

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR
ÜZERİNE

AYŞENUR ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Nihal TAŞ (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Doç. Dr. İzzettin DEMİR

BALIKESİR, ARALIK - 2024

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Bazı Genelleştirilmiş Metrik Koruyan Fonksiyonlar Üzerine**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ayşenur ŞEN

**Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından
2023/031 nolu proje ile desteklenmiştir.**

ÖZET

**BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
AYŞENUR ŞEN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. NİHAL TAŞ)

BALIKESİR, ARALIK - 2024

Altı bölümden oluşan bu tezde, b – metrik koruyan fonksiyon ve genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon kavramlarının temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu kavramlar için gluing lemma ifade ve ispat edilmiştir.

Bu tezde birinci bölüm literatür özetinin verildiği giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, tez çalışması boyunca gerekli olacak temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, b – metrik koruyan fonksiyon kavramı ve bu kavramın temel özellikleri incelenip, b – metrik koruyan fonksiyon kavramı için iki farklı gluing lemma ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon kavramı tanıtılıp, bu kavramın literatürde bilinen diğer metrik koruyan fonksiyon kavramları ile arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon kavramı için de gluing lemma tanıtılıp, ispatı elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon kavramı yardımıyla beş farklı çember tanımı verilip, örnekler ile aralarındaki ilişki verilmiştir. Bu son yaklaşım elde edilen teorik çalışmaların geometrik yorumlamasının da mümkün olduğunu göstermesi açısından önemli bir noktaya sahiptir.

Altıncı bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: b – metrik koruyan fonksiyon, genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon, gluing lemma, çember.

ABSTRACT

ON SOME GENERALIZED METRIC PRESERVING FUNCTION
MSC THESIS
AYŞENUR ŞEN
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: DOÇ. DR. NİHAL TAŞ)

BALIKESİR, DECEMBER - 2024

This thesis consists of five chapters, where the basic properties of b -metric preserving functions and generalized b -metric preserving functions are examined. Additionally, the gluing lemma for these concepts has been stated and proven.

The first chapter of this thesis is the introduction, which provides a summary of the literature.

In the second chapter, the fundamental concepts that will be necessary throughout the thesis are provided.

In the third chapter, the concept of b -metric preserving function and its basic properties are examined, and two different gluing lemmas for b -metric preserving functions are stated and proven.

In the fourth chapter, the concept of generalized b -metric preserving function is introduced, and the relationship between this concept known in the literature is discussed. Additionally, the gluing lemma for generalized b -metric preserving functions is introduced and proven.

In the fifth chapter, a different circle definition based on the generalized b -metric preserving function is given, and examples are provided to explain the relationship between them. This final approach holds significant importance in demonstrating that the geometric interpretation of the theoretical work obtained is also possible.

The sixth chapter contains conclusions and recommendations.

KEYWORDS: b -metric preserving function, extended b -metric preserving function, gluing lemma, circle.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	7
2. TEMEL KAVRAMLAR	10
2.1 Metrik Uzaylar ve Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar	10
2.2 Metrik Koruyan Fonksiyonlar.....	12
3. b – METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR VE GLUING LEMMA.....	16
3.1 b – Metrik Koruyan Fonksiyonlar	16
3.2 b – Metrik Koruyan Fonksiyonlar için Gluing Lemma.....	28
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ b – METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR VE GLUING LEMMA.....	35
4.1 Genelleştirilmiş b – Metrik Koruyan Fonksiyonlar.....	35
4.2 Genelleştirilmiş b -Metrik Koruyan Fonksiyonlar için Gluing Lemma	52
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ b -METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ÇEMBER KAVRAMI	60
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	65
7. KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	68

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Bazı genelleştirilmiş metrik uzaylar arasındaki ilişki. 12

SEMBOL LİSTESİ

(X, d)	: Metrik uzay
(X, d_s)	: b – metrik uzay
(X, d_θ)	: Genelleştirilmiş b – metrik uzay
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathfrak{M}	: Metrik koruyan fonksiyon ailesi
\mathfrak{B}	: b – metrik koruyan fonksiyon ailesi
\mathfrak{MB}	: Metrik – b – metrik koruyan fonksiyon ailesi
\mathfrak{BM}	: b – metrik – metrik koruyan fonksiyon ailesi
\mathfrak{E}_b	: Genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon ailesi
\mathfrak{ME}_b	: Metrik – genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon ailesi
\mathfrak{BE}_b	: b – metrik – genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon ailesi
$\mathfrak{E}_b\mathfrak{M}$: Genelleştirilmiş b – metrik – metrik koruyan fonksiyon ailesi
$\mathfrak{E}_b\mathfrak{B}$: Genelleştirilmiş b – metrik – b – metrik koruyan fonksiyon ailesi
$C^\theta(\omega_0, r)$: Genelleştirilmiş b – metrik uzayında ω_0 merkezli r yarıçaplı çember

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimimin başından sonuna dek engin tecrübelerini benimle paylaşan, sonsuz desteğini esirgemeyen, anlayışı ve bana kattıkları ile örnek aldığım çok değerli hocam ve danışmanım Sayın Doç. Dr. Nihal TAŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitimim süresince her konuda desteklerini esirgemeyen ve değerli bilgilerini benimle paylaşan başta Sayın Prof. Dr. Ali GÜVEN olmak üzere diğer bölüm hocalarıma da teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana rehber olan, zorluklarla mücadelede desteğini her zaman hissettiğim biricik abim Halit Can ŞEN'e teşekkür ederim.

Son olarak, yüksek lisans eğitimim boyunca maddi desteğinden dolayı '2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı'na kayıtlı bursiyer olduğum TÜBİTAK-BİDEB'e saygılarımla teşekkür ederim.

Balıkesir, 2024

Ayşenur ŞEN

1. GİRİŞ

Metrik fonksiyonu, bir uzaydaki noktalar arasındaki mesafeyi tanımlayan matematiksel bir yapıdır. Analiz, topoloji ve geometri gibi birçok alanda temel rol oynar. Metrik fonksiyonu, noktalar arasındaki uzaklığı belirleyerek uzayın yapılarını ve özelliklerini anlamamıza yardımcı olur. Ayrıca, sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların incelenmesi, yakınsama kavramlarının geliştirilmesi ve uzaylarda topolojik özelliklerin belirlenmesi gibi birçok önemli matematiksel kavramın temelini oluşturur. Bu nedenle, metrik fonksiyonu hem teorik matematikte hem de uygulamalı bilimlerde kritik bir araçtır.

Metrik fonksiyon kavramı, matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir yer tutar ve son zamanlarda mühendislik, fizik, kimya ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerde de incelenmektedir. Bu çalışmalar, teorik sonuçların pratik hayattaki uygulanabilirliği açısından büyük önem taşır.

Metrik uzay kavramı, daha genel matematiksel yapıları anlamak amacıyla genelleştirilmiştir. Çünkü klasik metrik uzaylar, her türden uzayı tanımlamak için yeterli değildir, örneğin kaba topoloji bir metrik uzay değildir. Özellikle topolojik uzayların incelenmesinde, mesafe kavramının yanı sıra, daha esnek yapıların da ele alınması gerekmektedir. Bu bağlamda, metrik uzaylar, uzayların noktaları arasındaki mesafeleri belirleyen bir fonksiyon aracılığıyla tanımlanırken, topolojik uzaylar, açık küme kavramı etrafında şekillenir. Böylece, topolojik uzaylar, metrik uzayların sağladığı yakınsama, süreklilik ve bağlılık gibi kavramları daha geniş bir çerçevede ele alma imkânı sunar. Bu genelleme, matematiğin çeşitli alanlarında, özellikle analiz ve geometri gibi disiplinlerde daha derin bir anlayış geliştirilmesine olanak tanır.

Genelleştirilmiş bazı metrik uzaylara aşağıdaki örnekler verilebilir.

- b – metrik uzay [1],
- genelleştirilmiş b – metrik uzay [2],
- S – metrik uzay [3].

Metrik koruyan fonksiyonlar [4], matematikte özellikle analiz ve topoloji alanlarında önemli bir rol oynar. Bu tür fonksiyonlar, bir metrik uzaydaki mesafeleri koruyarak, uzayların yapısal özelliklerini diğer uzaylara aktarmak için kullanılır. Metrik koruyan fonksiyonlar,

matematiksel yapıların derinlemesine anlaşılması ve farklı alanlarda uygulamalar geliştirilmesi açısından kritik bir öneme sahiptir.

Metrik koruyan fonksiyonlar, klasik metrik uzaylarda mesafeleri koruma işlevi görürken, b -metrik uzaylar, daha esnek ve geniş bir çerçeve sunarak bu kavramları genelleştirmektedir. b -metrik koruyan fonksiyonlar [5], belirli bir oranda mesafeleri koruyarak, iki uzay arasındaki yapısal ilişkilerin incelenmesine olanak tanır. b -metrik koruyan fonksiyonlar, matematiksel yapıları anlamada, teorik sonuçların pratik uygulamalara aktarılmasında ve çeşitli alanlarda karmaşık problemlerin çözümünde önemli bir araçtır. Bu kavram, matematiksel düşüncenin derinleşmesine ve çeşitli uygulamalarda yenilikçi yaklaşımlar geliştirilmesine katkıda bulunur [5-7].

Genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyonlar [8], klasik metrik koruyan fonksiyonların bir adım ötesinde yer alır ve b -metrik uzaylarda mesafeleri koruma işlevi gören bir fonksiyon tipidir. Bu fonksiyonlar, b -metrik uzayların sahip olduğu esnek yapıları kullanarak, farklı mesafe ölçümlerinin korunmasını sağlar.

Bu fonksiyonlar, topolojik özelliklerin incelenmesi ve çeşitli uzayların karşılaştırılması için kritik öneme sahiptir. Genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyonlar, matematiksel yapıları anlamada ve farklı uygulamalarda önemli bir araçtır ve araştırmalar bu alanda daha fazla derinleşmeye açıktır. Gluing Lemma (Yapıştırma Lemması), topoloji ve analiz alanlarında önemli rol oynayan bir prensiptir [9]. Özellikle, uzayların birleştirilmesi ve yapısal özelliklerin korunması açısından kritik bir kavramdır. Bu lemma, iki veya daha fazla topolojik uzayın belirli koşullar altında bir araya getirilmesini sağlar. Gluing Lemma, belirli bir topolojik uzayın veya metrik uzayın, ortak bir alt küme üzerinde uyumlu fonksiyonlar aracılığıyla birleştirilmesi durumunda, bütün olarak bir topolojik veya metrik uzay oluşturulabileceğini belirtir. Gluing Lemma, metrik koruyan fonksiyonlar ile derin bir ilişkiye sahiptir ve bu ilişki hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşır. Metrik uzayların birleştirilmesi, süreklilik ve yapı koruma konularında gluing işleminin sağladığı avantajlar, matematiksel analizin ve topolojinin temelini oluşturan yapıları anlamak için kritik bir çerçeve sunar. Bu bağlamda, metrik koruyan fonksiyonlar, gluing süreçlerinde merkezi bir rol oynar ve bu ilişkilerin incelenmesi, daha karmaşık matematiksel teorilerin geliştirilmesine olanak tanır. Metrik koruyan fonksiyonlar için gluing lemmaya örnek olarak [7] numaralı çalışma örnek verilebilir.

Metrik uzayda çember, belirli bir merkez noktasının etrafında yarıçap mesafesindeki tüm noktaların oluşturduğu kümedir. Matematiksel olarak, bir (X, d) metrik uzayı içinde, ω_0 merkezli ve r yarıçaplı çember, $d(\omega, \omega_0) = r$ koşulunu sağlayan noktalar kümesi olarak tanımlanır. Sabit çember problemi ise, belirli bir merkez ve yarıçap altında çemberin noktalarının özelliklerini, fonksiyonların bu çember üzerindeki davranışlarını incelemeye yöneliktir [10]. Verilen bir fonksiyonun sabit nokta sayısı birden fazla olduğunda bu fonksiyonun sabit nokta kümesinin geometrik yorumunu yapmak önem taşır. Bu problem, geometri ve analizde önemli bir yere sahiptir; çemberler, analitik fonksiyonların süreklilik ve yakınsama özelliklerini anlamada kritik rol oynar. Ayrıca mühendislik, fizik ve bilgisayar bilimleri gibi alanlarda veri analizi ve modelleme süreçlerinde uygulama alanı bulur. Çemberlerin yapısının ve özelliklerinin anlaşılması, daha karmaşık matematiksel teorilerin geliştirilmesine olanak tanır.

Bu tezde, b – metrik koruyan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların temel özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. İlk olarak, b – metrik koruyan fonksiyonların tanımı ve bazı temel ilişkiler ele alınmıştır. Ardından, genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyon kavramı tanıtılmış ve bu kavramın b – metrik ile olan ilişkisi, yapısal esnekliği ve uygulama alanları üzerinde durulmuştur. Gluing lemma ile bu kavramların ilişkisi incelenmiş, iki veya daha fazla uzayın birleştirilmesinin metrik yapı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş b – metrik koruyan fonksiyonların çember kavramı üzerindeki uygulamaları ele alınmış, çemberlerin özellikleri ile bu fonksiyonlar arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Sonuç olarak, bu çalışma, b – metrik koruyan fonksiyonların matematiksel yapılar üzerindeki derin etkisini ve çeşitli uygulama potansiyelini vurgulayarak, alana önemli katkılarda bulunmayı hedeflemektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması boyunca yardımcı olacak temel kavramlara yer verilecektir.

