

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**LORENTZİAN PARA-SASAKİAN MANİFOLDLARIN ANTI-
İNVARİYANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ**

CİHAT KILINÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hülya AYTİMUR (Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ
Doç. Dr. Fatma KARACA

BALIKESİR, MART-2026

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Lorentzian Para-Sasakian Manifoldların Anti-invaryant Altmanifoldlarının Geometrisi**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Cihat KILINÇ

ÖZET

LORENTZİAN PARA-SASAKİAN MANİFOLDLARIN ANTI- İNVARYANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CİHAT KILINÇ

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. HÜLYA AYTİMUR)

BALIKESİR, MART - 2026

Bu tezde, Lorentzian Para-Sasakian manifoldların anti-invaryant altmanifoldlarının geometrisi incelenmiştir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm tezin giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, Lorentzian Para-Sasakian manifoldlarla ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm, Lorentzian Para-Sasakian manifoldların anti-invaryant altmanifoldlarının incelenmesi sonucu elde edilen ispatlara ayrılmıştır.

Sonuç ve öneri bölümünde ise, elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara yönelik bazı öneriler sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Altmanifoldlar, Anti-invaryant, Lorentzian, Para-Sasakian

Bilim Kod / Kodları : 20402

Sayfa Sayısı : 29

ABSTRACT

GEOMETRY OF ANTI-INVARIANT SUBMANIFOLDS OF LORENTZIAN PARA-SASAKIAN MANIFOLDS

MSC THESIS

CİHAT KILINÇ

**BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. HÜLYA AYTİMUR)

BALIKESİR, MARCH - 2026

In this thesis, the geometry of anti-invariant submanifolds of Lorentzian Para-Sasakian manifolds is studied.

The thesis consists of five chapters.

The first chapter is the introduction of the thesis.

In the second chapter, some fundamental concepts, definitions, and theorems used in the other chapters are presented.

In the third chapter, the fundamental concepts related to Lorentzian Para-Sasakian manifolds are presented.

The fourth chapter is devoted to the proofs obtained from the study of the anti-invariant submanifolds of Lorentzian Para-Sasakian manifolds.

Summary and Recommendations, the obtained results are summarized, and several recommendations for future studies are presented.

KEYWORDS: Submanifolds, Anti-invariant, Lorentzian, Para-Sasakian

Science Code / Codes : 20402

Page Number : 29

İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| İÇİNDEKİLER..... | iii |
| SEMBOL LİSTESİ | iv |
| ÖNSÖZ | v |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR | 3 |
| 2.1 RIEMANN MANİFOLDLARI..... | 3 |
| 2.2 ALTMANİFOLDLAR..... | 6 |
| 2.3 HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR | 10 |
| 3. LP-SASAKİAN MANİFOLDLAR | 12 |
| 4. LP-SASAKİAN MANİFOLDLARIN ALTMANİFODLARI..... | 16 |
| SONUÇ VE ÖNERİLER | 26 |
| KAYNAKÇA..... | 27 |
| ÖZGEÇMİŞ | 29 |

SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---------------------------|---|
| \mathbb{N} | : Doğal Sayılar Kümesi |
| \mathbb{R} | : Reel Sayılar Kümesi |
| M | : Manifold |
| g | : Metrik Tensör |
| $C^\infty(M, \mathbb{R})$ | : M den \mathbb{R} ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi |
| $[,]$ | : Lie Parantez Operatörü |
| $T_p M$ | : p Noktasında Teğet Uzay |
| $\chi(M)$ | : M altmanifoldunun Teğet Vektör Alanlarının Uzayı |
| ∇ | : M Üzerindeki Afin Koneksiyon |
| ∇^\perp | : Normal Koneksiyon |
| $\bar{\nabla}$ | : Van der Waerden Bortolotti Koneksiyonu |
| R | : M altmanifoldunun Riemann Eğrilik Tensörü |
| \bar{R} | : \bar{M} manifoldunun Riemann eğrilik tensörü |
| r | : Skaler Eğrilik |
| S | : Ricci Tensörü |
| Q | : Ricci Operatörü |
| η | : 1-form |
| ξ | : Vektör Alanı |
| ϕ | : Tensör Alanı |
| TM | : M altmanifoldunun tanjant demetini |
| Q | : Tachibana Tensörü |
| h | : 2.Temel Form |
| $\bar{\nabla}h$ | : 3.Temel Form |
| A_ν | : Şekil Operatörü |
| H | : Ortalama eğrilik vektör alanı |
| \otimes | : Tensör Çarpımı |

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanma süreci, akademik bir yolculuk olmanın ötesinde benim için son derece öğretici ve değerli bir deneyim oldu. Bu süreçte bana destek olan, emeği ve katkısı bulunan tüm kişi ve kurumlara içten teşekkürlerimi sunarım.

İlk olarak, çalışmalarım boyunca yol göstericiliği ve matematiksel bakış açısıyla bana ışık tutan danışmanım Doç. Dr. Hülya AYTİMUR'a en derin şükranlarımı sunarım.

Hayatımın her döneminde en büyük güç kaynağım olan, varlıklarıyla bana daima huzur ve motivasyon veren kıymetli aileme; özellikle de bu uzun ve meşakkatli eğitim sürecinde sabırları, destekleri ve koşulsuz sevgileriyle yanımda olan babam Ramazan KILINÇ, annem Sitti KILINÇ ve kardeşlerime minnettarlığımı sunarım.

Son olarak, yüksek lisans eğitimim boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında bana vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a şükranlarımı sunarım.

Bahkesir, 2026

Cihat KILINÇ

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri; manifoldlar üzerindeki geometrik yapıları ve bu yapıların özelliklerini inceleyen matematik dalıdır. Bu alanda, özel yapılar olan manifoldlar, özellikle Sasakian, Kenmotsu ve Koszul-Vinberg manifoldları gibi yapılar, önemli bir araştırma konusu olmuştur. Bu özel yapılar arasında ise, Lorentzian Para-Sasakian (LP-Sasakian) manifoldlar, hem kontakt geometri hem de Lorentz geometrisinin özelliklerini birleştirmesi açısından dikkat çekmektedir.

LP-Sasakian manifoldları, bir Lorentz metriği, bir kontakt formu (η), bir vektör alanı (ξ) ve bir (1,1) tip tensör alanı (ϕ) ile tanımlanan özel bir yapıdır. Bu manifoldlar, genel görelilik teorisi ve kozmoloji gibi fiziksel uygulamalarda da potansiyel taşıyan, zaman benzeri ve uzay benzeri yönlerin bir arada bulunduğu bir geometri sunar.

P-Sasakian (Para-Sasakian) manifoldları kavramı, Adati ve Matsumoto [1] tarafından tanıtılmıştır. Bu manifoldlar, Sasakian manifoldlarının bir tür genellemesi olarak ortaya çıkmış ve daha sonra Adati ve Miyazawa [2] ile De ve Tarafdar [3] gibi araştırmacılar tarafından çeşitli koşulları sağlayan P-Sasakian manifoldlar üzerine çalışmalar yapılmıştır. Matsumoto, Ianus ve Mihai [4], P-Sasakian manifoldlarının belirli tensör alanlarını kabul etme koşullarını incelemişlerdir.

Lorentzian Para-Sasakian (LP-Sasakian) manifoldları ise, Lorentz metriği ile donatılmış P-Sasakian yapısının bir uzantısıdır. Matsumoto [5], bu yapıların temel özelliklerini ortaya koymuş; Mihai ve Roşca [6] bu manifoldlar üzerine çalışmalar sunmuşlardır. Bu yapılar, Lorentz geometrisinin dinamiklerini kontakt geometrisinin kısıtlamalarıyla birleştirir.

Bir manifoldun altmanifoldları, diferansiyel geometrinin merkezi konularından biridir. Ayrıca LP-Sasakian manifoldlarının altmanifoldları, bu özel yapının altuzaylara nasıl yansıdığını anlamak için kritik öneme sahiptir. Al-Aqeel, De ve Shaikh [7], Lorentzian para-Sasakian manifoldlarının alt manifoldlarının geometrik özelliklerini incelemişlerdir. Özellikle, bu alt manifoldların ne zaman total geodezik veya total umbilik olacağını belirleyen koşulları ele alır.

