGebra'daki çember oluşturma aracının kullanılması planlanmıştır. Çember oluşturma aracı için bir merkez noktasına ihtiyaç duyulması üzerine, stadyumun merkezinin belirlenmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu noktada, futbol sahasının bir dikdörtgen olduğu varsayımıyla, dikdörtgenin köşegenlerinin kesişim noktasının stadyumun merkezi olabileceği düşünülmüştür; ancak bu strateji uygulanmamıştır. Bunun yerine Grup 8 öğretmen adayları, stadyum çatısına teğet olarak çizilecek paralel iki doğrunun ortasında yer alan bir noktanın stadyumun merkezi olabileceği fikriyle hareket etmeye başlamıştır. Bu doğrultuda, doğru parçası oluşturma aracıyla stadyuma teğet ve birbirlerine paralel iki doğru parçası inşa edilmiştir. Ardından, bu iki doğru parçası arasındaki orta noktanın belirlenmesi amacıyla orta nokta işaretleme aracı kullanılmak istenmiş, ancak bu aracın yalnızca bir doğru parçasının uç noktaları arasındaki orta noktayı verdiği fark edilmiştir. Bu durum üzerine, gerçekleştirilen eylemlerin yeterli dayanağa sahip olmadığı ve göz kararıyla yapılan işlemlerin geçerli bir sonuca ulaştıramayacağı ifade edilmiştir. Bu tespitin ardından Grup 8, yeni bir strateji geliştirmeye yönelmiştir.

Stadyumu temsil edecek çemberin oluşturulabilmesi için çember oluşturma aracını kullanmak isteyen Grup 8 öğretmen adayları, bu işlem için çemberin merkez noktasına ihtiyaç duyduklarından stadyumun orta noktasını belirlemek amacıyla farklı stratejiler geliştirmeye çalışmıştır. Bu stratejilerin uygulanmasında dinamik geometri yazılımındaki doğru parçası oluşturma aracı ve orta nokta belirleme aracı gibi dijital araçlardan yararlanılmıştır. Ancak bu araçların yardımıyla oluşturulan matematiksel nesnelerin, problemin çözümüne katkı sağlamadığı ve öğretmen adaylarının matematiksel çalışmayı sürdüremediği görülmüştür. Artefaktların kullanımıyla gerçekleştirilen bu eylemlerin matematiksel bir gerekçeye dayanmaması nedeniyle çözüm sürecinde ilerleme kaydedilememiştir. Gerçekleştirilen eylemlerde epistemolojik düzlemin artefakt ve teorik referanslar bileşenlerinden yararlanılmasına karşın, bu süreçte enstrümantal ve söylemsel oluşumların gerçekleşmediği yönünde bir değerlendirme yapılmıştır. Bu eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.39'da sunulmuştur.



Şekil 4.39: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Stadyum görevi

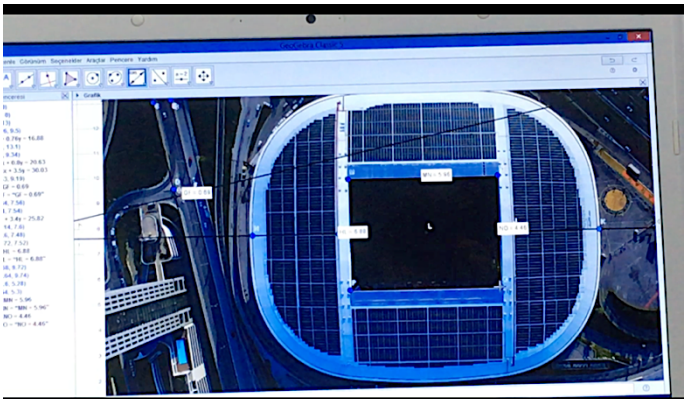
Problemin çözümüne yönelik farklı bir strateji geliştiren Grup 8 öğretmen adaylarından ÖA29, stadyumun çatısında yer alan güneş panellerini küçük birimler şeklinde sayarak elde ettiği sonucu grup arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Öğretmen adayları arasında gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

ÖA29: Çatı üzerindeki panelleri saydığımızda orta noktaları bulabiliyoruz.
ÖA31: Nasıl yani?
ÖA29: En baştaki parça on parça, yani bu panelleri sayarak tam orta noktasını işaretleyebiliriz. GeoGebra'da noktayı koyacağımız yeri iyi ayarlamamız lazım.

Bu düşünce doğrultusunda, çatıdaki güneş panellerinin orta noktasını belirlemek amacıyla panellerin aralarındaki bölümler sayılmış ve bu doğrultuda ortayı temsil eden noktalar, nokta

oluşturma aracı kullanılarak GeoGebra üzerinde işaretlenmiştir. Ardından, işaretlenen noktalar doğru parçası oluşturma aracı ile birleştirilmiş ve bu doğru parçasının orta noktası, orta nokta belirleme aracı ile işaretlenmiştir. Elde edilen bu noktanın, stadyumun merkezini temsil ettiği ifade edilmiştir.

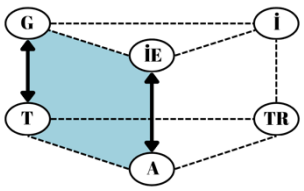
Stadyumun merkezinin belirlenmesinin ardından, stadyumun sınırında bir nokta işaretlendiği görülmüştür. Stadyumun çembere benzediği varsayımından hareket eden Grup 8 öğretmen adayları, çemberin merkezi ve çember üzerindeki bir nokta arasındaki uzunluğu uzunluk ölçme aracıyla belirlemiş ve bu doğrultuda çemberin yarıçap uzunluğunu 6,68 birim olarak ifade etmiştir. Problemin çözümüne yönelik olarak, doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak futbol sahasını temsil eden dikdörtgenin kenar uzunluklarını gösterecek şekilde doğru parçaları oluşturulmuştur. Oluşturulan bu doğru parçalarının uzunlukları uzunluk ölçme aracıyla belirlenmiş; kısa kenar uzunluğunun 4,46 birim, uzun kenar uzunluğunun 5,96 birim olduğu ifade edilmiştir. Problemin çözümü için gerekli verilerin elde edilmesi ve problemin matematikselleştirilmesi sürecinde gerçekleştirilen eylemlere ait GeoGebra dinamik çalışma sayfası ekran görüntüsü Şekil 4.40'ta sunulmuştur.



Şekil 4.40: Grup 8'in GeoGebra dinamik çalışma sayfasına ilişkin ekran alıntısı – Stadyum görevi

Grup 8 öğretmen adayları, farklı bir stratejiye geçerek güneş panellerini sayma yöntemiyle stadyumun orta noktasını belirlemiş ve bu doğrultuda nokta oluşturma, doğru parçası oluşturma ve orta nokta belirleme araçlarını kullanarak stadyumun merkezini temsil eden noktayı inşa etmiştir. Gerçekleştirilen bu eylemlerde dijital artefaktların amaca yönelik olarak kullanılması, enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Stadyumun çembere

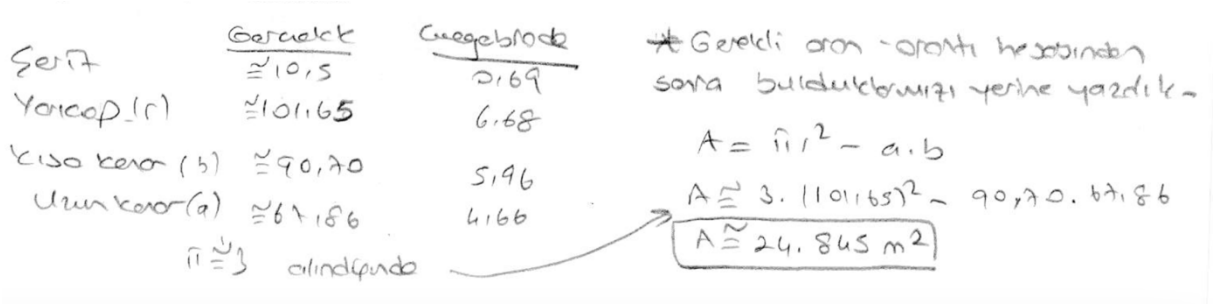
benzediği varsayımına bağlı olarak merkezin işaretlenmesinin ardından, çemberin yarıçap uzunluğu nokta oluşturma ve uzunluk ölçme araçları kullanılarak belirlenmiştir. Ayrıca, futbol sahasının sınırlarını temsil eden doğru parçalarının oluşturulmasıyla problem durumu görselleştirilmiş ve bu süreç semiyotik oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.41'de sunulmuştur.



Şekil 4.41: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Stadyum görevi

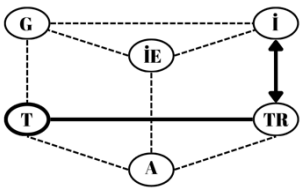
4.1.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Matematiksel modelde yer alan verilerin gerçek yaşamdaki karşılıklarının belirlenebilmesi amacıyla, referans nesne kullanılarak elde edilen oranın dikkate alınması gerektiği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, ÖA30'un "*10,5 metre olan yolun genişliği GeoGebra'da 0,69 birim olarak çıktığı için 6,68 birim gerçekte kaç metre olur? Bunu orantıyla hesaplayalım."* ifadesini kullanmasıyla Grup 8 öğretmen adaylarının matematiksel işlemlere başladığı görülmüştür. Gerçekleştirilen işlemlerin yer aldığı çalışma yaprağında $A = \pi.r^2 - a.b$ bağıntısının kullanıldığı, bu formül aracılığıyla çemberin alanından dikdörtgenin alanının çıkarıldığı ve ayrıca ≅ sembolünün kullanıldığı gözlemlenmiştir. GeoGebra dinamik çalışma sayfasındaki uzunluk ölçülerinin gerçek yaşamdaki karşılıklarını belirlemek amacıyla yapılan hesaplamalarda hesap makinesinden yararlanılmış, sonuçların ifade edilmesinde yuvarlama stratejisi uygulanmıştır. Bununla birlikte, işlemler sırasında π sayısı yaklaşık olarak 3 alınmıştır. Gerçekleştirilen matematiksel işlemler sonucunda ulaşılan matematiksel sonucun yaklaşık 24845 metrekare olduğu ifade edilmiştir. İlgili matematiksel işlemleri içeren çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.42'de sunulmuştur. Matematiksel sonuca ulaşan Grup 8 öğretmen adayları, bu aşamada gerçekleştirdikleri eylemleri tamamlayarak Stadyum görevinin çözüm sürecini sonlandırmıştır.



Şekil 4.42: Grup 8'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Stadyum görevi

Grup 8 öğretmen adayları tarafından yürütülen matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, problemin çözümünde kullanılacak olan verilerin gerçek yaşamdaki karşılıklarının belirlenmesinde oran kavramının özelliklerinden yararlanıldığı görülmektedir. Oran kavramına ilişkin özelliklerin kullanılarak matematiksel işlemlerin gerekçelendirilmesi ve daire ile dikdörtgen şekillerine ait alan bağıntılarından yararlanılması, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, matematiksel işlemler sırasında matematiksel temsillerin uygun biçimde kullanıldığı gözlemlenmiştir. Bu doğrultuda, matematiksel çalışmada epistemolojik düzlemin temsil bileşeninden yararlanıldığı ifade edilebilir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.43'te sunulmuştur.



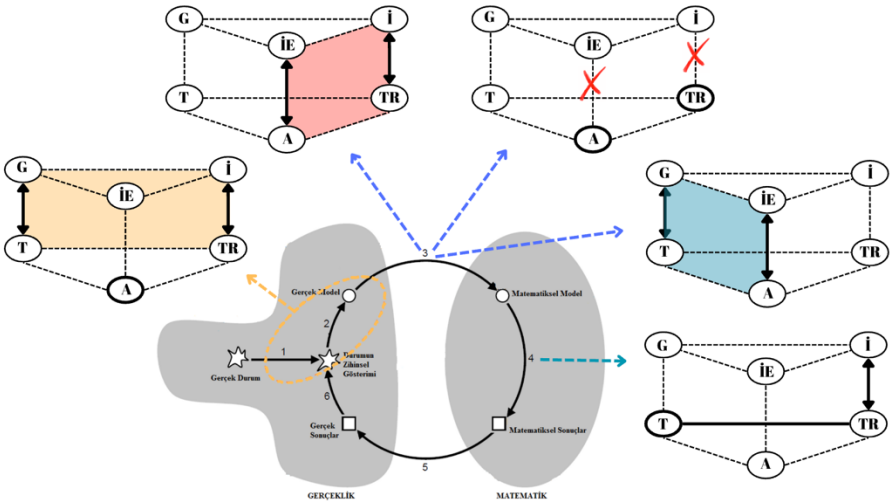
Şekil 4.43: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Stadyum görevi

4.1.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Grup 8 öğretmen adaylarının stadyum probleminin çözümünde yorumlama ve doğrulama aşamalarında eylem gerçekleştirmedikleri görülmüştür.

4.1.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 8 öğretmen adaylarının Stadyum görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.44'te sunulmuştur.



Şekil 4.44: Grup 8'in Stadyum görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 8'in Stadyum görevine ilişkin matematiksel çalışmasının özeti incelendiğinde, problemi anlama ve basitleştirme aşamasının [Sem-Söy] dikey düzleminde başladığı görülmektedir. Bu doğrultuda, Grup 8 öğretmen adaylarının temsillerden ve söylemsel ifadelerden yararlanarak matematiksel eylemleri gerekçelendirdikleri anlaşılmaktadır. Diyagram dikkatle incelendiğinde, bu aşamada artefakt bileşeninin de kullanıldığı görülmektedir. Ancak artefaktların yalnızca araçsal düzeyde kullanılması nedeniyle enstrümantal oluşumun gerçekleşmediği belirlenmiştir. Dolayısıyla, temsillerin gerekçelendirme ve akıl yürütme süreçleriyle desteklenmesiyle problemin yeniden yapılandırıldığı ifade edilebilir.

Matematikselleştirme aşaması incelendiğinde, üç farklı eylemle sürecin tamamlandığı görülmektedir. İlk olarak, [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemler aracılığıyla problem durumuna ilişkin inşa sürecinin, gerekçelendirme ve akıl yürütme gibi söylemsel yapılar kullanılarak yürütüldüğü belirlenmiştir. Bunu izleyen eylemlerde ise artefakt ve teorik referanslar bileşenlerinin kullanıldığı, ancak enstrümantal ve söylemsel oluşum süreçlerinin gerçekleştirilemediği görülmüştür. Sürecin devamında [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemlerle problem durumuna ilişkin matematiksel model oluşturulmuştur. Bu

bağlamda, matematikselleştirme süreci boyunca dikey düzlemler arasında geçiş yapılmış; ancak enstrümantal ve söylemsel oluşumların etkin bir biçimde gerçekleştirilememesi nedeniyle süreçte tıkanıklık yaşandığı görülmüştür. Bu durum, Grup 8 öğretmen adaylarının mevcut kavramsal bilgilerini işlevsel hale getiremediklerine işaret etmektedir. Menares Espinoza and Vivier (2022), bu tür durumları matematiksel çalışma sırasında ortaya çıkan kavramsal kopukluklar olarak tanımlamaktadır. Son olarak, [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemler ile oluşturulan matematiksel model, Grup 8 öğretmen adaylarının matematiksel temsilleri görselleştirirken sırasında artefaktları amacına uygun şekilde kullandıklarını göstermektedir.

Oluşturulan matematiksel modelin çözümü sürecinde söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği ve epistemolojik düzlemin temsil bileşeninden yararlanıldığı görülmektedir. Bu bağlamda, matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemlerin gerekçelendirilmiş olduğu ve bu gerekçelendirmelere matematiksel temsillerin destek sağladığı ifade edilebilir. Ancak ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında ne yorumlanmadığı ne de doğrulandığı görülmektedir. Bu durumun, matematiksel modelleme sürecinde özellikle matematikselleştirme aşamasında yaşanan kopukluk ile matematiksel olarak çalışma aşamasındaki eylemlerin yalnızca tek bir oluşum süreciyle sınırlı kalmasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

Elde edilen bulgular, Grup 8'in gerçekleştirdiği matematiksel çalışmanın ağırlıklı olarak matematiksel dünya ile sınırlı kaldığını göstermektedir. Bu çalışmanın, en düşük modelleme yeterliğine sahip olan grup çalışması olduğu göz önünde bulundurulduğunda, özellikle yorumlama ve değerlendirme aşamasında herhangi bir eylemin gerçekleştirilmemesinin bu sonuca katkı sağladığı söylenebilir. Grup 8'in matematiksel çalışmasında farklı dikey düzlemlerin kullanıldığı görülmekle birlikte, süreç içerisinde yaşanan tıkanıklıklar, matematiksel olarak çalışma aşamasının zayıf kalması, ulaşılan matematiksel sonucun yorumlanmaması ve doğrulanmaması, çalışmanın önemli eksiklikler içerdiğini ortaya koymaktadır.

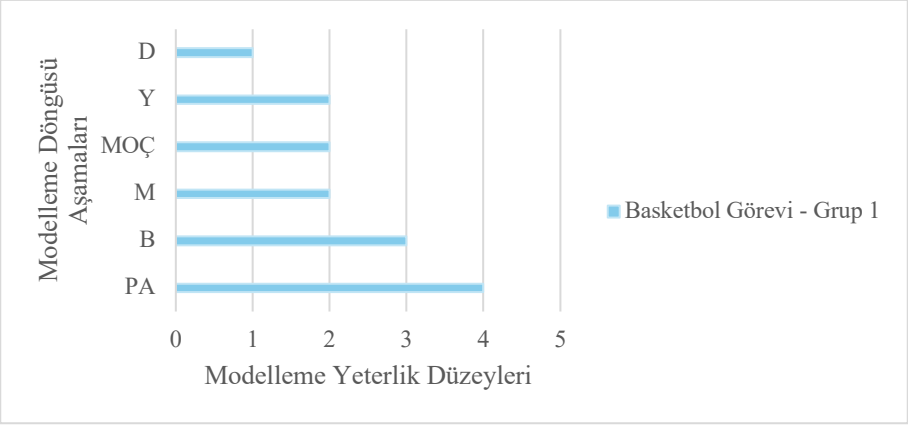
4.2 Basketbol Görevine İlişkin Bulgular

4.2.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi

Grup 1'in Basketbol görevine ilişkin gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR doğrultusunda incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmektedir. Ancak, problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi sürecinde bazı önemsiz hatalar yapılmış olsa da bu veriler arasında ilişki kurulabildiği için problemi anlama aşamasında Grup 1'in Düzey 4'te yer aldığı görülmüştür. Belirlenen veriler doğrultusunda, bir ölçüde kabul edilebilir varsayımların yapılmış olması nedeniyle basitleştirme aşamasında Düzey 3'te yer aldıkları görülmüştür.

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından oluşturulan matematiksel modelin eksik ve hatalı olması nedeniyle model oluşturma aşamasında Düzey 2'de; benzer şekilde, modelin çözümünde de eksiklikler bulunması sebebiyle çözüm aşamasında Düzey 2'de yer aldıkları belirlenmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumlanması nedeniyle yorumlama aşamasında Düzey 2'ye; doğrulama girişiminde bulunulmaması nedeniyle doğrulama aşamasında ise Düzey 1'de bulunulduğu yönünde değerlendirilmiştir.

Bu doğrultuda Grup 1'in Basketbol görevine ilişkin yürüttüğü matematiksel çalışmanın MYDR çerçevesindeki değerlendirme sonuçları Şekil 4.45'te sunulmuştur.



Şekil 4.45: Grup 1'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – basketbol görevi

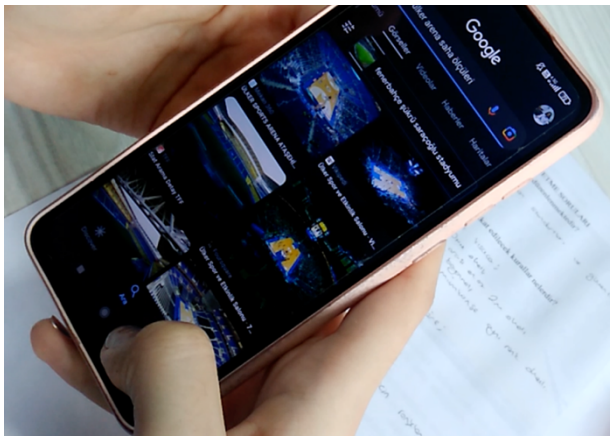
Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 1'in matematiksel görevin çözümüne dengeli bir şekilde başlangıç

yaptığı, özellikle problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında güçlü bir performans sergilediği; ancak sonraki aşamalarda performansın düşüş gösterdiği görülmektedir. Basketbol görevine ilişkin yürütülen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 8 puan elde eden Grup 1'in, *'bir ölçüde yeterli'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümünde matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir.

Grup 1 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, modelleme döngüsünün aşamaları dikkate alınarak MÇA Teorisinin bileşenleri doğrultusunda, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler temelinde analiz edilmiştir.

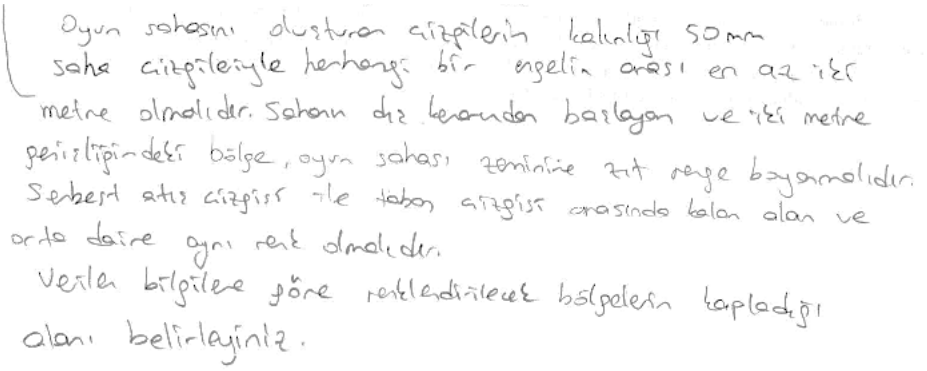
4.2.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamasının Analizi

Grup 1'in Basketbol probleminin çözümü için gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından, 10 dakika süreyle bireysel çalışma süreciyle başlamıştır. Bireysel çalışma süresince, problem durumunun anlaşılmasına yönelik olarak hazır oluş sorularına yanıtlar verilmiş ve yönlendirilmiş keşif soruları incelenmiştir. Grup çalışmasına geçilmesiyle birlikte, basketbol saha ölçüleri hakkında bilgi edinmek amacıyla çeşitli basketbol sahalarına ait görseller ve Türkiye Basketbol Federasyonu tarafından yayımlanan salon standartları yönergesi arama motoru aracılığıyla araştırılmıştır. Gerçekleştirilen araştırmaya ilişkin görsel Şekil 4.46'da sunulmuştur.



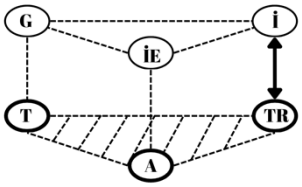
Şekil 4.46: Grup 1'in internetten basketbol sahası görseli aramasına ilişkin görsel – Basketbol görevi

Problemin çözümüne ulaşmak gerekli olan verilerin gerçek yaşamdaki karşılıklarını internet araştırmasıyla belirleyen Grup 1 öğretmen adayları, basketbol sahasının uzun kenarının 28 metre, kısa kenarının 15 metre olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte, basketbol sahasında birden fazla bölge bulunduğu ve bu bölgelerin çizgilerle sınırlandırıldığı belirtilmiş; Türkiye Basketbol Federasyonu'nun salon standartları yönergesinden elde edilen bilgiler çalışma yaprağına yazılı olarak kaydedilmiştir. İncelenen eşitli görseller doğrultusunda, basketbol sahasında yer alan düzgün geometrik şekillerin alanlarının, elde edilen ölçümle ve alan bağıntıları kullanılarak hesaplanabileceği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, problemin anlaşılması ve basitleştirilmesi aşamasının tamamlandığı görülmüştür. Söz konusu çalışmaya ilişkin görsel Şekil 4.47'de sunulmuştur.


Oyun sahasını oluşturan çizgilerin kalınlığı 50mm
saha çizgileriyle herhangi bir engelin arası en az iki
metre olmalıdır. Sahanın dış kenarından başlayan ve iki metre
genişliğindeki bölge, oyun sahası zeminine zıt renge boyanmalıdır.
Serbest atış çizgisi ile taban çizgisi arasında kalan alan ve
orta daire aynı renk olmalıdır.
Verilen bilgilere göre renklendirilecek bölgelerin kapladığı
alanı belirleyiniz.

Şekil 4.47: Grup 1'in problemin anlaşılmasına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, farklı basketbol sahası görsellerine ulaşmak amacıyla cep telefonu aracılığıyla yapılan internet araştırması, epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin kullanıldığını göstermektedir. Aynı zamanda, çeşitli basketbol sahası görsellerinin incelenmesiyle epistemolojik düzlemin temsil bileşeninden yararlanıldığı görülmüştür. Basketbol sahasında yer alan geometrik şekillerin alanlarının hesaplanabilmesi için geometrik şekillere ait teorik referansların dikkate alınması gerektiği ifade edilerek gerçekleştirilen akıl yürütme süreci, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Grup 1'in Basketbol görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışmanın, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında epistemolojik düzlemin bileşenlerinden yararlanılarak yürütüldüğü ve söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği görülmüştür. Gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.48'de sunulmuştur.

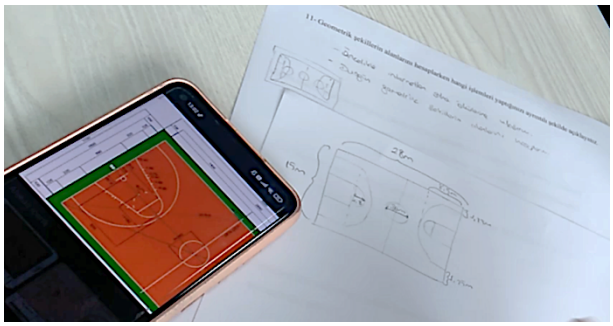


Şekil 4.48: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

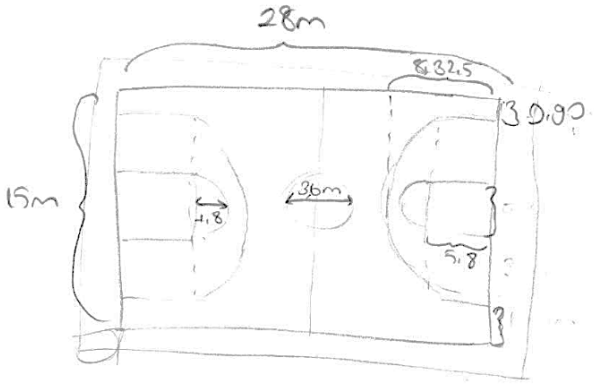
Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 1 öğretmen adaylarının, basketbol sahasını internetten edindikleri görsele uygun şekilde çalışma yaprağına yazılı olarak aktardıkları ve salon standartlarına uygun uzunluk ölçülerini oluşturdukları şekil üzerinde belirttikleri görülmüştür (Şekil 4.49). Bu süreçte öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA1: Sahanın kısa kenarından üçlük atılan sınıra kadar olan uzunluğu 8,5 metre alsak… bir tek buranın alanı kaldı. Bunları yazıyorum çalışma kağıdına.
ÖA2: Bakın pota altındaki uzunluk 4,90 metreymiş. Kısa kenardan serbest atış çizgisine kadar olan uzunluk 5,8 metre … Üçlük çizgisi ile uzun kenar arası da 90 santimetreymiş … ama bazı kaynaklarda da 1,25 metre yazıyor.
ÖA1: Çizgilerin kalınlığı da 50 milimetre olacak. Onu dikkate almamız lazım sanırım.
ÖA2: Çizgilerin kalınlığını hesaplarız da iki kaynak arasındaki farkı nasıl düşüneceğiz acaba. İkisinin arasında fark var 35-40 santimetre kadar.
ÖA3: Kısa kenarın olduğu yerden pota altının olduğu bölgeye kadar olan uzunluk 4,15 metre çıkıyor.
ÖA2: Çizgilerin kalınlıkları ölçümlere dahil mi değil mi?
ÖA3: O zaman biz basketbol federasyonunun dosyasını referans olarak alalım. Oradaki uzunluklara göre ilerleyelim.



Şekil 4.49: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki eylemlerine ilişkin görsel – Basketbol görevi

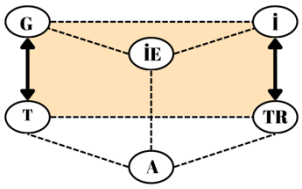
Gerçekleştirilen diyalogda, Grup 1 öğretmen adaylarının internette yer alan farklı kaynaklar arasındaki bilgi tutarsızlarını fark ettiği ve bu durum karşısında Türkiye Basketbol Federasyonu tarafından yayımlanan yönergede yer alan bilgileri esas almaya karar verdikleri görülmüştür. Bu doğrultuda, yönergede belirtilen uzunluk ölçüleri dikkate alınarak belirlenen değerler, çalışma yaprağındaki matematiksel modele aktarılmıştır. Söz konusu modele ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.50'de sunulmuştur.



Şekil 4.50: Grup 1'in oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi

Matematiksel modelin oluşturulması sürecinde, üçlük çizgisinin içinde kalan bölgenin kesikli çizgilerle iki ayrı bölgeye ayrıldığı görülmüştür. Grup 1 öğretmen adayları, oluşturdukları matematiksel modelde yer alan geometrik şekillerin alanlarını hesaplayarak bir matematiksel sonuca ulaşmayı amaçladıklarını belirtmiştir. Bu doğrultuda, problemin matematikselleştirme aşamasının tamamlandığı görülmüştür.

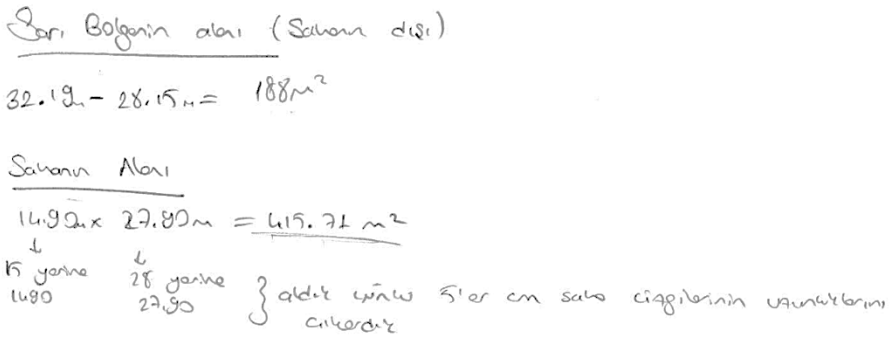
Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, basketbol sahasının özgün yapısına uygun biçimde çalışma yaprağına aktarılması ve saha ölçülerine ilişkin matematiksel temsillere yer verilmesi, semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu süreçte farklı kaynaklardan elde edilen veriler arasındaki tutarsızlıklar dikkate alınmış ve hangi kaynağın esas alınacağına ilişkin gerekçeli bir karar alma süreci yürütülmüştür. Yapılan bu gerekçelendirmeler ve matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak geometrik şekillerin parçalara ayrılmasıyla sürdürülen akıl yürütme süreci, söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemlerin, temsil edilen nesnelerin görselleştirilmesini ve probleme yönelik söylemsel akıl yürütmeyi içermesi, Grup 1 tarafından yürütülen matematiksel çalışmanın [Sem-Söy] dikey düzleminde gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.51'de sunulmuştur.



Şekil 4.51: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol Görevi

4.2.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik gerçekleştirilen matematiksel olarak çalışma aşamasında, Grup 1 öğretmen adaylarının öncelikle parçalanmış bölgede yer alan şeklin alanını hesaplamak amacıyla akıl yürütme gerçekleştirdikleri görülmüştür. Şeklin tam bir yarım daire olmadığı fark edilerek, bu bölgenin alanının doğrudan hesaplanmasından vazgeçilmiş ve bunun yerine diğer bölgelerin alanlarının belirlenmesine öncelik verilmiştir. Bu doğrultuda hem saha dışı bölgenin hem de sahanın alanının hesaplanması amacıyla dikdörtgenin alan bağıntısı kullanılarak çeşitli matematiksel işlemler gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen işlemlere ait çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.52'de sunulmuştur.

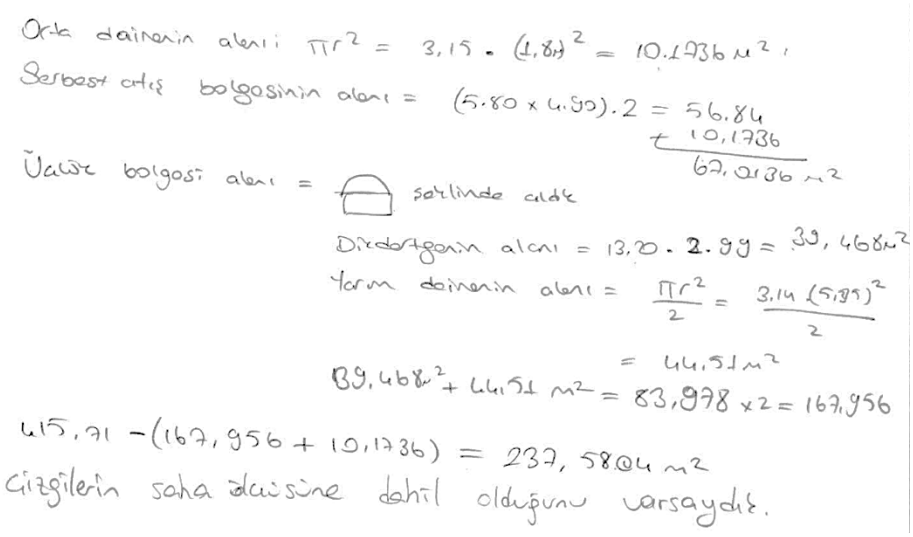


Şekil 4.52: Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

Gerçekleştirilen matematiksel işlemler sırasında dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanıldığı ve saha çizgilerinin kalınlığı olan 5 santimetrenin dikkate alındığı görülmektedir. Ardından diğer geometrik şekillerin alanlarını hesaplamaya yönelen Grup 1 öğretmen adaylarının, bu hesaplamalar sırasında saha çizgilerinin kalınlıklarının hesaba katılıp katılmayacağı konusunda bir tartışma yürüttükleri anlaşılmaktadır. Grup içinde geçen diyalog şu şekildedir:

ÖA3: Şimdi bütün alanları tek tek bulacağız. Ne kadar şekil görüyorsak fotoğrafta.
ÖA2: Onlar kolay zaten sadece üçlük çizgisinin içi zor. Bir de çizgileri nasıl düşüneceğiz? Ben almayacaktım, siz alalım dediniz. Kafamız karıştı.
ÖA3: çizgilerin alanını tüm alanın içinde alalım, yoksa işin içinden çıkamayacağız.
ÖA2: O zaman sahada çizgileri düşünmeyelim.
ÖA3: bence almamız gerekiyor çünkü almayacak olsak soruda öyle bir şey vermezdi. Ama hesaplamalarımızı çizgi kalınlıklarını ihmal ederek yapabiliriz.

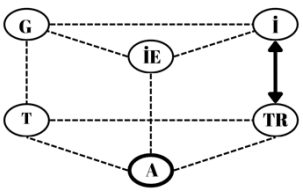
Bu grup tartışması sonucunda Grup 1 öğretmen adaylarının, basketbol sahasında belirlenen geometrik şekillerin alanlarını hesaplarken saha çizgilerinin kalınlıklarını ihmal etme yönünde karar aldıkları görülmüştür. Bu doğrultuda, oluşturulan matematiksel model üzerinde yer verilen verilere dayalı olarak çeşitli matematiksel işlemler gerçekleştirilmiş; hesaplamalarda hesap makinesi kullanılmıştır. Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.53'te sunulmuştur.



Şekil 4.53: Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

Grup 1 tarafından gerçekleştirilen matematiksel işlemlerde, daire ve dikdörtgenin alan bağıntılarının kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca saha çizgilerinin alan hesaplamalarına dahil edilmediği, öğretmen adayları tarafından açık bir şekilde ifade edilmiştir. Böylece, matematiksel olarak çalışma aşamasına tamamlanmıştır.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 1 öğretmen adaylarının belirledikleri çözüm planını uygulamak amacıyla sistematik biçimde matematiksel işlemler yürüttüğü anlaşılmaktadır. Bu işlemler sırasında hesap makinesinden yararlanılması, epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin; dikdörtgen ve dairenin alan bağıntılarından faydalanılması ise teorik referanslar bileşenin kullanıldığını göstermektedir. Ayrıca, grup tartışmasında basketbol sahasını oluşturan çizgilerin hesaplamalara dahil edilip edilmeyeceğine ilişkin yürütülen akıl yürütmenin, söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret ettiği görülmüştür. Gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.54'te sunulmuştur.

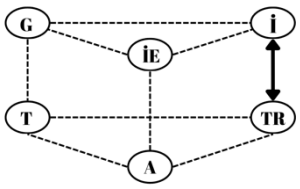


Şekil 4.54: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.1.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamasının Analizi

Elde edilen matematiksel sonucun yorumlanması sırasında Grup 1 öğretmen adayları, problemin çözümünde gerçek verilere dayandıklarını ifade etmiştir. Gerçek yaşamdan elde edilen bu verilerin kullanılması nedeniyle ulaşılan matematiksel sonucun gerçek durumlara uygun olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca, somut görsellere dayalı olarak yürütülen matematiksel işlemlerin neden-sonuç ilişkileri doğrultusunda temellendirildiği belirtilmiştir. Böylece, Basketbol görevinin çözümü için Grup 1 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma sonlandırılmıştır.

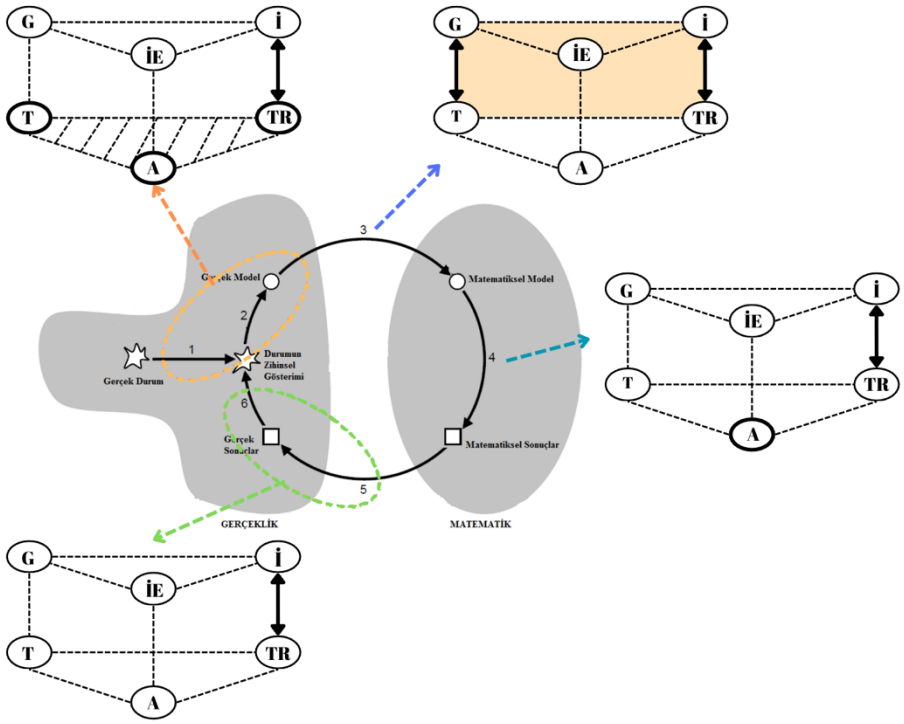
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 1 öğretmen adaylarının çözüm sürecinde somut görsellerden ve gerçek verilerden yararlandıklarını ifade etmeleriyle, yürüttükleri eylemleri gerekçelendirdikleri görülmektedir. Bu durum, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Yorumlama ve değerlendirme aşamasında gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.55'te sunulmuştur.



Şekil 4.55: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.1.5 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 1 öğretmen adaylarının Basketbol görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.56'da sunulmuştur.



Şekil 4.56: Grup 1'in Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 1'in Basketbol görevine ilişkin yürüttüğü matematiksel çalışmanın özeti incelendiğinde, problemi anlama ve basitleştirme aşamasının epistemolojik düzlemin bileşenlerinin kullanımıyla ve söylemsel oluşumun gerçekleştirilmesiyle yürütüldüğü görülmektedir. Bu aşamada, Grup 1 öğretmen adaylarının problemi matematiksel gerekçelerle ele aldığı ve düşünme süreçlerini epistemolojik düzlemin bütünlüğü içinde ifade ettikleri söylenebilir.

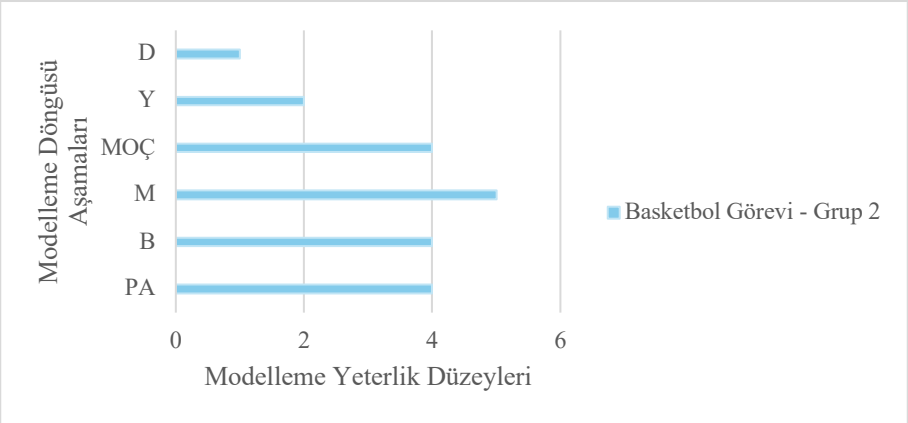
Matematikselleştirme aşamasında ise, matematiksel temsillerin kullanımı sürecinde yapılan söylemsel gerekçelendirmelerle matematiksel model oluşturulmuştur. [Sem-Söy] dikey düzleminde gerçekleşen bu süreçte, modelin görselleştirilmesi sırasında mantıksal açıklamalara yer verildiği görülmektedir. Modelin çözüm sürecinde gerçekleştirilen işlemlerde hesap makinesinden yararlanılması, artefakt bileşeninin kullanımına işaret ederken; işlemlerin söylemsel oluşum yoluyla gerekçelendirilmesiyle matematiksel sonuca ulaşıldığı görülmüştür. Yorumlama ve doğrulama aşamalarında ise, ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşamdaki karşılığına yönelik bağlamsal geçerlilik arayışı söylemsel oluşumun gerçekleştirilmesiyle sağlanmıştır.

Grup 1'in matematiksel çalışması incelendiğinde, süreç boyunca ağırlıklı olarak söylemsel oluşumun gerçekleştiği görülmektedir. Ancak, özellikle enstrümantal oluşumun büyük ölçüde

devreye girmediği fark edilmektedir. Matematiksel modelin oluşturulması sürecinde, matematiksel temsillerin görselleştirilmesine yönelik eylemler gerekçelendirerek ortaya konmuş olsa da sürecin genelinde matematiksel inşa süreçlerinin gerçekleştirilmemesi nedeniyle enstrümantal oluşumun katkısının sınırlı kaldığı söylenebilir. Nitekim Grup 1'in yürüttüğü bu çalışma, modelleme yeterliğinin en düşük düzeyde olduğu örneklerden biri olarak değerlendirildiğinde; semiyotik oluşumun sınırlı kalması ve enstrümantal oluşumun gerçekleşmemesi, bu düşük yeterlik düzeyine etki eden önemli faktörler arasında gösterilebilir.

4.2.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi

Grup 2'nin Basketbol görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını ortaya koyan ifadelere yer verildiği görülmüştür. Problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi sürecinde bazı önemsiz hatalar yapılmış olsa da bu veriler arasında ilişki kurulabilmesi nedeniyle problemi anlama aşamasında Düzey 4'te yer aldıkları belirlenmiştir. Gerekli ve gereksiz değişkenlerin ayırt edilerek gerçekçi varsayımlar yoluyla problemin sadeleştirilmesi, Grup 2'nin basitleştirme aşamasında da Düzey 4'te bulunulduğunu göstermektedir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, Grup 2 öğretmen adaylarının gerçekçi varsayımlar doğrultusunda uygun bir matematiksel model oluşturdukları ve bu nedenle matematikselleştirme aşamasında Düzey 5'te bulundukları; ancak oluşturulan modelin çözümünde bazı eksikliklerin bulunması nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 4'te yer aldıkları tespit edilmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlanması nedeniyle yorumlama aşamasında Düzey 2'de; herhangi bir doğrulama girişiminde bulunulmaması nedeniyle ise doğrulama aşamasında Düzey 1'de yer aldıkları belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 2'nin Basketbol görevine ilişkin matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.57'de sunulmuştur.



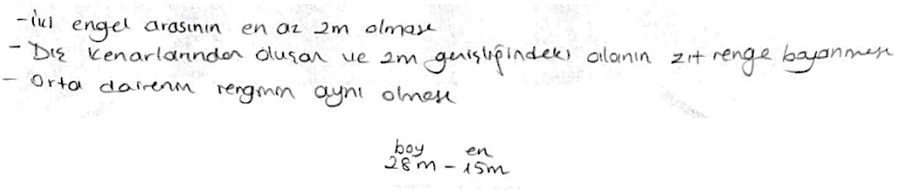
Şekil 4.57: Grup 2'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Basketbol görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri dikkate alındığında, Grup 2'nin özellikle basitleştirme ve matematikselleştirme aşamalarında yüksek performans sergilediği; buna karşılık yorumlama ve doğrulama aşamalarında ise düşük performans sergilediği görülmektedir. Basketbol görevine yönelik gerçekleştirilen matematiksel çalışma sonucunda MYDR üzerinden toplam 14 puan elde eden Grup 2'nin, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu görülmüştür. Bu doğrultuda, Grup 2 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevi çözmeye yönelik olarak işlevsel bir matematiksel çalışma yürütebildiği söylenebilir. Grup 2 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.2.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 2'nin basketbol probleminin çözümüne yönelik yürüttüğü matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakikalık bireysel çalışma süreciyle başlamıştır. Bireysel çalışma sürecinde, öğretmen adaylarının problem durumunu anlamaya yönelik olarak hazır oluş sorularına yanıtlar verdikleri ve yönlendirilmiş keşif sorularını inceledikleri görülmüştür. Grup çalışmasına geçildiğinde ise Grup 2 öğretmen adaylarının, öncelikli olarak sahayı oluşturan çizgilerin kalınlıkları ile saha ölçülerinin belirlenmesine ilişkin kuralları sorguladıkları anlaşılmıştır. İnternet aracılığıyla yapılan araştırmalar sonucunda basketbol sahasına ilişkin temel terimlerin anlaşılmasıyla birlikte, saha ölçüleri ve çizim kurallarıyla ilgili standartların çalışma yaprağına

yazılı olarak not edildiği gözlemlenmiştir. Gerçekleştirilen eyleme ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.58'de sunulmuştur.



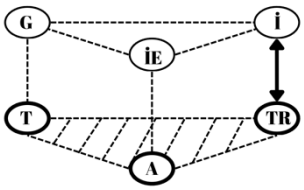
Şekil 4.58: Grup 2'nin problemi anlama aşamasına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

İnternet araştırması yoluyla farklı basketbol sahası örneklerini inceleyen Grup 2 öğretmen adayları, problemin çözümü sırasında bazı bölgelerin alanlarının hesaplanmasında integral kavramının kullanılmasının gerekli olduğunu ifade etmiştir. Eğrisel bölgenin alanının hesaplanabilmesi için GeoGebra dinamik geometri yazılımından yararlanılabileceği belirtilmiştir. Problemin çözümüne yönelik planlama sürecinde Grup 2 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA4: Önce sahanın tamamını dikdörtgen olarak düşüneceğiz. Sonra üçlük çizgisinin olduğu bölümün alanını hesaplarken arada kalan üçgenin alanını çıkaracağız, dikdörtgen olarak düşündüğümüz bölgede fazlalık oluyor orası.
ÖA6: Üçgen değil ki orası.
ÖA4: Üçgen değil de oradaki alanı çıkaracağız. İntegrali hesaplarken yapacağız onu ya da üçgen olduğunu varsayacağız.
ÖA6: O zaman dikdörtgen daire ve üçgen şekillerini kullanacağız alanları hesaplarken.
ÖA4: Bu diğer fotoğrafın aynısı bence farklı bir fotoğraf alalım.
ÖA6: Bu fotoğrafta bütün saha ölçülerini yazmış. Bu bilgileri kullanabiliriz karşılaştırma yapmak için.
ÖA4: Bu alanları GeoGebra ile bulalım
ÖA6: Aslında bu alanları GeoGebra kullanmadan da bulabiliriz.
ÖA4: Ama üçlük çizgisi bir eğriden oluşuyor onun alanını hesaplamamız için GeoGebra kullanmamız gerekiyor bence.
ÖA6: O zaman bu resmi direkt GeoGebra'ya kopyalayıp oradan hesaplayalım.

Gerçekleştirilen grup tartışması sonucunda, problemin çözümüne yönelik bir plan yapılmıştır. Bu plana göre; bilinen geometrik şekillerin alanlarının hesaplanmasında standart geometrik formüllerden, eğrisel bölgenin alanının hesaplanmasında ise integral kavramından ve GeoGebra dinamik geometri yazılımından yararlanılacağı belirtilmiştir. Bu doğrultuda, Grup 2 öğretmen adayları problemi anlama ve basitleştirme aşamasını tamamlamıştır.

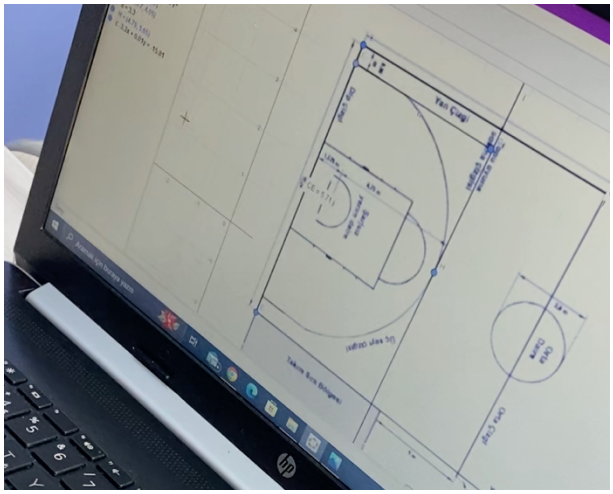
Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında, internet araştırması yapılması ve problemin çözümünde GeoGebra dinamik geometri yazılımının kullanılmasına yönelik planlamaların gerçekleştirilmesiyle epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca, farklı görsellerin incelenmesi ve basketbol sahasında yer alan geometrik şekillerin kullanılacağının ifade edilmesiyle epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin, bazı bölgelerin alan hesaplamalarında integral kavramına başvurulmasının planlanmasıyla ise epistemolojik düzlemin teorik referanslar bileşeninin kullanıldığı belirlenmiştir. Grup tartışması sürecinde problemin çözümüne yönelik planın oluşturulması ise söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.59'da sunulmuştur.



Şekil 4.59: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

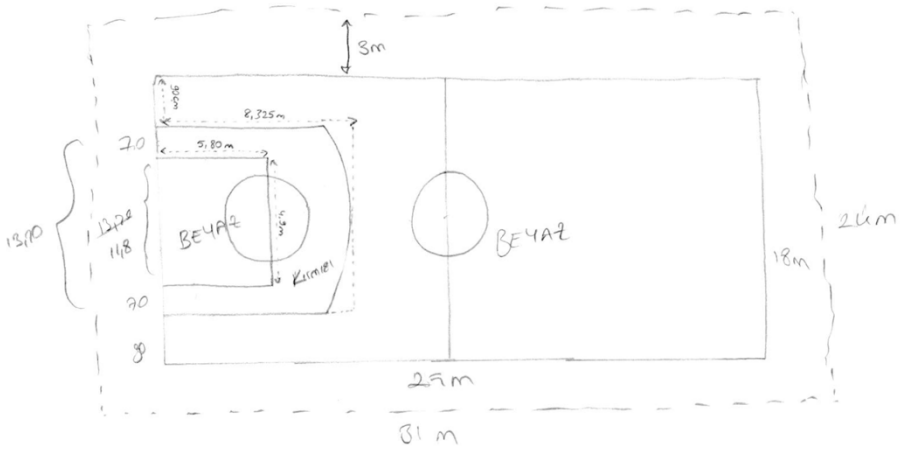
4.2.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, hazırlanan çözüm planının uygulanması amacıyla GeoGebra dinamik geometri yazılımını kullanmaya başlayan Grup 2 öğretmen adayları, basketbol sahasını ve ölçülerini içeren bir görseli resim ekleme aracı yardımıyla GeoGebra dinamik çalışma sayfasına aktarmıştır. Ardında, doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak basketbol sahasının uzun kenarını temsil eden bir doğru parçası inşa edilmiştir. Bu doğru parçasının uzunluğu cebir penceresi aracılığıyla belirlenmiş ve GeoGebra'da 11,18 birim olan bu uzunluğun, gerçek yaşamda 28 metreye karşılık geldiği ifade edilmiştir. Basketbol sahasına ait diğer ölçümleri elde etmek amacıyla ise doğru parçası oluşturma, nokta oluşturma ve dik doğru oluşturma araçlarından yararlanılmıştır (Şekil 4.60).



Şekil 4.60: Grup 2'nin GeoGebra araçlarını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi

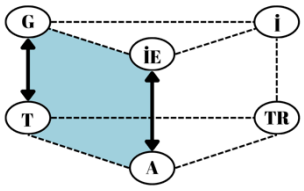
Gerçekleştirilen bu eylemlerin ardından Grup 2 öğretmen adayları, problemin çözümüne yönelik olarak çalışma yaprağı üzerinde bir matematiksel model inşa etmiştir. Oluşturulan matematiksel modele ait çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.61'de sunulmuştur. Hazırlanan modelde, alanı hesaplanacak bölgelerin renklere ayrıldığı ve her bir bölgeye ait ölçülerin belirtildiği görülmektedir.



Şekil 4.61: Grup 2'nin oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi

Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen bu eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının problemin çözümünde kullanacağı uygun bir görseli dijital bir artefakt olan GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktardığı görülmüştür. Bu süreçte epistemolojik

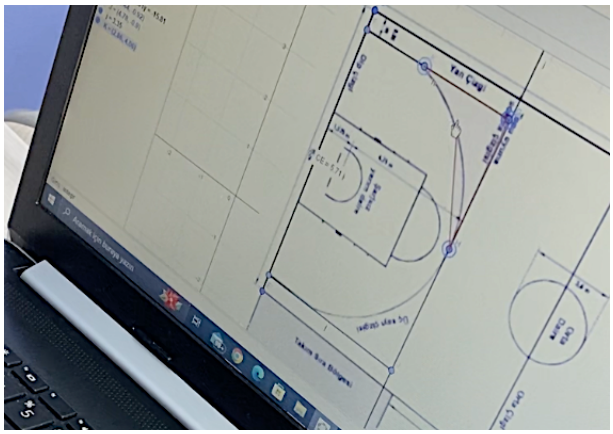
düzlemin temsil ve artefakt bileşenlerinden yararlanıldığı belirlenmiştir. GeoGebra dinamik çalışma sayfasında doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak basketbol sahasına ait çizgilerin doğru parçaları ile temsil edilmesi hem semiyotik oluşumun hem de enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Basketbol sahasına ve saha bileşenlerine ilişkin oluşturulan matematiksel modelin çalışma yaprağında yazılı olarak görselleştirilmesi, problemi çözebilmek için matematiksel nesnelerin keşfedilmesini amaçlandığından, gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde yürütüldüğü anlaşılmaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.62'de sunulmuştur.



Şekil 4.62: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

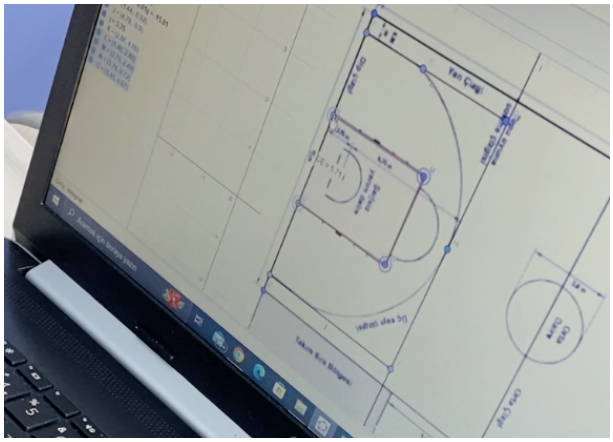
4.2.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak gerçekleştirilen matematiksel olarak çalışma aşamasında, Grup 2 öğretmen adayları, GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulan doğru parçaları ile üçlük çizgisini oluşturan eğri arasında kalan alanın belirlenmesi için GeoGebra çalışma sayfasının giriş bölümüne 'integral' komutunu yazmıştır. Ancak, 'integral' komutuna ilişkin çeşitli alt komutlar arasından hangisinin kullanılacağına karar verilememesi üzerine, Grup 2 öğretmen adaylarının bu süreçte güçlük yaşadığı gözlemlenmiştir. Bu belirsizlik nedeniyle çokgen oluşturma aracı kullanılarak ilgili bölgenin manuel olarak seçilmeye çalışıldığı ve bu eylem sırasında öğretmen adaylarının zorlandığı görülmüştür. Çokgen oluşturma aracının kullanımına ilişkin görsel Şekil 4.63'te sunulmuştur.



