T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\bar{H}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBUNUN ALT GRUPLARI İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

MELEK BAŞDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Recep ŞAHİN (Tez Danışmanı)**
Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN

BALIKESİR, HAZİRAN- 2025

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan “$\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{\lambda}_5)$ **Genişletilmiş Hecke Grubunun Alt Grupları ile İlgili Bazı Sonuçlar**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Melek BAŞDEMİR

ÖZET

$\overline{H}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBUNUN ALT GRUPLARI İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MELEK BAŞDEMİR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, HAZİRAN – 2025

Bu tez çalışmasında, $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubu için bazı sonuçlar verilmiştir. Tez dört bölümden oluşmuştur.

Tezin birinci bölümünde, $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubu tanımı verilerek, tezin bir genel tanıtımı yapılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde, tezde çalışılacak veya kullanılacak olan konulara ait tanımlar, teoremler ve yöntemler verilmiştir.

Tezin üçüncü kısmında, $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli altgruplarından biri olan $H_5\alpha$ alt grubu ele alınmıştır. $H_5\alpha$ grubunun alt gruplarından bazıları (kuvvet, komütatör ve kuvvetin komütatör) çalışılmıştır. Ayrıca çalışılan bu alt grupların α otomorfizması altında görüntülerinin H_5 Hecke grubunun benzer alt grupları eşit olduğu gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, elde edilen sonuçlar verilmiş ve ileriye dönük çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Genişletilmiş Hecke grup, Hecke grup, komütatör alt grup, kuvvet alt grubu, otomorfizma

Bilim Kod / Kodları :20401 Sayfa Sayısı : 30

ABSTRACT

SOME RESULTS RELATED WITH SUBGROUPS OF THE EXTENDED HECKE GROUP $\overline{H}(\lambda_5)$
MELEK BAŞDEMİR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, JUNE - 2025

In this thesis, some results are given fort he the extended Hecke group $\overline{H}_5$. The thesis consists of four sections.

In the first section of the thesis, the definition of the extended Hecke group $\overline{H}_5$ is given and a general introduction of the thesis is made.

In the second section of the thesis, definitions, theorems and methods belonging to the topics to be studied or used in the thesis are given.

In the third section of the thesis, the subgroup $H_5\alpha$, which is one of the 2-index subgroups of the extended Hecke group $\overline{H}_5$, is studied. Some of the subgroups of the group $\overline{H}_5$ (power, commutator and the commutator subgroups of the power) have been studied. In addition, it is shown that the images of these subgroups under the α automorphism are equal to similar subgroups of the Hecke group H_5.

In the fourth section of the thesis, the obtained results are given and suggestions are made for future studies.

KEYWORDS : Extended Hecke group, Hecke group, commutator subgroup, power subgroup, automorphism.

Science Code / Codes :20401 Page Number : 30

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

$PGL\ (2,\mathbb{C})$	: Projektif doğrusal grup
$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$	: Genel doğrusal grup
$PSL\ (2,\mathbb{C})$	: Projektif özel doğrusal grup
Γ	: Fuchsian grup
$H(\lambda)$	: Hecke grup
$\overline{H}_q$	: Genişletilmiş Hecke grup
$\overline{H}_5$	: q=5 durumunundaki Genişletilmiş Hecke grubu
$H_5\alpha$	: q=5 durumunundaki Hecke grubunun α altındaki görüntüsü
G^n	: G grubunun n. Kuvvet alt grubu

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezini hazırlama sürecinde bilgi ve deneyimiyle beni yönlendiren, her aşamada sabır ve anlayışla desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Recep Şahin'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Akademik hayatım boyunca bana koşulsuz destek veren, varlıklarıyla güç bulduğum sevgili aileme sonsuz minnettarım. Ayrıca, bu süreçte moral kaynağım olan, her zaman yanımda olduğunu hissettiren kıymetli arkadaşım Aybesüm Avcu'ya da gönülden teşekkür ederim.

Bu tez, onların destekleri olmasaydı bu noktaya gelemezdi

Balıkesir, 2025 **Melek BAŞDEMİR**

1. GİRİŞ

Bu bölümde, çalışmanın gelişimi ve tezin bölümleri tanıtılacaktır.

Erich Hecke, 1936 yılında yaptığı makalede literatüre daha sonra Hecke grupları olarak adlandırılacak olan aşağıdaki grupları tanıtmıştır [1].

λ sabit bir pozitif sayı olsun. Bu durumda;

$X(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad Y(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$

reel katsayılı lineer fonksiyonları ile üretilen gruplar, Hecke grupları olarak adlandırılır ve $H(\lambda)$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca Hecke, bu grupların $\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$, $q \geq 3$ tamsayı veya $\lambda \geq 2$ için Fuchsian grup olduğunu ispatlamıştır. $\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$, $q \geq 3$ tamsayı biçimindeki gruplara 1. Çeşit Hecke grupları adı verilir ve $H(\lambda_q) = H_q$ şeklinde gösterilir. En önemli Hecke grupları q=3, 4,5 ve 6 için olanlardır [2].

Hecke gruplarının üreteç kümesine;

$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

yansımasının ilave edilmesiyle oluşan gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir ve $\overline{H}_q$ şeklinde gösterilir.

Bu tezde $q = 5$ olma durumundaki $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubu ve bu grubun bazı sonlu indeksli normal alt grupları çalışılmıştır. Burada $\overline{H}_5$ grubunun bir α otomorfizmasının yardımı olacaktır. α otomorfizması, $\overline{H}_5$ grubunun bazı normal alt gruplarını birbirleriyle karşılıklı (çift taraflı) eşleştirmektedir. $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli H_5 Hecke alt grubu ile $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli $H_5\alpha$ alt grubu α otomorfizması altında eşleşmektedirler.

$\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grupları ve bu grupların bazı normal alt grupları bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır [3], [4], [5], [6].

İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak olan tanımlar, ilgili teoremler ve yöntemler yer sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, $\overline{H}_5$ grubunun 2 indeksli $H_5\alpha$ alt grubu ele alınmış, bu grubun kuvvet, komütatör ve kuyvetin komütatör alt grupları bulunmuştur. Burada bulunan alt grupların α otomorfizması altında $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun hangi alt gruplarına taşındığı gösterilmiştir.

Dördüncü ve son bölümde ise sonuçlar özet şeklinde verilmiş ve bir takım öneriler sunulmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

Tezin bu bölümünde, bu çalışmada kullanılacak olan tanımlar, teoremler ve yöntemler anlatılacaktır.

2.1 Doğrusal Dönüşümler

Tanım 2.1.1: $e, f, g, h, \in \mathbb{C}$, $eh - gf \neq 0$ olmak üzere;

$$T(z) = \frac{ez + f}{gz + h}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümlere doğrusal dönüşümler denir. Bu dönüşümler, $\mathbb{C}_\infty$ un otomorfizimleridir. Bu dönüşümler kümesi, bileşke işlemi altında bir grup yapısı meydana getirir. Oluşturulan grup $PGL(2, \mathbb{C})$ şeklinde gösterilir. $e, f, g, h, \in \mathbb{C}$, $eh - gf \neq 0$ için

$$U(z) = \frac{e\bar{z}+f}{g\bar{z}+h}$$

dönüşümleri de $\mathbb{C}_\infty$ un anti-otomorfizimleridir. Tüm otomorfizimler ve anti-otomorfizimler fonksiyonların bileşke işlemi altında bir grup oluştururlar.

$e, f, g, h, \in \mathbb{C}$, $eh - fg \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklindeki 2x2 matrisler kümesi, matris çarpımı işlemi ile bir grup oluşturur ve $GL(2, \mathbb{C})$ şeklinde gösterilir [7].

Tanım 2.1.3: $PGL(2, \mathbb{C})$ grubuna ait bazı dönüşümlerden meydana gelen

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{\frac{ez+f}{gz+h} \mid e, f, g, h, \in \mathbb{C}, eh - fg = 1 \right\}$$

ve

$$G' = \left\{\frac{e\bar{z}+f}{g\bar{z}+h} \mid e, f, g, h, \in \mathbb{C}, eh - fg = -1 \right\}$$

biçimindeki iki alt kümesinin birleşimi olan $G = PSL(2, \mathbb{R}) \cup G$ kümesi fonsiyonların bileşke işlemine göre bir grup olur. [8]

2.2 Fuchsian Grubu

Tanım 2.2.1: $PSL(2, \mathbb{R})$ grubundaki ayrık olan alt gruplarının her birine Fuchsian grup denir ve Γ ile gösterilir.

