

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP ÜZERİNE**

**MERVE GÜMÜŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Recep ŞAHİN (Tez Danışmanı)  
Prof. Dr. Fırat ATEŞ  
Dr. Öğretim Üyesi Ahmet EMİN**

**BALIKESİR, HAZİRAN- 2025**

## **ETİK BEYAN**

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Geniştirilmiş Modüler Grup Üzerine**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Merve GÜMÜŞ**

# ÖZET

## GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP ÜZERİNE

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MERVE GÜMÜŞ**  
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR.RECEP ŞAHİN)**

**BALIKESİR, HAZİRAN – 2025**

Bu çalışmada genişletilmiş modüler grubun bazı normal altgrupları ele alınmıştır. Tez beş bölümden meydana gelmiştir.

Tezin ikinci bölümünde çalışmada kullanılacak tanımlar verilmiştir. Ayrıca gerekli olan teoremler ve yöntemler sunulmuştur.

Tezin üçüncü bölümünde, modüler grubun kuvvet, komütatör, kuvvetin komütatör ve temel denklik altgrupları incelenmiştir. Bu altgrupların modüler grupta indeksleri bulunmuş üreteçleri Reidemeister-Schreier yöntemi ile bulunmuştur. Ayrıca bu altgrupların simgeleri permütasyon yöntemi ile elde edilmiş, cinsleri Riemann-Hurwitz formülü ile elde edilmiştir.

Son olarak çalışılan altgruplar arasındaki var olan ilişkiler bulunmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde genişletilmiş modüler grubun komütatör ve kuvvet altgruplarının üreteçleri ve grup sunuşları verilmiştir. Ayrıca genişletilmiş modüler grubun temel denklik altgrupları hakkında bazı sonuçlar verilmiştir.

Tezin beşinci ve son bölümünde, bulunan sonuçlar özetlenmiş ve gelecek çalışmalara öneriler verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Genişletilmiş modüler grup, kuvvet alt grupları, komütatör altgrupları, modüler grup, temel denklik altgrupları

## ABSTRACT

**ON THE EXTENDED MODULAR GROUP**  
**MSC THESIS**  
**MERVE GÜMÜŞ**  
**BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**  
**MATHEMATICS**  
**(SUPERVISOR: PROF.DR.RECEP ŞAHİN )**  
**BALIKESİR, JUNE - 2025**

In this study, some normal subgroups of the extended modular group are considered. The thesis consists of five chapters.

In the second chapter of the thesis, the definitions to be used in the study are given. In addition, the necessary theorems and methods are presented..

In the third chapter of the thesis, the power, commutator, commutator of power, and principal congruence subgroups of the modular group are examined. The indices of these subgroups in the modular group were found, and their generators were found using the Reidemeister-Schreier method. In addition, the symbols of these subgroups were obtained by the permutation method, and their genera were obtained by the Riemann-Hurwitz formula. Finally, the existing relationships between the studied subgroups were found.

In the fourth chapter of the thesis, the generators and group presentations of the commutator and power subgroups of the extended modular group are given. In addition, some results are given about the principal congruence subgroups of the extended modular group.

In the fifth and last chapter of the thesis, the results are summarized and suggestions for future studies are given.

**KEYWORDS:** Commutator subgroups, extended modular group, modular group, , power subgroups, , principal congruence subgroups

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>v</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. ÖN BİLGİLER</b> .....	<b>3</b>
2.1 Doğrusal Dönüşümler .....	3
2.2 Modüler Grup .....	4
2.3 Genişletilmiş Modüler Grup .....	4
2.4 Kuvvet Alt Grupları .....	4
2.5 Komütatör Alt Grupları .....	5
2.6 Temel Denklik Alt Grupları.....	5
2.7 Riemann-Hurwitz Formülü.....	5
2.8 Permütasyon Yöntemi.....	6
2.9 Reidemeister-Schreier Yöntemi.....	6
<b>3. MODÜLER GRUBUN BAZI NORMAL ALTGRUPLARI</b> .....	<b>7</b>
3.1 Modüler Grubun Kuvvet Alt Grupları .....	7
3.2 Modüler Grubun Kuvvet Alt Gruplarının Komütatör Alt Gerupları .....	12
3.3 Modüler Grubun Temel Denklik Altgrupları.....	15
<b>4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUBUN BAZI NORMAL ALTGRUPLARI..</b>	<b>20</b>
4.1 Genişletilmiş Modüler Grubun Komütatör Alt Grupları .....	20
4.2 Genişletilmiş Modüler Grubun Kuvvet Alt Gerupları .....	24
4.3 Genişletilmiş Modüler Grubun Temel Denklik Altgrupları .....	25
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	<b>28</b>
<b>6. KAYNAKLAR (IEEE)</b> .....	<b>30</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>32</b>

## SEMBOL LİSTESİ

$\Gamma$	: Modüler grup
$\bar{\Gamma}$	: Genişletilmiş Modüler Grup
$H^t$	: H Grubunun t. Kuvvet Alt grubu
$H'$	: H Grubunun Komütatör Alt Grubu
$H(n)$	: H Grubunun n seviyeli Temel Denklik Alt Grubu
$GL(2, \mathbb{C})$	: Karmaşık Sayılar Üzerinde Genel Lineer Grup
$[G: H]$	: H alt grubunun G Grubundaki İndeksi
$C_n$	: Devirli Grup
$D_n$	: Dihedral Grup
$C \times D$	: Doğrudan Çarpım Grubu
$C * D$	: Serbest Çarpım Grubu
$\mathfrak{g}$	: Bir grubunun üzerinde hareket ettiği yüzeyin cinsi

## **ÖNSÖZ**

Yüksek lisans ve KPSS sürecimde bana destek olan, kendime inanmamı sağlayan, akademik bilgisiyle bana rehber olan ve bu çalışmamda emeği çok büyük olan sevgili hocam Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e,

Bölümümü bana sevdiren yüksek lisansa adım atmama vesile olan ve üniversite hayatım boyunca desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e,

Bugünlere gelmemde büyük emeği olan anneme, yokluğunda bile içimdeki güç olan canım babama ve sevgili kardeşime;

Yüksek lisans ve tez hazırlama süresince sonsuz sabrı ve anlayışı ile bana güç veren sevgili eşim ve meslektaşım Emre GÜMÜŞ'e sonsuz teşekkür ediyorum.

En kıymetlilerim Yiğit Ali, Beren ve Iğın GÜMÜŞ'e bana hayatımın her aşamasında umut ve neşe olduğunuz için sizlere minnettarım.

**Balıkesir, 2025**

**Merve GÜMÜŞ**

# 1. GİRİŞ

Bu bölümde, tezde var olan bölümler tanıtılmıştır.

Modüler grup; iki ve üç mertebeli

$$X(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad Y(z) = -\frac{1}{z+1}$$

kesirli lineer dönüşümleri tarafından üretilir. Bu grup  $\Gamma = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = I \rangle \cong C_2 * C_3$  sunuşuna ve  $(0; 2, 3, \infty)$  simgesine sahiptir [1].