Şekil 4.63: Grup 2'nin çokgen oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi

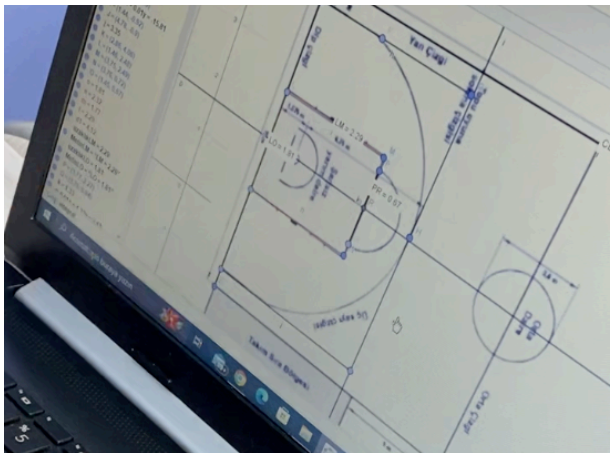
Başlangıçta başarısızlıkla sonuçlanan eylemin ardından, Grup 2 öğretmen adayları çokgen oluşturma aracını kullanarak görseldeki bazı bölgelerin alanlarını belirleyebileceklerini fark etmiştir. Bu doğrultuda, pota altı bölgesinin köşe noktaları işaretlenmiş ve çokgensel bölge inşa edilmiştir. Oluşturulan çokgensel bölgeye ilişkin alan değeri GeoGebra'nın cebir penceresinde belirlenmiştir (Şekil 4.64).



Şekil 4.64: Grup 2'nin oluşturduğu çokgensel bölgeye ilişkin görsel – Basketbol görevi

Serbest atış bölgesini oluşturan yarım dairenin alanının belirlenmesi için, serbest atış çizgisi ile yarım daireyi oluşturan eğrinin kesişim noktalarına nokta işaretleme aracıyla iki farklı nokta işaretlenmiştir. Ardından, bu noktalar doğru parçası oluşturma aracıyla birleştirilerek serbest atış çizgisi temsil edilmiştir. Serbest atış bölgesindeki yarım dairenin merkezini belirleyebilmek amacıyla, oluşturulan doğru parçasının orta noktasından geçen bir dik doğru inşa edilmiştir. Bu işlemde orta dikme aracı kullanılmış, orta dikme ile serbest atış çizgisinin kesişim noktası

kesiştir aracıyla belirlenmiştir. Böylece yarım dairenin merkezi konumlandırılmış ve yarıçap uzunluğu, uzunluk ölçme aracıyla hesaplanmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.65'te sunulmuştur.



Şekil 4.65: Grup 2'nin orta dikme oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi

Üçlük çizgisinin oluşturduğu bölgenin alanını hesaplayabilmek amacıyla bu çizgiyi temsil eden bir matematiksel nesne oluşturmak isteyen Grup 2 öğretmen adayları, bu nesnenin bir parabol ya da yarım çember olabileceğini ifade etmiştir. Parabol oluşturma aracı kullanılmaya çalışıldığında doğrultman gereksiniminin fark edilmesi üzerine, sürece çember oluşturma aracıyla devam edilmesine karar verilmiştir. Çember oluşturma aracının farklı varyasyonlarının bulunduğunu fark eden öğretmen adayları, üçlük çizgisini temsil edecek nesnenin 'üç noktadan geçen çember' oluşturma aracı ile inşa edilebileceğine kanaat getirmiştir. Böylece üç noktadan geçen çember oluşturularak modelleme yapılmıştır. Bu sürece ilişkin ekran görüntüsü Şekil 4.66'da sunulmuştur.



Şekil 4.66: Grup 2'nin üç noktadan geçen çember oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Basketbol görevi

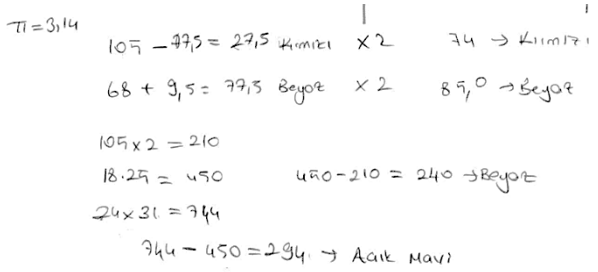
Oluşturulan bölgenin alanının hesaplanması amacıyla integral hesaplama komutlarından birinin kullanılması gerektiğini belirten Grup 2 öğretmen adayları, üçlük çizgisini temsil eden çember yayının tam olarak istenilen bölgeden geçmemesine rağmen bu farkın ihmal edilebilir düzeyde olduğunu ifade etmiştir. İntegral komutunun uygulanması sırasında, yönergede belirtilen şekilde bölgeyi tanımlayan fonksiyonların cebir penceresindeki temsillerinin girilmesi gerektiği fark edilmiştir. Ancak 'İntegralarasında' komutunun kullanımı sırasında gerekli fonksiyon temsillerinin doğru şekilde yazılamaması nedeniyle, Grup 2 öğretmen adayları ilgili bölgenin alanını belirleyememiştir. Sürecin devamında, GeoGebra dinamik çalışma sayfasında oluşturulan doğru parçalarının uzunluklarına ilişkin değerlerin yer aldığı bir tablo hazırlanmıştır. Oluşturulan tabloya ait çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.67'de sunulmuştur.

	Gerçek Uzunluk	Model Uzunluk
Sahanın Eni	15 metre	5,71 br
Sahanın Boyu	28 metre	11,18 br
Serbest Atış bölgesi boyu	5,8 metre	1,81 br
Serbest Atış bölgesi eni	4,9	2,23
Çizik çizgisinin yarıçapı	2,49	0,67

Şekil 4.67: Grup 2'nin elde edilen verileri sunmak için oluşturduğu tablo – Basketbol görevi

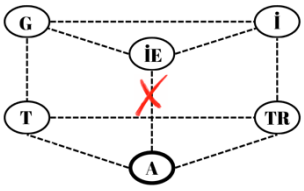
Grup 2 öğretmen adayları, oluşturulan tabloda yer alan uzunluk verilerini kullanarak çeşitli matematiksel işlemler gerçekleştirmiştir. Bu işlemler sırasında, matematiksel modelde farklı renklerle gösterilen bölgelerin alanları hesaplanmıştır. Alan hesaplamalarında, dairenin alanının belirlemek için kullanılan pi sayısının 3,14 olarak alındığı; dikdörtgen ve daire alan

bağıntılarından yararlanıldığı görülmüştür. Gerçekleştirilen matematiksel işlemlere ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.68'de sunulmuştur.



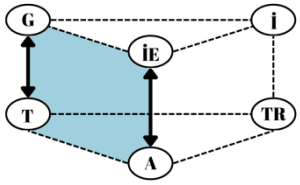
Şekil 4.68: Grup 2'nin matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

Matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının integral hesaplama komutunu ve çokgen oluşturma aracını problem bağlamında işlevsel şekilde kullanamadığı görülmektedir. Epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin kullanılmış olsa da bu bileşenin probleme uygun matematiksel yapılar üretmeye hizmet etmemesi nedeniyle enstrümantal oluşumun gerçekleşmediği görülmüştür. Bu nedenle Grup 2 öğretmen adaylarının çözüm sürecinde farklı bir strateji geliştirmek durumunda kaldığı anlaşılmaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.69'da sunulmuştur.



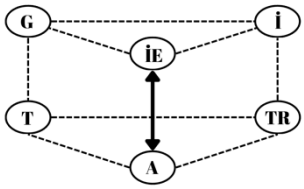
Şekil 4.69: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Basketbol görevi

Problemin çözümüne yönelik stratejinin değiştirilmesinin ardından, Grup 2 öğretmen adaylarının çokgen oluşturma aracını kullanarak pota altındaki kısıtlı bölgeyi temsil eden dörtgensel bölgeyi inşa etmesiyle birlikte semiyotik oluşum ve enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği görülmüştür. Bu süreçte oluşturulan matematiksel nesneler aracılığıyla probleme ilişkin yeni keşiflerin yapılmasının amaçlandığı ve bu doğrultuda matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirildiği görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.70'te sunulmuştur.



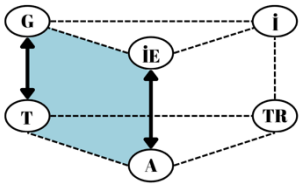
Şekil 4.70: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Basketbol görevi

Serbest atış bölgesini oluşturan yarım dairenin merkezini belirlemek amacıyla, nokta oluşturma aracı, doğru parçası oluşturma aracı, orta dikme aracı ve kesişim noktası belirleme aracı kullanılarak çeşitli eylemler gerçekleştirilmiştir. Merkez noktanın belirlenmesinin ardından, yarım dairenin yarıçap uzunluğu uzunluk ölçme aracı ile hesaplanmıştır. Bu süreçte, kullanılan dijital artefaktların probleme yönelik amaç doğrultusunda etkin bir biçimde kullanılmasıyla enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.71'de sunulmuştur.



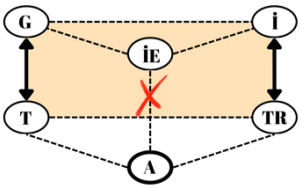
Şekil 4.71: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Basketbol görevi

Üçlük çizgisini temsil eden çember yayını oluşturmak amacıyla Grup 2 öğretmen adaylarının, GeoGebra yazılımında üç noktadan geçen çember aracını kullandığı görülmüştür. Bu araç yardımıyla üçlük çizgisi üzerinde seçilen üç nokta üzerinden çember yayının inşa edilmesi, probleme yönelik uygun artefaktların işlevsel biçimde kullanılmasını sağlamış ve böylece enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, oluşturulan çember yayının üçlük çizgisini temsil eden bir matematiksel nesne olarak ele alınması, semiyotik oluşumun da gerçekleştiğini göstermektedir. Gerçekleştirilen bu eylemlerde hem matematiksel nesnelerin inşa edilmesi hem de bu nesneler aracılığıyla problemin çözümüne yönelik verilerin elde edilmesi amaçlandığından, matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde yürütüldüğü sonucuna ulaşılmıştır. Bu eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.72'de sunulmuştur.



Şekil 4.72: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 4 – Basketbol görevi

Çember yayı ile temsil edilen üçlük çizgisinin oluşturduğu bölgenin alanının hesaplanması amacıyla GeoGebra dinamik geometri yazılımında integral komutlarını kullanmaya çalışan Grup 2 öğretmen adaylarının, bu komutu uygun biçimde kullanmakta zorlandığı görülmüştür. Bu durum, her ne kadar epistemolojik düzlemin artefakt bileşeni kullanılmış olsa da artefaktın amaca uygun şekilde işlevselleştirilememesi nedeniyle enstrümantal oluşumun gerçekleşmediği yönünde değerlendirilmiştir. Bununla birlikte, problemin çözümüne yönelik olarak basketbol sahasına ilişkin çeşitli veriler elde eden Grup 2 öğretmen adaylarının bu verileri tablo aracılığıyla görselleştirdiği görülmektedir. Verilerin tablo biçiminde sunulması ve bu yolla temsil biçimleri arasında geçiş yapılması, semiyotik oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, tablolaştırılan verilerden yararlanılarak geometrik şekillerin alan bağıntılarının kullanılması ve matematiksel işlemler sırasında yapılan gerekçelendirmeler, söylemsel oluşumun da gerçekleştiğine işaret etmektedir. Gerçekleştirilen bu eylemlerle birlikte matematiksel düşüncelerin yazılı hale getirilmesi ve farklı temsiller arasında geçiş yapılabilmesi için gerekçelendirmelerin sunulması, matematiksel çalışmanın [Sem-Söy] dikey düzleminde yürütüldüğünü ortaya koymaktadır. Bu aşamada gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.73'te sunulmuştur.



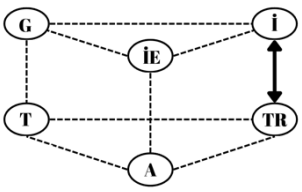
Şekil 4.73: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 5 – Basketbol görevi

4.2.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Matematiksel işlemlerin gerçekleştirilmesiyle elde edilen sonucun yorumlanması sürecinde, Grup 2 öğretmen adaylarının GeoGebra çalışma sayfası aracılığıyla temsili uzunluklara ulaştığı görülmüştür. Bu uzunlukların gerçek yaşam ölçüleriyle karşılaştırılabilmesi amacıyla bir tablo

oluşturulduğu ve elde edilen sonuçların gerçek yaşamdaki verilerle büyük ölçüde örtüştüğünün ifade edildiği görülmektedir. Bu değerlendirme doğrultusunda, Basketbol görevine ilişkin matematiksel çalışma tamamlanmıştır.

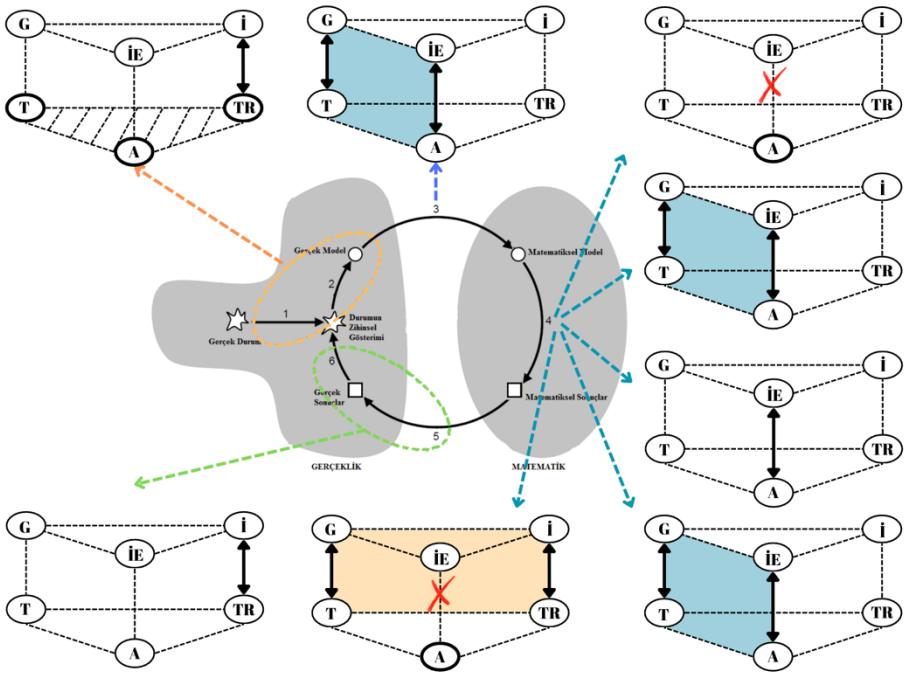
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının GeoGebra dinamik çalışma sayfasında elde edilen temsili uzunluklarla gerçek uzunluk ölçüleri arasında karşılaştırma yaparak ulaştıkları matematiksel sonucun doğruluğunu değerlendirdikleri ve bu değerlendirmeyi gerekçelendirdikleri görülmektedir. Gerçekleştirilen karşılaştırmalar ve bu karşılaştırmalardan elde edilen çıkarımların savunulması, söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.74'te sunulmuştur.



Şekil 4.74: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 2 öğretmen adaylarının Basketbol görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.75'te sunulmuştur.



Şekil 4.75: Grup 2'nin Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 2'nin Basketbol görevine ilişkin yürüttüğü matematiksel çalışma incelendiğinde, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında epistemolojik düzlemin farklı bileşenlerinin etkin biçimde kullanıldığı ve söylemsel oluşumun gerçekleştiği görülmektedir. Bu süreçte, temsil ve artefakt bileşenlerinin kullanımıyla problemde yer alan matematiksel özellikler dikkate alınmış; yürütülen akıl yürütme süreçleriyle birlikte probleme ilişkin matematiksel bir çerçeve oluşturulmuştur. Bu çerçeve doğrultusunda, problemde yer alan temsillerin dijital araçlar gibi artefaktlar aracılığıyla inşa edilmesi ve görselleştirilmesiyle [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemler sonucunda matematiksel model oluşturulmuştur.

Grup 2 öğretmen adaylarının oluşturduğu matematiksel modelin çözümüne yönelik matematiksel olarak çalışma aşamasının beş adımda gerçekleştiği görülmektedir. İlk adımda, dijital artefaktların kullanımıyla çeşitli eylemler gerçekleştirilmeye çalışılmış; ancak kullanılan aracın işlevselleştirilememesi nedeniyle enstrümantal oluşum gerçekleştirilememiştir. Bu durum, artefaktın amacına uygun şekilde kullanılamaması sonucu matematiksel çalışmada bir kopukluk yaşandığı şeklinde değerlendirilmiştir.

İkinci adımda, [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemlerle matematiksel temsillerin, artefaktlar yardımıyla uygun biçimde görselleştirildiği görülmüştür. Bu sayede

Grup 2 öğretmen adayları, problemi çözmeye yönelik geliştirdikleri stratejileri uygulamaya başlamıştır. Üçüncü adımda ile, enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmesiyle, artefaktların amaca uygun biçimde kullanılarak matematiksel inşaların başarıyla gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Bu ara eylem, problemin çözümüne yönelik yeni bir adımı temsil etmektedir.

Dördüncü adımda, yine [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemlerle görselleştirme sürecinin, uygun şekilde inşa edilen matematiksel nesneler üzerinden sürdürüldüğü belirlenmiştir. Beşinci ve son adımda ise, temsillerin görselleştirilmesi süreci matematiksel söylemlerle gerekçelendirilmiş olsa da kullanılan artefaktların işlevselleştirilememesi nedeniyle enstrümantal oluşum bu noktada gerçekleştirilememiştir.

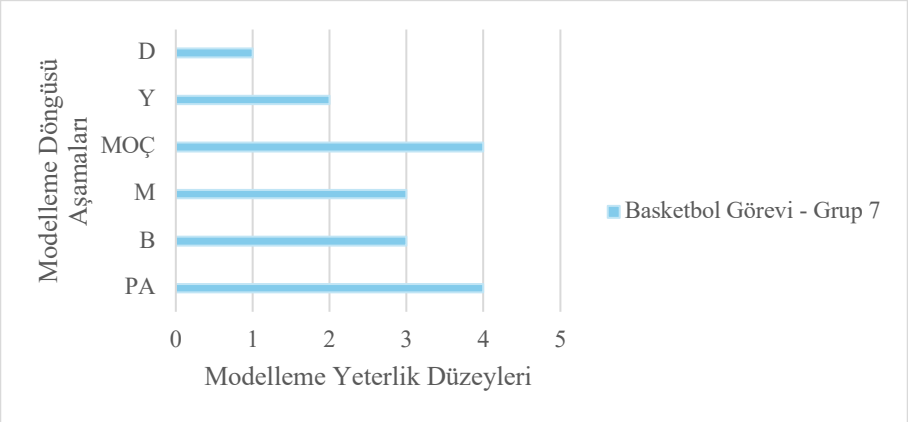
Her ne kadar bu aşamada enstrümantal oluşumda bir kopukluk yaşanmış olsa da Grup 2 öğretmen adaylarının matematiksel olarak çalışma süreci [Sem-Söy] dikey düzleminde tamamlanmıştır. Elde edilen matematiksel sonucun yorumlanması ve doğrulanmasına yönelik eylemlerin ise söylemsel oluşum ile sınırlı kaldığı görülmektedir. Bu bağlamda, matematiksel çalışmanın bağlamsal geçerliliği, gerçek yaşam verileriyle yapılan karşılaştırma sonucu üretilen matematiksel söylem aracılığıyla gerekçelendirilmiştir.

Grup 2'nin matematiksel çalışması incelendiğinde, özellikle [Sem-Ens] dikey düzleminin etkin biçimde kullanıldığı görülmektedir. Bununla birlikte, enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmesi sırasında kopuklukların yaşandığı da dikkat çekmektedir. Ancak süreç içerisinde enstrümantal oluşumun başarıyla gerçekleştirildiği belirli anların, problemin çözümüne doğrudan katkı sağladığı söylenebilir. Ayrıca hem sürecin başında hem de sürecin sonunda söylemsel oluşumun gerçekleştirilmiş olması, Grup 2 öğretmen adaylarının akıl yürütme süreçlerini kullanarak çözüm planı geliştirebildiklerini ve ulaşılan sonuçları matematiksel gerekçelerle ifade edebildiklerini göstermektedir.

4.2.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi

Grup 7'in Basketbol görevine ilişkin gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problem durumunun tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmüştür. Problemin çözümünde kullanılacak olan verilerin belirlenmesi sırasında bazı önemsiz hatalar yapılmış olsa da veriler arasında ilişki kurulabilmesi nedeniyle problemi anlama aşamasında Düzey 4'te yer aldıkları belirlenmiştir. Belirlenen verilere dayanarak bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlarda bulunulmuş olması, basitleştirme aşamasında Düzey 3'te

bulunulduğunu göstermektedir. Bu varsayımlar doğrultusunda oluşturulan matematiksel modelin genel olarak doğru olduğu ancak eksiklikler içerdiği göz önünde bulundurulduğunda, matematikselleştirme aşamasında Düzey 3; bu modelin çözümünde görülen eksiklikler nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 4'te oldukları belirlenmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında kısmen yorumlandığı ancak doğrulama girişiminde bulunulmadığı için Grup 7'nin yorumlama aşamasında Düzey 2, doğrulama aşamasında ise Düzey 1'de yer aldığı tespit edilmiştir. Bu doğrultuda Grup 7'nin Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle aşağıdaki bulguların özeti Şekil 4.76'da sunulmuştur.



Şekil 4.76: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Basketbol görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri dikkate alındığında, Grup 7'nin genel olarak dengeli bir performans ortaya koyduğu, ancak özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında düşük düzeyde eylemler gerçekleştirdiği görülmektedir. Basketbol görevinin çözümü için yürütülen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 11 puan elde eden Grup 7'nin *'bir ölçüde yeterli'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 7 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümüne yönelik olarak anlamlı bir matematiksel yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 7 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

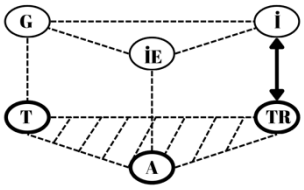
4.2.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 7'nin Basketbol görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakikalık bireysel çalışma süreci ile başlamıştır. Bireysel çalışmada, problem durumunun anlaşılması için hazır oluş sorularına yanıtlar verildiği, yönlendirilmiş keşif sorularının incelendiği görülmüştür. Ardından grup çalışmasına geçilmiş ve problem bağlamını daha iyi kavrayabilmek için internet üzerinden farklı basketbol sahalarına ilişkin görsellere ulaşılmıştır. Yapılan internet araştırması sonucunda basketbol sahasına ilişkin ölçülerin belirlendiği ve bu ölçülerin, istenen bölgelerin alanlarının hesaplanmasında kullanılabileceği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda Grup 7 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA26: Biz bu şekillerin hepsini GeoGebra'da çizsek olur mu?
ÖA27: Görseldeki ölçüleri kullanarak GeoGebra'ya gerek kalmadan çözebiliriz.
ÖA26: Kendimiz çizsek GeoGebra'da ölçülere göre, sonra o alanları boyasak güzel olabilir.
ÖA24: Görseldeki verilerden yararlanarak toplam alanı bulacağız. Çizgilerin alanını sonradan çıkarsak olur bence. Zaten 5 santimetre bir çizginin kalınlığı.

Grup 7 öğretmen adayları arasında gerçekleşen diyalogda, problemin çözüm sürecinde kullanılacak araçlara ilişkin bir tartışmanın yaşandığı görülmüştür. Tartışma sonucunda, çözüm sürecinde GeoGebra gibi dijital araçlar yerine basketbol sahasına ait bir görselin doğrudan kullanılmasına karar verilmiştir. Bu doğrultuda, sahanın kısa kenarının 15 metre, uzun kenarının 28 metre olduğu ifade edilmiş; ayrıca sahayı çevreleyen her bir kenardan 2 metrelik engelsiz bir alanın oluşturulması gerektiği belirtilmiştir. Bunun yanı sıra, üçlük çizgisi ile çevrelenen bölgenin bir yarım daire olarak kabul edilmesine yönelik bir varsayım geliştirilmiş ve bu doğrultuda problemi anlama ve basitleştirme aşaması tamamlanmıştır.

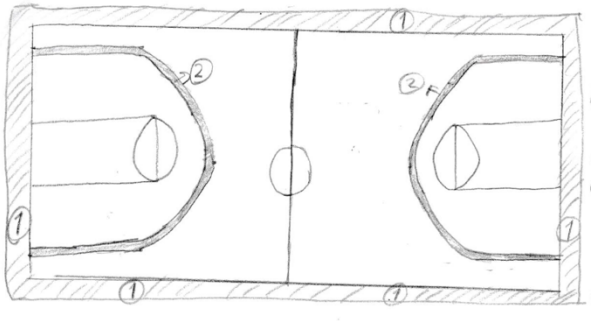
Problemi anlama ve basitleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının internet araştırması yaparak farklı saha görsellerine ulaşmalarıyla epistemolojik düzlemin artefakt ve temsil bileşenlerinden yararlandıkları görülmüştür. Ayrıca, problem durumunun anlaşıldığına yönelik ifadelerin kullanılması ve çözüm sürecinde izlenecek stratejiye yönelik grup içi tartışmaların gerçekleştirilmesi, bu aşamada söylemsel oluşumun ortaya konduğunu göstermektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.77'de sunulmuştur.



Şekil 4.77: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

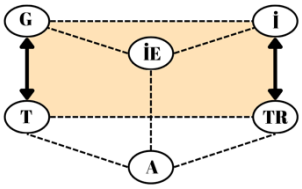
Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 7 öğretmen adayları, basketbol sahasının uzun kenarının 32 metre, kısa kenarının 19 metre olduğunu ifade ederek çözüm sürecini bu boyutlara sahip dikdörtgensel bölge üzerinden yapılandırmıştır. Problemin çözümü için sahada yer alan yarım daire, daire ve dikdörtgen gibi geometrik şekillerin alanlarının hesaplanması gerektiği belirtilmiştir. Bu doğrultuda alanı hesaplanacak bölgeler numaralandırılmış ve bu bölgelere ilişkin bir matematiksel model oluşturulmuştur. Oluşturulan modele ilişkin görsel Şekil 4.78'de sunulmuştur.



Şekil 4.78: Grup 7'nin oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi

Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, basketbol sahasının dikdörtgensel bir biçimde temsil edilebileceğinin ifade edildiği ve Türkiye Basketbol Federasyonunun salon standartları yönergesi dikkate alınarak sahada yer alan geometrik şekillerin alanlarının hesaplanmasına yönelik söylemlerin geliştirildiği görülmüştür. Grup 7 öğretmen adaylarının bu söylemleri doğrultusunda problemin çözümüne yönelik bir matematiksel model oluşturdukları; bu süreçte semiyotik ve söylemsel oluşumların birlikte gerçekleştiği belirlenmiştir. Matematiksel modelin oluşturulması ve bu modelde yer alan geometrik şekillerin özelliklerinden yararlanılarak probleme ilişkin akıl yürütmelerde

bulunulması, bu aşamadaki matematiksel çalışmanın [Sem-Söy] dikey düzleminde gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.79'da sunulmuştur.



Şekil 4.79: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözülmesi için gerçekleştirilen matematiksel olarak çalışma aşamasında, Grup 7 öğretmen adaylarının basketbol sahasında yer alan farklı bölgelerin alanlarını belirlemek için çeşitli matematiksel işlemler gerçekleştirdiği görülmüştür. Bu işlemler sırasında dikdörtgenin ve dairenin alan bağıntılarından yararlanılmış, ayrıca hesaplamalarda hesap makinesi kullanılmıştır. Problemin çözüm sürecinde yürütülen matematiksel işlemler şu şekilde sıralanmıştır:

- Basketbol sahasını çevreleyen dış sınırın alanından, oyun alanını oluşturan iç bölgenin alanı çıkarılarak 188 metrekarelik bir sonuç elde edilmiştir.
- Sahanın ortasında yer alan ve 'orta daire' olarak adlandırılan dairesel bölgenin alanı, dairenin alan bağıntısı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu doğrultuda, dairesel bölgenin yarıçap uzunluğu 1,8 metre olarak kabul edilmesine rağmen, çizgi kalınlığının 5 milimetre olması nedeniyle yarıçapın 1,75 metre olarak düşünülmesi gerektiği ifade edilmiştir. Bu hesaplamada pi sayısı 3,14 olarak alınmış ve dairenin alanı 6,61 metrekare olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, orta dairenin tam ortasından geçen çizginin alanı da hesaplanarak daire alanından çıkarılmış ve bu doğrultuda orta dairenin nihai alanı 9,44 metrekare olarak belirlenmiştir.
- Serbest atış bölgesinde yer alan yarım dairenin, orta daireyle aynı yarıçapa sahip olduğunun fark edilmesiyle bu bölgenin alanının orta dairenin yarısı kadar olacağı öngörülmüş; ancak bu şeklin her iki yarı sahada da yer aldığı belirtilmiş ve toplam alanın 9,44 metrekare olduğu ifade edilmiştir.

- Pota altındaki ‘kısıtlamalı alan’ olarak adlandırılan dikdörtgenin alanı, kısa ve uzun kenarların çarpılmasıyla 27,84 metrekare olarak hesaplanmıştır. Bu bölgenin her iki yarı sahada da bulunduğu göz önünde bulundurularak alanın iki katı alınmış ve toplamda 55,68 metrekarelik bir sonuç elde edilmiştir.
- Türkiye Basketbol Federasyonu’nun salon standartları yönergesine göre aynı renge boyanması gereken kısıtlamalı alan ve orta dairenin alanlarının toplamı alınarak, 65,12 metrekarelik bir bölgenin aynı renge boyanması gerektiği belirlenmiştir.

Üçlük çizgisinin oluşturduğu bölgenin alanını hesaplamak amacıyla, bu bölgeyi bir yarım daire olarak varsayan Grup 7 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

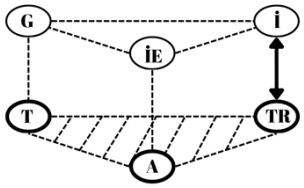
ÖA26: Varsayalım ki üçlük atış çizgimiz yarım daire olsun. Yarıçapımız 6,6 metredir.
ÖA25: O zaman dairenin alanından gideceğiz.
ÖA26: Aynen. Dairenin alan formülünü kullanarak yarım dairenin alanını hesaplayacağız.
ÖA24: Yalnız yarıçapı alırken çizginin kalınlığını düşmemiz lazım.
ÖA26: Tamam o zaman yarıçap uzunluğunu 6,55 metre olarak alalım.

Bu diyalogda ortaya konan tartışma doğrultusunda, dairenin alan bağıntısı kullanılarak yarıçapı 6,55 metre olan bir dairenin alanı hesaplanmıştır. Hesap makinesi yardımıyla gerçekleştirilen işlemler sonucunda tam dairenin alanı 134,71 metrekare olarak bulunmuştur. Hesaplamanın tam daireye göre yapılmasının sebebi, bu bölgenin basketbol sahasının her iki yarısında da yer alıyor olmasıdır. Dolayısıyla tek bir yarım daire yerine iki yarım dairenin toplam alanı üzerinden işlem yapılmıştır.

Grup 7 öğretmen adayları basketbol sahasında yer alan bölgelerin alanlarını belirlemeye yönelik gerçekleştirdiği bu matematiksel işlemler ile matematiksel olarak çalışma aşamasını tamamlamıştır.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının basketbol sahasında belirlenen bölgelerin alanlarını hesaplamak amacıyla geometrik şekillerin özelliklerinden ve alan bağıntılarından yararlandığı görülmüştür. Bu süreçte hesap makinesinin kullanıldığı ve uzunluk ile alan ölçme birimlerinin uygun matematiksel temsillerle ifade edildiği belirlenmiştir.

Gerçekleştirilen işlemler sırasında, epistemolojik düzlemin teorik referanslar, temsil ve artefakt bileşenlerinin etkin biçimde kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca, basketbol sahasını iki simetrik parçaya ayıran orta saha çizgisinin dikkate alınarak işlemlerin bu duruma göre gerekçelendirilmesi, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.80'de sunulmuştur.

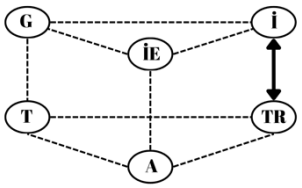


Şekil 4.80: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği matematiksel çalışmada elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamıyla tutarlı olduğuna yönelik çıkarımlarda bulunulduğu görülmektedir. Öğretmen adayları, matematiksel işlemlerin gerçek yaşamdaki veriler kullanılarak yapıldığını ifade etmiş ve yalnızca üçlük çizgisinin yarım çember olarak varsayılmasının sonuca etkisinin olabileceğini belirterek bu varsayımı gerekçelendirmiştir.

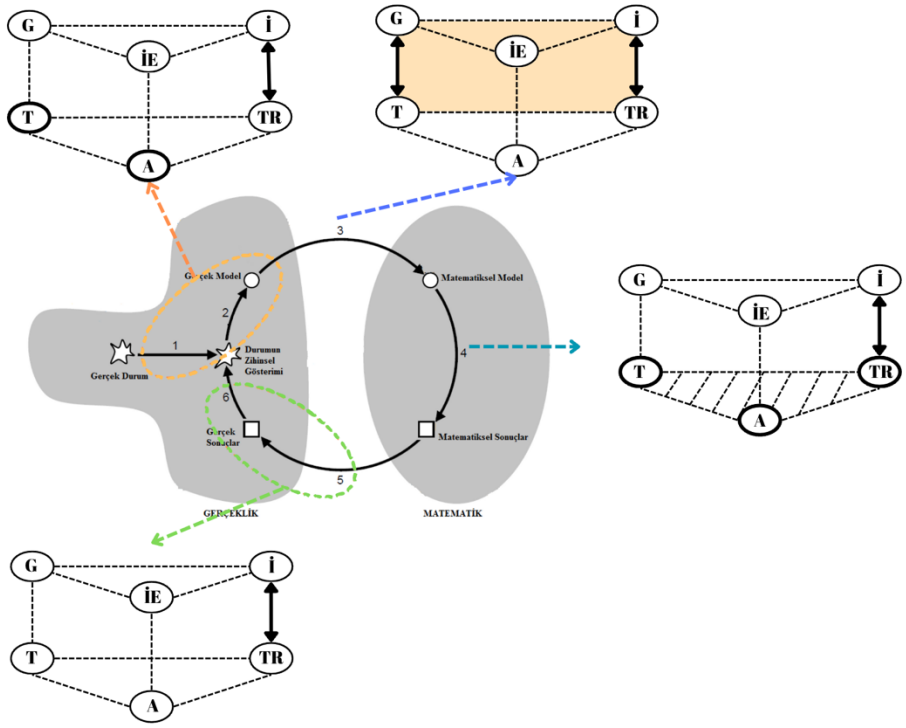
Gerçek verilerin kullanılması ile elde edilen sonucun bağlama uygunluğu üzerinden yapılan bu değerlendirmeler, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Böylece, Grup 7 tarafından Basketbol görevinin çözümüne yönelik yürütülen matematiksel çalışma tamamlanmıştır. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.81'de sunulmuştur.



Şekil 4.81: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.3.5 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 7 öğretmen adaylarının Basketbol görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.82'de sunulmuştur.



Şekil 4.82: Grup 7'nin Basketbol görevindeki matematiksel çalışması

Grup 7'nin matematiksel çalışması incelendiğinde, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanıldığı ve söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği görülmektedir. Problemin bağlamı, ilgili epistemolojik düzlem bileşenleri temelinde ele alınmış; çözüm süreci ise grup tartışmalarında üretilen söylemler aracılığıyla yapılandırılmıştır. Bu söylemler doğrultusunda oluşturulan matematiksel modelin, matematiksel temsillerin akıl yürütmeyle bütünleştirilerek görselleştirilmesiyle [Sem-Söy] dikey düzleminde geliştirildiği görülmektedir. Bu durum, gerekçelendirilmiş bir düşünme süreciyle model inşasının gerçekleştirildiğini göstermektedir.

Modelin çözümüne yönelik olarak problemde yer alan matematiksel kavramların özelliklerinin kullanılması, gerçekleştirilen eylemlerin epistemolojik düzlem bileşenleri ile temellendirildiğini; bu süreçte yapılan akıl yürütmelerin söylemsel oluşumla desteklenerek

matematiksel sonuca ulaşıldığını göstermektedir. Yorumlama ve doğrulama aşamalarında da söylemsel oluşumun sürdüğü ve elde edilen matematiksel sonucun günlük yaşam bağlamında anlamlandırıldığı anlaşılmaktadır.

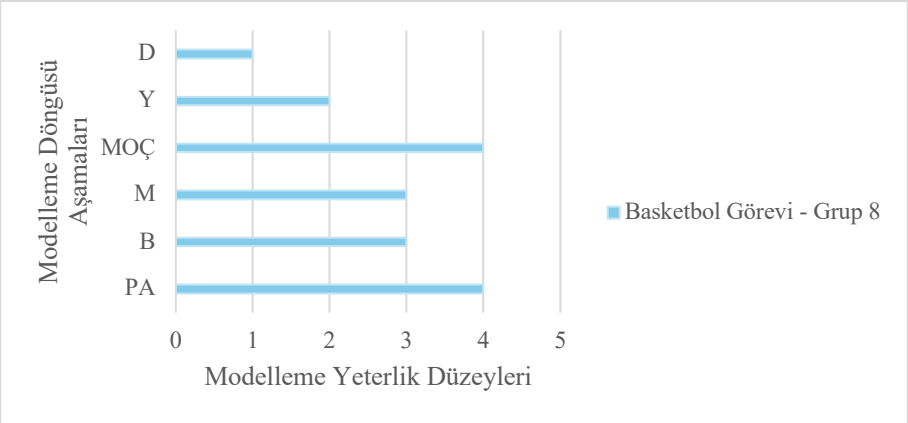
Genel olarak süreç değerlendirildiğinde, söylemsel oluşumun matematiksel çalışmanın her aşamasında etkin biçimde kullanıldığı gözlemlenmektedir. Grup 7 öğretmen adaylarının matematiksel kavramaların özelliklerine dayalı akıl yürütmeleri ve gerekçelendirmeleri etkili biçimde kullandıkları söylenebilir. Bu nedenle, gerçekleştirdikleri çalışmanın ağırlıklı olarak kavramsal ve söylemsel yönleri öne çıkan bir yapıda olduğu ifade edilebilir. Bununla birlikte, çözüm stratejilerinin dijital veya fiziksel artefaktlarla desteklenmemesi, ortaya konan modelleme yeterliğinin düşük düzeyde kalmasına neden olmuştur.

4.2.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Basketbol Görevi

Grup 8'in Basketbol görevine ilişkin gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde problemi anlamaya yönelik açıklamaların yer aldığı ve problemin genel olarak kavrandığı görülmüştür. Ancak, problemi çözmekte kullanılacak verilerin belirlenmesi sürecinde bazı önemsiz hatalar yapılmış, buna rağmen bu veriler arasında ilişki kurulabilmiştir. Bu nedenle, problemi anlama aşamasında Grup 8'in Düzey 4'te yer aldığı belirlenmiştir. Basitleştirme aşamasında ise belirlenen veriler dikkate alınarak bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlar ortaya konmuş; bu durum Düzey 3'te yer almalarına yol açmıştır.

Problemin anlaşılması ve sadeleştirilmesinin ardından, Grup 8'in bir ölçüde geçerli varsayımlar doğrultusunda uygun bir matematiksel model oluşturduğu, bu nedenle matematikselleştirme aşamasında Düzey 3'te yer aldığı; ancak oluşturulan bu modelin çözümünde bazı eksikliklerin bulunması nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 4'te bulunduğu belirlenmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşamla ilişkilendirilmesinde yeterli yorumlamanın yapılmaması nedeniyle yorumlama aşamasında Düzey 2, herhangi bir doğrulama stratejisine başvurulmamış olması sebebiyle doğrulama aşamasında Düzey 1'de yer aldıkları tespit edilmiştir.

Bu doğrultuda Grup 8'in Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.83'te sunulmuştur.



Şekil 4.83: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Basketbol görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri dikkate alındığında, Grup 8'in genel olarak dengeli bir performans sergilediği, ancak özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında düşük bir performans ortaya koyduğu görülmektedir. Basketbol görevine yönelik olarak yürütülen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 11 puan elde eden Grup 8'in *'bir ölçüde yeterli'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum, Grup 8 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevi çözmek amacıyla bir matematiksel çalışma yürütebildiğini ortaya koymaktadır. Grup 8 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

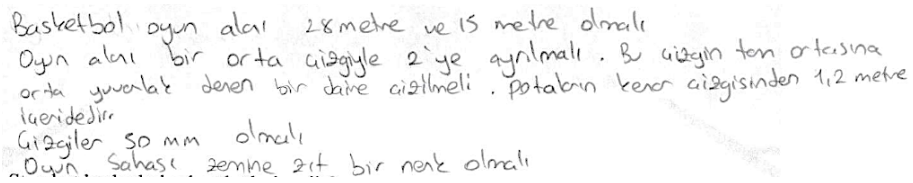
4.2.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 8'in basketbol probleminin çözümüne yönelik olarak gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından her bir öğretmen adayının yaklaşık 10 dakika süren bireysel çalışmasıyla başlamıştır. Bu süreçte, problemin bağlamının anlaşılması amacıyla hazır oluş sorularına yanıtlar verilmiş ve yönlendirilmiş keşif soruları incelenmiştir.

Grup çalışmasına geçilmesinin ardından öğretmen adayları, problemin çözümüne yönelik olarak bazı verilerin internet ortamından temin edilebileceğini ifade etmiş ve basketbol sahasının standart uzunluk ölçülerinin 28 metre ve 15 metre olduğunu belirtmiştir. Ayrıca problemin çözümünde basketbol sahasında yer alan geometrik şekillerin alanlarının hesaplanmasının gerekli olduğu, bu doğrultuda sahanın dikdörtgensel bir bölge olarak

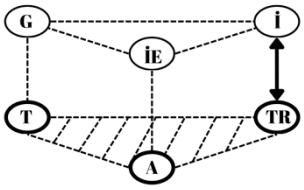
modellenmesi gerektiği ifade edilmiştir. Sahanın iç kısmında yer alan şekillerin ise yönergedeki açıklamalar doğrultusunda belirli renklere boyanması gerektiği belirtilmiştir.

Bu bağlamda öğretmen adayları, farklı basketbol sahalarına ait görselleri incelemek üzere internet araştırması yapmış ve ardından GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla basketbol sahasının kuşbakışı görüntüsünü içeren bir temsili görselin dijital ortama aktarılmasının çözüm sürecini kolaylaştırabileceğini belirtmiştir. Ancak bu süreçte bazı öğretmen adayları, probleme ait matematiksel işlemlerin kâğıt üzerinde gerçekleştirilecek çizimlerle de çözülebileceğini savunmuştur. Bu görüş doğrultusunda Grup 8, çözüm sürecini çalışma yaprağı üzerinde gerçekleştirme kararı almış ve sahanın oluşturulması için ihtiyaç duyulan standartlara ilişkin verileri salon standartları yönergesini inceleyerek not almıştır. Çalışma yaprağına alınan notlara ilişkin görsel Şekil 4.84'te verilmiştir.



Şekil 4.84: Grup 8'in problemi anlama aşamasına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının basketbol sahasına ilişkin farklı görselleri bulmak amacıyla internet araştırması yapması, epistemolojik düzlemin temsil ve artefakt bileşenlerinin kullanıldığını göstermektedir. İnternet üzerinden ulaşılan görsellerin incelenmesi ve bu görsellerden saha ölçülerine ilişkin bilgilerin elde edilmesiyle birlikte, sahanın çalışma yaprağına çizilerek temsil edilmesi gerektiği yönünde grup içinde bir akıl yürütme süreci yürütülmüştür. Söz konusu akıl yürütmenin, probleme ilişkin çözüm stratejisinin belirlenmesiyle sonuçlanması, bu aşamada söylemsel oluşumun gerçekleştirildiğini göstermektedir. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarının probleme ilişkin ilk analizlerini şekillendiren bu süreçte epistemolojik düzlemdeki araçsal ve temsili unsurların kullanımıyla birlikte söylemsel bir çerçevenin oluşturulduğu ifade edilebilir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.85'te sunulmuştur.



Şekil 4.85: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

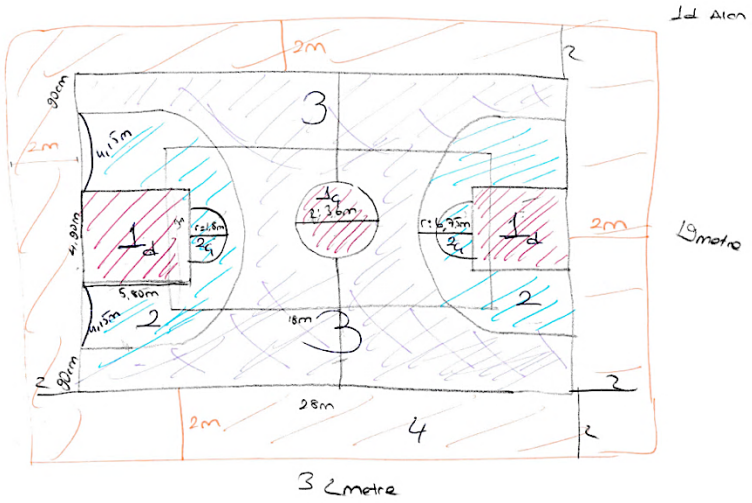
4.2.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin çözümü için kullanılacak olan basketbol sahasını çalışma yaprağına çizen Grup 8 öğretmen adaylarının, salon standartları yönergesinden elde ettikleri bilgiler doğrultusunda saha üzerindeki çizgilerin uzunluklarını belirleyerek bu ölçüleri yaprağına not ettikleri görülmüştür. Bu süreçte grup üyeleri arasında yürütülen tartışmalarda ölçülerin belirlenmesi ve modelleme sürecine ilişkin stratejilerin şekillendiği aşağıdaki diyalogdan anlaşılmaktadır:

ÖA29: Sahanın ortasında orta daire olarak adlandırılan bölgenin çapının 3,6 metre olması lazımmış.
ÖA28: Çizgi kalınlıklarını da hesaba katmalıyız. 50 milimetre çizgi kalınlığı. Bir de çizginin rengini belirleyelim.
ÖA29: Pota altındaki bölgenin tamamı aynı renk mi?
ÖA30: Sadece üçlük çizgisinin iç bölgesi farklı renk olmalı.
ÖA28: O zaman bu üçlük çizgisini yarım çember olarak düşünelim, diğerlerinin de kenar uzunluklarını buluruz zaten. Bir de çizginin kalınlığını ihmal edersek işlemlerimizi daha kolay yapacağız diye düşünüyorum.
ÖA30: Saha çizgisi ile üçlük çizgisinin arası 0,9 metreymiş. O zaman diğer tarafı da aynıdır. 15 metreden çıkarırsak üçlük çizgisinin arasını buluruz. 13,2 metre kalır üçlük çizgisinin çapına.
ÖA31: İnternete basketbol sahasının ayrıntılı ölçüleri diye yazdım. Burada saha çizgi kalınlığı 5 santimetre diyor. Bizimkiyle aynı.
ÖA28: Serbest atış çizgisinin uzunluğu 4,9 metre olacak. Bence şekli güzelce çizelim. Boya fiyatlarına da bakalım. Renklerine göre bakalım en ucuzlarını bulalım. En ucuz teklifi hazırlayalım ki bizi tercih etsinler.
ÖA29: O zaman biz zeminimizin parke zemin veya akrilik boya zeminden hangisi olacağına karar vermemiz lazım. İkisini birden de araştırabiliriz.

ÖA30: 500 mililitre boya yaklaşık 54 lira. Ama biz büyük alacağız ucuza gelmesi için. 10 kilogramı 1755 lira ise 1 litresi 175,5 liraya geliyor.
ÖA29: 20 kilogram boya ile yaklaşık 200 metrekare boyanırmış.

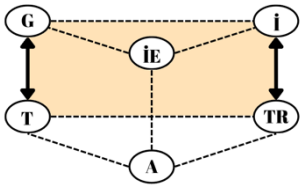
Bu diyaloglar doğrultusunda Grup 8 öğretmen adaylarının, problemin çözümünde kullanılacak matematiksel modelin inşasında hem geometrik yapıların hem de günlük yaşama dair verilerin dikkate alındığı görülmektedir. Özellikle saha çizgilerinin kalınlıklarının ihmal edileceği ve üçlük çizgisinin yarım çember olarak modellenerek sadeleştirme yapılacağı ifade edilmiştir. Bu çerçevede, çalışma yaprağı üzerinde probleme ilişkin bir matematiksel model oluşturulmuş ve bu model, çözüm sürecinde temel alınacak matematiksel temsilleri içerecek şekilde yapılandırılmıştır. Oluşturulan matematiksel modele ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.86'da sunulmuştur.



Şekil 4.86: Grup 8'in oluşturduğu matematiksel model – Basketbol görevi

Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının salon standartları yönergesinden elde edilen veriler üzerinde tartışma yürüttükleri görülmüştür. Tartışma sırasında basketbol sahasının uzunluk ölçülerine dair çıkarımlar yapılmış; saha çizgilerinin kalınlığının ihmal edilmesinin ve üçlük çizgisinin yarım çember olarak modellenmesinin, çözüm sürecinde yapılacak olan matematiksel işlemleri kolaylaştıracağı yönünde söylemsel akıl yürütme ve gerekçelendirme faaliyetleri, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir.

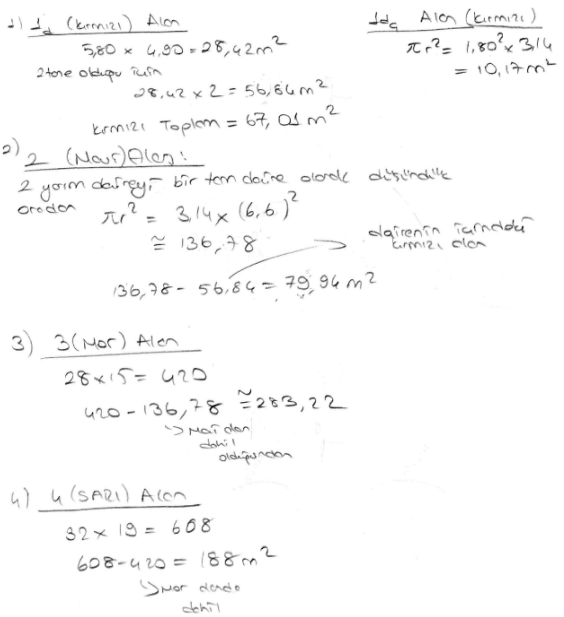
Ortaya koyulan varsayımlar ve çıkarımlar doğrultusunda, problemi temsil edecek olan matematiksel modelin çalışma yaprağı üzerine çizilmesiyle birlikte semiyotik oluşumun da gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Böylece, problemin çözümüne yönelik geliştirilen strateji doğrultusunda, uygun temsiller aracılığıyla modelleme süreci somutlaştırılmıştır. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.87'de sunulmuştur.



Şekil 4.87: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

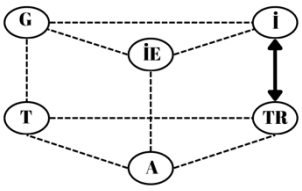
Matematiksel olarak çalışma aşamasında, Grup 8 öğretmen adaylarının oluşturdukları matematiksel modelde yer alan bölgelerin alanlarını belirlemek amacıyla çeşitli matematiksel işlemler gerçekleştirdikleri görülmüştür. Bu işlemler sırasında dikdörtgen ve dairenin alan bağıntılarının sistematik biçimde kullanıldığı ve problemde yer alan her bir geometrik şekil için ilgili formül üzerinden hesaplamaların yapıldığı belirlenmiştir. Gerçekleştirilen matematiksel işlemlere ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.88'de sunulmuştur.



Şekil 4.88: Grup 8'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Basketbol görevi

Matematiksel olarak çalışma aşamasındaki eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının epistemolojik düzlemin teorik referanslar bileşeninden yararlandıkları görülmüştür. Gerçekleştirilen işlemlerde, basketbol sahasının orta saha çizgisiyle simetrik olarak iki eş parçaya ayrıldığının fark edilmesi ve buna bağlı olarak hesaplamaların sadece bir yarı saha üzerinden yapılması, ortaya koyulan matematiksel gerekçelendirmeler ile birlikte Grup 8'in söylemsel oluşumu gerçekleştirdiği yönünde değerlendirilmiştir.

Tüm bu işlemler sonucunda problem bağlamındaki farklı bölgelerin alanları hesaplanarak matematiksel sonuca ulaşılmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.89'da sunulmuştur.

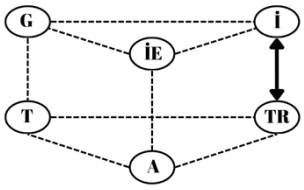


Şekil 4.89: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Yorumlama ve doğrulama aşamasında Grup 8 öğretmen adayları, matematiksel modelin çözümü sonucunda ulaşılan çıktının gerçek yaşam verileriyle tutarlı ve yaklaşık bir sonuç olduğunu ifade etmiştir. Bu sonucun değerlendirilmesi sürecinde, çizgi kalınlıklarının ihmal edilmesinin küçük bir sapmaya neden olabileceği yönünde bir gerekçelendirme yapılmıştır. Ayrıca basketbol saha ölçülerinin standart olması nedeniyle bölgelere ayrılan boya miktarının değişmeyeceği yönünde yapılan açıklama, matematiksel sonucun bağlamsal anlamda değerlendirildiğini göstermektedir.

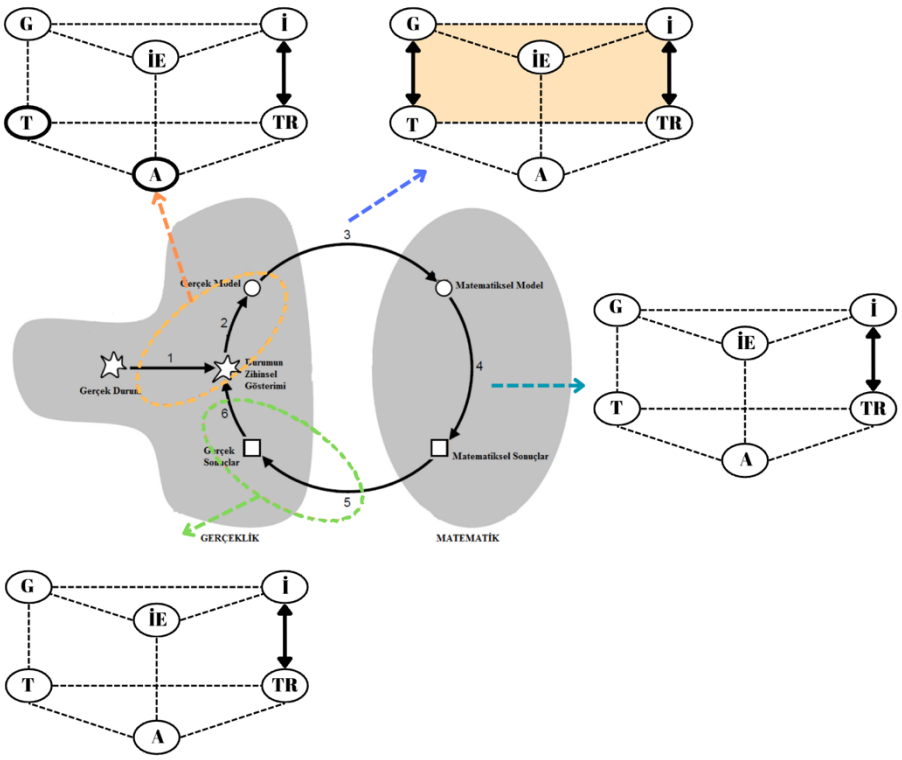
Grup 8'in bu aşamada gerçekleştirdiği karşılaştırmalar ve açıklamalar, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının, elde edilen sonucu hem matematiksel gerekçelerle hem de bağlamla ilişkilendirerek yorumlaması, çözüm sürecinin anlamlandırılarak tamamlandığını göstermektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.90'da sunulmuştur.



Şekil 4.90: Grup 8'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Basketbol görevi

4.2.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 8 öğretmen adaylarının Basketbol görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.91'de sunulmuştur.



Şekil 4.91: Grup 8'in Basketbol görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 8'in matematiksel çalışması incelendiğinde, epistemolojik düzlem bileşenlerinin yanı sıra söylemsel oluşumun gerçekleştirilmesiyle problemi anlama ve basitleştirme aşamalarının tamamlandığı görülmektedir. Bu durum, problemin içerdiği matematiksel yapılara ilişkin yürütülen akıl yürütme süreçleriyle ortaya çıkmıştır. Gerçekleştirilen akıl yürütme doğrultusunda, matematiksel modelin oluşturulması için matematiksel temsillerin gerekçelendirmelerle birlikte görselleştirilmesi, [Sem-Söy] dikey düzleminin kullanıldığını

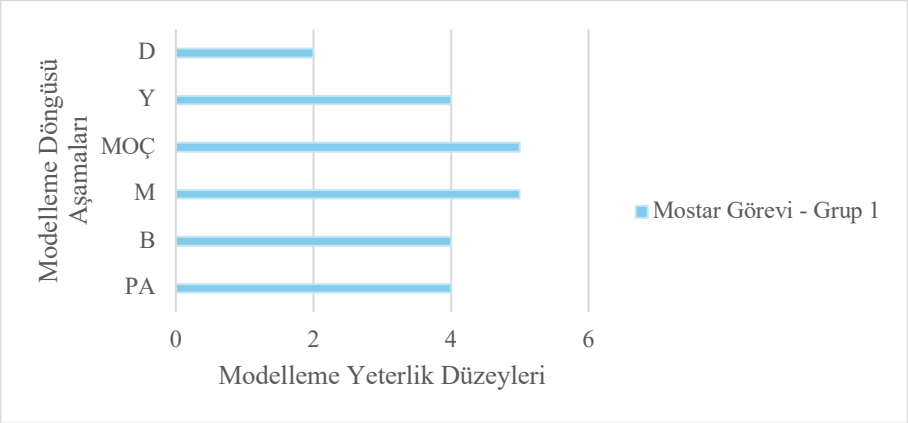
göstermektedir. Bu bağlamda, yapılan akıl yürütmeler ve gerekçelendirmeler yoluyla bir matematiksel modelin üretildiği anlaşılmaktadır. Modelin çözüm sürecinde gerçekleştirilen matematiksel işlemler sırasında yapılan açıklamalar ve sunulan gerekçeler, söylemsel oluşumun sürdürüldüğünü göstermekte ve bu süreç sonunda matematiksel sonuca ulaşıldığı görülmektedir. Yorumlama ve doğrulama aşamalarında da söylemsel oluşumun devam ettiği, elde edilen matematiksel sonucun günlük yaşam bağlamında yorumlandığı anlaşılmaktadır. Böylece, elde edilen sonucun gerçek yaşam bağlamında anlamlandırıldığı ifade edilebilir.