2.1 Metrik Uzaylar ve Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar

Tanım 2.1. X boş kümeden farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $\omega, \nu, \mu \in X$ için,

$$(d1) \quad d(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu,$$

$$(d2) \quad d(\omega, \nu) = d(\nu, \omega),$$

$$(d3) \quad d(\omega, \nu) \leq d(\omega, \mu) + d(\mu, \nu),$$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [11,12].

Tanım 2.2. X boş kümeden farklı bir küme ve $d_s : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $\omega, \nu, \mu \in X$ ve $s \geq 1$ sayısı için,

$$(d_s1) \quad d_s(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu,$$

$$(d_s2) \quad d_s(\omega, \nu) = d_s(\nu, \omega),$$

$$(d_s3) \quad d_s(\omega, \nu) \leq s[d_s(\omega, \mu) + d_s(\mu, \nu)],$$

koşullarını sağlıyorsa d_s fonksiyonuna X üzerinde bir b -metrik denir ve (X, d_s) ikilisine b -metrik uzay denir [1].

Uyarı 2.3. b -metrik kavramı, metrik kavramının bir genellemesidir. Gerçekten de Tanım 2.2 de $s = 1$ alınırsa kavramlar çakışır. Literatürde metrik olmayan bazı b -metrik örnekleri vardır. Örneğin $p \in (0,1)$ aralığında $X = l_p(\mathbb{R})$ için

$$l_p(\mathbb{R}) = \left\{ \{\omega_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p < \infty \right\}$$

olur.

$d_s : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $\omega = \{\omega_n\}$ ve $\nu = \{\nu_n\}$ için

$$d_s(\omega, \nu) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n - \nu_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece d_s , $s = 2^{\frac{1}{p}}$ için bir b -metriktir (*Daha ayrıntılı bilgi [13-15] kaynaklarında bulunabilir*).

Tanım 2.4. X boş kümeden farklı bir küme ve $\theta : X \times X \rightarrow [1, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $\omega, \nu, \mu \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $d_\theta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna bir genelleştirilmiş b -metrik denir:

$$(d_\theta 1) \quad d_\theta(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu,$$

$$(d_\theta 2) \quad d_\theta(\omega, \nu) = d_\theta(\nu, \omega),$$

$$(d_\theta 3) \quad d_\theta(\omega, \mu) \leq \theta(\omega, \mu) [d_\theta(\omega, \nu) + d_\theta(\nu, \mu)].$$

Ayrıca (X, d_θ) ikilisine de genelleştirilmiş b -metrik uzay denir [2].

Örnek 2.5. $X = [0, \infty)$ olsun. $\theta : X \times X \rightarrow [1, \infty)$ ve $d_s : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları tanımlansın, her $\omega, \nu \in X$ için

$$\theta(\omega, \nu) = \omega + \nu + 1$$

kabul edelim, buradan

$$d_\theta(\omega, \nu) = \begin{cases} \omega + \nu & ; \quad \omega \neq \nu \\ 0 & ; \quad \omega = \nu \end{cases}$$

olur, Böylece (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzaydır [16].

Uyarı 2.6. Eğer $s \geq 1$ için $\theta(\omega, \nu) = s$ kabul edersek b -metrik ve genelleştirilmiş b -metrik kavramları çakışır [8].

Metrik uzay, b -metrik uzay ve genelleştirilmiş b -metrik uzay kavramları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1: Bazı genelleştirilmiş metrik uzaylar arasındaki ilişki.

2.2 Metrik Koruyan Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. Her (X, d) metrik uzayı için $f \circ d$ bir metrik ise $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna metrik koruyan fonksiyon denir [4,17,18].

Tanım 2.2.2. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (i) $f \circ d_s$ fonksiyonu X üzerinde bir b -metrik ise f fonksiyonuna bir b -metrik koruyan fonksiyon denir [5].
- (ii) $f \circ d$ fonksiyonu X üzerinde bir b -metrik ise f fonksiyonuna metrik- b -metrik koruyan fonksiyon denir [5].
- (iii) $f \circ d_s$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik ise f fonksiyonuna b -metrik-metrik koruyan fonksiyon denir [5].

Metrik koruyan fonksiyonların kümesini \mathfrak{M} , b -metrik koruyan fonksiyonların kümesini \mathfrak{B} , metrik- b -metrik koruyan fonksiyonların kümesini $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ ve b -metrik-metrik koruyan fonksiyonların kümesini $\mathfrak{B}\mathfrak{M}$ olarak gösterebiliriz [5].

Tanım 2.2.3. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon ve $I \subset [0, \infty)$ olsun. Bu durumda,

- $\omega < \nu$ eşitsizliğini sağlayan her $\omega, \nu \in I$ için $f(\omega) \leq f(\nu)$ ise f fonksiyonuna artan bir fonksiyon denir.
- Her $\omega, \nu \in I$ ve $\omega < \nu$ için $f(\omega) < f(\nu)$ ise f fonksiyonuna kesin artan bir fonksiyon denir.
- $\omega < \nu$ şartını sağlayan her $\omega, \nu \in I$ için $f(\nu) \leq f(\omega)$ ise f fonksiyonu azalan bir fonksiyon denir.

- Her $\omega, \nu \in I$ ve $\omega < \nu$ için $f(\nu) < f(\omega)$ ise f fonksiyonuna kesin azalan bir fonksiyon denir.
- $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ise f fonksiyonuna uyumlu fonksiyon denir.
- Her $\omega > 0$ için $f(\omega) \in [t, 2t]$ olacak şekilde $t > 0$ var ise f fonksiyonuna $(0, \infty)$ aralığında kesin sınırlı fonksiyon denir.
- Her $a, b \in [0, \infty)$ için $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ ise f fonksiyonuna alttoplamsaldır denir.
- Her $a, b \in [0, \infty)$ için $f(a+b) \leq s(f(a) + f(b))$ olacak şekilde $s \geq 1$ var ise f fonksiyonuna yarı alttoplamsaldır denir.
- Her $m_1, m_2 \in [0, \infty)$ ve $k \in [0, 1]$ için $f((1-k)m_1 + km_2) \leq (1-k)f(m_1) + kf(m_2)$ ise f fonksiyonuna konvektir denir.
- Her $m_1, m_2 \in [0, \infty)$ ve $k \in [0, 1]$ için $f((1-k)m_1 + km_2) \geq (1-k)f(m_1) + kf(m_2)$ ise f fonksiyonuna konkavdır denir.
- Her $a, b \in [0, \infty)$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ve $f(xa) = xf(a)$ olacak şekilde bir x sabiti var ise f fonksiyonuna lineerdir denir.

Tanım 2.2.4. (i) $a, b, c \geq 0$ için,

$$a \leq b + c, \quad b \leq a + c \quad \text{ve} \quad c \leq a + b$$

olacak şekilde (a, b, c) üçlüsüne bir üçgen üçlüsü denir [5].

(ii) $s \geq 1$ ve $a, b, c \geq 0$ için,

$$a \leq s(b + c), \quad b \leq s(a + c) \quad \text{ve} \quad c \leq s(a + b)$$

olacak şekilde (a, b, c) üçlüsüne bir s -üçgen üçlüsü denir [5]

(iii) $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ olsun, $a, b, c \geq 0$ ve her $\omega, \nu, \mu \in X$ için,

$$a \leq \theta(\omega, \nu)(b + c), \quad b \leq \theta(\omega, \mu)(a + c) \quad \text{ve} \quad c \leq \theta(\mu, \nu)(a + b)$$

olacak şekilde (a, b, c) üçlüsüne bir θ -üçgen üçlüsü denir [8].

Sırasıyla üçgen üçlüsü, s -üçgen üçlüsü ve θ -üçgen üçlüsü kümesi Δ , Δ_s ve Δ_θ olsun.

Lemma 2.2.5. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında uyumlu, alttoplamsal ve artan ise $f \in \mathfrak{M}$ dir [19,20].

Lemma 2.2.6. Eğer f fonksiyonu uyumlu ve konkav ise f fonksiyonu metrik koruyandır [6].

Lemma 2.2.7. f fonksiyonunun metrik koruyan olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) f fonksiyonu süreklidir,
- (ii) f fonksiyonu 0 noktasında süreklidir,
- (iii) her $\varepsilon > 0$ için $f(\omega) < \varepsilon$ olacak şekilde $\omega > 0$ vardır [19-21].

Lemma 2.2.8. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu uyumlu ve kesin sınırlı ise $f \in \mathfrak{M}$ dir [19-21].

Lemma 2.2.9. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu metrik koruyan ise f uyumlu ve alttoplamsaldır [19,21].

Lemma 2.2.10. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu metrik koruyan ve $h > 0$ olsun. f fonksiyonu $[0, h]$ aralığında konveks ise f fonksiyonu $[0, h]$ aralığında lineerdir [4,20].

Lemma 2.2.11. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun alttoplamsal olduğunu kabul edelim. Böylece tüm pozitif n tamsayıları ve her $\omega \in [0, \infty)$ için,

$$f(n\omega) \leq nf(\omega)$$

olur [4,19,20].

Lemma 2.2.12. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun uyumlu olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) $f \in \mathfrak{M}$,
- (ii) her $(a, b, c) \in \Delta$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta$ dir [19-21].

Lemma 2.2.13. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu uyumlu ve kesin sınırlı ise $f \in \mathfrak{BM}$ dir [19-21].

Lemma 2.2.14. f fonksiyonu uyumlu bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konkav olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $t \geq 0$ ve $\omega, \nu, \mu \in [0, t]$ için $\omega + t = \nu + \mu$ ise bu durumda $f(\omega) + f(t) \leq f(\nu) + f(\mu)$ olmasıdır [20].

b -metrik koruyan fonksiyon kavramı ve genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon kavramları ile gluing lemmayı yeniden ifade ve ispat etmek metrik koruyan fonksiyon teorisi için önem arz etmektedir. Bu nedenle, metrik uzaylar için “Gluing lemma” tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.2.15. (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay olsun. Eğer $U \cup V = X$ olacak şekilde $U, V \subset X$ alt kümeleri var ve $f: U \rightarrow Y$ ve $g: V \rightarrow Y$ fonksiyonları (Y, ρ) metrik uzayında sürekli fonksiyonlar ve bu durumda f ve g fonksiyonları $U \cap V$ de birbirine eşit, h fonksiyonu Y kümesinde f fonksiyonuna ve V kümesinde g fonksiyonuna eşit olacak şekilde $h: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona f ve g fonksiyonlarının birleştirilmesi ya da yapıştırılması denir. Yani

- $f: U \rightarrow Y$ ve $g: V \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar olsun.
- Eğer $f(\omega) = g(\omega)$ her $\omega \in U \cap V$ için sağlanıyorsa,
- f ve g , X de tek bir sürekli fonksiyon olarak birleştirilebilir [9].

3. b – METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR VE GLUING LEMMA

Bu bölümde giriş bölümünde vermiş olduğumuz b – metrik koruyan fonksiyon kavramının temel özellikleri ele alınacaktır.

3.1 b – Metrik Koruyan Fonksiyonlar

Teorem 3.1.1. α pozitif bir reel sayı olsun. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $f(\omega) = \omega^\alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda

(i) Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise f fonksiyonu metrik koruyandır.

(ii) Eğer $\alpha > 1$ ise f fonksiyonu b – metrik koruyandır fakat metrik koruyan değildir [5].

İspat. İspatı aşağıdaki durumlar altında inceleyelim:

Durum 1. $0 < \alpha \leq 1$ ise f fonksiyonunun uyumlu ve konkav olduğunu görmek oldukça uygundur. Lemma 2.2.6 dan f fonksiyonunun metrik koruyan olduğunu söyleriz.

Durum 2. $\alpha > 1$ olsun. $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(\omega) = \frac{(1+\omega)^\alpha}{1+\omega^\alpha}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$g'(\omega) = \frac{\alpha(1+\omega)^{\alpha-1} \cdot (1-\omega^{\alpha-1})}{(1+\omega^\alpha)^2}$$

olur. Böylece

$$g'(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow \omega \leq 1$$

dir.

O halde g fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında artan ve $[1, \infty)$ aralığında azalandır.

Her $\omega \in [0, \infty)$ için

$$g(\omega) \leq g(1) = 2^{\alpha-1} \tag{3.1}$$

dir.

f fonksiyonunun b -metrik koruyan olduğunu göstermek için d fonksiyonu X uzayı üzerinde bir b -metrik ve her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$$d(\omega, \nu) \leq s(d(\omega, \mu) + d(\mu, \nu))$$

olacak şekilde $s \geq 1$ bir sabit olsun.

$f \circ d$ fonksiyonunun (B1) ve (B2) koşullarını sağladığı kolayca görülür.

Gerçekten,

$$(B1) (f \circ d)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d(\omega, \nu)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (d(\omega, \nu))^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow d(\omega, \nu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \nu$$

ve

$$(B2) (f \circ d)(\omega, \nu) = f(d(\omega, \nu)) = f(d(\nu, \omega))$$

$$= (f \circ d)(\nu, \omega)$$

elde edilir.

(B3) koşulu için $a, b, c \in X$ olsun. Eğer $a = c$ ise

$$f \circ d(a, b) \leq s^\alpha 2^{\alpha-1} (f \circ d(a, c) + f \circ d(c, b))$$

olduğu açıktır.