Modüler grubun üreteçlerine  $R(z) = \frac{1}{z}$  elemanının eklenmesiyle oluşturulan gruba genişletilmiş modüler grup denir. Genişletilmiş modüler grup,  $\bar{\Gamma} = \langle X, Y, R | X^2 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I \rangle \cong D_2 *_{Z_2} D_3$  sunuşuna sahiptir [1].

m bir pozitif tamsayı olmak üzere,  $\Gamma^m$  ile gösterilen Modüler grubunun kuvvet altgrubu,  $\Gamma$  Modüler grubun bütün elemanlarının m. kuvvetlerinin alınmasıyla elde edilir.  $\Gamma^m$  kuvvet altgrupları tüm m pozitif tamsayıları için Newman tarafından çalışılmıştır [2].  $\bar{\Gamma}^m$  ile gösterilen genişletilmiş modüler grubun kuvvet alt grupları [3] nolu makalede çalışılmıştır.

Bir G grubu için  $a, b \in G$  olmak üzere  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  komütatörleriyle üretilen altgruba  $G'$  komütatör altgrubu denir. Modüler grubun  $\Gamma'$  komütatör altgrubu [2] nolu makalede, genişletilmiş modüler grubun  $\bar{\Gamma}'$  komütatör altgrubu [4] nolu makalede çalışılmıştır.

Ayrıca Modüler grubun  $\Gamma^m$  kuvvet altgruplarının  $(\Gamma^m)'$  komütatör altgrupları da Newman ve Smart tarafından [5] nolu makalede çalışılmıştır.

n=2,3 ve 4 olmak üzere  $\Gamma(n)$  ile gösterilen modüler grubun temel denklik altgrupları modüler grubun bağıntılarına  $(XY)^n = I$  bağıntısının eklenmesiyle oluşturulan bölüm grubu yardımıyla bulunur. Eğer  $n > 2$  ise genişletilmiş modüler grubun temel denklik altgrupları ile modüler grubun temel denklik altgrupları çakışır. Yani  $\bar{\Gamma}(n) = \Gamma(n)$  olur [4]. Temel denklik alt grupları bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (örneğin [1], [4], [5], [6] ve [7]).

İkinci bölümde, tezde kullanılan tanım, teorem ve yöntemler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, modüler grubun  $\Gamma^m$  kuvvet,  $\Gamma'$  komütatör,  $(\Gamma^m)'$  kuvvetin komütatör ve  $\Gamma(n)$  temel denklik altgruplarının üreteçleri, grup sunuşları, simgeleri ve cinsleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde genişletilmiş modüler grubun  $\bar{\Gamma}'$  komütatör ve  $\bar{\Gamma}^m$  kuvvet altgrupların üreteçleri ve grup sunuşları verilmiştir. Ayrıca  $\bar{\Gamma}(n)$  temel denklik altgrupları hakkında bazı sonuçlar verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde, tezde bulunan sonuçlar özetlenmiş ve öneriler oluşturulmuştur.

## 2. ÖN BİLGİLER

Tezin bu bölümünde, kullanılan tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca gerekli olan teorem ve yöntemler açıklanmıştır.

### 2.1 Doğrusal Dönüşümler

**Tanım 2.1.1:**  $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ ,  $ps - qr \neq 0$  koşulları altında bir kesirli doğrusal (Möbiüs) dönüşümü ;  $T(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$  biçiminde tanımlanır. Burada reel katsayılı kesirli doğrusal dönüşümler ile çalışacağımızdan bu dönüşümlerin

$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \frac{pz+q}{rz+s} \mid p, q, r, s \in \mathbb{R}, ps - qr = 1 \right\}$  alt grubu (projektif özel doğrusal grup) ile  $G' = \left\{ \frac{p\bar{z}+q}{r\bar{z}+s} \mid p, q, r, s \in \mathbb{R}, ps - qr = -1 \right\}$  biçimindeki kümenin

$G = PSL(2, \mathbb{R}) \cup G'$ , birleşim kümesi bileşke işlemi ile bir gruptur.  $PSL(2, \mathbb{R})$  grubuna üst yarı düzlemin otomorfizmleri grubu denir.  $G'$  kümesi ise, üst yarı düzlem için anti otomorfizmaların kümesidir [8].

**Tanım 2.1.2:**  $PSL(2, \mathbb{R})$  grubunda ayrık olan her bir alt gruba Fuchsian grup adı verilir.

Bir  $\Gamma$  Fuchsian grubu için üreteçler

(Hiperbolik)  $k_1, l, k_2, l_2, \dots, k_g, l_g$

(Eliptik)  $y_1, y_2, \dots, y_r$

(Parabolik)  $p_1, p_2, \dots, p_s$

(Hiperbolik sınır elemanları)  $h_1, h_2, \dots, h_u$

biçiminde ve bu üreteçler;

$$y_j^{m_j} = \prod_{i=1}^g [k_i, l_i] \prod_{j=1}^r y_j \prod_{k=1}^s p_k \prod_{l=1}^u h_l = 1$$

bağıntılarını gerçekleştiriyorsa,  $\Gamma$  Fuchsian grubu için simge,  $(g; m_1, m_2, \dots, m_r; s; u)$  olarak tanımlanır [9]

## 2.2 Modüler Grup

**2.2.1 Tanım :** Modüler grup  $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ ,  $ps - qr = 1$  olmak üzere üst-yarı düzlemin  $\frac{pz+q}{rz+s}$  şeklindeki kesirli doğrusal dönüşümlerin oluşturduğu bir gruptur ve  $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$

ile gösterilir. Yani  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \frac{pz+q}{rz+s} \mid p, q, r, s \in \mathbb{Z}, ps - qr = 1 \right\}$  şeklinde gösterilir.

Burada modüler grubun  $\frac{pz+q}{rz+s}$  şeklindeki bir elemanın matris gösterimi  $\mp \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$  biçiminde ve determinanı da 1 dir.

Modüler grup  $X(z) = -\frac{1}{z}$  ve  $Y(z) = -\frac{1}{z+1}$  kesirli lineer dönüşümleri tarafından

üretilir. Bu grubun sunuşu  $\Gamma = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = I \rangle \cong C_2 * C_3$  biçimindedir. Modüler grup  $(0; 2, 3, \infty)$  simgesine sahiptir [1].

## 2.3 Genişletilmiş Modüler Grup

Modüler grubun üreteç kümesine  $R(z) = \frac{1}{z}$  üretecinin eklenmesiyle oluşan gruba genişletilmiş modüler grup denir. Bu grup  $\bar{\Gamma} = \Pi$  ile gösterilir.

Genişletilmiş modüler grup  $\bar{\Gamma} = \langle X, Y, R \mid X^2 = Y^3 = R^2 = I, XR = RX, YR = RY^{q-1} \rangle$  sunuşuna sahiptir. Başka bir grup sunuşu da

$$\bar{\Gamma} = \langle X, Y, R \mid X^2 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I \rangle \cong D_2 *_{Z_2} D_3$$

biçimindedir.

Genişletilmiş modüler grubun indeksi 2 olan normal alt gruplarından biri modüler gruptur [10].

## 2.4 Kuvvet Alt Grupları

**2.4.1 Tanım:**  $t \in \mathbb{Z}^+$  ve  $H$  bir grup olsun.  $H$  grubunda bütün elemanların  $t$ . kuvveti alınarak oluşturulan gruba kuvvet alt grubu adı verilir. Kuvvet alt grubu  $H^t$  ile gösterilir. Yani

$H = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$  ise  $H^t = \langle x_1^t, x_2^t, \dots \rangle$  olur. Bu gruplar tamamen değişmez gruplardır.