Tüm bu süreçler göz önüne alındığında, Grup 8'in matematiksel çalışmada söylemsel oluşumun her aşamada etkin bir şekilde kullanıldığı ve öğretmen adaylarının matematiksel kavramların özelliklerini dikkate alarak akıl yürütme ve gerekçelendirme becerilerini etkili biçimde ortaya koydukları söylenebilir. Bu doğrultuda, çalışmanın daha çok kavramsal ve söylemsel yönünün baskın olduğu yorumu yapılabilir. Ancak çözüm stratejilerinin artefaktlarla yeterince desteklenmemesi, Grup 8'in modelleme yeterliğinin görece düşük düzeyde kalmasına neden olduğu söylenebilir.

4.3 Mostar Problemine İlişkin Bulgular

4.3.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi

Grup 1'in Mostar görevini çözmek amacıyla yürüttüğü matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlaşıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmüştür. Problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi sürecinde bazı küçük hatalar yapılmasına karşın, bu veriler arasında ilişki kurulabilmiş olması nedeniyle problemi anlama aşamasında Düzey 4'te yer aldığı tespit edilmiştir. Belirlenen veriler doğrultusunda, gerçekçi varsayımlar temel alınarak problemin basitleştirilmesi nedeniyle basitleştirme aşamasında da Düzey 4'te yer aldıkları görülmüştür. Bu aşamaların ardından, Grup 1'in gerçekçi varsayımlara dayalı olarak doğru bir matematiksel model oluşturması matematikselleştirme aşamasında Düzey 5' ulaştıklarını; bu modelin doğru biçimde çözülmesi ise matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 5'te yer aldıklarını göstermektedir. Ancak ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlanması sebebiyle yorumlama aşamasında Düzey 4'te; kısmen gerçekleştirilen doğrulama sürecinde belirlenen hataların düzeltilmemesi nedeniyle doğrulama aşamasında ise Düzey 2'de oldukları belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.92'de sunulmuştur.



Şekil 4.92: Grup 1'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri dikkate alındığında, Grup 1'in özellikle basitleştirme, matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında yüksek düzeyde performans sergilediği; yorumlama aşamasında ise belirli bir gelişim gösterdiği, ancak doğrulama aşamasında düşük bir performans ortaya koyduğu görülmektedir. Mostar görevinin çözümüne yönelik olarak yürütülen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 18 puan elde eden Grup 1'in, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel bir görevi çözmek için gerekli matematiksel çalışmaları yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 1 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.3.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

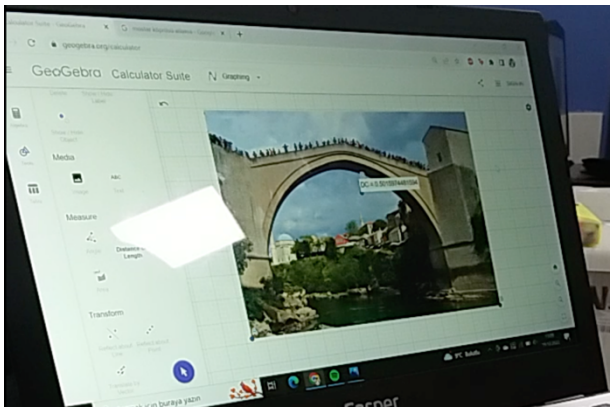
Grup 1'in Mostar probleminin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakikalık bireysel çalışma süreciyle başlamıştır. Bu süreçte öğretmen adaylarının hazır oluş sorularına yanıtlar verdiği, yönlendirilmiş keşif sorularını incelediği gözlemlenmiştir. Bireysel çalışmanın ardından grup çalışmasına geçilmiş ve problemin çözümünde kullanılabilecek uygun bir görselin internet üzerinden araştırılmasına karar verilmiştir. Bu sırada, köprüyü daha önce canlı olarak gördüğünü ve fotoğrafını çektiğini belirten ÖA2, sahip olduğu görselin çözüm sürecinde kullanılabileceğini ifade etmiştir. İlgili fotoğraf e-posta yoluyla bilgisayara aktarılmış, kırpılarak çözümde kullanılabilir hale

getirilmiştir. Ardından, köprüye ilişkin çeşitli bilgileri edinmek amacıyla internet araştırmasına başlanmıştır. Bu süreçte öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA2: 29 metreymiş köprü.
ÖA1: Yüksekliği mi?
ÖA2: Evet yüksekliği. Uzunluğu 20 metre, genişliği de 4 metreymiş. Başka bir kaynakta da 24 metre yüksekliği 30 metre uzunluğunda diyor.
ÖA3: Tamam bu bilgilere göre yapalım o zaman.
ÖA1: Niye kırpamadım ben bu fotoğrafı?
ÖA3: Ben sana attım yeniden kırpılmış halini.
ÖA1: Ne demiştin yüksekliğine?
ÖA2: 24 metre.
ÖA1: tamam şimdi GeoGebra'ya geçelim.

Yaşanan diyaloğun ardından, fotoğrafın GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarılmasıyla problem durumu üzerine düşünülmeye başlanmıştır. Grup 1, elde edilecek verilerin gerçek yaşam bağlamında anlamlı olabilmesi için nasıl bir kıyaslama yapılması gerektiğini sorgulamış ve bu doğrultuda problem durumunu analiz etmeye devam etmiştir. ÖA2'nin çektiği fotoğraf ile internet araştırması sonucu elde edilen iki farklı görsel, sürükle-bırak yöntemi ile GeoGebra çalışma sayfasına aktarılmış ve bu fotoğrafların problem çözümünde nasıl kullanılabileceği tartışılmıştır. Sonuç olarak, köprüden atlayan bir insanın bulunduğu görselin uygun veri sağlayabileceği belirtilmiş ve bu kişinin referans nesne olarak kullanılmasına karar verilmiştir.

Bir insan boyunun ortalama 1,80 metre olduğu varsayımı temel alınarak, görselde yer alan kişinin bacaklarını katlamış durumda olduğu dikkate alınmış ve gerçek yaşamda bu uzunluğun yaklaşık 150 santimetreye karşılık gelebileceği ifade edilmiştir. GeoGebra çalışma sayfasında doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak köprüden atlayan insanı temsil eden bir doğru parçası oluşturulmuş ve bu parçanın uzunluğu uzunluk ölçme aracı ile belirlenmiştir. Böylece, fotoğrafta yer alan 0,5 birimlik uzunluğunun gerçek yaşamda 150 santimetreye karşılık geldiği belirtilmiştir. Oluşturulan doğru parçasına ait görsel Şekil 4.93'te sunulmuştur.

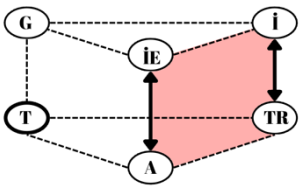


Şekil 4.93: Grup 1'in referans nesnenin uzunluğunu ölçmesine ilişkin görsel – Mostar görevi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesi aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 1 öğretmen adaylarının problem çözümüne uygun bir görsel bulmak için internet araştırması yaptığı, ayrıca telefonda bulunan bir fotoğrafın bilgisayara aktarılması için e-posta yoluyla paylaşıldığı görülmüştür. Bu süreçte dijital artefaktların etkin biçimde kullanıldığı belirlenmiştir. Aynı zamanda, problemde yer alan gerçek yaşam durumuna ilişkin verilere ulaşmak amacıyla dijital artefaktlar kullanılarak gerçekleştirilen internet araştırması, epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin kullanımına işaret etmektedir.

Fotoğrafların GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarılması, çözüm sürecinde üzerinde insan bulunan görselin kullanılmasına karar verilmesi ve fotoğraftaki insanın referans nesne olarak kullanılması ile epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin kullanıldığı görülmüştür. Referans nesneyi temsil eden bir doğru parçasının doğru parçası oluşturma aracıyla çizilmesi ve bu doğrunun uzunluğunun uzunluk ölçme aracıyla belirlenmesi, enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, referans nesnenin görseldeki uzunluğu ile gerçek yaşamda karşılık gelen ölçüsü arasında ilişki kurmaya yönelik yapılan açıklamalar, söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir.

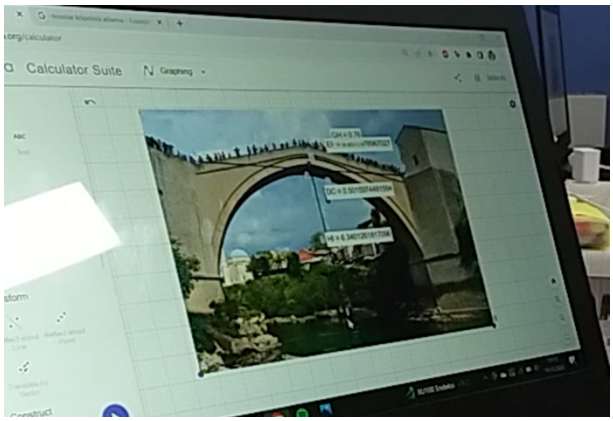
Problemi anlama ve basitleştirme aşamasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın, artefaktlar kullanarak matematiksel temsilin inşa edilmesiyle başladığı görülmektedir. Bu temsile yönelik gerçekleştirilen gözlemler doğrultusunda, problemin çözümüne yönelik gerekli verilerin elde edilmesine ilişkin ilişkiler kurulmuştur. Bu doğrultuda, problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışmanın [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştiği belirlenmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.94'te sunulmuştur.



Şekil 4.94: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi

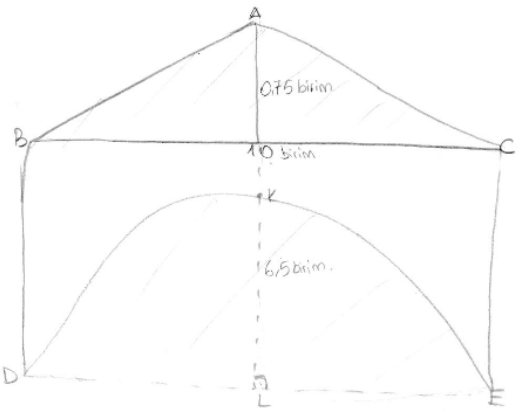
4.3.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, problem durumuna yönelik bir çözüm modeli oluşturmak amacıyla matematikselleştirme sürecine geçen Grup 1 öğretmen adayları, köprünün parçalara ayrılmasıyla elde edilecek geometrik şekillerin alanlarının hesaplanması yoluyla çözüme ulaşabileceklerini ifade etmiştir. Bu doğrultuda, köprünün uzunluğunu temsil edecek doğru parçası GeoGebra çalışma sayfasında doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak inşa edilmiştir. Oluşturulan doğru parçasının uzunluğu, uzunluk ölçme aracı ile belirlenmiş ve 9,85 birim olarak ölçülen bu uzunluk 10 birim olarak kabul edilmiştir. Doğru parçasının üst kısmında kalan bölgenin bir üçgen olarak düşünüldüğü belirtilmiş ve bu üçgene ait yüksekliğin, yine doğru parçası oluşturma aracı ile çizildiği görülmüştür. Bu süreçte, yüksekliği temsil eden doğru parçasının, köprünün uzunluğunu temsil eden doğru parçasına dik olduğu varsayılmıştır. Ayrıca, köprünün alt kısmının suya olan uzaklığını temsil etmek üzere başka bir doğru parçası oluşturulmuştur. Uzunluk ölçme aracı ile yapılan ölçümler sonucunda, oluşturulan bu iki doğru parçasının uzunlukları sırasıyla 0,75 ve 6,5 birim olarak belirlenmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.95'te sunulmuştur.



Şekil 4.95: Grup 1'in doğru parçası oluşturması ve uzunluk ölçüsünü belirlemesini içeren görsel – Mostar görevi

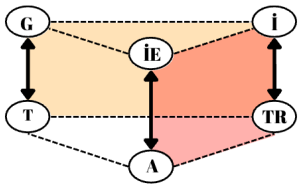
Bu sırada ÖA3 tarafından köprü ile su arasındaki mesafenin 20 metre olduğu ifade edilince, fotoğrafta 6,5 birime karşılık gelen uzunluğun gerçek yaşamda 20 metre olabileceğine yönelik bir akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. Daha önce yapılan varsayımda 1,5 metrelik uzunluğun 0,5 birime karşılık geldiğini hatırlatan Grup 1 öğretmen adayları, gerçekleştirdikleri işlemlerin birbirine oldukça yakın sonuçlar verdiğini belirtmiş; aradaki farklılığın ise fotoğrafın perspektif etkisinden kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda, elde edilen matematiksel sonuçların gerçek yaşam bağlamında yorumlandığında kabul edilebilir değerlere karşılık geldiği yorumu yapılmıştır. Fotoğrafın perspektif durumu içermesi nedeniyle oluşturulan matematiksel modelin çalışma yaprağı üzerinde yazılı olarak sunulduğu belirtilmiş ve Grup 1 tarafından oluşturulan bu modele ilişkin görsel Şekil 4.96'da paylaşılmıştır.



Şekil 4.96: Grup 1 tarafından oluşturulan matematiksel model – Mostar Görevi

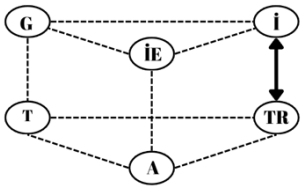
Matematikselleştirme aşamasında bir matematiksel modelin oluşturulması sürecinde gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 1'in alanı hesaplanacak bölgeyi, alanı hesaplanması bilinen parçalara ayırdığı görülmüştür. Bu geometrik şekillerin alanlarının biliniyor oluşunu dikkate alarak yapılan akıl yürütmeler ve problemin çözümüne yönelik geliştirilen ifadeler, söylemsel oluşumun gerçekleştiği şeklinde değerlendirilmiştir. Belirtilen parçaların oluşturulmasında GeoGebra dinamik geometri yazılımının özelliklerinden yararlanıldığı, doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak gerekli çizimlerin yapıldığı ve bu parçaların uzunluklarının uzunluk ölçme aracıyla belirlendiği gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, gerçekleştirilen eylemler enstrümantal oluşumun gerçekleştiğini ve matematiksel çalışmanın [Ens-Söy] dikey düzleminde yürütüldüğünü göstermektedir.

Köprünün uzunluğunu temsil eden doğru parçasının oluşturulmasının ardından, bu doğrunun üzerinde kalan bölgenin bir üçgen olarak ele alınması, epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin kullanıldığını göstermektedir. Problemin matematiksel modeline ilişkin bu temsillerin çalışma yaprağında görselleştirilmesiyle semiyotik oluşumun da gerçekleştiği görülmektedir. Bu süreçte uygulanan akıl yürütme stratejileri ve teorik referanslara dayalı gerekçelendirmeler, aynı zamanda [Sem-Söy] dikey düzleminin etkin şekilde kullanıldığını göstermektedir. Ayrıca, üçgenin yüksekliğini temsil eden doğru parçasının oluşturulmasında, dik doğru oluşturma aracı yerine doğru parçası oluşturma aracının tercih edilmesiyle enstrümantal oluşum gerçekleştirilmiş; ancak bu tercih yapılırken iki doğru parçasının birbirine dik olması gerekliliğinin dikkate alınması, epistemolojik düzlemin teorik referanslar bileşeninin enstrümantal oluşuma katkı sağladığını ortaya koymuştur. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.97'de sunulmuştur.



Şekil 4.97: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Grup 1 öğretmen adaylarının Mostar görevinin çözüm sürecinde kullanılacak verileri elde ederken, GeoGebra dinamik geometri yazılımında referans nesneyi temsil edecek şekilde oluşturulan doğru parçalarından yararlandığı görülmüştür. Bu süreçte, dinamik çalışma sayfasında iki farklı referans nesne kullanılarak elde edilen verilerin, gerçek yaşamdaki karşılıkları ile ilişkilendirilmesi yoluyla fotoğraftaki uzunlukların gerçek ölçülere karşılık gelen değerleri belirlenmiştir. Bu eylemler söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu aşamada gerçekleştirilen eyleme ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.98'de sunulmuştur.



Şekil 4.98: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi

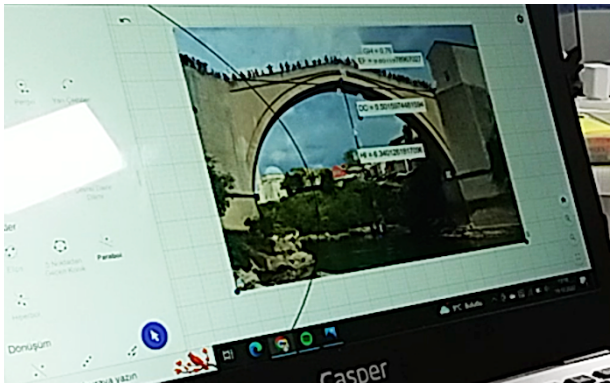
Problemin matematikselleştirilmesi aşamasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın, probleme yönelik akıl yürütme süreciyle başlayıp bu doğrultuda artefaktların inşa etme sürecinde kullanılmasıyla [Ens-Söy] dikey düzleminde başlatıldığı; iki çokluk arasında kurulan ilişkinin doğrulanması yoluyla söylemsel oluşum gerçekleştirilerek devam ettiği görülmüştür.

4.3.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Problem durumunun çözümüne yönelik bir matematiksel model oluşturan Grup 1 öğretmen adayları, bu modelin çözülmesi için matematiksel olarak çalışma aşamasına geçmiştir. Matematiksel modelde yer alan üçgen ve dikdörtgenin alanlarının hesaplanması gerektiği belirtilmiş; ayrıca parabol ile sınırlandığı düşünülen bir bölgenin alanının da hesaplanması gerektiği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda yapılması gereken eylemlere yönelik aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA3: Üçgenin alanını 33,75 metrekare buldum.
ÖA1: Tamam. Dikdörtgenin alanını da bulalım.
ÖA3: Onu bulmadım daha.
ÖA2: Biz nasıl bulacağız parabolü? İntegral yapmamız lazım bence. Eğri altında kalanı integralle hesaplıyoruz. Ama nasıl yapılıyordu ki GeoGebra'da.
ÖA1: Uygulama yapsın hesaplamayı.
ÖA2: Zaten o yapıyor da nasıl yapıyordu?
ÖA1: GeoGebra'da parabol alanı hesaplama diye yazsana Google'a.
ÖA3: Dikdörtgenin alanı 585 metrekare oldu. Bulduğum sonuçlar gerçek yaşamdaki sonuçlar. Referans nesnelerin uzunluklarıyla orantılayarak buldum hepsini.
ÖA2: Parabol çizmeyi bulalım o zaman. Araç çubuğuna bakalım belki vardır orada bir araç.
ÖA1: Bak ben üç tane nokta belirledim fotoğraf üzerinde. Buralardan geçen bir parabol çizeceğiz. (...) Bak parabol çizme aracı varmış. Yönergesinde önce nokta, ardından doğrultman seçiniz yazıyor.

Gerçekleşen diyalogda Grup 1 öğretmen adaylarının, köprünün kemerini temsil edecek bir parabol oluşturmaya çalıştıkları ve bu süreçte çeşitli zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Yaşanan zorluğun, parabolün oluşturulabilmesi için kullanılan yönergede belirtildiği üzere bir doğrultman seçilmesi gerekliliğinden kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Grup 1'in parabol oluşturma sürecine ilişkin denemesi Şekil 4.99'da sunulmuştur.



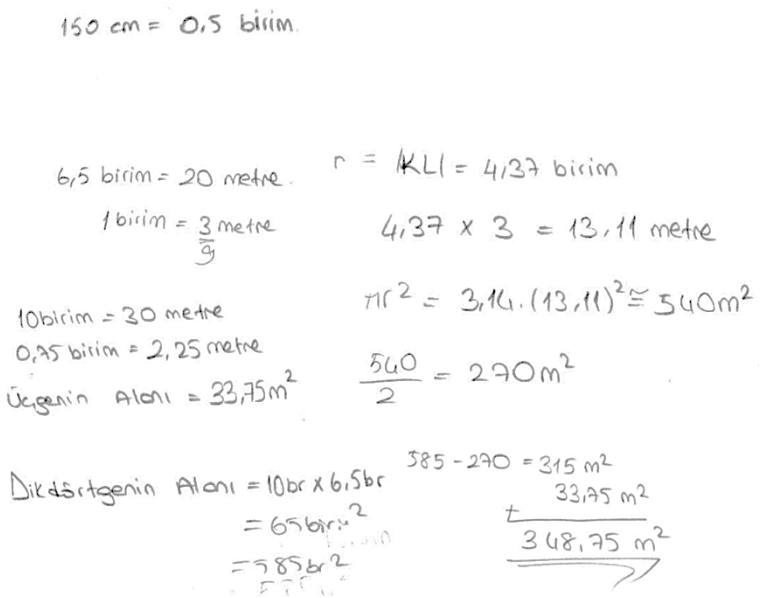
Şekil 4.99: Grup 1'in parabol aracını kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi

Parabol inşa edilerek problemin çözülemeyeceğini fark eden Grup 1 öğretmen adayları, bu bölgenin alanını belirlemek için alternatif bir strateji geliştirmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda, ilgili bölgenin bir yarım çembere benzediği yönünde bir gözlem yapılmış ve çember oluşturma aracının kullanılabileceği yönünde bir akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. GeoGebra çalışma sayfasında iki nokta seçilerek yarım çember oluşturulabileceğinin fark edilmesiyle birlikte aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA2: Tamam süper. Oluşturduğun yarım çemberi köprüyle hizala şimdi fotoğrafı oynatmadan.
ÖA3: Aslında şu şekilde de yapabiliriz. Çemberin yarıçapını kullanarak burayı kaplayan dairenin alanını bulalım. Zaten bize yarısı lazım. Tüm alandan da dairenin alanının yarısını çıkaralım.
ÖA2: O zaman öyle yapalım direkt, çok mantıklı.
ÖA1: Tamam o zaman, bir nokta işaretliyorum.
ÖA3: O işaretlediğin noktadan dik bir doğru çizmemiz gerekiyor.
ÖA1: Bir dakika, burayı da parçalara ayırmamız lazım çünkü köprünün ayakları dik bir şekilde yere basıyor. Tam eğri kısmın bittiği yerde bir doğru parçası çizelim bence.
ÖA2: Altındaki alanı da dikdörtgenden mi hesaplayacağız?
ÖA1: Artık bilmiyorum.
ÖA2: Evet evet, öyle yapacağız. Altta kalan alanı da dikdörtgen olarak hesaplayacağız.

Yaşanan diyalog sırasında öğretmen adaylarının, yarım çember oluşturması sürecinde yeni durumlar fark etmesiyle birlikte problem durumunun çözümüne yönelik yeni stratejiler geliştirmek amacıyla akıl yürütmeler ve gerekçelendirmeler gerçekleştirdiği görülmektedir. Bu

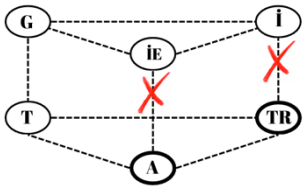
gerekçelendirmeler doğrultusunda, doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak inşa edilen doğru parçasının uzunluğu, uzunluk ölçme aracı aracılığıyla belirlenmiştir. Böylece, problemin çözümünde kullanılacak verilere ulaşan Grup 1, hesap makinesi kullanarak gerçekleştirdiği matematiksel işlemler sonucunda bir matematiksel sonuca ulaşmıştır. Grup 1 tarafından gerçekleştirilen bu işlemlere ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.100'de sunulmuştur.



Şekil 4.100: Grup 1'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi

Matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, üçgen ve dikdörtgenin alan bağıntılarından yararlanılarak hesaplamalar yapıldığı, bu hesaplamalar sırasında gerçek yaşam değerlerine ulaşmak amacıyla oran kavramının kullanıldığı görülmüştür. Köprünün kemerinin altında kalan alanın belirlenmesi için, köprünün kemerini temsil eden bir parabolün inşa edilmesi gerektiği düşünülerek GeoGebra dinamik geometri yazılımında parabol oluşturma aracı seçilmiştir. Ancak, inşa edilen parabolün problemin çözümüne hizmet etmediği anlaşılmıştır. Uygun bir parabol oluşturmak için çeşitli denemeler yapan Grup 1, yaşanan bu zorluğun parabol oluşturulurken belirlenmesi gereken doğrultman ile ilgili olduğunu fark etmiştir. Bu durum, kullanılan artefaktın problem çözümüne uygun biçimde işlevsel hale getirilememesi nedeniyle enstrümantal oluşumun gerçekleştirilemediği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, parabol ve doğrultmanın özelliklerinin uygun biçimde kullanılamaması nedeniyle akıl yürütme sürecinin gerçekleştirilemediği ve probleme yönelik bir argüman geliştirilemediği görülmüştür. Dolayısıyla, bu aşamadaki matematiksel çalışmada

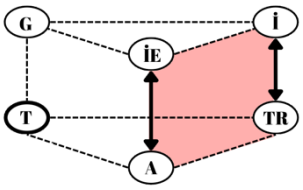
söylemsel oluşumun da gerçekleşmediği söylenebilir. Matematiksel çalışma sırasında yaşanan tıkanıklığın temelinde enstrümantal ve söylemsel oluşumların yetersizliği olduğu ifade edilebilir. Bu noktada gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.101'de sunulmuştur.



Şekil 4.101: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Problemin çözümü için farklı bir stratejiye yönelen Grup 1, köprünün kemerinin çembere benzetilmesi yoluyla epistemolojik düzlemin temsil bileşenini kullanmıştır. Çemberin yarıçap uzunluğundan yaralanarak dairenin alanının bulunabileceği, ancak problemin çözümünde yalnızca yarım dairenin alanına ihtiyaç duyulduğu ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, probleme yönelik bir çözüm planı geliştirilmiştir. Planın oluşturulması sürecinde yürütülen akıl yürütme ve yapılan gerekçelendirmeler, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Çembere ilişkin verilerin elde edilmesi için amacıyla, çemberin çapını temsil eden doğru parçası, doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak inşa edilmiş ve bu eylem enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında Grup 1 öğretmen adaylarının artefakt ve teorik referanslardan yararlanarak çeşitli eylemleri gerçekleştirmeye çalıştığı, ancak bu artefaktların özelliklerini amaçlarına uygun biçimde kullanamadıkları görülmüştür. Bu durumun, ilgili kavramların özelliklerinin yeterince anlaşılamamasından kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Gerekli gerekçelendirmelerin ve doğrulayıcı açıklamaların yapılamaması sonucunda, enstrümantal ve söylemsel oluşum süreçlerinin gerçekleştirilememesi problemin çözümünü sekteye uğratmış ve grup, alternatif bir çözüm stratejisine yönelmiştir. Yeni strateji kapsamında yürütülen matematiksel çalışma sürecinde farklı temsillerin kullanılması ve bu temsillere ait teorik referansların uygun inşalara olanak tanımasıyla birlikte çalışma [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleşmiştir. Gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.102'de sunulmuştur.



Şekil 4.102: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi

4.3.1.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

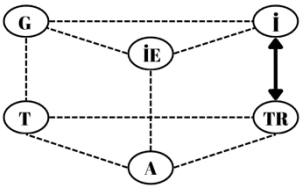
Matematiksel işlemlerini tamamlayarak bir sonuca ulaşan Grup 1 öğretmen adayları, bu doğrultuda matematiksel olarak çalışma aşamasını tamamlamıştır. Elde edilen matematiksel sonucun doğruluğunu sorgulama ve gerçek yaşam bağlamında değerlendirilme sürecinde, diğer grupların ulaştığı sonuçların duyulması üzerine Grup 1 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleştirilmiştir:

ÖA2: Biz çok bulduk diğerlerine göre, nasıl böyle bir şey oldu? Ama doğru yaptık mantıksal olarak.
ÖA3: Bence yüksekliği kullanırken hem köprünün altı hem de üçgen gibi olan yerden aldığımız için yüksek çıkmış olabilir. Hem 6,5 birim hem de 0,75 birim olarak almış olduk yüksekliği.
ÖA1: Bir de biz yüksekliği su seviyesine göre aldık belki internette verilen bilgiler köprünün ayaklarına göredir.
ÖA2: Evet, ama yine de o kadar fark oluşturmaz bence.

Elde edilen matematiksel sonucun değerlendirildiği ve yorumlandığı diyalogda, Grup 1 öğretmen adaylarının gerçekleştirdikleri eylemleri sorguladıkları görülmüştür. Matematiksel sonuca ulaşmak için kullanılan verilerin problem durumuna uygunluğunu tartışan öğretmen adayları, diğer gruplardan farklı bir sonuca ulaşmalarının bu nedenle mümkün olabileceğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1 tarafından Mostar görevinin çözümüne yönelik yürütülen matematiksel çalışma tamamlanmıştır.

Yorumlama ve doğrulama aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 1 öğretmen adaylarının oluşturulan matematiksel modeli sorguladıkları görülmüştür. Özellikle çember temsilinde yarıçap uzunluğunun hesaplanması sürecinde inşa edilen doğru parçalarının problemin çözümüne uygun biçimde oluşturulmamış olabileceği üzerine düşünülmüştür. Problemin çözümünde kullanılan verilerin uygunluğuna ilişkin yürütülen tartışmalar, söylemsel

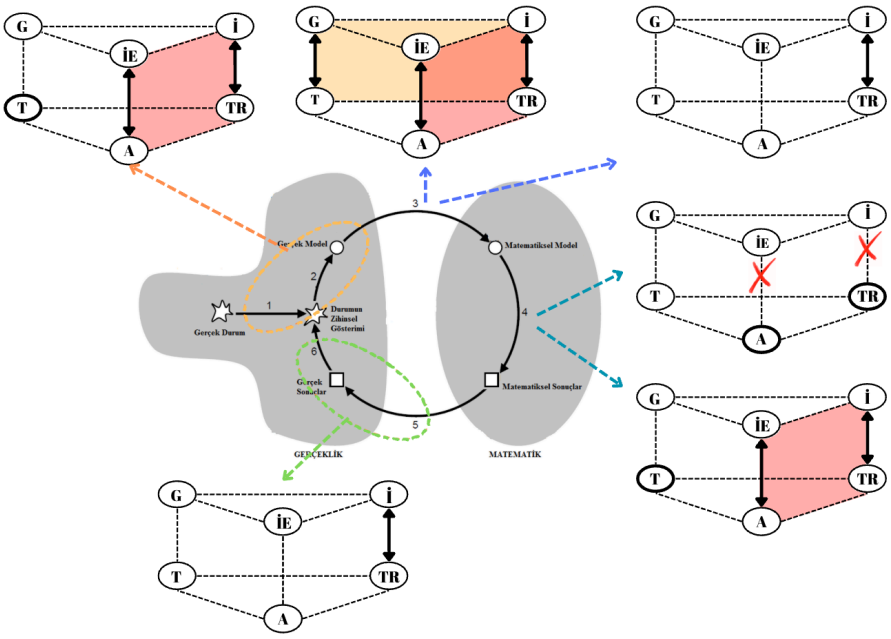
oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.103'te sunulmuştur.



Şekil 4.103: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – Mostar görevi

4.3.1.5 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 1 öğretmen adaylarının Mostar görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.104'de sunulmuştur.



Şekil 4.104: Grup 1'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 1'in Mostar görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında, artefaktların problemin çözümüne uygun biçimde işlevselleştirilmesi

ve akıl yürütme becerilerinin sergilenmesiyle [Ens-Söy] dikey düzleminde başlamıştır. Bu süreçte, problem durumunda yer alan matematiksel kavramlara ilişkin çeşitli inşalar gerçekleştirilmiş ve problemin yapılandırılması sürecinde bu kavramlar arasındaki ilişkiler söylemsel oluşum aracılığıyla kurulmuştur. Böylece, çözüm planının oluşturulması sırasında artefaktların uygun biçimde kullanıldığı ve matematiksel kavramlar arasında anlamlı bağlar kurularak yapılandırılmış bir yaklaşım geliştirilmeye çalışıldığı söylenebilir.

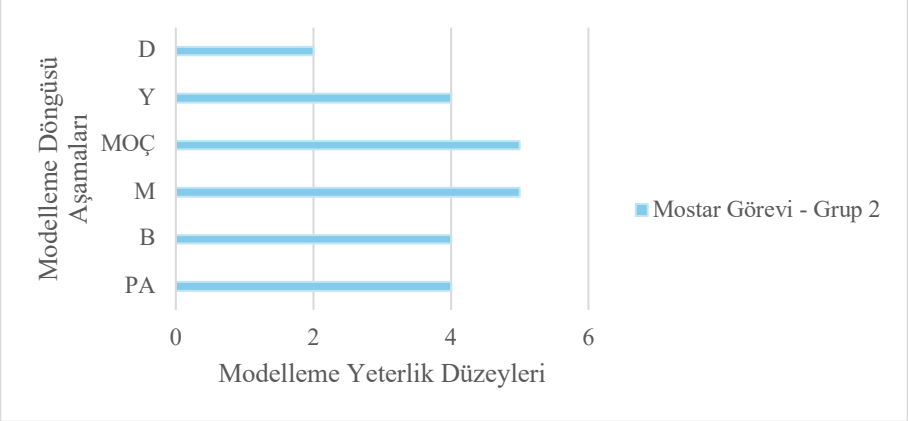
Matematikselleştirme aşamasında, matematiksel yapının oluşturulmasına yönelik gerçekleştirilen akıl yürütme süreci, artefaktların kullanımına dayalı enstrümantal oluşumun desteğiyle [Ens-Söy] dikey düzleminde yürütülmüş; modelin çalışma yaprağı üzerinde çizimle temsil edilmesiyle [Sem-Söy] dikey düzleminde de eylemler gerçekleştirildiği belirlenmiştir. Oluşturulan matematiksel yapının problemin çözümüne sunacağı katkının belirlenmesi sürecinde, ilgili matematiksel kavramların özelliklerinden yararlanılarak söylemsel oluşum gerçekleştirilmiş ve böylece modelin anlamlandırılması sağlanmıştır. Modelin çözümüne yönelik olarak sürdürülen eylemlerde, başlangıçta artefaktlar ve teorik referanslar kullanılmaya çalışılmış ancak bu bileşenlerin etkin bir şekilde işlevselleştirilememesi nedeniyle enstrümantal ve söylemsel oluşumlar gerçekleştirilememiştir. Bu durum, Grup 1 öğretmen adaylarının artefaktları kullanma yönünde girişimde bulunduğu halde, bu araçların işlevsel hale getirilememesi ve kavramsal bilgilerin yeterince kullanılamaması nedeniyle matematiksel çalışmanın kesintiye uğramasına yol açmıştır. Ardından geliştirilen yeni strateji kapsamında farklı matematiksel temsillerin kullanılmasıyla artefaktlar işlevsel hale getirilmiş ve gerçekleştirilen eylemler, ilgili kavramların özelliklerine dayalı gerekçelendirmelerle desteklenmiştir. Böylece matematiksel olarak çalışma aşaması [Ens-Söy] dikey düzleminde tamamlanarak bir matematiksel sonuca ulaşılmıştır. Ulaşılan bu sonucun yorumlanması ve doğrulanmasına yönelik olarak, oluşturulan matematiksel modelin geçerliliğinin sorgulanması sayesinde dolayı söylemsel oluşum gerçekleştirilmiş; böylelikle sonucun gerçek yaşam bağlamında anlamlı olup olmadığı belirlenmeye çalışılmıştır.

Gerçekleştirilen matematiksel çalışma sürecinde [Ens-Söy] dikey düzleminin sıklıkla kullandığı görülmektedir. Bu doğrultuda, süreç boyunca matematiksel temsillerin dikkate alındığı ve Grup 1 öğretmen adaylarının matematiksel kavramların özelliklerini temel alarak akıl yürütme ve gerekçelendirme süreçlerini etkin biçimde kullandıkları söylenebilir. Bu bağlamda, yürütülen matematiksel çalışmanın daha çok kavramsal ve söylemsel boyutlara dayandığı yönünde bir değerlendirme yapılabilir. Öte yandan, modelleme sürecinde yaşanan

tıkanıklık sırasında uygun artefaktların ve teorik referansların işlevsel olarak kullanılamadığı; ancak geliştirilen yeni stratejiyle bu kopukluğun giderildiği anlaşılmaktadır. Bu durum, Grup 1 öğretmen adaylarının süreci ilk olarak deneme-yanılma stratejisi ile yürüttüğünü, ardından ise inşa edilen yapının gerekçelendirilerek sürecin sürdürüldüğünü göstermektedir.

4.3.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi

Grup 2'nin Mostar görevine ilişkin gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmüştür. Problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi sürecinde önemsiz hatalar yapılmış olsa da bu veriler arasında anlamlı ilişkiler kurulabildiği için problemi anlama aşamasında Grup 2'nin Düzey 4'te yer aldığı yönünde değerlendirme yapılmıştır. Belirlenen veriler dikkate alınarak gerçekçi varsayımlar doğrultusunda problemin sadeleştirilmesi nedeniyle basitleştirme aşamasında da Düzey 4'e ulaşıldığı anlaşılmaktadır. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, gerçekçi varsayımlar temelinde uygun bir matematiksel model oluşturulduğu için matematikselleştirme aşamasında Düzey 5'e; oluşturulan bu modelin doğru bir şekilde çözülmesiyle matematiksel olarak çalışma aşamasında da Düzey 5'e ulaşıldığı tespit edilmiştir. Ancak ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik şekilde yorumlanması nedeniyle yorumlama aşamasında Düzey 4'e, kısmen gerçekleştirilen doğrulama yaklaşımına karşın belirlenen hataların düzeltilmemesi nedeniyle doğrulama aşamasında Düzey 2'ye ulaşıldığı belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 2'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.105'te sunulmuştur.



Şekil 4.105: Grup 2'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi

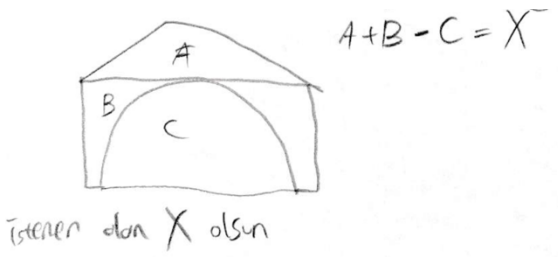
Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri dikkate alındığında, Grup 2'nin basitleştirme, matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında en yüksek performansı sergilediği, yorumlama aşamasında gelişim gösterdiği, doğrulama aşamasında ise düşük bir performans ortaya koyduğu görülmektedir. Mostar görevinin çözümüne yönelik olarak gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 18 puan elde eden Grup 2'nin, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 2 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için anlamlı bir matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 2 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.3.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 2'in Mostar probleminin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakikalık bireysel çalışma ile başlamıştır. Bireysel çalışma sürecinde, problem durumunun anlaşılmasına yönelik hazır oluş sorularına yanıtlar verilmiş ve yönlendirilmiş keşif soruları incelenmiştir. Grup çalışmasına geçilmesiyle birlikte, problemle birlikte verilen fotoğraf incelenmeye başlanmış, Grup 2 öğretmen adayları köprü üzerindeki insan sayısı ile köprünün uzunluğu arasında bir ilişki kurulabileceğini ifade etmiştir. Fotoğraf üzerinde yapılan gözlemler doğrultusunda, köprünün yüzeyinin parçalara ayrılarak hesaplamalar yapılabileceği ve kemer kısmının yarım daire biçiminde temsil edilebileceği değerlendirilmiştir. Köprünün duvarlarının düz yüzeyler olarak kabul edilmesi ve kemer bölümünün çember formunda varsayılması ile matematiksel çalışmanın temeli atılmıştır. Bu bağlamda, alanı hesaplanabilir geometrik şekiller üzerinden model oluşturmayı amaçlayan Grup 2 öğretmen adaylarının gerçekleştirdiği düşünme süreci, aşağıdaki diyaloğa yansımıştır. ÖA6 tarafından çalışma yaprağına aktarılan çözüm önerisine ait görsel Şekil 4.106'da sunulmuştur.

ÖA5: Köprünün görünen yerlerinin düz olduğunu düşünelim, girintili gibi görünüyor. Yani varsayalım ki burası dümdüz bir duvar gibi olsun.
ÖA6: Varsayalım ki kemer de çember gibi olsun. Kemerin tam üzerinden bir doğru çizersek alt taraf da dikdörtgen olur.
ÖA4: Zaten alt tarafın yarısını da ihmal ederiz. Yarım çember gibi olur yani biz yarım daire alanını bulacağız.

ÖA6: Dikdörtgenin alanından yarım dairenin alanını çıkartırsak da sonuca ulaşırız.
ÖA5: Evet, tamam mantıklı.

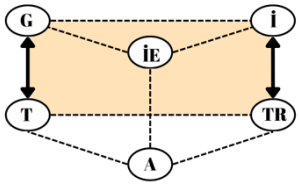


Şekil 4.106: Grup 2'nin problemin çözümü için yaptığı plana ilişkin görsel – Mostar görevi

Problemi basitleştirme sürecini sürdüren Grup 2 öğretmen adayları, problemin çözümünde kullanılacak verilerin nasıl elde edileceği üzerine düşünmüş; köprünün üzerindeki insan sayısından yola çıkarak yapılacak hesaplamaların yeterli olmayacağına kanaat getirmiştir. Bu doğrultuda, problem durumuyla birlikte sunulan fotoğrafta yer alan farklı bir nesnenin kullanılmasıyla daha uygun verilerin elde edilebileceği ifade edilmiştir. Grup, köprüden atlayan bir insanın referans nesne olarak kullanılmasına karar verilmiştir. Ortalama bir insan boyunun 180 santimetre olduğu bilgisi temel alınarak, fotoğraftaki bireyin katlamış olması nedeniyle bu uzunluğun 130 santimetre olarak kabul edilebileceği yönünde akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. Problemin çözümüne yönelik fikir yürütmeye devam eden Grup 2, fotoğraftan kaynaklı olarak bazı bölgelerin ihmal edilebileceğini ve bu nedenle hesaplanan alanın gerçek alandan daha az çıkabileceğini belirtmiştir. Ayrıca, GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılmadan bu problemin çözülemeyeceği değerlendirilmiş ve bu doğrultuda problemi anlama ve basitleştirme aşaması tamamlanmıştır.

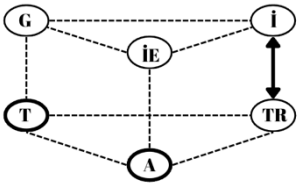
Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının fotoğrafta yer alan geometrik şekilleri fark ederek köprünün kemerinin çembere benzediğini, kemerin üst tarafında bir üçgensel bölgenin bulunduğunu ve köprünün alt kısmının dikdörtgen şeklinde düşünülebileceğini ifade ettikleri görülmüştür. Bu ifadeler, epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin kullanıldığını göstermektedir. Problemin çözümünde bu geometrik şekillerin kullanılabileceği düşünülerek köprünün belirli parçalara ayrılmasına yönelik bir akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. Grup içinde yürütülen tartışmalarla şekillenen bu akıl yürütme süreci, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Köprünün parçalara ayrılmasına ilişkin planın görselleştirilerek çalışma yaprağı üzerinde yazılı biçimde

ifade edilmesiyle semiyotik oluşumun gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemlerin, farklı matematiksel temsillerin kullanıldığı akıl yürütme ve görselleştirme süreçleriyle [Sem-Söy] dikey düzleminde başladığı söylenebilir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.107'de sunulmuştur.



Şekil 4.107: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Problemin çözümünde kullanılacak verilerin elde edilmesi için referans nesne kullanılması gerekliliğinin vurgulanması, epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin kullanıldığını göstermektedir. Ayrıca, problemin çözümünde GeoGebra dinamik geometri yazılımının kullanılacağının ifade edilmesi, epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin devreye girdiğini ortaya koymaktadır. Referans nesnenin gerçek yaşamdaki uzunluğunun belirlenmesine yönelik yürütülen tartışma sırasında kullanılan gerekçeler ise söylemsel oluşumun gerçekleştirildiğini göstermektedir. Bu doğrultuda, problemin çözümü için referans nesne belirlenmesi, artefaktların kullanılması ve gerekçelendirmelerin sunulmasıyla söylemsel oluşum gerçekleşmiş ve bu aşamadaki matematiksel çalışma tamamlanmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.108'de sunulmuştur.



Şekil 4.108: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 - Mostar görevi

4.3.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarını tamamlayan Grup 2, matematikselleştirme aşamasına geçişle birlikte bilgisayar kullanmaya başlamış ve problem durumunda verilen

fotoğrafı GeoGebra dinamik geometri yazılımına aktarmıştır. Fotoğrafın GeoGebra çalışma sayfasına yerleştirilmesinin ardından, ilk olarak doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak köprüden atlayan kişiyi temsil eden bir doğru parçası inşa edilmiştir. Devamında, nokta aracı ile alanı hesaplanmak istenen bölgenin köşe noktaları belirlenmiş ve bu noktalar doğru parçası oluşturma aracı yardımıyla birleştirilerek ilgili doğru parçaları oluşturulmuştur. Ancak, fotoğrafın köprünün tam karşısından çekilmemiş olması nedeniyle oluşturulan doğru parçasının kemerin altından geçtiği ifade edilmiştir. Bu duruma ilişkin görsel Şekil 4.109'da sunulmuştur.



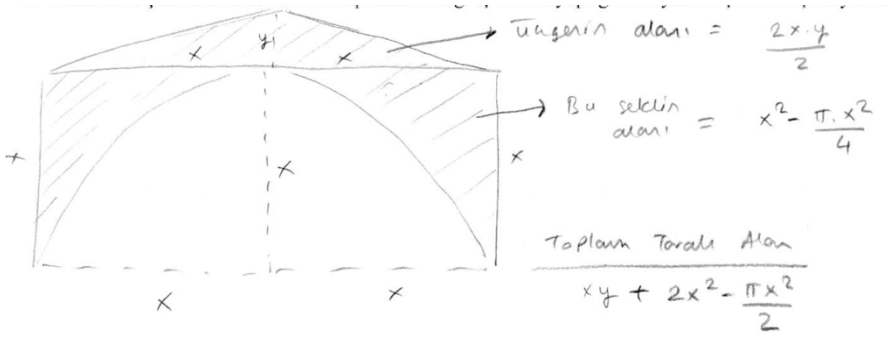
Şekil 4.109: Grup 2'nin oluşturduğu doğru parçasına ilişkin görsel – Mostar görevi

Bu durumun problemin çözüm sürecinde ihmal edilebilecek unsurlardan biri olduğu ifade edilerek matematiksel çalışmaya devam edilmiştir. Grup 2 tarafından oluşturulan doğru parçalarının uzunlukları GeoGebra'nın cebir penceresinden belirlenmiş ve bu değerler çalışma yaprağına not edilmiştir. Köprünün parçalara ayrılması sürecinde, üçgen olarak düşünülen bölgenin alanının hesaplanabilmesi için üçgenin yüksekliğinin oluşturulması gerektiği belirtilmiştir. Bu amaçla, orta dikme oluşturma aracı seçilerek fotoğrafta inşa edilen doğru parçasının orta dikmesi oluşturulmuştur. Orta dikme inşa edildikten sonra, bu doğru üzerinde üçgenin diğer köşesini temsil edecek bir nokta belirlenmiş ve ardından orta dikme ile doğru parçasının kesişim noktası kesiştir aracı yardımıyla belirlenmiştir. Belirlenen iki nokta, doğru parçası oluşturma aracıyla birleştirilerek üçgenin yüksekliğini temsil eden yeni bir doğru parçası oluşturulmuş ve bu doğru parçasının uzunluğu cebir penceresi kullanılarak belirlenmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.110'da sunulmuştur.



Şekil 4.110: Grup 2'nin orta dikme aracını kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi

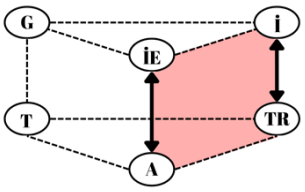
Üçgenin alanının, taban ve yüksekliğinin çarpımının ikiye bölünmesiyle hesaplanabileceği belirtilmiştir. Üçgensel bölgenin altında kalan alanın ise bir dikdörtgen olarak düşünülebileceği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, kemerin oluşturduğu bölgenin alanı dikdörtgenin alanından çıkarılarak toplam alana ulaşılabileceği yönünde bir strateji belirlenmiştir. Grup 2 tarafından oluşturulan bu matematiksel model, Şekil 4.111'de görsel olarak sunulmuştur.



Şekil 4.111: Grup 2'nin problemi matematikselleştirmesine ilişkin görsel – Mostar görevi

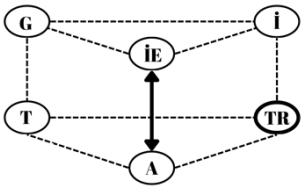
Problemin matematikselleştirilmesi amacıyla gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 2'nin GeoGebra dinamik geometri yazılımı gibi dijital bir artefaktı etkin biçimde kullandığı görülmektedir. Bu yazılım aracılığıyla nokta oluşturma ve doğru parçası oluşturma araçları kullanılarak çeşitli geometrik yapılar inşa edilmiştir. Bu süreçte gerçekleştirilen eylemler, enstrümantal oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Öte yandan, oluşturulan doğru parçasının köprü kemeriyle örtüşmemesinin, fotoğrafın tam karşıdan çekilmemesinden kaynaklandığına dair yapılan açıklama, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu bağlamda, problemin matematikselleştirilmesi aşamasında yürütülen matematiksel çalışmanın, artefaktların kullanımıyla yapılan inşaya dayalı bir gerekçelendirme

süreciyle [Ens-Söy] dikey düzleminde başladığı görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.112'de sunulmuştur.



Şekil 4.112: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – 1 – Mostar görevi

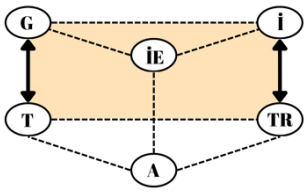
Üçgenin yüksekliğini temsil edecek doğru parçasının, tabanı temsil eden diğer doğru parçasına dik olacak şekilde inşa edilmesi gerektiğinin ifade edilmesiyle, üçgen ve yükseklik kavramına ilişkin teorik referanslardan yararlanıldığı görülmektedir. Bu doğrultuda, GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılarak orta dikme aracıyla bir doğru inşa edilmiş; ardından, nokta oluşturma aracıyla bu doğru üzerinde üçgenin köşesini temsil edecek bir nokta belirlenmiş ve kesiştir aracı aracılığıyla doğru parçası ile orta dikmenin kesişim noktası tespit edilmiştir. Gerçekleştirilen bu eylemler, enstrümantal oluşumun varlığına işaret etmektedir. Böylece matematiksel çalışmanın, problemin çözümüne yönelik olarak teorik referanslara dayalı inşalarla sürdürüldüğü söylenebilir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.113'te sunulmuştur.



Şekil 4.113: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – 2 – Mostar görevi

GeoGebra dinamik geometri yazılımında gerçekleştirilen eylemlerin ardından, Grup 2 öğretmen adaylarının probleme ilişkin çözüm planını ve alan formüllerini içeren ifadeleri çalışma yaprağına yazılı olarak aktardıkları görülmüştür. Bu durum, problemin görsel olarak ifade edilmesiyle birlikte semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Modelin oluşturulması sürecinde, yapılacak planın geometrik şekillerin alan bağıntılarına dayalı olarak açıklanması, söylemsel oluşumun da gerçekleştiğini göstermektedir.

Matematikselleştirme aşamasında yürütülen bu eylemlerin, matematiksel modelin görselleştirilerek çalışma yaprağında sunulması ve ilgili matematiksel işlemlerin teorik referanslara dayalı bir söylemsel akıl yürütmeyle desteklenmesi sayesinde [Sem-Söy] dikey düzleminde tamamlandığı anlaşılmaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.114'te sunulmuştur.



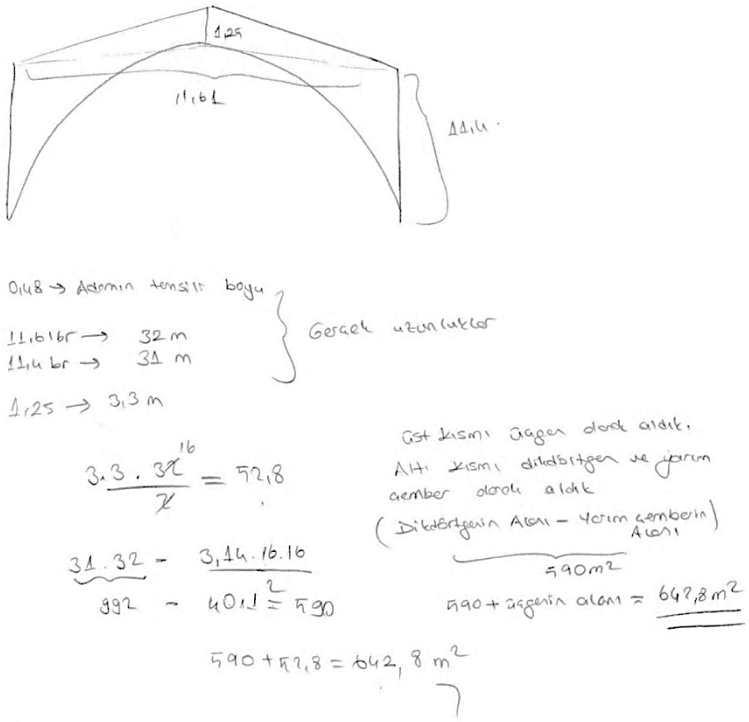
Şekil 4.114: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği matematiksel çalışma – 3 – Mostar görevi

4.3.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak matematiksel olarak çalışma aşamasına geçen Grup 2'nin, GeoGebra çalışma sayfasında gerçekleştirdiği inşalar sonucunda elde edilen verileri kullanarak çeşitli işlemler gerçekleştirdiği görülmüştür. Fotoğraf üzerinde elde edilen ölçülerin gerçek yaşamla ilişkilendirilmesi amacıyla oran-orantı kavramından yararlanılmıştır. Matematiksel işlemlerin gerçekleştirilmesi sırasında Grup 2 arasında yaşanan diyalog aşağıda verilmiştir:

ÖA5: Şimdi adamın boyunu 0,48 birim olarak bulmuştuk. Bu adamın temsili boyu, GeoGebra'daki. 0,48 birim 1,30 metre ise diğer uzunlukları da buna göre çevireceğiz.
ÖA7: O zaman bu orana göre işlemleri yaptığımızda köprünün uzunluğu yaklaşık 32 metre, yüksekliği yaklaşık 31 metre oluyor. Üstte üçgen gibi aldığımız yerin yüksekliği de 3,3 metre.
ÖA6: Tamam o zaman hesaplamaları yapabiliriz.

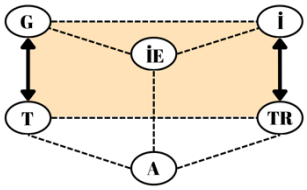
Yukarıdaki diyaloğun yaşanmasının ardından Grup 2 öğretmen adayları, grup raporu üzerinde matematiksel işlemler gerçekleştirmiştir. Yapılan işlemlerde orantı sabitinin yanı sıra üçgen ve daire alanlarına ilişkin matematiksel bağıntıların kullanıldığı görülmüştür. Problemin çözümüne yönelik olarak gerçekleştirilen matematiksel işlemleri içeren çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.115'te sunulmuştur.



Şekil 4.115: Grup 2'nin gerçekleştirdiği matematiksel işlemleri içeren çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi

Matematiksel modelin çözülmesine yönelik olarak gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının matematiksel işlemleri yürütürken oran ve orantı kavramının özelliklerinden yararlandıkları görülmüştür. Fotoğraftan elde edilen verilerin gerçek yaşamla ilişkilendirilmesinde oran kavramının kullanılmasına yönelik gerçekleştirilen grup içi diyaloglar, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Matematiksel işlemler yürütülürken, grup raporunda modele ilişkin bir taslak çizilerek elde edilen değerlerin bu model üzerinde gösterilmesiyle birlikte semiyotik oluşumun da gerçekleştirildiği anlaşılmaktadır.

Problemin çözümüne yönelik bu matematiksel çalışma süreci, modelin görselleştirilerek çalışma yaprağına aktarılması ve matematiksel işlemlerin teorik referanslara dayalı söylemsel akıl yürütme ile yürütülmesi sayesinde [Sem-Söy] dikey düzleminde gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.116'da sunulmuştur.

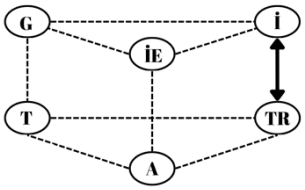


Şekil 4.116: Grup 2'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi

4.3.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Matematiksel modelin çözülmesiyle elde edilen sonucun gerçek yaşam bağlamında değerlendirilmesi amacıyla yorumlama ve doğrulama aşamasına geçen Grup 2 öğretmen adayları, ulaşılan değerin kendi tahminlerinden oldukça büyük olduğunu ifade etmiştir. Bu farklılığın nedenlerini sorgulayan öğretmen adayları, GeoGebra çalışma sayfasında oluşturdukları doğru parçalarının uzunluk ölçülerini yeniden incelemişlerdir. Bu süreçte, doğru parçalarının uzunluklarını GeoGebra'nın cebir penceresinden belirledikleri anda, fotoğraftaki uzunlukların gerçek yaşamdaki karşılıklarını hızlı bir şekilde hesapladıkları anlaşılmıştır. Ancak, bu değerlerin daha sonra matematiksel işlemlerde bir kez daha kullanılması, aynı verilerin iki kez işleme dahil edilmesine neden olmuş ve dolayısıyla ulaşılan sonucun hatalı olmasına yol açmıştır. Bu bulgunun ortaya çıkarılmasıyla birlikte Grup 2'nin matematiksel çalışması sonlandırılmıştır.