$a \neq c$ olduğunu varsayalım. (3.1) den

$$g\left(\frac{d(c, b)}{d(a, c)}\right) \leq 2^{\alpha-1}$$

ve

$$(d(a, c) + d(c, b))^\alpha \leq 2^{\alpha-1} (d(a, c)^\alpha + d(c, b)^\alpha) = 2^{\alpha-1} ((f \circ d)(a, c) + (f \circ d)(c, b)) \quad (3.2)$$

elde edilir.

Böylece (3.2) den ve d fonksiyonunun b -metrik olma özelliğinden

$$(f \circ d)(a, b) = (d(a, b))^\alpha \leq (s(d(a, c) + d(c, b)))^\alpha \leq s^\alpha 2^{\alpha-1} ((f \circ d)(a, c) + (f \circ d)(c, d))$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda $f \circ d$ nin (B3) koşulunu sağladığı gösterilir ve böylece f , b -metrik koruyandır.

Her $x > 0$ için $f''(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında konvektir fakat doğrusal değildir. Lemma 2.2.10 gereğince f fonksiyonu metrik koruyan değildir. \square

Önerme 3.1.2. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Buradan

(i) $\mathfrak{BM} \subset \mathfrak{M}$ ve

(ii) $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{MB}$

olur [5].

İspat. Her metrik bir b -metrik olduğundan ispat açıktır.

Gerçekten,

$$f \in \mathfrak{BM} \Rightarrow f \in \mathfrak{M}$$

dir. d bir metrik olsun. Her metrik bir b -metrik olduğundan d bir b -metriktir ve $f \in \mathfrak{BM}$ olduğundan $f \circ d$ bir metriktir.

$$f \in \mathfrak{B} \Rightarrow f \in \mathfrak{MB}$$

dir. d bir metrik olsun. Her metrik bir b -metrik ve $f \in \mathfrak{B}$ olduğundan $f \circ d$ bir b -metriktir. \square

Lemma 3.1.3. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ dir [5].

İspat. $f \in \mathfrak{M}$ ve d fonksiyonu X uzayında bir b -metrik olsun. $f \circ d$ fonksiyonunun bir b -metrik olduğunu göstereceğiz.

$f \in \mathfrak{M}$ olduğundan, Lemma 2.2.9 dan f fonksiyonu uyumludur.

Öyleyse her $\omega, \nu \in X$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu$$

dir.

(B2) koşulunun sağlandığı açıktır. Şimdi $f \circ d$ nin (B3) koşulunu sağladığını gösterelim.

d bir b -metrik olduğundan her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$$d(\omega, \nu) \leq s(d(\omega, \mu) + d(\mu, \nu))$$

olacak şekilde bir $s \geq 1$ sabiti vardır.

n, s de büyük pozitif bir tam sayı ve $\omega, \nu, \mu \in X$

$$a = d(\omega, \nu), \quad b = d(\omega, \mu), \quad c = d(\mu, \nu)$$

olsun.

Bu durumda

$$a \leq s(b + c) \leq n(b, c) = nb + nc$$

olur.

Böylece $(a, nb + nc, nb + nc)$ bir üçgen üçlüsüdür.

f bir metrik koruyan olduğundan Lemma 2.2.9 , Lemma 2.2.11 ve Lemma 2.2.12

$$\begin{aligned} f(a) &\leq f(nb + nc) + f(nb + nc) \\ &= 2f(nb + nc) \leq 2(f(nb) + f(nc)) \\ &\leq 2(nf(b) + nf(c)) = 2n(f(b) + f(c)) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq 2n((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))$$

olur. \square

Teorem 3.1.4. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Buradan $\mathfrak{BM} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{MB}$ dir [5].

İspat. Önerme 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 gereğince ispat kolayca görülür. \square

Bir sonraki örnek $\mathfrak{M} \not\subset \mathfrak{BM}$ ve $\mathfrak{B} \not\subset \mathfrak{M}$ olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.5. (i) Her $\omega \in [0, \infty)$ için $f(\omega) = \omega$ olsun. Böylece $f \in \mathfrak{M}$ olduğu kolayca görülür.

Her $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ için

$$d(\omega, \nu) = (\omega - \nu)^2$$

ve

$$\rho(\omega, \nu) = |\omega - \nu|$$

olsun. Ayrıca her $\omega \in [0, \infty)$ için $g(\omega) = \omega^2$ olsun.

$$d = g \circ \rho$$

olduğundan Teorem 3.1.1 gereğince d fonksiyonun bir b -metrik olduğunu elde ederiz fakat $d = f \circ d$, \mathbb{R} üzerinde bir metrik değildir. Böylece $f \notin \mathfrak{BM}$ dir. Sonuç olarak $\mathfrak{M} \not\subset \mathfrak{BM}$ elde edilir [5].

(ii) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = \omega^2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, Teorem 3.1.1 gereğince $f \in \mathfrak{B}$ dir fakat $f \notin \mathfrak{M}$ olur. Böylece $\mathfrak{B} \not\subset \mathfrak{M}$ elde edilir [5].

Teorem 3.1.4 ve Örnek 3.1.5 dan $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{MB}$ olduğunu fakat $\mathfrak{MB} \subset \mathfrak{M}$ olmadığını görüyoruz, yine de \mathfrak{MB} fonksiyonu için \mathfrak{M} fonksiyonlara benzer sonuçlar vardır. Örneğin Lemma 2.2.5, Lemma 2.2.9 ve Lemma 2.2.12 de benzer sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.6. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun uyumlu olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) $f \in \mathfrak{MB}$,

(ii) Her $(a, b, c) \in \Delta$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_s$ olacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır [5].

İspat. $f \in \mathfrak{MB}$ olduğunu kabul edelim. d , \mathbb{R}^2 üzerinde bir Öklid metriği olsun. Bu durumda $f \circ d$ bir b -metriktir.

Her $\omega, \nu, \mu \in \mathbb{R}^2$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq s((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))$$

olacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır.

$(a, b, c) \in \Delta$ olsun. Öklid geometrisine göre öyle $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ vardır ki

$$d(u, w) = a, \quad d(u, v) = b, \quad d(v, w) = c$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(a) &= (f \circ d)(u, w) \\ &\leq s((f \circ d)(u, v) + (f \circ d)(u, w)) \\ &= s(f(b) + f(c)) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$f(b) \leq s(f(a) + f(c)) \quad \text{ve} \quad f(c) \leq s(f(a) + f(b))$$

olur. Böylece

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_s$$

dir.

Tersine her $(a, b, c) \in \Delta$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_s$ olacak şekilde bir $s \geq 1$ olduğunu kabul edelim. (X, d) bir metrik uzaydır. $f \circ d$ fonksiyonunun bir b -metrik olduğunu gösterelim.

(B1) Her $\omega, \nu \in X$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d(\omega, \nu)) = 0$$

$$\Leftrightarrow d(\omega, \nu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \nu$$

elde edilir.

(B2) Her $\omega, \nu \in X$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) = f(d(\omega, \nu))$$

$$= f(d(\nu, \omega))$$

$$= (f \circ d)(\nu, \omega)$$

elde edilir.

(B3) $\omega, \nu, \mu \in X$ olsun.

$$(d(\omega, \nu), d(\omega, \mu), d(\mu, \nu)) \in \Delta$$

olduğundan

$$(f(d(\omega, \nu)), f(d(\omega, \mu)), f(d(\mu, \nu))) \in \Delta_s$$

dir. Yani,

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq s((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))$$

olduğundan $f \circ d$ bir b -metriktir. \square

Teorem 3.1.7. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında uyumlu, yarı alttoplamsal ve artan ise $f \in \mathfrak{MB}$ dir [5].

İspat. f fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında uyumlu, yarı alttoplamsal ve artan olduğunu kabul edelim.

(X, d) bir metrik uzay olsun. $f \circ d$ fonksiyonunun bir b -metrik olduğunu gösterelim.

$$(B1)(f \circ d)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d(\omega, \nu)) = 0 \Leftrightarrow d(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu$$

ve

$$(B2)(f \circ d)(\omega, \nu) = f(d(\omega, \nu)) = f(d(\nu, \omega)) = (f \circ d)(\nu, \omega)$$

olur.

(B3) f fonksiyonu yarı alttoplamsal olduğundan her $a, b \in [0, \infty)$ için

$$f(a+b) \leq s(f(a) + f(b)) \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır.

$\omega, \nu, \mu \in X$ olsun. f fonksiyonunun artanlığı ve (3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} (f \circ d)(\omega, \nu) &= f(d(\omega, \nu)) \leq f(d(\omega, \mu) + d(\mu, \nu)) \\ &\leq s((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu)) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $f \in \mathfrak{MB}$ dir. \square

Teorem 3.1.8. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun.

$f \in \mathfrak{MB}$ ise f fonksiyonu uyumlu ve yarı alttoplamsaldır [5].

İspat. $f \in \mathfrak{MB}$ ve d \mathbb{R} üzerinde bir alışılmış metrik olsun. Bu durumda $f \circ d$, \mathbb{R} üzerinde bir b -metriktir. Buradan

$$f(0) = f(d(0,0)) = (f \circ d)(0,0) = 0$$

olur. Ayrıca $\omega \in [0, \infty)$ ve $f(\omega) = 0$ olduğunu kabul edelim.

Böylece

$$0 = f(\omega) = f(d(\omega, 0)) = (f \circ d)(\omega, 0)$$

dır.

$$(f \circ d)(\omega, 0) = 0$$

ve $f \circ d$ bir b -metrik olduğundan $\omega = 0$ dir. O halde

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$$

yani f uyumludur.

$f \circ d$ bir b -metrik olduğundan her $\omega, \nu, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq s((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))$$

olacak şekilde $s \geq 1$ vardır.

f fonksiyonunun yarı alttoplamsal olduğunu göstermek için $a, b \in [0, \infty)$ olsun.

Bu durumda

$$f(a+b) \leq (f \circ d)(0, a+b) \leq s((f \circ d)(0, a) + (f \circ d)(a, a+b)) = s(f(a) + f(b))$$

olur. Sonuç olarak f yarı alttoplamsaldır. \square

Teorem 3.1.9. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in \mathfrak{BM}$ olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun uyumlu ve kesin sınırlı olmasıdır [5].

İspat. (\Leftarrow) f fonksiyonunun uyumlu ve kesin sınırlı olduğunu varsayalım.

Her $\omega > 0$ için

$$f(\omega) \in [v, 2v] \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $v > 0$ sabit olsun.

(X, d) uzayı bir b -metrik kabul edelim.

$f \circ d$ fonksiyonunun $(B1)$ ve $(B2)$ koşullarını sağladığı açıktır.

$(B3)$ koşulunu sağladığını göstermek için $\omega, \nu, \mu \in X$ olsun.

Eğer $\omega = \nu$ ise

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq (f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu) \tag{3.5}$$

olduğu açıktır.

Benzer şekilde $\omega = \mu$ ya da $\nu = \mu$ ise (3.5) eşitsizliği sağlanır.

Varsayalım ki $\omega \neq \nu, \omega \neq \mu$ ve $\nu \neq \mu$ olsun. Öyleyse $d(\omega, \nu), d(\omega, \mu)$ ve $d(\nu, \mu)$ pozitifdir.

(3.4) den

$$f(d(\omega, \nu)), f(d(\mu, \nu)), f(d(\omega, \mu)) \in [v, 2v]$$

elde edilir. Bu durumda

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq 2v = v + v \leq (f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu)$$

olur. Sonuç olarak $f \circ d$ bir metriktir, yani $f \in \mathfrak{MB}$ dir.

(\Rightarrow) $f \in \mathfrak{BM}$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.1.4. gereğince $f \in \mathfrak{M}$ dir ve böylece Lemma 2.2.9 dan f fonksiyonu uyumludur.

f fonksiyonunun kesin sınırlı olduğunu göstermek için ρ, \mathbb{R} üzerinde bir alışılmış metrik, her $\omega \in [0, \infty)$ için

$$g(\omega) = \omega^\alpha \text{ ve } \alpha > 1$$

olmak üzere d fonksiyonu $d = g \circ \rho$ şeklinde tanımlansın. Teorem 3.1.1 den her $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ için d fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde bir b -metrik ve

$$d(\omega, \nu) = |\omega - \nu|^\alpha$$

dir.

Bu durumda $f \circ d$ bir metriktir ve her $\omega, \nu, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 1$ için

$$f(|\omega - \nu|^\alpha) \leq f(|\omega - \mu|^\alpha) + f(|\mu - \nu|^\alpha) \quad (3.6)$$

elde edilir.

(3.6) kullanılarak, her $\alpha > 1$ ve $\omega = 1, \nu = 1, \mu = \frac{1}{2}$ için

$$f(1) \leq 2f\left(\frac{1}{2^\alpha}\right) \quad (3.7)$$

elde edilir.

f fonksiyonunun 0 noktasında sürekli olduğu varsayalım. $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ olduğundan

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) \rightarrow f(0) = 0 \text{ olur ve böylece (3.7) den}$$

$$0 < f(1) \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

elde edilir, bu ise çelişkidir. Ayrıca $0 < f(1)$ eşitsizliğinin f fonksiyonunun uyumlu olmasından görülür.

Böylece f fonksiyonu süreksiz bir metrik koruyandır. Lemma 2.2.7 den her $\omega > 0$ için $f(\omega) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır.

$u = \inf_{\omega > 0} f(\omega)$ olsun. Bu durumda $u \geq \varepsilon > 0$ olur.

Her $\omega > 0$ için $u \leq f(\omega) \leq 2u$ olduğunu iddia edilsin.

a, b pozitif reel sayılar olsun. Her $\alpha > 0$ için (3.6) eşitsizliğinde

$$\omega = 0, \nu = 2a^{\frac{1}{\alpha}} \text{ ve } \mu = a^{\frac{1}{\alpha}}$$

kullanılarak

$$f(2^\alpha a) \leq 2f(a) \tag{3.8}$$

elde edilir.