Her Γ Fuchsian grubu alttaki gibi bir gösterime sahiptir [9]

Üreteçleri: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ (Hiperbolik olanlar)

$x_1, x_2, \dots\ ,\ x_r$ (Eliptik olanlar)

$p_1, p_2, \dots\ ,\ p_t$ (Parabolik olanlar)

$h_1, h_2, \dots\ ,\ h_u$ (Hiperbolik sınır elemanı olanlar)

Bağıntıları:

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$$

2.3 Hecke Grupları

2.3.1 Tanım: λ sabit pozitif bir sayı olsun. Bu durumda;

$X(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad Y(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ ($\lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right), q \geq 3$ tam sayı)

reel katsayılı kesirli lineer dönüşümleri yardımıyla üretilmiş olan gruplara H_q Hecke grupları adı verilir. H_q Hecke grubunun sunuşu ;

$H(\lambda_q) =< X, Y \mid X^2 = Y^q = I > \cong C_2 * C_q$

biçimindedir. Yani $H(\lambda_q)$ Hecke grubu, mertebesi 2 ve mertebesi q olan devirli grupların serbest çarpımına izomorftur [10].

2.4 Genişletilmiş Hecke Grupları

2.4.1 Tanım: $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ üretecinin Hecke gruplarına eklenmesiyle elde edilen gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir ve $\overline{H}_q$ ile gösterilir.

Hecke gruplarının üreteçleri X ve Y, eklenen R üreteci ile

$XR = RX \quad ve \quad YR = RY^{q-1}$

bağıntılarını sağlar. Böylece $\overline{H}_q$ grubu için gösterim;

$\overline{H}_q =< X, Y, R \mid X^2 = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_2 *_{Z_2} D_q$

biçimindedir.[11]

2.5 $\overline{H}_5$ Genişletilmiş Hecke Grubu

Bu tezde q=5 durumundaki $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunu çalışacağız. Bu grubun gösterimi

$\overline{H}_5 =< X, Y, R \mid X^2 = Y^5 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_2 *_{Z_2} D_5$

biçimindedir [4].

2.5.1 Teorem : $\overline{\boldsymbol{H}}_5$ genişletilmiş Hecke grubunda 3 tane indeksi 2 olan normal altgrup vardır. Bunlar şunlardır.

i) $H_5 =< X, Y | X^2 = Y^5 = I \ \ > \cong C_2 * C_5$ (Hecke grup)

ii) $\overline{H}_0 \ =< Y, XYX, R \mid Y^5 = (XYX)^5 = R^2 = (XYXR)^2 = (YR)^2 = I > \cong \ D_5 *_{Z_2} \ D_5$

iii) $H_5\alpha =< XR, Y | (XR)^2 = Y^5 = I \ \ > \cong C_2 * C_5$. [4]

Burada $\alpha: \overline{H}_5 \ \rightarrow \overline{H}_5$, $\alpha(X) = RX,\ \alpha(Y) = Y,\ \alpha(R) = R$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun bir dış otomorfizmasıdır [4]. H_5 Hecke grubuna α otomorfizması uygulanırsa $H_5\alpha$ grubu elde edilir. Tersine $H_5\alpha$ grubuna α otomorfizması uygulanırsa H_5 Hecke grubu bulunur. Yani α otomorfizması bu iki grubu birbirine taşımaktadır. Ayrıca α otomorfizması, bu iki grubun aynı alt gruplarını birbirlerine taşımaktadır.

2.6 Kuvvet Alt Grupları

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve G bir grup olsun. G grubunun tüm elemanlarının n. kuvveti alınarak oluşturulan alt gruba G grubunun kuvvet alt grubu denir ve G^n ile gösterilir [12].

Bütünüyle değişmezlik özelliği taşıyan kuvvet alt grupları bu özellikten dolayı normal alt grup olurlar. $p, r \in \mathbb{Z}^+$ için kuvvet altgrupları

$G^{pr} < G^p$ ve $G^{pr} < (G^p)^r$

özellikleri sağlanır. Üstelik

$G^p . G^r = G^{ebob(p,r)}$

eşitliği vardır [13].

H_5 Hecke grubunun kuvvet altgrupları [3] ve [14] nolu makalelerde Şahin vd tarafından çalışılmıştır.

2.6.1 Teorem : H_5^2 kuvvet altgrubu H_5 grubunda 2 indekslidir. Ayrıca grup sunuşu

$H_5^2 \ = \langle Y, XYX | Y^5 = (XYX)^5 = I \rangle \cong C_5 * C_5$

biçimindedir [14].

2.6.2 Teorem : H_5^5 kuvvet altgrubu H_5 grubunda 5 indekslidir. Ayrıca bu grubun üreteçleri $a=X$, $b=YXY^4$, $c=Y^2XY^3$, $d=Y^3XY^2$ ve $e=Y^4XY$ olmak üzere grup sunuşu

$H_5^5 = \langle a, b, c, d, e | a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2$
biçimindedir. [14]

2.7 Komütatör Alt Grupları

m ve n bir G grubunun elemanları olsun. Eğer;
$[m, n] = mnm^{-1}n^{-1}$
oluyor ve
$< [m, n] | m, n \in G >$
şeklinde tanımlanabiliyor ise bu gruba G grubunun komütatör alt grubu denir ve G' ile gösterilir. G' komütatör alt grubu normal alt gruptur. G/G' bölüm grubu G grubunun en geniş değişmeli bölüm grubudur. [15].
H_5 Hecke grubunun komütatör alt grupları [16] nolu makalede çalışılmıştır.

2.7.1 Teorem: H_5 Hecke grubunun $(H_5)'$ alt grubu indeksi 10 olan normal bir alt gruptur ve gösterimi
$(H_5)' = \langle XYXY^4 \rangle * \langle XY^2XY^3 \rangle * \langle XY^3XY^2 \rangle * \langle XY^4XY \rangle$
biçimindedir [16].

2.7.2 Teorem: $(H_5)' = H_5^2 \cap H_5^5$ [17].

Ayrıca H_5 Hecke grubunun H_5^n kuvvet alt gruplarının $(H_5^n)'$ komütatör alt grupları [18] nolu makalede çalışılmıştır. Şu sonuçlar bulunmuştur.

2.7.3 Teorem: $[H_5^2 : (H_5^2)'] = 25$ ve $(H_5^2)'$ alt grubu 16 ranklı bir serbest gruptur. [18]

2.7.4 Teorem: $\left[H_5^5 : \left(H_5^5\right)'\right] = 32$ ve $\left(H_5^5\right)'$ alt grubu 49 ranklı bir serbest gruptur. [18].

2.8 Reidemeister-Schreier Metodu

Reidemeister-Schreier Metodu H_5 Hecke ve $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke gruplarında indeksi sonlu olan normal alt gruplar için üreteç kümesini bulmak içinkullanılır.

Bu metot şu şekilde uygulanır. H bir grup ve üreteç kümesi $\{a_i\}$ olsun. G grubu H grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubu ise Reidemeister-Schreier metodu, $H/_G$ bölüm grubuna ait bir Schreier transversali seçilerek ve ardından bu transversalden elemanların, üreteçlerin ve ilk iki çarpımın koset temsilcilerinin terslerinin çarpılmasıyla uygulanır.

Öncelikle bölüm grubuna ait Schreier transversalı aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde seçilir

i) I ∈ Σ

ii) Σ sağdan sadeleştirme işlemine göre kapalıdır. Diğer bir deyişle $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots.., a_{i_r}, \in \Sigma$ ise $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots.., a_{i_{r-1}}, \in \Sigma$ olur.

Transversal kümesi, oluşturulduktan sonra grubu üreten elemanlar aşağıdaki gibi hesaplanır (bir eleman Σ dan).(bir üreteç H den).(önceki iki çarpımın Σ daki koset temsilcisi)$^{-1}$ [2].

3. $\overline{H}_5$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBU İÇİN BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde, $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli altgruplarından biri olan $H_5\alpha$ alt grubunu göz önüne alacağız. Önce $H_5\alpha$ alt grubunu kuvvet alt gruplarını çalışacağız. Sonra $H_5\alpha$ alt grubunun $(H_5\alpha)'$ komütatör alt grubu ve $(H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)^5$ alt gruplarının komütatör alt gruplarını çalışacağız. Ayrıca bulduğumuz alt grupların α otomorfizması altında görüntülerinin H_5 Hecke grubunun benzer alt grupları eşit olduğunu göstereceğiz.

Bu alt grupların $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun alt grubu olduğu unutulmamalıdır.