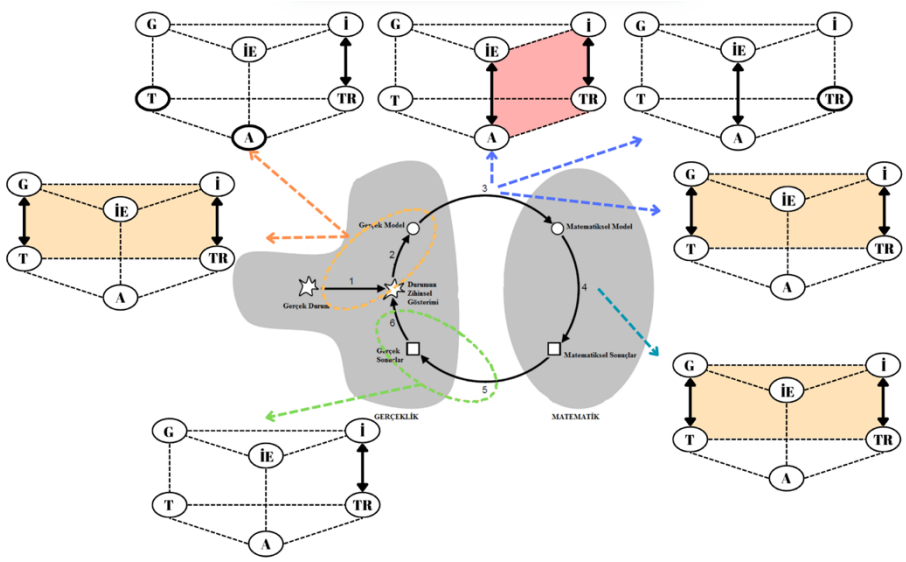
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 2 öğretmen adaylarının yürüttükleri matematiksel süreci yeniden gözden geçirdikleri ve elde edilen sonucun doğruluğunu sorguladıkları görülmüştür. Yapılan bu sorgulama sürecinde, matematiksel işlemlerde aynı verilerin iki defa kullanıldığının fark edilmesi ve bu durumun gerekçelendirilmesi söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen matematiksel çalışmaya ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.117'de sunulmuştur.



Şekil 4.117: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi

4.3.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 2 öğretmen adaylarının Mostar görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.118'de sunulmuştur.



Şekil 4.118: Grup 2'nin Mostar görevindeki matematiksel çalışması

Grup 2'nin yürüttüğü matematiksel çalışma incelendiğinde, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında iki temel eylemin gerçekleştirildiği görülmektedir. Bu aşamada problem durumu hem görselleştirme hem de akıl yürütme süreçleriyle değerlendirilmiş; ayrıca epistemolojik düzlemin bileşenleri etkin biçimde kullanılarak kavramsal gerekçelendirmeler yapılmıştır. Problemin anlaşılmasına yönelik söylemlerin birden fazla eylem aracılığıyla üretilmiş olması, bu aşamanın güçlü ve derinlikli biçimde yürütüldüğünü göstermektedir.

Matematiksel modelin oluşturulması sürecinde ise Grup 2 öğretmen adaylarının üç farklı eylem gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Bu süreç, problemin matematiksel bir yapıya dönüştürülmesinde yapılan inşa etme eylemlerinin kuramsal temellere dayalı olarak gerekçelendirilmesiyle [Ens-Söy] dikey düzleminde başlamıştır. Matematiksel kavramların özellikleri dikkate alınarak gerçekleştirilen inşaların ardından, modelin görselleştirilerek ifade edilmesiyle matematiksel model tamamlanmıştır. Bu bağlamda, Grup 2 öğretmen adaylarının matematikselleştirme sürecinde modeli hem dijital artefaktlarla görselleştirdiği hem de söylemler aracılığıyla gerekçelendirerek anlamlı hale getirdiği söylenebilir.

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik gerçekleştirilen eylemlerde, görselleştirmeye dayalı akıl yürütme ve gerekçelendirme süreçlerinin ön planda olduğu görülmektedir. Bu durum, matematiksel çözümün yalnızca işlem düzeyinde değil, aynı zamanda anlamlandırılarak gerekçelendirildiğini ortaya koymaktadır. Ulaşılan matematiksel sonucun doğruluğunun sorgulanması ise söylemsel oluşum süreci içerisinde ele alınmış ve çözümün değerlendirilmesi bu yolla gerçekleştirilmiştir.

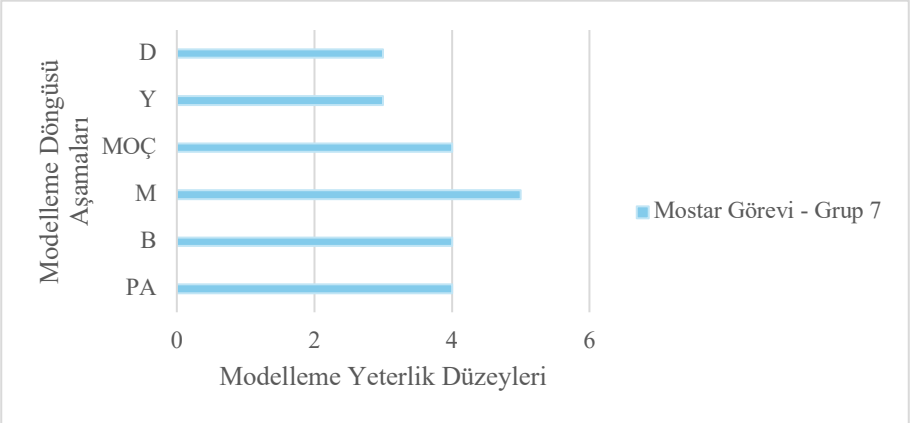
Süreç boyunca farklı eylemler aracılığıyla düzlemler arası geçişlerin yapılmış olması, problem çözme sürecinin çok yönlü ve zengin bir yapıda ilerlediğini göstermektedir. Matematiksel modelin oluşturulmasında enstrümantal oluşumun farklı eylemlerle bütünleşmesi, dijital artefaktların işlevsel biçimde kullanıldığını ortaya koymaktadır. Bununla birlikte, söylemsel oluşumun sürecin neredeyse her aşamasında yer alması, Grup 2 öğretmen adaylarının Mostar görevini çözerken sürekli olarak akıl yürütme ve gerekçelendirme becerilerini devrede tuttuklarını göstermektedir.

4.3.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi

Grup 7 tarafından Mostar görevine ilişkin gerçekleştirilen matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin anlaşıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmüştür. Problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesi sırasında bazı önemsiz hatalar yapılmış olsa da bu veriler arasında ilişki kurulabilmiş olması nedeniyle problemi anlama aşamasında Düzey 4'te yer aldıkları belirlenmiştir. Belirlenen veriler doğrultusunda gerçekçi varsayımlarla problemin sadeleştirilmiş olması, basitleştirme aşamasında da Düzey 4'te bulunduklarını göstermektedir.

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 7, çözüm süreci için uygun bir matematiksel model oluşturmuş ve bu nedenle matematikselleştirme aşamasında Düzey 5'te yer almıştır. Ancak, doğru oluşturulan modelin çözüm sürecinde bazı hataların yapılmış olması nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 4'te bulundukları belirlenmiştir. Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında doğru biçimde yorumlanması, yorumlama aşamasında Düzey 3'te bulundukları yönünde değerlendirilirken; doğrulama sürecinde kısmi bir yaklaşım izlenmiş ve bazı hatalar düzeltilmiş olsa da bu süreçte Düzey 2'de yer aldıkları tespit edilmiştir. Bu doğrultuda Grup 7'nin Mostar görevindeki matematiksel

çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.119'da sunulmuştur.



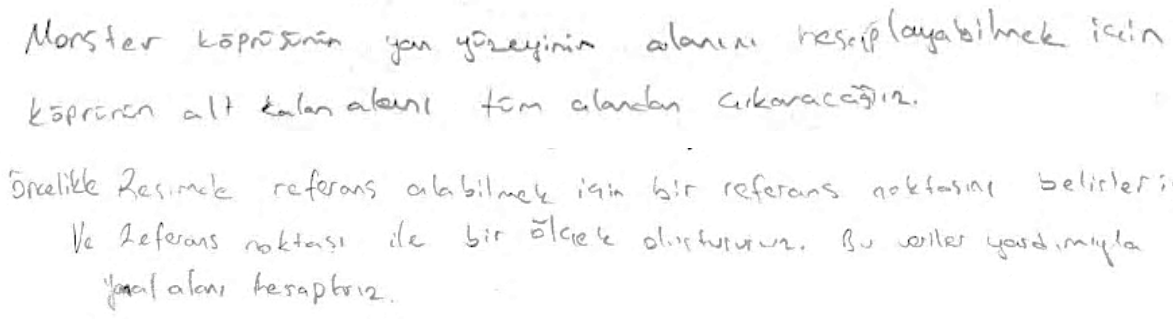
Şekil 4.119: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri incelendiğinde, Grup 7'nin özellikle basitleştirme ve matematikselleştirme aşamalarında yüksek bir performans sergilediği, yorumlama aşamasında ise gelişim gösterdiği belirlenmiştir. Mostar görevinin çözümüne yönelik yürütülen bu matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 17 puan elde eden Grup 7'nin, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu görülmektedir. Bu doğrultuda, Grup 7 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için matematiksel çalışma yürütebildiği belirlenmiştir. Grup 7 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.3.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 7 tarafından Mostar görevinin çözümüne yönelik gerçekleştirilen matematiksel çalışma, problem durumunu ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından, yaklaşık 10 dakikalık bireysel çalışma süreciyle başlamıştır. Bireysel çalışma süresince öğretmen adaylarının, problem durumunu anlamaya yönelik hazır oluş sorularına yanıtlar verdikleri, yönlendirilmiş keşif sorularını inceledikleri gözlemlenmiştir. Bu süreçte, köprünün yan yüzeyinin alanının hesaplanabilmesi için köprünün belirli bir geometrik şekil olarak düşünülebileceği ve bu şeklin alanından, kemerin altında kalan bölgenin alanının çıkarılması yoluyla probleme çözüm getirilebileceği ifade edilmiştir. Ayrıca, fotoğraf üzerinde

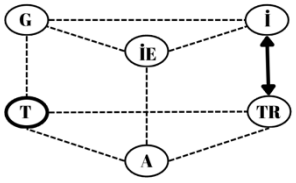
bir referans nesne belirlenerek oluşturulacak ölçek yardımıyla elde edilecek verilerin problemin çözümünde kullanılabileceği yönünde bir çözüm planı geliştirilmiştir. Söz konusu plana ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.120'de sunulmuştur.



Şekil 4.120: Grup 7'nin çözüm planına ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi

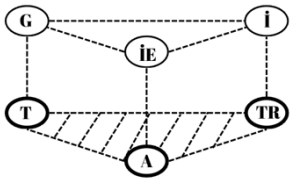
Problemin çözümüne yönelik planın oluşturulmasının ardından, Grup 7 öğretmen adayları alanı hesaplanacak bölgeyi belirlemeye çalışmıştır. Bu süreçte, köprünün kemerini temsil edecek şekilde bir polinom grafiği oluşturulabileceğini ve kemerin alt kısmının yarım daire biçiminde düşünülerek dairenin alan bağıntısından yararlanılabileceğini ifade etmişlerdir. Bu amaçla, GeoGebra dinamik geometri yazılımının uygun bir araç olacağı belirtilmiş ve böylece problemi anlama ve basitleştirme aşaması tamamlanmıştır.

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının köprünün yan yüzeyini temsil eden geometrik şeklin alanından, kemerinin altında kalan bölgenin alanını çıkartarak probleme çözüm getirebileceklerine yönelik bir plan geliştirdikleri görülmektedir. Bu planlama süreci boyunca yapılan akıl yürütmeler ve problem durumunun kendi ifadeleriyle açıklanması, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, köprünün bir geometrik şekil ile temsil edilebileceği ve referans nesne kullanılarak gerekli verilerin belirlenebileceğine yönelik ifadeler, epistemolojik düzlemin temsil bileşeninin sürece dahil edildiğini göstermektedir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.121'de sunulmuştur.



Şekil 4.121: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamalarındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Problemin çözümüne yönelik oluşturulan planın uygulanmasına yönelik olarak, köprünün kemerini temsil edecek bir parabolün çizilebileceği ve bu bölgenin alanını hesaplamak için daire alanı formülünden yararlanılabileceği ifade edilmiştir. Bu işlemlerin gerçekleştirilmesi için GeoGebra dinamik geometri yazılımının kullanılabileceğinin belirtilmesi, epistemolojik düzlemin temsil ve artefakt bileşenlerinin sürece dahil edildiğini göstermektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.122'de sunulmuştur.



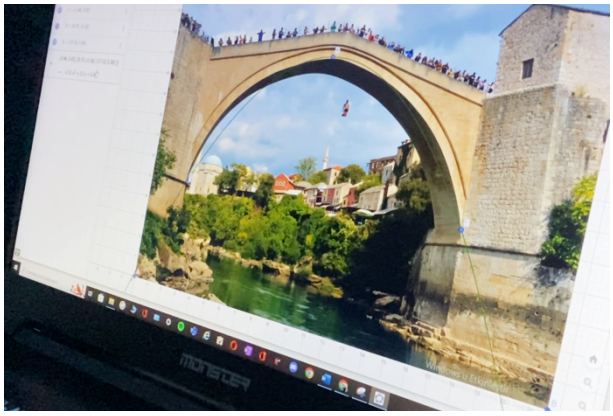
Şekil 4.122: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamalarındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi

4.3.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve çözüm planının oluşturulmasının ardından Grup 7 öğretmen adayları, bilgisayar ortamında GeoGebra dinamik geometri yazılımını açarak internetten buldukları fotoğrafı 'sürükle-bırak' yöntemiyle çalışma sayfasına aktarmıştır. Çalışmalarına GeoGebra'nın giriş alanına 'polinom' komutunu yazarak başlayan grup, köprünün kemerini temsil edecek bir polinom oluşturmaya çalışmıştır. Ancak bu komutun uygulanabilmesi için bir nokta listesi oluşturulması gerektiği fark edilmiştir. Çalışma sayfasında polinomun geçeceği herhangi bir nokta bulunmadığı için komutu uygulayamayan Grup 7, köprünün kemerinin şekil olarak yarım çembere benzediğini ifade ederek, yarım dairenin alanını kullanmanın daha pratik bir çözüm olacağı yönünde görüş belirtmiştir. Bu sırada bir yandan internet üzerinden GeoGebra'da polinom oluşturma sürecine ilişkin araştırma yapılmış ve bir YouTube videosu izlenmiştir. Bu süreçte öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA26: Nokta listesi diye bir şey yazıyor yönergede ama ne yazacağız acaba buraya?
ÖA27: Hangi noktalar?
ÖA26: Noktaları yazdığım zaman aralarına virgül mü koyacağım acaba? Yoksa başka bir şey mi bu?
ÖA25: Excel'de liste oluşturma kuralları vardı galiba. Acaba bunda da mı var?
ÖA26: Bizim noktamız yok ki şu an, nokta listesini nasıl oluşturacağız?
ÖA27: Tekrar yaz bakalım polinom diye oraya.
ÖA24: Bence yarım çember yapalım öyle daha kolay olacak.
ÖA27: Gerçekten köprünün alt kısmı yarım çembere çok benziyor. Yarım çember çiz deseler köprüyü gösteririm. Parabol polinom falan bunlarla uğraşmamıza gerek yok. Tam bir yarım çember bu şekil.
ÖA26: Bakın videoda göstermişler. Polinomun geçeceği noktaları belirledikten sonra bir noktaları sırayla yazacakmışız komuta.

Yaşanan bu diyalog sonrasında Grup 7 öğretmen adayları, GeoGebra'nın nokta oluşturma aracını kullanarak köprü üzerinde üç farklı nokta belirlemiş ve ardından 'polinom' komutunu kullanarak bu noktaların isimlerini sırasıyla komuta yazarak köprünün kemerini temsil eden polinom oluşturmuştur. Gerçekleştirilen eylemler doğrultusunda oluşturulan polinoma ilişkin görsel Şekil 4.123'te sunulmuştur.



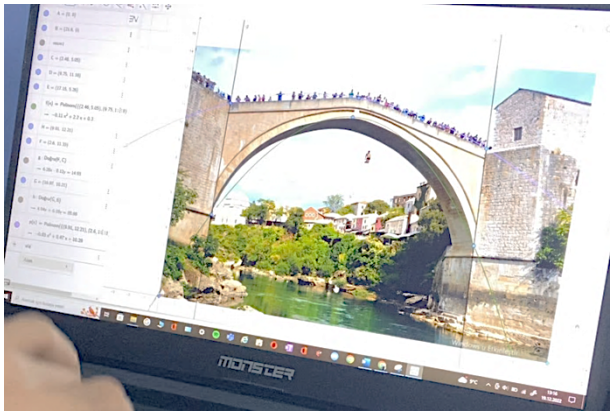
Şekil 4.123: Grup 7'nin kemeri temsil eden polinomu oluşturmasına ilişkin görsel – Mostar görevi

Köprünün kemerini temsil eden polinomun oluşturulmasının ardından grup 7 öğretmen adayları, problemin çözümüne yönelik gerçekleştirilmesi gereken bir sonraki adımları tartışmaya başlamıştır. Grup 7, köprünün üst sınırlarını temsil edecek yeni bir polinom daha

çizilerek bu iki grafik arasında kalan alanın hesaplanabileceğini ifade etmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik olarak Grup 7 arasında yaşanan tartışma şu şekildedir:

ÖA26: Güzel. Bir tane polinom oluşturduk, çok iyi oldu bence.
ÖA27: Bir tane daha mı çizeceğiz şimdi?
ÖA26: Çizebiliriz. Ama duvarların geldiği kısımlara doğru parçası çizip öyle de sınırlandırabiliriz.
ÖA27: Doğru ile eğrinin altındaki alan bulmayı biliyor musun? Nasıl hesaplanıyor?
ÖA24: İki grafik yani iki fonksiyon var burada arasındaki alanı buluruz bunların. Diğer grafiği oluşturmamız lazım sadece.
ÖA27: İki grafik arasında hesaplarız da üst tarafı doğru parçası ile yapsak daha iyi olur mu acaba diye düşündüm.
ÖA26: Biz iki grafiği çizelim. Yan taraflardan da iki tane dikey doğru ile sınırlandırırız. Onun için doğru parçası çizeriz. Alanı da integralle hesaplarız.
ÖA27: Evet, iki eğri arasındaki alan integralle hesaplanır. Sınırlı bölge olduğu için belirli integral kullanacağız o zaman.

Bu tartışmanın ardından, Grup 7 öğretmen adayları GeoGebra'da 'polinom' komutunu kullanarak köprünün üst sınırını temsil edecek şekilde ikinci bir fonksiyon grafiği inşa etmiştir. Ardından, iki grafik arasında kalan bölgenin sınırlandırılması amacıyla, doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak dikey yönde iki doğru parçası inşa edilmiştir. Bu doğrultuda, GeoGebra çalışma sayfası üzerinde, belirli integral aracılığıyla alan hesabına imkân sağlayacak bir matematiksel model yapılandırılmıştır. Gerçekleştirilen eylemler ile oluşturulan matematiksel model Şekil 4.124'te sunulmuştur.

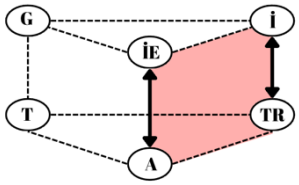


Şekil 4.124: Grup 7'nin problemi matematikselleştirmesine ilişkin görsel – Mostar görevi

Matematiksel modelin oluşturulmasına yönelik olarak matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının dijital bir artefakt olan GeoGebra dinamik geometri yazılımını etkin bir şekilde kullandıkları görülmektedir. Süreçte, problem durumuna ilişkin bir fotoğraf GeoGebra çalışma sayfasına eklenmiş, uygun inşa komutları uygulanmış ve ihtiyaç duyulan bilgiye ulaşmak amacıyla bir arama motoru ve güncel bir video paylaşım platformu kullanılmıştır. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının epistemolojik düzlemin artefakt bileşenini işlevsel biçimde kullandıkları anlaşılmaktadır.

Özellikle, GeoGebra'da kullanılan 'polinom' komutunun yönergesinin anlaşılmadığı durumda, köprünün kemerini temsil etmek için alternatif bir strateji olarak yarım daire modelinin önerilmesi söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Komutun nasıl kullanılacağına ilişkin bilgiye ulaşıldıktan sonra, nokta oluşturma aracıyla üç nokta tanımlanmış ve 'polinom' komutu yardımıyla köprüyü temsil eden bir grafik başarıyla inşa edilmiştir. Bu durum, enstrümantal oluşumun da gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir.

Sonuç olarak, Grup 7 öğretmen adaylarının matematikselleştirme sürecinde, probleme uygun artefaktları işlevsel bir şekilde kullanarak ve alternatif çözüm stratejileri geliştirerek anlamlı matematiksel yapılar oluşturdukları ve çalışmalarının [Ens-Söy] dikey düzleminde başladığı görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.125'te sunulmuştur.



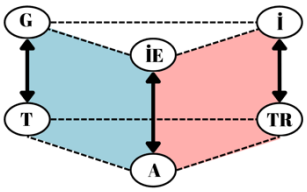
Şekil 4.125: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Köprünün kemerini temsil eden polinom grafiğinin inşa edilmesinin ardından, problemin matematikselleştirilmesine yönelik sürecin devamında farklı bir polinom grafiğinin daha oluşturulabileceği ve bu iki grafik arasında kalan alanın hesaplanması yoluyla problemin çözülebileceği yönünde bir akıl yürütme gerçekleştirilmiştir. Grup tartışmaları sırasında, bu alanın iki dikey doğru ile sınırlandırılması gerektiği ve söz konusu bölgenin alanının belirli integral yardımıyla hesaplanabileceği ifade edilmiştir. Bu açıklamalar, gerçekleştirilen

eylemlerin gerekçelendirildiğini ve sürecin teorik referanslarla temellendirildiğini göstermekte olup, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir.

Süreç içerisinde, GeoGebra dinamik geometri yazılımının olanakları kullanılarak ikinci bir polinom grafiği oluşturulmuş ve bölgenin sınırlarını belirlemek amacıyla dikey doğrular inşa edilmiştir. Böylece Grup 7 öğretmen adaylarının problemin çözümüne yönelik matematiksel bir model oluşturdukları ve bu süreçte hem enstrümantal hem de semiyotik oluşumları gösterdikleri anlaşılmaktadır.

Sonuç olarak, çözüm planının uygulanmasına yönelik grup tartışmalarında gerçekleştirilen akıl yürütmenin ardından geliştirilen matematiksel inşalar; [Sem-Ens] ve [Ens-Söy] dikey düzlemlerinde konumlanmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.126'da sunulmuştur.



Şekil 4.126: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi

4.3.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak, belirlenen bölgenin alanını hesaplamaya çalışan Grup 7 öğretmen adayları, bu işlem için GeoGebra çalışma sayfasında uygun bir komut kullanılması gerektiğini ifade etmiştir. Bu amaçla, yazılımın giriş bölümüne 'alan' komutu yazılmış, ancak komutun yalnızca konik, çokgen ve belirlenen noktalar arasında kalan bölgelerin alanlarını hesaplamak için kullanılabildiği görülmüştür. Bu durum üzerine, fonksiyon grafiklerinin arasında kalan bölgenin alanını belirlemek için başlangıçta planlandığı gibi belirli integral kavramının kullanılması gerektiği hatırlanmıştır. Bu doğrultuda, GeoGebra çalışma sayfasında belirli integral komutunun nasıl kullanılacağı üzerine düşünülmeye başlanmıştır. Bu sırada Grup 7 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA27: İki fonksiyon arasındaki alanı bulmak için komut kullanmamız lazım.

ÖA24: Giriş bölümüne 'alan' yazınca çıkanlar işimize yaramıyor.
ÖA26: İntegral kullanacağız zaten, demiştik ya. Giriş bölümüne integral yazalım bakalım nasıl bir yönerge çıkacak.
ÖA27: Bize iki parabol arasındaki alan lazım. 'integralarasında' komutunu kullanalım.
ÖA24: Fonksiyon yaz diyor yönerge. Bizim fonksiyonlarımız ne?
ÖA26: Cebir penceresinde yazıyor bak.
ÖA24: Biri f(x) diğeri p(x). Onları yazacağız sırasıyla sanırım.
ÖA26: Tamam yazalım.
ÖA27: Şimdi de başlangıç ve bitişi belirlememiz lazım.
ÖA24: Bu belirli integral oluyor aslında.
ÖA27: Evet. Şimdi bizim belirli integralimiz hangi iki nokta arasında?
ÖA24: İki doğru arasında sınırladık ya.
ÖA26: Yönergede başlangıç x ve bitiş x diyor.
ÖA24: O zaman x ekseninde noktalar yazacağız oraya.
ÖA26: Çizdiğimiz doğrulardaki noktalardan birinin x değerini yazalım, öyle olacak sanırım.
ÖA27: Deneyelim, olmazsa düzenleriz. En azından nasıl olduğunu görürüz şimdi.

Grup 7 öğretmen adaylarının oluşturdukları matematiksel modeli çözmeye yönelik gerçekleştirdiği grup tartışmasının ardından GeoGebra çalışma sayfasının giriş bölümüne 'integralarasında' komutunun yazıldığı görülmüştür. Komutun uygulanabilmesi için, ilgili fonksiyonları temsil eden ifadeler ile bölgenin sınırlarını belirleyen değerler cebir penceresinden alınarak kullanılmıştır. Komutun uygulanmasıyla uygulanmasının ardından, belirlenen bölgenin alanının cebir penceresinde görüntülendiği fark edilmiştir. Böylece, oluşturulan matematiksel modelin çözülmesiyle bir matematiksel sonuca ulaşılmış; ancak bu sonucun gerçek yaşam bağlamındaki karşılığının belirlenmesi gerektiği ifade edilmiştir.

Bu noktada, referans nesne kullanımına ihtiyaç duyulmuş ve problem durumunda yer alan fotoğraftaki köprüden atlayan insan figürünün bu amaçla kullanılmasına karar verilmiştir. Ortalama bir insan boyunun 1,80 metre olduğu bilgisine dayanarak, dizlerini kırarak atlayan bireyin boyunun yaklaşık 1,50 metre olarak kabul edilebileceği ifade edilmiştir.

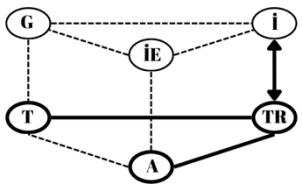
Ortaya koyulan varsayım doğrultusunda, fotoğraftaki insan figürü üzerinde GeoGebra dinamik geometri yazılımının nokta aracı kullanılarak iki nokta oluşturulmuş ve bu noktalar doğru parçası aracı ile birleştirilerek referans nesneyi temsil eden bir doğru parçası inşa edilmiştir. Bu

doğru parçasının oluşturulmasının ardından, ‘integralarasında’ komutu ile belirlenen alanın gerçek yaşamdaki karşılığını hesaplamak amacıyla matematiksel işlemler gerçekleştirilmiştir. Bu işlemlere ilişkin Grup 7 öğretmen adayları arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir:

ÖA25: Peki biz bunu modelledik de... Bu sonucu gerçek yaşama nasıl geçireceğiz?
ÖA26: Bu sonuç metrekare olduğu için referans nesne için bulduğumuz metreyi 2 defa çarpacağız. O zaman gerçek yaşamdaki karşılığını buluyoruz.
ÖA25: Ben de onu düşündüm ama uygun oluyor mu diye aklıma takıldı.
ÖA26: Şimdi işlemleri yapalım.
ÖA27: Biraz fazla bulduk işlemlerin sonucu 7500 metrekare çıkıyor. 7,5 dönüm araziye karşılık geliyor.

Grup 7’nin matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği eylemler incelendiğinde, GeoGebra dinamik geometri yazılımında sınırlı bölgenin alanını belirlemek amacıyla giriş bölümüne çeşitli komutlar yazılarak deneme-yanılma stratejisinin kullanıldığı görülmüştür. Bu strateji doğrultusunda yürütülen akıl yürütme süreci sonucunda, hesaplanacak alanın belirli integral yoluyla bulunabileceği yönünde bir fikir geliştirilmiş ve bu bağlamda söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Süreç boyunca dinamik geometri yazılımının komut girilerek inşa etme özelliği kullanılmış, polinom fonksiyonlarının ifade edilmesinde sembolik temsillerden yararlanılmış ve alan hesaplamaları belirli integral kavramının özelliklerine dayalı olarak yürütülmüştür.

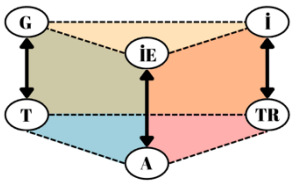
Bu aşamada gerçekleştirilen semiyotik oluşumun, epistemolojik düzlemin ve artefakt ve temsil bileşenleriyle desteklendiği anlaşılmaktadır. Sonuç olarak, matematiksel modelin çözümüne yönelik yürütülen çalışma, matematiksel temsiller ve artefaktlardan yararlanılarak geliştirilen çözüm planı doğrultusunda semiyotik oluşumla başlamış ve ilerlemiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.127’de sunulmuştur.



Şekil 4.127: Grup 7’nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışmaları – 1 – Mostar görevi

İki polinom grafiği arasında kalan bölgenin sınırlarına ilişkin koordinatların cebir penceresi aracılığıyla belirlenmesinin ardından, GeoGebra dinamik geometri yazılımında 'integralarasında' komutu kullanılarak ilgili bölge tanımlanmıştır. Bu eylemler, artefaktın problem çözümüne yönelik amaçlı ve işlevsel biçimde kullanılmasından ötürü enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Aynı zamanda, komutun uygulanmasıyla iki fonksiyon arasında kalan sınırlı bölgenin görselleştirilmesi semiyotik oluşumun gerçekleştirildiğini göstermektedir.

Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşamdaki karşılığının belirlenmesi amacıyla bir referans nesne seçilmesi ve bu nesnenin uzunluğunun kullanılarak gerçek alana ulaşılması sürecinde ortaya konan söylem ve gerekçelendirmeler ise söylemsel oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Tüm bu süreç değerlendirildiğinde, çözüm planının uygulanması sırasında uygun artefaktların amaca yönelik biçimde kullanıldığı, temsillerin görselleştirildiği ve gerçekleştirilen eylemlerin gerekçelendirilerek üç dikey düzlemde eylemlerin ortaya koyulduğu görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.128'de sunulmuştur.

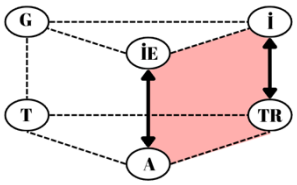


Şekil 4.128: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışmaları – 2 – Mostar görevi

GeoGebra dinamik çalışma sayfasında belirlenen referans nesnenin, nokta ve doğru parçası oluşturma araçları kullanılarak bir doğru parçası ile temsil edilmesi, artefaktın amaca yönelik biçimde işlevsel olarak kullanıldığını göstermekte ve bu durum enstrümantal oluşumun gerçekleştiği şeklinde değerlendirilmektedir. Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşamdaki karşılığını belirlemek üzere Grup 7 öğretmen adaylarının benzerlik oranı kavramından yararlanarak gerçekleştirecekleri işlemleri ilgili kavramsal özellikler doğrultusunda gerekçelendirmesi, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiğini ortaya koymaktadır.

Bu doğrultuda, matematiksel modelin çözüm sürecinde gerekli verilerin elde edilmesine yönelik inşaların yapılması, kavramsal bilgilerin kullanımına dayalı gerekçelendirmelerle

desteklenmiş ve süreç [Ens-Söy] dikey düzleminde tamamlanmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramları Şekil 4.129'da sunulmuştur.

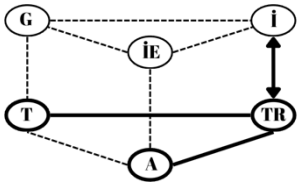


Şekil 4.129: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışmaları – 3 – Mostar görevi

4.3.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanması sırasında, *'Bu sonuç biraz imkânsız gibi, futbol sahası neredeyse 7 -8 dönüm.'* ifadesiyle elde edilen sonucun oldukça büyük olduğu belirtilmiştir. Sonucun doğruluğunu sorgulamak amacıyla internette araştırma yapılırken, matematiksel işlemler sırasında bir hata yapılmış olabileceğini düşünen Grup 7 öğretmen adayları, oran-orantı kavramının daha dikkatli kullanılması gerektiğini ifade ederek matematiksel olarak çalışma aşamasına geri dönmüştür.

Grup 7 öğretmen adaylarının elde edilen matematiksel sonucu, alanı bilinen bir futbol sahası ile karşılaştırdıkları görülmüştür. Bu karşılaştırma sırasında, futbol sahasının alanı arazi ölçme birimi cinsinden temsil edilmiştir. Sonucun doğruluğunu araştırmak amacıyla gerçekleştirilen internet araştırmasında dijital artefaktlardan faydalanılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, benzerlik oranının kullanımında daha dikkatli olunması gerektiği vurgulanarak oran kavramına ilişkin teorik referanslardan yararlanılmıştır. Bu süreçte, verilerin karşılaştırılmasıyla yürütülen akıl yürütme söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, söylemsel oluşumun epistemolojik düzlemin artefakt ve temsil bileşenleri ile desteklendiği görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.130'da sunulmuştur.



Şekil 4.130: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi

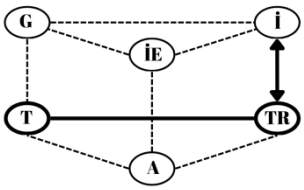
4.3.3.5 Yenilenen Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Matematiksel olarak çalışma aşamasına dönen Grup 7 öğretmen adayları, oluşturulan modelin çözümüne yönelik matematiksel işlemleri dikkatli bir şekilde gerekçelendirerek yeniden gerçekleştirmiştir. Gerçekleştirilen işlemler sırasında yaşanan diyalog şu şekildedir:

ÖA26: İnsanın boyu fotoğrafta 0,66.
ÖA27: O zaman bir orantı kurmamız lazım?
ÖA26: İşte bir birim karelik alanı bulmamız lazım. Yani bir metrekareyi. Ama bir metre kare olarak düşünürsek az önce yaptığımız gibi olur, o da çok çıkıyor.
ÖA25: Şimdi bizim bu adamın boyu 1,50 metre. O zaman 1,50 x 1,50 = 2,25 metrekare, yani 22500 santimetrekare. Zaten adamın fotoğraftaki boyu 0,66 değil miydi? 0,66 x 0,66 = 0,43 birim kare. Yani bu kadar birim kare gerçek hayatta 22500 santimetrekareye karşılık geliyor.
ÖA26: Şimdi o zaman bölgenin alanı olan 37,2'yi buna böleceğiz. 0,44'e yani.
ÖA27: 86,5 çıkıyor.
ÖA26: Tamam, bunu da 2,25'le çarpalım şimdi. Alan 194,65 oldu.
ÖA25: Tamam işte mantık bu. Doğru orantı kurduk. Bence yaklaşık sonuç bulduk. Fotoğraftaki birim kareyi gerçektekine çevirdik.

Grup 7 öğretmen adaylarının matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği işlemlerin ardından farklı bir sonuç elde edilmiş olduğu görülmektedir. Yapılan işlemler sırasında referans nesnenin uzunluğu kullanılarak bir kenarı bu uzunluğa eşit olan bir karenin alanı hesaplanmıştır. Aynı işlem referans nesnenin gerçek yaşamdaki uzunluğu kullanılarak tekrarlanmıştır. Elde edilen veriler ile doğru orantı kullanılarak alanı hesaplanması istenen bölgenin gerçek yaşamdaki karşılığı bulunmuştur.

Matematiksel olarak çalışma aşamasına geri dönülerek gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının orantı ve alan kavramlarına ilişkin özelliklerden yararlanarak çözüm sürecini sürdürdükleri görülmektedir. Bu süreçte gerçekleştirilen matematiksel işlemlerde uzunluk ve alan ölçme birimlerine ait sembolik temsillerin uygun şekilde ve anlamlı bir biçimde kullanıldığı dikkat çekmektedir. Ayrıca, yürütülen matematiksel işlemlerin gerekçelendirilerek sunulması, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere yönelik MÇA diyagramı Şekil 4.131'de sunulmuştur.

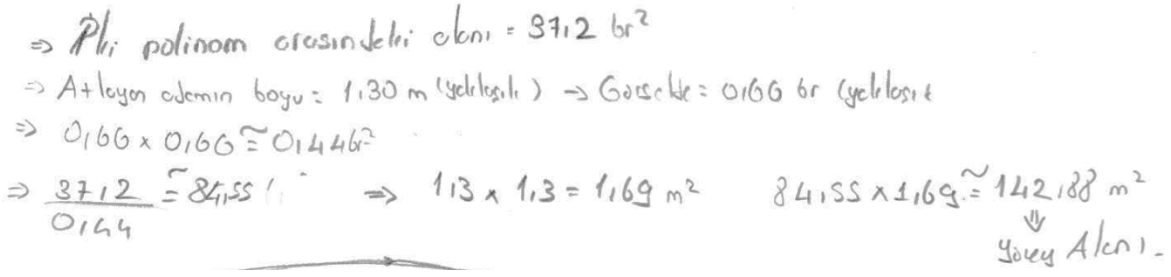


Şekil 4.131: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki ikinci matematiksel çalışması – Mostar görevi

Matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yeniden yorumlanması sürecinde, Grup 7 öğretmen adayları fotoğrafın perspektif içermesinden dolayı oluşturulan matematiksel modelde fazladan bir alanın hesaplanmış olabileceğini ifade etmiştir. Bununla birlikte, bu fazlalığın ihmal edilebilecek düzeyde küçük olduğu ifade edilmiştir. Matematiksel sonucun doğrulanması sürecinde ise, referans nesne olarak kullanılan bireyin gerçek yaşamdaki uzunluğuna dair yeniden yapılan değerlendirmede, dizini bükmüş şekilde duran insanın kaval kemiği uzunluğunun 30 santimetreden fazla olabileceği, dolayısıyla bireyin boyunun 150 cm yerine 130 cm olarak kabul edilmesinin daha uygun olabileceği ileri sürülmüştür. Bu bağlamda gerçekleştirilen diyalog şu şekildedir:

ÖA26: Çizdiğimiz şekilde fazlalık olarak hesapladığımız bölgeler var. Ama fotoğraftan kaynaklı bir durum bu.
ÖA25: Sonuca baktığımızda sadece adamın boyunu biraz fazla almış olabiliriz. Kaval kemiği daha uzun olur 1,80 metre olan insanın. 150 santimetre yerine 130 santimetre alabilirdik.
ÖA26: Tamam o zaman. 130 santimetre olarak hesaplayalım o zaman bir de.

Referans nesnenin uzunluğunun 150 santimetre yerine 130 santimetre olarak ele alınması durumunda elde edilecek matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamına daha uygun olabileceği öngörülmüş, bu doğrultuda yapılan işlemler sonucunda yaklaşık 143 metrekarelik bir alan hesabına ulaşılmıştır. Gerçekleştirilen matematiksel işlemleri içeren çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.132'de sunulmuştur.

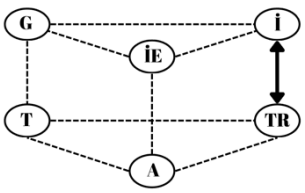


Şekil 4.132: Grup 7'nin matematiksel işlemlerini içeren çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi

4.3.3.6 Yenilenen Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Matematiksel olarak çalışma aşamasının tekrarlanmasının ardından elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlamasına yönelik gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, fotoğrafın perspektif durumu içermesi nedeniyle inşa edilen geometrik nesnelerin gerçeğe yakın bir değeri temsil ettiği, dolayısıyla hesaplanan sonucun kesin bir değer olmadığı yönünde ifadelerin ortaya konduğu görülmüştür. Aynı zamanda, referans nesne olarak seçilen insan figürünün uzunluğunun tahmini bir değere dayandığı, bu nedenle ulaşılan sonucun gerçek değerden bir miktar sapabileceği vurgulanmıştır. Bu bağlamda, referans nesnenin uzunluğu farklı biçimlerde ele alınarak alternatif matematiksel işlemler gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Referans nesnenin gerçek yaşamdaki uzunluğunda meydana gelen küçük bir değişikliğin, ulaşılan matematiksel sonucu anlamlı düzeyde etkilediğinin ifade edilmesiyle birlikte matematiksel çalışma sonlandırılmıştır.

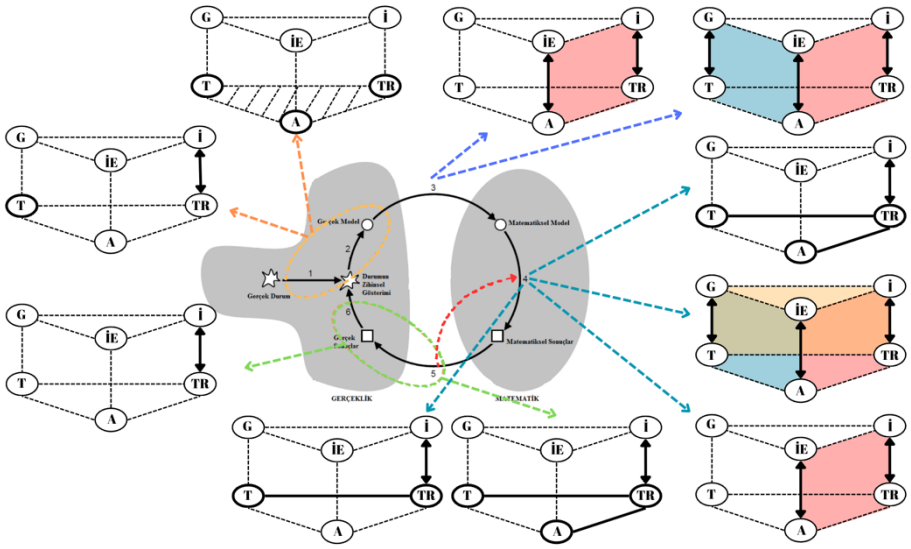
Gerçekleştirilen bu eylemler, Grup 7 öğretmen adaylarının yorumlama ve doğrulama aşamasında fotoğrafın perspektif özelliğini fark ettiklerini ve olası farklı senaryoları dikkate alarak alternatif sonuçlar elde ettiklerini göstermektedir. Bu süreçte elde edilen sonuçlara ilişkin yapılan karşılaştırmalar ve sunulan gerekçeler doğrultusunda, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.133'te sunulmuştur.



Şekil 4.133: Grup 7'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki ikinci matematiksel çalışması – Mostar görevi

4.3.3.7 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 7 öğretmen adaylarının Mostar görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.134'te sunulmuştur.



Şekil 4.134: Grup 7'nin Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 7'nin Mostar görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında temsillerin kullanılması ve akıl yürütmeye dayalı süreçlerin işe koşulmasıyla başlamıştır. Bu süreçte, epistemolojik düzlem bileşenlerinden yararlanılarak gerçekleştirilen eylemlerin, problem durumunun tanımlanmasına ve doğasının keşfedilmesine yönelik olduğu görülmektedir. Devamında, matematikselleştirme aşamasının iki farklı eylem üzerinden yürütüldüğü belirlenmiştir. Bu aşama, matematiksel gerekçelendirmelere dayalı olarak gerçekleştirilen inşa süreçleriyle başlamış; problem durumunun matematiksel olarak ifade edilmesi ve görselleştirilmesi amacıyla yapılan eylemler, dijital artefaktların kullanılmasıyla somutlaştırılmıştır. Artefaktların kullanımıyla gerçekleştirilen inşa süreçleri, aynı zamanda ilgili matematiksel kavramların özelliklerine dayalı gerekçelendirmelerle desteklenmiştir. Bu bağlamda, oluşturulan matematiksel modelin epistemolojik düzlem bileşenleri arasında kurulan etkileşimlerle şekillendiği söylenebilir.

Matematiksel modelin çözümüne yönelik yürütülen matematiksel olarak çalışma aşamasının üç farklı eylem doğrultusunda gerçekleştirildiği görülmektedir. İlk olarak, temsil ve artefakt bileşenlerinin deneme-yanılma stratejisinin uygulanmasında kullanılmasıyla söylemsel oluşum süreci başlatılmıştır. Bunu takiben, farklı oluşum süreçlerinin birbiriyle etkileşime girmesi sonucunda yorun bir matematiksel çalışma yürütülmüş ve tüm düzlemlerin ortaya koyulduğu eylemler gerçekleştirilmiştir. Sürecin son aşamasında ise, gerçekleştirilen inşa etme eylemleri matematiksel gerekçelendirmelerle desteklenmiş ve bu sayede matematiksel olarak çalışma aşaması tamamlanmıştır.

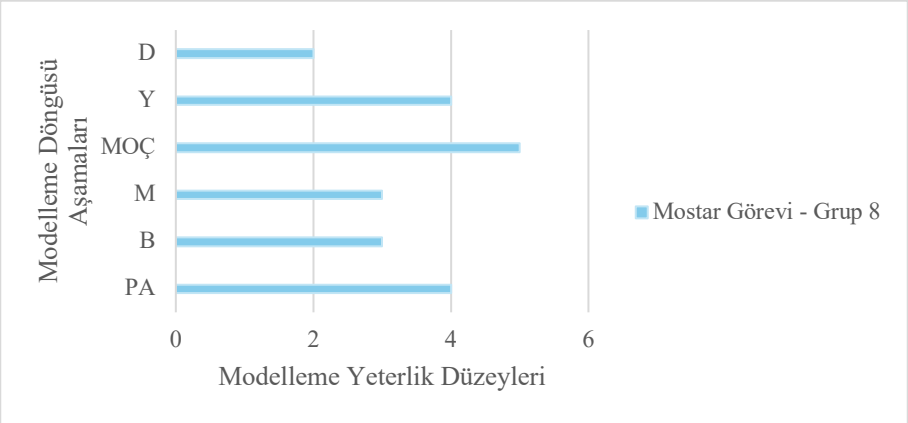
Elde edilen matematiksel sonucun yorumlanması ve doğrulanması sürecinde, temsil ve artefaktlardan yararlanılarak bir akıl yürütme süreci gerçekleştirilmiş; olası hata durumları göz önünde bulundurularak yeniden matematiksel olarak çalışma aşamasına dönülmüştür. Yapılan gözden geçirme sürecinde, problem durumuna ait temsillerin özellikleri dikkate alınarak gerçekleştirilen akıl yürütme ve gerekçelendirmeler sonucunda yeni bir matematiksel sonuca ulaşılmıştır. Bu sonuç, referans nesnenin özellikleri doğrultusunda gerekçelendirilmiş ve söylemsel oluşum çerçevesinde yorumlanmıştır. Bu bağlamda, Grup 7'nin elde ettiği matematiksel sonucu yorumlayarak çözümün geçerliliğini test ettiği söylenebilir.

Grup 7'nin matematiksel çalışması incelendiğinde, modelleme döngüsünün tüm aşamalarında çeşitli eylemlerin gerçekleştirilmesinin yanı sıra, tespit edilen hataların giderilmesi için çözümün yeniden yapılandırıldığı eylemler aracılığıyla matematiksel modelleme döngüsünün esnek yapısının ortaya konduğu görülmektedir. Bu bağlamda, yorumlama ve doğrulama aşamalarında eleştirel bir yaklaşımla gerçekleştirilen eylemler, Grup 7'nin matematiksel görevi çözerken yalnızca işlemsel adımlara odaklanmadığını; aynı zamanda düşünen, sorgulayan ve yansıtan bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir. Süreç boyunca farklı MÇA bileşenlerinin kullanılması, oluşum süreçlerinin gerçekleştirilmesi ve dikey düzlemlerde çok yönlü eylemlerin ortaya konması, Grup 7'nin düşünce üretme, anlamlandırma ve gerekçelendirme gibi bilişsel süreçlerde esnek ve bütüncül bir yaklaşım benimsediğini ortaya koymaktadır.

4.3.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Mostar Görevi

Grup 8'in Mostar görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği görülmüştür. Bununla birlikte, problemin çözümünde kullanılacak olan verilerin belirlenmesi sürecinde bazı önemsiz hatalar yapılmış olsa da bu veriler arasında ilişki kurulabilmesi

nedeniyle problemi anlama aşamasında Düzey 4'te bulunulduğu tespit edilmiştir. Problemin çözümüne yönelik varsayımlar oluşturulurken belirli ölçüde kabul edilebilir ifadeler kullanılması ve bu doğrultuda problem durumunun sadeleştirilmesi nedeniyle basitleştirme aşamasında Düzey 3'te bulunulduğu görülmüştür. Bu varsayımlar doğrultusunda oluşturulan matematiksel modelin genel anlamda uygun olduğu, ancak modelleme sürecinin kurgulanmasında bazı eksiklikler bulunduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle matematikselleştirme aşamasında Düzey 3'te bulunulduğu belirlenmiştir. Öte yandan, oluşturulan modelin çözümüne yönelik işlemlerin doğru ve hatasız biçimde yürütülmüş olması, matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 5'e ulaşıldığını göstermektedir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında değerlendirilmesinde sınırlı bir yorumlama yapılmış olması, yorumlama aşamasında Düzey 4'te bulunulduğu yönünde değerlendirilmiştir. Son olarak, doğrulama sürecinde hataların fark edilmesine karşın düzeltilmemesi, yorumlama aşamasının Düzey 4; doğrulama aşamasının Düzey 2 olarak yorumlanmasına neden olmuştur. Tüm bu değerlendirmeler doğrultusunda Grup 8'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.135'te sunulmuştur.



Şekil 4.135: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Mostar görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri dikkate alındığında, Grup 8'in en yüksek performansı matematiksel olarak çalışma aşamasında gösterdiği görülmektedir. Bununla birlikte hem bu aşamada hem de yorumlama aşamasında belirgin bir gelişim sergiledikleri dikkat çekmektedir. Mostar görevine ilişkin gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 15 puan elde eden Grup 8'in, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 8 öğretmen adaylarının

modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 8 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.3.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

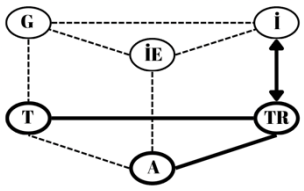
Grup 8'in Mostar probleminin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumunun ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından 10 dakikalık bireysel çalışma ile başlamıştır. Bu aşamada, öğretmen adaylarının hazır oluş sorularına yanıtlar verdiği ve yönlendirilmiş keşif sorularını incelediği görülmüştür. Grup çalışmasına geçilmesinin ardından, problemin doğru şekilde anlaşıldığından emin olmak için yüzey alanı hesaplanacak bölgenin neresi olduğu hakkında tartışılmıştır. Yaşanan tartışma aşağıda verilmiştir:

ÖA28: Yüzey alanını bulacağız, yani köprüyü gördüğümüz yüzeyin alanını hesaplayacağız. Mesela köprünün alt tarafından bir polinom grafiği çizeriz. Üst tarafı da daha az eğik olduğu için ona göre bir polinom çizeriz. İki polinom arasındaki alandan direkt buluruz sonucu.
ÖA29: O zaman GeoGebra'dan yaparız.
ÖA30: Şeklin tamamını bir dörtgen gibi düşünsek, kemerin olduğu yere de bir dairenin yarısı desek. İkisi arası farktan da çözümü bulabiliriz.
ÖA28: Olur ama iki polinom arasındaki alandan daha kolay olur bence.
ÖA29: Daha basit düşünebiliriz bence
ÖA28: İki polinom arasındaki alanı hesaplamak daha kolay olacak, hemen GeoGebra'dan hesaplayacağız. Onun hesaplama komutu vardı. İntegral komutunu yazınca hemen hesaplayacağız.
ÖA29: Dikdörtgen, üçgen gibi geometrik şekil pek yok zaten soruda. Yani iki polinom arasındaki alandan bulmak mantıklı.

Grup 8 öğretmen adayları arasında gerçekleştirilen tartışmalar doğrultusunda, problem durumunun anlaşıldığı ve çözüm sürecine ilişkin planların geliştirildiği görülmüştür. Özellikle köprünün görünen yüzey alanının hesaplanmasına yönelik çözüm önerileri geliştirilirken, problemin çözümünde kullanılacak verilerin doğrudan verilmemesi, gerekli verilerin dış kaynaklardan elde etmeye yöneltmiştir. Bu amaçla, Mostar köprüsünün uzunluğuna dair bilgilere internet üzerinden ulaşılabileceği ifade edilmiştir. Böylece, fotoğrafta yer alan insan

figürünü referans alarak bir oran kurma stratejisi benimsemiştir. Bu strateji kapsamında, gerçek yaşamdaki insan uzunluğu ile fotoğraftaki temsili uzunluk arasında orantısal bir ilişki kurularak diğer uzunlukların belirlenebileceği ifade edilmiştir. Öğretmen adayları, bu plan doğrultusunda internetten bulunan köprü görselini GeoGebra dinamik geometri yazılımına sürükleyerek aktarmış; bu eylemle birlikte problemin anlaşılması ve basitleştirme aşamasını tamamlamıştır

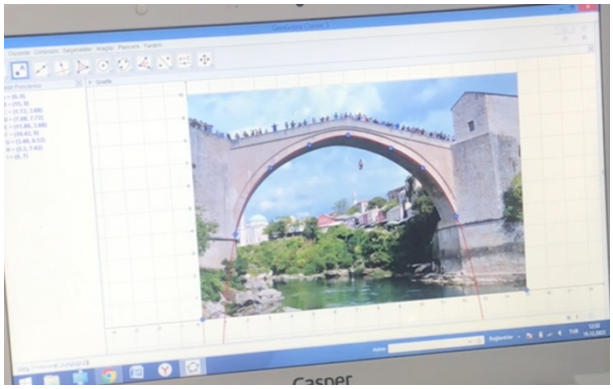
Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesi aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının, hesaplanacak bölgenin polinom grafikleri ile temsil edilerek bu grafikler arasında kalan alanın hesaplanabileceğini ifade ettikleri görülmüştür. Polinom grafiklerinin oluşturulmasında dijital artefaktlardan olan GeoGebra dinamik geometri yazılımını kullanmayı ve Mostar köprüsüne ait bilgileri internetten araştırmayı düşünen Grup 8, fotoğraftan elde edilecek verilerin gerçek yaşamdaki karşılığını belirlemek için referans nesne üzerinden oran kurmaya karar vermiştir. Gerçekleştirilen eylemlerde epistemolojik düzlemin artefakt ve temsil bileşeninin kullanılarak problemin çözülmesine yönelik ortaya koyulan akıl yürütme süreci ile söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.136'da sunulmuştur.



Şekil 4.136: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi

4.3.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problem durumunun anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 8 öğretmen adayları, problemi matematikselleştirmek amacıyla, GeoGebra dinamik geometri yazılımını kullanarak bir polinom oluşturmayı denemiştir. Bu doğrultuda, polinomun geçmesi istenen beş nokta, nokta oluşturma aracı kullanılarak belirlenmiştir. Ardından, 'polinom' komutu kullanılarak bu noktalar sırayla girilmiş ve beş noktadan geçen bir polinom grafiği oluşturulmuştur. Polinomun oluşturulmasının ardından, köprünün kemerini daha doğru temsil edebilmek amacıyla daha fazla nokta belirlenmesi gerektiği düşünülmüş ve önceki işlemler geri alınarak bu kez yedi noktadan geçen yeni bir polinom inşa edilmiştir. İnşa edilen polinoma ilişkin görsel Şekil 4.137'de sunulmuştur.

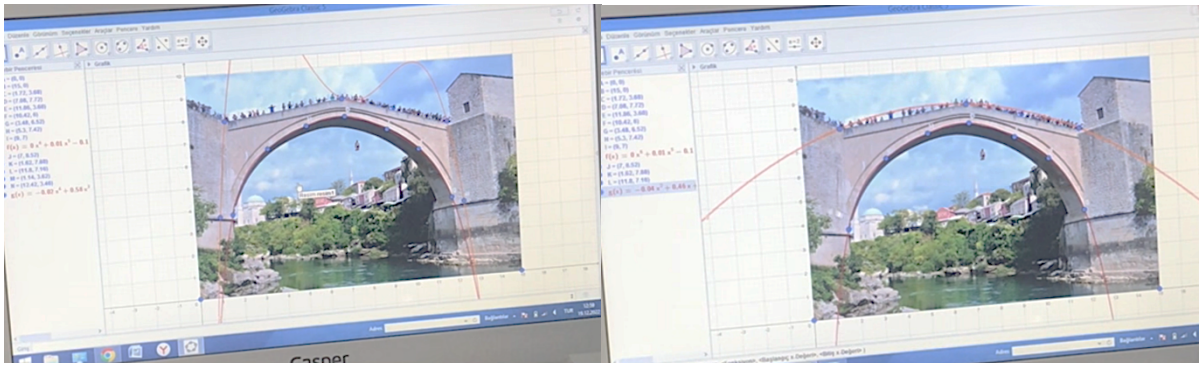


Şekil 4.137: Grup 8'in nokta aracını ve polinom oluşturma aracını kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi

Köprünün kemerini temsil eden polinomun oluşturulmasının ardından, köprünün üst sınırlarının da bir polinom aracılığıyla modellenebileceği ifade edilmiştir. Grup 8 öğretmen adayları, polinomun geçeceği noktaların daha sık aralıklarla belirlenmesi durumunda daha isabetli bir sonuç elde edebileceklerini düşünmüştür. Bu doğrultuda, nokta oluşturma aracı kullanılarak köprünün üst ve yan sınırları boyunca çok sayıda nokta belirlenmiştir. Ancak, bu noktalar kullanılarak 'polinom' komutu ile oluşturulan grafiğin istenilen matematiksel temsili sağlamadığı fark edilmiştir. Gerçekleştirilen çeşitli denemelerin ardından, köprünün üst sınırlarının kemer kadar eğimli olmadığı göz önünde bulundurularak daha az sayıda nokta belirlenmesi gerektiğine karar verilmiştir. Bu doğrultuda, köprünün üst sınırları üzerinde üç nokta işaretlenmiş ve bu üç noktadan geçen bir polinom grafiği inşa edilmiştir. Gerçekleştirilen eylemler sonucunda elde edilen polinomlara ilişkin görsel Şekil 4.138'de sunulmuştur. Ayrıca, bu süreçte öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA28: Bu sefer daha sık yapalım noktaları, daha net bir sonuca ulaşalım.
ÖA31: Aklıma bir şey geldi. Şimdi bu alanını hesaplamayı istediğimiz bölgeye bir sürü nokta eklesek. Acaba o polinomu çizer mi?
ÖA29: Deneyelim. Umarım çizer.
ÖA30: O zaman polinom olmaz sanki. Çünkü x ekseninde bir sürü nokta aynı doğrultuda gidiyor gibi oldu. Deneyelim bakalım.
ÖA31: Nokta listesini yazıyorum yine. Bana sırayla söyler misiniz?
ÖA28: Neden olmadı?
ÖA31: Çok dalgalı oldu bu grafik. Noktalar çok sık olduğu için.