Durum 1. $b \leq 2a$ olsun, buradan (b, a, a) bir üçgen üçlüsüdür. $f \in \mathfrak{M}$ olduğundan Lemma 2.2.12 gereğince

$$f(b) \leq 2f(a)$$

dir.

Durum 2. $b > 2a$ ve $\alpha = \frac{\log b - \log a}{\log 2}$ olsun.

Bu durumda $\alpha > 1$ dir. (3.8) eşitsizliği gereğince $f(b) \leq 2f(a)$ olur.

Her durumda

$$f(b) \leq 2f(a) \quad (3.9)$$

elde edilir. Herhangi $a \in \mathbb{R}^+$ için (3.9) eşitsizliği sağlandığından $\frac{f(b)}{2}$ sayısı,

$$\{f(a) : a > 0\}$$

kümesinin bir alt sınırıdır. Öyleyse

$$\frac{f(b)}{2} \leq \inf_{a>0} f(a) = u$$

olur ve böylece her $b > 0$ için $f(b) \leq 2u$ elde edilir. \square

Teorem 3.1.10. Herhangi bir $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için f fonksiyonunun bir metrik b -metrik koruyan olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun b -metrik koruyan olmasıdır, yani $\mathfrak{MB} \subset \mathfrak{B}$ dir [6].

İspat: Teorem 3.1.4 den $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{MB}$ olduğunu biliyoruz. $\mathfrak{MB} \subset \mathfrak{B}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$f \in \mathfrak{MB}$ ve (X, d) bir b -metrik olsun.

Teorem 3.1.8 den f fonksiyonu uyumlu ve yarı alttoplamsaldır. Bu durumda f fonksiyonu uyumlu olduğundan $f \circ d$, (B1) koşulunu sağlar. Ek olarak $d(\omega, \nu) = d(\nu, \omega)$ olduğundan $f \circ d$, (B2) koşulunu sağlar. $f \circ d$ fonksiyonunun (B3) koşulunu sağladığını gösterelim.

f fonksiyonu yarı alttoplamsal olduğundan, her $a, b \in [0, \infty)$ için

$$f(a+b) \leq t.(f(a)+f(b)) \quad (3.10)$$

olacak şekilde bir $t \geq 1$ vardır.

d bir b -metrik olduğundan, her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$$d(\omega, \nu) \leq s_1(d(\omega, \mu) + d(\mu, \nu)) \text{ ve } n > s_1$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçebiliriz ve böylece her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$$d(\omega, \nu) \leq n(d(\omega, \mu) + d(\mu, \nu)) \quad (3.11)$$

olur.

$f \in \mathfrak{MB}$ olduğundan Teorem 3.1.6 dan, herhangi

$$a, b, c \in \Delta \text{ için } (f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_{s_2} \quad (3.12)$$

olacak şekilde bir $s_2 \geq 1$ vardır.

$$s = 2s_2nt^n, \omega, \nu, \mu \in X \text{ ve } a = d(\omega, \nu), b = (\omega, \mu), c = d(\mu, \nu)$$

olsun. (3.11) den

$$a \leq nb + nc$$

dir. Bu durumda

$$(a, nb + nc, nb + nc) \in \Delta \text{ ve (3.12) den}$$

$$(f(a), f(nb + nc), f(nb + nc)) \in \Delta_{s_2}$$

olur. Böylece

$$(f \circ d)(\omega, \nu) = f(a) \leq s_2(f(nb + nc) + f(nb + nc)) = 2s_2f(n(b + c)) \quad (3.13)$$

elde edilir.

Her $\omega \in [0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$f(m\omega) \leq mt^{m-1}f(\omega) \quad (3.14)$$

olduğunu gösterelim.

$\omega \in [0, \infty)$ olsun ve m üzerinde tümevarımla (3.14) eşitsizliğini ispatlayalım.

$m = 1$ için sonuç açıktır.

$m \geq 1$ olsun ve (3.14) eşitsizliğinin m için sağlandığını kabul edelim.

$t \geq 1$ olduğundan

$$mt^{m-1} + 1 \leq (m+1)t^{m-1}$$

elde edilir. (3.10) ve tümevarım hipotezinden

$$\begin{aligned}
f((m+1)\omega) &\leq t(f(m\omega) + f(\omega)) \\
&\leq t(mt^{m-1}f(\omega) + f(\omega)) \\
&= t(mt^{m-1} + 1)f(\omega) \\
&\leq t(m+1)t^{m-1}f(\omega) \\
&= (m+1)t^m f(\omega)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (3.10), (3.13) ve (3.14) den

$$\begin{aligned}
(f \circ d)(\omega, \nu) &\leq 2s_2nt^{n-1}f(b+c) \\
&\leq 2s_2nt(f(b) + f(c)) \\
&= s((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $f \circ d$ bir metriktir. \square

Sonuç 3.1.11. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu uyumlu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $f \in \mathfrak{B}$,
- (ii) $f \in \mathfrak{MB}$,
- (iii) Her $(a, b, c) \in \Delta$ için $f(a), f(b), f(c) \in \Delta_s$

olacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır [6].

İspat. Teorem 3.1.6 ve 3.1.10 dan açıktır. \square

3.2 b -Metrik Koruyan Fonksiyonlar için Gluing Lemma

Teorem 3.2.1. $g, h \in \mathfrak{B}$, $r > 0$ ve $g(r) = h(r)$ olsun.

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & , \quad \omega \in [0, r) \\ h(\omega) & , \quad \omega \in [r, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Her $\omega, \nu \in [r, \infty)$ için

$$|\omega - \nu| \leq r \Rightarrow |h(\omega) - h(\nu)| \leq g(|\omega - \nu|)$$

olacak şekilde artan ve konkav bir g fonksiyonu kabul edelim.

Bu durumda $f \in \mathfrak{B}$ dir [7].

İspat. $g, h \in \mathfrak{B}$ olduğundan Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.9 den her $(a, b, c) \in \Delta$ için

$$(g(a), g(b), g(c)) \in \Delta_{s_1} \text{ ve } (h(a), h(b), h(c)) \in \Delta_{s_2}$$

olacak şekilde bir $s_1, s_2 \geq 1$ vardır.

$s = \max\{s_1, s_2\}$ ve $(a, b, c) \in \Delta$ olsun.

Genelliği bozmadan

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq a + b \tag{3.15}$$

olduğunu varsayalım. Eğer $a, b, c \in [0, r)$ ise

$$(f(a), f(b), f(c)) = (g(a), g(b), g(c)) \in \Delta_{s_1} \subseteq \Delta_s$$

olur. Eğer $a, b, c \in [r, \infty)$ ise,

$$(f(a), f(b), f(c)) = (h(a), h(b), h(c)) \in \Delta_{s_2} \subseteq \Delta_s$$

olur. a, b, c noktalarının aynı aralıkta olmadığı durumları inceleyelim.

(3.15) eşitsizliğinden $c \in [r, \infty)$ ise $a, b \in [0, r)$ olur.

O halde aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

Durum 1. $a, b \in [0, r)$ ve $c \in [r, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$f(a) = g(a) \leq g(b) = f(b) \leq f(b) + f(c) \leq s(f(b) + f(c)) \tag{3.16}$$

olur.

$$|r - c| = c - r \leq a + b - r < r + r - r = r$$

olduğundan

$$|g(r) - h(c)| = |h(r) - h(c)| \leq g(|r - c|) = g(c - r)$$

olur, buradan

$$-g(c - r) \leq g(r) - h(c) \leq g(c - r) \quad (3.17)$$

ve

$$g(r) - g(c - r) \leq h(c)$$

elde edilir.

$$c \leq a + b$$

olduğundan

$$c - r \leq a + b - r \leq a$$

olur. g fonksiyonu artan olduğundan

$$g(c - r) \leq g(a)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} f(b) &= g(b) \leq g(r) \leq g(r) + g(a) - g(c - r) = (g(r) - g(c - r)) + g(a) \\ &\leq h(c) + g(a) = f(c) + f(a) \\ &\leq s(f(c) + f(a)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur. g konkav olduğundan Lemma 2.2.14 den

$$t = r, \omega = a + b - r, \nu = a, \mu = b$$

değerlerini yerine yazdığımızda

$$g(a + b - r) + g(r) \leq g(a) + g(b)$$

elde edilir. (3.17) den

$$h(c) \leq g(r) + g(c - r)$$

ve

$$\begin{aligned}
f(c) &= h(c) \leq g(r) + g(c-r) \leq g(r) + g(a+b-r) \\
&\leq g(a) + g(b) = f(a) + f(b) \\
&\leq s(f(a) + f(b))
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olur. (3.16), (3.18) ve (3.19) dan

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_s$$

olduğu sonucuna ulaşırız.

Durum 2. $a \in [0, r)$ ve $b, c \in [r, \infty)$ olsun.

$$(h(r), h(b), h(c)) \in \Delta_{s_2} \text{ olduğundan}$$

$$r \leq b+c, \quad b \leq c \leq c+r \text{ ve } c \leq a+b \leq r+b$$

olur. Bu durumda $(r, b, c) \in \Delta$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
f(a) &= g(a) \leq g(r) = h(r) \leq s_2(h(b) + h(c)) \\
&\leq s(h(b) + h(c)) = s(f(b) + f(c))
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir.

$$|b-c| = c-b \leq r \text{ olduğundan}$$

$$h(b) - h(c) \leq g(|b-c|) = g(c-b),$$

$$-g(c-b) \leq h(b) - h(c) \leq g(c-b),$$

$$\begin{aligned}
f(b) &= h(b) \leq g(c-b) + h(c) \leq g(a) + h(c) \\
&= f(a) + f(c) \leq s(f(a) + f(c))
\end{aligned} \tag{3.21}$$

ve

$$\begin{aligned}
f(c) &= h(c) \leq g(c-b) + h(b) \leq g(a) + h(b) \\
&= f(a) + f(b) \leq s(f(a) + f(b))
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olur.

(3.5), (3.6) ve (3.7) den $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_s$ elde ederiz.

Tüm durumlar için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_s$ dir.

Sonuç olarak Tanım 2.2.4 den $f \in \mathfrak{B}$ olduğu görülür. \square

Teorem 3.2.2. $g, h \in \mathfrak{BM}$, $r > 0$ ve $g(r) = h(r)$ olsun.

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & , \quad \omega \in [0, r) \\ h(\omega) & , \quad \omega \in [r, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$A = \sup_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega) \text{ ve } B = \inf_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega)$$

olsun. Bu durumda

$$(i) \quad \begin{aligned} A &= \max \left\{ \sup_{\omega \in (0, r)} g(\omega), \sup_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega) \right\} \\ B &= \min \left\{ \inf_{\omega \in (0, r)} g(\omega), \inf_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega) \right\} \end{aligned}$$

sağlanır ve aşağıdaki önermeler denktir.

(ii) $f \in \mathfrak{BM}$,

(iii) $A \leq 2B$,

(iv) $\sup_{\omega \in (0, r)} g(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega)$ ve $\sup_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in (0, r)} g(\omega)$ [7].

İspat. Lemma 2.2.13 den her $\omega \in (0, \infty)$ için

$$v \leq f(\omega) \leq 2v$$

olacak şekilde bir $v > 0$ vardır.

Bu durumda $v \leq B \leq A \leq 2v$ elde edilir ve (iii) koşulu sağlanır.

Tersine (iii) koşulunun sağlandığını kabul edelim.

$\omega \in (0, \infty)$ için,

$$B = \inf_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega) \leq f(\omega) \leq \sup_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega) = A \leq 2B$$

elde edilir.

f fonksiyonun kesin sınırlı olduğu görülür.

Lemma 2.2.13 den g ve h fonksiyonu uyumlu fonksiyondur. Böylece f fonksiyonu uyumludur ve $f \in \mathfrak{BM}$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak (ii) ve (iii) denktir.

Şimdi (iii) önermesinin doğru olduğunu kabul edelim ve (iv) ün sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega) &\leq \max \left\{ \sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega), \sup_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \right\} = A \leq 2B \\ &= 2 \min \left\{ \inf_{\omega \in (0,r)} g(\omega), \inf_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \right\} \leq 2 \inf_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\sup_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \leq A \leq 2B \leq 2 \inf_{\omega \in (0,r)} g(\omega)$$

elde edilir. O halde (iv) sağlanır.

$$\text{Durum 1. } \sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega) \geq \sup_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \text{ ve } A = \sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega)$$

dır.

$g \in \mathfrak{BM}$ olduğundan (ii) \Rightarrow (iii) ispatında kullanılan benzer adımlarla

$$\sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in (0,r)} g(\omega)$$

elde edilir. (iv) den

$$\sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} A &\leq \min \left\{ 2 \inf_{\omega \in (0,r)} g(\omega), 2 \inf_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \right\} \\ &= 2 \min \left\{ \inf_{\omega \in (0,r)} g(\omega), \inf_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega) \right\} = 2B \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Durum 2. } \sup_{\omega \in (0,r)} g(\omega) < \sup_{\omega \in [r,\infty)} h(\omega)$$

ve

$$A = \sup_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega)$$

dır. $h \in \mathfrak{BM}$ olduğundan

$$\sup_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega)$$

dır. (iv) den

$$\sup_{\omega \in [r, \infty)} h(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in (0, r)} g(\omega)$$

olur. Böylece $A \leq 2B$ olduğu görülür. $A \leq 2B$ eşitsizliği, (iii) önermesini her durum için ispatlar. \square

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ b -METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR VE GLUING LEMMA

Bu bölümde genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon kavramı ve temel özellikleri ele alınacaktır.