Bu yüzden kuvvet alt grupları normal alt gruptur.

Kuvvet altgruplarının tanımından aşağıdaki özellikler kolayca görülür.  $t$  ve  $s$  pozitif tamsayılar olmak üzere kuvvet alt grupları için

$$H^{ts} < H^t \text{ ve } H^{ts} < (H^t)^s$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca  $t, s \in \mathbb{Z}^+$  için  $H^t.H^s = H^{e\text{bob}(t,s)}$  eşitliği vardır [11].

## 2.5 Komütatör Alt Grupları

**2.5.1 Tanım :**  $H$  bir grup ve  $a, b \in H$  olsun.  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  komütatörlerinin üretmiş olduğu alt gruba komütatör alt grubu denir. Bu alt grup  $H'$  ile gösterilir. Yani

$$H' = \langle [a, b] | a, b \in H \rangle$$

olur  $H'$  alt grubu,  $H$  grubunun normal bir alt grubudur.  $H/H'$  bölüm grubu,  $H$  grubunun normal alt gruplarına bölünerek elde edilen bölüm grupları arasında en geniş olandır [12].

## 2.6 Temel Denklik Alt Grupları

**2.6.1 Tanım :**  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $\Gamma$  modüler grubunun  $n$  seviyeli temel denklik

$$\text{altgrubu } \Gamma(n) = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \equiv \mp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{n}, p, q, r, s \in \mathbb{Z}, ps - qr = 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Temel denklik altgrupları normal altgruplardır [1].

## 2.7 Riemann – Hurwitz Formülü

**Tanım 2.7.1:**  $\Gamma$  Fuchsian grubu için bir simge  $(g; m_1, m_2, \dots, m_r; s; u)$  ve bu grubun temel bölgesi  $2\pi\mu(\Gamma)$  hiperbolik alanlı ise

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) + s + u$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikten  $\Gamma$  Fuchsian grubu için  $g$  cinsi hesaplanır.

Eğer  $\Gamma_\lambda$  alt grubu  $\Gamma$  grubunda sonlu indeksli ise

$$[\Gamma: \Gamma_\lambda] = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_\lambda)}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğe Riemann – Hurwitz Formülü denir.[13]

## 2.8 Permütasyon Yöntemi

Bu yöntem, bir Fuchsian gruptaki sonlu indeksli normal alt grupların simgelerinin bulmakta kullanılır.

**Teorem 2.8.1:**  $\Gamma$  Fuchsian grubu  $(g; m_1, m_2, \dots, m_k)$  simgeli ve  $\Gamma_1$  normal altgrubu  $\Gamma$  grubunda  $\mu$  indeksli olsun. Bu durumda, bölüm grubunda  $y_h$  ( $h = 1, 2, \dots, k$ ) üreteçlerinin mertebeleri  $d_h$  ise  $\Gamma_1$  alt grubu için simge;

$$\left( g'; \left( \frac{m_1}{d_1} \right)^{\mu/d_1}, \left( \frac{m_2}{d_2} \right)^{\mu/d_2}, \dots, \left( \frac{m_k}{d_k} \right)^{\mu/d_k} \right)$$

biçimindedir.. Ayrıca Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak  $g'$  cinsi bulunur [14].

## 2.9 Reidemeister-Schreier Yöntemi

Bu yöntemi, çalıştığımız gruplarda indeksi sonlu olan normal alt gruplarının üreteçlerini bulmak için uygulayacağız.

$H$ , üreteçleri  $\{a_i\}$  olan bir grup ve  $K$  alt grubu  $H$  grubunun indeksi sonlu olan bir alt grubu olsun. Yöntem,  $K$  alt grubu için bir  $\Sigma$  Schreier transversali seçerek başlar. Bu seçim tek değildir.  $\Sigma$  transversali şu şekilde seçilir :

(i)  $I \in \Sigma$

(ii)  $\Sigma$  sağdan sadeleştirmeye göre kapalı olmalıdır.

Sonra alttaki çarpımlar mümkün olan tüm durumlar için yapılır.

$(\Sigma$  dan bir eleman).( $H$  grubunun bir üreteci).(önceki çarpımın  $\Sigma$  daki temsilcisi)<sup>-1</sup>

Bu çarpım sonucunda elde edilen elemanlardan varsa birbirinin tersi olanlar veya birbirlerinden elde edilenler elenip  $H$  alt grubunun üreteçleri bulunur [13], [14].

### 3. MODÜLER GRUBUN BAZI NORMAL ALTGRUPLARI

#### 3.1 Modüler Grubun Kuvvet Altgrupları

Bu kısımda  $t \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $\Gamma^t$  kuvvet altgruplarını vereceğiz. Önce  $t = 2$  ve  $t = 3$  durumlarını inceleyelim. Bu kısımdaki sonuçlar [2] nolu çalışmadan yararlanarak bulunmuştur.

**3.1.1 Teorem :**  $\Gamma$  modüler grubunun  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubu indeksi iki olan bir normal alt gruptur. Bu alt grup üç mertebeli devirli iki grubun serbest çarpımına izomorf olur. Ayrıca  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubu  $Y$  ve  $XYX$  ile üretilir. Bu alt grubun simgesi  $(0; 3, 3, \infty)$  biçimindedir.

**İspat:**  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubunun üreteçlerini elde etmek için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Önce  $\Gamma$  modüler grubun bağıntılarına tüm elemanların 2. kuvvetlerinin birim elemana eşit olduğu bağıntıları ekleyelim.

Böylece bölüm grubu;  $\Gamma/\Gamma_2 = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = I, X^2 = Y^2 = \dots = I \rangle$

olarak bulunur. Burada  $Y^3 = Y^2 = I$  olduğundan  $Y = I$  olur. Böylece bölüm grubunun  $\Gamma/\Gamma_2 = \langle X | X^2 = I \rangle \cong C_2$  olduğu görülür.

Reidemeister-Schreier metodunu uygulamak için bir transversal olarak  $\Sigma = \{I, X\}$  kümesi seçilirse olası tüm işlemler;

$$I.X.(X)^{-1} = I,$$

$$X.X.(I)^{-1} = I,$$

$$I.Y.(I)^{-1} = Y,$$

$$X.Y.(X)^{-1} = XYX$$

biçimindedir. Böylece  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubu için üreteçler  $Y$  ve  $XYX$  şeklinde bulunur. Üstelik  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubunun sunuşu  $\Gamma^2 = \langle Y, XYX | Y^3 = (XYX)^3 = I \rangle \cong C_3 * C_3$  biçimindedir.

Ayrıca  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubunun simgesini bulmak için permütasyon metodu uygulanırsa simgesi  $(g; 3, 3, \infty)$  şeklinde bulunur. Riemann-Hurwitz formülü  $g$  cinsini bulmak için kullanılırsa;

$$2 = \frac{2g - 2 + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.1)$$

eşitliğinden  $g = 0$  bulunur. Böylece  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubunun simgesi  $(0;3,3,\infty)$  biçimindedir.[2]

**3.1.2 Teorem :**  $\Gamma$  modüler grubunun  $\Gamma^3$  alt grubu indeksi üç olan normal bir alt gruptur. Bu grup mertebesi iki olan devirli üç grubun serbest çarpımına izomorf olur. Ayrıca üreteçleri  $X, YXY^2, Y^2XY$  ve simgesi  $(0; 2, 2, 2, \infty)$  biçimindedir.