Özgür ve Murathan [8], LP-Sasakian manifoldlarının invaryant altmanifoldları üzerine önemli bir çalışma yapmışlardır. Bu altmanifoldlar, ϕ tensör alanı altında teğet uzayda kalan altuzaylardır. Samui ve De [9] de, LP-Sasakian manifoldlarının bazı invaryant altmanifold sınıflarını incelemişlerdir. Buna karşılık, anti-invaryant altmanifoldlar (Al-Aqeel, De ve Shaikh [7]), ϕ tensör alanı altında normal uzaya eşlenen teğet uzaya sahiptir. Bu iki sınıf, LP-Sasakian yapısının altmanifoldlar üzerindeki etkileşimini anlamak için temel teşkil eder.

Daha genel altmanifold sınıfları da incelenmiştir. Pandey, Singh ve Gautam [10], LP-Sasakian manifoldlarının CR-altmanifoldlarını araştırmışlardır. Alegre, Carriazo ve Fernández [11], Lorentzian Sasakian ve para-Sasakian manifoldlarının slant altmanifoldlarını inceleyerek, bu yapıların daha esnek bir genellemesini sunmuşlardır.

LP-Sasakian manifoldlarının hiperyüzeyleri de yoğun ilgi görmüştür. Perктаş, Kılıç ve Keleş [12], bu manifoldların hiperyüzeylerinin geometrik özelliklerini incelemişlerdir. Aynı

yazarlar [13], LP-Sasakian manifoldlarının biharmonik hiperyüzeylerini de araştırarak biharmoniklik kavramını bu geometriye uygulamışlardır. Prasad ve Ojha [14], Lorentzian Para-Kontakt altmanifoldları üzerine çalışmışlardır. Ayrıca, Faghfour ve Mashmouli [15], LP-Sasakian manifoldlarından çıkan anti-invaryant semi-Riemannian submersiyonları incelemişlerdir.

Semi-paralel kavramı, ilk kez J. Deprez tarafından 1985 yılında yayımlanan bir çalışmada tanıtılmış ve bu yeni altmanifold sınıfının Öklid uzayındaki hiperyüzeylerini sınıflandırmıştır [16]. 1999 yılında ise A. C. Asperti, G. A. Lobos ve F. Mercuri, Deprez'in tanımladığı semi-paralel altmanifoldlar üzerinde yeni bir araştırma başlatarak pseudo-paralel altmanifold kavramını ortaya atmışlardır [17]. Bu çalışmalar, diferansiyel geometri alanına derinlik katmıştır.

Bu çalışmada ise Lorentzian Para-Sasakian manifoldların anti-invaryant altmanifoldları semi-paralellik ve pseudo-paralellik gibi koşullarla ele alınacaktır. İnceleme yapılırken [18] makalesinde bulunan yöntem LP-Sasakian manifoldlara taşınmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm temel kavramları içerir. Bu bölüm, tezin ilerleyen kısımları için gerekli olan Riemann Geometrisi, Altmanifoldlar Geometrisi ve Kontakt Geometri alanlarına ait temel kavramları ve tanımları sunarak teorik altyapıyı oluşturmaktadır. Üçüncü bölüm, tezin ana uzayı olan LP-Sasakian Manifoldların yapısını inceler. LP-Sasakian koşulu, temel tensörün kovaryant türevinin açıkça tanımlanmasıyla sağlanır ve bu, metriğin Lorentzian yapıda olduğunu gösterir. Karakteristik Vektör Alanının (ξ) türevinin ($\bar{\nabla}_X \xi = \phi X$) olduğu gibi temel ispatlar ve bu yapının gerektirdiği karakteristik özellikler sunulur. Ayrıca, bu yapısal denklemler kullanılarak, ilgili manifoldta ait Riemann eğrilik tensörü ve Ricci tensörü gibi temel geometrik nesnelerin tensörler cinsinden ifadelerine yer verilir. Dördüncü bölümde, LP-Sasakian Manifoldların anti-invaryant alt manifoldları hakkındaki temel özgün teoremleri içerir. Alt manifoldların total geodezik, minimal ve paralel koşullarına sahip olması için gerekli koşullar incelenmiştir. Sonuç bölümünde ise, elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve çeşitli öneriler açıklanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmanın teorik altyapısını oluşturmak amacıyla, tez kapsamında başvuru başlıca tanımlamalar bu başlık altında irdelenmektedir.

2.1. RIEMANN MANİFOLDU

Tanım 2.1.1. n -boyutlu bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde; diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve M manifoldundan reel sayılara giden fonksiyonlar ailesi $C^\infty(M)$ olarak belirlensin. Eğer M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde; simetrik, pozitif tanımlı ve 2-lineer özelliğe sahip bir g Riemann metriği varsa, bu metrik yapısına sahip M uzayına bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) çifti ile temsil edilir [19].

Tanım 2.1.2. n -boyutlu bir M diferensiyellenebilir bir manifold verilsin. Bu manifold üzerindeki tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesini $\chi(M)$, ve M manifoldundan reel sayılara giden sonsuz türevlenebilir fonksiyonların uzayını ise $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu ve her $X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan ∇ dönüşümü

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.2)$$

$$\nabla_{fX+gY}(Z) = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad (2.3)$$

$$\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y \quad (2.4)$$

özelliklerini sağlıyorsa M üzerinde bir lineer koneksiyon olarak adlandırılır. Bu tanım altında $\nabla_X Y$ ifadesine Y vektör alanının X yönündeki kovaryant türevi denir. Ayrıca $\nabla_X Y = 0$ şartı sağlanıyorsa Y vektör alanı X boyunca paraleldir denir [20].

Tanım 2.1.3. (M, g) , bir Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde tanımlı bir lineer koneksiyon olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı için;

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanan T fonksiyonuna ∇ koneksiyonun *torsiyon tensörü* adı verilir. Burada $[X, Y]$ ifadesi X ve Y vektör alanlarının Lie braketi temsil eder. $T(X, Y) = 0$ olursa, ∇ lineer koneksiyonuna *torsiyonsuzdur* denir [21].

Tanım 2.1.4. Boyutu n olan bir (M, g) Riemann manifoldu ile M manifoldu üzerinde ∇ afin koneksiyonu ele alınsın. Aşağıdaki iki şartı sağlayan ∇ koneksiyonuna, M üzerindeki *Levi-Civita koneksiyonu* adı verilir:

(i) Her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (2.6)$$

(ii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (2.7)$$

Bu koneksiyon, manifold üzerindeki her X, Y, Z vektör alanı için aşağıda yer alan *Koszul Özdeşliği* ile tek türlü belirlidir:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (2.8)$$

[21].

Tanım 2.1.5. M Riemann manifoldu üzerindeki ∇ Levi-Civita koneksiyonuna bağlı olarak,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.9)$$

bağıntısıyla ifade edilen (1,3) – tipindeki R tensör alanı *Riemann eğrilik tensörü* olarak isimlendirilir. Ayrıca R tensörü yardımıyla tanımlanan;

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \quad (2.10)$$

tensörü ise M üzerinde *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* olarak isimlendirilir [20]. Bu tensörler her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \quad (2.11)$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (2.12)$$

$$g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V) \quad (2.13)$$

$$g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y) \quad (2.14)$$

$$\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Y R(Z, X) + \nabla_Z R(X, Y) = 0 \quad (2.15)$$

eşitlikleri geçerlidir [22].

Tanım 2.1.6. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $T_p M$ tanjant uzayı için bir ortonormal baz olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlanan $(0, 2)$ -tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir. Diğer taraftan,

$$g(QX, Y) = S(X, Y) \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanan Q tensör alanına ise *Ricci operatörü* denir [21].

Tanım 2.1.7. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesi M üzerinde yerel bir ortonormal baz alanı olsun. S , Ricci eğrilik tensörü olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.18)$$

biçiminde tanımlanan r değerine M manifoldu üzerindeki *skaler eğrilik* denir [21].