4.1 Genelleştirilmiş b -Metrik Koruyan Fonksiyonlar

Tanım 4.1.1. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(i) $f \circ d_\theta$ fonksiyonu X üzerinde bir genelleştirilmiş b -metrik ise f fonksiyonuna genelleştirilmiş b -metrik koruyan denir [8].

(ii) $f \circ d$ fonksiyonu X üzerinde bir genelleştirilmiş b -metrik ise f fonksiyonuna metrik – genelleştirilmiş b -metrik koruyan denir [22].

(iii) $f \circ d_\theta$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik ise f fonksiyonuna bir genelleştirilmiş b -metrik – metrik koruyan denir [22].

(iv) $f \circ d_s$ fonksiyonu X üzerinde bir genelleştirilmiş b -metrik ise f fonksiyonuna bir b -metrik – genelleştirilmiş b -metrik koruyan denir [22].

(v) $f \circ d_\theta$ fonksiyonu da X üzerinde b -metrik ise f fonksiyonuna genelleştirilmiş b -metrik – b -metrik koruyan denir [22].

\mathcal{E}_b tüm genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyonların kümesi, $\mathcal{M}\mathcal{E}_b$ ise tüm metrik – genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyonların kümesi, $\mathcal{E}_b\mathcal{M}$ tüm genelleştirilmiş b -metrik – metrik koruyan fonksiyonların kümesi, $\mathcal{B}\mathcal{E}_b$ tüm b -metrik – genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyonların kümesi ve $\mathcal{E}_b\mathcal{B}$ tüm genelleştirilmiş b -metrik – b -metrik koruyan fonksiyonların kümesi olsun [22].

Teorem 4.1.2. α pozitif bir reel sayı olsun.

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $f(\omega) = \omega^\alpha$ olarak tanımlansın.

Bu durumda

(i) Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise f fonksiyonu metrik koruyandır.

(ii) Eğer $\alpha > 1$ ise f fonksiyonu genelleştirilmiş b -metrik koruyandır fakat metrik koruyan değildir.

İspat. *Durum 1.* Teorem 3.1.1 den elde edilir.

Durum 2. $\alpha > 1$ olsun. $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(\omega) = \frac{(1+\omega)^\alpha}{1+\omega^\alpha}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$g'(\omega) = \frac{\alpha(1+\omega)^{\alpha-1} \cdot (1-\omega^{\alpha-1})}{(1+\omega^\alpha)^2}$$

olur. Böylece

$$g'(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow \omega \leq 1$$

dir. Buradan g fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artan ve $[1, \infty)$ aralığında azalandır.

Her $\omega \in [0, \infty)$ için

$$g(\omega) \leq g(1) = 2^{\alpha-1} \tag{4.1}$$

dir.

f fonksiyonunun genelleştirilmiş b -metrik koruyan olduğunu göstermek için d_θ fonksiyonu X uzayı üzerinde bir genelleştirilmiş b -metrik ve her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$(d_\theta 1)$ ve $(d_\theta 2)$ koşullarını sağladığı kolayca görülür.

Gerçekten,

$$(d_\theta 1) \quad (f \circ d_\theta)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d_\theta(\omega, \nu)) = 0 \Leftrightarrow (d_\theta(\omega, \nu))^\alpha = 0 \Leftrightarrow d_\theta(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu$$

ve

$$(d_\theta 2) \quad (f \circ d_\theta)(\omega, \nu) = f(d_\theta(\omega, \nu)) = f(d_\theta(\nu, \omega)) = (f \circ d_\theta)(\nu, \omega)$$

elde edilir.

$(d_\theta 3)$ koşulu için $a, b, c \in X$ olsun. Eğer $a = c$ ise

$$f \circ d_\theta(a, b) \leq [\theta(a, b)]^\alpha \cdot 2^{\alpha-1} (f \circ d_\theta(a, c) + f \circ d_\theta(c, d))$$

olduğu açıktır.

$a \neq c$ olduğunu varsayalım (4.1) den

$$g\left(\frac{d_\theta(c, b)}{d_\theta(a, c)}\right) \leq 2^{\alpha-1}$$

ve

$$\begin{aligned} (d_\theta(a, c) + d_\theta(c, b))^\alpha &\leq 2^{\alpha-1} (d_\theta(a, c)^\alpha + d_\theta(c, b)^\alpha) \\ &= 2^{\alpha-1} ((f \circ d_\theta)(a, c) + (f \circ d_\theta)(c, b)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir.

Böylece (4.2) den d_θ fonksiyonun genelleştirilmiş b -metrik olma özelliğinden

$$\begin{aligned} (f \circ d_\theta)(a, b) &= (d_\theta(a, b))^\alpha \leq (\theta(a, b)(d_\theta(a, c) + d_\theta(c, b)))^\alpha \\ &\leq [\theta(a, b)]^\alpha 2^{\alpha-1} ((f \circ d_\theta)(a, c) + (f \circ d_\theta)(c, d)) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan $f \circ d_\theta$ nın $(d_\theta 3)$ koşulunu sağladığını gösterir ve böylece f fonksiyonu genelleştirilmiş b -metrik koruyandır fakat Teorem 3.1.1 den görüldüğü gibi f fonksiyonu metrik koruyan değildir. \square

Önerme 4.1.3. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Buradan

(i) $\mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ ve

(ii) $\mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{M} \mathfrak{E}_b$

olur.

İspat. Her metrik bir genelleştirilmiş b –metrik olduğundan ispat açıktır.

Gerçekten,

$$f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \Rightarrow f \in \mathfrak{M}$$

d bir metrik olsun. Her metrik bir genelleştirilmiş b –metrik olduğundan d bir genelleştirilmiş b –metriktir ve $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ den $f \circ d$ bir metriktir.

$$f \in \mathfrak{E}_b \Rightarrow f \in \mathfrak{M} \mathfrak{E}_b$$

d bir metrik olsun. Her metrik bir genelleştirilmiş b –metrik ve $f \in \mathfrak{E}_b$ olduğundan $f \circ d$ bir genelleştirilmiş b –metriktir. \square

Önerme 4.1.4. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b –metrik uzay, $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}_b$ dir.

İspat. $f \in \mathfrak{M}$ ve d_θ fonksiyonu X üzerinde bir genelleştirilmiş b –metrik olsun. $f \circ d_\theta$ fonksiyonunun genelleştirilmiş b –metrik olduğunu göstereceğiz.

$f \in \mathfrak{M}$ olduğundan Lemma 2.2.9 dan f fonksiyonu uyumludur.

Öyleyse her $\omega, \nu \in X$ için

$$(d_\theta 1) (f \circ d_\theta)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu$$

ve

$$(d_\theta 2) (f \circ d_\theta)(\omega, \nu) = f(d_\theta(\omega, \nu)) = f(d_\theta(\nu, \omega)) = (f \circ d_\theta)(\nu, \omega)$$

dir.

$(d_\theta 3)$ koşulunu göstermeye çalışalım.

d bir genelleştirilmiş b –metrik olduğundan her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$$a = d_\theta(\omega, \nu), \quad b = d_\theta(\omega, \mu), \quad c = d_\theta(\mu, \nu)$$

$$d_\theta(\omega, \nu) = \theta(\omega, \nu)[d_\theta(\omega, \mu) + d_\theta(\mu, \nu)]$$

$$a \leq \theta(\omega, \nu)[b + c],$$

$$d_\theta(\omega, \mu) = \theta(\omega, \mu)[d_\theta(\omega, \nu) + d_\theta(\nu, \mu)]$$

$$b \leq \theta(\omega, \mu)[a + c]$$

ve

$$d_\theta(\nu, \mu) = \theta(\nu, \mu)[d_\theta(\nu, \omega) + d_\theta(\omega, \mu)]$$

$$c \leq \theta(\nu, \mu)[a + b]$$

elde edilir.

$N = \sup\{\theta(\omega, \nu) : \omega, \nu \in X\}$ olmak üzere n, N den büyük bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda her $\omega, \nu, \mu \in X$

$$a \leq \theta(\omega, \nu)[b + c] \leq n[b + c] = nb + nc$$

olur. Böylece $(a, nb + nc, nb + nc)$ bir üçgen üçlüsüdür.

f metrik koruyan olduğundan sırasıyla Lemma 2.2.9, Lemma 2.2.11 ve Lemma 2.2.12 gereğince

$$f(a) \leq f(nb + nc) + f(nb + nc) = 2f(nb + nc)$$

$$\leq 2(f(nb + nc)) \leq 2(nf(b) + nf(c)) = 2n(f(b) + f(c))$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(f \circ d_\theta)(\omega, \nu) \leq 2n((f \circ d_\theta)(\omega, \mu) + (f \circ d_\theta)(\mu, \nu))$$

olur. \square

Sonuç 4.1.5. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{M} \mathfrak{E}_b$$

olur.

Önerme 4.1.6. (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{E}_b$$

dir.

Önerme 4.1.7. (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Böylece

$$(i) \mathfrak{E}_b \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} \text{ ve}$$

$$(ii) \mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{B} \mathfrak{E}_b$$

olur.

İspat. Her b -metrik bir genelleştirilmiş b -metrik olduğundan ispat açıktır. Gerçekten,

$$f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{B} \Rightarrow f \in \mathfrak{B}$$

olur. d_s bir b -metrik olsun. Her b -metrik bir genelleştirilmiş b -metrik olduğundan d_s bir genelleştirilmiş b -metriktir ve $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{B}$ den $f \circ d_s$ bir b -metriktir. O halde

$$f \in \mathfrak{E}_b \Rightarrow f \in \mathfrak{B} \mathfrak{E}_b$$

elde edilir. d_s bir b -metrik olsun. Her b -metrik bir genelleştirilmiş b -metrik ve $f \in \mathfrak{E}_b$ olduğundan $f \circ d_s$ bir b -metrik – genelleştirilmiş b -metriktir. Önerme 4.1.6 ve Önerme 4.1.7 den aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 4.1.8. (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay, ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{E}_b \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{B} \mathfrak{E}_b$$

olduğu görülür.

Önerme 4.1.9. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Böylece

$$(i) \mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}_b \mathfrak{B} ,$$

$$(ii) \mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \subset \mathfrak{B} \mathfrak{E}_b$$

olur.

İspat. (i) d_θ , X üzerinde bir genelleştirilmiş b -metriktir. $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğundan $f \circ d_\theta$, X üzerinde bir metriktir. Her metrik bir b -metrik olduğundan $f \circ d_s$ bir b -metriktir. O halde $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{B}$ dir.

(ii) d_s , X üzerinde bir b -metriktir. Her b -metrik bir genelleştirilmiş b -metrik olduğundan d_s , X üzerinde bir genelleştirilmiş b -metriktir. $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğundan $f \circ d_s$ X üzerinde bir metriktir. Böylece her metrik bir genelleştirilmiş b -metriktir. O halde $f \in \mathfrak{B} \mathfrak{E}_b$ dir.

Sonuç 4.1.5, Sonuç 4.1.8 ve Önerme 4.1.9 dan aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 4.1.10. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}_b \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{B} \mathfrak{E}_b$$

ve

$$\mathfrak{E}_b \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{M} \mathfrak{E}_b$$

olur.

Teorem 4.1.11. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun uyumlu olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $f \in \mathfrak{M} \mathfrak{E}_b$

(ii) Her $(a, b, c) \in \Delta$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$ olacak şekilde bir $\theta : X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu vardır.

İspat. $f \in \mathfrak{M} \mathfrak{B}$ olduğunu kabul edelim. d , \mathbb{R}^2 üzerinde bir Öklid metriği olsun. Bu durumda $f \circ d$ bir genelleştirilmiş b -metriktir.

Her $\omega, \nu, \mu \in \mathbb{R}^2$ için

$$(f \circ d)(\omega, \mu) \leq \theta(\omega, \mu) [(f \circ d)(\omega, \nu) + (f \circ d)(\nu, \mu)]$$

olacak şekilde bir θ vardır.

$(a, b, c) \in \Delta$ olsun. Öklid geometrisine göre öyle $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ vardır ki

$$d(u, w) = a, \quad d(u, v) = b \quad \text{ve} \quad d(v, w) = c$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(a) &= (f \circ d)(u, w) \leq \theta(u, w) ((f \circ d)(u, v) + (f \circ d)(v, w)) \\ &= \theta(u, v) (f(b) + f(c)) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$f(b) \leq \theta(u, v) (f(a) + f(c)) \quad \text{ve} \quad f(c) \leq \theta(v, w) (f(a) + f(b))$$

olur. Böylece

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$$

dır.

Tersine her $(a, b, c) \in \Delta$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$ olacak şekilde bir θ olduğunu kabul edelim.

(X, d) bir metrik uzay olsun. $f \circ d$ fonksiyonunun bir genelleştirilmiş b -metrik olduğunu gösterelim.

$(d_\theta 1)$ Her $\omega, \nu \in X$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d(\omega, \nu)) = 0$$

$$\Leftrightarrow d(\omega, \nu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \nu$$

elde edilir.

$(d_\theta 2)$ Her $\omega, \nu \in X$ için

$$\begin{aligned}
(f \circ d)(\omega, \nu) &= f(d(\omega, \nu)) \\
&= f(d(\nu, \omega)) \\
&= (f \circ d)(\nu, \omega)
\end{aligned}$$

olur.

$(d_\theta 3)$ $\omega, \nu, \mu \in X$ olsun.