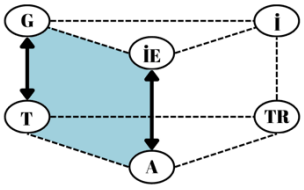
ÖA30: Bence x ekseninde aynı doğrultuda birçok nokta koyduğumuz için olmadı, noktaların yatayda ilerlemesi daha iyi bizim için. Çünkü üst taraf o kadar eğimli değil.
ÖA28: O zaman az nokta koyalım, sadece üst taraftan geçsin. Yani yan tarafları sınırlamasın çizdiğimiz polinom. Dört ya da beş nokta yapalım en fazla.
ÖA31: Bir ortasına birer tane de köşesine yapıyorum, yeter bence.



Şekil 4.138: Grup 8'in polinom komutunu uygulayarak oluşturduğu polinom grafikleri – Mostar görevi

Grup 8 öğretmen adaylarının köprüyü temsil eden polinom grafiklerini oluşturmasının ardından, iki grafik arasında kalan bölgenin alanının hesaplanması gerektiği ifade edilmiştir. Ancak, problem durumuna uygun biçimde köprünün yan duvarlarının bu hesaba dahil edilmemesi gerektiği belirtilmiştir. İki fonksiyon grafiği arasında kalan alanın belirli integral yöntemiyle hesaplanabileceğinin dile getirilmesiyle problem durumunun matematikselleştirilmesi tamamlanmıştır.

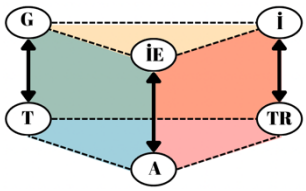
Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla nokta oluşturma ve 'polinom' komutlarını kullanarak köprünün kemerini temsil eden bir polinom grafiği inşa ettikleri görülmektedir. Bu süreçte probleme yönelik gerçekleştirilen inşa eylemleri, enstrümantal oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, polinom grafiği aracılığıyla köprünün kemerinin görselleştirilmesi, semiyotik oluşumun da ortaya koyulduğu yönünde değerlendirilmiştir. Bu doğrultuda, matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemlerin, matematiksel temsillerin görselleştirilmesine ve probleme ilişkin bir modelin oluşturulmasına yönelik olarak [Sem-Ens] dikey düzleminde başladığı söylenebilir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.139'da sunulmuştur.



Şekil 4.139: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Grup 8'in problemin çözümüne yönelik olarak oluşturduğu polinom grafiğinin ardından, benzer şekilde köprünün üst sınırını temsil edecek farklı bir polinom grafiği de oluşturulabileceği ifade edilmiştir. Bu grafiğin daha doğru biçimde inşa edilebilmesi amacıyla daha fazla nokta belirlenmesinin yararlı olacağı düşünülmüş, ancak bu doğrultuda gerçekleştirilen ilk denemelerde problemin çözümüne uygun bir grafik elde edilememiştir. Buna rağmen, GeoGebra dinamik geometri yazılımının nokta oluşturma aracı ve 'polinom' komutunun kullanılmasıyla yapılan deneme-yanılma süreci sonucunda istenilen grafik başarıyla oluşturulmuş ve böylece enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği görülmüştür.

İki polinom grafiği arasında kalan bölgenin köprünün yan duvarlarıyla sınırlandırılacağı ve bu bölgenin alanının belirli integral yardımıyla hesaplanabileceği yönündeki ifadelerle problem durumunun matematikselleştirdiği söylenebilir. Bu süreçte oluşturulan polinom grafiklerinin problem durumunu temsil etmesi, Grup 8'in semiyotik oluşumu gerçekleştirdiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, problemin matematikselleştirilmesi sürecinde yapılan eylemlerin grup tartışmaları eşliğinde gerekçelendirilmesi, söylemsel oluşumun da gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Sonuç olarak, problemin matematikselleştirilmesine yönelik yürütülen matematiksel çalışmanın; verilerin elde edilmesine yönelik inşa süreçleri, grup tartışmaları yoluyla yapılan gerekçelendirmeler ve matematiksel temsillerin görselleştirilmesi yoluyla üç dikey düzlemde gerçekleştirilen eylemler ile tamamlandığı görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.140'ta sunulmuştur.

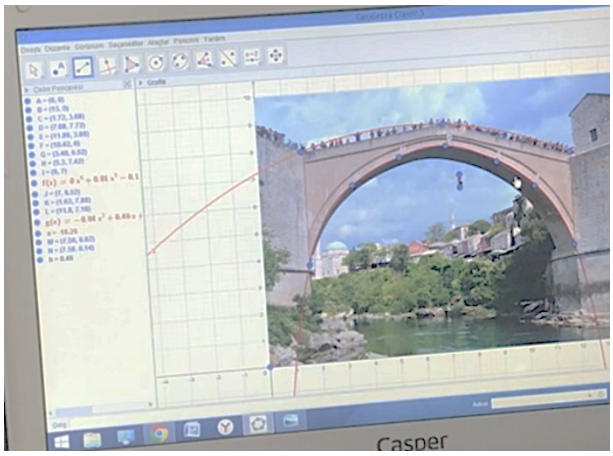


Şekil 4.140: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi

4.3.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Grup 8 öğretmen adayları, oluşturdukları matematiksel modelin çözümünde hangi integral türünün kullanılması gerektiğini tartışmıştır. Köprünün yüzey alanı hesaplanırken yan duvarların hesaba katılmayacağı göz önünde bulundurularak, iki grafik arasında kalan bölgenin duvarlarla sınırlandırılması gerektiği ifade edilmiş ve belirli integral kullanılmasına karar verilmiştir. Duvarların x eksenindeki koordinatlarını belirlemek amacıyla, polinom grafiği ile duvarın kesişim noktalarından yararlanılmıştır.

İki polinom grafiği ve bu grafiklerin sınırladığı bölgenin alanını hesaplamak amacıyla GeoGebra'nın giriş bölümüne 'integral' yazılmış ve açılan komut seçeneklerinden 'integralarasında' komutu tercih edilmiştir. Bu komutun belirli integral hesaplamalarında kullanılabileceği ifade edilmiştir. Komutun uygulanabilmesi için yönerge kısmının doldurulması gerekmiş, bu doğrultuda grafiklere karşılık gelen fonksiyon isimleri cebir penceresinden belirlenmiştir. Fonksiyon isimleri ile birlikte alanı sınırlayan x ekseni üzerindeki koordinatlar komuta yazılarak bölgenin alanı hesaplanmıştır (Şekil 4.141).



Şekil 4.141: Grup 8'in belirli integral komutunu kullanmasına ilişkin görsel – Mostar görevi

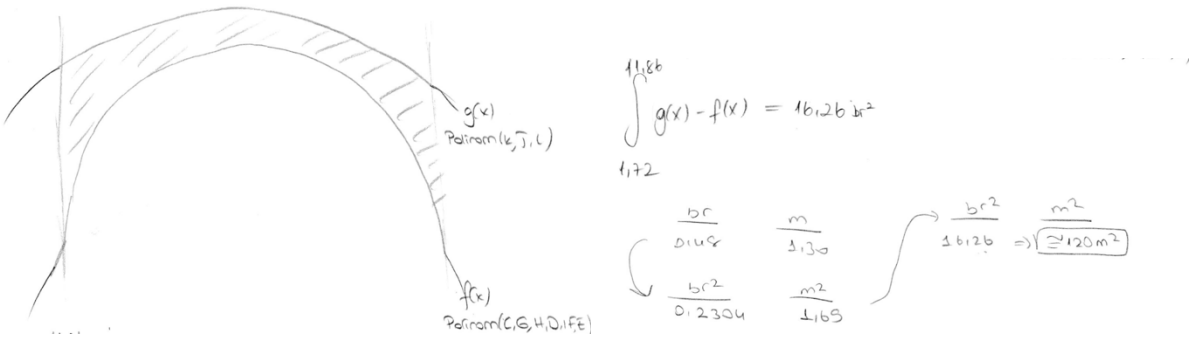
Grup 8 öğretmen adaylarının 'integralarasında' komutunu kullanmasıyla birlikte, iki grafik arasında sınırlandırılan bölgenin alanı cebir penceresinde 16,26 birim kare olarak görüntülenmiştir. Elde edilen bu sonucun birim kare cinsinden ifade edildiği, ancak gerçek yaşam bağlamında değerlendirilmesi için metrekare cinsine dönüştürülmesi gerektiği belirtilmiştir. Bu bağlamda, eşlik-benzerlik ve oran kavramı arasındaki ilişki sorgulanmaya başlanmıştır. Bu noktada yaşanan diyalog şu şekildedir:

ÖA30: Alanımız 16,26 çıktı. Ama bu alan birim kare cinsinden. Bize metrekare lazım.
ÖA31: Biz yine insanın boyunu referans olarak alsak. Uzunluk biriminden alan birimine geçişte benzerlik oranının karesini alıyorduk sanırım.
ÖA30: Gerçekte bir metrekare ne olacak diye düşünmemiz lazım.
ÖA31: Doğru hatırlıyorum değil mi?
ÖA30: Evet, uzunlukların oranının karesi, alanların oranına eşit olur.
ÖA31: O zaman fotoğraftaki uzunluğu gerçek uzunluğuna oranlayıp benzerlik oranı bulup karesini almamız lazım. Fotoğraftaki alan ile benzerlik oranının karesi ile çarparsak gerçek sonucu buluruz.

Referans nesnenin fotoğraftaki uzunluğunun belirlenebilmesi amacıyla, GeoGebra dinamik geometri yazılımında yer alan doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak ilgili referans nesneyi temsil eden bir doğru parçası inşa edilmiştir. Oluşturulan bu doğru parçasının uzunluğu cebir penceresi aracılığıyla ölçülmüştür. Referans nesnenin gerçek yaşamdaki uzunluğuna ilişkin yapılan değerlendirmede, ortalama bir insan boyunun 180 santimetre olduğu, ancak bireyin bacaklarını katlamasından dolayı bu uzunluğun yaklaşık 130 santimetre olarak kabul edilmesi gerektiği ifade edilmiştir. Fotoğraftan elde edilen uzunluk ile gerçek uzunluk arasındaki oranın belirlenmesiyle bir orantı sabiti oluşturulmuştur. Bu orantı sabitine dayanarak ÖA31. Tarafından yapılan işlemler sonucunda ulaşılan sonucun hatalı olduğu düşünülerek, Grup 8 öğretmen öğreten adayları matematiksel işlemleri yeniden gerçekleştirmiştir. Bu süreçte aşağıdaki diyalog yaşanmıştır.

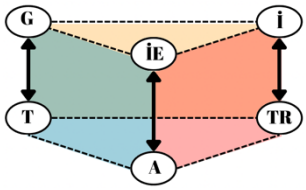
ÖA29: Birimden metreye geçmeye çalıştığımız için mi hata oldu?
ÖA31: GeoGebra'daki alan birim kare ve biz metrekareye gideceğiz. Bizim çok büyük bir şey bulmamız gerekiyor.
ÖA29: Bunun bir uzunluğunu bulsak birim kare ya.
ÖA30: 0,48 olan şu an birim cinsinden. Biz bu uzunluğu metre olarak insan boyu olduğundan 1,30 metre dedik. Şimdi biz 16,26 birim kareyi metrekareye çevireceğiz. O yüzden biz adamın uzunluğu ile bir kare oluşturduğumuzu düşünelim. 0,48'in karesini alalım. Bir de gerçek yaşamdaki karşılığını bulalım 1,30'un karesini alarak. Bu sefer orantı sabitimiz birim kare ile metrekare olur. Bir de böyle hesaplayalım. (...) Bu şekilde bir doğru orantı yaparsak sonuç yaklaşık 120 metrekare çıkıyor. Mantıklı mı bu sonuç sizce?

Yaşanan diyalogda, Grup 8 öğretmen adaylarının gözden geçirdiği matematiksel işlemleri gerekçelendirerek tekrarladığı ve matematiksel sonuca ulaşıldığı görülmektedir. Böylece matematiksel olarak çalışma aşaması tamamlanmıştır. Gerçekleştirilen matematiksel işlemlere ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.142'de sunulmuştur.



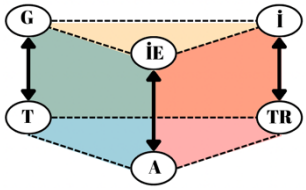
Şekil 4.142: Grup 8'in matematiksel işlemlerine ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Mostar görevi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak, matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, grafikler ile duvarlar tarafından sınırlandırılan bölgenin alanının hesaplanması gerektiği ve bu hesaplamada belirli integralin kullanılmasının uygun olacağı ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, integral kavramına ilişkin teorik referanslardan yararlanıldığı görülmüştür. Gerçekleştirilen matematiksel işlemlerin yer aldığı çalışma yaprağında, belirli integrale ilişkin sembolik temsillerin uygun biçimde kullanıldığı görülmektedir. Alanın hesaplanması sürecinde, dijital artefaktlardan olan GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılmış; uygun integral komutu ile birlikte cebir penceresi yardımıyla gerekli veriler belirlenerek işlem gerçekleştirilmiştir. Bu eylemler, Grup 8 öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumu gerçekleştirdiğini göstermektedir. Komutun uygulanmasıyla birlikte belirlenen bölgenin alanın GeoGebra çalışma sayfasında farklı bir renkle görselleştirilmiş ve bu sayede semiyotik oluşum gerçekleştirilmiştir. Cebir penceresinde birim kare cinsinden ifade edilen bu alanın, problemin bağlamına uygun biçimde metrekare cinsine dönüştürülmesi gerektiği belirtilmiş; bu doğrultuda gerçekleştirilen grup tartışmasında eşlik-benzerlik ve oran kavramlarına dayalı işlemler planlanarak söylemsel oluşum ortaya konmuştur. Tüm bu eylemlerin, üç dikey düzlem üzerinde gerçekleştirildiği görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.143'te sunulmuştur.



Şekil 4.143: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Mostar görevi

Yapılan planın uygulanması sürecinde, GeoGebra dinamik çalışma sayfasında referans nesneyi temsil eden doğru parçasının doğru parçası oluşturma aracı kullanılarak inşa edilmesi ve uzunluk ölçüsünün cebir penceresi kullanılarak belirlenmesi, uygun artefaktların amaca yönelik kullanılmasına örnek teşkil etmekte ve bu doğrultuda matematiksel çalışma sırasında enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Doğru parçasının uzunluğunun gerçek yaşamdaki karşılığıyla ilişkilendirilmesinde oran kavramından yararlanıldığı, matematiksel işlemler sırasında ise birim kare ve metrekare gibi ölçü birimlerinin uygun temsillerle kullanıldığı görülmüştür. Bu işlemler sırasında gerçekleştirilen grup tartışmasında, oran kavramına ve alan ölçme birimleri arasındaki dönüşüme ilişkin özelliklerden yararlanılarak gerekçelendirme yapılması, söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Ayrıca, çalışma yaprağında yer verilen polinomlara ait sembolik temsiller ve grafikler aracılığıyla, matematiksel çalışmanın problemin çözümüne yönelik olarak görselleştirildiği ve bu sayede semiyotik oluşumun da gerçekleştirildiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Grup 8 tarafından yürütülen bu süreçte gerçekleştirilen eylemlerin üç dikey düzlemde ortaya konduğu anlaşılmaktadır. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramları Şekil 4.144'te sunulmuştur.



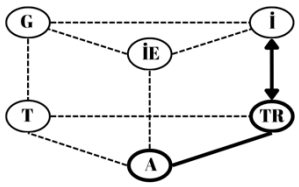
Şekil 4.144: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Mostar görevi

4.3.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında incelenmesi amacıyla, bu sonuçların internetten bulunan verilerle karşılaştırılması düşünülmüştür. Bu doğrultuda, Mostar Köprüsü'ne ait bilgilere ulaşmak için internet araştırması yapılmıştır. Ayrıca, oluşturulan

matematiksel modelin incelenmesi sırasında, köprünün üst sınırlarını temsil eden polinom grafiğinin çizimi sırasında istenilen bölgeden daha geniş bir alanın hesaba katıldığı fark edilmiştir. Buna rağmen ulaşılan matematiksel sonucun, diğer grupların elde ettiği sonuçlardan düşük olmasının nedeni olarak, referans nesnenin gerçek yaşamdaki uzunluğunun normalden kısa kabul edilmiş olabileceği ifade edilmiştir. Gerçekleştirilen matematiksel işlemlerin olası bir hata içerip içermediğine ilişkin yapılan incelemeyle Grup 8'in matematiksel çalışması tamamlanmıştır.

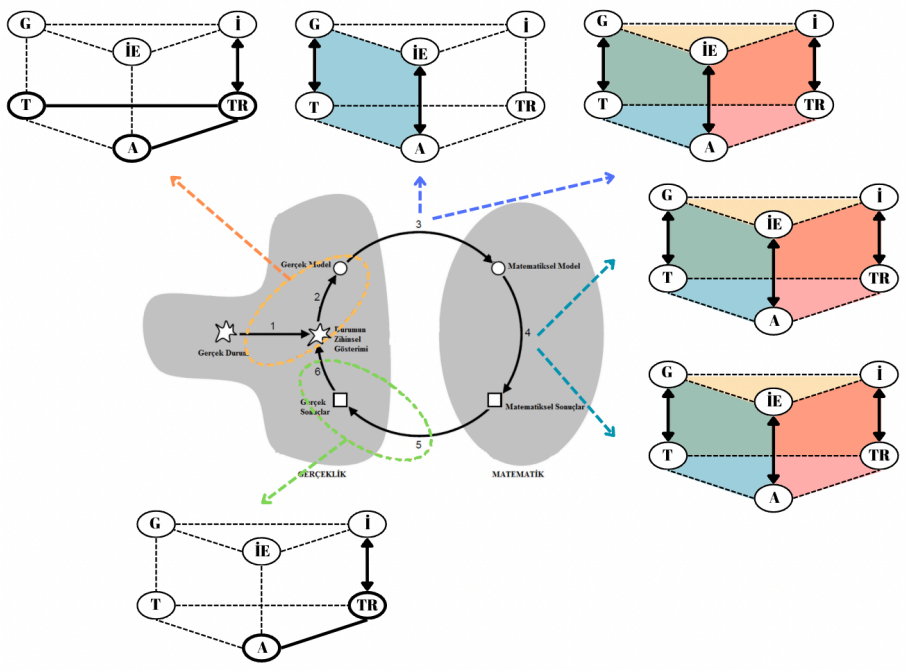
Gerçek yaşam bağlamında sonucun yorumlanması ve doğrulanması sürecinde gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, köprüye ait doğru verilere ulaşmak amacıyla yapılan internet araştırmasının epistemolojik düzlemin artefakt bileşeni kapsamında gerçekleştirildiği görülmüştür. Bununla birlikte, Grup 8 öğretmen adaylarının oluşturdukları matematiksel modeli incelemeleri sonucunda, çizilen polinom grafiğinin gereğinden fazla bir alanı kapsadığını fark etmeleri ve elde edilen matematiksel sonucun, referans nesnenin uzunluğuna ilişkin varsayımlardan kaynaklı olarak diğer gruplardan farklılık gösterebileceğini gerekçelendirmeleri, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiğine işaret etmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.145'te sunulmuştur.



Şekil 4.145: Grup 8'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Mostar görevi

4.3.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 8 öğretmen adaylarının Mostar görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.146'da sunulmuştur.



Şekil 4.146: Grup 8'in Mostar görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanılmasıyla gerçekleştirilen söylemsel oluşum, Grup 8 öğretmen adaylarının problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında kavramsal ve matematiksel bilgilerini kullanarak problem durumunu analiz etmeye ve akıl yürütmeye çalıştıklarını göstermektedir. Bu doğrultuda, problemin matematikselleştirme süreci, öncelikle [Sem-Ens] dikey düzleminde matematiksel temsillerin artefaktlar aracılığıyla inşa edilmesi ve görselleştirilmesiyle başlamış; ardından, matematiksel modelin oluşturulmasına yönelik artefakt kullanımı, temsil geliştirme ve gerekçelendirme eylemlerinin bir arada yürütülmesiyle devam etmiştir. Böylece, gerçekleştirilen inşa sürecinin görselleştirme ve matematiksel gerekçelerle desteklenmesi, oluşturulan matematiksel modelin anlamlandırılarak kurulduğu yönünde yorumlanabilir.

Matematiksel modelin çözümüne yönelik gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, bu sürecin iki temel aşama üzerinden şekillendiği görülmektedir: matematiksel temsillerin görselleştirilmesi ve artefaktların işlevsel biçimde kullanılarak matematiksel inşaların yapılması. Gerçekleştirilen eylemlerin matematiksel temellere dayandırılması, Grup 8 öğretmen adaylarının matematiksel olarak çalışma aşamasında yalnızca çözüm üretmeye değil, aynı zamanda problemi planlayarak ve farklı stratejiler üzerinde düşünerek çözmeye çalıştıklarını ortaya koymaktadır. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanması sürecinde, internet aracılığıyla gerçek verilere ulaşılmaya çalışıldığı

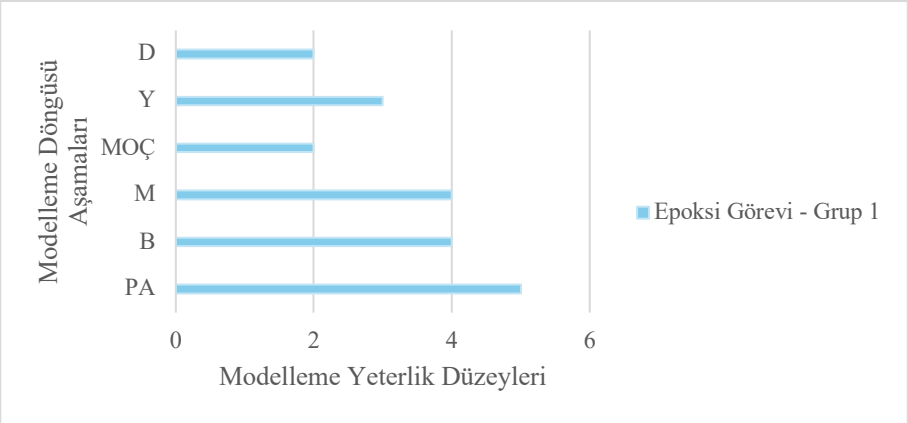
görülmektedir. Bunun yanı sıra, oluşturulan matematiksel modelin bileşenlerinin geçerliliğine ilişkin yapılan tartışmalar, bu aşamada söylemsel oluşumun gerçekleştirildiğini göstermektedir.

Grup 8'in Mostar görevinin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, özelikle matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında, MÇA bileşenlerinin ve oluşum süreçlerinin zengin bir biçimde kullanıldığını ortaya koymaktadır. Bu aşamalarda, artefaktların işlevsel biçimde kullanılmasıyla matematiksel temsillerin hem görselleştirilmesi hem de inşa edilmesi sağlanmış; bununla birlikte, düşüncelerin yapılandırılmasında akıl yürütme süreçleri ve gerekçelendirme eylemleri etkili biçimde ortaya konmuştur. Tüm bu süreçler, Grup 8'in düzlemler arası geçişleri destekleyen esnek bir matematiksel çalışma yürüttüğü şeklinde yorumlanabilir. Modelleme sürecinin başlangıcından sonuna kadar her aşamada gözlemlenen söylemsel oluşum, gerçekleştirilen eylemlerin akıl yürütmeye dayalı olarak ve matematiksel kavramların özellikleri temel alınarak yapılandırıldığını göstermektedir.

4.4 Epoksi Görevi İlişkin Bulgular

4.4.1 Grup 1'in Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi

Grup 1'in Epoksi görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği ve verilenler ile istenenler arasında anlamlı ilişkiler kurulduğu görülmüştür. Bu doğrultuda, problemi anlama aşamasında Düzey 5'te bulunulduğu yönünde değerlendirme yapılmıştır. Problemin çözümünde kullanılacak verilerin belirlenmesiyle ortaya konan gerçekçi varsayımlar doğrultusunda gerçekleştirilen basitleştirme süreci, grubun bu aşamada Düzey 4'te bulunduğunu göstermektedir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, gerçekçi varsayımlara dayalı olarak oluşturulan matematiksel modelin bazı eksiklikler içermesi nedeniyle, matematikselleştirme aşamasında Düzey 4'te bulunulduğu görülmüştür. Bu eksik modelin çözümünde hatalar ve eksikliklerin bulunması ise, grubun matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 2'de yer aldığını ortaya koymaktadır. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında doğru bir şekilde yorumlanması sebebiyle yorumlama aşamasında Düzey 3'te; kısmen uygulanan doğrulama yaklaşımına rağmen belirlenen hataların giderilmemiş olması nedeniyle doğrulama aşamasında Düzey 2'de bulunulduğu yönünde değerlendirme yapılmıştır. Bu doğrultuda Grup 1'in Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.147'de sunulmuştur.



Şekil 4.147: Grup 1'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi

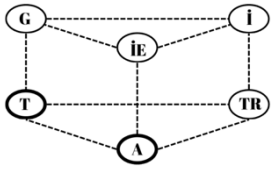
Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri değerlendirildiğinde, Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında en yüksek performansı gösterdiği; buna karşın oluşturulan matematiksel modelin çözüm sürecinde zorlandığı görülmektedir. Epoksi görevine yönelik gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 14 puan elde eden Grup 1'in, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 1 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.4.1.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 1'in Epoksi görevinin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından, 10 dakikalık bireysel çalışma süreciyle başlamıştır. Bireysel çalışma sırasında, öğretmen adaylarının problem durumunu kavramaya yönelik olarak hazır oluş sorularına yanıtlar verdikleri ve yönlendirilmiş keşif sorularını inceledikleri görülmüştür. Grup çalışmasına geçilmesiyle birlikte, problem durumunun daha iyi anlaşılmasına yönelik çabaların sürdüğü; dikdörtgen biçiminde bir masa yüzeyinin kenarlarının sinüs eğrileri doğrultusunda kesilmiş olduğu yönünde bir tanımlamanın yapıldığı gözlemlenmiştir. Problem durumunun doğru şekilde kavranmasına yönelik gerçekleştirilen grup tartışmasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA2: İki eğri arasında kalan yere epoksi maddesi koyacağız.
ÖA1: Sonunda epoksi maddesi kullanılan yüzey alanının değişimine bakacağız, yani epoksi arttıkça ya da masanın boyutları değiştikçe alan nasıl değişecek.
ÖA3: İşte ben onu anlamadım, onu nasıl bulacağız
ÖA2: O zaman mesela bu dikdörtgen kesildi diyelim. Sonra kesildiği yeri GeoGebra'dan değiştirdikçe alan küçülecek, büyüyecek falan
ÖA3: Biz sinüs eğrisini değiştiren bir şey mi yapacağız o zaman? Bunu nasıl yapacağız ki biz?
ÖA2: GeoGebra ile.
ÖA2: Matematiksel araç vardı bir tane GeoGebra'da. Geçen sene hoca bir şey ekliyordu, onu oynatınca değişiyordu.
ÖA1: Sürgü.
ÖA3: Tamam o zaman sürgü ile sinüs eğrisini değiştiririz. Ama yüzey alanını nasıl hesaplayacağız?
ÖA2: Bir dikdörtgenin içinde bunu yapsak. Sürgüyü hareket ettirince azalıp artmaz mı? Kendi kendine.

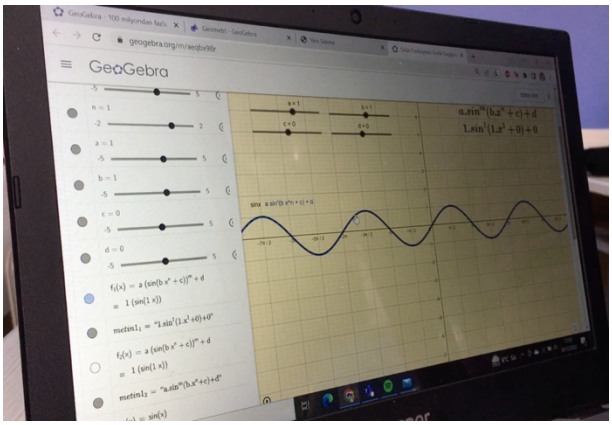
Grup 1 öğretmen adaylarının problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirdiği eylemler incelendiğinde, problem durumuna uygun bir masa modelinin oluşturulabilmesi için dikdörtgen ve sinüs fonksiyonu temsillerinin kullanıldığı görülmektedir. Masa modelinin inşa sürecinde, dikdörtgen ve sinüs fonksiyonu grafiklerinin GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla görselleştirilebileceği ve bu modelin sürgü aracı kullanılarak zenginleştirilebileceği ifade edilmiştir. Gerçekleştirilen bu eylemler, problemi anlama ve basitleştirme sürecinde temsil ve artefakt bileşenlerinin etkin biçimde kullanıldığı yönünde değerlendirilmiştir. Grup 1'in Epoksi görevine yönelik gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.148'de sunulmuştur.



Şekil 4.148: Grup 1'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

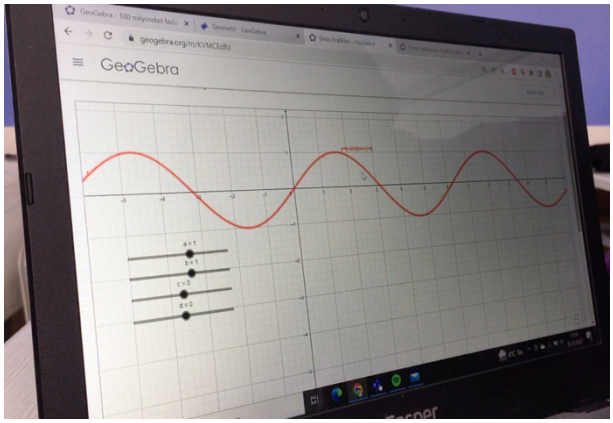
4.4.1.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarının ardından, matematikselleştirme aşamasına geçildiği görülmüştür. Bu aşamada, sinüs fonksiyonu grafiğinin GeoGebra ortamında nasıl oluşturulacağını anlamaya çalışan Grup 1 öğretmen adayları, GeoGebra kütüphanesinde yer alan ve sinüs fonksiyonunun grafiğini konu alan bir çalışma sayfası bularak incelemeye başlamıştır (Şekil 4.149).



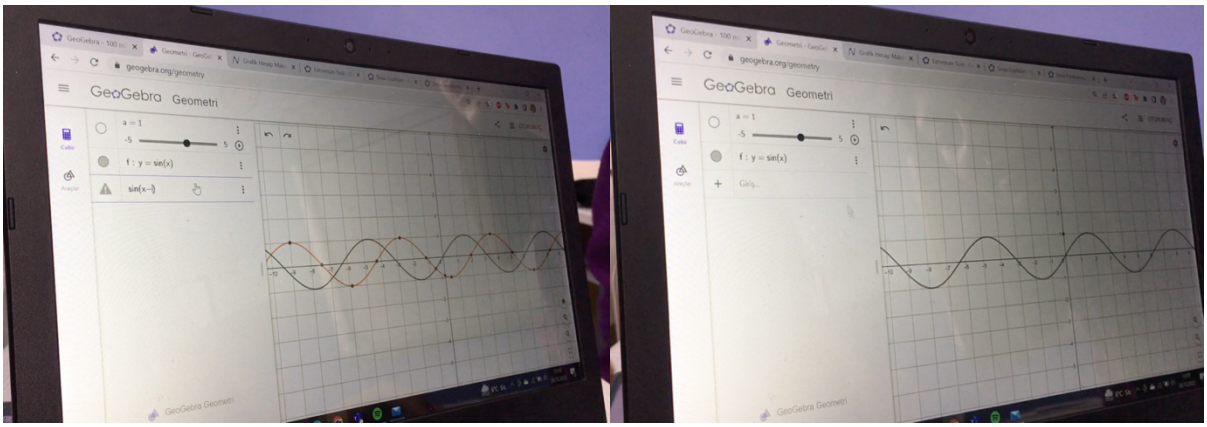
Şekil 4.149: Grup 1'in GeoGebra kütüphanesinden eriştiği sinüs fonksiyonu çalışma sayfası – Epoksi görevi

Şekil 4.149'da yer alan GeoGebra çalışma sayfasındaki fonksiyon grafiğini inceleyen Grup 1 öğretmen adayları, bu çalışma sayfası üzerinde yapılacak düzenlemelerin problemin çözümünde kullanılabileceğini düşünmüştür. Ancak çalışma sayfasının düzenlemeye uygun olmadığını fark etmeleri üzerine, cebir penceresi ve inşa protokolü kullanılarak inşa edilen fonksiyon grafiğinin nasıl oluşturulduğunu incelemeye yönelmişlerdir. Bu incelemeden istenilen sonucun elde edilememesiyle birlikte, "GeoGebra sinüs grafiği çizme" anahtar kelimesiyle yeni bir internet araştırması yapılmıştır. Yapılan araştırma sonucunda ulaşılan farklı bir GeoGebra çalışma sayfasında yer alan cebir penceresi, Grup 1 öğretmen adayları tarafından incelenmiştir (Şekil 4.150).



Şekil 4.150: Grup 1'in GeoGebra kütüphanesinden eriştiği sinüs fonksiyonu çalışma sayfası – 2 – Epoksi görevi

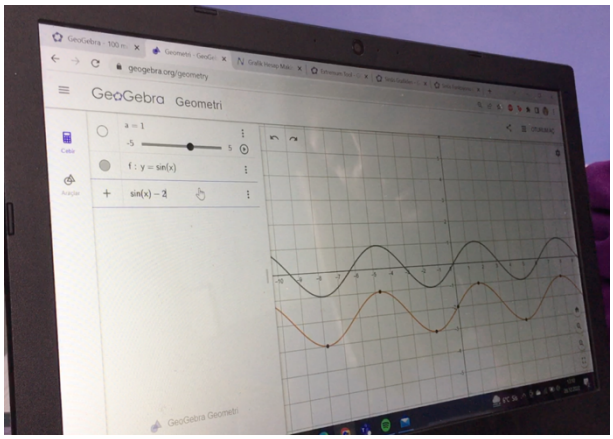
Yapılan incelemeler sırasında, Şekil 4.149 ve Şekil 4.150'de yer alan sinüs eğrilerinin cebir penceresine yazılmış fonksiyonlar aracılığıyla oluşturulduğu fark edilmiş ve bu doğrultuda fonksiyonların GeoGebra'nın giriş bölümüne yazılması gerektiğine karar verilmiştir. Bu doğrultuda, GeoGebra giriş bölümüne $y = sinx$ fonksiyonu yazılarak sinüs fonksiyonu grafiği oluşturulmuştur. Ardından, problemin çözümüne uygun olarak farklı bir grafiğin daha oluşturulması gerektiği ifade edilerek, $y = \sin(x - 2)$ fonksiyonu ile ikinci bir grafik çizilmiştir. Grup 1 tarafından oluşturulan bu fonksiyon grafiklerine ilişkin ekran görüntüsü Şekil 4.151'de sunulmuştur.



Şekil 4.151: Grup 1 tarafından oluşturulan sinüs fonksiyonu grafikleri – Epoksi görevi

Ancak, oluşturulan bu iki grafiğin problemin amacına uygun olmadığı değerlendirilmiştir. Bu doğrultuda, ikinci grafiğin birinci grafiğin üstünde ya da altında yer alması gerektiği ifade edilmiştir. Bu nedenle ikinci eğrinin aşağı yönde ötelenmesine karar verilerek fonksiyon $y =$

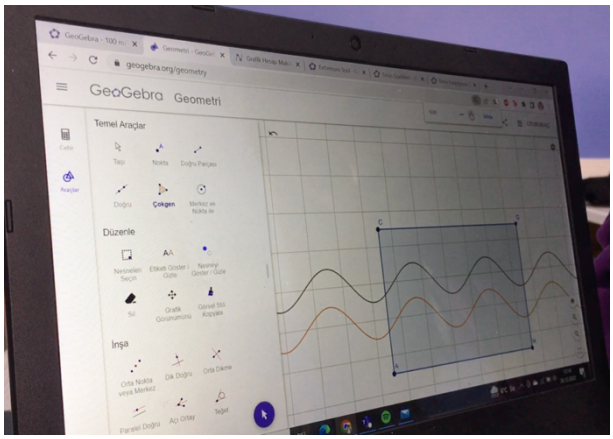
$\sin(x) - 2$ şeklinde güncellenmiştir. Güncellenen grafiklere ilişkin ekran görüntüsü Şekil 4.152'de sunulmuştur.



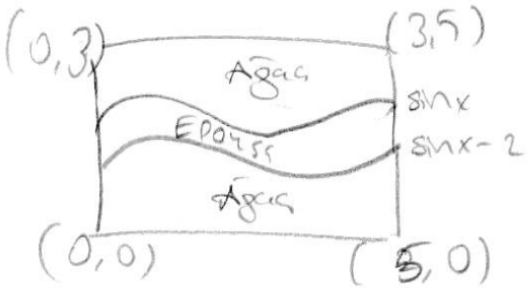
Şekil 4.152: Grup 1 tarafından problem durumuna uygun olarak oluşturulan sinüs grafikleri – Epoksi görevi

Problemin amacına uygun olarak iki eğrinin oluşturulmasının ardından, dikdörtgen şeklindeki masanın da modellenmesi gerektiği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, Grup 1 öğretmen adayları GeoGebra dinamik geometri yazılımında düzgün çokgen oluşturma aracını kullanarak çalışma sayfasında iki nokta belirlemiş ve bu noktalar aracılığıyla bir düzgün dörtgen inşa etmiştir. Oluşturulan bu geometrik şeklin kare olduğu ve karenin, özel bir dikdörtgen türü olduğu ifade edilmiştir. Ancak, kare biçimindeki bu modelin problem durumunda belirtilen masa formuna uygun olmadığı değerlendirilerek, uzunluk ölçülerinin kendileri tarafından belirlendiği bir dikdörtgen modeli oluşturulmasına karar verilmiştir.

Bu amaçla, çokgen oluşturma aracı kullanılarak GeoGebra çalışma sayfasında dikdörtgenin dört köşesini temsil edecek noktalar belirlenmiş ve bir dörtgen modeli inşa edilmiştir. Noktaların belirlenmesi sürecinde GeoGebra çalışma sayfasının ızgara yapısından faydalanıldığı gözlemlenmiştir. Gerçekleştirilen eylemler sonucunda GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulan matematiksel model Şekil 4.153'te, çalışma yaprağına aktarılan hali ise Şekil 4.154'te sunulmuştur.



Şekil 4.153: Grup 1 tarafından GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulan matematiksel model – Epoksi görevi

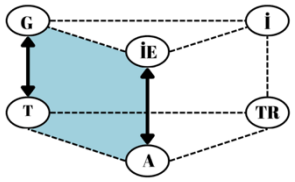


Şekil 4.154: Grup 1 tarafından oluşturulan matematiksel modele ilişkin çalışma yaprağı alıntısı – Epoksi görevi

Gerçekleştirilen eylemler doğrultusunda oluşturulan matematiksel model ile Grup 1'in problem durumunu matematikselleştirdiği görülmektedir. Grup 1 öğretmen adayları tarafından matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, GeoGebra kütüphanesinden erişilen çalışma sayfalarının kullanımı sürecinde epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninden yararlanıldığı ve bu sayede sinüs fonksiyonunun yapısının incelendiği anlaşılmaktadır. Bu inceleme sırasında GeoGebra yazılımının cebir penceresi ve inşa protokolü araçları kullanılmış; cebir penceresinde yer alan fonksiyonların giriş alanına sırasıyla $y = sinx$, $y = sinx - 2$, $y = (sinx) - 2$ biçimindeki temsillerin yazılmasıyla sinüs fonksiyonu grafiklerinin GeoGebra ortamında görselleştirildiği görülmüştür.

Fonksiyon grafiklerinin oluşturulmasının ardından, düzgün çokgen ve çokgen oluşturma araçlarıyla çeşitli dörtgenlerin oluşturulduğu ve bu süreçte GeoGebra çalışma sayfasının ızgara yapısından yararlanıldığı belirlenmiştir. Problem durumunun matematikselleştirilmesi

amacıyla yürütülen bu eylemler sırasında dinamik geometri yazılımı ve yazılım içerisindeki araçlar amaca uygun bir biçimde kullanılmış, bu sayede fonksiyon grafiklerinin ve dikdörtgen şeklinin oluşturulmasıyla enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Aynı zamanda, oluşturulan fonksiyon grafiklerinin ve dikdörtgenin GeoGebra çalışma sayfasında matematiksel modele dönüştürülerek görselleştirilmesi, semiyotik oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Matematiksel görevin çözümüne ulaşılabilmesi için gerçekleştirilen bu süreçte matematiksel nesnelerin oluşturulması, artefaktların etkin şekilde kullanılması ve temsillerin yapılandırılması, çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Grup 1'in Epoksi görevini çözerken matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.155'te sunulmuştur.



Şekil 4.155: Grup 1'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

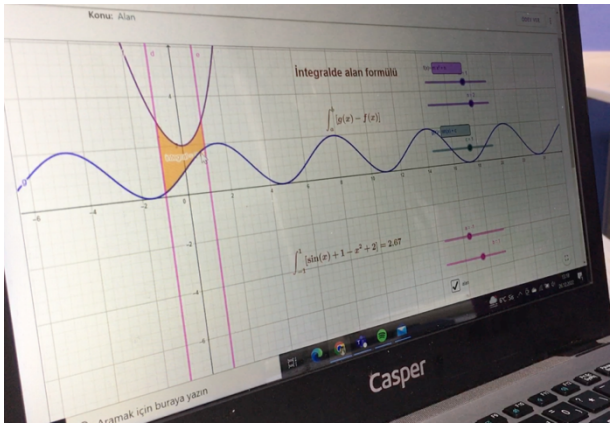
4.4.1.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Problem durumunun matematikselleştirilmesiyle oluşturulan matematiksel modelin çözülmesi amacıyla Grup 1 öğretmen adaylarının matematiksel olarak çalışma aşamasına geçtiği ve bu süreçte alan ölçme aracını kullanarak matematiksel model üzerinde belirli bölgelerin alanını hesaplamaya çalıştıkları görülmüştür. Alan ölçme aracı seçildikten sonra, aracın kullanılmasına ilişkin ekranda görülen yönergeler dikkate alınarak dikdörtgenin alanını belirlenmiştir. Problemin amacına uygun olarak iki eğri arasında kalan bölgenin alanını belirlemeye çalışan Grup 1 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA1: İki eğri arasındaki alanı belirlememiz gerekiyor. Nasıl yapalım?
ÖA3: Bence bunu integralden yapacağız. İntegral ile bulduğumuz alanı da çıkartacağız diğer alandan. Burada masanın ahşap olan kısımlarının alanını bulacağız. Bir sürü integrali birbirine bağlayacağız burada. Anladınız mı?
ÖA1: Nasıl yapacağız yani?
ÖA3: Bak şimdi, önce dikdörtgenin alanını bulacağız. Dikdörtgenin alanından da yeni bulduğumuz alanı çıkartacağız. Yani şu iki eğri arasında kalan kısmı çıkartmış olacağız.

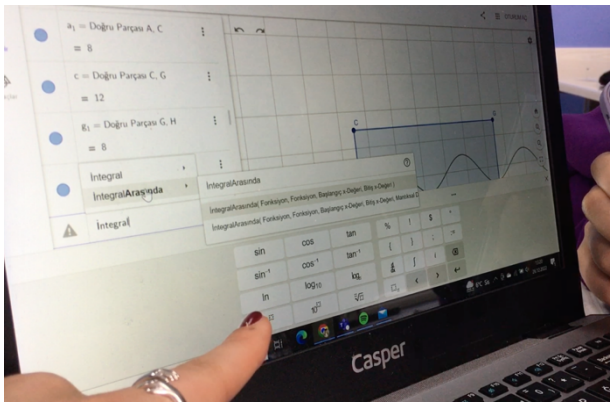
ÖA1: Acaba GeoGebra'da bunu hesaplayabileceğimiz bir araç var mıdır? Direkt hesaplayabileceğimiz.
ÖA3: İntegralle alanı bulma gibi bir araç bence yoktur çünkü biz şu an sınırlandırdık bu eğrileri dikdörtgen çizerek.

Grup1 öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen bu diyalogda, iki eğri arasında kalan alanın belirli integral kullanarak bulunabileceğine ilişkin bir akıl yürütmenin geliştirildiği görülmektedir. Bu alanın GeoGebra yazılımı aracılığıyla nasıl hesaplanabileceğini belirlemek amacıyla yapılan internet araştırması sonucunda, integral yoluyla alan hesaplamasına yönelik bir GeoGebra çalışma sayfasına ulaşılmıştır. Bu uygulamaya ilişkin ekran görüntüsü Şekil 4.156'da sunulmuştur.



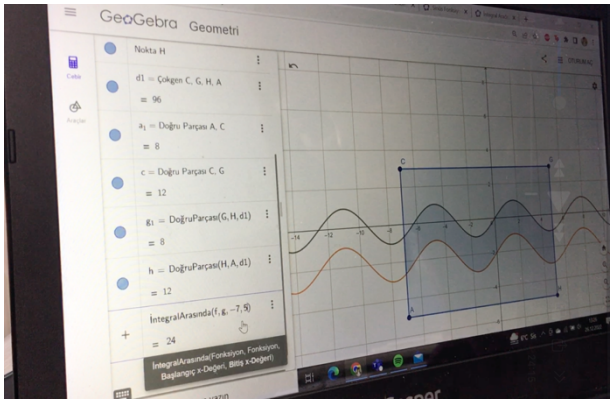
Şekil 4.156: Grup 1'in integralde alan formülü uygulamasını incelediği dinamik çalışma sayfası – Epoksi görevi

Çalışma sayfasının incelenmesiyle birlikte GeoGebra'da integral kullanılarak alan hesabının nasıl yapılabileceğine dair fikir edinen Grup 1 öğretmen adayları, problem durumunda masayı temsil eden dikdörtgenin sınırladığı ve eğrilerle çevrelenen bölgenin alanını belirlemek amacıyla çalışmaya başlamıştır. Bu doğrultuda, giriş ekranında yer alan matematiksel semboller arasından integral sembolünü seçen öğretmen adayları, giriş alanına 'integral' yazılmasıyla ilgili komutlara ulaşabildiğini fark etmiştir Problemin çözümüne yönelik olarak bu komutlar arasından 'integralarasında' komutunun uygun olduğuna karar verilmiştir. Bu komutun fark edilme anına ilişkin görsel Şekil 4.157'de sunulmuştur.



Şekil 4.157: Grup 1 tarafından fark edilen 'integralarasında' komutu – Epoksi görevi

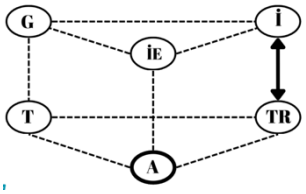
Komutun doğru şekilde kullanılabilmesi için çeşitli denemeler gerçekleştirilmiş; ardından komut içine yazılması gereken ifadelerin yer aldığı yönerge fark edilmiştir. Bu yönerge doğrultusunda, komut bölümüne uygun ifadelerin yazılması gerektiği anlaşılmıştır. Problemin çözümüne yönelik olarak oluşturulan matematiksel modelde yer alan eğrilerin f ve g fonksiyonlarıyla temsil edildiği ve masayı temsil eden dikdörtgen şeklinin x ekseni üzerindeki sınırlarının -7 ve 5 arasında olduğu belirlenerek bu değerler 'integralarasında' komutuna yazılmıştır. Komutun uygulanmasıyla birlikte iki eğri arasında kalan sınırlı bölgenin alanı başarıyla hesaplanmıştır (Şekil 4.158).



Şekil 4.158: Grup 1 tarafından iki eğri arasında kalan sınırlı bölgenin alanının belirlenmesi – Epoksi görevi

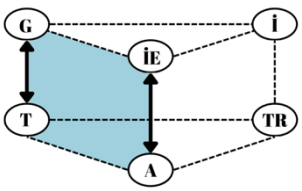
Grup 1 öğretmen adayları tarafından problemin çözümüne yönelik oluşturulan matematiksel modelin çözüm sürecinde, matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, öncelikle alan ölçme aracı kullanılarak dikdörtgenin alanının belirlendiği

görülmüştür. İki eğri arasında kalan bölgenin alanının hesaplanabilmesi için integral kavramının kullanılması gerektiğinin ifade edilmiş; bu doğrultuda problemin çözümüne yönelik bir akıl yürütme süreci gerçekleştirilmiştir. Bu noktada, alan ölçme aracının kullanılarak alanın belirlenmesi epistemolojik düzlemin artefakt bileşeninin kullanıldığına; integral kavramının teorik bilgi bağlamında dikkate alınarak yapılan akıl yürütmenin ise söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.159'da sunulmuştur.



Şekil 4.159: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Epoksi görevi

Akıl yürütme sonrasında probleme ilişkin çözüm süreci devam etmiş; yapılan internet araştırması sonucunda GeoGebra kütüphanesinden ilgili çalışma sayfalarına ulaşılmıştır. Bu çalışma sayfalarında cebir penceresi, inşa protokolü ve giriş ekranına yazılan komutların amaca uygun bir şekilde kullanılmış olması, artefaktların işlevsel kullanımını göstermekte ve bu doğrultuda enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği görülmüştür. Ayrıca, 'integralarasında' komutunun kullanılmasıyla iki fonksiyon arasındaki bölgenin renklendirilerek görselleştirilmesi, matematiksel modelin daha açık ve anlaşılır hale getirilmesine katkı sağlamış ve bu süreçte semiyotik oluşumun gerçekleştiği görülmüştür. Tüm bu eylemlerin, matematiksel görevin çözüme ulaştırılabilmesi amacıyla yapılan inşa süreçleri ve verilerin elde edilmesi doğrultusunda [Sem-Ens] dikey düzleminde ilerlediği değerlendirilmiştir. Grup 1'in Epoksi görevini çözerken matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.160'da sunulmuştur.



Şekil 4.160: Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Epoksi görevi

4.4.1.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

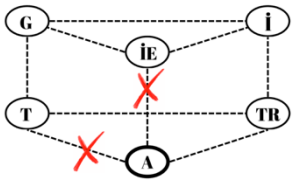
Grup 1'in matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği eylemlerin ardından, oluşturulan matematiksel modelden elde edilen sonucun gerçek yaşama bağlamında değerlendirildiği yorumlama ve doğrulama aşamasına geçildiği görülmüştür. Bu aşamada, Grup 1 öğretmen adayları yalnızca tek bir durum üzerinden problem durumuna çözüm getirdiklerini belirtmiştir. Oluşturulan matematiksel modelin GeoGebra dinamik geometri yazılımında yer alan çeşitli araçlar aracılığıyla zenginleştirilebileceği, bu sayede farklı matematiksel modellerin oluşturulabileceği ifade edilmiştir. Bu doğrultuda, matematiksel modele sürgü eklenmesi, sürgü aracı eklenerek masayı temsil eden dikdörtgenin kenar uzunluklarının ve sinüs fonksiyonunun parametrik biçimde değiştirilebileceği düşünülmüştür.

Belirtilen amaca yönelik olarak sürgü aracı seçilmiş ve çalışma sayfasına eklenmiştir. Ancak eklenen sürgünün matematiksel model üzerinde herhangi bir değişiklik yaratmadığı gözlemlenmiştir. Bu duruma ilişkin öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

ÖA3: Sürgüyü ekledik de herhangi bir değişkene bağlamadık. Nasıl bağlanıyor onu bilen var mı?
ÖA1: Sürgü ekleme ekranından bağlarız sanırım.
ÖA3: Bir integrale mi bağlayacağız? İntegrale değil de bu sürgüyü grafikle eşleştirmemiz lazım.
ÖA2: Acaba adını mı yazacağız bir yere? Bizim eğrimizin adı $\sin x$.
ÖA3: Bizim oluşturduğumuz eğri bir fonksiyon. f olarak yazıyor cebir penceresinde.
ÖA1: O zaman fonksiyonun değişkenini koyman lazım sürgüye.
ÖA3: Hayır $\sin x$ *değil bizim değişkenimiz, yani eğrinin değişmesi lazım ya. Bizim başka bir yerden değişkeni değiştirmemiz lazım. O sadece f gibi isim o sadece. Anladın mı? Sürgüyü hareket ettirdiğimizde bizim f fonksiyonunun oynaması lazım. Anladın mı? Ama işte onun adını mı yoksa başka bir şey mi yazacağız?*

Sürgü aracı ile oluşturulan temsiller arasında bağlantı kuramayan Grup 1 öğretmen adayları, yorumlama ve doğrulama aşamasındaki eylemlerini tamamlayarak matematiksel çalışma sürecini sonlandırmıştır. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 1 öğretmen adaylarının sürgü aracını kullanarak yeni matematiksel modeller oluşturma potansiyellerini fark ettikleri, bu doğrultuda GeoGebra çalışma sayfasına sürgü ekledikleri görülmüştür. Ancak sürgü aracının oluşturulan temsillerle işlevsel bir biçimde

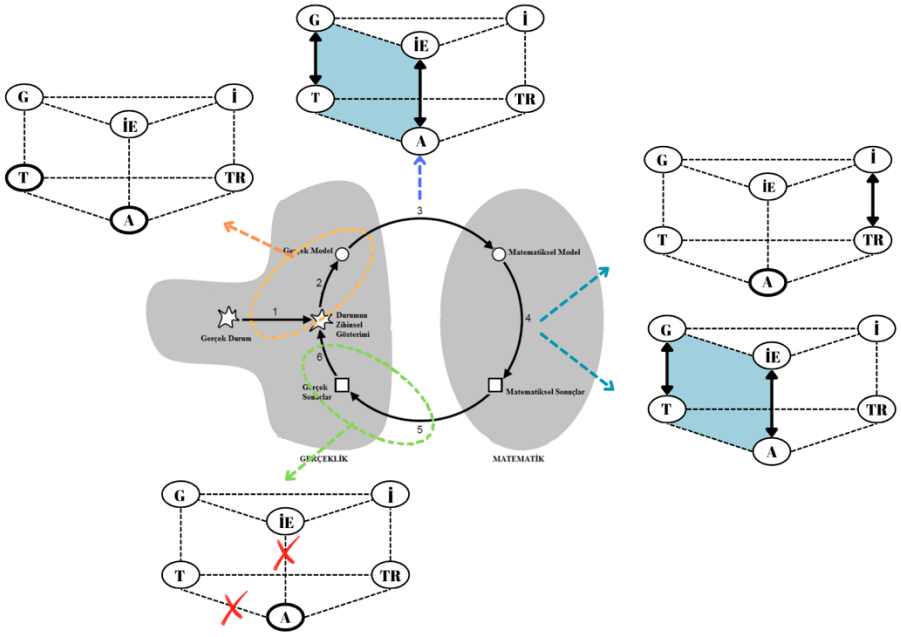
ilişkilendirilememesi nedeniyle, Grup 1 öğretmen adaylarının enstrümantal oluşumu gerçekleştiremediği ve bu nedenle matematiksel çalışmayı sürdüremediği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Grup 1'in Epoksi görevini çözerken yorumlama ve değerlendirme aşamalarında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.161'de sunulmuştur.



Şekil 4.161: Grup 1'in yorumlama ve doğrulama aşamalarındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

4.4.1.5 Grup 1'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 1 öğretmen adaylarının Epoksi görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.162'de sunulmuştur.



Şekil 4.162: Grup 1'in Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 1'in Epoksi görevini çözerken gerçekleştirdiği matematiksel çalışmanın, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında temsil ve artefakt bileşenlerinin kullanılmasıyla başladığı

görülmektedir. Bu aşamada, matematiksel görevde yer alan temsillerin belirlendiği; ancak artefaktın işlevsel değil, yalnızca araçsal olarak kullanıldığı söylenebilir. Bu durum, kullanılan temsil ve araçların kavramsal bilgiler ile desteklenmediğini, dolayısıyla problem durumunun fark edilmesine rağmen teorik gerekçelerin sunulmadığını göstermektedir.

Matematiksel modelin oluşturulmasına yönelik gerçekleştirilen eylemlerin [Sem-Ens] dikey düzleminde konumlandığı; bu süreçte artefaktların işlevsel biçimde kullanılarak modelin görselleştirildiği görülmektedir. Bu bağlamda, oluşturulan modelin görselleştirilmesinde artefaktların katkı sunduğu, ancak modelleme sürecinde kavramsal temellendirmenin yeterince kurulamadığı ifade edilebilir. Böylece, problemin çözümüne yönelik gerekli matematiksel yapı oluşturulmuştur.

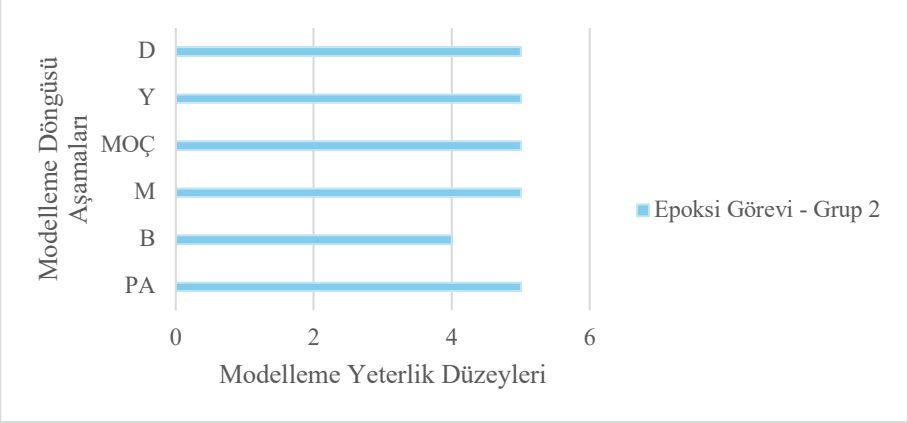
Matematiksel olarak çalışma aşamasında ise iki farklı eylemin gerçekleştirildiği görülmektedir. İlk olarak, artefakt bileşeninin desteğiyle yürütülen akıl yürütme sürecinin söylemsel oluşumu gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Bu eylemin ardından, artefaktın probleme yönelik çözümde işlevsel biçimde kullanılmasıyla ortaya çıkan görselleştirme süreci, matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde sürdürüldüğünü göstermektedir. Bu doğrultuda, bu aşamada artefaktların kullanılmasıyla gerçekleştirilen inşa ve görselleştirme süreçlerinin, matematiksel çözümün anlamlandırılmasına katkı sağladığı söylenebilir.

Matematiksel sonucun yorumlanması ve doğrulanması sürecinde artefaktların işlevsel biçimde kullanılmaya çalışıldığı; ancak bu kullanımın etkili bir şekilde gerçekleştirilemediği görülmektedir. Bu durum, enstrümantal oluşumun sağlanamamasına ve dolayısıyla matematiksel sonucun yorumlanmasında bir kopukluğun oluşmasına yol açmıştır. Ayrıca, artefakt ile temsil arasında anlamlı bir ilişkinin kurulamamış olması, Grup 1'in modelleme döngüsünün yorumlama ve doğrulama aşamasında önemli güçlükler yaşamasına neden olmuştur.