**İspat:** Önce  $\Gamma/\Gamma_3$  bölüm grubunu bulalım. Bunun için  $\Gamma$  Modüler grubunun var olan bağıntılarına tüm elemanların 3. kuvvetlerinin birim elemana eşit olduğu bağıntıları ekleyelim. Böylece bölüm grubu;  $\Gamma/\Gamma_3 = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = I, X^3 = Y^3 = \dots = I \rangle$  olur. Burada  $X^2 = X^3 = I$  olduğundan  $X = I$  bulunur. Böylece bölüm grubunun sunuşunun  $\Gamma/\Gamma_3 = \langle Y | Y^3 = I \rangle \cong C_3$  olduğu görülür.

Şimdi Reidemeister-Schreier metodunu uygulamak için bir transversal olarak  $\Sigma = \{I, Y, Y^2\}$  kümesi seçilirse olası tüm işlemler;

$$\begin{aligned} I \cdot X \cdot (I)^{-1} &= X, \\ Y \cdot X \cdot (Y)^{-1} &= Y X Y^2, \\ Y^2 \cdot X \cdot (Y^2)^{-1} &= Y^2 X Y, \\ I \cdot Y \cdot (Y)^{-1} &= I, \\ Y \cdot Y \cdot (Y^2)^{-1} &= I, \\ Y^2 \cdot Y \cdot (I)^{-1} &= I, \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubu için üreteçler  $X, YXY^2, Y^2XY$  olarak bulunur. Burada  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubunun grup sunusu;

$$\Gamma^3 = \langle X, YXY^2, Y^2XY | X^2 = (XYX^2)^2 = (Y^2XY)^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2$$

biçimindedir. Ayrıca  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubunun simgesini bulmak için permütasyon metodu uygulanırsa  $(g; 2, 2, 2, \infty)$  şeklinde bulunur. Riemann-Hurwitz formülü  $g$  cinsini bulmak için kullanılırsa;

$$3 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 + 1 - \frac{1}{\infty}}{2 \cdot 0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.2)$$

eşitliğinden  $g = 0$  olarak bulunur. Böylece  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubunun simgesi  $(0; 2, 2, 2, \infty)$  biçimindedir [2].

Şimdi her  $t \in \mathbb{Z}^+$  için  $\Gamma^t$  kuvvet alt gruplarını belirlemeye çalışalım.

### 3.1.3 Teorem

- i)  $(t, 2) = 1$  ve  $(t, 3) = 1$  ise  $\Gamma^t = \Gamma$  olur.
- ii)  $(t, 2) = 2$  ve  $(t, 3) = 1$  ise  $\Gamma^t = \Gamma^2$  olur.
- iii)  $(t, 2) = 1$  ve  $(t, 3) = 3$  ise  $\Gamma^t = \Gamma^3$  olur.

**İspat:**  $\Gamma/\Gamma^t$  bölüm grubunu oluştururken bütün elemanların  $t$ . kuvvetlerinin birim elemana eşit olduğu bağıntılar grubun var olan bağıntılarına eklenir. Böylece bölüm grubu;

$$\Gamma/\Gamma^t = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = I, X^t = Y^t = \dots = I \rangle$$

olarak bulunur. Şimdi  $t$  nin 2 ve 3 ile durumlarını inceleyim.

- i)  $(t, 2) = 1$  ve  $(t, 3) = 1$  ise  $X^2 = X^t = I$  ve  $Y^3 = Y^t = I$  bağıntılarından

$X = I$  ve  $Y = I$  bulunur. Böylece  $\Gamma/\Gamma^t = \{I\}$  ve  $\Gamma^t = \Gamma$  olur.

- ii)  $(t, 2) = 2$  ve  $(t, 3) = 1$  ise  $X^2 = X^t = I$  ve  $Y^3 = Y^t = I$  bağıntılarından

$X^2 = I$  ve  $Y = I$  bulunur. Böylece  $\Gamma/\Gamma^t = \langle X | X^2 = I \rangle$  ve  $\Gamma^t = \Gamma^2$  olur.

- iii)  $(t, 2) = 1$  ve  $(t, 3) = 3$  ise  $X^2 = X^t = I$  ve  $Y^3 = Y^t = I$  bağıntılarından  $X = I$

ve  $Y^3 = I$  bulunur. Böylece  $\Gamma/\Gamma^t = \langle Y | Y^3 = I \rangle$  ve  $\Gamma^t = \Gamma^3$  olur [2].

**3.1.4 Uyarı :**  $(t, 2) = 2$  ve  $(t, 3) = 3$  olursa  $\Gamma^t$  kuvvet alt gruplarının grup yapısı hakkında fazla bir şey söyleyemeyiz. Sadece  $t = 6k; 1 \leq k \leq 71$  için  $\Gamma^t$  kuvvet alt gruplarının indekslerinin sonlu olduğu bilinmektedir. Burada  $\Gamma'$  komutatör alt grubu kullanarak  $\Gamma^{6k}$  kuvvet alt grupları hakkında bir şeyler söylemek mümkündür. Bunun için modüler grubun  $\Gamma'$  komutatör alt grubuna ihtiyaç duyarız [2].

**3.1.5 Teorem :**  $\Gamma$  grubunun  $\Gamma'$  alt grubu 6 indeksli ve 2 ranklı bir serbest gruptur.  $\Gamma'$  komutatör alt grubunun üreteçleri  $\mathbf{XYXY}^2$  ile  $\mathbf{XY}^2\mathbf{XY}$  ve simgesi  $(\mathbf{1}; \infty)$  dur.

**İspat:** Önce  $\Gamma$  modüler grubun var olan bağıntılarına üreteçlerin değişmelilik koşulunu ekleyelim. Böylece bölüm grubu;  $\Gamma/\Gamma' = \langle X, Y | X^2 = Y^3 = I, XY = YX \rangle \cong C_2 \times C_3$  olarak bulunur. Burada  $\Gamma/\Gamma' \cong C_2 \times C_3$  olduğundan indeksi 6 olur. Şimdi Reidemeister-Schreier metodunu kullanmak için bir transversel olarak  $\Sigma = \{I, X, Y, Y^2, XY, XY^2\}$  kümesi seçilirse olası tüm işlemler;

$$\begin{aligned}
I \cdot X \cdot (X)^{-1} &= I, \\
X \cdot X \cdot (I)^{-1} &= I, \\
Y \cdot X \cdot (XY)^{-1} &= YXY^2X, \\
Y^2 \cdot X \cdot (XY^2)^{-1} &= Y^2XYX, \\
XY \cdot X \cdot (Y)^{-1} &= XYXY^2, \\
XY^2 \cdot X \cdot (Y^2)^{-1} &= XY^2XY, \\
I \cdot Y \cdot (Y)^{-1} &= I, \\
X \cdot Y \cdot (XY)^{-1} &= I, \\
Y \cdot Y \cdot (Y^2)^{-1} &= I, \\
Y^2 \cdot Y \cdot (I)^{-1} &= I, \\
XY \cdot Y \cdot (XY^2)^{-1} &= I, \\
XY^2 \cdot Y \cdot (X)^{-1} &= I,
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada  $(XYXY^2)^{-1} = XYXY^2$  ve  $(Y^2XYX)^{-1} = XY^2XY$  olduğundan,  $\Gamma'$  kamutator alt grubunun üreteçleri  $XY^2XY$  ve  $XYXY^2$  olarak bulunur. Böylece  $\Gamma'$  kamutator alt grubu  $\Gamma' = \langle XY^2XY, XYXY^2 | - \rangle$  grup gösterimine sahiptir.