$(d(\omega, \nu), d(\omega, \mu), d(\mu, \nu)) \in \Delta$ olduğundan

$(f(d(\omega, \nu)), f(d(\omega, \mu)), f(d(\mu, \nu))) \in \Delta_\theta$ dir.

Yani

$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq \theta(\omega, \nu)((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))$ olduğundan $f \circ d_\theta$ bir genelleştirilmiş b -metriktir. \square

Teorem 4.1.12. (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun uyumlu olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $f \in \mathfrak{BC}_b$

(ii) Her $(a, b, c) \in \Delta_s$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$ olacak şekilde bir $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu vardır.

İspat. $f \in \mathfrak{BC}_b$ olduğunu kabul edelim. d_s, \mathbb{R}^2 üzerinde bir Öklid metriği olsun. Her metrik bir b -metrik olduğundan d_s aynı zamanda bir b -metriktir. Bu durumda $f \circ d_s$ bir genelleştirilmiş b -metriktir.

Her $\omega, \nu, \mu \in \mathbb{R}^2$ için

$$(f \circ d_s)(\omega, \nu) \leq \theta(\omega, \nu)[(f \circ d_s)(\omega, \nu) + (f \circ d_s)(\nu, \mu)]$$

olacak şekilde bir θ vardır.

$(a, b, c) \in \Delta_s$ olsun. Öklid geometrisine göre öyle $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ vardır ki $d_s(u, w) = a$, $d_s(u, v) = b$ ve $d_s(v, w) = c$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(a) &= (f \circ d_s)(u, w) \leq \theta(u, w)(f \circ d_s)(u, v) + (f \circ d_s)(v, w) \\ &= \theta(u, w)(f(b) + f(c)) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$f(b) \leq \theta(u, v)(f(a) + f(c)) \text{ ve } f(c) \leq \theta(v, w)(f(a) + f(b))$$

olur. Böylece

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$$

dır.

Tersine her $(a, b, c) \in \Delta_s$ için $(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$ olacak şekilde bir θ olduğunu kabul edelim. (X, d_s) bir b -metrik uzay olsun. $f \circ d_s$ in bir genelleştirilmiş b -metrik olduğunu gösterelim.

$(d_\theta 1)$ Her $\omega, \nu \in X$ için,

$$\begin{aligned} (f \circ d_s)(\omega, \nu) = 0 &\Leftrightarrow f(d_s(\omega, \nu)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_s(\omega, \nu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega = \nu \end{aligned}$$

elde edilir.

$(d_\theta 2)$ Her $\omega, \nu \in X$ için,

$$\begin{aligned} (f \circ d_s)(\omega, \nu) &= f(d_s(\omega, \nu)) \\ &= f(d_s(\nu, \omega)) \\ &= (f \circ d_s)(\nu, \omega) \end{aligned}$$

bulunur.

$(d_\theta 3)$ Her $\omega, \nu, \mu \in X$ olsun.

$(d_s(\omega, \nu), d_s(\omega, \mu), d_s(\mu, \nu)) \in \Delta_s$ olduğundan

$$(f(d_s(\omega, \nu)), f(d_s(\omega, \mu)), f(d_s(\mu, \nu))) \in \Delta_\theta$$

Yani

$$(f \circ d_s)(\omega, \nu) \leq \theta(\omega, \nu)((f \circ d_s)(\omega, \mu) + (f \circ d_s)(\mu, \nu))$$

olduğundan $f \circ d_s$ bir genelleştirilmiş b – metriktir. \square

Teorem 4.1.13. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b – metrik uzay olsun, $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu uyumlu, yarı alttoplamsal ve artan ise $f \in \mathfrak{MC}_b$ dir.

İspat. f fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında uyumlu yarı alttoplamsal ve artan olduğunu kabul edelim.

(X, d) bir metrik uzay olsun. $f \circ d$ fonksiyonunun bir genelleştirilmiş b – metrik olduğunu gösterelim.

d fonksiyonunun bir metrik olması ve f fonksiyonunun uyumlu olmasından aşağıdaki durumlar kolayca görülür.

$$\begin{aligned} (d_\theta 1) (f \circ d)(\omega, \nu) = 0 &\Leftrightarrow f(d(\omega, \nu)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(\omega, \nu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega = \nu \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (d_\theta 2) (f \circ d)(\omega, \nu) &= f(d(\omega, \nu)) = f(d(\nu, \omega)) \\ &= (f \circ d)(\omega, \nu) \end{aligned}$$

olur.

$(d_\theta 3)$ f fonksiyonu yarı alttoplamsal olduğundan her $a, b \in [0, \infty)$ için,

$$f(a+b) \leq s(f(a) + f(b)) \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır.

Her $\omega, \nu, \mu \in X$ için $\theta(\omega, \nu) = s$ olsun. f fonksiyonunun artanlığı ve (4.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
(f \circ d)(\omega, \nu) &= f(d(\omega, \nu) \leq d(\mu, \nu)) \\
&\leq s((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu)) \\
&= \theta(\omega, \nu)((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $f \in ME_b$ dir. \square

Teorem 4.1.14. (X, d_s) bir b -metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu uyumlu, doğrusal ve artan ise $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{E}_b$ dir.

İspat. f fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında uyumlu, doğrusal ve artan olduğunu kabul edelim.

(X, d_s) bir b -metrik uzay olsun. $f \circ d_s$ in bir genelleştirilmiş b -metrik olduğunu gösterelim.

Her $\omega, \nu \in X$ için,

$$(d_\theta 1) \quad (f \circ d_s)(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d_s(\omega, \nu)) = 0 \Leftrightarrow d_s(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu$$

ve

$$(d_\theta 2) \quad (f \circ d_s)(\omega, \nu) = f(d_s(\omega, \nu)) = f(d_s(\nu, \omega)) = (f \circ d_s)(\nu, \omega)$$

elde edilir.

$(d_\theta 3)$ fonksiyonu doğrusal olduğundan her $a, b \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned}
f(a+b) &\leq s(f(c) + f(b)) \\
(f \circ d_s)(\omega, \nu) &= f(d_s(\omega, \nu)) \\
&\leq f(s[d_s(\omega, \mu) + d_s(\omega, \nu)]) \\
&= f(sd_s(\omega, \mu) + sd_s(\omega, \nu)) \\
&\leq s[f \circ d_s(\omega, \mu) + f \circ d_s(\omega, \nu)] \\
&= \theta(\omega, \nu)((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{E}_b$ dir. \square

Teorem 4.1.15. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b – metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $f \in \mathfrak{ME}_b$ ise f fonksiyonu uyumlu ve yarı alttoplamsaldır.

İspat. $f \in \mathfrak{ME}_b$ ve d, \mathbb{R} üzerinde bir alışılmış metrik olsun.

Bu durumda $f \circ d, \mathbb{R}$ üzerinde bir genelleştirilmiş b – metriktir. Buradan

$$f(0) = f(d(0,0)) = (f \circ d)(0,0) = 0$$

olur. Ayrıca $\omega \in [0, \infty)$ ve $f(\omega) = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$0 = f(\omega) = f(d(\omega,0)) = (f \circ d)(\omega,0)$$

dır.

$$(f \circ d)(\omega,0) = 0$$

ve

$f \circ d$ bir genelleştirilmiş b – metrik olduğundan $\omega = 0$ dir. O halde

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$$

yani f fonksiyonu uyumludur.

$f \circ d$ bir genelleştirilmiş b – metrik olduğundan her $\omega, \nu, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$(f \circ d)(\omega, \nu) \leq \theta(\omega, \nu)((f \circ d)(\omega, \mu) + (f \circ d)(\mu, \nu))$$

olacak şekilde bir $\theta : X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu vardır.

f fonksiyonunun yarı alttoplamsal olduğunu göstermek için $a, b \in [0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(a+b) &\leq (f \circ d)(0, a+b) \leq \theta(0, a+b)((f \circ d)(0, a) + (f \circ d)(a, a+b)) \\ &= \theta(0, a+b)(f(a) + f(b)) \end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak f yarı alttoplamsaldır. \square

Teorem 4.1.16. (X, d_s) bir metrik uzay, (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{E}_b$ ise f fonksiyonu uyumlu ve yarı alttoplamsaldır.

İspat. Teorem 4.1.15 ispatından görebiliriz. \square

Teorem 4.1.17. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in \mathfrak{E}_b\mathfrak{M}$ olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun uyumlu ve kesin sınırlı olmasıdır.

İspat. (\Leftarrow) f fonksiyonunun uyumlu ve kesin sınırlı olduğunu varsayalım.

Her $\omega > 0$ için

$$f(\omega) \in [\nu, 2\nu] \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir $\nu > 0$ sabiti olsun.

(X, d_θ) uzayı genelleştirilmiş b -metrik olsun. $f \circ d_\theta$ nın bir metrik olduğunu gösterelim.

$(f \circ d_\theta)$ nın $(d1)$ ve $(d2)$ koşullarını sağladığı açıkça görülür.

$(d3)$ koşulunu sağladığını göstermek için her $\omega, \nu, \mu \in X$ olsun.

Eğer $\omega = \nu$ ise

$$(f \circ d_\theta)(\omega, \nu) \leq (f \circ d_\theta)(\omega, \mu) + (f \circ d_\theta)(\mu, \nu) \quad (4.5)$$

olduğu açıktır.

Benzer şekilde $\omega = \mu$ ya da $\nu = \mu$ ise (4.5) eşitsizliği sağlanır.

Varsayalım ki $\omega \neq \nu$, $\omega \neq \mu$ ve $\nu \neq \mu$ olsun.

O zaman $d(\omega, \nu)$, $d(\omega, \mu)$ ve $d(\nu, \mu)$ pozitiftir. (4.4) den

$$f(d_\theta(\omega, \nu)), f(d_\theta(\mu, \nu)), f(d_\theta(\omega, \mu)) \in [\nu, 2\nu]$$

elde edilir. Bu durumda

$$(f \circ d_\theta)(\omega, \nu) \leq 2\nu = \nu + \nu \leq (f \circ d_\theta)(\omega, \mu) + (f \circ d_\theta)(\mu, \nu)$$

olur. Sonuç olarak $f \circ d_\theta$ bir metriktir, yani $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğu elde edilir.

(\Rightarrow) $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğunu varsayalım.

Sonuç 4.1.10 dan $f \in \mathfrak{M}$ dir ve böylece f fonksiyonu metrik koruyan olduğundan Lemma 2.2.9. dan f fonksiyonu uyumludur.

f fonksiyonunun kesin sınırlı olduğunu göstermek için η, \mathbb{R} üzerinde bir alışılmış metrik ve her $\omega \in [0, \infty)$ için,

$$g(\omega) = \omega^\alpha \text{ ve } \alpha > 1$$

olmak üzere d_θ fonksiyonu $d_\theta = g \circ \eta$ şeklinde tanımlansın. Teorem 4.1.19 (ii) den

$$d_\theta(\omega, \nu) = (\omega - \nu)^\alpha$$

genelleştirilmiş b – metriktir.

$f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğundan $f \circ d_\theta$ bir metriktir. Ayrıca Teorem 3.1.9 kullanılarak f fonksiyonunun kesin sınırlı olduğu görülür. \square

Teorem 4.1.18. (X, d) bir metrik uzay, (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b – metrik uzayı ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda herhangi bir f fonksiyonunun metrik – genelleştirilmiş b – metrik koruyan olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun genelleştirilmiş b – metrik koruyan olmasıdır, Yani,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{E}_b = \mathfrak{E}_b$$

dir.

İspat. Önerme 4.1.3 den

$$\mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{M}\mathfrak{E}_b$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\mathfrak{M}\mathfrak{E}_b \subset \mathfrak{E}_b$$

olduğunu göstereceğiz.

$f \in \mathcal{ME}_b$ olsun. $f \in \mathcal{E}_b$ olduğunu, yani $f \circ d_\theta$ fonksiyonunun bir genelleştirilmiş b -metrik olduğunu gösterelim. Teorem 4.1.15 den f fonksiyonu uyumlu ve yarı alttoplamsaldır. Bu durumda, $f \circ d_\theta$ fonksiyonunun genelleştirilmiş b -metrik olma koşullarını sağladığını kolayca gösterebiliriz.

($d_\theta 1$) f fonksiyonu uyumlu olduğundan her $\omega, \nu \in X$ için,

$$f \circ d_\theta(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow f(d_\theta(\omega, \nu)) = 0 \Leftrightarrow d_\theta(\omega, \nu) = 0 \Leftrightarrow \omega = \nu$$

olur.

($d_\theta 2$) Her $\omega, \nu \in X$ için,

$$f \circ d_\theta(\omega, \nu) = f(d_\theta(\omega, \nu)) = f(d_\theta(\nu, \omega)) = f \circ d_\theta(\nu, \omega)$$

elde edilir.

($d_\theta 3$) f fonksiyonu yarı alttoplamsal olduğundan her $a, b \in [0, \infty)$ için,

$$f(a+b) \leq s[f(a) + f(b)] \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır.

d_θ bir genelleştirilmiş b -metrik olduğundan, hipotezden her $\omega, \nu, \mu \in X$ için

$$d_\theta(\omega, \nu) \leq \theta_1(\omega, \nu)[d_\theta(\omega, \mu) + d_\theta(\mu, \nu)]$$

olacak şekilde sınırlı bir θ_1 fonksiyonu vardır.

$$n_1 = \sup\{\theta_1(\omega, \nu) : \omega, \nu \in X\}$$

olsun. Bu durumda

$$d_\theta(\omega, \nu) \leq m[d_\theta(\omega, \mu) + d_\theta(\mu, \nu)] \tag{4.7}$$

olacak şekilde $m > n_1$ doğal sayısı vardır.