3.1 $H_5\alpha$ Grubunun Kuvvet Alt Grupları

Bu kısımda öncelikle $H_5\alpha$ grubunun n=2 ve n=5 için $(H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)^5$ kuvvet alt gruplarını çalışacağız.

3.1.1 Teorem : $(H_5\alpha)^2$ kuvvet altgrubu $H_5\alpha$ grubunda 2 indekslidir ve mertebesi 5 olan *Y* ve *XYX* elemanları tarafından üretilen iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

İspat : Önce $H_5\alpha/(H_5\alpha)^2$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için $H_5\alpha$ grubunun bağıntılarına grubun bütün elemanlarının 2. kuvvetlerinin birime eşit olduğu bağıntıları ekleyelim. Böylece

$H_5\alpha/(H_5\alpha)^2 = \langle XR, Y \mid (XR)^2 = Y^5 = (XR)^2 = Y^2 = \cdots = I \rangle$

olur. Bölüm grubundaki $Y^5 = Y^2 = I$ bağıntılarından $Y = I$ bulunur. Böylece

$H_5\alpha/(H_5\alpha)^2 = \langle XR \mid (XR)^2 = I \rangle \cong C_2$

elde edilir.

Şimdi $(H_5\alpha)^2$ altgrubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister-Schreier metodunu kullanalım. Bunun için $\sum = \{I, XR\}$ transversalini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar

$I.XR.(XR)^{-1} = I$

$XR.XR.(I)^{-1} = I$

$I.Y.(I)^{-1} = Y$

$XR.Y.(XR)^{-1} = XRYRX$

şeklindedir. Burada $XRYRX = XY^{-1}$ olduğundan$(H_5\alpha)^2$ grubu için üreteçler Y ve XYX

şeklinde bulunur. Böylece $(H_5\alpha)^2$ grubunun grup gösterimi

$(H_5\alpha)^2 = \langle Y, XYX | Y^5 = (XYX)^5 = I\rangle \cong C_5 * C_5$
biçiminde bulunur.

Teorem 2.6.1 ve 3.1.1 den aşağıdaki sonuç hemen görülür.

3.1.2 Sonuç: $(H_5\alpha)^2$ ve H_5^2 grupları birbirine eşittir. Yani $(H_5\alpha)^2 = H_5^2$.

3.1.3 Teorem : $(H_5\alpha)^5$ normal altgrubu $H_5\alpha$ grubunda 5 indekslidir ve mertebesi 2 olan *XR, YXYR, Y^2XY^2R, Y^3XY^3R ve Y^4XY^4R* elemanları tarafından üretilen beş devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

İspat : Önce $H\alpha/(H\alpha)^5$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için $H_5\alpha$ grubunun bağıntılarına grubun bütün elemanlarının 5. kuvvetlerinin birime eşit olduğu bağıntıları ekleyelim. Böylece bölüm grubu,
$H_5\alpha/(H_5\alpha)^5 = \langle XR, Y | (XR)^2 = Y^5 = (XR)^5 = Y^5 = \cdots = I\rangle$
şeklinde oluşur. Bölüm grubunda $(XR)^5 = (XR)^2 = I$ bağıntılarından $XR = I$ bulunur. Böylece
$H_5\alpha/(H_5\alpha)^5 = \langle Y | Y^5 = I\rangle \cong C_5$
elde edilir. Şimdi $(H_5\alpha)^5$ alt grubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister-Schreier metodunu kullanalım. Bunun için $\sum = \{I, Y, Y^2, Y^3, Y^4\}$ transversalini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar
$I.XR.(XR)^{-1} = XR$
$Y.XR.(Y)^{-1} = YXRY$
$Y^2.XR.(Y^2)^{-1} = Y^2XRY^2$
$Y^3.XR.(Y^3)^{-1} = Y^3XRY^3$
$Y^4.XR.(Y^4)^{-1} = Y^4XRY^4$
$I.Y.(Y)^{-1} = I$
$Y.Y.(Y^2)^{-1} = I$
$Y^2.Y.(Y^3)^{-1} = I$
$Y^3.Y.(Y^4)^{-1} = I$
$Y^4.Y.(I)^{-1} = I$

biçimindedir. Burada $YXRY^4 = YXYR$, $Y^2XRY^3 = Y^2XY^2R$, $Y^3XRY^2 = Y^3XY^3R$ ve $Y^4XRY = Y^4XY^4R$ olduğundan $(H_5\alpha)^5$ grubunun üreteçleri $a = XR$, $b = YXYR, c = Y^2XY^2R, d = Y^3XY^3R$ ve $e = Y^4XY^4R$ olarak bulunur. Böylece $(H_5\alpha)^5$ grubunun grup sunuşu

$(H_5\alpha)^5 = \langle a, b, c, d, e | a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2$

biçiminde bulunur.

Teorem 2.6.2 ve 3.1.3 den aşağıdaki sonuç hemen görülür.

3.1.4 Sonuç: $(H_5\alpha)^5\alpha$ ve H_5^2 grupları birbirine eşittir. Ayrıca $(H_5\alpha)^5 = H_5^5\alpha$

Artık tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(H_5\alpha)^n$ kuvvet alt gruplarını sınıflandırabiliriz.

3.1.5 Teorem: Her *n* pozitif bir tam sayısı için $(H_5\alpha)^n$ kuvvet alt grubu aşağıdaki durumlardan birine eşittir;

$$(H_5\alpha)^n = \begin{cases} H_5\alpha, & eğer\ (n,2) = 1\ ve\ (n,5) = 1\ ise \\ (H_5\alpha)^2, & eğer\ (n,2) = 2\ ve\ (n,5) = 1\ ise \\ (H_5\alpha)^5, & eğer\ (n,2) = 1\ ve\ (n,5) = 5\ ise \end{cases}$$

İspat: $H_5\alpha$ Hecke grubunun grup gösterimin

$$H_5\alpha = \langle XR, Y | (XR)^2 = Y^5 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H_5\alpha$ Hecke grubunun bağıntılarına her $V \in H_5\alpha$ için $V^n = I$ bağıntısı eklenirse $H_5\alpha/(H_5\alpha)^n$ bölüm grubunun gösterimi

$H_5\alpha/(H_5\alpha)^n = \langle XR, Y | (XR)^2 = Y^5 = (XR)^n = Y^n = \cdots = I \rangle$

biçiminde olur

Eğer *(n,2)=1* ve *(n,5)=1* ise $(XR)^n = X^2 = I$ ve $Y^2 = Y^n$ bağıntılarından $XR = I$ ve $Y = I$ bulunur. Böylece $(H_5\alpha)^5 = H_5\alpha$ olur.

Eğer *(n,2)=2* ve *(n,5)=1* ise $(XR)^n = (XR)^2 = I$ ve $Y^n = Y^5 = I$ bağıntılarından $(XR)^2 = I$ ve $Y = I$ bulunur. Böylece $H_5\alpha/(H_5\alpha)^n = \langle XR | (XR)^2 = I \rangle \cong C_2$ olacağından $(H_5\alpha)^n = (H_5\alpha)^2$ elde edilir

Eğer *(n,2)=1* ve *(n,5)=5* ise $(XR)^n = (XR)^2 = I$ ve $Y^n = Y^5 = I$ bağıntılarından $XR = I$

ve $Y^5 = I$ bulunur. Böylece $H_5\alpha/(H_5\alpha)^n = \langle Y \,|\, Y^5 = I \rangle \cong C_2$ olacağından $(H_5\alpha)^n = (H_5\alpha)^5$ elde edilir.

3.1.6 Uyarı : Burada $(n,2) = 2$ ve $(n,5) = 5$ olması durumunda $(H_5\alpha)^n$ kuvvet alt grupları bilinmemektedir. Bu gruplar hakkında bir şeyler söylemek için $(H_5\alpha)'$ komütatör alt grubuna ihtiyaç duyulmaktadır.

3.2 $H_5\alpha$ Grubunun $(H_5\alpha)'$ Komütatör Alt Grubu

Bu kısımda öncelikle, $H_5\alpha$ grubunun $(H_5\alpha)'$ komütatör altgrubunun üreteçlerini ve grup sunuşunu [6] nolu makaleyi kullanarak bulacağız. Sonra kuvvet alt grupları ile ilişkisini vereceğiz.

3.2.1 Teorem: $H_5\alpha$ grubunun $(H_5\alpha)'$ komütatör alt grubu 10 indeksli bir normal alt grubudur ve grup gösterimi

$(H_5\alpha)' = \langle XYXY \rangle * \langle XY^2XY^2 \rangle * \langle XY^3XY^3 \rangle * \langle XY^4XY^4 \rangle$

biçimindedir.