Tanım 2.1.8. (M, g) bir n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki bir $p \in M$ noktasında, lineer bağımsız $X, Y \in T_p M$ vektörleri tarafından gerilen $\square \subset T_p M$ düzlem kesiti için

$$K(X_p \wedge Y_p) = \frac{g(R(X_p, Y_p)Y_p, X_p)}{g(X_p, X_p)g(Y_p, Y_p) - g(X_p, Y_p)^2} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanan $K(X_p \wedge Y_p)$ değerine \square düzlem kesitinin *kesitsel eğriliği* adı verilir [21].

2.2. ALTMANİFOLDLAR

Tanım 2.2.1. Boyutları sırasıyla m ve n olan iki farklı Riemann manifoldu (M, g) ve (\bar{M}, \bar{g}) olarak belirlensin. M manifoldundan \bar{M} manifolduna giden düzgün bir $f: M \rightarrow \bar{M}$ fonksiyonu ele alındığında; eğer her $p \in M$ noktasındaki

$$f_{*,p}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \bar{M}$$

türev dönüşümü birebir ise, f fonksiyonu bir *immersiyon (daldırma)* olarak nitelendirilmektedir. Böylece M manifoldu, \bar{M} yapısının bir *immersed (daldırılmış) altmanifoldu* şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2. $f: M \rightarrow \bar{M}$ bir immersiyon olsun. Eğer f dönüşümü global olarak birebir $(1-1)$ ve aynı zamanda M ile $f(M)$ görüntüsü arasında bir homeomorfizma ise; f dönüşümüne *embedding (gömme)* adı verilir. Bu durumda $f(M)$ kümesi, \bar{M} manifoldunun bir *gömülen altmanifoldu* veya kısaca *altmanifoldu* olarak tanımlanır [22].

Tanım 2.2.3. (\bar{M}, \bar{g}) bir Riemann manifoldu ve M , (\bar{M}, \bar{g}) manifoldun bir altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun tanjant demeti TM ve normal demeti ise $T^\perp M$ ile gösterilmek üzere; \bar{M} manifoldunun M üzerindeki kısıtlanmış tanjant demeti,

$$\overline{TM} = TM \oplus T^\perp M$$

biçiminde ifade edilebilir [22].

Tanım 2.2.4. (\bar{M}, \bar{g}) bir Riemann manifold ve M , (\bar{M}, \bar{g}) manifoldun bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için $T_p M$ teğet uzayı tanımlandığında

$$T^\perp M = \{ \xi \in T_p \bar{M} : \bar{g}(\xi, X) = 0, \quad \forall X \in T_p M \}$$

kümesinin her bir ξ elemanına M altmanifoldunun p noktasındaki *normal vektörü* denir. Eğer ξ vektörü $\bar{g}(\xi, \xi) = 1$ şartını sağlıyorsa *birim normal vektör* olarak adlandırılır. M üzerindeki her noktada tanımlı olan normal vektörlerin oluşturduğu yapıya ise M nin *normal demeti* adı verilir ve $T^\perp M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5. (M, g) , (\bar{M}, \bar{g}) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. \bar{M} üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ ile gösterildiğinde her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.20)$$

eşitliğine *Gauss formülü* denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\bar{\nabla}_X Y$ nin tanjant ve normal bileşenleridir. M üzerindeki teğet vektör alanlarını normal demete eşleyen;

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

dönüşümüne M altmanifoldunun *ikinci temel formu* adı verilir. $h \equiv 0$ olması durumunda ise altmanifold *total geodeziktir* denir.[22].

Tanım 2.2.6. M, \bar{M} Riemann manifoldunun bir altmanifoldu ve M nin birim normal vektör alanı V olsun. Her $X \in \chi(M)$ için \bar{M} üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ile gösterilmek üzere;

$$\bar{\nabla}_X V = \nabla_X^\perp V - A_V X \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilen denkleme *Weingarten formülü* adı verilir. Burada yer alan operatörlerin tanım ve değer kümeleri şu şekildedir:

- Şekil Operatörü (A_V): $A_V: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ şeklinde tanımlı bir lineer dönüşümdür.
- Normal Koneksiyon $\nabla^\perp: \chi(M) \times \chi^\perp(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$ şeklinde tanımlı bir koneksiyondur.

M üzerindeki h ikinci temel form ve A_V şekil operatörü şekil operatörü arasında aşağıdaki temel bağıntı vardır:

$$g(A_X V, Y) = g(h(X, Y), V) \quad (2.22)$$

[22].

Tanım 2.2.7. M manifoldu, (\bar{M}, \bar{g}) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesi M üzerinde tanımlı bir yerel ortonormal çatı alanı olsun. M altmanifoldu üzerinde h ikinci temel form olmak üzere;

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.23)$$

biçiminde tanımlanan H vektör alanına, M altmanifoldunun *ortalama eğrilik vektör alanı* denir. Eğer manifold üzerindeki her noktada $H = 0$ şartı sağlanıyorsa, M altmanifoldu *minimal altmanifold* olarak adlandırılır [22].

Tanım 2.2.8. (\bar{M}, \bar{g}) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu olan h nin kovaryant türevi her $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (2.24)$$

biçiminde tanımlanır [22].

Tanım 2.2.9. (\bar{M}, \bar{g}) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M için eğrilik tensör alanları sırasıyla \bar{R} ve R ile gösterilmek üzere; her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\xi, \eta \in \chi(M)^\perp$ için Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri şu şekildedir:

$$\bar{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - g(h(X, Z), h(Y, W)) - g(h(Y, Z), h(X, W)) \quad (2.25)$$

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z) \quad (2.26)$$

$$\bar{R}(X, Y, \xi, \eta) = R^\perp(X, Y, \xi, \eta) - g([A_\xi, A_\eta]X, Y) \quad (2.17)$$

Burada $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$ şeklinde gösterilir [22] ve $\bar{\nabla}$ koneksiyonu *van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.10. (\bar{M}, \bar{g}) bir Riemann manifoldu ve M bu manifoldun bir altmanifoldu olsun. \bar{M} nin Riemann eğrilik tensörü \bar{R} ve her $X, Y, Z \in \chi(M)$ teğet vektör alanları için

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z). \quad (2.28)$$

Tanım 2.2.11. (\bar{M}, \bar{g}) bir Riemann manifoldunun altmanifoldu M üzerinde R eğrilik tensörü ile h ikinci temel form arasındaki ilişki $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ teğet vektör alanları için;

$$(R(X, Y) \cdot h)(Z, W) = R^\perp(X, Y)h(Z, W) - h(R(X, Y)Z, W) - h(Z, R(X, Y)W) \quad (2.29)$$

dir [16].

Tanım 2.2.12. (\bar{M}, \bar{g}) Riemann manifoldu ve M bu yapının bir altmanifoldu olarak ele alınsın. M üzerindeki $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ teğet vektör alanları için $\bar{R} \cdot \bar{\nabla} h$;

$$\begin{aligned} (R(X, Y) \cdot \bar{\nabla} h)(Z, W, V) &= R^\perp(X, Y)(\bar{\nabla} h(Z, W, V)) - \\ &(\bar{\nabla} h)(R(X, Y)Z, W, V) - (\bar{\nabla} h)(Z, R(X, Y)W, V) - (\bar{\nabla} h)(Z, W, R(X, Y)V) \end{aligned} \quad (2.30)$$

biçiminde tanımlanır [16].

Tanım 2.2.13. (\bar{M}, \bar{g}) bir Riemannian manifold, T bir $(0, k)$ -tipi tensör alanı ve A bir $(0, 2)$ -tipi tensör alanı olsun. Bu durumda T ve A tensörleri için *Tachibana tensörü* $n > 1$ $U_1, U_2, \dots, U_k, \rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ iken

$$\begin{aligned}
Q(A, T)(U_1, \dots, U_k; \rho_1, \rho_2) &= -T((\rho_1 \wedge \rho_2)U_1, U_2, \dots, U_k) \\
&- T(U_1, (\rho_1 \wedge \rho_2)U_2, \dots, U_k) - \dots - T(U_1, U_2, \dots, (\rho_1 \wedge \rho_2)U_k)
\end{aligned} \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(X \wedge_A Y)U = A(X, Y)Z - A(X, Z)Y$ ifadesini temsil eder [16].