Şimdi  $\Gamma'$  komutator alt grubun simgesini ve cinsini belirleyelim. Önce Permutasyon metodunu uygulanırsa simge  $(g; \infty)$  ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılırsa  $g$  cinsi,

$$6 = \frac{2g - 2 + 1 - \frac{1}{\infty}}{2 \cdot 0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.3)$$

eşitliğinden  $g=1$  olarak bulunur. Böylece simge  $(1; \infty)$  olarak bulunur [2].

**3.1.6 Teorem :**  $\Gamma$  modüler grubunun  $\Gamma'$  komütatör altgrubu  $\Gamma^2$  kuvvet altgrubu ile  $\Gamma^3$  kuvvet altgrubunun kesişimine eşittir. Yani  $\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3$  olur.

**İspat:**  $\Gamma/\Gamma^2 \cong C_2$  ve  $\Gamma/\Gamma^3 \cong C_3$  bölüm grupları devirli olduğundan değişmelidirler.  $\Gamma/\Gamma'$  bölüm grubunun değişmeli olan en büyük bölüm grubu olduğunu biliyoruz. Böylece

$\Gamma/\Gamma^2 \subset \Gamma/\Gamma'$  ve  $\Gamma/\Gamma^3 \subset \Gamma/\Gamma'$  kapsamaları bulunur. Buradan  $\Gamma' \subset \Gamma^2$  ve  $\Gamma' \subset \Gamma^3$  bulunur. Bulunan bu kapsamaları taraf tarafa kesiştirirsek  $\Gamma' \subset \Gamma^2 \cap \Gamma^3$  kapsaması elde edilir.

Diğer taraftan  $\Gamma^2$  ve  $\Gamma^3$ ,  $\Gamma$  modüler grubunun normal alt grubu oldukları için bu altgruplara 2. izomorfizma teoremi uygulanırsa;

$\Gamma^2/(\Gamma^2 \cap \Gamma^3) \cong (\Gamma^2 \cdot \Gamma^3)/\Gamma^3$  olarak bulunur. Kuvvet altgruplarının özelliklerinden  $\Gamma^2 \cdot \Gamma^3 =$

$\Gamma$  olduğundan  $\Gamma^2/(\Gamma^2 \cap \Gamma^3) \cong \Gamma/\Gamma^3 \cong C_3$  bulunur. Ayrıca indeksin özelliklerinden

$$[\Gamma: \Gamma^2 \cap \Gamma^3] = [\Gamma: \Gamma^2] \cdot [\Gamma^2: \Gamma^2 \cap \Gamma^3] = 2 \cdot 3 = 6$$

bulunur. Burada  $\Gamma' \subset \Gamma^2 \cap \Gamma^3 \subset \Gamma$  kapsaması,  $[\Gamma: \Gamma^2 \cap \Gamma^3] = 6$  ve  $[\Gamma: \Gamma'] = 6$  eşitliklerinden  $\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3$  eşitliği elde edilir [2].

**3.1.7 Sonuç :**  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $\Gamma^{6k}$  kuvvet alt grupları serbest gruplardır.

**İspat :** Kuvvet altgruplarının özelliklerinden  $\Gamma^6 \subset \Gamma^2$  ve  $\Gamma^6 \subset \Gamma^3$  kapsamaları vardır.

Bu kapsamalar taraf tarafa kesiştirilirse  $\Gamma^6 \subset \Gamma^2 \cap \Gamma^3 = \Gamma'$  bulunur. Ayrıca  $\Gamma^{6k} \subset \Gamma^6 \subset \Gamma'$  ve serbest grupların altgrupları serbest olduğundan  $\Gamma^{6k}$  kuvvet alt grupları serbest bulunur [2].

## 3.2 Modüler Grubun Kuvvet Altgruplarının Komutatör Altgrupları

Bu kısımda modüler grubun  $\Gamma^2$  ve  $\Gamma^3$  kuvvet altgruplarının  $(\Gamma^2)'$  ve  $(\Gamma^3)'$  komutatör alt gruplarını çalışacağız. Buradaki sonuçlar [5] nolu çalışmadan yararlanarak elde edilmiştir.

**3.2.1 Teorem :**  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubunun  $(\Gamma^2)'$  komutatör alt grubunun indeksi 9, üreteçleri  $[a, b], [a, b^2], [a^2, b], [a^2, b^2]$  elemanlarıdır. Simgesi ise  $(\mathbf{1}; \infty^{(3)})$  şeklindedir.

**İspat :** Önce işlem kolaylığı için  $\Gamma^2$  kuvvet altgrubunun üreteçlerine  $a = Y$ ,  $b = XYX$  diyelim. Şimdi  $\Gamma^2/(\Gamma^2)'$  bölüm grubunu bulalım.  $\Gamma^2$  grubunun bağıntılarına değişmelilik koşulunu ekleyelim. Bu durumda bölüm grubu:

$\Gamma^2 / (\Gamma^2)' = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = I, ab = ba \rangle \cong C_3 \times C_3$  olur. Yani  $[\Gamma^2 : (\Gamma^2)'] = 9$  bulunur.

Reidemeister-Schreier yöntemini  $(\Gamma^2)'$  grubu için üreteçleri bulmakta kullanalım. Bunun için transversal olarak  $\Sigma = \{I, a, a^2, b, b^2, ab, ab^2, a^2b, a^2b^2\}$  kümesi seçilirse olası tüm çarpımlar;

$$I. a. (a)^{-1} = I,$$

$$a. a. (a^2)^{-1} = I,$$

$$a^2. a. (I)^{-1} = I,$$

$$b. a. (ab)^{-1} = bab^2a^2,$$

$$b^2. a. (ab^2)^{-1} = b^2aba^2,$$

$$ab. a. (a^2b)^{-1} = abab^2a,$$

$$ab^2. a. (a^2b^2)^{-1} = ab^2aba,$$

$$a^2b. a. (b)^{-1} = a^2bab^2,$$

$$a^2b^2. a. (b^2)^{-1} = a^2b^2ab,$$

$$I. b. (b)^{-1} = I,$$

$$a. b. (ab)^{-1} = I,$$

$$a^2. b. (a^2b)^{-1} = I,$$

$$b. b. (b^2)^{-1} = I,$$

$$b^2. b. (I)^{-1} = I,$$

$$ab. b. (ab^2)^{-1} = I,$$

$$ab^2. b. (a)^{-1} = I,$$

$$a^2b. b. (a^2b^2)^{-1} = I,$$

$$a^2b^2. b. (a^2)^{-1} = I,$$

biçimindedir. Burada  $aba^2b^2 = [a, b]$ ,  $ab^2a^2b = [a, b^2]$ ,  $a^2bab^2 = [a^2, b]$ ,

$a^2b^2ab = [a^2, b^2]$ ,  $abab^2a = [a, b]. [a^2, b]^{-1}$ ,  $ab^2aba = [a, b^2]. [a^2, b^2]^{-1}$

olduğundan  $(\Gamma^2)'$  altgrubunun üreteçleri  $[a, b], [a, b^2], [a^2, b], [a^2, b^2]$  şeklinde bulunur.