İspat: $H_5\alpha$ grubunun grup gösteriminin

$H_5\alpha = \langle XR, Y \,|\, (XR)^2 = Y^5 = I \rangle \cong C_2 * C_5$

olduğunu biliyoruz. $H_5\alpha$ grubunun grup bağıntılarına, grubun üreteçlerinin değişmelilik koşulunu ekleyerek $H_5\alpha/(H_5\alpha)'$ bölüm grubu için sunuşu oluşturalım. Böylece $H_5\alpha/(H_5\alpha)'$ bölüm grubunun gösterimi

$H_5\alpha/(H_5\alpha)' = \langle XR, Y \,|\, (XR)^2 = Y^5 = I, XR.Y = Y.XR \rangle \cong C_2 \times C_5$

elde edilir. Buradan indeks, $[H_5\alpha : (H_5\alpha)'] = 10$ şeklinde bulunur.

Artık $(H_5\alpha)'$ alt grubu için üreteçleri bulabiliriz. Burada. $\{I, XR, Y, Y^2, Y^3, Y^4, XRY, XRY^2, XRY^3, XRY^4\}$ Schreier transversal kümesine, Reidemeister-Schreier yöntemi uygulanırsa olası tüm işlemler ;

$I.XR.(XR)^{-1} = XR$

$Y.XR.(Y)^{-1} = YXRY$

$Y^2.XR.(Y^2)^{-1} = Y^2XRY^2$

$Y^3.XR.(Y^3)^{-1} = Y^3XRY^3$

$Y^4.XR.(Y^4)^{-1} = Y^4XRY^4$
$I.Y.(Y)^{-1} = I$
$Y.Y.(Y^2)^{-1} = I$
$Y^2.Y.(Y^3)^{-1} = I$
$Y^3.Y.(Y^4)^{-1} = I$
$Y^4.Y.(I)^{-1} = I$
biçimindedir. Burada $YXRY^4 = YXYR$, $Y^2XRY^3 = Y^2XY^2R, Y^3XRY^2 = Y^3XY^3R$ ve $Y^4XRY = Y^4XY^4R$ olduğundan $(H_5\alpha)^5$ grubunun üreteçleri $a = XR,\ b = YXYR, c = Y^2XY^2R, d = Y^3XY^3R\ ve\ e = Y^4XY^4R$ olarak bulunur. Böylece $(H_5\alpha)^5$ grubunun grup sunuşu
$(H_5\alpha)' = \langle XYXY\rangle * \langle XY^2XY^2\rangle * \langle XY^3XY^3\rangle * \langle XY^4XY^4\rangle$
olduğu görülür.

Teorem 2.7.1 ve 3.2.1 den aşağıdaki sonuç hemen görülür.

3.2.2 Sonuç: $H_5\alpha$ grubunun komütatör alt grubunun α altında görüntüsü H_5 Hecke grubunun komütatör alt grubuna eşittir. Ayrıca $(H_5\alpha)' = (H_5)'\alpha$.

Artık $(H_5\alpha)'$ komütatör altgrubu ile $(H_5\alpha)^m$ kuvvet altgrupları arasındaki ilişkiyi verebiliriz. H_5 Hecke grubu için, benzer sonuç Teorem 2.7.2 den görülebilir.

3.2.3 Teorem: $(H_5\alpha)' = (H_5\alpha)^2 \cap (H_5\alpha)^5$ olur.

İspat: $H_5\alpha/(H_5\alpha)^2 \cong C_2$ ve $H_5\alpha/(H_5\alpha)^5 \cong C_5$ olduğundan bu bölüm grupları devirlidir ve böylece değişmelidirler. $H_5\alpha/(H_5\alpha)'$ bölüm grubu en büyük değişmeli bölüm grubu olduğundan $H_5\alpha/(H_5\alpha)^2 \subset H_5\alpha/(H_5\alpha)'$ ve $H_5\alpha/(H_5\alpha)^5 \subset H_5\alpha/(H_5\alpha)'$ olur. Böylece $(H_5\alpha)' \subset (H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)' \subset (H_5\alpha)^5$ bulunur. Buradan $(H_5\alpha)' \subset (H_5\alpha)^2 \cap (H_5\alpha)^5$ elde edilir.

Diğer taraftan $(H_5\alpha)^2 \trianglelefteq H_5\alpha$ ve $(H_5\alpha)^5 \trianglelefteq H_5\alpha$ olduğunu biliyoruz. Bu normal alt gruplara 2. İzomorfizma teoremini uygularsak,
$(H_5\alpha)^2/(H_5\alpha)^2 \cap\ (H_5\alpha)^5 \cong\ (H_5\alpha)^2.(H_5\alpha)^5/(H_5\alpha)^5$
$(H_5\alpha)^2/(H_5\alpha)^2 \cap\ (H_5\alpha)^5 \cong H_5\alpha/(H_5\alpha)^5$

olarak bulunur. Böylece

$[H_5\alpha:(H_5\alpha)^2 \cap (H_5\alpha)^5] = [H_5\alpha:(H_5\alpha)^2].[H_5\alpha:(H_5\alpha)^2 \cap (H_5\alpha)^5] = 10$

olur. Burada

$(H_5\alpha)' \subset (H_5\alpha)^2 \cap (H_5\alpha)^5 \subset H_5\alpha$ ve $[H_5\alpha:(H_5\alpha)'] = 10$

olduğundan

$H_5\alpha = (H_5\alpha)^2 \cap (H_5\alpha)^5$

olarak bulunur.

Şimdi, Uyarı 3.1.6 daki $(n,2) = 2$ ve $(n,5) = 5$ ise $(H_5\alpha)^{10k}$ kuvvet altgrupları hakkında bir şeyler söyleyebiliriz.

3.2.3 Sonuç : $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^+$ için $(\boldsymbol{H_5\alpha})^{\boldsymbol{10k}}$ kuvvet alt grupları serbest gruplardır.

3.3 $\boldsymbol{H_5\alpha}$ Grubunun $(\boldsymbol{H_5\alpha})^{\boldsymbol{n}}$ Kuvvet Alt Gruplarının Komütatörleri

Bu kısımda $(H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)^5$ grupları için $((H_5\alpha)^2)'$ ve $((H_5\alpha)^5)'$ komütatör alt gruplarını çalışacağız. Buradaki teoremlerin ispatlarını, H_5 Hecke grubunda, H_5^n altgruplarının $(H_5^n)'$ altgrupları için olan [18] nolu makaledeki teoremlerin ispatına benzer olarak yapacağız.

3.3.1 Teorem: i) $[(H_5\alpha)^2:((H_5\alpha)^2)'] = 25$

ii) $((H_5\alpha)^2)'$ alt grubu 16 ranklı bir serbest gruptur.

İspat: i) İşlem kolaylığı için $(H_5\alpha)^2$ kuvvet altgrubunun üreteçlerine $a = Y$ ve $b = XYX$ diyelim. Şimdi ${(H_5\alpha)^2}/{((H_5\alpha)^2)'}$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için $(H_5\alpha)^2$ kuvvet altgrubunun bağıntılarına bütün üreteçlerin değişmelilik koşulunu ekleyelim. Böylece bölüm grubu

$${(H_5\alpha)^2}/{((H_5\alpha)^2)'} = \langle a, \mathrm{b} \,|\, \boldsymbol{a^5} = b^5 = I\,, ab = ba \rangle \cong C_5 \times C_5$$

olur. Buradan indeks $[(H_5\alpha)^2:((H_5\alpha)^2)'] = 25$ olarak bulunur.

ii) Şimdi Schreier transversali olarak $\sum = \{$I, $a, a^2, a^3, a^4, b, b^2, b^3, b^4, ab, ab^2, ab^3, ab^4, a^2b, a^2b^2, a^2b^3, a^2b^4, a^3b, a^3b^2, a^3b^3, a^3b^4, a^4b, a^4b^2, a^4b^3, a^4b^4$ $\}$ kümesini seçelim. Böylece mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.a.(a)^{-1}=I$