$f \in \mathcal{ME}_b$ olduğundan Teorem 4.1.11 ve hipotezden her $(a, b, c) \in \Delta$ için

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_{\theta_2}$$

olacak şekilde bir sınırlı θ_2 fonksiyonu vardır.

$$n_2 = \sup\{\theta_2(\omega, \nu) : \omega, \nu \in X\} \text{ ve}$$

$$n = 2n_2ms^m$$

olsun.

$\omega, \nu, \mu \in X$ için,

$$a = d_\theta(\omega, \nu), b = d_\theta(\omega, \mu) \text{ ve } c = d_\theta(\mu, \nu)$$

dir. (4.7) den,

$$a \leq mb + mc$$

olur ve buradan

$$(a, mb + mc, mb + mc) \in \Delta$$

elde edilir. Teorem 4.1.11 den,

$$(f(a), f(mb + mc), f(mb + mc)) \in \Delta_{\theta_2}$$

dir ve buradan,

$$\begin{aligned} f(a) &= (f \circ d_\theta)(\omega, \nu) \leq \theta_2(\omega, \nu)[f(mb + mc) + f(mb + mc)] \\ &= 2\theta_2(\omega, \nu)f(m(b + c)) \\ &\leq 2n_2f(m(b + c)) \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Şimdi, her $\omega \in [0, \infty)$ ve $\alpha \in N$ için,

$$f(\alpha\omega) \leq \alpha s^{\alpha-1} f(\omega) \tag{4.9}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için α üzerinden tümevarım yapalım. $\alpha = 1$ için (4.9) un sağlandığı açıktır. $\alpha \geq 1$ olsun ve α için (4.9) un sağlandığını kabul edelim. $\alpha \geq 1$ olduğundan

$$\alpha s^{\alpha-1} + 1 \leq (\alpha + 1) s^{\alpha-1}$$

dir.

(4.6) dan ve tümevarım hipotezinden

$$\begin{aligned} f((\alpha+1)\omega) &\leq s[f(\alpha\omega) + f(\omega)] \leq s[\alpha s^{\alpha-1} f(\omega) + f(\omega)] \\ &= s(\alpha s^{\alpha-1} + 1)f(\omega) \leq s(\alpha+1)s^{\alpha-1} f(\omega) \\ &= (\alpha+1)s^\alpha f(\omega) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (4.9) sağlanır.

(4.6), (4.8) ve (4.9) kullanılarak

$$\begin{aligned} (f \circ d_\theta)(\omega, \nu) &\leq 2n_2 f(m(b+c)) \\ &\leq 2n_2 m s^{m-1} f(b+c) \\ &\leq 2n_2 m s^{m-1} s[f(b) + f(c)] \\ &= 2n_2 m s^m [f(b) + f(c)] \\ &= n[f \circ d_\theta(\omega, \mu) + f \circ d_\theta(\mu, \nu)] \end{aligned}$$

elde edilir. $\theta(\omega, \nu) = n$ olarak alındığında $(d_\theta 3)$ koşulunun sağlandığı görülür. Sonuç olarak $f \circ d_\theta$ bir genelleştirilmiş b -metriktir. \square

Teorem 4.1.19. (X, d_s) bir b -metrik uzay ve (X, d_θ) sınırlı bir $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metrik uzay olsun. Bu durumda herhangi bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun bir b -metrik-genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun genelleştirilmiş b -metrik koruyan olmasıdır. Yani,

$$\mathfrak{B}\mathfrak{E}_b = \mathfrak{E}_b$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.17 de kullanılan çözüm yöntemi ile basitçe anlaşılır. \square

4.2 Genelleştirilmiş b -Metrik Koruyan Fonksiyonlar için Gluing Lemma

Bu bölümde genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyonlar için iki farklı gluing lemma kanıtlanmıştır.

Teorem 4.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metrik uzay olsun. $f_1, f_2 \in \mathfrak{E}_b$, $\varepsilon > 0$ ve $f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon)$ olduğunu varsayalım. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\omega \in X$ için

$$f(\omega) = \begin{cases} f_1(\omega) & ; \omega \in [0, \varepsilon) \\ f_2(\omega) & ; \omega \in [\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Tüm $\omega, \nu \in [\varepsilon, \infty)$ için,

$$|\omega - \nu| \leq \varepsilon \Rightarrow |f_2(\omega) - f_2(\nu)| \leq f_1(|\omega - \nu|)$$

olacak şekilde konkav ve artan bir f_1 fonksiyonunun olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$f \in \mathfrak{E}_b$$

olur.

İspat. $f_1, f_2 \in \mathfrak{E}_b$ olduğundan Teorem 4.1.11 ve Teorem 4.1.18 den her $(a, b, c) \in \Delta$ için,

$$(f_1(a), f_1(b), f_1(c)) \in \Delta_{\theta_1}$$

ve

$$(f_2(a), f_2(b), f_2(c)) \in \Delta_{\theta_2}$$

olacak şekilde $\theta_1, \theta_2 : X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu vardır. Her $\omega, \nu \in X$ için

$$\theta(\omega, \nu) = \max \{ \theta_1(\omega, \nu), \theta_2(\omega, \nu) \}$$

olacak şekilde bir $\theta : X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu tanımlansın. Genelliği bozmadan

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq a + b \tag{4.10}$$

olduğunu varsayalım. Eğer $a, b, c \in [0, \varepsilon)$ ise

$$(f(a), f(b), f(c)) = (f_1(a), f_1(b), f_1(c)) \in \Delta_{\theta_1} \subseteq \Delta_\theta$$

olur. $a, b, c \in [\varepsilon, \infty)$ ise

$$(f(a), f(b), f(c)) = (f_2(a), f_2(b), f_2(c)) \in \Delta_{\theta_2} \subseteq \Delta_{\theta}$$

olur. a, b ve c noktalarının aynı aralıkta olmadığı durumları inceleyelim. (4.10) eşitsizliğinden $c \in [0, \varepsilon)$ ise $a, b \in [0, \varepsilon)$ olur. Öyleyse aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

Durum 1. $a, b \in [0, \varepsilon)$ ve $c \in [\varepsilon, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$f(a) = f_1(a) \leq f_1(b) = f(b) \leq f(b) + f(c) \leq \theta(o, v)(f(b) + f(c)) \quad (4.11)$$

elde edilir.

$$|\varepsilon - c| = c - \varepsilon \leq a + b - \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon$$

olduğundan

$$|f_1(\varepsilon) - f_2(c)| = |f_2(\varepsilon) - f_2(c)| \leq f_1(|\varepsilon - c|) = f_1(c - \varepsilon)$$

olur. Buradan

$$-f_1(c - \varepsilon) \leq f_1(\varepsilon) - f_2(c) \leq f_1(c - \varepsilon) \quad (4.12)$$

ve

$$f_1(\varepsilon) - f_1(c - \varepsilon) \leq f_2(c)$$

elde edilir.

$$c \leq a + b$$

olduğundan

$$c - \varepsilon \leq a + b - \varepsilon \leq a$$

dır. f_1 artan olduğundan

$$f_1(c - \varepsilon) \leq f_1(a)$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}
f(b) &= f_1(b) \leq f_1(\varepsilon) \leq f_1(\varepsilon) + f_1(a) - f_1(c - \varepsilon) \\
&= [f_1(\varepsilon) - f_1(c - \varepsilon)] + f_1(a) \\
&\leq f_2(c) + f_1(a) = f(c) + f(a) \\
&\leq \theta(\omega, \nu) [f(c) + f(a)]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. f_1 konkav olduğundan $t = \varepsilon$, $\omega = a + b - \varepsilon$, $\nu = a$ ve $\mu = b$ değerlerini yerine yazdığımızda

$$f_1(a + b - \varepsilon) + f_1(\varepsilon) \leq f_1(a) + f_1(b)$$

elde edilir. (4.12) den

$$f_2(c) \leq f_1(\varepsilon) + f_1(c - \varepsilon)$$

ve

$$\begin{aligned}
f(c) &= f_2(c) \leq f_1(\varepsilon) + f_1(c - \varepsilon) \leq f_1(\varepsilon) + f_1(a + b - \varepsilon) \\
&\leq f_1(a) + f_2(b) = f(a) + f(b) \\
&\leq \theta(\omega, \nu) [f(a) + f(b)]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. (4.11), (4.12) ve (4.13) den

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$$

olduğu sonucuna ulaşırız.

Durum 2. $a \in [0, \varepsilon)$ ve $b, c \in [\varepsilon, \infty)$ olsun.

$$(f_2(\varepsilon), f_2(b), f_2(c)) \in \Delta_{\theta_2}$$

olduğundan,

$$\varepsilon \leq b + c, \quad b \leq c \leq c + \varepsilon \quad \text{ve} \quad c \leq a + b \leq \varepsilon + b$$

olur. Bu durumda

$$(\varepsilon, b, c) \in \Delta$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
f(a) &= f_1(a) \leq f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon) \leq \theta_2(o, \nu) [f_2(b) + f_2(c)] \\
&\leq \theta(o, \nu) [f_2(b) + f_2(c)] = \theta(o, \nu) [f(b) + f(c)]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir.

$$|b - c| = c - b \leq \varepsilon$$

olduğundan,

$$|f_2(b) - f_2(c)| \leq f_1(|b - c|) = f_1(c - b),$$

$$-f_1(c - b) \leq f_2(b) - f_2(c) \leq f_1(c - b),$$

$$\begin{aligned}
f(b) &= f_2(b) \leq f_1(c - b) + f_2(c) \leq f_1(a) + f_2(c) \\
&= f(a) + f(c) \leq \theta(o, \nu) [f(a) + f(c)]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
f(c) &= f_2(c) \leq f_1(c - b) + f_2(b) \leq f_1(a) + f_2(b) \\
&= f(a) + f(b) \leq \theta(o, \nu) [f(a) + f(b)]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.15), (4.16) ve (4.17) den

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$$

elde ederiz. Tüm durumlar için

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \Delta_\theta$$

olur.

Sonuç olarak Teorem 4.1.11. ve Teorem 4.1.18 den

$$f \in \mathfrak{E}_b$$

olduğu görülür. \square

Teorem 4.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve (X, d_θ) sınırlı bir θ fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metrik uzay olsun. $f_1, f_2 \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$, $\varepsilon > 0$ ve $f_1(\varepsilon) = f_2(\varepsilon)$ olduğunu varsayalım. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon ve her $\omega \in [0, \infty)$ için

$$f(\omega) = \begin{cases} f_1(\omega) & ; \omega \in [0, \varepsilon) \\ f_2(\omega) & ; \omega \in [\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$A = \sup_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega)$$

ve

$$B = \inf_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega)$$

olsun.

$$A = \max \left\{ \sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega), \sup_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \right\} \quad (4.18)$$

$$B = \min \left\{ \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega), \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \right\} \quad (4.19)$$

sağlanır ve aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$,

(ii) $A \leq 2B$,

(iii) $\sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega)$ ve $\sup_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega)$.

İspat. Teorem 4.1.17 den $\sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega)$, $\sup_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega)$, $\inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega)$ ve $\inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega)$ vardır. Bu durumda (4.18) ve (4.19) koşullarının sağlandığı açıktır. Teorem 4.1.17 den f fonksiyonunun kesin sınırlı ve uyumlu olduğunu biliyoruz. Böylece

$$v \leq f(\omega) \leq 2v$$

olacak şekilde bir $v > 0$ vardır.

$$v \leq B \leq A \leq 2v$$

ve

$$2B \geq 2v \geq A$$

eşitsizliklerinden (ii) koşulu sağlanır. Diğer yandan ikinci koşulun sağlandığını varsayalım.

Her $\omega \in (0, \infty)$ için,

$$B = \inf_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega) \leq f(\omega) \leq \sup_{\omega \in (0, \infty)} f(\omega) = A + 2B$$

elde ederiz. Bu durumda f fonksiyonu kesin sınırlıdır. Teorem 4.1.17 den her $f_1, f_2 \in E_b M$ olduğundan f_1 ve f_2 fonksiyonları uyumludur. Bu durumda f fonksiyonu uyumludur. Teorem 4.1.17 gereğince $f \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğunu söyleriz. Böylece (i) ve (ii) koşulları denktir. Böylece (ii) koşulunun doğru olduğunu kabul edelim ve (iii) koşulunun sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega) &\leq \max \left\{ \sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega), \sup_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \right\} \\ &= A \leq 2B \\ &= 2 \min \left\{ \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega), \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \right\} \\ &\leq 2 \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \end{aligned}$$

ve

$$\sup_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \leq A \leq 2B \leq 2 \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega)$$

olduğundan (iii) koşulu sağlanır. Şimdi tersine aşağıdaki durumları inceleyeceğiz;

$$\text{Durum 1. } \sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega) \geq \sup_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega)$$

ve

$$A = \sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega)$$

dır. $f_1 \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğundan (i) \Rightarrow (ii) nin ispatında kullanılan benzer adımlarla

$$\sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega)$$

elde edilir. (iii) koşulundan

$$\sup_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} A &\leq \min \left\{ 2 \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega), 2 \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \right\} \\ &= 2 \min \left\{ \inf_{\omega \in (0, r)} f_1(\omega), \inf_{\omega \in [r, \infty)} f_2(\omega) \right\} = 2B \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Durum 2. } \sup_{\omega \in (0,r)} f_1(\omega), \sup_{\omega \in [r,\infty)} f_2(\omega)$$

ve

$$A = \sup_{\omega \in [r,\infty)} f_2(\omega)$$

dır. $f_2 \in \mathfrak{E}_b \mathfrak{M}$ olduğundan

$$\sup_{\omega \in [r,\infty)} f_2(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in [r,\infty)} f_2(\omega)$$

olduğunu biliyoruz. (iii) den

$$\sup_{\omega \in [r,\infty)} f_2(\omega) \leq 2 \inf_{\omega \in (0,r)} f_1(\omega)$$

dir. Tüm durumlar için $A \leq 2B$ olduğu görülür. \square

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ b -METRİK KORUYAN FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ÇEMBER KAVRAMI

Bu bölümde, genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon kavramı kullanılarak çeşitli çember tanımları ve örnekleri üzerinde durulacaktır.