Tanım 2.2.14. (\bar{M}, \bar{g}) Riemann manifoldunun $n -$ boyutlu ($n > 3$) bir altmanifoldu M olsun. $L_1, L_2, L_3, L_4 \in C^\infty(M)$ skaler fonksiyonlar olmak üzere;

$$R. h = L_1 Q(g, h) \quad (2.32)$$

$$R. \nabla h = L_2 Q(g, \nabla h) \quad (2.33)$$

$$R. h = L_3 Q(S, h) \quad (2.34)$$

$$R. \nabla h = L_4 Q(S, \nabla h) \quad (2.35)$$

olacak şekilde bu denklemler bağlamında L_1, L_2, L_3 ve L_4 fonksiyonları bulunabiliyor ise M altmanifold için sırasıyla *pseudoparalel*, *2-pseudoparalel*, *Ricci genelleştirilmiş pseudoparalel*, *2-Ricci genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifold* denir [17]. Diğer taraftan, $L_1 = 0$ ve $L_3 = 0$ ise sırasıyla *semiparalel* ve *2-semiparalel altmanifold* denir [16].

Tanım 2.2.15. (\bar{M}, \bar{g}) , LP-Sasakian manifoldu ve $M, (\bar{M}, \bar{g})$ manifoldunun $n -$ boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M manifoldunun her p noktasında

$$\phi(T_p M) \subset T_p^\perp M$$

şartı sağlanıyorsa, M altmanifolduna \bar{M} manifoldunun bir *anti-invaryant altmanifoldu* denir.

2.3. HEMEN HEMEN KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR

Tanım 2.3.1. $(2n + 1)$ – boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde; $(1,1)$ – tipinde bir ϕ tensör alanı, ξ karakteristik vektör alanı ve η 1 – form tanımlanmış olsun. Her $X \in \chi(M)$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \quad (2.36)$$

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad (2.37)$$

şartları sağlandığında (M, ϕ, ξ, η) yapısı *hemen hemen kontakt manifold* olarak isimlendirilir [20].

Lemma 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısı ile donatılmış bir manifold üzerinde, tanımlayıcı aksiyomların bir sonucu olarak aşağıdaki cebirsel bağıntılar geçerlidir:

$$\phi(\xi) = 0 \quad (2.38)$$

$$\eta(\phi X) = 0 \quad (2.39)$$

$$\text{rank}\phi = 2n \quad (2.40)$$

[21].

Tanım 2.3.2. (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifoldu üzerinde, her $X, Y \in \chi(M)$ teğet vektör alanı için aşağıdaki şartları sağlayan bir g Riemann metriği tanımlanabiliyorsa;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.41)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.42)$$

bu durumda g metriği *hemen hemen kontakt metrik*, (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisi ise *hemen hemen kontakt metrik manifold* olarak adlandırılır [21].

Tanım 2.3.3. M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) yapısı tanımlı $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer M üzerindeki η 1-formu, her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \quad (2.43)$$

şartını sağlıyorsa η formuna M üzerinde bir *kontakt yapı* ve M manifolduna da *kontakt manifold* denir [23].

Tanım 2.3.4. (ϕ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına sahip $(2n + 1)$ – boyutlu bir M manifoldu verilsin. Eğer bu kontakt metrik yapı normal ise, M manifoldu *Sasakian manifold* olarak tanımlanır [23].

Teorem 2.3.1. $(2n + 1)$ – boyutlu bir M hemen hemen kontakt metrik manifoldunun Sasakian manifold yapısına sahip olması için gerek ve yeter koşul, her $X, Y \in \chi(M)$ teğet vektör alanları için;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (2.44)$$

denkleminin sağlanmasıdır [23].

Tanım 2.3.5. $(2n + 1)$ – boyutlu boyutlu diferansiyellenenilir bir M manifoldu üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bileşenleri ile tanımlanan hemen hemen parakontakt metrik yapı; her $X, Y \in \chi(M)$ teğet vektör alanları için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, M manifolduna *Para-Sasakian manifold* denir:

$$d\eta = 0 \quad (2.45)$$

$$\nabla_X \xi = \phi X \quad (2.46)$$

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)\xi \quad (2.47)$$

[2].

3. LORENTZİAN PARA-SASAKİAN MANİFOLDLAR

Bu bölüm kapsamında, Lorentzian Para-Sasakian manifoldların geometrisinin temel çatısını oluşturan kavramsal tanımlar ve bu yapıların sergilediği karakteristik matematiksel özellikler incelenecektir.

Tanım 3.1. n boyutlu bir M manifoldu ele alınsın. Bu manifold üzerinde tanımlanan ϕ bir $(1,1)$ –tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η bir 1 –form olmak üzere; eğer (ϕ, ξ, η) yapısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M manifoldu *hemen hemen parakontakt manifold* olarak nitelendirilir. (ϕ, ξ, η) bileşenleri ise M üzerindeki *hemen hemen parakontakt yapı* olarak tanımlanır:

$$\eta(\xi) = -1, \quad (3.1)$$

$$\phi^2 = I + \eta \otimes \xi. \quad (3.2)$$

Burada I, M üzerindeki özdeşlik dönüşümünü ifade etmektedir [1].

Lemma 3.1. Bir hemen hemen parakontakt yapı için aşağıdaki eşitlikler ve rank koşulu geçerlidir:

$$\phi\xi = 0, \quad (3.3)$$

$$\eta \circ \phi = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{rank}\phi = n - 1 \quad (3.5)$$

[5].

İspat: (3.1) ve (3.2) denklemleri dikkate alındığında ϕ^2 operatörünün ξ üzerindeki etkisi

$$\begin{aligned} \phi^2\xi &= \xi + \eta(\xi)\xi \\ &= \xi - \xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. Bu durum, $\phi\xi = 0$ olduğunu veya $\phi\xi$ tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen aşikar olmayan bir özvektör olduğunu gösterir. Eğer $\phi\xi \neq 0$ ise (3.2) kullanılarak

$$0 = \phi^2\phi\xi = \phi\xi + \eta(\phi\xi)\xi$$

dir. Buradan ise

$$-\eta(\phi\xi)\xi = \phi\xi \quad (3.7)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.7) ifadesine tekrar ϕ uygulandığında $\phi^2\xi = -\eta(\phi\xi)\phi\xi \neq 0$ çelişkisi doğar. Bu sebeple $\phi\xi = 0$ olmalıdır.

$\forall X \in \chi(M)$ için (3.2) denklemini üzerinden (3.4) eşitliğini incelemek amacıyla ϕX vektör alanı ele alınırsa;

$$\begin{aligned} -\eta(\phi X)\xi &= \phi X - \phi^2\phi X \\ -\eta(\phi X)\xi &= \phi X - \phi(\phi^2 X) \\ -\eta(\phi X)\xi &= \phi X - \phi(X + \eta(X)\xi) = \eta(X)\phi\xi = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\xi \neq 0$ olduğundan $\eta \circ \phi = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla M üzerinde $\phi\xi = 0$ ve $\xi \neq 0$ olması $rank(\phi) < n$ olduğunu gösterir. Eğer ϕ operatörünü sıfırlayan başka bir ξ_a vektör alanı kabul edilirse, yapı tanımını gereği

$$0 = \xi_a + \eta(\xi_a)\xi$$

özdeşliği ortaya çıkar. Bu durum ξ_a vektör alanının ξ ile doğrusal bağımlı olduğunu dolayısıyla çekirdek uzayının boyutunun 1 olduğunu kanıtlar. Dolayısıyla $rank(\phi) = n - 1$ sonucu elde edilir.

Lemma 3.2. (M, ϕ, ξ, η) , dörtlüsü ile temsil edilen bir hemen hemen para-kontakt manifold yapısı ele alınsın. M üzerinde tanımlı g Lorentz metriği, her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

koşullarını sağlar [5].

İspat: M manifolduna ait keyfi bir h Lorentz metriği tanımlansın. Bu metrikten faydalanarak, manifoldun yapı tensörleriyle uyumlu olan yeni bir g metriği şu formülasyonla kurgulanabilir:

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \{ h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \}. \quad (3.8)$$

Tanımlanan bu g metriğinde X ve Y vektör alanları yerine sırasıyla ϕX ve ϕY yazılırsa; (3.2) ve (3.4) özdeşlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) &= \frac{1}{2} \{ h(\phi X, \phi Y) + h(\phi^2 X, \phi^2 Y) - \eta(\phi X)\eta(\phi Y) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ h(\phi X, \phi Y) + h(X + \eta(X)\xi, \eta(Y)\xi + Y) \} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
g(\phi X, \phi Y) &= \frac{1}{2} \{h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)h(\xi, \xi)\} \\
&= \frac{1}{2} \{h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)\}
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. (3.8) tanımını burada yerine koyulduğunda

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

sonucu elde edilir. Bu ise g metriğinin bir Lorentz metriği olduğunu ve parakontakt yapı ile uyumluluğunu kanıtlar.