$a.a.(a^2)^{-1}=I$

$a^2.a.(a^2)^{-1}=I$

$a^3.a.(a^4)^{-1}=I$

$a^4.a.(I)^{-1}=I$

$b.a.(ab)^{-1}=bab^{-1}a^{-1}$

$b^2.a.(ab^2)^{-1}= b^2ab^{-2}a^{-1}$

$b^3.a.(ab^3)^{-1}= b^3ab^{-3}a^{-1}$

$b^4.a.(ab^4)^{-1}= b^4ab^{-4}a^{-1}$

$ab.a.(a^2b)^{-1}= abab^{-1}a^{-2}$

$ab^2.a.(a^2b^2)^{-1}= ab^2ab^{-2}a^{-2}$

$ab^3.a.(a^2b^3)^{-1}= ab^3ab^{-3}a^{-2}$

$ab^4.a.(a^2b^4)^{-1}= ab^4ab^{-4}a^{-2}$

$a^2b.a.(a^3b)^{-1} = a^2bab^{-1}a^{-3}$

$a^2b^2.a.(a^3b^2)^{-1}=a^2b^2ab^{-2}a^{-3}$

$a^2b^3.a.(a^3b^3)^{-1}= a^2b^3ab^{-3}a^{-3}$

$a^2b^4.a.(a^3b^4)^{-1}= a^2b^4ab^{-4}a^{-3}$

$a^3b.a.(a^4b)^{-1}=a^3bab^{-1}a^{-4}$

$a^3b^2.a.(a^4b^2)^{-1}= a^3b^2ab^{-2}a^{-4}$

$a^3b^3.a.(a^4b^3)^{-1}= a^3b^3ab^{-3}a^{-4}$

$a^3b^4.a.(a^4b^4)^{-1}= a^3b^4ab^{-4}a^{-4}$

$a^4b.a.(b)^{-1} = a^4bab^{-1}$

$a^4b^2.a.(b^2)^{-1}= a^4b^2ab^{-2}$

$a^4b^3.a.(b^3)^{-1}= a^4b^3ab^{-2}$

$a^4b^4.a.(b^4)^{-1}= a^4b^4ab^{-4}$

$I.b.(b)^{-1}=I$

$a.b.(ab)^{-1}=I$

$a^2.b.(a^2b)^{-1}=I$

$a^3.b.(a^3b)^{-1}=I$

$a^4.b.(a^4b)^{-1}=I$

$b.b.(b^2)^{-1}=I$

$b^2.b.(b^3)^{-1}= I$

$b^3.b.(b^4)^{-1}= I$

$b^4.b.(I)^{-1}=I$

$ab.b.(ab^2)^{-1}= I$

$ab^2.b.(ab^3)^{-1}= I$

$ab^3.b.(ab^4)^{-1}= I$

$ab^4.b.(a)^{-1}= I$

$a^2b.b.(a^2b^2)^{-1} = I$

$a^2b^2.b.(a^2b^3)^{-1}= I$

$a^2b^3.b.(a^2b^4)^{-1}=I$

$a^2b^4.b.(a^2)^{-1}=I$

$a^3b.b.(a^3b^2)^{-1}=I$

$a^3b^2.b.(a^3b^3)^{-1}=I$

$a^3b^3.b.(a^3b^4)^{-1}=I$

$a^3b^4.b.(a^3)^{-1} = I$

$a^4b.b.(a^4b^2)^{-1}=I$

$a^4b^2.b.(a^4b^3)^{-1}= I$

$a^4b^3.b.(a^4b^4)^{-1}= I$

$a^4b^4.b.(a^4)^{-1}=I$

Burada gerekli hesaplamalar ve kısaltmalar yapılırsa $((H_5\alpha)^2)'$ grubunun üreteçleri $[a,b]$, $[a^2,b]$, $[a^3,b]$, $[a^4,b]$, $[a,b^2]$, $[a^2,b^2]$, $[a^3,b^2]$, $[a^4,b^2]$, $[a,b^3]$, $[a^2,b^3]$, $[a^4,b^3]$, $[a,b^4]$, $[a^2,b^4]$, $[a^3,b^4]$, $[a^4,b^4]$ olarak bulunur.

Şimdi, Sonuç 3.1.2 ve Teorem 2.7.3 gereğince aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.3.2 Sonuç : $((H_5\alpha)^2)' = (H_5^2)'$

3.3.3 Teorem : i) $[(H_5\alpha)^5 : ((H_5\alpha)^5)'] = 32$
ii) $((H_5\alpha)^5)'$ alt grubu 49 ranklı bir serbest gruptur

İspat: i) Önce $(H_5\alpha)^5 / ((H_5\alpha)^5)'$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için $(H_5\alpha)^5$ alt grubunun bağıntılarına bütün üreteçlerin değişmelilik koşulunu eklersek bölüm grubu

$$(H_5\alpha)^5 \Big/ ((H_5\alpha)^5)' = \left\langle a,b,c,d,e \;\middle|\; \begin{matrix} a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=I, ab=ba, \\ ac=ca,\ ad=da,\ bc=cb,\ bd=db, cd=dc \end{matrix} \right\rangle$$

$$\cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2$$

olur. Böylece $[(H_5\alpha)^5 : ((H_5\alpha)^5)'] = 32$ bulunur.

ii) Şimdi Schreier transversali olarak $\sum = \{I, a, b, c, d, e, ab, ac, ad, ae, be, bd, be, cd, ce, de, abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, abcd, abce, abde, bcde, abcde\}$ kümesini seçelim. Böylece mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.a.(a)^{-1} = I$