Grup 1 tarafından Epoksi görevine yönelik gerçekleştirilen matematiksel çalışmada teorik referanslar bileşeninin kullanım sıklığının oldukça düşük olduğu fark edilmektedir. Bu durum, artefakt ve temsil bileşenlerinin kullanılmasına rağmen matematiksel kavramlara ilişkin özelliklerle ilişkilendirmenin yapılamadığını göstermektedir. Ayrıca, gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın büyük ölçüde [Sem-Ens] dikey düzleminde sınırlı kaldığı ve süreç boyunca düzlemler arası geçişlerin zayıf bir şekilde yürütüldüğü söylenebilir.

4.4.2 Grup 2'nin Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi

Grup 2'nin Epoksi görevini çözmek üzere gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği ve verilenlerle istenenler arasında anlamlı bir ilişki kurulduğu görülmüştür. Bu bağlamda, problemi anlama aşamasının Düzey 5'te yer aldığı belirlenmiştir. Problemin çözümünde kullanılacak veriler dikkate alınarak ortaya koyulan gerçekçi varsayımlar doğrultusunda yapılan sadeleştirmeler nedeniyle, basitleştirme aşamasında Düzey 4'te bulunulduğu belirlenmiştir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, Grup 2'nin yine gerçekçi varsayımlara dayalı olarak matematiksel görevin çözümüne yönelik doğru matematiksel model oluşturduğu görülmüş; bu doğrultuda matematikselleştirme aşamasında Düzey 5'te bulunulduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, oluşturulan matematiksel modelin doğru bir şekilde çözülmesin nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında da Düzey 5'e ulaşıldığı belirlenmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında uygun şekilde yorumlanması, yorumlama aşamasında Düzey 5'te bulunulduğunu göstermektedir. Sürece yönelik gerçekleştirilen doğrulama yaklaşımı ile hatalar belirlenmesine rağmen belirlenen hataların düzeltilmemesi sebebiyle doğrulama aşamasında Düzey 5'te bulunulduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 2'nin Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.163'te sunulmuştur.



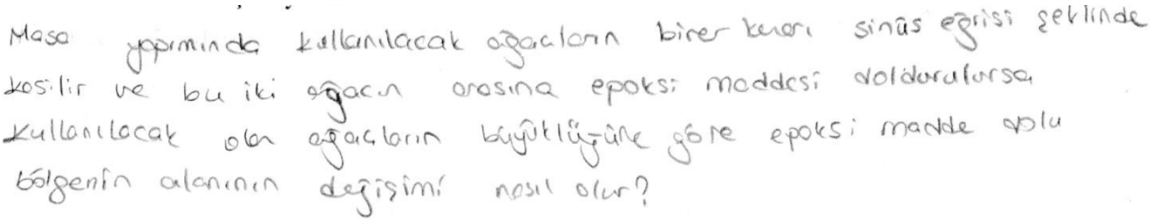
Şekil 4.163: Grup 2'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 2'nin matematiksel modelleme döngüsünün doğrulama aşaması hariç tüm aşamalarında en yüksek performansı ortaya koyduğu görülmektedir. Epoksi görevine

yönelik gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 23 puan elde eden Grup 2'nin, *'üst düzey'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 2 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 2 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.4.2.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

Grup 2'nin epoksi probleminin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yapraklarının dağıtılmasıyla başlamış ve yaklaşık 10 dakika süren bireysel çalışma ile ilk aşama tamamlanmıştır. Bireysel çalışma sürecinde, problem durumunun anlaşılmasına yönelik hazır oluş sorularına yanıtlar verildiği ve yönlendirilmiş keşif sorularının incelendiği gözlemlenmiştir. Bu süreçte, problem durumunu kendi ifadeleriyle açıklayan ÖA4'ün çalışma yaprağı alıntısına Şekil 4.164'te yer verilmiştir.

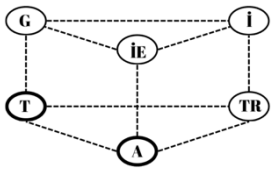


Şekil 4.164: ÖA4'ün çalışma yaprağı alıntısı- Epoksi görevi

Yazılı ifadeler aracılığıyla problem durumunun anlaşıldığı ortaya konduktan sonra, Grup 2 öğretmen adayları yönlendirilmiş keşif sorularını yanıtlamaya devam etmiş ve problemin çözümünde kullanılacak sinüs eğrilerinin düzgün ilerlediğinin varsayıldığını belirtilmiştir. Problemin çözüm sürecinde diyagramların çizimlerinin görselleştirmeye katkı sağlayacağı ve GeoGebra dinamik geometri yazılımında çizilecek eğriler arasında kalan bölgenin alanının hesaplanabileceği ifade edilmiştir.

Grup 2 öğretmen adaylarının problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirdiği eylemler incelendiğinde, problem durumuna uygun bir masa modelinin oluşturulabilmesi için sinüs fonksiyonunun kullanılması gerektiğini ifade ettikleri görülmüştür. Ayrıca, diyagram

çizme stratejisinin problem durumunun görselleştirilmesine katkı sağlayacağı, sinüs fonksiyonu grafiklerinin oluşturulmasıyla elde edilen alanın ise GeoGebra dinamik geometri yazılımı aracılığıyla hesaplanabileceği belirtilmiştir. Bu doğrultuda gerçekleştirilen eylemler, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında temsil ve artefakt bileşenlerinin kullanıldığı yönünde değerlendirilmiştir. Grup 2'nin Epoksi görevini çözerken problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.165'te sunulmuştur.



Şekil 4.165: Grup 2'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

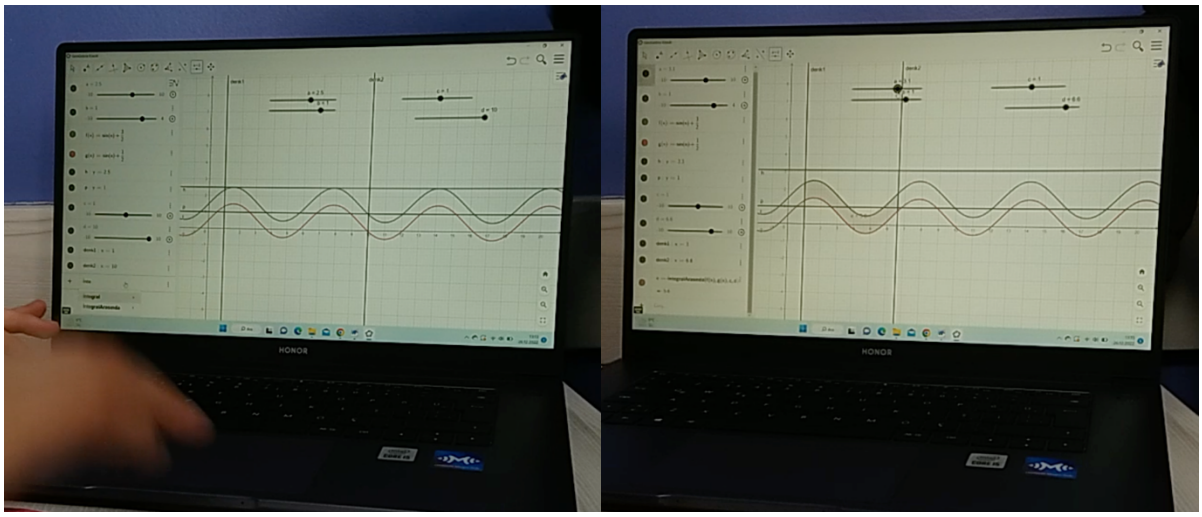
4.4.2.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, Grup 2 öğretmen adaylarının problem durumunda yer alan dikdörtgenin ve sinüs fonksiyonu grafiklerinin oluşturulmasına yönelik olarak GeoGebra çalışma sayfasında çeşitli eylemler gerçekleştirildiği görülmüştür. Çalışma sayfasına öncelikle iki adet sürgü eklenmiş, ardından giriş bölümüne $sinx + 3/2$ ve $sinx + 1/2$ ifadeleri yazılarak sinüs fonksiyonu grafikleri oluşturulması sağlanmıştır. Ancak, sürgüler ile oluşturulan fonksiyon grafiklerinin etkileşimli hale getirilmediğini fark eden Grup 2, sürgülerin dikdörtgenin kenar uzunluklarıyla ilişkilendirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu doğrultuda, sürgülere bağlı doğrular oluşturarak problem durumunun matematikselleştirilmesine yönelik ilk adımların atıldığı görülmüştür. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.166'da sunulmuştur.



Şekil 4.166: Grup 2'nin problem durumuna uygun olarak oluşturduğu fonksiyon grafikleri – Epoksi görevi

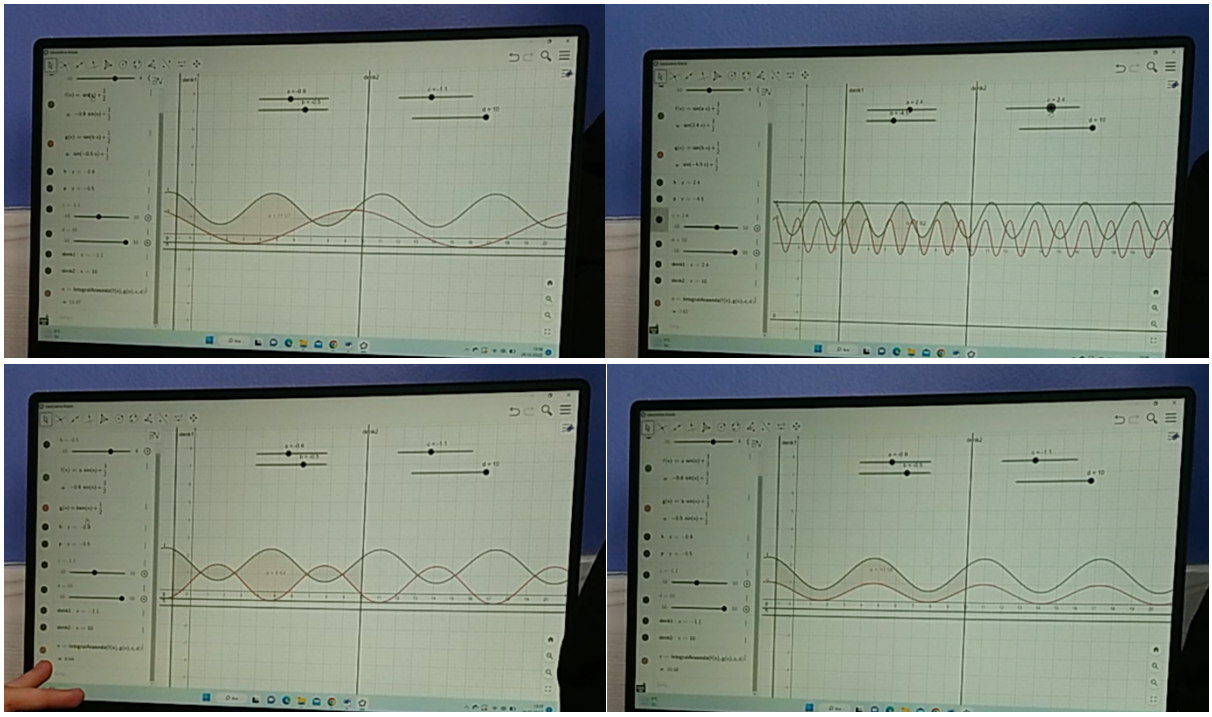
Oluşturulan fonksiyonlar arasında kalan alanın belirlenmesi amacıyla giriş bölümüne ‘integral’ komutunu yazan Grup 2 öğretmen adayları, bu sırada ‘integralarasında’ komutunu fark etmiş ve bu komutu kullanmaya karar vermiştir. Komutunun uygulanabilmesi için gerekli olan fonksiyonların belirlenmesinde cebir penceresinden yararlanılmıştır. Ayrıca, komutun başlangıç ve bitiş değerleri girilmeden uygulanması halinde alanın sonsuz olarak hesaplanacağı ifade edilerek, problem durumuna uygun bir sonuç elde edebilmek amacıyla bu değerlerin girilmesi gerektiği vurgulanmıştır. Bu bağlamda, sürgü aracı yardımıyla masanın sınırlarını temsil edecek dikey doğrular oluşturulmuş ve bu doğrular yardımıyla sınırlanan bölge belirlenmiştir. Son olarak, ‘integralarasında’ komutunun uygulanmasıyla, oluşturulan eğriler ve dikey doğrular arasında kalan sınırlı alan GeoGebra çalışma sayfasında başarıyla görselleştirilmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.167’de sunulmuştur.



Şekil 4.167: Grup 2’nin ‘integralarasında’ komutunu kullanmasına ilişkin görsel – Epoksi görevi

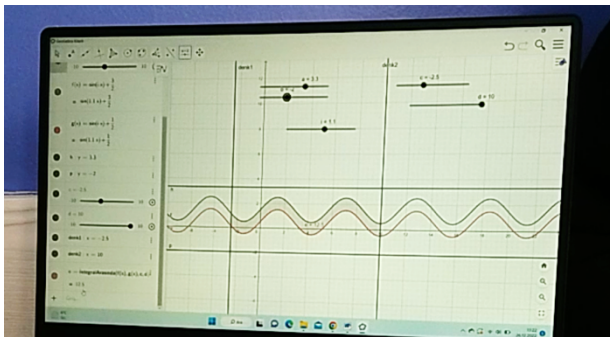
Oluşturulan sürgülerin hareket ettirilmesiyle masanın tüm kenar uzunluklarının istenilen biçimde düzenlenebileceğini ifade eden öğretmen adayları, sinüs fonksiyonlarına ait grafiklerin de sürgülere bağlanmasıyla, problem durumunda yer alan tüm değişkenlerin sürgüler aracılığıyla kontrol edilebileceğini belirterek bu doğrultuda bir akıl yürütme gerçekleştirmiştir. Bu kapsamda, başlangıçta giriş bölümüne yazılan $\sin(x)$ fonksiyonunun $\sin(a.x)$ biçiminde değiştirilmesi ve a değişkenine karşılık gelen bir sürgü tanımlanması yoluyla söz konusu kontrolün sağlanabileceği ifade edilmiştir. Ayrıca, fonksiyonun $a.\sin(x)$ şeklinde tanımlanmasının da bir alternatif oluşturabileceği belirtilmiştir. Bu doğrultuda yürütülen

denemeler sonucunda Grup 2 öğretmen adaylarının, sinüs fonksiyonlarının grafiklerinin çeşitli parametreler aracılığıyla değiştirilebileceğini fark ettiği görülmüştür. Özellikle $\sin(x)$ fonksiyonunun $\sin(a.x)$ şeklinde değiştirilmesi ile fonksiyon grafiğinin periyodunun değiştiği ifade edilmiştir. Yapılan denemelere ilişkin görseller Şekil 4.168'de sunulmuştur.



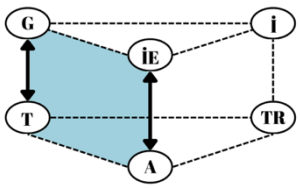
Şekil 4.168: Grup 2'nin sürgüleri kullanarak gerçekleştirdiği denemelere ilişkin görseller – Epoksi görevi

Sürgüler yardımıyla sinüs fonksiyonuna eklenen değişkenin, dikdörtgenin oluşturulmasında kullanılan değişkenle aynı olması sebebiyle sürgünün hareket ettirilmesi durumunda dikdörtgenin de değiştiği gözlemlenmiştir. Bu durumu fark eden fakat nedenini başlangıçta anlayamayan Grup 2, epoksi maddesinin kullanılacağı bölgenin masa modelinin dışında kaldığını tespit etmiştir. Yapılan gözlemler ve deneme-yanılma süreci sonucunda, dikdörtgen modelini oluşturan yatay doğruların yanlış sürgüye bağlandığı belirlenmiştir. Bu doğrultuda GeoGebra çalışma sayfasına yeni sürgüler eklenerek gerekli düzenlemeler gerçekleştirilmiş ve böylece problem durumu matematikselleştirilerek uygun bir matematiksel model elde etmiştir. Oluşturulan matematiksel modele ilişkin görsel Şekil 4.169'da sunulmuştur.



Şekil 4.169: Grup 2'nin oluşturduğu matematiksel model – Epoksi görevi

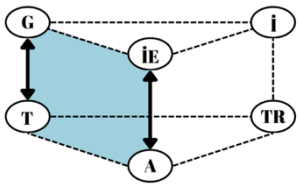
Problem durumunun matematikselleştirilerek bir matematiksel model elde edilmesi sürecinde gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, ilk olarak GeoGebra çalışma sayfasında sürgü aracının kullanıldığı, ardından sinüs fonksiyonuna ait temsillerin giriş bölümüne yazılarak ilgili fonksiyon grafiklerinin oluşturulduğu görülmektedir. GeoGebra çalışma sayfasında gerçekleştirilen bu eylemler sırasında artefaktların probleme yönelik olarak amaca uygun bir biçimde kullanılması, enstrümantal oluşumun gerçekleştiği şeklinde değerlendirilmiştir. Aynı zamanda, oluşturulan sinüs fonksiyonu grafiklerinin GeoGebra çalışma sayfasında problem durumuna uygun biçimde görselleştirilmesi, semiyotik oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Bu doğrultuda, gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın problemi çözmeye yönelik araştırma ve keşif süreciyle birlikte [Sem-Ens] dikey düzleminde başladığı görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.170'te sunulmuştur.



Şekil 4.170: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Epoksi görevi

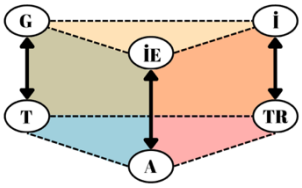
Oluşturulan fonksiyon grafikleri arasında kalan alanın belirlenmesine yönelik olarak GeoGebra dinamik geometri yazılımının olanaklarından yararlanıldığı, bu bağlamda problem durumuna uygun bir matematiksel model oluşturabilmek amacıyla bölgeyi sınırlandıracak dikey doğruların inşa edildiği görülmüştür. Bu süreçte, artefaktların probleme yönelik işlevsel biçimde kullanılması, enstrümantal oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Aynı zamanda, oluşturulan dikey doğrular aracılığıyla dikdörtgen temsilinin görselleştirilmesi,

semiyotik oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Bu doğrultuda, matematiksel çalışmanın, matematiksel temsillerin inşa edilmesine dayalı eylemlerle [Sem-Ens] dikey düzleminde devam ettiği anlaşılmaktadır. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.171'de sunulmuştur.



Şekil 4.171: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Epoksi görevi

Sürgülerin hareket ettirilmesiyle dikdörtgen modelin tüm kenar uzunluklarını değiştirebildiğini fark eden Grup 2 öğretmen adayları, sinüs fonksiyonu grafiklerinin de sürgüler aracılığıyla değiştirilebileceğine yönelik bir akıl yürütme gerçekleştirmiştir. Bu noktada, teorik referanslarda yer alan fonksiyonlara ilişkin özelliklerin dikkate alınmasıyla yapılan akıl yürütme süreci, söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu doğrultuda, sinüs fonksiyonlarına değişken ataması yapılarak sürgülerin tanımlanması, sürgülerin hareket ettirilmesiyle yapılan gözlemler ve tespit edilen hataların düzeltilerek matematiksel modelin inşa edilmesine yönelik gerçekleştirilen eylemler, enstrümantal oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir. Aynı zamanda, GeoGebra çalışma sayfasında sürgülerin hareket ettirilmesiyle farklı matematiksel modellerin oluşturulması, semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Grup 2 tarafından ortaya konan bu eylemlerin keşif ve araştırma süreçleriyle birlikte akıl yürütmeye dayalı olarak yürütülmesi, matematikselleştirme aşamasının üç dikey düzlemde tamamlandığını ortaya koymaktadır. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramları Şekil 4.172'de sunulmuştur.

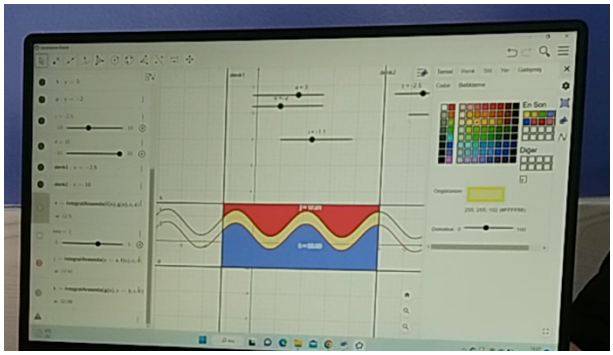


Şekil 4.172: Grup 2'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Epoksi görevi

4.4.2.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Elde edilen matematiksel modelin çözümüne yönelik eylemler gerçekleştiren Grup 2 öğretmen adaylarının, matematiksel olarak çalışma aşamasına geçtiği görülmüştür. Matematiksel modeli incelemeye başlayan öğretmen adayları, GeoGebra çalışma sayfasında 'integralarasında' komutunun kullanılmasıyla birlikte sinüs fonksiyonlarının grafiklerinin ve dikey doğruların sınırlandırdığı gölgenin alan ölçüsünün belirlendiğini fark etmiştir. Ancak bu alan ölçüsünün, eğrilerin biçimine ve masanın uzunluk ölçülerine bağlı olarak değişebileceği ifade edilmiştir.

Problemin çözümüne ilişkin eylemlerin planlanması sürecinde, yalnızca iki sinüs fonksiyonu arasında kalan alanın değil, aynı zamanda eğriler ile masayı oluşturan yatay sınırlar arasında kalan bölgelerin alanlarının da hesaplanabileceği belirtilmiştir. Bu amaçla, farklı bölgelerin belirlenmesi ve alanlarının hesaplanması için 'integralarasında' komutu kullanılmış, ilgili bölgelerin GeoGebra çalışma sayfasında renklendirildiği görülmüştür. Bu sürece ilişkin görsel, Şekil 4.173'te sunulmuştur. Söz konusu komutun kullanılmasıyla birlikte ilgili bölgelerin alanlarını belirleyen öğretmen adayları, elde edilen sonuçlar doğrultusunda matematiksel olarak çalışma aşamasını tamamlamıştır.

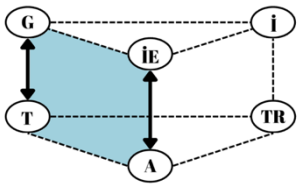


Şekil 4.173: Grup 2'nin matematiksel model üzerine yaptığı geliştirmelere ilişkin görsel – Epoksi görevi

Grup 2 öğretmen adayları tarafından oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik olarak matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, sinüs fonksiyonlarına ait eğriler ile dikdörtgen modelin yatay sınırları arasında kalan bölgelerin alanlarını belirlemek için GeoGebra dinamik geometri yazılımının özelliklerinden yararlanıldığı görülmektedir. Bu bağlamda, 'integralarasında' komutunun kullanılması yoluyla ilgili bölgelerin tanımlanması ve sürgülerin hareket ettirilerek alan ölçülerindeki değişimlerin gözlemlenmesi, enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir.

Hesaplanması hedeflenen bölgelerin ‘integralarasında’ komutuyla belirlenmesinin ardından, bu bölgelerin farklı renkler ile görselleştirilmesi ise semiyotik oluşumun gerçekleştiğini göstermektedir.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında iki fonksiyon arasında kalan bölgenin dijital bir artefakt yardımıyla inşa edilmesi ve bu süreçte problemin çözümüne yönelik verilerin elde edilmesi, yürütülen matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştiğini göstermektedir. Grup 2’nin Epoksi görevine ilişkin olarak matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği eylemlere dair MÇA diyagramı Şekil 4.174’te sunulmuştur.



Şekil 4.174: Grup 2’nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

4.4.2.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

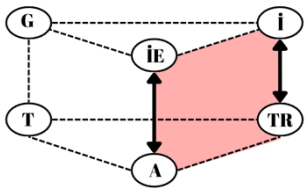
Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında yorumlanması amacıyla, sürgüler hareket ettirilerek matematiksel model üzerinde çeşitli gözlemler yapılmıştır. Bu süreçte, öğretmen adaylarından ÖA2’nin etkinlik süresince sürece aktif katıldığı ve bu süreçten keyif aldığını ifade ettiği gözlemlenmiştir. Oluşturulan matematiksel modelin, problem durumunda istenilen farklı koşullara uyarlanabilir yapısı sayesinde tek bir çözüme bağlı kalınmaksızın masanın değişen uzunluklarına göre alan ölçümlerinin belirlenebileceği belirtilmiştir.

Sürgülerle yapılan etkileşimli denemeler sırasında ÖA3’ün, sinüs fonksiyonlarına ait grafiklerin yalnızca yatay doğrultuda değişiklik gösterdiğini; dikey eksende bir değişim olmadığını fark etmesi üzerine, eğriler arasındaki mesafenin değiştirilmesinin problemi daha kapsamlı biçimde çözmeye katkı sunulabileceği ifade edilmiştir. Bu gözlem doğrultusunda Grup 2 öğretmen adayları, fonksiyonlara ait sürgülerin yalnızca periyot ile ilişkilendirilmiş olduğunu, ancak bu durumun fonksiyonun genliğiyle de ilişkilendirilebileceğini fark etmiştir. Bu bağlamda, GeoGebra çalışma sayfasına yeni bir sürgü eklenmiş ve bu sürgü ilgili fonksiyon grafiğiyle ilişkilendirilerek model güncellenmiştir.

Oluşturulan modelin sınıf ortamında sunulmasıyla birlikte Grup 2'nin gerçekleştirdiği matematiksel çalışmanın yorumlama ve doğrulama aşamalarının tamamlandığı görülmüştür.

Matematiksel modelleme döngüsünün yorumlama ve doğrulama aşamalarında Grup 2 öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, oluşturulan matematiksel modele ait sürgülerin hareket ettirilmesiyle çeşitli modellerin oluşturulduğu ve bu modeller üzerinden yorumlamalar yapıldığı görülmüştür. Yapılan incelemeler sırasında, sinüs fonksiyonlarına ait grafiklerin sürgüler aracılığıyla değiştirildiği halde dikey eksende bir değişim göstermediğinin fark edilmesi üzerine, bu duruma ilişkin teorik referanslara dayalı açıklamalar yapılmıştır. Bu açıklamalar doğrultusunda söylemsel oluşumun gerçekleştiği; sürece yeni bir sürgü eklenerek bu sürgünün fonksiyon grafiğiyle ilişkilendirilmesiyle ise enstrümantal oluşumun gerçekleştiği belirlenmiştir.

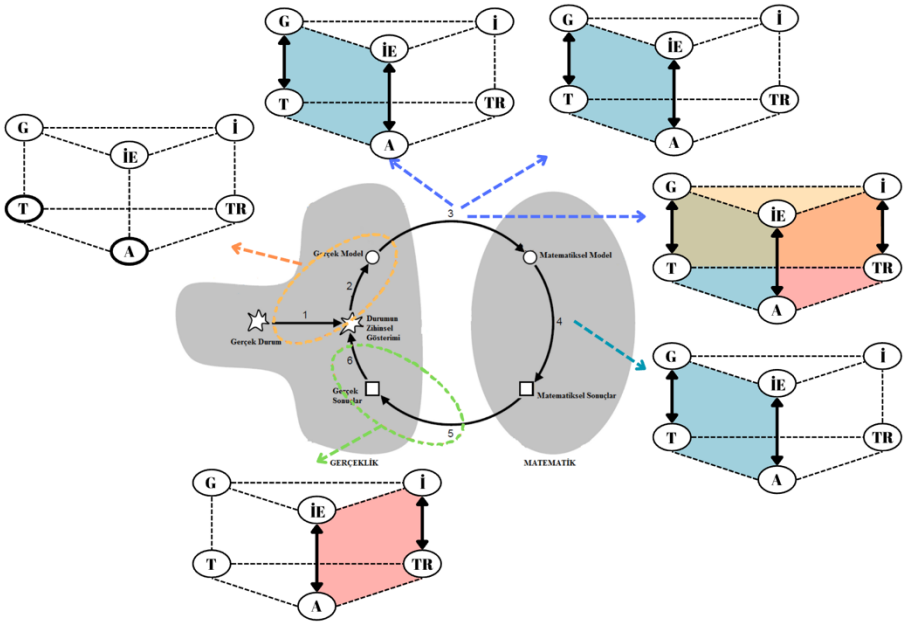
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın, artefaktların kullanımıyla farklı matematiksel modellerin incelenmesini ve gerçek yaşam bağlamında bu modellerin gerekçelendirmelerle desteklenerek yorumlanmasını içermesi bakımından [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştiği görülmektedir. Grup 2'nin Epoksi görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışmada yorumlama ve doğrulama aşamalarında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.175'te sunulmuştur.



Şekil 4.175: Grup 2'nin yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – epoksi etkinliği

4.4.2.5 Grup 2'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 2 öğretmen adaylarının Epoksi görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.176'da sunulmuştur.



Şekil 4.176: Grup 2'nin Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 2'nin Epoksi görevine yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışmanın, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında temsil ve artefakt bileşenlerinin kullanılmasıyla başladığı görülmektedir. Bu noktada, matematiksel görevde yer alan temsillerin belirlendiği; artefaktın işlevsel değil, yalnızca bir araç olarak kullanıldığı ifade edilebilir. Bu durum, kullanılan temsil ve araçların kavramsal bilgilerle yeterince ilişkilendirilmediğini, dolayısıyla problem durumunun fark edilmiş olmasına karşın teorik gerekçelendirmenin yapılmadığını göstermektedir.

Matematiksel modelin oluşturulması sürecinde üç temel eylemin gerçekleştirildiği görülmektedir. İlk iki eylemde, modelin oluşturulması için artefaktların işlevsel biçimde kullanılması ve matematiksel temsillerin görselleştirilmesiyle çalışmaların [Sem-Ens] dikey düzleminde yürütüldüğü belirlenmiştir. Bu sürecin ardından tüm dikey düzlemlere yayılan eylemlerin gerçekleştirilmesiyle matematiksel model oluşturulmuştur. Söz konusu durum, matematiksel modelin inşa etme, görselleştirme ve gerekçelendirme süreçleriyle sistematik bir şekilde oluşturulduğu şeklinde yorumlanabilir.

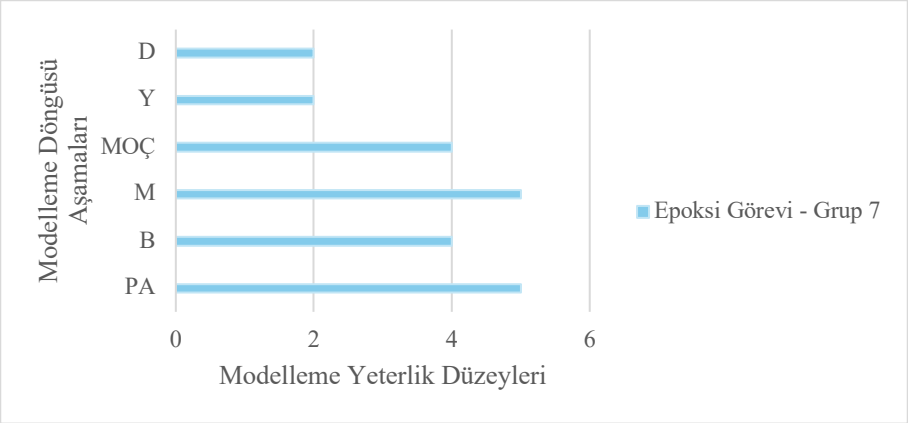
Modelin çözümüne yönelik gerçekleştirilen eylemler, oluşturulan matematiksel yapının özelliklerinden yararlanılması ve bu yapı üzerinden farklı durumların görselleştirilmesini içermektedir. Bu durumun [Sem-Ens] dikey düzleminde sürdürüldüğü görülmüş ve geliştirilen

matematiksel modelin yüksek işlevselliğe sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Yorumlama ve doğrulama aşamalarında ise, modelin problem bağlamına hizmet edip etmediğinin değerlendirilmesi amacıyla sorgulamalar yapılmış; gerekçelendirme eylemleri ile birlikte modelin geliştirilmesine yönelik artefakt kullanımının amaca uygun gerçekleştirilmesi, çalışmanın [Ens-Söy] dikey düzleminde tamamlandığı göstermektedir.

Matematiksel modelleme yeterliğinin oldukça yüksek düzeyde sergilendiği bu matematiksel çalışmada, artefaktların kullanımıyla gerçekleştirilen inşa ve görselleştirme eylemlerinin sürecin merkezinde yer aldığı görülmektedir. Matematikselleştirme aşamasında sistematik adımların izlenmesi ve dikey düzlemler arası esnek geçişlerin sağlanması, bütüncül bir matematiksel modelin oluşturulmasına olanak tanımıştır. Semiyotik oluşumun yanı sıra özellikle enstrümantal oluşumun ön planda olduğu bu çalışmada, artefaktların tamamen işlevselleştirildiği ve amaca hizmet edecek şekilde kullanıldığı ifade edilebilir. Diğer grupların çalışmalardan farklı olarak, bu çalışmada yorumlama ve doğrulama aşamalarında da semiyotik oluşumun yanı sıra enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmiş olması, sürecin bütüncül ve derinlikli yürütüldüğünün bir göstergesi olarak değerlendirilebilir.

4.4.3 Grup 7'nin Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi

Grup 7'nin Epoksi görevini çözmek için gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği ve verilenler ile istenenler arasında anlamlı ilişkiler kurulduğu görülmüştür. Bu durum, problemi anlama aşamasında Düzey 5'te bulunduklarını göstermektedir. Problemin çözümünde kullanılacak veriler dikkate alınarak oluşturulan gerçekçi varsayımlar doğrultusunda gerçekleştirilen basitleştirme süreci, bu aşamanın Düzey 4'te değerlendirilebileceğini göstermiştir. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, Grup 7'nin gerçekçi varsayımlara dayalı olarak doğru bir matematiksel model geliştirmesi, matematikselleştirme aşamasında Düzey 5'te bulunduklarını ortaya koymaktadır. Ancak, oluşturulan matematiksel modelin çözümünde bazı eksiklikler bulunması nedeniyle matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 4'te bulunulduğu tespit edilmiştir. Ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlanması, yorumlama aşamasında Düzey 2'de; kısmen gerçekleştirilen doğrulama yaklaşımı ile belirlenen hataların düzeltilmemesi ise doğrulama aşamasında Düzey 2'de yer alındığını göstermiştir. Bu doğrultuda, Grup 7'nin Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.177'de sunulmuştur.

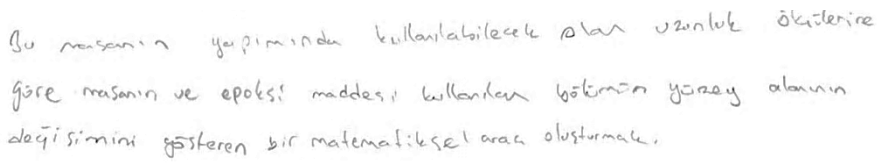


Şekil 4.177: Grup 7'nin matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 7'nin problemi anlama, basitleştirme ve matematikselleştirme aşamalarında yüksek performans sergilediği; buna karşın yorumlama ve doğrulama aşamalarında düşük bir performans ortaya koyduğu görülmektedir. Epoksi görevinin çözümü için gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 16 puan elde eden Grup 7'nin, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum, Grup 7 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için matematiksel çalışma yürütebildiğini göstermektedir. Grup 7 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.4.3.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

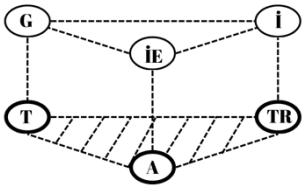
Grup 7'nin epoksi probleminin çözümüne yönelik gerçekleştirdiği matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularının yer aldığı çalışma yapraklarının dağıtılmasıyla başlamış; bu süreci 10 dakikalık bireysel çalışma izlemiştir. Bireysel çalışma sürecinde öğretmen adaylarının, problem durumunu anlamaya yönelik hazır oluş sorularına yanıtlar verdikleri ve yönlendirilmiş keşif sorularını inceledikleri görülmüştür. Bu aşamada problem durumunu kendi ifadeleriyle açıklayan ÖA26'nın çalışma yaprağına ait alıntı Şekil 4.178'de sunulmuştur.



Şekil 4.178: ÖA26'nın çalışma yaprağı alıntısı – Epoksi görevi

Problem durumunun anlaşıldığını ortaya koyan ifadelerin yazılı hale getirilmesinin ardından yönlendirilmiş keşif sorularına yanıt vermeye devam eden Grup 7 öğretmen adayları, problemin çözümünde kullanılacak olan sinüs fonksiyonunun kusursuz biçimde kesildiğini varsaymış ve bu doğrultuda masayı temsil eden dikdörtgen şeklinin oluşturulmasını planlamıştır. Problemin çözümüne uygun olarak $\sin(x)$ fonksiyonuna ait grafiğin ve dikdörtgen modelin oluşturulması için GeoGebra dinamik geometri yazılımının kullanılmasına karar verilmiş; ayrıca GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulacak olan bu fonksiyon grafikleri arasında kalan alanın integral yardımıyla hesaplanabileceği ifade edilmiştir.

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, sinüs fonksiyonunun grafik özelliklerinin dikkate alınarak bir plan yapılması, teorik referanslar bileşeninin kullanıldığını göstermiştir. Bunun yanı sıra, problemin çözüm sürecinde sinüs fonksiyonu grafiği ile dikdörtgen şeklinin kullanılacağının belirtilmesi temsil bileşeninin; bu temsillerin GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılarak inşa edilebileceği ve fonksiyon grafikleri arasında kalan bölgenin alanının yine GeoGebra aracılığıyla belirlenebileceğinin ifade edilmesi ise artefakt bileşeninin kullanıldığını ortaya koymaktadır. Bu noktada, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın, epistemolojik düzlemde yer alan bileşenler aracılığıyla yürütüldüğü görülmektedir. Grup 7'nin Epoksi etkinliğini çözerken problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.179'da sunulmuştur.



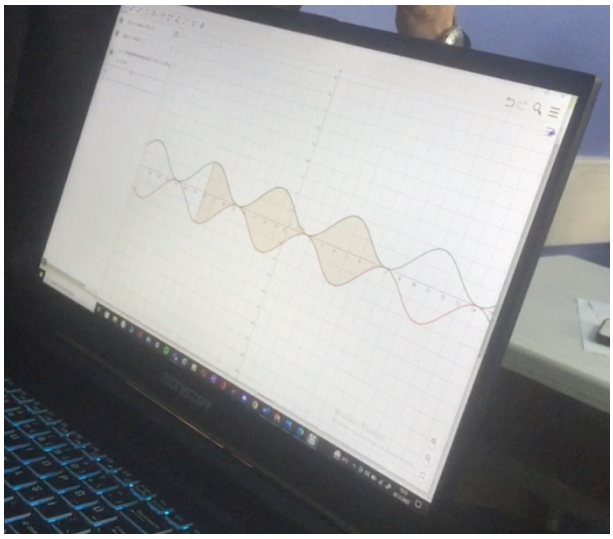
Şekil 4.179: Grup 7'nin problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

4.4.3.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından Grup 7 öğretmen adaylarının GeoGebra dinamik geometri yazılımında sinüs fonksiyonunu oluşturmak amacıyla giriş bölümüne $\sin(x)$ ifadesini yazarak ilgili fonksiyon grafiğini oluşturdukları görülmüştür. Böylece $sinx$ fonksiyonunun grafiği GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulmuştur. Oluşturulan bu grafik üzerinde düşünmeye başlayan Grup 7 arasında aşağıdaki tartışma yaşanmıştır:

ÖA26: $sinx$ yazdık. Bir de ne ekleyelim, h mı olsun?
ÖA25: h diyebiliriz ama h'ın ne olduğu belli değil. Ne kadar yüksek olduğu yazılmamış ki soruda.
ÖA26: Farklı bir şey ekleyelim.
ÖA25: Bir şey ekleyince grafik değişti.
ÖA26: Yukarı geldi grafik.
ÖA25: Bak +1 yazınca sola doğru kaydı orijindeki nokta.
ÖA26: Grafik tamamen 1 birim yukarı kaydı +1 yazınca.
ÖA25: Nasıl yapacağız o zaman? $sinx + h$ yazsak olur mu?

GeoGebra çalışma sayfasında çalışmaya devam eden Grup 7, giriş bölümüne $\sin(x) - 1$ ifadesini yazarak ikinci bir fonksiyon grafiği oluşturmuştur. Daha sonra bu grafiklerin sağa ve sola ötelenmesiyle çeşitli denemeler gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte ÖA26, yapılan ötelemelerin yalnızca görsel değişiklik yarattığını; ancak dikey eksende bir öteleme yapılmadığı için alan ölçüsünde bir değişiklik oluşmadığını ifade etmiştir. Bu doğrultuda, problem durumuna uygun bir masa oluşturabilmek için fonksiyon grafiklerinin nasıl konumlandırılması gerektiği üzerine tartışılmış ve problemde masanın boyutlarına ilişkin bir bilginin verilmemesi nedeniyle bu değerlerin kendileri tarafından belirlenmesi gerektiği ifade edilmiştir. Bu karar doğrultusunda, dikdörtgen şeklindeki masanın x ekseninde -6 ile $+6$ noktaları arasında sınırlı olması kararlaştırılmıştır. Ardından, 'integralarasında' komutu kullanılarak iki eğri arasında kalan bölge belirlenmiştir. Gerçekleştirilen eylem ile ilgili GeoGebra çalışma sayfasına ait görsel Şekil 4.180'de sunulmuştur.



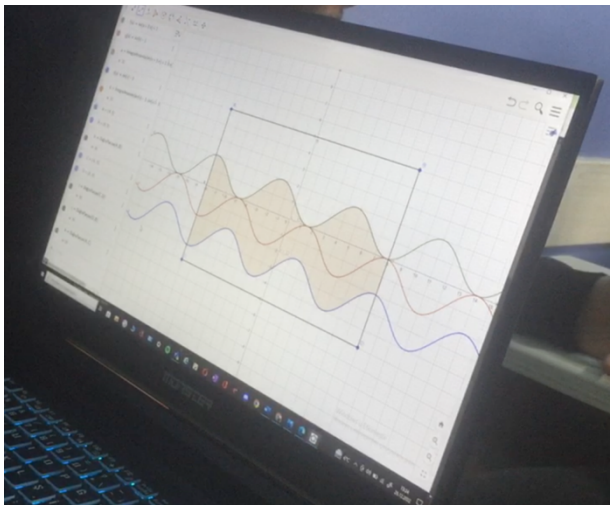
Şekil 4.180: Grup 7'nin 'integralarasında' komutunu kullanmasına ilişkin görsel – Epoksi görevi

'integralarasında' komutunun kullanılmasının ardından GeoGebra çalışma sayfasına bir sinüs grafiği daha ekleyen Grup 7, ÖA26 tarafından sunulan önermeyi test etmek amacıyla eğriler arasındaki alanı bu komut yardımıyla belirlemiştir. Elde edilen iki bölgenin alanlarının birbirinden farklı olduğu görülünce, öğretmen adayları arasında aşağıdaki tartışma yaşanmıştır:

ÖA25: Ben demiştim. Değişir demiştim. Bak gördün mü?
ÖA26: Ama değişmemesi lazım. Ben değişmez sanıyordum. Çünkü mantıken değişmemesi lazım gibi gelmişti. Çok garip. Çok az miktarda değişiyor. Değiştiğini gözlemledik (…) burası radyan cinsinden bir ifade. Biz ona sayı ekliyoruz. Sayıya radyan ekleyince saçma oldu sanki. Peki ben grafiği sağa doğru kaydırmak istediğimde ne yapmam lazım? Sağa ya da sola doğru kaydırmak için
ÖA27: Artı ya da eksi bir değer yazman lazım ama fonksiyondaki parantezin içinde yazacak. Mesela şuradaki $sin(x + 1)$ *gibi. +1 veya -1 yazdığım zaman sağa veya sola kayar.*
ÖA25: Tamam.
ÖA26: Pi sayısını yazamıyor muyum ben bu fonksiyona GeoGebra'da. Bilgisayardan pi sayısını nasıl yazacağım buraya?
ÖA25: İnternete pi sayısı diye yaz, oradan sembolü kopyalayarak yazmak istediğin yere yapıştır.
ÖA26: Bak görüyor musun? Eşitlendi. Orada $sin(\pi)$ *1'e eşit ya da eksi 1'e eşit yanlış hatırlamıyorsam.*
ÖA25: $sin(\pi)$ *sıfıra eşit.*

ÖA26: Tamam işte o zaman değişen bir şey olmaz, bu alanlar eşit çıkar. Yani fonksiyonu yazarken pi sayısını kullandığımızda alanlar aynı çıkıyor. Diğer türlü fonksiyona 3 ekleyerek ötelediğimizde aynı çıkmıyor. Çünkü içerisi radyan cinsinden olduğu için oraya da pi cinsinden bir değer yazmamız lazımdı. Dolayısıyla bu iki alanın eşit olduğunu gösterdiğimize göre ikisi de burada dursun problemin ilerleyişine göre ikisinden birini kullanırız.

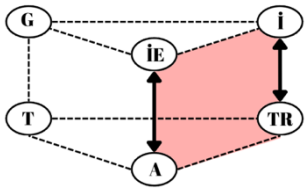
Eğriler üzerinde yapılan denemeler ve elde edilen çıkarımlar doğrultusunda matematiksel çalışmayı sürdüren Grup 7, GeoGebra'nın doğru parçası oluşturma aracını ve ızgara görünümünü kullanarak bir dikdörtgen oluşturmuştur. Böylece problem durumuna uygun olarak bir matematiksel model geliştirilmiş ve matematikselleştirme aşaması tamamlanmıştır. Oluşturulan matematiksel modele ilişkin görsel Şekil 4.181'de sunulmuştur.



Şekil 4.181: Grup 7 tarafından oluşturulan matematiksel model – Epoksi görevi

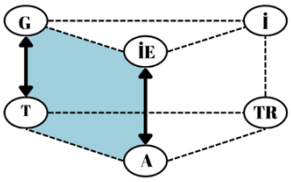
Problemin matematikselleştirilerek matematiksel modele dönüştürülmesi sürecinde gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, GeoGebra çalışma sayfasının olanakları kullanılarak sinüs fonksiyonu grafiklerinin oluşturulduğu ve sinüs fonksiyonuna eklenecek bir değişkenin grafik üzerindeki etkisinin tartışıldığı görülmektedir. Bu süreçte artefaktların problemin çözümüne yönelik olarak işlevsel biçimde kullanılmasına bağlı olarak fonksiyon grafiklerinin inşa edilmesi, enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği şekline değerlendirilmiştir. Ayrıca, fonksiyonlara ilişkin özelliklerin tartışıldığı ve değişkenlerin grafik üzerindeki etkisinin kavramsal düzlemde değerlendirildiği bu süreçte, teorik referanslara dayalı gerekçelendirmelerin yapılmış olması, söylemsel oluşumun da gerçekleştiğine işaret etmektedir.

Bu bağlamda, matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın, artefakt kullanımı ile yapılan inşaların yanı sıra oluşturulan nesneler üzerindeki gözlemler ve gerekçelendirmeler aracılığıyla [Ens-Söy] dikey düzleminde sürdürüldüğü görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.182'de sunulmuştur.



Şekil 4.182: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 1 – Epoksi görevi

GeoGebra çalışma sayfasında eğriler arasında kalan alanın belirlenmesine yönelik olarak, 'integralarasında' komutunun yönergelere uygun bir şekilde kullanıldığı görülmüştür. Komutun uygulanmasının ardından, iki fonksiyon grafiği ile belirlenen sınırlar arasında kalan bölgenin başarıyla görselleştirildiği görülmüştür. Bu süreçte artefaktların amaca yönelik olarak uygun bir şekilde kullanılması ve elde edilen çıktının problem durumuna uygun bir görselleştirme sağlaması, enstrümantal oluşum ve semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu doğrultuda, matematiksel çalışmanın problem durumunun çözümüne ilişkin keşif ve araştırma temelli eylemlerle [Sem-Ens] dikey düzleminde sürdürüldüğü belirlenmiştir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.183'te sunulmuştur.

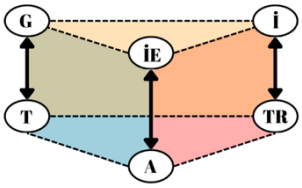


Şekil 4.183: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 2 – Epoksi görevi

Problem durumunun çözümünde kullanılabilecek başka bir fonksiyon grafiğinin GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulmasının ardından, Grup 8 öğretmen adaylarının bir bilişsel dengesizlik durumu yaşadığı gözlemlenmiştir. Bu bilişsel dengesizliği gidermek amacıyla sinüs fonksiyonu ve grafiğine ilişkin özellikler dikkate alınarak çeşitli denemeler yapılmış, bu süreçte gerçekleştirilen akıl yürütmeler söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir.

Söylemsel oluşumun sağlanmasıyla birlikte, problem durumuna uygun bir matematiksel model oluşturmak üzere doğru parçası oluşturma aracı kullanılmış ve GeoGebra çalışma sayfasının ızgara formundan yararlanılarak dikdörtgen temsili inşa edilmiştir.

Gerçekleştirilen bu eylemler, artefaktların özelliklerinden amaca uygun şekilde yararlanılmasıyla enstrümantal oluşumun; oluşturulan temsiller aracılığıyla modelin GeoGebra çalışma sayfasında görselleştirilmesiyle semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde yorumlanmıştır. Bu doğrultuda, yaşanan bilişsel dengesizliğin, inşa ve akıl yürütme süreçlerinin birlikte yürütülmesiyle üç dikey düzlemde gerçekleştirilen eylemler aracılığıyla giderildiği görülmektedir. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.184'te sunulmuştur.



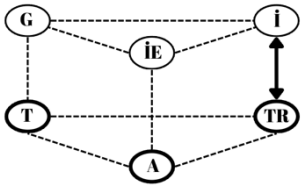
Şekil 4.184: Grup 7'nin matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – 3 – Epoksi görevi

4.4.3.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne geçilmesiyle birlikte, Grup 7 öğretmen adaylarının GeoGebra çalışma sayfasında ızgara görünümünden yararlanarak dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunlukları birim sayma yöntemiyle belirlediği görülmüştür. Problem durumuna uygun şekilde, GeoGebra çalışma sayfasında oluşturulan 3 farklı sinüs fonksiyonu grafiği arasında kalan bölgelerin alanlarının eşit olduğu ve her bir alanın 32 birim kare olduğu ifade edilmiştir. Dikdörtgen modelinin uzun kenarının 16 birim, kısa kenarının ise 10 birim olarak belirlendiği; buna bağlı olarak toplam alanın 160 birim kare olduğu ifade edilmiştir. Bu sonuca dayanarak her 5 metrekarelik alanda 1 metrekare epoksi kullanılması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Gerçekleştirilen bu işlemlerle birlikte, Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşaması tamamlayarak matematiksel sonuca ulaştığı görülmüştür.

Matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, dikdörtgenin kenar uzunluklarını GeoGebra ızgara görünümü yardımıyla birim cinsinden belirlendiği; iki fonksiyon arasında sınırlandırılmış alanın ise 'integralarasında' komutu

aracılığıyla cebir penceresinde görüntülenerek tespit edildiği görülmüştür. Dikdörtgenin alanı, kısa ve uzun kenarların çarpımıyla birim kare cinsinden hesaplanmıştır. Bu süreçte, uzunlukların birim, alanların birim kare ile ifade edilmesi temsil bileşeninin; alan hesaplama sürecinde integral komutunun ve cebir penceresinin işlevsel şekilde kullanılması artefakt bileşeninin kullanıldığına işaret etmektedir. Ayrıca, dikdörtgenin alanı ve epoksi miktarının belirlenmesinde alan ve oran kavramlarına ilişkin teorik bilgilerin kullanılmasından dolayı söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirme yapılmıştır. Grup 7'nin Epoksi görevini çözerken matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.185'te sunulmuştur.



Şekil 4.185: Grup 7'nin matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

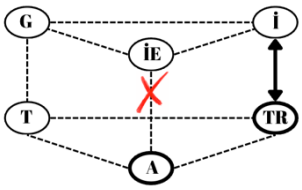
4.4.3.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Elde edilen matematiksel sonucun gerçek yaşama aktarılması için gerçekleştirilen yorumlama ve doğrulama aşamasında Grup 7 öğretmen adayları arasında aşağıdaki tartışma yaşanmıştır:

ÖA26: Eğriler arasında bulduğumuz alan toplam alanın beşte biri, yani her beş metre karelik bir masa istendiği zaman bir metrekare epoksi maddesi oluyor. Bir müşteri geldiğinde ben 240 metrekarelik bir masa istiyorum diyecek. O oranı belirttiğimizde. masayı o şekilde alacak işte, beşte bir, onda iki olacak oran. O zaman 24'te 48 olur, 240 metrekarede 48 metrekare epoksi kullanacaksın.
ÖA25: Diğer grupta bir şey eklemişler. Alanı değiştirebiliyorlar. Neydi o ya?
ÖA24: Sürgü.
ÖA26: Çok iyi. Tebrik ederim. Gerçekten aklıma gelmedi. Biz sadece eğrilerin oluşturacağı desenden hareket ettik. Eğri veya uzunlukların değişimiyle ilgili bir çalışma yapabilirmişiz.

Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 7 öğretmen adaylarının oluşturdukları matematiksel model ile bu modele ilişkin çözüm sürecini gözden geçirdikleri ve oran kavramı üzerinden akıl yürütmeye devam ettikleri görülmüştür.

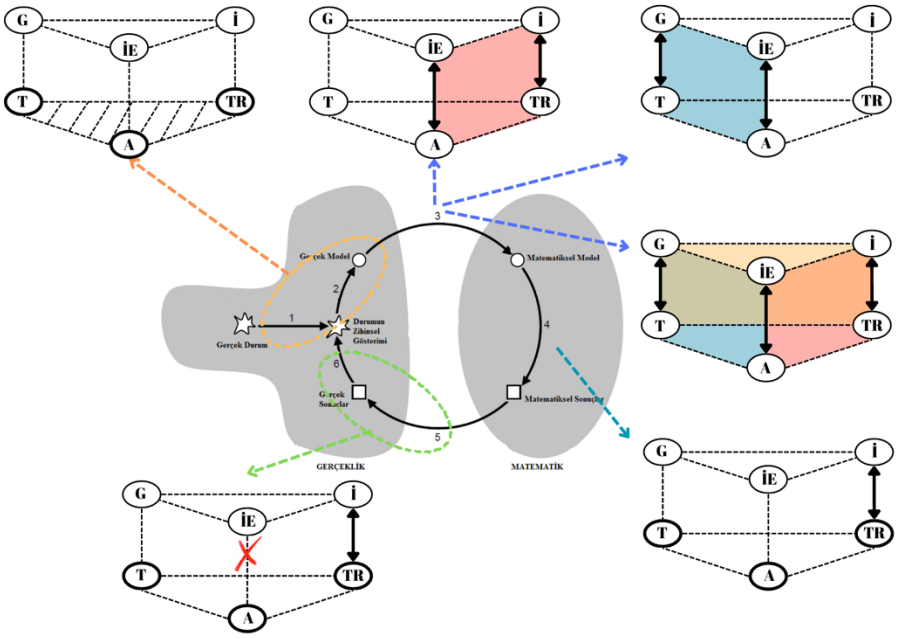
Diğer grupların çalışmalarında GeoGebra dinamik geometri yazılımının sürgü özelliğinden yararlanıldığı dikkate alındığında, Grup 7'nin artefaktları işlevsel bir biçimde kullanamaması sebebiyle matematiksel modeli zenginleştiremediği söylenebilir. Grup 7'nin yalnızca tek bir matematiksel model oluşturarak belirli bir sonuca ulaşması ve bu modelin oran kavramı temelinde farklı durumlara uygulanabilirliğine yönelik gerekçelendirme yapması, söylemsel oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Grup 7'nin Epoksi görevini çözerken gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.186'da sunulmuştur.



Şekil 4.186: Grup 7'nin yorumlama ve değerlendirme aşamasındaki matematiksel çalışma – Epoksi görevi

4.4.3.5 Grup 7'nin Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 7 öğretmen adaylarının Epoksi görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.187'de sunulmuştur.



Şekil 4.187: Grup 7'nin Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 7'nin matematiksel çalışması, problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanılmasıyla başlamıştır. Bu aşamada, problem durumunda yer alan kavramlara ait temsillerin ve bu kavramlara ait özelliklerin dikkate alındığı, aynı zamanda problemin bağlamında işlevsel olabilecek artefaktların belirlendiği görülmüştür. Böylece, probleme ilişkin matematiksel yapıların tanımlanmasıyla kavramsal derinliği arttıracak nitelikte eylemlerin gerçekleştirildiği söylenebilir.

Matematikselleştirme aşamasında üç farklı eylemin öne çıktığı görülmektedir. Bunlardan ilki, matematiksel modeli oluşturmak için artefaktların işlevsel bir şekilde kullanılması; ikincisi matematiksel temsillerin GeoGebra ortamında görselleştirilmesidir. Bu iki eylem matematiksel çalışmanın [Sem-Ens] dikey düzleminde ilerlediğini göstermektedir. Devamında, tüm dikey düzlemleri içeren çok yönlü bir matematiksel yapı inşa edilmiş ve matematiksel model oluşturulmuştur. Bu durum, matematiksel modelin sistematik bir biçimde inşa etme, görselleştirme ve gerekçelendirme süreçlerini içerecek şekilde oluşturulduğu şeklinde yorumlanabilir.

Matematiksel modelin çözümüne yönelik gerçekleştirilen matematiksel olarak çalışma aşamasında, Grup 7 öğretmen adaylarının uygun temsilleri ve artefaktları kullanarak problemde yer alan verileri elde ettiği, bu veriler üzerinden yürütülen akıl yürütmeler yoluyla söylemsel oluşumu gerçekleştiği görülmektedir. Bu durum, matematiksel olarak çalışma sürecinin kavramsal düzeyde yürütüldüğünü ve akıl yürütme ile gerekçelendirmelerin ön planda olduğunu ortaya koymaktadır.