Tanım 3.2. (M, ϕ, ξ, η) , dörtlüsüyle temsil edilen bir hemen hemen parakontakt manifold yapısı ele alınsın. Şayet M manifolduna ait her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı için;

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (3.9)$$

koşulunu sağlayan bir Lorentz yapı g metriği tanımlanabiliyorsa (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne M manifoldunda bir *Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı* denir [5]. Bu geometrik yapıya sahip M manifoldu ise bir *Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold* olarak isimlendirilir.

Tanım 3.3. (M, ϕ, ξ, η, g) Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ , her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + 2\eta(X)\eta(Y)\xi \quad (3.10)$$

şartını sağlıyorsa M manifolduna bir *Lorentzian Para-Sasakian (LP-Sasakian) manifold* adı verilir [5].

Önerme 3.1. (M, ϕ, ξ, η, g) Lorentzian Para-Sasakian manifoldu ele alındığında, yapıya ait η 1-form dış türevi sıfıra eşittir ($d\eta = 0$). Bu kapalılık özelliğine ek olarak karakteristik vektör alanı ξ için;

$$\nabla_X \xi = \phi X \quad (3.11)$$

dir [5].

Lemma 3.3. $n -$ boyutlu (M, ϕ, ξ, η, g) LP-Sasakian manifoldu ele alındığında; R Riemann eğrilik tensörü, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ teğet vektör alanı için;

$$g(R(X, Y)Z, \xi) = \eta(R(X, Y)Z) = g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, R eğrilik tensörünün ve S Ricci tensörünün özellikleri

$$R(\xi, X)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad (3.13)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \quad (3.14)$$

$$R(\xi, X)\xi = X + \eta(X)\xi, \quad (3.15)$$

$$S(X, \xi) = (n - 1)\eta(X), \quad (3.16)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + (n - 1)\eta(X)\eta(Y) \quad (3.17)$$

dir [5].

Örnek 3.1. $M = \mathbb{R}^3$ manifoldu üzerinde (x, y, z) standart koordinat sistemini ele alalım. M üzerindeki lineer bağımsız vektör alanları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$E_1 = -e^x \frac{\partial}{\partial y}, E_2 = e^x \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right), E_3 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Bu çatı alanı üzerinde g Lorentz metriği, bileşenleri bazında şu şekilde inşa edilir:

$$g(E_1, E_2) = g(E_1, E_3) = g(E_2, E_3) = 0,$$

$$g(E_1, E_1) = g(E_2, E_2) = 1, \quad g(E_3, E_3) = -1.$$

Karakteristik vektör alanı $\xi = E_3$ olarak seçildiğinde, her $V \in \chi(M)$ için $\eta(V) = g(V, E_3)$ olarak tanımlanır. $(1,1)$ -tipindeki ϕ tensör alanı ise baz vektörleri üzerinde;

$$\phi E_1 = -E_1, \phi E_2 = -E_2, \phi E_3 = 0$$

olarak alınsın. ϕ ve g operatörlerinin lineerliği dikkate alındığında, yapının her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\eta(E_3) = -1,$$

$$\phi^2 X = X + \eta(X)E_3,$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

koşullarını sağladığı doğrudan görülür. Bu veriler ışığında (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü M üzerinde bir Lorentzian parakontakt yapı tanımlamaktadır. Bu yapısal özellikler neticesinde M , 3 – boyutlu bir LP-Sasakian manifold örneği teşkil eder [24].

4. LORENTZİAN PARA-SASAKİAN MANİFOLDLARIN ANTI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

İlgili bölümde, anti-invaryantlık koşulu altında Lorentzian Para-Sasakian Manifoldların altmanifoldlarının geometrik özellikleri incelenecektir.

Lemma 4.1 Bir Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun, ξ karakteristik vektör alanını teğet demetinde barındıran $\xi \in \chi(M)$ bir anti-invaryant altmanifoldu göz önüne alınsın. Bu koşul altında altmanifold üzerindeki her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı çifti için;

$$\nabla_X^\perp \xi = \phi X, \quad (4.1)$$

$$A_Y X = \phi X, \quad (4.2)$$

$$h(X, \xi) = \phi X, \quad (4.3)$$

$$\nabla_X^\perp \phi Y = \phi \nabla_X Y, \quad (4.4)$$

$$\nabla_X \xi = 0 \quad (4.5)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $\xi \in \chi(M)$ şartını sağlayan ve \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun içerisinde yer alan M bir anti-invaryant altmanifoldu ele alınsın. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere (2.20) ve (3.11) kullanılırsa

$$\phi X = \bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + h(X, \xi)$$

bulunur. Buradan normal ve teğet bileşenler için $h(X, \xi) = \phi X$ ve $\nabla_X \xi = 0$ eşitlikleri elde edilir. (2.21) ve (3.11) kullanılırsa

$$\phi X = \bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X^\perp \xi + A_\xi X$$

bulunur. Buradan normal ve teğet bileşenler için $\nabla_X^\perp \xi = \phi X$ ve $A_\xi X = 0$ eşitlikleri elde edilir. $X, Y \in \chi(M)$ için (2.21) kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_X(\phi Y) = \nabla_X^\perp(\phi Y) - A_{\phi Y} X \quad (4.6)$$

bulunur. Diğer taraftan kovaryant türev özellikleri ile birlikte (3.10) ve (2.20) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X(\phi Y) &= (\bar{\nabla}_X \phi)Y + \phi(\bar{\nabla}_X Y) \\
&= (\bar{\nabla}_X \phi)Y + \phi(\bar{\nabla}_X Y) \\
&= g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi + \phi(\nabla_X Y + h(X, Y))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (4.6) ve (4.7) eşitlikleri ile

$$\nabla_X^\perp(\phi Y) - A_{\phi Y}X = g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi + \phi\nabla_X Y + \phi h(X, Y) \tag{4.8}$$

bulunur. (4.8) denkleminin normal bileşeni ile

$$\nabla_X^\perp(\phi Y) = \phi\nabla_X Y$$

sonucu elde edilir.

Önerme 4.1. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\phi R^\perp(X, Y)Z = R(X, Y)\phi Z \tag{4.9}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat: \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun, karakteristik ξ vektör alanını teğet demetinde barındıran ($\xi \in \chi(M)$) bir M bir anti-invaryant altmanifoldu ele alınsın.

$$\begin{aligned}
\phi R^\perp(X, Y)Z &= \phi(\nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp Z - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp Z - \nabla_{[X, Y]}^\perp Z) \\
&= \phi \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp Z - \phi \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp Z - \phi \nabla_{[X, Y]}^\perp Z
\end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10) ifadesindeki her terim için (4.4) kullanılırsa

$$= \nabla_X \phi \nabla_Y^\perp Z - \nabla_Y \phi \nabla_X^\perp Z - \nabla_{[X, Y]} \phi Z \tag{4.11}$$

Benzer şekilde (4.11) ifadesindeki her terim için (4.4) kullanılırsa

$$= \nabla_X \nabla_Y \phi Z - \nabla_Y \nabla_X \phi Z - \nabla_{[X, Y]} \phi Z = R(X, Y)\phi Z$$

sonucu elde edilir.

Önerme 4.2. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M anti-invaryant altmanifold ise $(\bar{\nabla}_X h)(Y, \xi) = 0$ dır.

İspat: Altmanifold üzerindeki h ikinci temel formunun Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonuna göre türevi;

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanır. (4.12) denkleminde $Z = \xi$ yazılırsa

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, \xi) = \nabla_X^\perp h(Y, \xi) - h(\nabla_X Y, \xi) - h(Y, \nabla_X \xi) \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) denkleminde (4.3) denklemini kullanılırsa

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, \xi) = \nabla_X^\perp \phi X - \phi \nabla_X Y \quad (4.14)$$

bulunur. (4.4) eşitliğinden $(\bar{\nabla}_X h)(Y, \xi) = 0$ bulunur.