Ayrıca Permütasyon yöntemi  $(\Gamma^2)'$  alt grubu için simgeyi bulmakta uygulanırsa, simge  $(g; \infty^{(3)})$  olarak bulunur. Burada  $g$  cinsi Riemann–Hurwitz formülü kullanılarak,

$$9 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 3}{2 \cdot 0 - 2 + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.4)$$

eşitliğinden  $g = 1$  olur. Buradan  $(\Gamma^2)'$  grubu için simge:  $(1; \infty^{(3)})$  şeklinde bulunur [1] ve [5].

**3.2.2 Teorem :**  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubunun  $(\Gamma^3)'$  komutatör alt grubu **8** indeksli ve **5** üreteçli bir serbest alt gruptur. Ayrıca simgesi  $(\mathbf{1}; \infty^{(4)})$  biçimindedir.

**İspat :** Önce  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubunun değiştirelim. Böylece aşağıdaki grup sunuşuna sahip oluruz: üreteçlerini  $\mathbf{a} = \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{YXY}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{Y^2XY}$  olarak  $\Gamma^3 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{I} \rangle$

şimdi  $\Gamma^3 / (\Gamma^3)'$  bölüm grubunu oluşturmak için  $\Gamma^3$  kuvvet alt grubunun bağıntılına değişmelilik koşulunu ekleyelim. Böylece bölüm grubu:

$$\Gamma^3 / (\Gamma^3)' = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{I}, \mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \mathbf{ac} = \mathbf{ca}, \mathbf{bc} = \mathbf{cb} \rangle$$

şeklinde olur. Burada

$$(\Gamma^3)/(\Gamma^3)' \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

olduğundan indeks  $[\Gamma^3 : (\Gamma^3)'] = 8$  olarak bulunur.

şimdi Reidemeister-Schreier yöntemini uygulamak için bir transversal olarak

$\Sigma = \{ \mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{ab}, \mathbf{ac}, \mathbf{bc}, \mathbf{abc} \}$  kümesini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar;

$$\mathbf{I.a.} (\mathbf{a})^{-1} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{a.a.} (\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{b.a.} (\mathbf{ab})^{-1} = \mathbf{baba},$$

$$\mathbf{c.a.} (\mathbf{ac})^{-1} = \mathbf{caca},$$

$$\mathbf{ab.a.} (\mathbf{b})^{-1} = \mathbf{abab},$$

$$\mathbf{ac.a.} (\mathbf{c})^{-1} = \mathbf{acac},$$

$$\mathbf{bc.a.} (\mathbf{abc})^{-1} = \mathbf{bcacba} \quad ,$$

$$\mathbf{abc.a.} (\mathbf{bc})^{-1} = \mathbf{abcacb},$$

$$\mathbf{I.b.} (\mathbf{b})^{-1} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{a.b.} (\mathbf{ab})^{-1} = \mathbf{I},$$

$$\begin{aligned}
b.b.(I)^{-1} &= I, \\
c.b.(bc)^{-1} &= cbc, \\
ab.b.(a)^{-1} &= I, \\
ac.b.(abc)^{-1} &= acbca, \\
bc.b.(c)^{-1} &= cbc, \\
abc.b.(ac)^{-1} &= abcba, \\
I.c.(c)^{-1} &= I, \\
a.c.(ac)^{-1} &= I, \\
b.c.(bc)^{-1} &= I, \\
c.c.(I)^{-1} &= I, \\
ab.c.(abc)^{-1} &= I, \\
ac.c.(a)^{-1} &= I, \\
bc.c.(b)^{-1} &= I, \\
abc.c.(ab)^{-1} &= I,
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada gerekli hesaplamalar yapılırsa üreteçler;  $[a, b]$ ,  $[a, c]$ ,  $[b, c]$ ,  $[a, bc]$ ,  $[ab, c]$  olarak bulunur.

Ayrıca permütasyon metodunu kullanırsak  $(\Gamma^3)'$  alt grubunun simgesi  $(g; \infty^{(4)})$  ve Riemann–Hurwitz formülünden cinsi

$$8 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 4}{2 \cdot 0 - 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.5)$$

eşitliğinden  $g = 1$  olarak bulunur. Böylece  $(\Gamma^3)'$  alt grubunun simgesi  $(1; \infty^{(4)})$  biçimindedir [5].

### 3.2.3 Sonuç :

- i)  $[\Gamma' : (\Gamma^2)'] = 3$
- ii)  $[\Gamma' : (\Gamma^3)'] = 4$  [5].

**3.2.4 Teorem :**  $\Gamma$  grubunun  $\Gamma'$  altgrubu,  $(\Gamma^2)'$  ile  $(\Gamma^3)'$  altgruplarının çarpımına eşittir.

Yani  $\Gamma' = (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'$  eşitliği vardır.

**İspat :**  $(\Gamma^2)' \trianglelefteq \Gamma^2$ ,  $(\Gamma^3)' \trianglelefteq \Gamma^3$  ve  $\Gamma' \subset \Gamma^2$ ,  $\Gamma' \subset \Gamma^3$  olduğundan  $(\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'$  çarpımı iyi tanımlıdır. Burada

$$(\Gamma^2)' \subset (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)' \subset \Gamma' \quad \text{ve} \quad (\Gamma^3)' \subset (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)' \subset \Gamma'$$

zincirleri gözönüne alındığında, ilk kapsamalardan  $[\Gamma' : (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'] \mid 3$  ve ikinci kapsamalardan  $[\Gamma' : (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'] \mid 4$  olduğu görülür. Böylece  $[\Gamma' : (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'] = 1$  ve  $\Gamma' = (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'$  olarak bulunur [5].

### 3.3 Modüler Grubun Temel Denklik Altgrupları

Bu kısımda, öncelikle modüler grubun  $n=2, 3$  ve  $4$  için  $\Gamma(n)$  temel denklik altgruplarını çalışacağız. Bu altgrupları bulmak için modüler grubun bağıntılarına  $(XY)^n = I$  bağıntısını ekleyip bölüm grubunu oluşturacağız. Sonra  $\Gamma(2)$  grubunun  $\Gamma^2(2)$  kuvvet alt grubunun  $\Gamma(4)$  temel denklik alt grubuna eşit olduğunu göstereceğiz. Ayrıca,  $n \geq 5$  tamsayıları için  $\Gamma(n)$  temel denklik altgruplarının indeks formülünü vereceğiz. Son olarak,  $(\Gamma^2)'$  ve  $(\Gamma^3)'$  alt gruplarının kesişimlerinin  $\Gamma(6)$  temel denklik alt grubuna eşit olduğunu göstereceğiz.

**3.3.1 Teorem :**  $\Gamma(2)$  temel denklik alt grubu,  $\Gamma$  modüler grubunun **6** indeksli ve **2** ranklı bir serbest alt grubudur ve simgesi  $(\mathbf{0}; \infty^{(3)})$  biçimindedir.