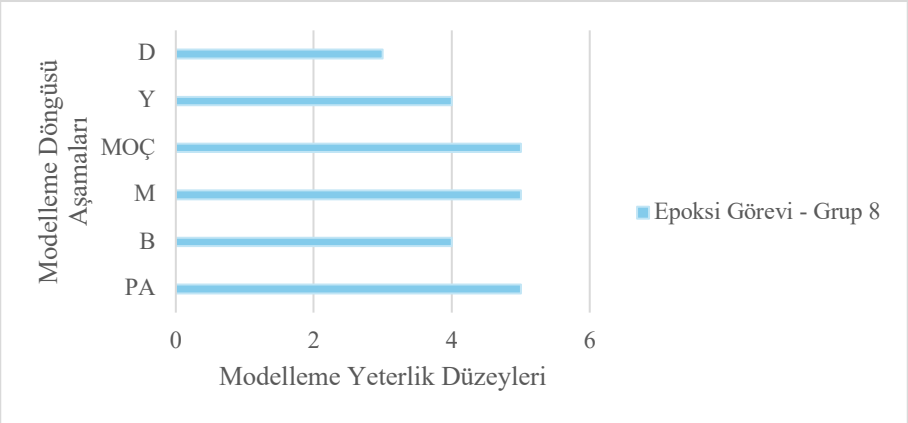
Yorumlama ve doğrulama aşamalarında epistemolojik düzlemdeki bileşenlerin kullanıldığı görülmektedir. Özellikle, uzunluk ve alan ölçme birimlerine ait temsillerin matematiksel sonucun yorumlanması sürecinde dikkate alındığı anlaşılmaktadır. Ancak, oluşturulan matematiksel modelin zenginleştirilmesine yönelik gerçekleştirilen eylemlerde artefaktların işlevsel biçimde kullanılamadığı belirlenmiştir. Enstrümantal oluşumun gerçekleştirilememesi sonucu oluşan kopukluklara rağmen, elde edilen matematiksel sonucun farklı durumlarda da uygulanabileceğine ilişkin yapılan gerekçelendirmeler söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Bu durum, artefaktların etkili bir şekilde kullanılması nedeniyle modelin geliştirilememesine karşın, ortaya çıkan matematiksel sonucun kavramsal düzeyde açıklanmaya çalışıldığını göstermektedir.

Matematiksel çalışma süreci genel olarak incelendiğinde, çeşitli oluşum süreçlerinin ve dikey düzlemlerde gerçekleştirilen eylemlerin bir arada bulunduğu; düzlemler arası geçişlerin ise çoğu zaman esnek bir şekilde ortaya koyulduğu söylenebilir. Özellikle matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen üç farklı eylem ile modelin oluşturulması, sürecin sistematik ve bütüncül bir yaklaşımla yürütüldüğünü ortaya koymaktadır. Sürecin büyük bölümünde söylemsel oluşumun baskın olması, akıl yürütme ve gerekçelendirme becerilerinin ön planda olduğunu göstermektedir.

4.4.4 Grup 8'in Matematiksel Çalışması – Epoksi Görevi

Grup 8'in Epoksi görevini çözmek için gerçekleştirdiği matematiksel çalışma MYDR ile incelendiğinde, problemin anlamlandırıldığını gösteren ifadelere yer verildiği ve verilenlerle istenenler arasında anlamlı ilişkiler kurulduğu görülmüştür. Bu doğrultuda, problemi anlama aşamasında Düzey 5'te yer aldıkları belirlenmiştir. Problemin çözümünde kullanılacak veriler dikkate alınarak geliştirilen gerçekçi varsayımlar doğrultusunda yapılan sadeleştirmeler, basitleştirme aşamasının Düzey 4 olarak değerlendirilmesine yol açmıştır. Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, gerçekçi varsayımlar doğrultusunda doğru bir matematiksel model oluşturulmuş; bu nedenle matematikselleştirme aşaması Düzey 5'te bulunulduğu yönünde değerlendirilmiştir. Benzer şekilde, oluşturulan matematiksel modelin çözümünün doğru bir şekilde gerçekleştirilmesinden dolayı matematiksel olarak çalışma aşamasında Düzey 5'te bulunulduğu tespit edilmiştir.

Ancak, ulaşılan matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlanmasından dolayı yorumlama aşamasında Düzey 4'te; kısmen yürütülen doğrulama yaklaşımıyla belirlenen hataların bir ölçüde düzeltilmesi nedeniyle doğrulama aşamasında Düzey 3'te bulunulduğu tespit edilmiştir. Bu doğrultuda Grup 8'in Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının MYDR'ye göre incelenmesiyle elde edilen bulguların özeti Şekil 4.188'de sunulmuştur.

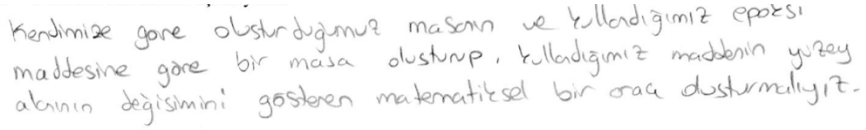


Şekil 4.188: Grup 8'in matematiksel modelleme döngüsündeki yeterlik düzeyleri – Epoksi görevi

Modelleme döngüsünün aşamalarında sergilenen modelleme yeterlikleri göz önünde bulundurulduğunda, Grup 8'in problemi anlama, basitleştirme, matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında yüksek sergilediği; buna karşılık yorumlama ve doğrulama aşamalarında diğer aşamalara göre düşük bir performans ortaya koyduğu görülmektedir. Epoksi görevinin çözümü için gerçekleştirilen matematiksel çalışmada MYDR'den toplam 20 puan elde eden Grup 8'in, *'kabul edilebilir düzeyde'* modelleme yeterliğine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu doğrultuda, Grup 8 öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren matematiksel görevin çözümü için matematiksel çalışma yürütebildiği kabul edilmiştir. Grup 8 tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışma, matematiksel modelleme döngüsünün aşamalarına göre bölümlere ayrılarak MÇA Teorisinin bileşenleri, oluşum süreçleri ve dikey düzlemler ışığında analiz edilmiştir.

4.4.4.1 Problemi Anlama ve Basitleştirme Aşamalarının Analizi

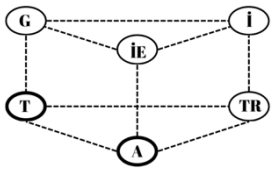
Grup 8'in Epoksi görevinin çözümü için gerçekleştirmiş olduğu matematiksel çalışma, problem durumu ve yönlendirilmiş keşif sorularını içeren çalışma yapraklarının dağıtılmasının ardından, 10 dakikalık bireysel çalışma süreciyle başlamıştır. Bireysel çalışma sırasında, öğretmen adaylarının problem durumunu anlamaya yönelik hazır oluş sorularına yanıt verdikleri, yönlendirilmiş keşif sorularını inceledikleri gözlemlenmiştir. Bu noktada, problem durumunu kendi cümleleri ile açıklayan ÖA30'un çalışma yaprağı alıntısına Şekil 4.189'da yer verilmiştir.



Şekil 4.189: ÖA30'un çalışma yaprağı alıntısı – Epoksi görevi

Problem durumunun anlaşıldığına ilişkin ifadelerin yazılı hale getirilmesinin ardından Grup 8 öğretmen adayları yönlendirilmiş keşif sorularına yanıt vermeye devam etmiştir. Öğretmen adayları, problemin çözümü için oluşturulacak masa modelinin boyutlarının kendileri tarafından belirlenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda, GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılarak farklı boyutlarda masa tasarımları yapılabileceği; bu süreçte dikdörtgen biçiminde bir masa modeli ve iki farklı sinüs fonksiyonunun grafiklerinin oluşturulması gerektiği belirtilmiştir. Ayrıca, GeoGebra'nın sunduğu özelliklerden yararlanılarak problem durumuna uygun alan ölçümlerinin gerçekleştirilebileceği ifade edilmiştir.

Problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının çözüm sürecine yönelik olarak dikdörtgen ve sinüs fonksiyonu temsillerini kullanmayı planladığı görülmüştür. Bu durum, temsil bileşeninin kullanıldığı yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, problem durumunun çözümüne ulaşmak amacıyla GeoGebra gibi teknolojik araçların kullanımını planlamaları, artefakt bileşeninin kullanımına işaret etmektedir. Grup 8'in Epoksi görevini çözerken problemi anlama ve basitleştirme aşamalarında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.190'da sunulmuştur.



Şekil 4.190: Grup 8'in problemi anlama ve basitleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

4.4.4.2 Matematikselleştirme Aşamasının Analizi

Problemin anlaşılması ve basitleştirilmesinin ardından, Grup 8 öğretmen adaylarının GeoGebra çalışma sayfasında bulunan giriş bölümüne $\sin(x)$ ve $\sin(2x)$ ifadelerini yazdığı görülmüştür. Fonksiyon grafiklerinin oluşturulması sürecinde grup içinde aşağıdaki şekilde bir tartışma yaşanmıştır:

ÖA29: Biraz yukarı çıksın bu grafik. Üst üste oldular. Biraz daha yukarıda olsun biri.

ÖA28: Nasıl yazacağız o zaman diğer fonksiyonu?

ÖA30: Çok uzun değil mi bu grafikler? Sonsuza kadar gidiyorlar.

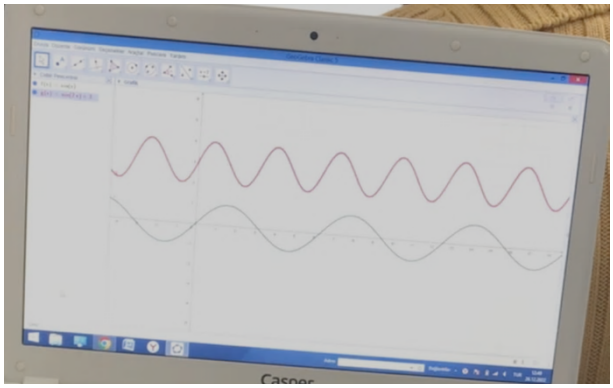
ÖA29: Biraz daha arttırsan, +5 desen mesela.

ÖA30: Dalgalar çok sık oldu bence.

ÖA29: Tamam bence iyi oldu şu an. Bu iki dalganın arasında alacağız, iyi değil mi?

ÖA28: Bence +3 yapalım şu şekilde.

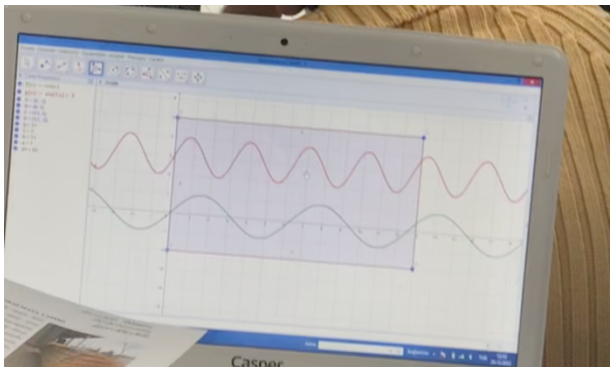
Yukarıdaki tartışmanın ardından, Grup 8 öğretmen adaylarının giriş bölümüne $sin(x)$ ve $sin(2x) + 3$ ifadelerini yazarak iki farklı sinüs fonksiyonuna ait grafik oluşturduğu gözlemlenmiştir. Yapılan eylemlere ilişkin görsel Şekil 4.191'de sunulmuştur.



Şekil 4.191: Grup 8'in oluşturduğu sinüs fonksiyonlarına ilişkin görsel – Epoksi görevi

Fonksiyon grafiklerinin oluşturulmasının ardından, problem durumuna uygun bir masa inşa edilebilmesi için GeoGebra yazılımındaki çokgen oluşturma aracı kullanılmıştır. Izgara görünümünden yararlanılarak çalışma sayfasında bir dikdörtgen oluşturulmuştur. Bu dikdörtgenin, gerçek yaşamda 12 kişilik bir masayı temsil ettiğinin varsayılmıştır. Ayrıca, farklı ölçülere sahip masa modellerinin oluşturulmasıyla elde edilen sonuçların birbirleriyle karşılaştırılabileceği ifade edilerek matematiksel model oluşturulmuştur (Şekil 4.192). Bu süreçte, oluşturulan masa modelinin gerçek yaşam durumuyla ilişkilendirilmesi için oran-orantı kavramının kullanılması gerektiği belirtilmiş ve Grup 8 öğretmen adayları arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

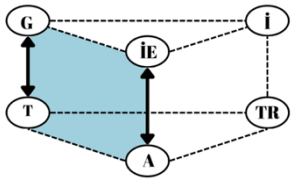
ÖA29: Şimdi biz $\sin x$ *ve* $\sin(2x) + 3$ *fonksiyonlarının grafiklerini çizdik. Düşündüğümüz şey bu iki fonksiyon grafiği arasında kalan alan mı?*
ÖA28: Evet şimdi biz iki sinüs dalgasının arasını doldurabiliriz. Buraya bir de dikdörtgen şeklinde masa oluşturacağız. Sinüs dalgalarının arasında kalan parçayı epoksi malzemesi ile dolduracağız. Evet problemi doğru anlamışız. Ama problemde diyor ya epoksi maddesi kullanılan yüzey alanının değişimi diye. Değişimi nasıl göstereceğiz?
ÖA30: Değiştirmesek de bir tanesini yapalım öncelikle. Sonra farklı masalar oluşturup nasıl değiştiğini buluruz.
ÖA28: Aradaki değişim miktarını mı bulacağız?
ÖA29: Mesela grafikte gösterebiliriz o zaman değişimi. Ya da tablo oluştururuz.
ÖA28: Sinüs eğrilerini değiştirmesek de masanın uzunluklarında değişiklik yapalım o zaman.



Şekil 4.192: Grup 8'in oluşturduğu matematiksel model – Epoksi görevi

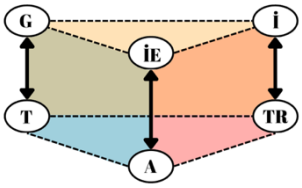
Grup 8'in gerçekleştirdiği grup tartışması ve eylemler incelendiğinde, problem durumunun Matematikselleştirilerek bir matematiksel model oluşturduğu görülmektedir. Matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen eylemler değerlendirildiğinde, sinüs fonksiyonlarına ait temsillerin GeoGebra çalışma sayfasının giriş bölümüne yazılmasıyla fonksiyon grafiklerinin inşa edildiği; grafiklere sabit terimlerin eklenmesiyle fonksiyonlarda meydana gelen ötelemelere ilişkin gözlemler yapıldığı belirlenmiştir. Bu süreçte, uygun bir artefaktın seçilerek matematiksel temsillerin inşa edilmesi ve görselleştirilmesi, enstrümantal oluşum ve semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Dolayısıyla, matematikselleştirme aşamasında gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın, problemin çözümüne yönelik keşif ve araştırmaları içeren, artefakt aracılığıyla gerçekleştirilen inşa

süreçleriyle [Sem-Ens] dikey düzleminde başladığı görülmektedir. Gerçekleştirilen eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.193'te sunulmuştur.



Şekil 4.193: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması 1 – Epoksi görevi

Problem durumuna uygun matematiksel modelin oluşturulması sürecinde, GeoGebra çalışma sayfasında yer alan çokgen oluşturma aracının kullanıldığı ve ızgara görünümünden yararlanılarak bir dikdörtgenin inşa edildiği görülmüştür. Bu bağlamda, seçilen artefaktın amaca yönelik ve işlevsel biçimde kullanılması enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, problem durumuna ilişkin matematiksel modelin oluşturulması ve elde edilen verilerin grafik ya da tablo aracılığıyla sunulmasının planlanması, semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Oluşturulan matematiksel modelin belirli bir durumu temsil ettiğinin belirtilmesi ve farklı durumlara yönelik gözlemlerin yapılabilmesi amacıyla yeni modellerin oluşturulmasının planlanması; günlük yaşam durumları ile karşılaştırmalar yapılabilmesi için oran ve orantı kavramlarının kullanılacağının ifade edilmesi, söylemsel oluşumun gerçekleştiğine işaret etmektedir. Bu doğrultuda, gerçekleştirilen keşif ve araştırmalar sonucunda elde edilen verilerin tablo yardımıyla sunulması ve günlük yaşam bağlamında yorumlanması, üç dikey düzlemde yürütülen eylemlerle matematikselleştirme aşamasının tamamlandığını göstermektedir. Grup 8'in Epoksi görevine ilişkin matematikselleştirme sürecinde gerçekleştirdiği eylemlere dair MÇA diyagramı Şekil 4.194'te sunulmuştur.



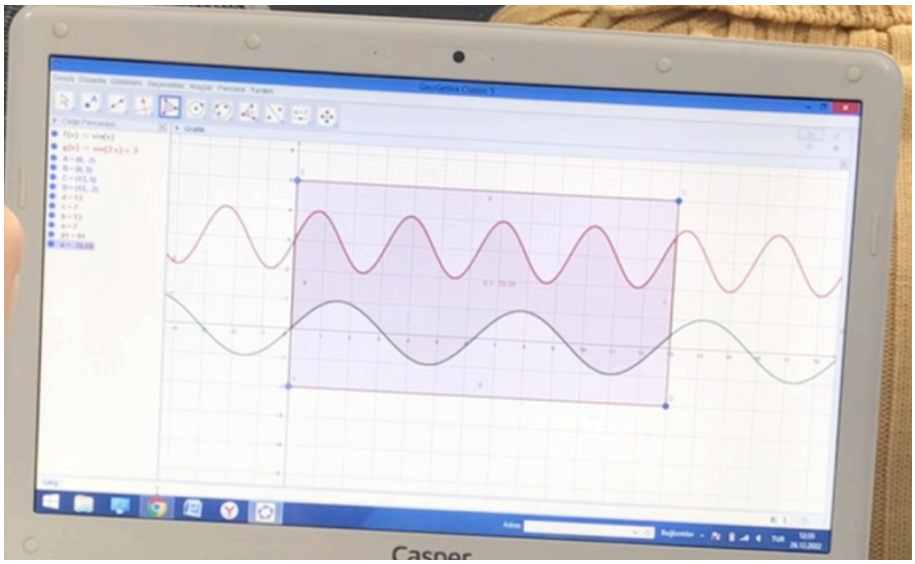
Şekil 4.194: Grup 8'in matematikselleştirme aşamasındaki matematiksel çalışması 2 – Epoksi görevi

4.4.4.3 Matematiksel Olarak Çalışma Aşamasının Analizi

Oluşturulan matematiksel modelin çözümüne yönelik matematiksel olarak çalışma aşamasına geçen Grup 8 öğretmen adaylarının, modelde yer alan bölgelerin alanlarının belirlenerek not edilmesi gerektiğini ifade ettikleri görülmüştür. Bu doğrultuda, fonksiyon grafiklerinin arasında kalan bölgenin alanını hesaplamak amacıyla GeoGebra yazılımında 'integralarasında' komutu kullanılmıştır. Komutun uygulanması sırasında yönergelere uygun biçimde masayı temsil eden şeklin sınırları dikkate alınarak iki fonksiyon grafiği ile dikdörtgen tarafından sınırlandırılmış bölgenin alanı belirlenmiştir. Elde edilen sayısal değer not edilerek problem bağlamında kullanılmak üzere kayıt altına alınmıştır. İki eğri arasında kalan alanın belirlenmesi sürecinde 'integralarasında' komutunun kullanımı sırasında Grup 8 öğretmen adayları arasında aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir:

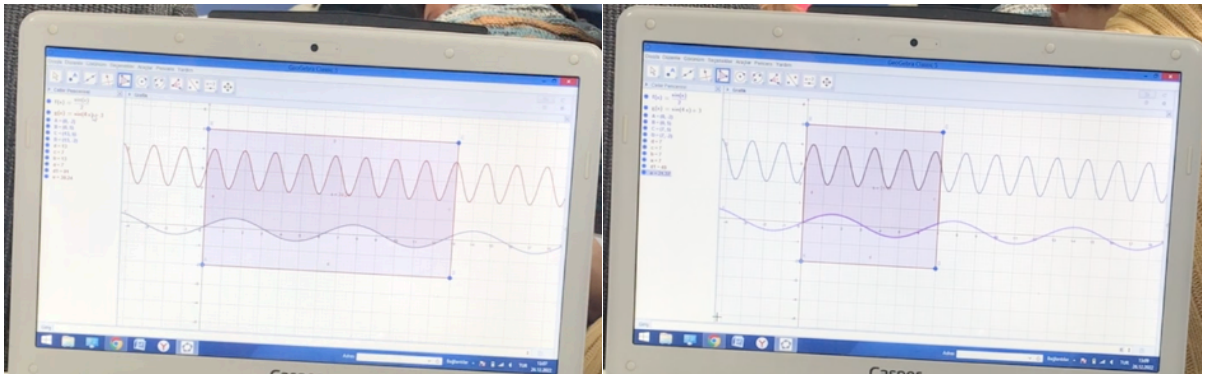
ÖA31: Şimdi bütün fonksiyonlara göre farklı farklı masalar oluşturalım, bütün bulduğumuz sonuçları tablolaştıracağım. $g(x)$ *fonksiyonunu* $sin(2x) + 3$ *olarak yazdık. Ama* $+3$ *ifadesini* $sin2x$ *fonksiyonunu yukarıya öteleyecek şekilde yazdık. Ona dikkat edelim.*
ÖA28: $2x$*'i parantez içinde yaz o zaman*
ÖA31: $2x$*'i parantez içine almamıza gerek yok ki.*
ÖA28: Ama bak $sin(2x + 3)$ *ile* $sin(2x) + 3$ *aynı şey değil. GeoGebra'da parantezsiz yazınca otomatik olarak parantezi ekledi.*
ÖA29: Tamam o zaman başlangıç noktasını x *eşittir 0 olarak, bitiş noktasını* x *eşittir 13 olarak yazıyorum bu komuta. Oluşturduğumuz dikdörtgene göre yazdım.*
ÖA30: Yani bu masanın kısa kenarı 7, uzun kenarı 13 birim oldu. 3 tane daha farklı masa yapsak yeter bence.
ÖA31: Tamam, iki eğrinin arasındaki alan yani epoksi maddesi kullanılacak olan alan 39,08 birim kare olarak bulundu. Bunu not ediyorum.

Gerçekleştirilen tartışmanın ardından 'integralarasında' komutu kullanılarak iki eğri arasında kalan bölgenin belirlenmesine ilişkin görsel Şekil 4.195'te sunulmuştur.



Şekil 4.195: Grup 8'in 'integralarasında' komutu kullanmasına ilişkin görsel

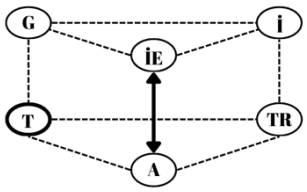
Gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın ardından, problem durumuna uygun şekilde farklı senaryoları incelemek amacıyla dikdörtgenin kenar uzunlukları ve sinüs fonksiyonları değiştirilerek yeni masa modelleri oluşturulmuştur. Bu süreçte, GeoGebra çalışma sayfası üzerinde benzer eylemlerin tekrarlandığı görülmüştür. Grup 8'in farklı durumları incelemek amacıyla gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin görseller Şekil 4.196'da sunulmuştur.



Şekil 4.196: Grup 8'in incelediği farklı durumlara ilişkin görseller

Yeni durumların incelenmesi amacıyla gerçekleştirilen bu eylemler kapsamında, oluşturulan fonksiyon grafiklerinin ve dikdörtgenin sınırladığı alanın belirlenmesinde GeoGebra dinamik geometri yazılımının çeşitli özelliklerinden faydalanılmıştır. Bu durum, dinamik geometri yazılımının problemin çözümüne yönelik olarak amaca uygun şekilde kullanılması bakımından enstrümantal oluşumun gerçekleştirildiği yönünde değerlendirilmiştir. Ayrıca, problem

durumuna uygun bir matematiksel sonuçlara ulaşıldıktan sonra model üzerinde yapılan değişiklikler sırasında sinüs fonksiyonlarının yapılarına ilişkin yürütülen tartışmalarda epistemolojik düzlem bileşenlerinden temsil bileşeninin etkin biçimde kullanıldığı görülmüştür. Grup 8'in Epoksi görevini çözerken matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.197'de sunulmuştur.



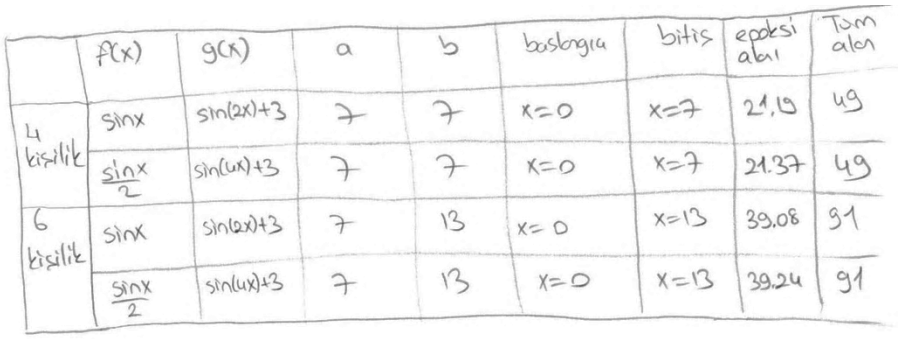
Şekil 4.197: Grup 8'in matematiksel olarak çalışma aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

4.4.4.4 Yorumlama ve Doğrulama Aşamalarının Analizi

Elde edilen matematiksel sonuçların yorumlanması ve doğrulanması için Grup 8 öğretmen adayları arasında aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir:

ÖA30: En son değişim grafiğini çizebiliriz demiştik ama GeoGebra'da grafik çizebilir miyiz acaba?
ÖA31: Değişim grafiğini çizin dedi, ne kadar değişiyor sonuçlar?
ÖA29: Bence grafik çizmeye gerek yok. Tablo haline getirelim. Bir de fiyat biçebiliriz oluşturduğumuz masalar için.
ÖA28: O zaman Word ya da Excel kullanabiliriz tablo çizmek için. Oradan hazırlasak değişim grafiği çizilebilir belki.
ÖA29: Bence biz elde ettiğimiz verileri tablo haline getirelim ve çalışma raporuna yazalım.

Gerçekleştirilen tartışma incelendiğinde, Grup 8 öğretmen adaylarının oluşturulacak tablonun hazırlanmasında teknolojik araçlardan faydalanma düşüncesine sahip olduğu görülmektedir. Ancak grup tartışması sonucunda, elde edilen verilerin çalışma raporunda yazılı olarak tablo biçiminde sunulmasına karar verilmiştir. Bu doğrultuda oluşturulan tabloya ilişkin çalışma yaprağı alıntısı Şekil 4.198'de sunulmuştur.

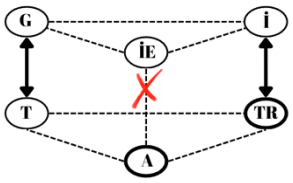


	f(x)	g(x)	a	b	başlangıç	bitiş	epoksi alanı	Tüm alan
4 kişilik	sinx	sin(2x)+3	7	7	x=0	x=7	21,19	49
	sinx/2	sin(ux)+3	7	7	x=0	x=7	21.37	49
6 kişilik	sinx	sin(2x)+3	7	13	x=0	x=13	39.08	91
	sinx/2	sin(ux)+3	7	13	x=0	x=13	39.24	91

Şekil 4.198: Grup 8'in farklı durumları karşılaştırmak için oluşturduğu tablo – Epoksi görevi

Tablonun hazırlanmasında kullanılan verilerin, problem durumuna uygun olarak geliştirilen farklı matematiksel modellerden elde edildiği; gerçek yaşamda üretilebilecek bir masa için fikir oluşturabilecek çıktılara tabloda yer verildiği Grup 8 öğretmen adayları tarafından ifade edilmiştir. Masa modellerinin oluşturulması sürecinde şekil ve diyagram çizme stratejisinin kullanılmasının problem durumunun modellenmesine katkı sunduğu, ayrıca elde edilen verilerin tabloya aktarılması yoluyla farklı modeller arasında meydana gelen değişimlerin fark edilebildiği belirtilmiştir. Grup üyeleri, gerçek yaşam bağlamında bireylerin problem durumuna uygun biçimde kendi tercihlerini yansıtan masa tasarımları yapabileceğini ve bu tasarımlarda epoksi maddesi kullanılacak alanın modelden modele değişkenlik gösterebileceğini ifade ederek matematiksel çalışmayı tamamlamıştır.

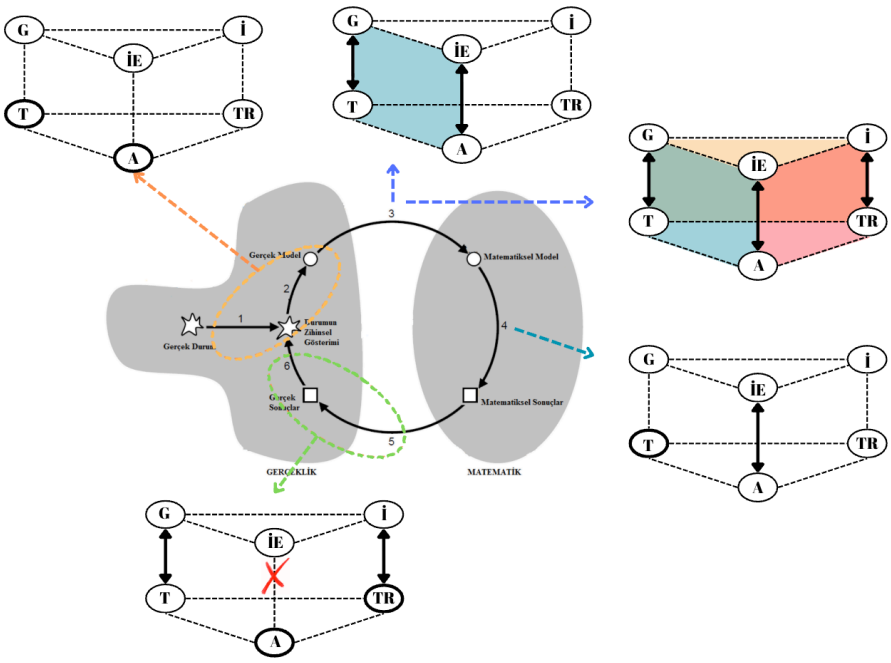
Yorumlama ve doğrulama aşamasında gerçekleştirilen eylemler incelendiğinde, Grup 8'in farklı matematiksel modellerden elde edilen çıktıları GeoGebra, Word veya Excel gibi teknolojik araçlarla tablo ya da grafiksel biçimlerde sunulabileceğini düşündüğü; ancak bu araçları amaca uygun bir şekilde etkin kullanamadığı için elde edilen verilerin grup raporunda doğrudan yazılı tablo biçiminde yer aldığı görülmüştür. Tablonun hazırlanması ve bu yolla matematiksel çıktılara görsel bir biçim kazandırılması, semiyotik oluşumun gerçekleştiği yönünde; elde edilen modellerin gerçek yaşam bağlamında referans alınabileceğine yönelik gerekçelendirmelerin yapılması ise söylemsel oluşumun gerçekleştiği yönünde değerlendirilmiştir. Grup 8'in Epoksi görevini çözerken yorumlama ve doğrulama aşamalarında gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin MÇA diyagramı Şekil 4.199'da sunulmuştur.



Şekil 4.199: Grup 8'in yorumlama ve doğrulama aşamasındaki matematiksel çalışması – Epoksi görevi

4.4.4.5 Grup 8'in Matematiksel Çalışmasının Analizi ile Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Grup 8 öğretmen adaylarının Epoksi görevine yönelik yürüttükleri matematiksel çalışmalar, modelleme döngüsünün aşamaları doğrultusunda MÇA Teorisi ışığında analiz edilmiştir. Bu sürece ilişkin genel özet Şekil 4.200'de sunulmuştur.



Şekil 4.200: Grup 8'in Epoksi görevindeki matematiksel çalışmasının özeti

Grup 8'in Epoksi görevini çözerken gerçekleştirdiği matematiksel çalışmanın, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında temsil ve artefakt bileşenlerinin kullanımıyla başladığı görülmektedir. Bu aşamada, matematiksel görevde yer alan temsillerin tamamlandığı; ancak artefaktların işlevsel olarak değil, yalnızca destekleyici bir unsur olarak kullanıldığı anlaşılmaktadır. Bu durum, kullanılan temsil ve araçların kavramsal bilgilerle yeterince

ilişkilendirilmediğini, dolayısıyla problem durumunun fark edildiğini ancak buna yönelik teorik gerekçelere dayalı açıklamaların sunulmadığını göstermektedir.

Matematikselleştirme aşamasında ise iki temel eylem gerçekleştirilmiştir. İlk olarak, artefaktların işlevsel biçimde kullanımıyla yapılan matematiksel inşalar yoluyla problem durumu görselleştirilmiş; ardından, tüm dikey düzlemleri kapsayan eylemlerle inşa, görselleştirme ve teorik referanslara dayalı akıl yürütme süreçleri bir araya getirilerek bütüncül bir matematiksel model oluşturulmuştur. Bu süreç, artefaktların amaca yönelik şekilde işlevselleştirilmesi ve ortaya konan akıl yürütmelerle modelin çok boyutlu bir yapıya kavuştuğunu göstermektedir.

Matematiksel modelin çözümüne ilişkin aşamalarda temsil bileşenin etkili bir şekilde kullanıldığı; GeoGebra gibi teknolojik araçların amaca uygun kullanımı sayesinde enstrümantal oluşumun gerçekleştirilerek matematiksel çözüme ulaşıldığı belirlenmiştir. Ancak yorumlama ve doğrulama aşamalarında artefaktların işlevsel olarak kullanılmadığı, dolayısıyla bu aşamada enstrümantal oluşumun sürdürülemediği görülmektedir. Bu noktada oluşan kopukluk, öğretmen adaylarının farklı stratejiler geliştirerek söylemsel düzlemde gerçekleştirdikleri akıl yürütmelerle telafi edilmiştir. Süreçte artefakt temelli bir ilerleme sağlanamamasına rağmen, oluşumlar arası geçişlerin sağlanması ve söylemsel oluşumun devreye girmesi, gerçekleştirilen matematiksel çalışmanın esnek bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Matematiksel çalışma sürecinde Grup 8 öğretmen adaylarının, epistemolojik düzlem bileşenlerinden başlayarak artefaktları problemin çözümüne yönelik işlevsel bir biçimde kullandığı pek çok eylem gerçekleştirildiği görülmüştür. Düzlemler ve oluşumlar arasında geçiş yapabilme becerisine sahip olan grubun özellikle matematikselleştirme aşamasında zengin ve çok yönlü matematiksel eylemler ortaya koyduğu; ancak diğer aşamalarda bu çeşitliliğin sınırlı kaldığı söylenebilir. Ayrıca, yorumlama ve doğrulama aşamalarında yaşanılan kopuklukların ardından geliştirilen akıl yürütme süreciyle birlikte problemin çözümüne yönelik stratejinin hızlı bir şekilde değiştirildiği belirlenmiştir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde, dört farklı matematiksel görev ayrı ayrı ele alınarak grupların epistemolojik düzlem bileşenlerini nasıl kullandıkları, oluşum süreçlerinde gerçekleştirilen eylemler ve dikey düzlemler arasındaki geçişleri nasıl yapılandırdıkları ortaya konulmuştur. Grupların yürüttüğü matematiksel çalışmalarda farklı epistemolojik bileşenlerin ve oluşum süreçlerinin harekete geçirilme biçimi, matematiksel modelleme sürecindeki bireysel farklılıkların MÇA Teorisi çerçevesinde incelenmesine olanak sağlamaktadır (Kuzniak, 2022; Nechache and Gómez-Chacón, 2022). Ayrıca, matematiksel modelleme sürecinin döngüsel yapısı dikkate alınarak, çözüm stratejilerinin geliştirilmesi, matematiksel modelin oluşturulması ve çözülmesi, ulaşılan matematiksel sonucun yorumlanması ve doğrulanması süreçlerinin nasıl gerçekleştirildiği tartışılmıştır. Tartışmalar, her bir görev özelinde grupların gerçekleştirdiği eylemlerin bütüncül olarak değerlendirilmesi ve bu eylemlerin modelleme yeterlik düzeyleri göz önünde bulundurulması ile yapılandırılmıştır.

5.1 Matematiksel Görevlere İlişkin Sonuç ve Tartışma

5.1.1 Stadyum Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Stadyum görevinin çözümü sürecinde ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, matematiksel modelleme yeterlikleri ve MÇA bileşenleri açısından incelendiğinde, grupların farklı yeterlik düzeylerine sahip oldukları ve çeşitli MÇA bileşenlerini kullanarak matematiksel çalışmalarını yapılandırdıkları belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel çalışmalarında ve MÇA bileşenleri arasındaki etkileşimlerde farklılıklar olduğunu göstermektedir.

Grup 1, Stadyum görevinin çözümü sırasında [Sem-Ens] düzleminde gerçekleştirdiği eylemlerde güçlükler yaşamış, ancak çözüm stratejisini değiştirerek matematikselleştirme aşamasına geri dönmüş ve söylemsel oluşumu da sürece dahil ederek matematiksel modelini yeniden yapılandırmıştır. Ardından, [Ens-Söy] düzleminde gerçekleştirdiği eylemlerle matematiksel modelin çözümünü tamamlamıştır. Bu durum, matematiksel modelleme sürecinin esnek bir yapıya sahip olduğunu ortaya koymakta (Blum and Borromeo Ferri, 2009); yaşanan tıkanıklıkların, düzlemler arası geçişlerle aşılabileceğini ve bu geçişlerin MÇA bileşenlerinin birbirini tamamlayıcı rolüyle süreci ileriye taşıyabildiğini göstermektedir.

Grup 2, modelleme sürecinin tamamında dikey düzlemler arasında geçişi etkili bir biçimde kullanmıştır. Özellikle matematiksel modelin oluşturulması, çözülmesi ve yorumlanması aşamaları, [Sem-Söy] düzleminde gerçekleştirilen akıl yürütme ve gerekçelendirme eylemleriyle temellendirilmiştir. Matematiksel olarak çalışma aşamasında ise temsiller, gerekçelendirmeler ve artefaktlar sistematik biçimde bir araya getirilmiş; bu yapı, 'tam matematiksel çalışma' olarak adlandırılan yapıya karşılık gelmiştir (Kuzniak and Nechache, 2021). Modelleme yeterliklerinin çeşitli düzeylerde sergilendiği süreçte, farklı oluşum süreçlerinin ve düzlemlerin etkin bir şekilde harekete geçirilmiş olması, MÇA'nın matematiksel modelleme sürecindeki işlevselliğini göstermektedir.

Grup 7, problem çözme sürecine zengin bir başlangıç yapmış; süreç boyunca teorik referanslardan aldığı desteği çözümün tüm aşamalarına taşımayı başarmıştır. Farklı aşamalarda tüm oluşum süreçlerini gerçekleştiren ve düzlemler arası geçişleri etkili bir şekilde ortaya koyan Grup 7, matematiksel çalışmanın sonunda epistemolojik düzlem bileşenlerini kullanarak kavramsal bütünlüğün sağlanmasına yardımcı olmuştur. Özellikle, matematiksel modelin [Ens-Söy] düzleminde gerekçelendirilerek, [Sem-Ens] düzleminde gerçekleşen ara eylemler ile çözülmesi, MÇA Teorisindeki düzlemler arası geçişin matematiksel çalışmayı yönlendirdiğini göstermektedir.

Grup 8, matematiksel çalışma sürecinde çeşitli oluşum süreçlerinde ve dikey düzlemlerde eylemler gerçekleştirmiş olsa da özellikle matematikselleştirme aşamasında enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşum sürecinde kopukluklar yaşamıştır (Menares Espinoza and Vivier, 2022). Bu kopukluklar, özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında eylemlerin yetersiz kalmasıyla birleşince, Grup 8'in modelleme yeterliğinin düşük seviyede kalmasına yol açmıştır. Problemi anlama ve basitleştirme aşamasında artefaktların desteği ile [Sem-Söy] dikey düzleminde güçlü bir şekilde başlamasına rağmen, matematikselleştirme aşamasında yaşanan kopukluk ve matematiksel olarak çalışma aşamasında düzlemler arası geçişin zenginleştirilememesi, modelleme sürecinde bütünlüğün sağlanamadığını göstermektedir.

Stadyum görevinde gerçekleştirilen matematiksel çalışmalara genel olarak bakıldığında, öğretmen adaylarının çoğunlukla semiyotik ve enstrümantal oluşumlarla sürece başladığı, ancak modelleme sürecini başarıyla tamamlayan grupların söylemsel oluşumu da sürece entegre ettiği görülmektedir. MÇA Teorisine göre, bu tür düzlemler arası geçişler, matematiksel çalışmanın hem tamamlanabilirliğini hem de anlamlılığını güçlendirmektedir (Kuzniak ve

Nechache, 2021). Ayrıca, modelleme yeterliği ile MÇA içindeki geçişlerin zenginliği arasında bir paralellik bulunduğu görülmüştür. Bu bağlamda, Stadyum görevinde kabul edilebilir düzeyde modelleme yeterliği sergileyen Grup 2 ve Grup 7, matematiksel çalışmalarında modelleme döngüsünün tüm aşamalarında MÇA'nın bileşenlerini ve oluşum süreçlerini harekete geçirebilmiştir.

Matematiksel çalışma sürecinde epistemolojik düzlem bileşenlerinin tüm gruplar tarafından etkin bir şekilde kullanıldığı görülmüştür. Ancak, temsil ve artefaktlar kullanılmasına rağmen teorik referanslar kullanılarak gerekçelendirilmediğinde, yapılan eylemler yüzeysel bir şekilde gerçekleştirilmiş ve kavramsal derinlik oluşturulamamıştır. Matematiksel çalışma sürecinde sadece şekil çizilmesi ya da yazılım araçlarının kullanılması, tek başına anlamlı bir matematiksel açıklama üretmeye yeterli olmamaktadır. Bu nedenle gerçekleştirilen eylemlerin, ilgili kavramların özellikleri ve teorik bileşenlerle desteklenerek gerekçelendirilmesi gerekmektedir.

5.1.2 Basketbol Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Basketbol görevinin çözümü için ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, matematiksel modelleme yeterlikleri ve MÇA bileşenleri açısından incelendiğinde, öğretmen adaylarının özellikle söylemsel oluşumu gerçekleştiren eylemleri sergilediği; ancak enstrümantal oluşumu etkin biçimde gerçekleştiremediği görülmüştür. Her grup, problemi anlama ve basitleştirme aşamasında epistemolojik düzlem bileşenlerini kullanarak, problemi matematiksel olarak kavrama ve çözüm sürecini planlama sürecinde söylemsel oluşumu gerçekleştiren eylemler ortaya koymuştur. Bu eylemler, problemin matematiksel olarak ifade edilmesinde akıl yürütme ve gerekçelendirmeleri içerse de MÇA Teorisinde yer alan diğer oluşum süreçleriyle bütünleşmediği için modelleme yeterlikleri sınırlı düzeyde kalmıştır.

Grup 1, Basketbol görevinin çözüm sürecinde modelleme döngüsünün her aşamasında söylemsel oluşumu gerçekleştirmiştir. Bu durum, problemin çözümü için gerekli açıklamaların yapıldığı ve gerekçelendirmelerin sunulduğu sistemli bir sürecin yürütüldüğü yönünde yorumlanabilir. Ancak, problemi anlama ve basitleştirme aşamaları ile matematiksel olarak çalışma aşamasında internet, GeoGebra ve hesap makinesi gibi artefaktlar kullanılmış olsa da bu araçların işlevsel hale getirilmesini sağlayacak bilişsel eylemlerin sergilenmemesi nedeniyle enstrümantal oluşum gerçekleştirilmemiştir. Bu bağlamda, Grup 1'in matematiksel

çalışmasının yapısal derinliğinin sınırlı kaldığı söylenebilir. Benzer şekilde, Grup 1'in matematiksel çalışma sürecinde semiyotik oluşumun da sınırlı kaldığı görülmüştür. Semiyotik oluşumun eksikliği ve enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmemesi, bu çalışmanın düşük düzeyde modelleme yeterliği ile sonuçlanmasına neden olmuştur.

Grup 2, Basketbol görevinin çözümü için gerçekleştirdiği matematiksel çalışmaya, epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanılmasıyla desteklenen semiyotik oluşum süreciyle başlamıştır. Bu doğrultuda, [Sem-Ens] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemlerle oluşturulan matematiksel modelin çözümü için sıralı adımlar izlenmiştir. Süreç boyunca artefakt kullanımına ilişkin bazı kopukluklar yaşanmış olsa da özellikle farklı çözüm stratejilerinin uygulanması noktasında artefaktların etkin bir biçimde kullanılmasıyla matematiksel sonuca ulaşılmıştır.

Basketbol görevinin çözümünde oldukça benzer bir süreç izleyen Grup 7 ve Grup 8, kavramsal açıklama, akıl yürütme ve gerekçelendirme stratejilerinden yararlanarak tüm aşamalarda söylemsel oluşumu gerçekleştiren eylemler sergilemiştir. Bu süreçte matematiksel kavramların özelliklerinden yararlanılmış; ancak matematiksel modelin oluşturulması sırasında görselleştirilen temsillerin artefaktlar kullanılarak inşa edilmemiş olması, modelleme sürecinin daha çok zihinsel düzlemde gerçekleştirildiğini göstermektedir. Bu durum, çoklu temsil sistemlerinin (Duval, 2005) devreye sokulamaması nedeniyle kavramlar arası geçişin ve doğrulama süreçlerinin zayıflamasına neden olmuştur. Sonuç olarak, Grup 7 ve Grup 8'in Basketbol görevine yönelik gerçekleştirdiği sergilediği matematiksel çalışmaların düşük düzeyde modelleme yeterliği ile sonuçlandığı görülmüştür.

Basketbol görevine ilişkin genel değerlendirme yapıldığında, yalnızca sözel gerekçelendirme ve akıl yürütmeye dayalı eylemlerle sınırlı kalınan çalışmaların yanı sıra, MÇA bileşenlerinin birlikte kullanıldığı ve düzlemler arası geçişin sağlandığı matematiksel çalışmaların daha anlamlı ve işlevsel olduğu görülmektedir. Ayrıca, tüm grupların matematiksel çalışmalarında yorumlama ve doğrulama aşamalarında söylemsel oluşuma dayalı açıklamalara yer verdikleri görülmüştür. Bu açıklamalar, elde edilen matematiksel sonuçların bağlamsal olarak kısmen yorumlanmasını sağlamış olsa da hataların düzeltilmesi yönünde herhangi bir eylemin gerçekleştirilmemesi ve doğrulama sürecine ilişkin adım atılmaması, matematiksel modelleme sürecinin tamamlayıcılığını zayıflatmaktadır. Bu durum, matematiksel modelleme sürecinde geri bildirim üretmenin önemine işaret etmektedir (Blomhøj and Kjeldsen, 2006).

5.1.3 Mostar Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Mostar görevinin çözüm sürecine yönelik olarak ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, matematiksel modelleme yeterlikleri ve MÇA bileşenleri açısından incelendiğinde, süreç boyunca MÇA bileşenlerinin etkin şekilde kullanılmasının modelleme yeterliğiyle olan ilişkisi açık bir biçimde ortaya çıkmaktadır. Tüm grupların, problemi anlama aşamasından itibaren epistemolojik düzlem bileşenlerini etkili bir biçimde kullanarak farklı oluşum süreçlerini harekete geçirdiği ve düzlemler arası geçişi sağladığı görülmüştür. Bu durum, özellikle Basketbol görevine kıyasla sürecin daha dengeli ve esnek biçimde ilerlediğini göstermektedir.

Grup 1, problemi anlama ve basitleştirme aşamaları ile matematikselleştirme aşamalarında enstrümantal oluşum ve söylemsel oluşum süreçlerini gerçekleştiren eylemler sergileyerek matematiksel modelin oluşturulmasını sağlamıştır. Ancak, bu aşamalarda gerçekleştirilen zengin eylemlere rağmen kullanılan artefaktların işlevselleştirilememesi ve yapılan eylemlerin matematiksel kavramın özellikleriyle yeterince gerekçelendirilememesi nedeniyle süreçte kesintiler yaşanmıştır. Bu kesintilerin giderilmesi amacıyla deneme-yanılma stratejisine başvurulması, farklı temsillerin kullanılması ve çeşitli gerekçelendirmelerin ortaya konması, düzlemler arası geçişin problem çözme sürecindeki işlevselliğini somut biçimde ortaya koymuştur (Kuzniak and Nechache, 2021; Nechache and Gómez-Chacón, 2022).

Grup 2, süreç boyunca temsil ve artefakt kullanımını çeşitli gerekçelendirme ve akıl yürütme süreçleriyle destekleyerek hem matematiksel modelin oluşturulmasında hem de çözümünde düzlemler arası geçişi başarıyla gerçekleştirmiştir. Böylece, MÇA Teorisi çerçevesinde ifade edilen *'matematiksel çalışmanın dolaşımı'* kavramına uygun bir matematiksel modelleme süreci ortaya konmuştur. Özellikle, süreç boyunca söylemsel oluşumun aktif olarak matematiksel çalışmaya entegre edilmesi, grubun akıl yürütme ve gerekçelendirme yoluyla üretkenliği destekleyen eylemler gerçekleştirmesine ve süreci kontrollü bir biçimde yürütmesine katkı sağlamıştır.

Grup 7 ise, gerçekleştirdiği matematiksel çalışmada farklı oluşum süreçlerini çeşitli aşamalarda devreye sokmuş, elde edilen sonuçların doğruluğunu sorgulayarak matematiksel işlemlerini yeniden yapılandırmıştır. Böylece, sadece çözüme ulaşmakla kalmayıp, çözümün doğruluğunu sınamaya ve gerekçelendirmeye odaklanmışlardır. Bu yaklaşım, modelleme sürecinin döngüsel ve esnek yapısını somut biçimde ortaya koyarken aynı zamanda yürütülen matematiksel

çalışmanın bilişsel derinliğini de göstermektedir (Blomhøj and Kjeldsen, 2006). Ayrıca, fark edilen hataların yeniden düzenlenmesi sürecinde yaşanan düzlemler arası geçişler, MÇA Teorisinin esnek yapısının uygulamaya nasıl yansıdığını göstermektedir (Kuzniak, 2022).

Grup 8, özellikle matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma aşamalarında MÇA bileşenlerini işlevsel bir şekilde kullanarak oluşum süreçlerini etkin biçimde gerçekleştirmiştir. Artefaktlar yardımıyla yapılan inşalar aracılığıyla problem durumunun görselleştirilmesi, seçilen matematiksel çözümün gerekçelendirilmesi ve temellendirilmesi sürecine önemli katkı sağlamıştır. Modelleme sürecinin tamamında söylemsel oluşumu içeren eylemlerin sergilenmesi, sürecin sürekliliğini sağlamış ve problemin anlamlı biçimde ele alınmasına olanak tanımıştır. Ayrıca, internet gibi kaynaklardan yararlanarak doğrulama yapılmaya çalışılması, matematiksel modellemenin gerçek yaşam bağlamıyla ilişkilendirilmesini sağlamıştır.

Mostar görevi genel olarak değerlendirildiğinde, epistemolojik düzlemin bileşenlerinin süreç boyunca etkin şekilde kullanıldığı ve bu bileşenlerin oluşum süreçleriyle ilişkisinin kurulduğu gözlemlenmiştir. Tüm grupların söylemsel oluşumu sıklıkla sırasında gerçekleştirdiği ve Basketbol görevine kıyasla enstrümantal oluşumun daha tutarlı bir şekilde ortaya konduğu görülmüştür. Gerekçelendirme ve akıl yürütme süreçlerinin etkili bir biçimde kullanılması, artefaktların işlevsel hale getirilerek enstrümantal oluşumun sağlanması ve bu sayede sürecin MÇA çerçevesinde bütünleştirilmesi, sergilenen modelleme yeterliklerinin artmasına katkı sağlamıştır. Bu durum, matematiksel görevin doğası gereği öğretmen adaylarının benimsediği çözüm stratejilerindeki farklılıklarla ilişkilendirilebilir.

Tüm grupların yürüttüğü matematiksel çalışmalarda [Ens-Söy] dikey düzleminin ön plana çıkması, inşa etme süreçlerinde gerekçelendirme ve anlamlandırma becerilerinin belirleyici olduğunu ortaya koymaktadır. Bu becerilerin epistemolojik düzlem bileşenleri ile birlikte sergilenmesi, matematiksel düşüncenin somut araçlarla bütünleştirilmesine katkı sunmuştur (Kuzniak, 2022). Ayrıca, Grup 7'nin oluşturduğu matematiksel modeli ve ulaştığı matematiksel sonucu sorgulayarak yürüttüğü yeniden yapılandırma süreci, modelleme sürecinin döngüsel ve esnek yapısını yansıtmaktadır (Blomhøj and Kjeldsen, 2006). Tüm bulgular doğrultusunda, Mostar görevinde öğretmen adaylarının süreç odaklı ve bütüncül bir yaklaşım sergilediği söylenebilir.

5.1.4 Epoksi Görevine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Epoksi görevinin çözümü için ilköğretim matematik öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen matematiksel çalışmalar, matematiksel modelleme yeterlikleri ve MÇA bileşenleri açısından incelendiğinde, MÇA bileşenlerinin süreç boyunca dengeli olarak kullanıldığı görülmüştür. Bu yönüyle Epoksi görevi; artefaktların işlevsel hale getirilmesi ve söylemsel gerekçelendirmelerin ortaya konmasıyla, çözüm stratejilerinin MÇA bileşenleri çerçevesinde bütünleştirildiği ve düzlemler arası geçişin esnek biçimde ortaya konduğu bir görev olarak öne çıkmaktadır. Ancak bazı grupların matematiksel çalışmalarda, özellikle yorumlama ve doğrulama aşamalarında kopuklukların yaşandığı da gözlemlenmiştir.

Grup 1, matematiksel çalışmanın başında epistemolojik düzlem bileşenlerinden yararlanmış; problemin matematikselleştirilmesi sürecinde enstrümantal ve semiyotik oluşumları gerçekleştirmiştir. Süreçte ağırlıklı olarak [Sem-Ens] dikey düzleminde eylemler gerçekleştirilmiş, ancak yalnızca matematiksel olarak çalışma aşamasında söylemsel oluşumu gerçekleştiren eylemler sergilenmiştir. Bu durum, artefaktlar ve temsiller kullanılmış olmasına rağmen, düzlemler arası geçişin sağlanmasında güçlük yaşandığını göstermektedir. Ayrıca, yorumlama ve doğrulama aşamalarında artefaktların işlevselleştirilememesi ve temsiller ile artefaktlar arasındaki ilişkinin kurulamaması, oluşturulan matematiksel modelin geçerliliğinin sorgulanması ve matematiksel sonucun doğruluğunun test edilmesi noktasında sorun yaratmıştır. Süreç boyunca kullanılan temsillerin ve artefaktların çoğunlukla teorik referanslarla desteklenmemesi, yürütülen matematiksel çalışmanın yüzeysel bir biçimde kurgulanan modelle sınırlı kaldığı şeklinde değerlendirilebilir.

Grup 2, epistemolojik düzlem bileşenlerinden yararlanarak başladığı matematiksel çalışmayı, matematikselleştirme aşamasında [Sem-Ens] dikey düzlemindeki eylemlerle sürdürmüş; [Sem-Söy] ve [Ens-Söy] dikey düzlemlerindeki eylemlerle zenginleştirerek oldukça başarılı bir matematiksel model oluşturmuştur. Matematiksel modelin inşa sürecini düzlemler arası geçişle gerçekleştiren Grup 2, MÇA Teorisinin tüm bileşenlerini etkin bir şekilde kullanarak MÇA Teorisinin *'çalışmanın dolaşımı'* kavramına önemli bir örnek sunan matematiksel modelleme süreci ortaya koymuştur (Kuzniak, 2022). Artefaktların özelliklerinden etkili bir şekilde yararlanılması ve modelin matematiksel gerekçelerle görselleştirilmesi, modelleme sürecinin dengeli ve bütüncül biçimde yürütüldüğünü göstermektedir. Oluşturulan modelin yorumlanması ve doğrulanması aşamasında [Ens-Söy] dikey düzleminde gerçekleştirilen eylemler, elde edilen sonuçların gözden geçirildiğini ve bu süreçte gerekçelendirme ve akıl

yürütmeye dayalı bazı düzenlemelerin yapıldığını ortaya koymaktadır. Matematiksel modelleme sürecinin tamamında matematiksel kavramların özelliklerini dikkate alarak düzlemler arası geçişi sağlayan Grup 2 öğretmen adayları, sistematik, tutarlı ve bütüncül bir çalışma sergileyerek en yüksek modelleme yeterliğine sahip matematiksel çalışmayı ortaya koymuştur.

Grup 7 ise matematiksel çalışmasına epistemolojik düzlem bileşenlerini kullanarak başlamış, ardından [Ens-Söy] ve [Sem-Ens] dikey düzlemlerinde yürüttüğü eylemlerle matematiksel modeli oluşturmuştur. Tüm dikey düzlemlerde gerçekleştirdiği eylemlerle zenginleştirilen bu süreçte, kavramsal temelleri güçlü ve geçişleri etkili bir biçimde yapılandırılmış bir matematiksel model oluşturulduğu görülmüştür. Epistemolojik düzlem bileşenlerinden yararlanarak söylemsel oluşumun desteklenmesiyle ulaşılan matematiksel sonuçların yorumlanması ve doğrulanması sürecinde ise artefaktların işlevsel olarak kullanılamaması nedeniyle enstrümantal oluşumun gerçekleşmesi sırasında kopukluk yaşanmıştır. Buna rağmen söylemsel oluşumun sürdürülmesiyle matematiksel sonucun kısmen yorumlanması ve doğrulanması sağlanmıştır. Matematiksel modelin yeniden düzenlenmesi ya da hataların düzeltilmesi gibi eylemler gerçekleştirilmemiş olsa da Grup 7'nin ortaya koyduğu söylemsel gerekçelendirme becerisi, yürütülen matematiksel çalışmanın kavramsal bütünlüğünün sağladığını göstermektedir.