$a.a.(I)^{-1} = I$

$b.a.(ab)^{-1} = baba$

$c.a.(ac)^{-1} = caca$

$d.a.(ad)^{-1} = dada$

$e.a.(ae)^{-1} = eaea$

$ab.a.(b)^{-1} = abab$

$ac.a.(c)^{-1} = acac$

$ad.a.(d)^{-1} = adad$

$ae.a.(e)^{-1} = aeae$

$bc.a.(abc)^{-1} = bcacba$

$bd.a.(abd)^{-1} = bdadba$

$be.a.(abe)^{-1} = beaeba$

$cd.a.(acd)^{-1} = cdadca$

$ce.a.(ace)^{-1} = ceaeca$

$de.a.(ade)^{-1} = deaeda$

$abc.a.(bc)^{-1} = abcacb$

$abd.a.(bd)^{-1} = abdadb$

$abe.a.(be)^{-1} = abeaeb$

$acd.a.(cd)^{-1} = acdadc$

$ace.a.(ce)^{-1} = aceaec$

$ade.a.(de)^{-1} = adeaed$

$bcd.a.(abcd)^{-1} = bcdadcba$

$bce.a.(abce)^{-1} = bceaecba$

$bde.a.(abde)^{-1} = bdeaedba$

$cde.a.(acde)^{-1} = cdeaedba$

$abcd.a.(bcd)^{-1} = abcdadcb$

$abce.a.(bce)^{-1} = abceaecb$

$abde.a.(bde)^{-1} = abceaecb$

$acde.a.(cde)^{-1} = adeaeda$

$bcde.a.(abcde)^{-1} = bcdeaedca$

$abcde.a.(bcde)^{-1} = abcdeaedcb$

$I.b.(b)^{-1} = I$

$a.b.(ba)^{-1} = abab$

$b.b.(I)^{-1} = I$

$c.b.(bc)^{-1} = cbcb$

$d.b.(bd)^{-1} = dbdb$

$e.b.(be)^{-1} = ebeb$

$ab.b.(a)^{-1} = I$

$ac.b.(abc)^{-1} = acbcba$

$ad.b.(abd)^{-1} = adbdba$

$ae.b.(abe)^{-1} = aebeba$

$bc.b.(c)^{-1} = bcbc$

$bd.b.(d)^{-1} = bdbd$

$be.b.(e)^{-1} = bebe$

$cd.b.(bcd)^{-1} = cdbdcb$

$ce.b.(bce)^{-1} = cebecb$

$de.b.(bde)^{-1} = debedb$

$abc.b.(ac)^{-1} = abcbca$

$abd.b.(ad)^{-1} = abdbda$

$abe.b.(ae)^{-1} = abebea$

$acd.b.(abcd)^{-1} = acdbdcba$

$ace.b.(abce)^{-1} = acebecba$

$ade.b.(abde)^{-1} = adebedba$

$bcd.b.(cd)^{-1} = bcdbdc$

$bce.b.(ce)^{-1} = bcebec$

$bde.b.(de)^{-1} = \ bdebed$

$cde.b.(bcde)^{-1} = \ cdebedcb$

$abcd.b.(acd)^{-1} = \ abcdbdca$

$abce.b.(ace)^{-1} = \ abcebeca$

$abde.b.(ade)^{-1} = \ abdebeda$

$acde.b.(abcde)^{-1} = \ abdebeda$

$bcde.b.(cde)^{-1} = bcdebedc$

$abcde.b.(acde)^{-1} = abcdebedca$

$I.c.(c)^{-1} = I$

$a.c.(ac)^{-1} = I$

$b.c.(bc)^{-1} = I$

$c.c.(I)^{-1} = I$

$d.c.(cd)^{-1} = dcdc$

$e.c.(ce)^{-1} = ecec$

$ab.c.(abc)^{-1} = I$

$ac.c.(a)^{-1} = I$

$ad.c.(acd)^{-1} = \ adcdca$

$ae.c.(ace)^{-1} = \ aececa$

$bc.c.(b)^{-1} = I$

$bd.c.(bcd)^{-1} = \ bdcdcb$

$be.c.(bce)^{-1} = \ bececb$

$cd.c.(d)^{-1} = \ cdcd$

$ce.c.(e)^{-1} = \ cece$

$de.c.(dce)^{-1} = dece$

$abc.c.(ab)^{-1} = I$

$abc.c.(ab)^{-1} = I$

$abe.c.(abce)^{-1} = abececba$

$acd.c.(ad)^{-1} = acdcda$

$ace.c.(ae)^{-1} = acecea$

$ade.c.(adce)^{-1} = adececda$

$bcd.c.(bd)^{-1} = \ bcdcdb$

$bce.c.(be)^{-1} = \ bceceb$

$bde.c.(bcde)^{-1} = bdecedcb$

$cde.c.(de)^{-1} = \ cdeced$

$abcd.c.(abd)^{-1} = \ abcdcdba$

$abce.c.(abe)^{-1} = \ abceceba$

$abde.c.(abcde)^{-1} = \ abdecabcde$

$acde.c.(ade)^{-1} = abdecabcde$

$bcde.c.(bde)^{-1} = bcdecedb$

$abcde.c.(abde)^{-1} = abcdecedba$

$I.d.(d)^{-1} = I$

$a.d.(ad)^{-1} = I$

$b.d.(bd)^{-1} = I$

$c.d.(cd)^{-1} = I$

$d.d.(I)^{-1} = I$

$e.d.(ed)^{-1} = I$

$ab.d.(abd)^{-1} = I$

$ac.d.(acd)^{-1} = \ I$

$ad.d.(a)^{-1} = I$

$ae.d.(ade)^{-1} = \ aede^{-1}d^{-1}a^{-1}$

$bc.d.(bcd)^{-1} = I$

$bd.d.(b)^{-1} = I$

$bd.d.(b)^{-1} = I$

$be.d.(bde)^{-1} = I$

$cd.d.(c)^{-1} = \ I$

$ce.d.(cde)^{-1} = cededc$

$de.d.(e)^{-1} = dede$

$abc.d.(abcd)^{-1} = \ I$

$abd.d.(ab)^{-1} = I$

$abe.d.(abde)^{-1} = abededba$

$acd.d.(ac)^{-1} \ = I$

$ace.d.(acde)^{-1} = acededca$

$ade.d.(ae)^{-1} = \ adedea$

$bcd.d.(bc)^{-1} = I$

$bce.d.(bcde)^{-1} = bcededcb$

$bde.d.(be)^{-1} = \; bdedeb$

$cde.d.(ce)^{-1} = \; cdedec$

$abcd.d.(abc)^{-1} = I$

$abce.d.(abcde)^{-1} = \; abcede^{-1}d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$abde.d.(abe)^{-1} = \; abdede^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$acde.d.(ace)^{-1} = \; acdede^{-1}c^{-1}a^{-1}$

$bcde.d.(bce)^{-1} = \; bcdede^{-1}c^{-1}b^{-1}$

$abcde.d.(abce)^{-1} = \; abcdede^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$I.e.(e)^{-1} = I$

$a.e.(ae)^{-1} = I$

$b.e.(be)^{-1} = I$

$c.e.(ce)^{-1} = I$

$d.e.(de)^{-1} = I$

$e.e.(I)^{-1} = e^2 = I$

$ab.e.(abe)^{-1} = \; I$

$ac.e.(ace)^{-1} = I$

$ad.e.(ade)^{-1} = \; I$

$ae.e.(a)^{-1} = \; I$

$bc.e.(bce)^{-1} = I$

$bd.e.(bde)^{-1} = \; I$

$be.e.(b)^{-1} = \; I$

$cd.e.(cde)^{-1} = \; I$

$ce.e.(c)^{-1} = \; I$

$de.e.(d)^{-1} = \; I$

$abc.e.(abce)^{-1} = I$

$abd.e.(abde)^{-1} = \; I$

$abe.e.(ab)^{-1} = \; I$

$acd.e.(acde)^{-1} = I$

$ace.e.(ac)^{-1} = \; I$

$ade.e.(ad)^{-1} = \; I$

$bcd.e.(bcde)^{-1} = \; I$

$bce.e.(bc)^{-1} = I$

$bde.e.(bd)^{-1} = I$

$cde.e.(cd)^{-1} = I$

$abcd.e.(abcde)^{-1} = I$

$abce.e.(abc)^{-1} = I$

$abde.e.(abd)^{-1} = I$

$acde.e.(acd)^{-1} = I$

$bcde.e.(bcd)^{-1} = I$

$abcde.e.(abcd)^{-1} = I$

Burada gerekli hesaplamalar ve sadeleştirmeler yapılırsa $((H_5\alpha)^5)'$ grubu için üreteçler$[a,e]$ $[a,d]$, $[a,c]$, $[a,b]$, $[b,e]$, $[b,d]$, $[b,c]$, $[c,e]$, $[c,d]$, $[d,e]$, $[ab,c]$, $[a,bc]$, $[ab,d]$, $[a,bd]$, $[ab,e]$, $[a,be]$, $[ac,d]$, $[a,cd]$, $[a,ce]$, $[ac,e]$, $[ad,e]$, $[a,de]$, $[b,cd]$, $[bc,d]$, $[b,ce]$, $[bc,e]$, $[bd,e]$, $[b,de]$, $[c,de]$, $[cd,e]$, $[a,bcd]$, $[ab,cd]$, $[abc,d]$, $[a,bce]$, $[ab,ce]$, $[abc,e]$, $[abd,e]$, $[ab,de]$, $[a,bde]$, $[acd,e]$, $[ac,de]$, $[a,cde]$, $[b,cde]$, $[bc,de]$, $[bcd,e]$, $[abcd,e]$, $[abc,de]$, $[ab,cde]$, $[a,bcde]$ olarak 49 tane bulunur.

Sonuç 3.1.4 ve Teorem 2.7.4 gereğince aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.3.4 Sonuç : $((H_5\alpha)^5)' = (H_5^5)'\alpha$

3.4 $H_5\alpha$ ve H_5 Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları

Önce $(H_5\alpha)'$ komütatör Alt grubunun 2. Kuvvet Alt grubunu çalışacağız.

3.4.1 Teorem : i) $[(H_5\alpha)' : ((H_5\alpha)')^2] = 16$.

ii) $((H_5\alpha)')^2$ grubu 49 ranklı bir serbest gruptur.

İspat : $(H_5\alpha)'$ komütatör alt grubunun üreteçlerine $XYXY = a, XY^2XY^2 = b, XY^3XY^3 = c, XY^4XY^4 = d$ diyelim. Sonra $(H_5\alpha)'$ grubunun bağıntılarına, grubun bütün elemanlarının karelerinin birime eşit olduğu bağıntıları ekleyelim. Bu durumda bölüm grubu,

$$(H_5\alpha)' \big/ ((H_5\alpha)')^2 = \left\langle a,b,c,d \,\middle|\, \begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab)^2 = (ac)^2 = \\ (ad)^2 = (bc)^2 = (bd)^2 = (cd)^2 = \cdots = I \end{array} \right\rangle$$

$$\cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2$$

olur. Böylece indeks $[(H_5\alpha)' : ((H\alpha)')^2] = 16$ olarak bulunur.

ii) $((H_5\alpha)')^2$ gurubunun üreteçlerini bulmak için Schreier transversali olarak

$\{I, a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, acd, bcd, abcd\}$ kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur.