**İspat :** Önce  $\Gamma / \Gamma(2)$  bölüm grubunu oluşturmak için  $\Gamma$  modüler grubunun bağıntılarına  $(XY)^2 = I$  bağıntısını ekleyelim. Böylece bölüm grubu,

$$\Gamma / \Gamma(2) = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^2 = I \rangle \cong D_2$$

gösterimine sahip olur. Buradan indeks  $[\Gamma : \Gamma(2)] = 6$  olarak bulunur. Şimdi  $\Gamma(2)$  temel denklik alt grubunun üreteçleri, Reidemeister-Schreier yöntemi kullanılarak bulunabilir. Bunun için  $\Sigma = \{I, X, Y, Y^2, XY, XY^2\}$  transversali seçilirse olası tüm işlemler;

$$I.X.(X)^{-1} = I,$$

$$X.X.(X)^{-1} = I,$$

$$Y.X.(XY)^{-1} = YXYX,$$

$$Y^2.X.(XY)^{-1} = Y^2XY^2X,$$

$$XY.X.(Y^2)^{-1} = XYXY,$$

$$XY^2.X.(Y)^{-1} = XY^2XY^2,$$

$$I.Y.(Y)^{-1} = I,$$

$$\begin{aligned}
X.Y.(XY)^{-1} &= I, \\
Y.Y.(Y^2)^{-1} &= I, \\
Y^2.Y.(I)^{-1} &= I, \\
XY.Y.(XY^2)^{-1} &= I, \\
XY^2.Y.(X)^{-1} &= I,
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada  $(YXYX)^{-1} = XY^2XY^2$ ,  $(Y^2XY^2X)^{-1} = XYXY$  olduğundan  $\Gamma(2)$  altgrubunun üreteçleri  $XYXY$ ,  $XY^2XY^2$  olarak bulunur.

Permütasyon metodu kullanılarak  $\Gamma(2)$  altgrubunun simgesi  $(g; \infty^{(3)})$  olarak bulunur. Ayrıca  $g$  cinsi Riemann–Hurwitz Formülü kullanılarak

$$6 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 3}{2 \cdot 0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.6)$$

eşitliğinden  $g = 0$  olur. Böylece  $\Gamma(2)$  altgrubunun simgesi  $(0; \infty^{(3)})$  olarak bulunur [1].

**3.3.2 Teorem :**  $\Gamma(3)$  temel denklik alt grubu,  $\Gamma$  modüler grubunun **12** indeksli ve **3** ranklı bir serbest alt grubudur. Ayrıca simgesi  $(0; \infty^{(4)})$  biçimindedir.

**İspat :** Önce  $\Gamma / \Gamma(3)$  bölüm grubunu oluşturmak için  $\Gamma$  grubunun bağıntılarına  $(XY)^3 = I$  bağıntısını ekleyelim. Böylece bölüm grubu:

$$\Gamma / \Gamma(3) = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^3 = I \rangle \cong A_4$$

şeklinde bulunur. Burada indeks  $[\Gamma : \Gamma(3)] = 12$  olur.

Şimdi  $\Gamma(3)$  altgrubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister-Schreier metodunu uygulayalım. Bunun için transversali aşağıdaki gibi seçelim.

$$\Sigma = \{I, X, Y, Y^2, XY, XY^2, X^2Y, X^2Y^2, X^2Y^3, XYXY, XYXY^2, XY^2XY, XY^2XY^2\}$$

Burada olası tüm işlemler;

$$\begin{aligned}
I.X.(X)^{-1} &= I, \\
X.X.(I)^{-1} &= I, \\
Y.X.(XY^2X Y^2)^{-1} &= YXYXYX, \\
Y^2.X.(XYXY)^{-1} &= Y^2XY^2XY^2X, \\
XY.X.(XYX)^{-1} &= I,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
XY^2.X.(XY^2X)^{-1} &= I, \\
XYX.X.(XY)^{-1} &= I, \\
XY^2X.X.(XY^2)^{-1} &= I, \\
XYXY.X.(Y^2)^{-1} &= XYXYXY, \\
XYXY^2.X.(XY^2XY)^{-1} &= XYXY^2XY^2XYX, \\
XY^2XY.X.(XYXY^2)^{-1} &= XY^2XYXYXY^2X, \\
XY^2XY^2.X.(Y)^{-1} &= XY^2XY^2XY^2, \\
I.Y.(Y)^{-1} &= I, \\
X.Y.(XY)^{-1} &= I, \\
Y.Y.(Y^2)^{-1} &= I, \\
Y^2.Y.(I)^{-1} &= I, \\
XY.Y.(XY^2)^{-1} &= I, \\
XY^2.Y.(X)^{-1} &= I, \\
XYX.Y.(XYXY)^{-1} &= I, \\
XY^2X.Y.(XY^2XY)^{-1} &= I, \\
XYXY.Y.(XYXY^2)^{-1} &= I, \\
XYXY^2.Y.(XYX)^{-1} &= I, \\
XY^2XY.Y.(XY^2X)^{-1} &= I, \\
XY^2XY^2.Y.(XY^2X)^{-1} &= I,
\end{aligned}$$

biçimindedir. Üreteçler:  $XYXYXY, XY^2XY^2XY^2, XYXY^2XY^2XYX$  şeklinde elde edilir.

Ayrıca permütasyon metodunu uygularsak simgesi  $(g; \infty^{(4)})$  olarak bulunur. Burada  $g$  cinsi Riemann–Hurwitz Formülü kullanılarak

$$12 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 4}{2 \cdot 0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.7)$$

eşitliğinden  $g = 0$  olur. Böylece  $\Gamma(3)$  alt grubunun simgesi  $(0; \infty^{(4)})$  olarak bulunur[1]

**3.3.3 Teorem :**  $\Gamma(4)$  temel denklik alt grubu,  $\Gamma$  modüler grubunun **24** indeksli ve **5** ranklı bir serbest alt grubudur. Ayrıca simgesi  $(0; \infty^{(6)})$  biçimindedir.

**İspat :** Önce  $\Gamma/\Gamma(4)$  bölüm grubunu oluşturmak için  $\Gamma$  grubunun bağıntılarına  $(XY)^4 = I$  bağıntısını ekleyelim. Böylece bölüm grubunun sunuşu

$$\Gamma / \Gamma(4) = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^4 = I \rangle \cong S_4$$

olur. Böylece  $[\Gamma : \Gamma(4)] = 24$  olarak bulunur.

Şimdi  $\Gamma(4)$  altgrubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister-Schreier metodunu uygulayalım. Bunun için transversali aşağıdaki gibi seçelim.

$$\Sigma = \{ I, X, Y, Y^2, XY, XY^2, XYX, XY^2X, XYXY, XYXY^2, XY^2XY, XY^2XY^2, XYXYX, XYXY^2X, XY^2XYX, XY^2XY^2X, XYXYXY, XYXYXY^2, XYXY^2XY, XYXY^2XY^2, XY^2XYXY, XY^2XYXY^2, XY^2XY^2XY, XY^2XY^2XY^2 \}.$$

Burada mümkün olan tüm çarpımlar yapıp, gerekli hesaplamalar ve kısaltmalar yapıldıktan sonra üreteçler  $XYXYXYXY$ ,  $XY^2XY^2XY^2XY^2$ ,  $XY^2XYXY^2XY^2XYXY^2$ ,  $YXY^2XY^2XY^2XY$  ve  $XY^2XYXYXYXY^2X$  olarak bulunur.