Grup 8, epistemolojik düzlem bileşenlerini kullanarak başladığı matematiksel çalışmasını [Sem-Ens] dikey düzleminde ve tüm dikey düzlemlerde gerçekleştirdiği iki farklı eylemle sürdürerek matematiksel modelini oluşturmuştur. Matematiksel modelin inşa edilmesi sürecinde düzlemler arası geçişin sağlanmasıyla birlikte akıl yürütme süreci etkili bir şekilde ortaya konmuştur. Matematiksel çalışmada üç oluşum sürecinin harekete geçirildiği eylemler gözlemlenmiş; ancak yorumlama ve doğrulama aşamalarında enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmesi sırasında bir kopukluk yaşanmıştır. Buna rağmen, gerçekleştirilen akıl yürütmeler doğrultusunda söylemsel oluşumun devreye alınmasıyla bu kopukluğun giderilmeye çalışıldığı, bu sayede modelin kısmen de olsa yorumlandığı ve doğrulandığı anlaşılmaktadır. Gerçekleştirilen eylemlerde matematiksel kavramların özelliklerinin dikkate alınması, modelin oluşturulması sürecinin zengin bir içerikle yapılandırıldığını göstermektedir. Buna karşılık, matematiksel olarak çalışma aşamasında gerçekleştirilen eylemlerin temsillerle sınırlı kalması ve enstrümantal oluşumun yalnızca bu sınırlı temeller üzerinden yürütülmesi, sürecin kapsamlılığı açısından bir sınırlılık olarak değerlendirilebilir.

Epoksi görevi genel olarak değerlendirildiğinde, öğretmen adaylarının diğer görevlere göre kıyasla daha sistematik ve daha deneyimli bir yaklaşım sergilediği görülmektedir. Özellikle [Sem-Ens] dikey düzleminde yoğunlaşan eylemlerle birlikte, düzlemler arası geçişlerin daha uyumlu bir şekilde gerçekleştirildiği dikkat çekmektedir. Önceki görevlere göre artefaktların daha bilinçli bir şekilde kullanıldığı, çeşitli matematiksel inşaların bu doğrultuda gerçekleştirildiği görülmektedir. Bununla birlikte, enstrümantal oluşumun gerçekleştirilmesi sırasında hala belirli düzeyde kopuklukların yaşandığı anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının epistemolojik düzlem bileşenlerini bilinçli bir şekilde kullanma çabası, farklı eylemleri bütünleştirerek düzlemler arası geçişin sağlamaları, modelleme sürecinde bilişsel esnekliğin gelişmeye başladığını göstermektedir.

5.2 Bütüncül Sonuç ve Tartışma

Öğretmen adaylarının modelleme etkinliği içeren görevleri çözerken gerçekleştirdikleri matematiksel çalışmalar, MÇA Teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Her bir görevde yürütülen matematiksel çalışmaların, öğretmen adaylarının farklı modelleme yeterlikleri sergilemeleriyle şekillendiği görülmüştür. Benzer şekilde, bu çalışmalar sırasında hangi epistemolojik düzlem bileşenlerinin kullanıldığı, hangi oluşum süreçlerinin devreye alındığı ve eylemlerin hangi dikey düzlemlerde gerçekleştiği gruplar arasında farklılık göstermiştir. Bu durum, yürütülen matematiksel çalışmaların özgünlüğünü ortaya koymaktır. Elde edilen bulgular, MÇA Teorisinin bileşenlerini, oluşum süreçlerini ve dikey düzlemler arasındaki geçişleri etkili biçimde kullanabilen öğretmen adaylarının, matematiksel modelleme sürecinde daha zengin ve nitelikli çözüm stratejileri geliştirdiklerini ortaya koymaktadır. Aynı zamanda, öğretmen adaylarının modelleme yeterlikleri ile matematiksel çalışma sürecinde kullandıkları MÇA bileşenleri ve oluşum süreçleri arasında anlamlı bir dolaşım arasında olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bulgular ayrıca, öğretmen adayları tarafından en sık kullanılan epistemolojik düzlem bileşenlerinin temsil ve artefakt bileşenleri olduğunu, buna karşın teorik referans bileşenin sınırlı düzeyde kullanıldığını göstermektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel nesneleri kullanarak işlem yapma becerilerinin, bu işlemleri teorik düzlemde gerekçelendirme becerilerine kıyasla daha gelişmiş olduğu şeklinde yorumlanabilir. Benzer bir sonuç, Verdugo-Hernández and Espinoza-Vásquez (2023)'in çalışmasında da görülmekte; söz konusu çalışmada öğretmen adaylarının planlama aşamasında ifade ettikleri hedefler ile uygulama

sırasında gerçekleştirdikleri eylemler arasında uyumsuzluk olduğu, özellikle teorik gerekçelendirme süreçlerinde güçlük yaşadıkları belirtilmektedir.

Matematiksel çalışma sırasında gerçekleştirilen eylemlerin MÇA Teorisi ışığında incelenmesi sonucunda, grupların farklı aşamalarda ve farklı türde eylemler aracılığıyla semiyotik, enstrümantal ve söylemsel oluşum süreçlerini gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Bu oluşum süreçlerinin birbiriyle etkileşim kurarak şekilde eş zamanlı şekilde ortaya çıkması, modelleme sürecinin bütüncül bir biçimde yürütülmesine katkı sağlamıştır. Özellikle enstrümantal ve semiyotik oluşum süreçlerinin birlikte kullanıldığı durumlarda, çözüm sürecinin kavramsal gerekçelere dayalı olarak yapılandırıldığı görülmüştür. Bu bulgu, Gaona and Menares (2021)'in çalışmasında yer alan, öğretmen adaylarının çözüm stratejilerinin söylemsel oluşumla desteklenen eylemler yoluyla gerekçelendirildiği sonucu ile örtüşmektedir. Her ne kadar bazı matematiksel çalışmalar belirli oluşum süreçlerine ya da belirli dikey düzlemlere odaklanmış olsa da MÇA Teorisinde yer alan 'çalışmanın dolaşımı' kavramının farklı örnekleri sunulmuştur. Matematiksel çalışmalar sırasında özellikle temsil ve artefakt bileşenlerinin yoğun olarak kullanıldığı gözlemlenmiştir; ancak sürecin yürütülmesinde bu bileşenler arasında anlamlı ilişkiler kurmakta ve onları eş zamanlı şekilde işlevsel hale getirmekte bazı grupların zorlandığı da belirlenmiştir Buna karşın, bileşenler arasında kurulan anlamlı bağlantılar ve bu bağlantıların düzlemler arası geçişi desteklemesiyle yürütülen matematiksel çalışmalarda yalnızca çözüme ulaşılmakla kalınmamış, aynı zamanda çözüm yolları açık şekilde gerekçelendirilmiş, uygun akıl yürütme süreçleri sergilenmiş ve gerektiğinde matematiksel çalışma yeniden yapılandırılmıştır.

Matematiksel modelleme sürecini yalnızca bir modelin oluşturulmasıyla sınırlı olmayıp, problemin anlaşılmasıyla başlayıp ulaşılan matematiksel sonucun değerlendirilmesine kadar süren döngüsel bir yapıya sahiptir Blomhøj and Kjeldsen (2006). Gerçekleştirilen bazı matematiksel çalışmalarda, modelin yeniden oluşturulması veya matematiksel olarak çalışma aşamasının gözden geçirilmesi gibi eylemlerin sergilenmesi, modelleme sürecinin hem esnekliğini hem de döngüsel yapısını göstermektedir. Ancak bazı gruplarda modelleme sürecinin yalnızca model kurma ve çözüm üretme ile sınırlandığı, yorumlama ve doğrulama aşamalarında yeterli eylemin gerçekleştirilmediği ya da bu aşamalarda kopuklukların yaşandığı belirlenmiştir. Bu durum, Verdugo Hernández et al. (2022) tarafından yapılan çalışmada, öğrencilerin modelleme sürecinde oluşturulan modeli bağlamla ilişkilendirmede zorluklar yaşadığı bulgusu ile örtüşmektedir.

Gerçekleştirilen matematiksel çalışmalarda, matematiksel görevlerin yapısının öğretmen adaylarının modelleme yeterliklerini etkilediği görülmüştür. Açık uçlu yapıya sahip olan Epoksi görevinde, düzlemler arası geçişlerin daha yoğun bir gerçekleştiği ve öğretmen adayları tarafından özgün stratejilerin geliştirildiği görülmüştür. Buna karşın, daha çok hesaplamaya dayalı olan Basketbol görevinde, bazı grupların matematiksel çalışmalarının belirli bir düzlemde sınırlı kaldığı ve çözüm sürecinin yeterince geliştirilemediği gözlemlenmiştir. Özellikle Mostar ve Epoksi görevlerinde, farklı düzlemlerde gerçekleştirilen eylemlerin modelin oluşturulması ve elde edilen matematiksel sonucun yorumlanması aşamalarında çeşitliliği ve derinliği artırdığı belirlenmiştir.

Bu çalışmada yalnızca oluşturulan matematiksel modeller değil, bu modellerin inşa sürecine ilişkin gerçekleştirilen eylemler de incelenerek matematiksel çalışmanın bütüncül yapısı ortaya konmuştur. Matematiksel modelleme sürecinin MÇA Teorisi çerçevesinde analiz edilmesi, öğretmen adaylarının yürüttüğü matematiksel çalışmaların düşünsel süreçlerini çok boyutlu olarak değerlendirme olanağı sağlamıştır. Matematiksel çalışma sırasında MÇA bileşenlerini ve işlevsel biçimde kullanarak çalışmalarını farklı oluşum süreçleri ile zenginleştirebilen ve bu süreçleri farklı dikey düzlemlere taşıyabilen grupların, modelleme yeterliklerinin daha gelişmiş olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

5.3 Öneriler

Bu araştırmanın bulguları doğrultusunda ileride gerçekleştirilebilecek çalışmalara yönelik olarak öneriler aşağıda sıralanmıştır:

- Söylemsel oluşumun tüm gruplarda gözlemlenmesine karşın, enstrümantal oluşum bazı çalışmalarda gerçekleşmemiştir. Epistemolojik düzlem bileşenlerinin bilişsel düzlemle ilişkilendirilmesinin önemi dikkate alındığında, öğretmen eğitimi sürecinde MÇA Teorisinin bileşenlerine yönelik kuramsal farkındalık artırılmalı matematiksel görevlerin farklı bileşenlerle yapılandırılması teşvik edilmelidir.
- Yalnızca bir dikey düzlem ile sınırlı kalan matematiksel çalışmalarda öğretmen adaylarının çözüm stratejilerinin de sınırlı Buna karşılık, düzlemler arası geçişlerin esnek biçimde gerçekleştirildiği matematiksel çalışmalarda modelin çözümü ve yorumlanması daha etkili biçimde gerçekleşmiştir. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarının

gerçekleştireceği öğretim uygulamalarında MÇA Teorisi temel alınarak düzlemler arası geçişi destekleyici yapıların planlanması önerilmektedir.

- Matematiksel çalışma sürecinde yapılan hataların fark edilerek çözüm stratejisinin yeniden yapılandırılması, görevlerin tek bir doğru cevaptan ziyade çoklu çözüm yolları sunacak biçimde tasarlanmasının önemini ortaya koymaktadır. Bu bağlamda, öğretim ortamlarında kullanılacak matematiksel görevlerin, MÇA bileşenlerini harekete geçirecek şekilde tasarlanması önerilmektedir.
- Araştırma sürecinde matematiksel görevlerde teorik gerekçelendirmenin sınırlı kalması, öğretmen adaylarının teorik referanslar bileşenini işlevsel hale getirmede zorlandığını göstermektedir. Bu durumun geliştirilmesi için öğretmen eğitimi sürecinde uygulama temelli örnekler aracılığıyla teorik referansların kullanımına yönelik destekleyici öğretim ortamları sunulmalıdır.
- Farklı temsillerin birbirine dönüştürülmesini içeren matematiksel bağlamlara yer verilmesi, öğretmen adaylarının temsilleri matematiksel anlamlarıyla ilişkilendirilmesine katkı sağlayabilir.
- Farklı matematiksel görev türlerinin MÇA bileşenlerini nasıl harekete geçirdiğini inceleyen karşılaştırmalı çalışmalara yer verilebilir.
- Öğretmen adaylarının çözüm süreçlerini MÇA Teorisi doğrultusunda kendilerinin değerlendirdiği öğretim uygulamalarına planlanabilir.
- Farklı matematiksel kavramları içeren görevlerde ortaya konan matematiksel çalışmaların nasıl çeşitlendiği, MÇA Teorisi ışığında karşılaştırmalı olarak incelenebilir.
- MÇA Teorisinin farklı teorik yaklaşımlarla birlikte ele alındığı kuramsal ve uygulamalı çalışmalar yapılabilir.
- Öğretmenler için matematiksel modelleme etkinliklerini yazmak yanında, lisans eğitimi sırasında verilecek matematiksel modelleme dersi için matematiksel modelleme ve MÇA Teorisini bir arada alan içerik oluşturulabilir.

6. KAYNAKÇA

Abrams, J. P. (2001). Mathematical modeling: teaching the open-ended application of mathematics. In A. A. Cuoco ve F. R. Curcio (Eds.), *The teaching mathematical modeling and the of representation* (pp. 269-282). VA: NCTM.

Albayrak, E. ve Çiltaş, A. (2017). Türkiye'de matematik eğitimi alanında yayınlanan matematiksel model ve modelleme araştırmalarının betimsel içerik analizi. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *2017*(9), 258-283.

Albayrak, H. B. (2023). *İlkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin bilişsel matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi* [Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi]. Adana.

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(1), 53-60. https://doi.org/10.1080/00207390119535

Almonacid Adriano, A. I. (2018). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades* (Publication Number 27751914) [Yüksek Lisans Tezi, Pontificia Universidad Catolica del Peru]. ProQuest Dissertations & Theses Global. Peru. https://www.proquest.com/dissertations-theses/modelización-de-funciones-cuadráticas-espacio/docview/2416451712/se-2?accountid=15410

Alsina, C. and Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *3*(1), 118-127. https://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/546

Altun, M. (2015). *Ortaokullarda Matematik Öğretimi*. Aktüel Yayıncılık.

Altun, M. (2020). *Matematik okuryazarlığı El Kitabı: Yeni Nesil Soru Yazma Ve Öğretim Düzenleme Teknikleri*. Alfa Aktüel.

Alwast, A. and Vorhölter, K. (2022). Measuring pre-service teachers' noticing competencies within a mathematical modeling context–an analysis of an instrument. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 263-285. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10102-8

Ang, K. C. (2010). Teaching and learning mathematical modelling with technology. 15th Asian Technology Conference in Mathematics, Kuala Lumpur, Malaysia.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Argün, Z. Arıkan, A., Bulut, S., ve Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramlarının Künyesi*. Gazi Kitapevi.

Arıkan, A. ve Halıcıoğlu, S. (2013). *Soyut Matematik*. Palme Yayıncılık.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.

Arzarello, F. (2006). *Semiosis as a multimodal process.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 267–299.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*.

Balacheff, N. (1987). Proving processes and situations for validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. https://www.jstor.org/stable/3482413

Bardelle, C. (2009). Visual proofs: an experiment. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon.

Balıkesir Üniversitesi. (2022). *Necatibey Eğitim Fakültesi / İlköğretim Matematik Öğretmenliği Dersler*. https://obs.balikesir.edu.tr/oibs/bologna/index.aspx?lang=tr&curOp=showPac&curUnit=02&curSunit=4864# (Erişim tarihi: 15 Mayıs 2022)

Berry, J. and Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Butterworth-Heinemann.

Birgin, O. ve Öztürk, F. N. (2021). Türkiye'de matematik eğitimi alanında matematiksel modelleme çalışmalarına ilişkin eğilimler (2010-2020): Tematik içerik analizi. *e-International Journal of Educational Research*, *12*(5). https://doi.org/10.19160/e-ijer.937654

Blanke, B. L. (2009). *Understanding mathematical discourse in the elementary classroom: A case study* (Publication Number 3352007) [Doktora Tezi, Oregon State University]. Oregon.

Blomhøj, M. and Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, ve M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 45-56). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3

Blomhøj, M. and Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work: Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 163-177. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF02655887

Blum, W. and Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Blum, W. and Leiß, D. (2005). "Filling Up" - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), Barcelona, Spain.

Blum, W. and Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In P. Haines, P. Galbraith, W. Blum, ve S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Horwood.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*, 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. *Proceedings of CERME-5, WG 13 Modelling and Applications,* 2080-2089.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach nathematical nodeling in school and teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Bukova Güzel, E., Tekin-Dede, A., Hıdıroğlu, Ç., Kula-Ünver, S. ve Özaltun-Çelik, A. (2016). *Matematik eğitiminde matematiksel modelleme* (E. Bukova Güzel, Ed.). Pegem Akademi.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2008). *Eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri*. Pegem Akademi.

Carlson, M. A., Wickstrom, M. H., Burroughs, E. A. and Fulton, E. W. (2016). A case for mathematical modeling in the elementary school classroom. In C. R. Hirsch (Ed.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 121-129).

Cervantes-Barraza, J., Berrío-Valbuena, J., Contreras-Vásquez, M. and Martínez-Fontalvo, V. (2020). Espacios de trabajo geométrico personal de profesores de matemáticas en formación. *Educación y Humanismo*, *23*(40), 1-17. https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4083

Chamberlin, S. A. and Moon, S. M. (2005). Model-eliciting ctivities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 37-47.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'etude. 1. Structures & fonctions. Actes de la 11 e École d'Été de didactique des mathématiques Grenoble: La Pensée Sauvage.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Clements, D. H. and Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555).

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*.

Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştirma yöntemleri*. Siyasal Kitapevi.

Çakmak Gürel, Z. (2018). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi* (Publication Number 504594) [Doktora Tezi, Atatürk Üniverstiesi]. Erzurum.

Çalışkan-Dedeoğlu, N. (2016). Geometrik paradigmalar. In B. E., S. Arslan, ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (pp. 291-305). Pegem Akademi.

Çavuş Erdem, Z., Doğan, M. F., Gürbüz, R., ve Şahin, S. (2017). Matematiksel modellemenin öğretim araçlarına yansımaları: Ders kitabı analizi. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 7(1), 61-86.

Çiltaş, A. (2011). *Dizi ve seriler konusunun matematiksel modelleme yoluyla öğretiminin ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının öğrenme ve modelleme becerileri üzerine etkisi* (Publication Number 301126) [Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi]. Erzurum.

Darses, F. (2001). *Providing practitioners with techniques for cognitive work analysis.* Theoretical Issues in Ergonomics Science, 2, 268–277.

Delgadillo, E. M. and Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, *48*(6), 739-754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Delice, A. ve Sevimli, E. (2016). Matematik Eğitiminde Çoklu Temsiller. In E. Bingölbali, S. Arslan, ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (pp. 519-535). Ankara.

Deniz, S. (2024). *Eşitlik ve değişken kavramlarına yönelik öğrencilerin bilişsel süreçlerinin matematiksel çalışma uzayı teorik çerçevesinde incelenmesi* (Publication Number 860065) [Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi]. Eskişehir.

Deniz, D., ve Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinliği tasarım prensiplerine uygun etkinlik tasarlayabilme yeterlikleri. *Karaelmas Eğitim Bilimleri Dergisi,* 4, 1-14.

Derouet, C. (2019). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Une ingénierie didactique en classe de terminale scientifique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2017*, Paris.

Derouet, C., Kuzniak, A., Nechache, A., Parzysz, B. and Vivier, L. (2017). The Mathematical Working Space model: An open and adaptable theoretical framework? CERME 10, Dublin, Ireland.

Derouet, C. and Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM*, *48*(6), 757-773. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0769-9

Didiş Kabar, M. G. ve İnan Tutkun, M. (2021). Ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme problemini uygulama sürecinin incelenmesi: Uygulamayı planlama ve öğretmen müdahaleleri. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, *8*(2), 98-123. https://doi.org/https://doi.org/10.17278/ijesim.878364

Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: An integrated instructional approach to the concept of force. *International journal of science education*, *19*(3), 265-282.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. In *Proceedings of the 21st PME-NA Conference,* pp. 3–26.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. and Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 23-49. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8

Drijvers, P. (2019). Embodied instrumentation: Combining different views on using digital technology in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 8–28).* Utrecht University.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt ve M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). PMENA. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED433998.pdf

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: student‘s generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International journal of computers for mathematical learning*, *2*, 187-215. https://doi.org/10.1023/A:1009711521492

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ekol, G. and Greenop, S. (2023). Teacher interventions using guided discovery and mathematical modelling in Grade 10 financial mathematics. *The European Educational Researcher*, *6*(2), 35-53. https://doi.org/10.31757/euer.623

Elia, I., Özel, S., Gagatsis, A., Panaoura, A. and Özel, Z. E. Y. (2016). Students' mathematical work on absolute value: focusing on conceptions, errors and obstacles. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 895-907. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0780-1

Enerjisa. (2022). *Galatasaray*. https://www.enerjisa.com.tr/tr/isimin-enerjisi/referanslar/projelerimiz/galatasaray (Erişim tarihi: 17 Eylül 2022)

English, L. D., Fox, J. L. and Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 156-163. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0156

Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C. ve Baş, S. (2014). Mathematical modeling in mathematics Education: Basic Concepts and Approaches. *Educational Sciences: Theory & Practice*. https://doi.org/10.12738/estp.2014.4.2039

Ergene, Ö. (2019). *Matematik öğretmeni adaylarının Riemann toplamlarını kullanarak modelleme yoluyla belirli integrali anlama durumlarının incelenmesi* (Publication Number 555961) [Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi]. İstanbul.

Ericsson, K. A. and Simon, H. A. (1998). How to study thinking in everyday life: Contrasting think-aloud protocols with descriptions and explanations of thinking. *Mind, Culture, and Activity*, *5*(3), 178-186. https://doi.org/10.1207/s15327884mca0503_3

Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. and Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. Sage.

Flores Salazar, J. V. and Almonacid Adriano, A. I. (2020). Espacio de Trabajo Matemático: una tarea de modelización sobre función cuadrática. *Transformación*, *16*(2), 222-224.

Flores Salazar, J. V. and Carrillo, F. I. (2019). Espacio de trabajo matemático personal de profesores en relación a la función definida por tramos [Personal Mathematical Working Space of teachers in relation to the Function Defined by Parts]. *Uni-pluri/versidad*, *19*(2), 144-160. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.08

Flores Salazar, J. V. and Carrillo Lara, F. I. (2019). Personal mathematical working space of teachers in relation to the function defined by parts. *Uni-Pluriversidad*, *19*(2), 144-160. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.08

Flores Salazar, J. V., Gaona, J. and Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Cinta Muñoz-Catalán, M. and Mar Liñán, M. (2016). The role of MTSK as model of teachers' knowledge in the relationship between mathematical working spaces. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 204-221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. In H.-G. Steiner (Ed.), *The Teaching of Geometry at the Pre-College Level: Proceedings of the Second CSMP International Conference Co-Sponsored by Southern Illinois University and Central Midwestern Regional Educational Laboratory* (pp. 137-159). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-5896-3_10

Galatasaray Spor Kulübü (2022). *Enerjisa ve Galatasaray'dan Bir Dünya Rekoru*. https://www.galatasaray.org/haber/kulup/enerjisa-ve-galatasaray-dan-bir-dunya-rekoru/50696#:~:text=Stadyumun%20çatısına%20kurulan%2010%20bini,olarak%204.650%20MWh%20elektrik%20üretecek (Erişim tarihi: 17 Eylül 2022)

Galbraith, P. and Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, *38*, 143-162. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF02655886

Gaona, J. and Menares, R. (2021). Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(12). https://doi.org/https://doi.org/10.29333/ejmste/11425

Goldin, G. A., and Kaput, J. J. (1996). A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. In Steffe, L.P., Nesher, P., Cobb, P., Sriraman, B., and Greer, B. (Eds.) *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203053126

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gómez-Chacón, I. M., Botana, F., Escribano, J. and Abánades, M. Á. (2016). Concepto de lugar geométrico. Génesis de utilización personal y profesional con distintas herramientas [The Concept of Locus. Genesis of Personal and Professional Use with Different Tools]. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 67-94. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04

Gómez-Chacón, I. M. and Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: Figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 201-226. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9462-4

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. and Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M. and del Mar García López, M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 909-924. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modeling. In G. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice.* Cultural, sosial and cognitive einfluences ICTMA 16 (pp. 173-183). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer, Cham.

Greefrath, G., Siller, H.-S., Klock, H. and Wess, R. (2022). Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 383-407. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10038-z

Guerrero-Ortiz, C. (2021). Pre-service mathematics teachers' technological pedagogical content knowledge: The case of modelling. In F. K. S. Leung, G. Stillman, G. Kaiser, ve K. L. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in East and West* (pp. 141-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_12

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A. ve Kalantarov, V. (2000). *Matematik Terimleri Sözlüğü*. Türk Dil Kurumu.

Hanna, G. and de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 329-336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4

Hartshorn, R. and Boren, S. (1990). Experiential learning of mathematics: Using manipulatives. https://eric.ed.gov/?id=ED321967

Henríquez-Rivas, C. and Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(71), 1550-1572. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. and Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an sssential transitional stage between personal and reference mathematical work. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6

Henríquez-Rivas, C. and Montoya Delgadillo, E. (2015). Synthetic and analytic geometrical working space of teachers and their practices in the classroom. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1408

Henríquez-Rivas, C. and Montoya-Delgadillo, E. (2016). El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el liceo [The Mathematical Work of Teachers in the Transition from the Synthetic Geometry to the Analytic at Secondary School]. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 45-66. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a03

Herget, W. and Torres-Skoumal, M. (2007). Picture (im) perfect mathematics! In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, ve M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 379-386). Springer.

Hıdıroğlu, Ç. ve Güzel, E. B. (2013). Matematiksel modelleme sürecini açıklayan farklı yaklaşımlar. *Bartın University Journal of Faculty of Education*, *2*(1), 127-145.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova Güzel, E. (2016). Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasındaki geçişler. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(1). https://doi.org/10.17522/nefefmed.15854

Hıdıroğlu, Ç. N., Tekin Dede, A., Kula Ünver, S. ve Bukova Güzel, E. (2016). Mathematics student teachers' modelling approaches while solving the designed Eşme Rug problem. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *13*(3), 873-892. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00648a

Hitt, F., Saboya, M. and Cortés Zavala, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 775-791. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5

İmamoğlu, Y., Özcan, Z. Ç., Pesen, M. ve Erktin, E. (2023). Bir geometri öğretimi dersinin geometrik çalışma düzlemleri modeline göre incelenmesi. *Bogazici University Journal of Education*, *40*(2), 101-118. https://doi.org/https://doi.org/10.52597/buje.1128602

Jablonski, S. (2023). Is it all about the setting? — A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educational Studies in Mathematics*, *113*(2), 307-330. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10215-2

Kabaca, T. (2016). Matematik eğitiminde teknoloji kullanımına dair teorik yaklaşımlar. In E. Bingölbali, S. Arslan, ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler*. Pegem Akademi.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 110-119). Chichester: Ellis Horwood.

Kaiser, G. and Maaß, K. (2007). Modelling in Lower Secondary Mathematics Classroom - Problems and Opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, ve M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_8

Kaiser, G. and Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38*, 302-310.

Kang, O., & Noh, J. (2012). Teaching mathematical modelling in school mathematics. *12th International Congress on Mathematical Education. Seoul*, Korea: COEX.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Karahan, V. (2021). *İlkokul ve ortaokul matematik ders kitaplarındaki temel geometrik kavramların incelenmesi* (Publication Number 672068) [Yüksek Lisans Tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi]. Rize.

Kaygısız, İ. (2022). *İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin matematiksel modelleme yeterliklerinin incelenmesi: Bir öğretim deneyi* Anadolu Üniversitesi].

Kertil, M., Çetinkaya, B., Erbaş, A. K. ve Çakıroğlu, E. (2014). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme. In E. Bingölbali, S. Arslan, ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (pp. 1-21). Pegem Akademi.

Kula Ünver, S., Hıdıroğlu, Ç. N., Tekin Dede, A. ve Bukova Güzel, E. (2018). Factors revealed while posing mathematical modelling problems by mathematics student teachers. *European Journal of Educational Research*, *7*(4), 941-952. https://doi.org/10.12973/eu-jer.7.4.941

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *6*(2), 167-187. https://doi.org/10.1080/14926150609556694

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*(16), 9-24.

Kuzniak, A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat, M. Hattermann, ve A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 311-325). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3489-4_15

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 3-31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. and Vivier, L. (2022a). The Theory of Mathematical Working Spaces: Theoretical environment, epistemological stance and dialogue with other theories. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *MatMathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_7

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kuzniak, A. and Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 271-289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., Nechache, A. and Drouhard, J. P. (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861-874. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A., Nechache, A. and Richard, P. R. (2022b). The Theory of Mathematical Working Spaces in Brief. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 57-69). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_3

Kuzniak, A. and Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-1), 5-15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D. and Elia, I. (2016a). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Lagrange, J.-B. (2021). Les espaces de travail connectés: une perspective nouvelle pour la modélisation dans le secondaire? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *21*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00130-6

Lagrange, J.-B., Huincahue, J. and Psycharis, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 247-266). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_11

Lagrange, J.-B. and Richard, P. R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 211-228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9

Ledezma, C., Font, V. and Sala, G. (2023). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, *35*(4), 715-741. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Leplat, J. (2004). L'analyse psychologique du travail. *European Review of Applied Psychology*, *54*(2), 101-108. https://doi.org/10.1016/j.erap.2003.12.006

Lesh, R. and Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. In Lesh ve Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. A., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp.763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lincoln, Y. S. and Guba, E. G. (1988). *Criteria for Assessing Naturalistic Inquiries as Reports*.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Mason, J. (1988). *Modelling: What do we really want pupils to learn*. Hodder & Stoughton.

MEB. (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu*. Ankara Retrieved from https://pisa.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2024_03/21120745_26152640_pisa2022_rapor.pdf

MEB. (2013). *Ortaokul Matematik Dersi (5., 6., 7. ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara

MEB. (2018). *Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Ankara Retrieved from https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329

MEB. (2019). *TIMSS 2019 Türkiye Ön Raporu*. Ankara Retrieved from https://www.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2020_12/10173505_No15_TIMSS_2019_Turkiye_On_Raporu_Guncel.pdf

MEB. (2023). *PISA 2022 Türkiye Raporu*. Ankara: Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü. Retrieved from https://pisa.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2024_03/21120745_26152640_pisa2022_rapor.pdf

MEB. (2024). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Öğretim Programları Ortak Metni*. Ankara

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Menares Espinoza, R. (2019). *Planos dirigidos en el ETM al personal de profesores en formación: una herramienta metodológica.* Proceedings of 6th Symposium on Mathematical Work, Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Menares Espinoza, R. and Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 91-120). Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Mildenhall, P., Swan, P., Northcote, M. and Marshall, L. (2008). Virtual manipulatives on the interactive whiteboard: A preliminary investigation. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(1), 9-14. https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.136461602518088

Miles, M. B. and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. SAGE.

Miranda, V. C., Pluvinage, F. and Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *Zdm-Mathematics Education*, *48*(6), 809-826. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0791-y

Montoya Delgadillo, E. and Reyes Avendaño, C. G. (2022). The Reference Mathematical Working Space. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *MatMathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_4

Montoya Delgadillo, E., Viola, F. and Vivier, L. (2017). *Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching.* CERME 10, Dublin, Ireland.

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. and Mena-Lorca, J. (2014). Circulations and genesis in the mathematical work space. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4), 181-197. https://doi.org/10.12802/relime.13.1749

Morales, H. (2018). Influencia de un proceso de formación de profesores en el sistema de enseñanza del concepto de area en estudiantes de pedagogía en matemáticas, un estudio de caso. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a15

Moutet, L. (2019). *The extended theoretical framework of Mathematical Working Space (extended MWS): potentialities in physics.* Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 175-197. https://doi.org/10.1023/a:1014596316942

Moyer, P. S., Bolyard, J. J. and Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 372-377. https://doi.org/10.5951/TCM.8.6.0372

Müller, G. and Wittmann, E. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-663-12025-4

Nakahara, T. (2008). Cultivating mathematical thinking through representation. In U*tilizing the representational system. Talk given at the APEC-Tsukuba International Conference (III),* Tsukuba, Japan. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. N. Publications.

Nechache, A. (2018). L'articulation des genèses de l'Espace de Travail Mathématique dans la résolution de tâches probabilistes faisant appel à la modélisation. *Menon-Journal of Educational Research-online, 4th Thematic Issue*, 93-104.

Nechache, A. and Gómez-Chacón, I. M. (2022). Methodological Aspects in the Theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, ve P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 33-56). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_2

Nikolantonakis, K. and Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base/Future Elementary School Teachers' Mathematical Working Space for Working with Natural Number in Any Base. *Bolema*, *30*(54), 23-44. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a02

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction to modelling and applications in mathematics education. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss, (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York, USA: Springer.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Patton, M. Q. (1999). Enhancing the quality and credibility of qualitative analysis. *Health services research*, *34*(5 Pt 2), 1189-1208.

Psycharis, G., Kafetzopoulos, G.I. and Lagrange, J. B. (2021). A framework for analyzing students' learning of function at the upper-secondary level: Connected working spaces and abstraction in context. In A. Clark-Wilson, A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalová, ve H.-G. Weigand (Eds.), *Mathematics Education in the Digital Age* (pp. 150-167). Routledge. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100993

Rabardel, P. (2002). *People and technology: A cognitive approach to contemporary instruments.* ⟨hal-01020705⟩. Université Paris 8, Paris, France.

Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, *48*(6), 925-933. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0811-y

Reyes Avendaño, C. G. (2020). *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique* [Doktora Tezi, Université Paris Cité]. Paris. https://hal.science/tel-03211997/

Reys, R. E. (1971). Considerations for teachers using manipulative materials. In J. S. E. Smith ve C. A. Backman (Eds.), *Teacher-made Aids for Elementary School Mathematics: Readings from the Arithmetic Teacher*. https://doi.org/10.5951/at.18.8.0551

Rodd, M. (2016). Transitioning from "It Looks Like" to "It Has To Be" in Geometrical Workspaces: affect and near-to-me attention. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a07

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. and Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 827-842. /https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0

Shenton, A. K. (2004). Strategies for ensuring trustworthiness in qualitative research projects. *Education for information*, *22*(2), 63-75. https://doi.org/10.3233/EFI-2004-22201

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics*, *24*(2), 7-15. https://www.jstor.org/stable/40248450

Sriraman, B. (2005). Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving. *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education* (pp. 1686-1696). Feliu de Guixols, Spain.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Stephan, M. and Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements ve G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement: 2003*.

Şahal, M. ve Özdemir, A. Ş. (2021). Matematiksel Modelleme Eğitiminin İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Modellemenin Doğasına İlişkin Bilgilerine Katkısı: Bir Eylem Araştırması. *Türkiye Eğitim Dergisi*, *6*(1), 124-145.

Şahal, M. ve Özdemir, A. Ş. (2025). Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Modelleme Deneyimleri: Modelleme Döngüsü Aşamaları, Zorluklar ve Modelleme Rotaları. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *63*, 1-38. https://doi.org/10.9779/pauefd.1340106

Şahin, N. (2019). *İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin bilişsel modelleme yeterliklerinin belirlenmesi ve değerlendirilmesi* (Publication Number 601972) [Doktora Tezi, On Dokuz Mayıs Üniversitesi]. Samsun.

Tabach, M. (2011). A mathematics teacher's practice in a technological environment: A case study analysis using two complementary theories. *Technology, Knowledge and Learning*, *16*, 247-265. https://doi.org/10.1007/s10758-011-9186-x

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tanju, B. (2020). *Matematik öğretmen adaylarının temsil ve ilişkilendirme becerilerinin matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi* (Publication Number 646569) [Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi]. Ankara.

Tekin Dede, A. (2015). *Matematik derslerinde öğrencilerin modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi: bir eylem araştırması* (Publication Number 395238) [Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. İzmir.

Tekin Dede, A. ve Bukova Güzel, E. (2013). Matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinliği tasarım süreçleri ve etkinliklere yönelik görüşleri. *Bartın University Journal of Faculty of Education*, *2*(1), 300-322. https://doi.org/10.14686/201312032

Tekin Dede, A. ve Bukova Güzel, E. (2014). Model oluşturma etkinlikleri: Kuramsal yapısı ve bir örneği. *Ondokuz Mayis University Journal of Education Faculty*, *33*(1), 95-111. https://doi.org/10.7822/omuefd.214869

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tekin Dede, A. ve Bukova-Güzel, E. (2018). A rubric development study for the assessment of modeling skills. *The Mathematics Educator*, *27*(2), 33-72. https://doi.org/10.63301/tme.v27i2.2040

Thompson, P. W. (1992). Notations, conventions, and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(2), 123-147. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.23.2.0123

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International journal of computers for mathematical learning*, *9*, 281-307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Türkiye Basketbol Federasyonu. (2022). Salon Standartları ve Güvenlik Talimatı. https://www.tbf.org.tr/docs/default-source/mevzuat/yonergeler/salon-standartlari-ve-guvenlik-talimati.pdf?sfvrsn=4 (Erişim tarihi: 22 Eylül 2022).

Ugurel, I., Morali, H. S., Karahan, O. ve Boz, B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (VP) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(3), 174-197. https://doi.org/10.18404/ijemst.61686

Ural, A. (2018). *Matematiksel modelleme eğitimi*. Anı Yayıncılık

Verdugo Hernández, P., Huincahue, J., Cumsille, P. and Nechache, A. (2022). Articulación entre modelización y espacios de trabajo matemático. Análisis de una tarea bajo el ciclo de Blomhøj en educación superior. *Acta Scientiae*, *24*(7), 62-91. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7135

Verdugo-Hernández, P. and Espinoza-Vásquez, G. (2023). El desarrollo de habilidades en el trabajo matemático: el caso de Lucas, un futuro profesor de matemática, en su práctica profesional. *Uniciencia*, *37*(1), 1-23. http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.10

Verillon, P. and Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101. http://www.jstor.org/stable/23420087

Vroutsis, N., Psycharis, G. and Triantafillou, C. (2018). *Crossing the boundaries between school mathematics and workplace through authentic tasks.* Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Umeå, Sweden.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Wickstrom, M. H., and Aytes, T. (2018). Elementary modeling: Connecting counting with sharing. *Teaching Children Mathematics*, 24(5), 300-307.

Yenilmez, K., ve Yıldız, Ş. (2019). Matematiksel modelleme ile ilgili lisansüstü tezlerin tematik içerik analizi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *20*, 1-22. https://doi.org/10.17494/ogusbd.548180

Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim*, *23*(112). https://doi.org/10.15390/ES.1999.385

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2021). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Şeçkin Yayıncılık.

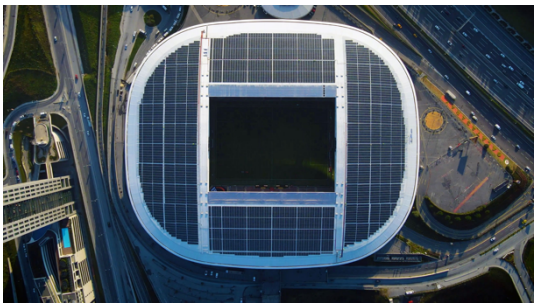
Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice*, *15*(3), 283-290. https://doi.org/10.1177/109821409401500309

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W. and Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207).

EKLER

Ek A

Tablo 6.1: Matematiksel Modelleme Etkinlikleri ve Yönlendirilmiş Keşif Soruları

Görev	Matematiksel Modelleme Etkinliği Problem Durumu	Yönlendirilmiş Keşif Soruları
Stadyum Görevi	 Galatasaray Spor Kulübü ve Enerjisa Enerji şirketi arasında yapılan anlaşmaya göre NEF Stadyumu çatısına kurulan güneş panelleri sayesinde yılda yaklaşık 2000 hanenin tüketimine eşdeğer olarak 4637 MWh elektrik üretilecektir. Stadyumun çatısına kurulan 10 bini aşkın güneş paneli ile 4,1 MW kurulu güç kapasitesine ulaşılarak dünyadaki stadyumlar içerisinde en büyük kapasiteli güneş enerji santrali olma özelliğini taşımaktadır. Yüzde yüz yeşil enerji kaynağından elektrik üretimi sağlayacak tesis her yıl 3250 ton karbondioksit salınımını engelleyerek doğaya katkı sağlayacaktır. Çevreye, topluma ve Türk sporunun finansal sürdürülebilirliğine katkı sunacak bu anlaşma ile stadyum çatısına kurulmuş olan güneş panellerinin kapladığı alanı belirleyebilecek bir çözüm önerisi oluşturunuz.	1- Spor kulübü ve enerji şirketi arasında nasıl bir anlaşma yapılmıştır? 2- Yapılan bu anlaşmanın amacı nedir? 3- Problem durumunu açıklayınız. 4- Problemi daha sade bir hale getiriniz. 5- Problemin çözümünde kullanılabilecek veriler nelerdir? 6- Sadece bu fotoğrafı kullanarak problemi çözebilir misiniz? Açıklayınız. 7- Stadyumun farklı görüntülerini elde edebilir misiniz? Nereden elde edebilirsiniz? Açıklayınız. 8- Elde ettiğiniz farklı görüntüleri ne amaçla kullanmayı planlamaktasınız? 9- Problemin çözümünde hangi çözüm stratejilerini kullanabilirsiniz? Neden? Açıklayınız. 10- Problemin çözümü için hangi teknolojik araç gereçleri kullanabilirsiniz? Neden? Açıklayınız. 11- Stadyumun üzerinde yer alan güneş panelleri hangi geometrik şekle sahiptir? 12- Stadyumun üzerinde yer alan güneş panellerinin tamamının kapladığı yer hangi geometrik şekle sahiptir? 13- Bu geometrik şeklin alanı nasıl hesaplanabilir? Açıklayınız 14- Gerekli hesaplamaları yaparken hangi temsil biçimlerini kullanabilirsiniz? Neden? Açıklayınız. 15- Uygun stratejinin uygulanması için atılması gereken adımlar nelerdir? Açıklayınız. 16- Alan hesabında kullanabileceğiniz matematiksel araçlar nelerdir? Açıklayınız. 17- Hesaplama yaparken kullanılabilecek olan referans noktalar nelerdir? Nasıl kullanabileceğinizi açıklayınız. 18- Fotoğraf üzerinden gerçek ölçüye nasıl ulaşabilirsiniz? Açıklayınız. 19- Çözüm sürecinizi anlatınız.

Tablo 6.1 (devam)

Basketbol Görevi



Ülkemizde basketbol sahaları, Türkiye Basketbol Federasyonunun yayınladığı Salon Standartları ve Güvenlik Talimatları yönergesine göre düzenlenmektedir. Bu yönergede yer alan bilgiler şu şekilde sıralanmaktadır:

- Oyun sahasını oluşturan çizgilerin 50 mm kalınlığında olması gerekmektedir.
- Basketbol oyun sahasını sınırlayan çizgilerle saha dışında yer alan herhangi bir engelin arası en az iki metre olmalıdır.
- Sahanın dış kenarından başlayan ve iki metre genişliğindeki bölge, oyun sahası zeminine zıt bir renk ile boyanmalıdır.
- Serbest atış çizgisi ile taban çizgisi arasında kalarak serbest atış kulvar çizgileriyle sınırlı olan kısıtlamalı alan ve eğer boyanması söz konusu ise orta dairenin içi aynı renk olmalıdır.

Basketbol sahasının zemini bölgesel şartlara ve altyapı durumuna göre parke zemin veya akrilik boya zeminden oluşabilmektedir. Kapalı basketbol sahasının parke zeminini yenileyerek farklı bir şekilde renklendirmek isteyen salon yetkililerinin basketbol oyun sahasında yer alan bölgelerin ne kadar alan kapladığını belirlemeye ihtiyaçları vardır. Bu amaçla salon yetkililerine yardımcı olmak için basketbol sahasında yer alan çizgilerin sınırladığı alanları belirleyerek yönergede belirtilen şekilde renklendirilecek olan bölgelerin kapladığı alanları içeren bir teklif hazırlayınız.

1- Basketbol saha ölçüleri neyi temel alınarak düzenlenmektedir?
2- Basketbol sahalarının oluşturulmasında dikkat edilecek kurallar nelerdir?
3- Standart basketbol saha ölçüleri nedir?
4- Problem durumunu açıklayınız.
5- Problemi ***matematiksel olarak*** yeniden ifade ediniz.
6- Problemi çözerken öncelikle düşünmeniz gereken varsayımlar nelerdir?
7- Problemin çözümü için kullanmayı düşündüğünüz problem çözme stratejileri nelerdir? Hangi amaçla kullanacağınızı/kullandığınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.
8- Problem çözümü için hangi teknolojik araçları kullanabilirsiniz? Neden kullanacağınızı/kullandığınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.
9- Problem çözümünde sonuca ulaşmak için kullanmanız gereken geometrik şekiller nelerdir?
10- Problem çözümünde kullanmanız gereken matematiksel temsil biçimleri nelerdir?
11- Geometrik şekillerin alanlarını hesaplarken hangi işlemleri yaptığınızı ayrıntılı şekilde açıklayınız.
12- Bulduğunuz sonuç ile gerçek yaşamda karşılaşabilecek durum ile ilgili yorumunuz ne olur?
13- Yaptığınız tüm işlemleri göz önünde bulundurduğunuzda matematiksel modelleme süreci hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?
14- Problemi siz oluştursaydınız hangi iyileştirmeleri yapardınız?

Tablo 6.1 (devam)

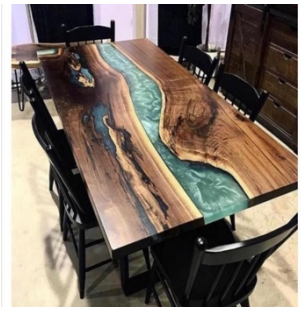
Mostar Görevi



Mostar Köprüsü, Bosna-Hersek'in Mostar şehrindeki Neretva nehrinin üzerinde bulunan simge bir yapıdır. 1566 yılında Kanuni Sultan Süleyman emriyle Mimar Sinan'ın öğrencisi olan Mimar Hayreddin tarafından yapılmıştır. Yüz yıllar boyunca depremlere, sellere ve II. Dünya Savaşına direnen köprü, iç savaşa yenik düşmüştür. İç savaş sırasında 1993 yılında bombalanan köprü, Neretva Nehri'nin sularına gömülmüştür. Yıllar sonra UNESCO ve Dünya Bankası'nın girişimleriyle köprünün yeniden yapılması çalışmaları başlatılmıştır. Bunun için köprünün temelleri sağlamlaştırılmış, nehre düşen taşlardan alınan örnekler doğrultusunda en uygun taşlar bulunarak köprü yeniden inşa edilmiş ve 2004 yılında tekrar açılmıştır. 2005 yılında Dünya Mirası Listesine eklenen Mostar köprüsü üzerinde yaklaşık 450 yıldır süregelen bir adet yaşatılmaktadır. Evlenmelerinden önce kendilerini nişanlılarına ispatlamak isteyen Boşnak gençleri, köprünün üzerinden Neretva nehrinin sularına atlamaktadır. Genellikle temmuz ayı içerisinde gerçekleştirilen bu adet yerel halk ve turistler tarafından ilgi ile izlenmektedir. Etkinlikler sırasında video mapping teknolojisi ile bir ışık şovu hazırlamak isteyen bir firma, gerekli hazırlığın yapılabilmesi ve yansıtma yapılacak olan mesafeyi belirleyebilmek için Mostar Köprüsünün aşağıdaki fotoğrafta görülen yüzey alanının bilinmesine ihtiyaç duymaktadır. Bu amaç doğrultusunda Mostar Köprüsünün yüzey alanını belirleyiniz.

1- Mostar Köprüsü hakkında bilgi veriniz?
2- Mostar Köprüsü üzerinde yaşatılan adet hakkında bilgi veriniz?
3- Mostar Köprüsü üzerinde yapılmak istenen etkinlik için yapılması planlanan hazırlık hakkında bilgi veriniz?
4- Problem durumunu açıklayınız.
5- Problemi ***matematiksel olarak*** yeniden ifade ediniz.
6- Problemi çözerken öncelikle düşünmeniz gereken varsayımlar nelerdir?
7- Problemin çözümü için kullanmayı düşündüğünüz problem çözme stratejileri nelerdir? Hangi amaçla kullanacağınızı/kullandığınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.
8- Problem çözümü için hangi teknolojik araçları kullanabilirsiniz? Neden kullanacağınızı/kullandığınızı ayrıntılı olarak açıklayınız.
9- Problem çözümünde sonuca ulaşmak için kullanmanız gereken geometrik şekiller nelerdir?
10- Problem çözümünde kullanmanız gereken matematiksel temsil biçimleri nelerdir?
11- Geometrik şekillerin alanlarını hesaplarken hangi işlemleri yaptığınızı ayrıntılı şekilde açıklayınız.
12- Bulduğunuz sonuç ile gerçek yaşamda karşılaşabilecek durum ile ilgili yorumunuz ne olur?
13- Yaptığınız tüm işlemleri göz önünde bulundurduğunuzda matematiksel modelleme süreci hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?
14- Problemi siz oluştursaydınız hangi iyileştirmeleri yapardınız?

Tablo 6.1 (devam)

Epoksi Görevi	  Şekil 1 Şekil 2 Son yıllarda mobilya sektöründe tek parça ağaç kullanılarak yapılan masalara olan talep artış göstermiştir. Masa yapımında kullanılacak olan ağaçlar kesildikten sonra masa yapılabilecek şekilde dikey olarak tekrar kesilmektedir (Şekil 1). Bu durumda ağacın uzunluğu ve kalınlığına bağlı olarak masa yapımında kullanılabilecek farklı boyutlarda materyaller elde edilmektedir. Aynı zamanda ağacın zaman içerisindeki gelişimi ve içinin oyuk olup olmama durumu gibi değişkenler masa için kesilen parçaların birbirinden farklı ve eşsiz olmasını sağlamaktadır. Tek parça ağaçtan masa oluşturulamayan durumlarda ise ağaç kesiminden elde edilen farklı parçaların arasına ısıya, ışığa, suya ve asitlere karşı dayanıklılığı bulunan bir reçine olan epoksi adlı madde eklenerek ağaçların birleştirilmesiyle masa formu elde edilmekte ve farklı görünüşlere sahip birbirinin eşi olmayan özelliklerde masalar oluşturulmaktadır (Şekil 2). Matematik öğretmeni olan Adem Bey elinde bulunan iki tahta parçasının birer kenarını sinüs eğrisi şeklinde kestirip bu tahta parçalarının arasını epoksi maddesi ile doldurarak dikdörtgen şeklinde bir masa oluşturmak istemektedir. Bu masanın yapımında kullanılabilecek olan uzunluk ölçülerine göre masanın ve epoksi maddesi kullanılan bölümün yüzey alanının değişimini gösteren bir matematiksel araç oluşturunuz.	1- Masa yapımı hakkında bilgi veriniz? 2- İki adet ağaç parçası kullanılarak yapılacak olan masa hakkında bilgi veriniz? 3- Problem durumunu açıklayınız. 4- Problemi ***matematiksel olarak*** yeniden ifade ediniz. 5- Problemi çözerken öncelikle düşünmeniz gereken varsayımlar nelerdir? 6- Problemin çözümü için kullanmayı düşündüğünüz problem çözme stratejileri nelerdir? Hangi amaçla kullanacağınızı/kullandığınızı ayrıntılı olarak açıklayınız. 7- Problem çözümü için hangi teknolojik araçları kullanabilirsiniz? Neden kullanacağınızı/kullandığınızı ayrıntılı olarak açıklayınız. 8- Problem çözümünde sonuca ulaşmak için kullanmanız gereken geometrik şekiller nelerdir? 9- Problem çözümünde kullanmanız gereken matematiksel temsil biçimleri nelerdir? 10- Geometrik şekillerin alanlarını hesaplarken hangi işlemleri yaptığınızı ayrıntılı şekilde açıklayınız. 11- Bulduğunuz sonuç ile gerçek yaşamda karşılaşabilecek durum ile ilgili yorumunuz ne olur? 12- Yaptığınız tüm işlemleri göz önünde bulundurduğunuzda matematiksel modelleme süreci hakkındaki düşünceleriniz nelerdir? 13- Problemi siz oluştursaydınız hangi iyileştirmeleri yapardınız?

Ek B Uygulama İzni

Evrak Tarih ve Sayısı: 23.11.2022-E.201528

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
Necatibey Eğitim Fakültesi Dekanlığı

Sayı : E-52899066-300-201528 23.11.2022
Konu : Uygulama İzni -Ozan Deniz KIYICI

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ BÖLÜM BAŞKANLIĞINA

İlgi : 23.11.2022 tarihli ve 68893181/300/200718 sayılı yazı.

Bölümünüz Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesi Doç.Dr.Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ'in danışmanlığını yürüttüğü doktora programı öğrencisi Ozan Deniz KIYICI'nın "Matematik Öğretmen Adaylarının Modelleme Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Alanı Teorisi Çerçevesinde İncelenmesi" konulu tez çalışmasının Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği öğrencileri ile gerçekleştirilmesi, veri toplama amacıyla görüntü-ses kaydı alınmasının ilgili öğrencilerin bilgilendirilerek ve izin alınmak şartıyla yapılması Dekanlığımızca uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Mehmet BAŞTÜRK
Dekan

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu :BS9KEYC42E Pin Kodu :63162 Belge Takip Adresi : https://www.turkiye.gov.tr/balikesir-universitesi-ebys

Adres:Dinkçiler Mah. Soma Cad. Merkez/Balıkesir
Telefon:2662412762-104 Faks:2662495005
e-Posta:nef@balikesir.edu.tr Web:www.balikesir.edu.tr/nef
Kep Adresi:balikesiruniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için: Reyhan Pekdağ
Unvanı: Bilgisayar İşletmeni
Tel No: 02662412762-141130

Ek C Etik Kurul Onayı

Evrak Tarih ve Sayısı: 02.03.2023-E.233798

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Sayı : E-49683895-108.01-233798 02.03.2023
Konu : Etik Kurulu Onayı Hk. (Ozan Deniz KIYICI)

DAĞITIM YERLERİNE

İlgi : 01.03.2023 tarihli ve 19928322/108.01/233477 sayılı yazı.

Anabilim Dalınız Öğretim Üyesi Doç.Dr. Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ'in danışmanlığını yürüttüğü Anabilim Dalınız Matematik Eğitimi Doktora Programı Öğrencisi Ozan Deniz KIYICI'nın "Matematik Öğretmen Adaylarının Modelleme Süreçlerinin Matematiksel Çalışma Alanı Teorisi Çerçevesinde İncelenmesi" isimli tez çalışmanın veri toplayabilmesi ve bilimsel hakemli dergilerde yayınlanabilmesi için Fen ve Mühendislik Bilimleri Etik Komisyonu'nun 28.02.2023 tarih ve 2023/1 sayılı toplantısında alınan karar gereği düzenlenen onay belgesi ilişikte sunulmuştur.

Bilgilerini ve gereğini rica ederim.

Doç. Dr. Alaaddin TOKTAŞ
Müdür a.
Müdür Yardımcısı

Ek:Yazı ve Ekleri (2 Sayfa)

Dağıtım:
Gereği:
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Başkanlığı

Bilgi:
Doç. Dr. Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu :BSNKPVN3Y5 Pin Kodu :20372 Belge Takip Adresi : https://www.turkiye.gov.tr/balikesir-universitesi-ebys

Adres:Fen Bilimleri Enstitüsü Çağış Yerleşkesi 10145 Balıkesir
Telefon:2666121077 Faks:2666121078
e-Posta:baufbe@balikesir.edu.tr Web:http://fbe.balikesir.edu.tr/
Kep Adresi:balikesiruniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için: Cihad Beyoğlu
Unvanı: Bilgisayar İşletmeni
Tel No: 0-266-6121400-101414

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ozan Deniz KIYICI

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı / İlköğretim Matematik Eğitimi	2018
Lisans	Balıkesir Üniversitesi / İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2014
Lise	Edirne Anadolu Lisesi	2010

Yayın Listesi

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

Kıyıcı, O. D., ve Dikkartın Övez, F. T. (2025). *Mathematical Working Spaces in the mathematical modeling cycle: the case of preservice elementary mathematics teachers.* Educational Studies in Mathematics. https://doi.org/10.1007/s10649-025-10443-8

Kıyıcı, O. D., ve Dikkartın Övez, F. T. (baskıda). *Examination of mathematical work performed in mathematical modelling task in the light of MWS: The case of pre-service elementary mathematics teachers.* Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education.

Kıyıcı, O. D., ve Dikkartın Övez, F. T. (2021). *Examination of technology acceptance and TPACK competencies of mathematics teachers who are involved in distance education practices during the pandemic process.* Journal of Educational Technology and Online Learning, 4(4), 805-821.

Dikkartın Övez, F. T., ve Kıyıcı, O. D. (2018). *6th grade students' views about mathematical teaching based on technology integration.* World Journal of Education, 8(5), 160-171.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında (Proceedings) Basılan Bildiriler

Kıyıcı, O. D., Dikkartın Övez, F. T. (2024). *Examination of Mathematical Work Performed in Mathematical Modeling Task in The Light Of MWS: The Case of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers.* Eighth Symposium on the Study of Mathematical Work (ETM8)

Kıyıcı, O. D., Dikkartın Övez, F. T. (2024). *Sürdürülebilir Yaşam Bağlamındaki Matematik Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin İncelenmesi.* 16. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (UFBMEK16)

Kıyıcı, O. D., Dikkartın Övez, F. T. (2019). *Planlama-Uygulama-Değerlendirme Modeline Göre Geliştirilen Öğretim Uygulamalarının Akademik Başarıya ve Motivasyona Etkisi: 6. Sınıf Matematik Dersi Örneği.* 4. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu (TÜRKBİLMAT-4)

Kıyıcı, O. D., Dikkartın Övez, F. T. (2018). *6th Grade Students' Views About Mathematical Teaching Based on Technology Integration.* An International Conference On Education, Technology And Science (GLOBETS)

Kıyıcı, O. D., Dikkartın Övez, F. T., Köysüren, M. (2016). *Teknoloji Entegrasyonu ve 5E Modeline Adapte Edilmiş Bir Öğretim Uygulamasının Öğrenci Başarısına Etkisi.* 25. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi (UEBK25)

Yazılan Uluslararası Kitap Bölümleri

Kıyıcı, O. D. (2025). *Sürdürülebilir Yaşam Bağlamında Matematik Problemleri: Ortaokul Öğrencilerinin Farkındalık Düzeyleri ve Problem Çözme Süreçleri,* Livre de Lyon, Editör: Filiz Tuba Dikkartın Övez, Basım sayısı: 1, Sayfa Sayısı, ... , ISBN: ..., Türkçe (Bilimsel Kitap)

Dikkartın Övez, F. T. ve Kıyıcı, O. D. (2020). *BİT Entegrasyon Modeline Göre Geliştirilen Öğretim Uygulamalarının Akademik Başarı ve Motivasyona Etkisi: 6. Sınıf Matematik Örneği,* Livre de Lyon, Editör: Hülya Gür, Basım sayısı:1, Sayfa Sayısı 479, ISBN:978-2-38236-049-1