$I.a.(a)^{-1}$=I

$a.a.(I)^{-1}$=a^2

$b.a.(ab)^{-1}$=$bab^{-1}a^{-1}$

$c.a.(ac)^{-1}$=$cac^{-1}a^{-1}$

$d.a.(ad)^{-1}$=$dad^{-1}a^{-1}$

$ab.a.(b)^{-1}$=$abab^{-1}$

$ac.a.(c)^{-1}$= $acac^{-1}$

$ad.a.(d)^{-1}$= $adad^{-1}$

$bc.a.(abc)^{-1}$=$bcac^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$bd.a.(abd)^{-1}$= $bdad^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$cd.a.(acd)^{-1}$= $cdad^{-1}c^{-1}a^{-1}$

$abc.a.(bc)^{-1}$= $abcac^{-1}b^{-1}$

$abd.a.(bd)^{-1}$= $abdad^{-1}b^{-1}$

$acd.a.(cd)^{-1} = acdad^{-1}c^{-1}$

$bcd.a.(abcd)^{-1}$= $bcdad^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$abcd.a.(bcd)^{-1}$= $abcdad^{-1}c^{-1}b^{-1}$

$I.b.(b)^{-1}$ =I

$a.b.(ab)^{-1}$=$abb^{-1}a^{-1} = I$

$b.b.(I)^{-1}$=b^2

$c.b.(bc)^{-1}$=$cbc^{-1}b^{-1}$

$d.b.(bd)^{-1}$=$dbd^{-1}b^{-1}$

$ab.b.(a)^{-1}$=$abba^{-1} = ab^2a^{-1}$

$ac.b.(abc)^{-1}$= $acbc^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$ad.b.(abd)^{-1}$= $adbd^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$bc.b.(c)^{-1}$=$bcbc^{-1}$

$bd.b.(d)^{-1}$= $bdbd^{-1}$

$cd.b.(bcd)^{-1}$= $cdbd^{-1}c^{-1}b^{-1}$

$abc.b.(ac)^{-1}$= $abcbc^{-1}a^{-1}$

$abd.b.(ad)^{-1}$= $abdbd^{-1}a^{-1}$

$acd.b.(abcd)^{-1} = acdbd^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$bcd.b.(cd)^{-1} = bcdbd^{-1}c^{-1}$

$abcd.b.(acd)^{-1} = abcdbd^{-1}c^{-1}a^{-1}$

$I.c.(c)^{-1} = I$

$a.c.(ac)^{-1} = I$

$b.c.(bc)^{-1} = I$

$c.c.(I)^{-1} = c^2$

$d.c.(cd)^{-1} = dcd^{-1}c^{-1}$

$ab.c.(abc)^{-1} = I$

$ac.c.(a)^{-1} = ac^2a^{-1}$

$ad.c.(acd)^{-1} = adcd^{-1}c^{-1}a^{-1}$

$bc.c.(b)^{-1} = bc^2b^{-1}$

$bd.c.(bcd)^{-1} = bdcd^{-1}c^{-1}b^{-1}$

$cd.c.(d)^{-1} == cdcd^{-1}$

$abc.c.(ab)^{-1} = abc^2b^{-1}c^{-1}$

$abd.c.(abcd)^{-1} = abdcd^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$

$acd.c.(ad)^{-1} = acdcd^{-1}a^{-1}$

$bcd.c.(bd)^{-1} = bcdcd^{-1}b^{-1}$

$abcd.c.(abd)^{-1} = abcdcd^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$I.d\ (d)^{-1} = I$

$a.d(ad)^{-1} = I$

$b.d(bd)^{-1} = I$

$c.d(cd)^{-1} = I$

$d.d(I)^{-1} = d^2$

$ab.d(abd)^{-1} = I$

$ac.d(acd)^{-1} = I$

$ad.d(a)^{-1} = ad^2a^{-1}$

$bc.d(bcd)^{-1} = bc^2d^{-1}$

$bd.d(bcd)^{-1} = I$

$cd.d(c)^{-1} == cd^2c^{-1}$

$abc.d(abcd)^{-1} = I$

$abd.d(ab)^{-1} = abd^2b^{-1}b^{-1}$

$acd.d(ac)^{-1} = acd^2c^{-1}a^{-1}$

$bcd.d(bc)^{-1} = bcd^2c^{-1}b^{-1}$

$abcd.d(abd)^{-1} = abcd^2c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

Buradan $((H_5\alpha)')^2$ grubunun üreteçleri a^2, $bab^{-1}a^{-1}$, $cac^{-1}a^{-1}$, $dad^{-1}a^{-1}$, $abab^{-1}$, $acac^{-1}$, $adad^{-1}$, $bcac^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $bdad^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $cdad^{-1}c^{-1}a^{-1}$, $abcac^{-1}b^{-1}$, $abdad^{-1}b^{-1}$, $acdad^{-1}c^{-1}$, $bcdad^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $abcdad^{-1}c^{-1}b^{-1}$, b^2, $cbc^{-1}b^{-1}$, $dbd^{-1}b^{-1}$, ab^2a^{-1}, $acbc^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $adbd^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $bcbc^{-1}$, $bdbd^{-1}$, $cdbd^{-1}c^{-1}b^{-1}$, $abcbc^{-1}a^{-1}$, $abdbd^{-1}a^{-1}$, $acdbd^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $bcdbd^{-1}c^{-1}$, $abcdbd^{-1}c^{-1}a^{-1}$, c^2, $dcd^{-1}c^{-1}$, ac^2a^{-1}, $adcd^{-1}c^{-1}a^{-1}$, bc^2b^{-1}, $bdcd^{-1}c^{-1}b^{-1}$, $cdcd^{-1}$, $abc^2b^{-1}c^{-1}$, $abdcd^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$, $acdcd^{-1}a^{-1}$, $bcdcd^{-1}b^{-1}$, $abcdcd^{-1}b^{-1}a^{-1}$, d^2, ad^2a^{-1}, bc^2d^{-1}, cd^2c^{-1}, $abd^2b^{-1}b^{-1}$, $acd^2c^{-1}a^{-1}$, $bcd^2c^{-1}b^{-1}$ *ve* $abcd^2c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ olarak 49 tane bulunur.

Şimdi $(H_5\alpha)^5$ kuvvet alt grubunun 2. Kuvvet Alt grubunu çalışacağız.

3.4.2 Teorem : i) $[(H_5\alpha)^5 : ((H_5\alpha)^5)^2] = 32$

ii) $((H_5\alpha)^5)^2$ alt grubu 49 ranklı bir serbest gruptur

İspat: i) Önce $(H_5\alpha)^5 / ((H_5\alpha)^5)^2$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için $(H_5\alpha)^5$ alt grubunun bağıntılarına bütün elemanların karelerinin birim elemana eşit olduğu bağıntıları eklersek bölüm grubu

$$(H_5\alpha)^5 / ((H_5\alpha)^5)^2 = \left\langle a,b,c,d,e \;\middle|\; \begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = I,, \ (ab)^2 = (ac)^2 = \\ (ad)^2 = (ae)^2 = (bc)^2 = (bd)^2 = \cdots = I \end{array} \right\rangle$$

$$\cong C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$$

olur. Böylece $[(H_5\alpha)^5 : ((H_5\alpha)^5)^2] = 32$ bulunur.

İspatın geri kalanı, Teorem 3.3.3 ii) kısmı ile aynıdır [19].

Teorem 3.3.3, 3.4.1 ve 3.4.2 lerden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.4.3 Sonuç : $((H_5\alpha)')^2 = ((H_5\alpha)^5)' = ((H_5\alpha)^5)^2$.

Aşağıdaki teoremleri H_5 Hecke grubunun $((H_5)')^2$ ve alt grupları için verebiliriz.

3.4.4 Teorem : i) $[(H_5)' : ((H_5)')^2] = 16$.
ii) $((H_5)')^2$ grubu 49 ranklı bir serbest gruptur.

İspat: $(H_5)'$ komütatör alt grubunun üreteçlerine $XYXY^4 = a\,, XY^2XY^3 = b, XY^3XY^2 = c$, $XY^4XY = d$ denir ve bölüm grubu oluşturulursa ispat Teorem 3.4.1 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

3.4.5 Teorem : i) $\left[H_5^5 : \left(H_5^5\right)^2\right] = 32$.
ii) $\left(H_5^5\right)^2$ grubu 49 ranklı bir serbest gruptur.