Teorem 4.1. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her M altmanifoldunun bir semi-paralel altmanifold olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

İspat: M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir semi-paralel altmanifold olduğunu kabul edelim. Böylece her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y)h)(Z, W) &= (R^\perp(X, Y)h)(Z, W) \\ &\quad - h(R(X, Y)Z, W) - h(Z, R(X, Y)W) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

denkleminin geçerli olduğu görülür. (4.15) denkleminde $Z = W = \xi$ yazılırsa

$$(\bar{R}(X, Y)h)(\xi, \xi) = R^\perp(X, Y)h(\xi, \xi) - h(R(X, Y)\xi, \xi) - h(\xi, R(X, Y)\xi) = 0 \quad (4.16)$$

olur. M anti-invaryant altmanifold olduğundan (4.3) eşitliği kullanılırsa

$$(\bar{R}(X, Y)h)(\xi, \xi) = R^\perp(X, Y)h(\xi, \xi) - h(R(X, Y)\xi, \xi) - h(\xi, R(X, Y)\xi)$$

$h(\xi, \xi) = 0$ ve h ikinci temel formunun simetrik olma özelliğinden

$$(\bar{R}(X, Y)h)(\xi, \xi) = -2h(R(X, Y)\xi, \xi) \quad (4.17)$$

eşitliği sağlanır. (4.9) eşitliği (4.17) denkleminde kullanılırsa

$$(\bar{R}(X, Y)h)(\xi, \xi) = -2\phi R(X, Y)\xi \quad (4.18)$$

ve (3.14) eşitliği (4.18) denkleminde kullanılırsa

$$(\bar{R}(X, Y)h)(\xi, \xi) = -2\phi(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \quad (4.19)$$

sonucu bulunur. M altmanifoldu semi-paralel olduğundan dolayı (4.19) denkleminden

$$(\eta(Y)X - \eta(X)Y) = 0 \quad (4.20)$$

elde edilir. X ve Y lineer bağımsız vektörler olması ve (4.20) denkleminden

$$\eta(X) = 0 \quad (4.21)$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde (4.15) denkleminde $W = X = \xi$ yazalım. Buradan

$$(\bar{R}(\xi, Y)h)(Z, \xi) = (R^\perp(\xi, Y)h)(Z, \xi) - h(R(\xi, Y)Z, \xi) - h(Z, R(\xi, Y)\xi) \quad (4.22)$$

olur. (4.22) denkleminde (4.3) ve (3.15) eşitlikleri kullanılırsa

$$(\bar{R}(\xi, Y)h)(Z, \xi) = R^\perp(\xi, Y)\phi Z - \phi R(\xi, Y)Z - h(Z, \eta(Y)\xi + Y) \quad (4.23)$$

(4.23) denkleminde (4.9) eşitliği kullanıldığında

$$(\bar{R}(\xi, Y)h)(Z, \xi) = -\eta(Y)h(Z, \xi) - h(Z, Y) \quad (4.24)$$

bulunur. (4.24) eşitliğinde semi-paralel olma koşulu kullanılırsa

$$0 = -\eta(Y)h(Z, \xi) - h(Z, Y) \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.21) sonucu (4.25) denkleminde uygulanırsa

$$0 = h(Z, Y)$$

bulunur. Bu ise M altmanifoldunun total geodezik olduğunu gösterir. Tersine M total geodezik ise M altmanifoldunun semi-paralel olduğu aşıkardır.

Teorem 4.2. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her M nin altmanifoldunun bir pseudo-paralel altmanifold ise $\lambda_1 \neq -1, 0$ için M totally geodeziktir.

İspat: M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir pseudo-paralel altmanifold olduğunu kabul edelim. Böylece her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$

$$\bar{R}(X, Y)h(Z, W) = -\lambda_1 Q(g, h)(Z, W, X, Y) \quad (4.26)$$

eşitliği söz konusu olur. (2.30) denklemi (4.26) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)h(Z, W) &= -\lambda_1 Q(g, h)(Z, W, X, Y) = \\ &= -\lambda_1 \left(h \left((Z \wedge_g W)X, Y \right) + h \left(X, Y(Z \wedge_g W) \right) \right) = \\ &= -\lambda_1 (h(g(W, X)Z - g(Z, X)W, Y) + h(g(W, Y)Z - g(Z, Y)W), X) \end{aligned} \quad (4.27)$$

eşitliği elde edilir. (4.27) eşitliğinde $X = Y = \xi$ yazdığımızda

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, \xi)h(Z, W) &= -\lambda_1 (h(g(W, \xi)Z - g(Z, \xi)W, \xi)) \\ &= -\lambda_1 (h(g(W, \xi)Z - g(Z, \xi)W), \xi) \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitliği elde edilir. (4.3) denklemi (4.28) denkleminde kullanılırsa

$$0 = -\lambda_1 (\eta(W)h(Z, \xi) - \eta(Z)h(W, \xi) + \eta(W)h(Z, \xi) - \eta(Z)h(W, \xi))$$

$$0 = -\lambda_1 2(\eta(W)h(Z, \xi) - \eta(Z)h(W, \xi))$$

$$0 = -2\lambda_1 (\eta(W)\varphi Z - \eta(W)\varphi Z)$$

$$0 = -2\lambda_1 \varphi (\eta(W)Z - \eta(W)Z) \quad (4.29)$$

sonucu bulunur. X ve Y lineer bağımsız vektörler ve (4.28) denkleminde

$$\eta(W) = 0 \quad (4.30)$$

sonucu elde edilir. Daha sonra (4.26) denkleminde $X = W = \xi$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, Y)h(Z, \xi) &= -\lambda_1 (h(g(\xi, \xi)Z - g(Z, \xi)\xi, Y) + h(g(\xi, Y)Z - g(Z, Y)\xi), \xi) \\ &= -\lambda_1 (-h(Z, Y) - \eta(Z)h(\xi, Y) + \eta(Y)h(Z, \xi) - g(Z, Y)h(\xi, \xi)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

(4.29) ve (4.24) eşitliği (4.31) de kullanılırsa

$$h(Z, Y) = \lambda_1 h(Z, Y),$$

$$0 = (1 - \lambda_1)h(Z, Y)$$

sonucu elde edilir. Bu ise bize $\lambda_1 = 1$ ya da $h(Z, Y) = 0$ sonucunu verir. $\lambda_1 \neq -1$ kabul edildiğinden dolayı $h(Z, Y) = 0$ bunudur. Dolayısıyla total geodeziktir.

Teorem 4.3. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her M nin altmanifoldunun bir Ricci pseudo-paralel altmanifold ve $\lambda_2 \neq \frac{1}{n-1}, 0$ ise totally geodeziktir.

İspat: M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir Ricci pseudo-paralel altmanifold olduğunu varsayalım. Böylece her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$

$$\bar{R}(X, Y)h(Z, W) = -\lambda_2 Q(S, h)(Z, W, X, Y) \quad (4.32)$$

eşitliği sağlanır. (2.31) denkleminin M manifoldu için ele alındığında

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)h(Z, W) &= -\lambda_2 Q(S, h)(Z, W, X, Y) = \\ &= -\lambda_2 (h((Z \wedge_S W)X, Y) + h(X, Y(Z \wedge_S W))) \\ &= -\lambda_2 (h((Z \wedge_S W)X, Y) + h(X, Y(Z \wedge_S W))) = \\ &= -\lambda_2 (h(S(W, X)Z - S(Z, X)W, Y) + h(S(W, Y)Z - S(Z, Y)W, X)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitliği bulunur. (4.32) ifadesinde $X = Y = \xi$ yazarsak

$$\begin{aligned} 0 = \bar{R}(\xi, \xi)h(Z, W) &= -\lambda_2 (h(S(W, \xi)Z - S(Z, \xi)W, \xi)) \\ &= -\lambda_2 ((h(S(W, \xi)Z - S(Z, \xi)W), \xi)) \end{aligned} \quad (4.33)$$

bulunur. (4.33) denkleminde (3.16) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_2 2(n-1)(\eta(W)h(Z, \xi) - \eta(Z)h(W, \xi)) \\ 0 &= -2\lambda_2(n-1)(\eta(W)\phi Z - \eta(W)\phi Z) \\ 0 &= -2\lambda_2(n-1)\phi(\eta(W)Z - \eta(W)Z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

sonucu bulunur. X ve Y lineer bağımsız vektörler ve (4.34) denkleminde

$$\eta(W) = 0 \quad (4.35)$$

sonucu bulunur. (4.32) denkleminde $X = W = \xi$ yazalım.