(X, d_θ) bir genelleştirilmiş b -metrik uzay ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu bir genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon olsun.

(X, d_θ) genelleştirilmiş b -metrik uzayında ω_0 merkezli r yarıçaplı çember

$$C^\theta(\omega_0, r) = \{\omega \in X : d_\theta(\omega, \omega_0) = r\}$$

şeklinde tanımlıdır.

$f \circ d_\theta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ genelleştirilmiş b -metrik fonksiyonu kısaca d_{θ_f} ile gösterilsin.

Yani,

$$d_{\theta_f} = f \circ d_\theta$$

olsun. Ayrıca, r_f yarıçapı

$$r_f = f(r)$$

şeklinde tanımlansın.

Bu bölümde verilecek örneklerde aşağıdaki şekilde tanımlı olan genelleştirilmiş b -metrik uzay örneğini dikkate alalım:

$X = \{1, 2, 3, \dots\}$ ve $d_\theta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\omega, \nu \in X$ için

$$d_\theta(\omega, \nu) = (\omega - \nu)^4$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, d_θ fonksiyonu

$$\theta(\omega, \nu) = \begin{cases} |\omega - \nu|^3 & , \omega \neq \nu \\ 1 & , \omega = \nu \end{cases}$$

fonksiyonu ile genelleştirilmiş b -metriktir. (X, d_θ) ikilisi de bir genelleştirilmiş b -metrik uzaydır [23].

Tanım 5.1. (X, d_{θ_f}) genelleştirilmiş b -metrik uzayında ω_0 merkezli, r yarıçaplı $C_f^\theta(\omega_0, r)$ çemberi

$$C_f^\theta(\omega_0, r) = \{\omega \in X : d_{\theta_f}(\omega, \omega_0) = r\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 5.2. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = 3\omega$$

şeklinde tanımlı olsun. f fonksiyonu genelleştirilmiş b -metrik koruyan bir fonksiyondur.

$$\omega_0 = 1 \text{ ve } r = 3$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} C_f^\theta(1, 3) &= \{\omega \in X : d_{\theta_f}(\omega, 1) = 3\} \\ &= \{\omega \in X : f \circ d_\theta(\omega, 1) = 3\} \\ &= \{\omega \in X : 3d_\theta(\omega, 1) = 3\} \\ &= \{\omega \in X : d_\theta(\omega, 1) = 1\} \\ &= \{\omega \in X : (\omega - 1)^4 = 1\} \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.3. (X, d_θ) genelleştirilmiş b -metrik uzayında ω_0 merkezli, r_f yarıçaplı $C^\theta(\omega_0, r_f)$ çemberi

$$C^\theta(\omega_0, r_f) = \{\omega \in X : d_\theta(\omega, \omega_0) = r_f\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 5.4. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = 2\omega$$

şeklinde tanımlı olsun. f fonksiyonu genelleştirilmiş b – metrik koruyan bir fonksiyondur.

$$\omega_0 = 1 \text{ ve } r = 1$$

olsun. Bu durumda,

$$r_f = f(r) = f(1) = 2$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} C^\theta(1,2) &= \{\omega \in X : d_\theta(\omega,1) = 2\} \\ &= \{\omega \in X : d_\theta(\omega,1) = 2\} \\ &= \{\omega \in X : (\omega-1)^4 = 2\} = \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.5. (X, d_θ) genelleştirilmiş b – metrik uzayında $f(\omega_0)$ merkezli, r yarıçaplı

$C^\theta(f(\omega_0), r)$ çemberi

$$C^\theta(f(\omega_0), r) = \{\omega \in X : d_\theta(\omega, f(\omega_0)) = r\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 5.6. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = \omega$$

şeklinde tanımlı olsun. f fonksiyonu genelleştirilmiş b – metrik koruyan bir fonksiyondur.

$$\omega_0 = 1 \text{ ve } r = 1$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} C^\theta(1,1) &= \{\omega \in X : d_\theta(\omega, f(1)) = 1\} \\ &= \{\omega \in X : d_\theta(\omega, 1) = 1\} \\ &= \{\omega \in X : (\omega-1)^4 = 1\} \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.7. (X, d_{θ_f}) genelleştirilmiş b -metrik uzayında $f(\omega_0)$ merkezli, r_f yarıçaplı $C^\theta(f(\omega_0), r_f)$ çemberi

$$C^\theta(f(\omega_0), r_f) = \{\omega \in X : d_{\theta_f}(\omega, f(\omega_0)) = r_f\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 5.8. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = 3\omega$$

şeklinde tanımlı olsun. f fonksiyonu genelleştirilmiş b -metrik koruyan bir fonksiyondur.

$$\omega_0 = 1 \text{ ve } r = 1$$

olsun. Bu durumda,

$$r_f = f(r) = f(1) = 3$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} C^\theta(1, 3) &= \{\omega \in X : d_{\theta_f}(\omega, 1) = 3\} \\ &= \{\omega \in X : f \circ d_\theta(\omega, 1) = 3\} \\ &= \{\omega \in X : 3d_\theta(\omega, 1) = 3\} \\ &= \{\omega \in X : d_\theta(\omega, 1) = 1\} \\ &= \{\omega \in X : (\omega - 1)^4 = 1\} \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.9. (X, d_{θ_f}) genelleştirilmiş b -metrik uzayında ω_0 merkezli, r_f yarıçaplı $C_f^\theta(\omega_0, r_f)$ çemberi

$$C_f^\theta(\omega_0, r_f) = \{\omega \in X : d_{\theta_f}(\omega, \omega_0) = r_f\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 5.10. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$f(\omega) = \frac{\omega}{2}$$

şeklinde tanımlı olsun. f fonksiyonu genelleştirilmiş b – metrik koruyan bir fonksiyondur.

$$\omega_0 = 2 \text{ ve } r = 2$$

olsun. Bu durumda,

$$r_f = f(r) = f(2) = 1$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} C_f^\theta(2,1) &= \{\omega \in X : d_{\theta_f}(\omega, 2) = 1\} \\ &= \{\omega \in X : f \circ d_\theta(\omega, 2) = 1\} \\ &= \left\{ \omega \in X : \frac{d_\theta(\omega, 2)}{2} = 1 \right\} \\ &= \{\omega \in X : (\omega - 2)^4 = 2\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 5.11. $Fix(f) = \{0 \in X : f(0) = 0\}$ olsun.

- $\omega_0 \in Fix(f)$ ise $C^\theta(\omega_0, r_f)$ ve $C^\theta(f(\omega_0), r_f)$ çemberleri çakışiktır.
- $\omega_0 \in Fix(f)$ ise $C^\theta(\omega_0, r)$ ve $C^\theta(f(\omega_0), r)$ çemberleri çakışiktır.
- $r = r_f$ ise $C^\theta(\omega_0, r)$ ve $C^\theta(\omega_0, r_f)$ çemberleri çakışiktır.
- $r = r_f$ ise $C_f^\theta(\omega_0, r)$ ve $C_f^\theta(\omega_0, r_f)$ çemberleri çakışiktır.
- Her $\omega \in [0, \infty)$ için $a > 0$ olacak şekilde bir,

$$f(\omega) = a\omega$$

metrik koruyan f fonksiyonu var ise $C^\theta(\omega_0, r)$ ve $C_f^\theta(\omega_0, r_f)$ çemberleri çakışiktır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde metrik fonksiyon kavramından yola çıkılarak, metrik koruyan fonksiyon, b -metrik koruyan fonksiyon ve genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon kavramları ve temel özellikleri incelenmiştir. Ek olarak gluing lemma ifadesi b -metrik koruyan fonksiyon ve genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon için de verilmiştir. Uygulama alanı olarak genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon yardımı ile farklı çember tanımı ve örnekleri yer almaktadır. Daha farklı genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde de metrik koruyan fonksiyon kavramı ve uygulamaları çalışılabilir. Ayrıca genelleştirilmiş b -metrik koruyan fonksiyon kavramı ile tanımlanan çemberlerin sabitliğinin araştırılması da bir başka çalışma konusu olarak düşünülebilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] I.A Bakhtin, “ The contraction mapping principle in almost metric spaces”, *Functional Analysis*, vol. 5, no.1, pp. 26-37,1989.
- [2] T. Kamran, M. Samreen and Q. U. Ain, “ A generalization of b – metric space and some fixed point theorems”, *Mathematics*, vol. 5, no.19, pp. 1-7, 2017.
- [3] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche, “A generalization of fixed point theorems in S -metric spaces”, *Matematicki Vesnik*, vol. 64, no. 3, pp 258-266, 2012.
- [4] J. Borsik and J. Dobos, “On metric preserving functions”, *Real Analysis Exchange*, vol. 13, pp. 285-293, (1987-88).
- [5] T. Khemaratchatakumthorn and P. Pongsriiam, “Remarks on b – metric and metric-preserving functions”, *Mathematica Slovaca*, vol. 68 no.5, pp. 1009-1016, 2018.
- [6] T. Khemaratchatakumthorn, P. Pongsriiam and S. Samphavat, “Further remarks on b – metrics, metric-preserving functions, and other related metrics”, *International Journal of Mathematics and Computer Science* vol. 14, no. 2, pp. 473-480, 2019.
- [7] T. Khemaratchatakumthorn and D. Siriwan, “Pasting lemmas for b – metric preserving and related functions”, *International Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 16, no. 4, pp. 1591-1598, 2021.
- [8] R. Martinez-Cruz and E. Hernandez-Pina, “Extended b – metric-preserving function and other related metrics”, *Publicacion Semestral Padi*, vol. 9, no. 18, pp.47-55, 2022.
- [9] J. R. Munkres, “Topology”, Prentice Hall, 2000.
- [10] N. Y. Özgür and N. Taş, “Some fixed-circle theorems on metric space”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 42, no. 4, pp. 1433-1449, 2019.
- [11] S. Willard, “General topology”, *Addison-Wesley Publishing Company*, 1970.
- [12] S. Lipschutz, “General topology”, *Schaum’s Outlines*, 1965.
- [13] V. Berinde, “Generalized contractions in quasi metric spaces”, *In Seminar on Fixed Point Theory*, pp. 3-9, 1993.
- [14] S. Czerwik, “Nonlinear set-valued contraction mappings in b – metric spaces”, *Atti del Seminario Matematico ve Fisico dell’Universita di Modena ve Reggio Emilia* vol. 46, pp. 263-276, 1998.
- [15] J. Heinonen, “Lectures on analysis on metric spaces”, *Springer* 2001.
- [16] H. Huang, Y. M. Singh, M. S. Khan and S. Radenovic, “Rational type contractions in extended b – metric spaces”, *Symmetry*, vol. 13, pp. 614, 2021.

- [17] A. Petrusel, I. A. Rus and M. A. Serban, “The role of equivalent metrics in fixed point theory”, *Topology Methods Nonlinear Analysis*, vol. 41, pp. 85-112, 2013.
- [18] P. Pongsriiam and I. Termwuttipong, “On metric-preserving functions and fixed point theorems”, *Fixed Point Theory Applications*, vol.179, pp. 1-14, 2014.
- [19] P. Corazza, “Introduction to metric-preserving functions”, *The American Mathematical Monthly*, vol.106, no.4, pp. 309-323, 1999.
- [20] J. Dobos, “Metric preserving functions”, Online Lecture Notes available at <http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2012/03/mpf1.pdf>
- [21] J. Borsik and J. Dobos, “Functions whose composition with every metric is a metric”, *Mathematica Slovaca*, vol.31, pp. 3-12, 1981.
- [22] N. Taş and A. Şen, “Some properties of extended b – metric-preserving functions and gluing lemma”, submitted.
- [23] M. Samreen, T. Kamran and M. Postolache, “Extended b – metric space, extended b -comparison function and nonlinear contractions”, *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, vol.80, no.4, pp. 21-28 2018.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ayşenur ŞEN
Doğum tarihi ve yeri : 24.03.2000, Zonguldak
e-posta : ayseenursenn@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2022
Lise	Zonguldak Erdemir Anadolu Lisesi	2018

Yayın Listesi

- [1] A. Şen and N. Taş, “A survey on metric-preserving and b -metric-preserving functions”, *International Conference on Recent Advances in Mathematics and its Applications in Interdisciplinary Areas*, 2023.
- [2] N. Taş and A. Şen, “S-metrik koruyan fonksiyonlar üzerine”, *1st International Conference on Frontiers in Academic Research*, pp. 299-302, 2023.
- [3] N. Taş and A. Şen, “Some properties of extended b -metric-preserving functions and gluing lemma”, submitted. [Tezden türetilmiştir]
- [4] N. Taş and A. Şen, “An introduction to the fixed-circle problem with metric-preserving functions”, submitted.