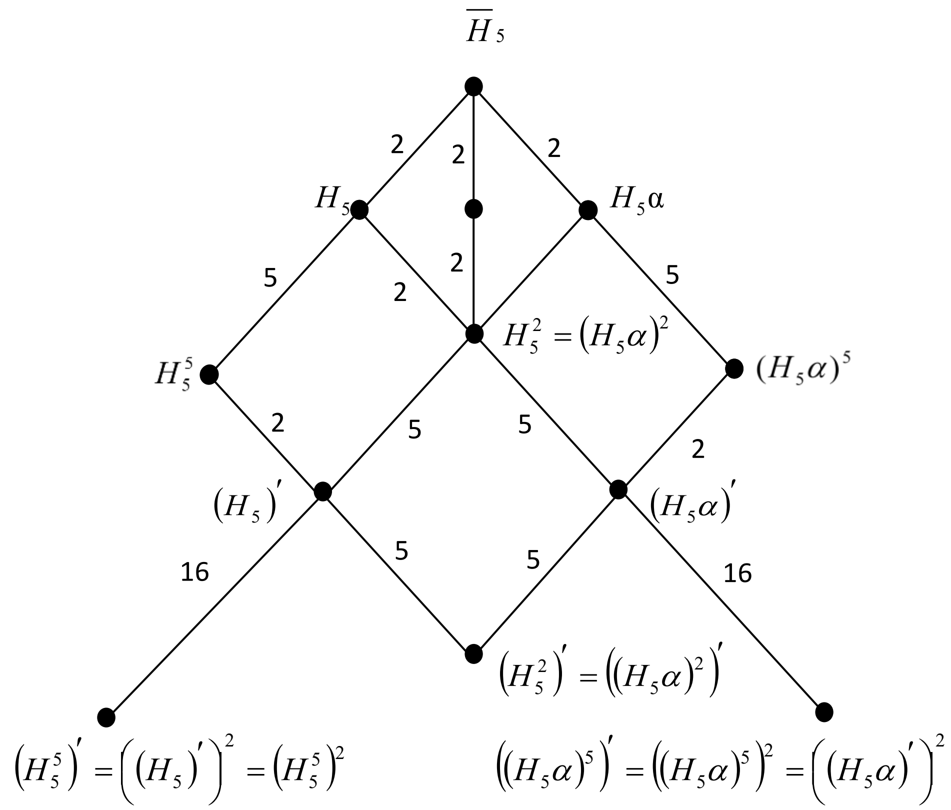
İspat : $\left(H_5^5\right)^2$ kuvvet alt grubunun üreteçlerine $a = X\,, b = YXY^4\,, c = Y^2XY^3,\; d = Y^3XY^2, e = Y^4XY$ denir ve bölüm grubu oluşturulursa ispat, 3.4.2 Teoremin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 2.7.4, 3.4.4 ve 3.4.5 lerden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.4.6 Sonuç : $\left(H_5^5\right)' = ((H_5)')^2 = \left(H_5^5\right)^2$.

3.4.7 Sonuç : 3.4.3 sonuçtaki gruplar α otomorfizması altında Sonuç 3.4.6 daki gruplar ile eşleşir. Yani $((H_5\alpha)')^2 = \left(H_5^5\right)'\alpha$.

Ayrıca tezde çalıştığımız alt grupların tamamı aşağıdaki şekilde bir ilişkiye sahiptir



Şekil 3.1 : $\overline{H}_5$ Genişletilmiş Hecke grubu ile normal alt grupları arasındaki ilişki

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, $\overline{H}_5$ grubunda indeksi sonlu olan bazı normal alt grupları incelenmiş ve bu grupların yapıları hakkında ayrıntılı sonuçlar elde edilmiştir. Burada öncelikle $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun bir α otomorfizması kullanılarak, $\overline{H}_5$ grubunun 2 indeksli H_5 Hecke alt grubunun α otomorfizması altında görüntüsü olan $H_5\alpha$ alt grubu çalışılmıştır.

Üçüncü bölüm birinci kısımda $H_5\alpha$ grubunun $(H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)^5$ nin indeksleri, üreteç kümeleri ve sunuşları ortaya konmuştur. Elde edilen bu alt grupların α otomorfizması altında H_5 Hecke alt grubunun hangi kuvvet alt grubuna eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(H_5\alpha)^n$ kuvvet alt gruplarının bir sınıflandırılması verilmiştir.

Üçüncü bölüm ikinci kısımda $H_5\alpha$ grubunun $(H_5\alpha)'$ komütatör alt grubunun indeksi, üreteçleri ve grup sunuşu bulunmuştur. Ayrıca H_5 Hecke alt grubunda var olan bir ilişkinin, $(H_5\alpha)'$ komütatör alt grubu ile $(H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)^5$ kuvvet alt grupları arasında da var olduğu ispatlanmıştır.

Üçüncü bölüm üçüncü kısımda $(H_5\alpha)^2$ ve $(H_5\alpha)^5$ kuvvet alt gruplarının $((H_5\alpha)^2)'$ ve $((H_5\alpha)^5)'$ komütatör alt gruplarının indeksleri ve üreteçleri bulunmuştur. Ayrıca bu alt grupların α otomorfizması altında H_5 Hecke grubunun $(H_5^2)'$ ve $(H_5^5)'$ alt gruplarına eşit olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü bölüm dördüncü kısımda, $H_5\alpha$ grubunun $((H_5\alpha)')^2$ ve $((H_5\alpha)^5)^2$ alt grupları ile H_5 Hecke grubunun $((H_5)')^2$ ve $(H_5^5)^2$ alt gruplarının gruplarındaki indeksleri ve üreteçleri bulunmuştur. Ayrıca α otomorfizması altında $((H_5\alpha)')^2$ ve $((H_5\alpha)^5)^2$ alt gruplarının $((H_5)')^2$ ve $(H_5^5)^2$ alt gruplarına eşit olduğu gösterilmiştir.

İleride, $\overline{H}_5$ genişletilmiş Hecke grubunun temel denklik ve denklik alt grupları ele alınıp, bu alt grupların kuvvet alt grupları çalışılabilir. Bu alt gruplar ile tezde bulunan alt gruplar arasındaki ilişkiler tespit edilebilir.

Ayrıca tezde,bulunan sonuçlar, $q \geq 5$ tek tam sayı için tüm $\overline{H}_q$ genişletilmiş Hecke gruplara taşınabilir.

5. KAYNAKLAR

[1] **Hecke, E.,** (1936). Über die bestimmung dirichletscher reichen durch ihre funktionalgleichungen, *Math. Ann.*, 11, 664-699.

[2] **Cangül, I. N.,** (1993). Normal Subgroups of Hecke Groups", Ph.D. Thesis, Southampton University.

[3] **Şahin, R., Koruoğlu, Ö., and İkikardes, S.,** (2006). On the extended Hecke group $\overline{H}_5$, *Algebra Colloq.* 13 (1), 17-23.

[4] Ş**ahin, R., Ikikardes, S., and Koruoğlu, Ö.,** (2006). Some normal subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}_p$, *Rocky Mountain J. Math.*, 36 (3), 1033-1048.

[5] **Yılmaz, V.,** (2012). $\overline{H}_5$ Genişletilmiş Hecke grubu ve alt grupları, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

[6] **Şahin, R.,** (2018). Some results on Hecke and extended Hecke groups, *Turkish J. Math.*, 42(2), 621--632.

[7] **Duman, C.,** (2023). Genişletilmiş ve genelleştirilmiş hecke grupları ile ilgili bazı sonuçlar, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

[8] **Dograyıcı, G.,** (2021). Genelleştirilmiş ve Genişletilmiş Genelleştirilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları", Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

[9] **Demir, B.,** (2015). Genişletilmiş genel hecke grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

[10] **Yaral, T.,** (2015). Genel hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının komütatör alt grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

[11] **Şahin, R.,** (2001). Genişletilmiş Hecke Grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

[12] **Sarıgedik, Z.**, **İkikardes, S., and Sahin, R.,** (2015). Power subgroups of the extended Hecke groups, *Miskolc Math. Notes*, **16** (1), 483-490.

[13] **Ikikardes, S.; Koruoğlu, Ö;, and Sahin, R.,** (2006)..Power subgroups of some Hecke groups, *Rocky Mountain J. Math.,* 36 (2), 497-508.

[14] **Cangul, I. N.**; **Sahin, R.**; **Ikikardes, S., and Koruoğlu, Ö.**, (2007). Power subgroups of some Hecke groups. II. *Houston J. Math.* 33 (1), 33-42.

[15] **Sahin, R.**; **Bizim, O.**; **and Cangul, I. N.** (2004). Commutator subgroups of the extended Hecke groups, *Czechoslovak Math. J.* 54(129),(1), 253-259.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[16] **Cangül, İ.N.,; and Bizim, O.,** (2002). Commutator subgroups of Hecke groups, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica,* 30(4), 253-259.

[17] **Cangül, İ. N.**; **and Singerman, D.** (1998). Normal subgroups of Hecke groups and regular maps. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 123 (1), 59-74

[18] **Sahin, R.**;**Koruoğlu, Ö**., (2011). Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups, *Ramanujan J.*, 24(2), 151-159.

[19] **Sarıgedik, Z.,** (2014). Genişletilmiş hecke gruplarının bazı altgrupları ve pell-lucas sayıları ile ilişkileri, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Melek Başdemir

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2025
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2021
Lise	Gazi Osman Paşa Anadolu Lisesi	2017