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, Y)h(Z, \xi) &= -\lambda_2(h(S(\xi, \xi)Z - S(Z, \xi)\xi, Y) \\ &\quad -\lambda_2((h(S(\xi, Y)Z - S(Z, Y)\xi), \xi) \end{aligned} \quad (4.36)$$

(4.35) denkleminde (3.16) ve (4.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, Y)h(Z, \xi) &= -\lambda_2(-(n-1)h(Z, Y) - (n-1)\eta(Z)h(\xi, Y)) \\ &\quad -\lambda_2((n-1)\eta(Y)h(Z, \xi) - h(S(Z, Y)\xi, \xi)) \end{aligned} \quad (4.37)$$

olur. (4.37) denkleminde (4.35) ve (4.24) eşitlikleri kullanıldığında

$$h(Z, Y) = \lambda_2(n-1)h(Z, Y)$$

$$0 = (1 - \lambda_2(n-1))h(Z, Y)$$

sonucu elde edilir. Bu ise bize $\lambda_2 = \frac{1}{n-1}$ ya da $h(Z, Y) = 0$ sonucunu verir. $\lambda_2 \neq \frac{1}{n-1}$ olduğundan dolayı M altmanifoldu total geodeziktir.

Teorem 4.4. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her M nin altmanifoldu bir 2-Semiparalel altmanifold ise h paraleldir.

İspat: \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun, $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer M altmanifoldu üzerinde bir koşulu sağlanıyorsa,

$$\begin{aligned} 0 = \bar{R}(X, Y)\nabla h(Z, W, U) &= (R^\perp(X, Y)(\nabla_V h(W, Z)) - (\bar{\nabla}_{R(X, Y)V} h)(W, Z) \\ &\quad - (\bar{\nabla}_V h)(R(X, Y)W, Z) - (\bar{\nabla}_V h)(W, R(X, Y)Z) \end{aligned} \quad (4.38)$$

eşitliği sağlanır. (4.38) denkleminde $W = X = \xi$ yazarsak

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, Y)\nabla h(V, \xi, Z) &= (R^\perp(\xi, Y)(\bar{\nabla}_V h(Z, \xi)) - (\bar{\nabla}_{R(\xi, Y)V} h)(Z, \xi) \\ &\quad - (\bar{\nabla}_V h)(R(\xi, Y)Z, \xi) - (\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.2. yardımıyla

$$\bar{R}(\xi, Y)\nabla h)(V, \xi, Z) = -(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) \quad (4.39)$$

eşitliği bulunur. $-(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi)$ ifadesini açarsak

$$\begin{aligned} -(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) &= -\nabla_V^\perp h(Z, R(\xi, Y)\xi) \\ &\quad + h(Z, \nabla_V R(\xi, Y)\xi) + h(\nabla_V Z, R(\xi, Y)\xi) \end{aligned} \quad (4.40)$$

eşitliği sağlanır. (4.40) denkleminde (3.15) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &-(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) \\ &= -\nabla_V^\perp h(Z, \eta(Y)\xi + Y) + h(Z, \nabla_V \eta(Y)\xi + Y) + h(\nabla_V Z, \eta(Y)\xi + Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) \\ &= -\nabla_V^\perp h(Z, Y) + h(Z, \nabla_V Y) + h(\nabla_V Z, Y) - \nabla_V^\perp h(Z, \eta(Y)\xi) \\ &\quad + h(Z, \nabla_V \eta(Y)\xi) + h(\nabla_V Z, \eta(Y)\xi), \end{aligned}$$

$$-(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) = -(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) - \eta(Y)\bar{\nabla}_V h(Z, \xi),$$

$$-(\bar{\nabla}_V h)(Z, R(\xi, Y)\xi) = -(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) \quad (4.41)$$

sonucu elde edilir. 2-semiparalel olma özelliğinden dolayı ve (4.41) den $0 = (\bar{\nabla}_V h)(Z, Y)$ eşitliği elde edilmiş olur. Dolayısıyla h paraleldir.

Teorem 4.5. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her M nin altmanifoldu bir 2-pseudoparalel ve $\lambda_2 \neq -1$ ise total geodeziktir.

İspat: M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer M bir 2-pseudoparalel altmanifold ise buradan

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \bar{\nabla} h(V, Z, W) = \lambda_3 Q(g, \bar{\nabla} h)(V, Z, W)(X, Y) \quad (4.42)$$

eşitliği sağlanır. (4.42) denkleminde (2.31) denklemi yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y) \cdot \bar{\nabla} h(V, Z, W) &= \lambda_3 Q(g, \bar{\nabla} h) = \\ -\lambda_3 Q(g, \bar{\nabla} h)(Z, W, X, Y) &= -\lambda_3 \left(\bar{\nabla}_V h \left((Z \wedge_g W)X, Y \right) + \bar{\nabla}_V h \left(X, Y(Z \wedge_g W) \right) \right) = \\ -\lambda_3 \left((\bar{\nabla}_V h)(g(W, X)Z - g(Z, X)W, Y) + \bar{\nabla}_V h(g(W, Y)Z - g(Z, Y)W), X \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

(4.43) denkleminde $X = W = \xi$ yazılıp (4.39) eşitliği kullanılırsa

$$-(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = -\lambda_3((\bar{\nabla}_V h(g(\xi, \xi)Z - g(Z, \xi)\xi, Y) + \bar{\nabla}_V h(g(\xi, Y)Z - g(Z, Y)\xi), \xi))$$

$$\begin{aligned} -(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) &= -\lambda_3((g(\xi, \xi)\bar{\nabla}_V h(Z, Y) - g(Z, \xi)\bar{\nabla}_V h(\xi, Y) + g(\xi, Y)\bar{\nabla}_V h(Z, \xi) \\ &\quad - g(Z, Y)\bar{\nabla}_V h(\xi, \xi)), \end{aligned}$$

$$-(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = \lambda_3 \bar{\nabla}_V h(Z, Y)$$

$$(1 + \lambda_3)(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_3 \neq -1$ M için $(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = 0$ olduğundan h paraleldir.

Teorem 4.6. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invariant altmanifoldu olsun. Bu durumda $Q(S, h) = 0$ ise M minimaldir.

İspat: M için $Q(S, h) = 0$ olsun. Tachibana tensörü tanımından

$$0 = Q(S, h)(Z, W, X, Y) = -\left(h((Z \wedge_S W)X, Y) + h(X, Y(Z \wedge_S W))\right)$$

$$0 = -\left(h((Z \wedge_S W)X, Y) + h(X, Y(Z \wedge_S W))\right) =$$

$$-h(S(W, X)Z - S(Z, X)W, Y) - h(S(W, Y)Z - S(Z, Y)W, X) \quad (4.44)$$

bulunur. (4.44) eşitliğinde $X = W = \xi$ yazılırsa

$$0 = -h(S(\xi, \xi)Z - S(Z, \xi)\xi, Y) - h(S(\xi, Y)Z - S(Z, Y)\xi, \xi)$$

$$0 = -S(\xi, \xi)h(Z, Y) + S(Z, \xi)h(\xi, Y) - S(\xi, Y)h(Z, \xi) + S(Z, Y)h(\xi, \xi)$$

sağlanır. (3.16) denklemini yerine yazılırsa

$$0 = (n-1)h(Z, Y) + (n-1)\eta(Z)h(\xi, Y) - (n-1)\eta(Y)h(Z, \xi) + S(Z, Y)h(\xi, \xi)$$

$$0 = (n-1)h(Z, Y) + (n-1)\phi Zh(\xi, Y) - (n-1)\phi Yh(Z, \xi) \quad (4.45)$$

elde edilir. (4.45) denklemini için $Z = Y$ koşulu incelendiğinde

$$0 = (n-1)h(Z, Z) + (n-1)\phi Zh(\xi, Z) - (n-1)\phi Zh(Z, \xi)$$

$$0 = (n - 1)h(Z, Z)$$

sonucu bulunur. Sonuç olarak $n \neq 1$ için Tanım 2.2.7 den $H = 0$ olduğu bulunur. Bu ise M nin minimal olduğunu gösterir.

Teorem 4.7. M, \bar{M} Lorentzian Para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \chi(M)$ olacak şekilde bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $Q(S, \bar{\nabla}h) = 0$ ancak ve ancak M paraleldir.

İspat: M için $Q(S, \bar{\nabla}h) = 0$ olsun. Tachibana tensörü tanımından

$$0 = Q(S, \bar{\nabla}h)(Z, W, X, Y) = -\left(\bar{\nabla}_V h((Z \wedge_S W)X, Y) + \bar{\nabla}_V h(X, Y(Z \wedge_S W))\right)$$

$$0 = -(\bar{\nabla}_V h)(S(W, X)Z - S(Z, X)W, Y) - (\bar{\nabla}_V h)(S(W, Y)Z - S(Z, Y)W, X) \quad (4.46)$$

denklemini bulunur. (4.46) denkleminde $X = W = \xi$ yazılırsa

$$0 = -(\bar{\nabla}_V h)(S(\xi, \xi)Z - S(Z, \xi)\xi, Y) - (\bar{\nabla}_V h)(S(\xi, Y)Z - S(Z, Y)\xi), \xi)$$

$$= S(\xi, \xi)(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) + S(Z, \xi)(\bar{\nabla}_V h)(\xi, Y) - S(\xi, Y)(\bar{\nabla}_V h)(\xi, Z) + S(Z, Y)(\bar{\nabla}_V h)(\xi, \xi) \quad (4.47)$$

olur. (4.47) denklemini için Önerme 4.2. ve (3.16) ele alındığında

$$-(n - 1)(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $n \neq 1$ için $(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = 0$ sonucu elde edilir. Bu ise paralel M de h ikinci temel formun paralel olduğunu gösterir. Tersine $(\bar{\nabla}_V h)(Z, Y) = 0$ ise $0 = Q(S, \bar{\nabla}h)(Z, W, X, Y)$ olduğu açıktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, Lorentzian para-Sasakian manifoldlarının anti-invaryant altmanifoldları üzerine odaklanmıştır.

Bu çalışmada, Lorentzian para-Sasakian manifoldlarının anti-invaryant altmanifoldları için pseudoparalel, 2-pseudoparalel, Ricci genelleştirilmiş pseudoparalel, 2-Ricci genelleştirilmiş pseudoparalel, semiparalel ve 2-semiparalel kısıtlamaları incelenmiştir. Bu koşullar altında, altmanifoldların total geodezik, paralellik ve minimallik gibi temel geometrik özelliklere sahip olması için gerekli koşullar araştırılmıştır.

Ek olarak $Q(S, h) = 0$ ve $Q(S, \bar{\nabla}h) = 0$ koşulu altında, altmanifoldun paralel ve minimal olması gibi önemli geometrik sonuçlar elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, doğrudan Riemann veya Ricci eğrilik tensörleri ile ilgili olsa bile, bu koşulların Weyl Eğrilik Tensörü gibi yapılara ve anti-invaryant altmanifoldlar koşulu altında farklı manifoldlara genelleştirilmesi mümkündür.

6. KAYNAKLAR (IEEE)

- [1] **T. Adati and K. Matsumoto**, “On conformally recurrent and conformally symmetric P-Sasakian manifolds,” *TRU Math.*, vol. 13, pp. 25–32, 1977.
- [2] **T. Adati and T. Miyazawa**, “On P-Sasakian manifolds satisfying certain conditions,” *Tensor (N.S.)*, vol. 33, pp. 173–178, 1979.
- [3] **U. C. De and D. Tarafdar**, “On a type of P-Sasakian manifold,” *Math. Balkanica*, vol. 7, pp. 211–215, 1993.
- [4] **K. Matsumoto, S. Ianus, and I. Mihai**, “On a P-Sasakian manifold which admit certain tensor fields,” *Publ. Math. Debrecen*, vol. 33, pp. 61–65, 1986.
- [5] **K. Matsumoto**, “On Lorentzian paracontact manifolds,” *Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci.*, vol. 12, pp. 151–156, 1989.
- [6] **I. Mihai and R. Rosca**, “On Lorentzian P-Sasakian manifolds,” in *Classical Analysis*. World Scientific, pp. 155–169, 1992.
- [7] **A. Al-Aqeel, U. C. De, and A. A. Shaikh**, “Submanifolds of Lorentzian para-Sasakian manifolds,” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 28, no. 2, pp. 223–227, 2005.
- [8] **C. Özgür and C. Murathan**, "On invariant submanifolds of lorentzian para-sasakian manifolds," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 34, no. 2A, pp. 177-185, 2009.
- [9] **S. Samui and U. C. De**, “On some classes of invariant submanifolds of Lorentzian para-Sasakian manifolds,” *Tamkang J. Math.*, vol. 47, no. 2, pp. 207–220, 2016.
- [10] **S. P. Pandey, L. Singh, and S. K. Gautam**, “CR-submanifold of a Lorentzian para-Sasakian manifold,” *Int. J. Math. Trends Technol.*, 2015.
- [11] **P. Alegre, A. Carriazo, and M. Fernández**, “Slant submanifolds of Lorentzian Sasakian and para-Sasakian manifolds,” *Taiwanese J. Math.*, vol. 17, no. 3, pp. 897–910, 2013.
- [12] **S. Y. Perktaş, E. Kılıç, and S. Keleş**, “Hypersurfaces of Lorentzian para-Sasakian manifolds,” *Mathematica Scandinavica*, vol. 109, no. 1, pp. 5–21, 2011.
- [13] **S. Y. Perktaş, E. Kılıç, and S. Keleş**, “Biharmonic Hypersurfaces of LP-Sasakian manifolds,” *Analele științifice ale Universității Al I Cuza din Iași-Serie nouă-Matematică*, vol. 57, no. 2, pp. 387–408, 2011.
- [14] **S. Prasad and R. H. Ojha**, “Lorentzian para-contact submanifolds,” *Publ. Math. Debrecen*, vol. 44, pp. 215–223, 1994.

- [15] **M. Faghfouri and S. Mashmouli**, “On anti-invariant semi-Riemannian submersions from Lorentzian para-Sasakian manifolds,” *Filomat*, vol. 32, no. 10, pp. 3465–3478, 2018, doi: 10.2298/FIL1810465F.
- [16] **J. Deprez**, “Semiparallel surfaces in Euclidean space,” *J. Geom.*, vol. 25, no. 2, pp. 192–200, 1985.
- [17] **A. C. Asperti, G. A. Lobos, and F. Mercuri**, “Pseudo – Parallel Immersions in Space Forms,” in *10th School on Differential Geometry (Portuguese)*, Belo Horizonte, 1998, vol. 17, pp. 59–70. *Mat. Contemp.*, 1999.
- [18] **S. Dirik, M. Atceken, and Ü. Yildirim**, “Anti-invariant submanifolds of a normal paracontact metric manifold,” *GJOM*, vol. 10, no. 2, pp. 38–49, 2021.
- [19] **S. Kobayashi and K. Nomizu**, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [20] **B. O’Neill**, *Elementary Differential Geometry*. New York: Academic Press, 1996.
- [21] **K. Yano and M. Kon**, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics, Vol. 3. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1984.
- [22] **B. Y. Chen**, *Geometry of Submanifolds*. Dekker, 1973.
- [23] **D. E. Blair**, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Springer, 1976.
- [24] **A. Taleshian and N. Asghari**, "On LP-Sasakian manifolds," *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 3, no. 1, pp. 45-51, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Cihat KILINÇ

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

| Derece | Okul/Program | Yıl |
|-----------|----------------------------------|------|
| Y. Lisans | Balıkesir Üniversitesi/Matematik | 2026 |
| Lisans | Marmara Üniversitesi/Matematik | 2022 |
| Lise | Atışalanı Anadolu Lisesi | 2018 |