Ayrıca permütasyon metodunu uygulanırsa simgesi  $(g; \infty^{(6)})$  olarak bulunur. Burada  $g$  cinsi Riemann–Hurwitz Formülü kullanılarak

$$24 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 6}{2 \cdot 0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{\infty}} \quad (3.8)$$

eşitliğinden  $g = 0$  olur. Böylece  $\Gamma(4)$  altgrubunun simgesi  $(0; \infty^{(6)})$  olarak bulunur[1]

$\Gamma(2)$  temel denklik alt grubu ile  $\Gamma(4)$  temel denklik alt grubu arasında bir ilişki vardır.

Şimdi bu ilişkiyi verelim.

**3.3.4 Teorem :**  $\Gamma(2)$  temel denklik alt grubunun  $\Gamma^2(2)$  kuvvet altgrubu 4 indeksli ve 5 ranklı bir serbest gruptur. Ayrıca simgesi  $(0; \infty^{(6)})$  şeklindedir.

**İspat :** Önce işlem kolaylığı için  $\Gamma(2)$  temel denklik alt grubunun üreteçlerine  $a = XYXY$  ve  $b = XY^2XY^2$  diyelim. Şimdi  $\Gamma(2)/\Gamma^2(2)$  bölüm grubunu bulalım.  $\Gamma^2$  grubunun bağıntılarına bütün elemanların karelerinin birime eşit olma koşulunu ekleyelim.

Bu durumda bölüm grubu:

$$\Gamma(2)/\Gamma^2(2) = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = I \rangle \cong D_2$$

olur. Yani  $[\Gamma(2):\Gamma^2(2)] = 4$  bulunur.

Şimdi  $\Gamma^2(2)$  grubunda üreteçleri bulmakta Reidemeister-Schreier metodunu kullanılabilir. Bunun için transversal olarak aşağıdaki küme seçilir:  $\Sigma = \{ I, a, b, ab \}$  Burada olası bütün işlemler;

$$I. a. (a)^{-1} = I,$$

$$a. a. (I)^{-1} = a^2,$$

$$b. a. (ab)^{-1} = bab^{-1}a^{-1},$$

$$ab. a. (b)^{-1} = abab^{-1},$$

$$I. b. (b)^{-1} = I,$$

$$a. b. (ab)^{-1} = I,$$

$$b. b. (I)^{-1} = b^2,$$

$$ab. b. (a)^{-1} = ab^2a^{-1},$$

biçimindedir. Buradan  $\Gamma^2(2)$  alt grubunun üreteçleri  $a^2$ ,  $bab^{-1}a^{-1}$ ,  $abab^{-1}$ ,  $b^2$  ve  $ab^2a^{-1}$  şeklinde bulunur.

Burada  $\Gamma^2(2)$  grubunun simgesini bulmakta Permütasyon metodu uygulanırsa simge  $(g; \infty^{(6)})$  olarak bulunur. Burada  $g$  cinsi Riemann–Hurwitz formülü kullanılarak,

$$4 = \frac{2g - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 6}{2 \cdot 0 - 2 + \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \cdot 3} \quad (3.9)$$

eşitliğinden  $g = 1$  olarak bulunur. Böylece  $\Gamma^2(2)$  alt grubunun simgesi:  $(0; \infty^{(6)})$  olarak bulunur [11].

**3.3.5 Sonuç :**  $\Gamma(2)$  temel denklik alt grubunun  $\Gamma^2(2)$  kuvvet alt grubu  $\Gamma(4)$  temel denklik alt grubuna eşittir. Yani  $\Gamma^2(2) = \Gamma(4)$  [15].

Şimdi  $n \geq 5$  için  $\Gamma(n)$  temel denklik alt gruplarının indeksini verelim.

**3.3.6 Teorem :**  $[\Gamma: \Gamma(n)] = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$  [16].

**3.3.7 Sonuç :**  $\Gamma(5)$  temel denklik alt grubu,  $\Gamma$  modüler grubunun 60 indeksli ve 11 ranklı bir serbest alt grubudur. Ayrıca simgesi  $(0; \infty^{(11)})$  biçimindedir [14].

**3.3.8 Teorem:**  $[\Gamma': \Gamma(6)] = 12$ .

**İspat:** 3.3.6 Teoremden  $[\Gamma': \Gamma(6)] = 72$  ve 3.1.5 Teoremden  $[\Gamma: \Gamma'] = 6$  olduğunu biliyoruz.  $\Gamma(6) \subset \Gamma' \subset \Gamma$  kapsamalarından istenen kolayca görülebilir [5].

**3.3.9 Sonuç:**  $\Gamma(6) = (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'$  .

**İspat :**  $(\Gamma^2)'$  ve  $(\Gamma^3)'$  altgrupları  $\Gamma$  modüler grubunun normal alt grupları oldukları için 2.

İzomorfizma teoreminden  $(\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)' / (\Gamma^2)' \cong (\Gamma^3)' / (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'$  yazılabilir. 3.2.3

Teoremden  $\Gamma' = (\Gamma^2)' \cdot (\Gamma^3)'$  olduğundan  $\Gamma' / (\Gamma^2)' \cong (\Gamma^3)' / (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'$  şeklinde yazılabilir. Böylece

$$[\Gamma' : (\Gamma^2)'] = [(\Gamma^3)' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'] \text{ ve } [(\Gamma^3)' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'] = 3$$

olur. Ayrıca

$$[\Gamma' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'] = [\Gamma' : (\Gamma^3)'] \cdot [(\Gamma^3)' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)']$$

olduğundan

$$[\Gamma' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'] = 4 \cdot [(\Gamma^3)' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)']$$

Bulunur. Böylece  $[\Gamma' : (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'] = 12$  elde edilir.  $\Gamma(6) \subset (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'$  ve

$[\Gamma' : \Gamma(6)] = 12$  eşitliklerinden  $\Gamma(6) = (\Gamma^2)' \cap (\Gamma^3)'$  eşitliği bulunur [5]

## 4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUBUN BAZI NORMAL ALTGRUPLARI

Bu bölümde genişletilmiş modüler grubunun komütatör, kuvvet ve temel denklik alt gruplarını çalışacağız. Bu alt grupların sunuşlarını ve üreteçlerini vereceğiz. Ayrıca genişletilmiş modüler grubun indeksi iki olan üç tane alt grubu olduğunu göstereceğiz. Bu alt grupların üreteçlerini ve sunuşlarını belirleyeceğiz

### 4.1 Genişletilmiş Modüler Grubun Komütatör Altgrupları

**4.1.1 Teorem :**  $\bar{\Gamma}$  grubunun  $\bar{\Gamma}'$  alt grubu 4 indeksli ve 2 üreteçli bir normal alt gruptur.  $\bar{\Gamma}'$  komütatör alt grubunun üreteçleri  $Y$  ile  $XYX$  dir.

**İspat:** Önce  $\bar{\Gamma}$  genişletilmiş modüler grubun var olan bağıntılarına üreteçlerin değişmelilik koşulunu ekleyelim. Böylece bölüm grubu;

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}' = \langle X, Y, R \mid X^2 = Y^3 = R^2 = I, XR = RX, YR = RY^{-1}, XY = YX, YR = RY \rangle$$

olarak bulunur. Burada  $YR = RY^{-1}$  ve  $YR = RY$  eşitliklerinden  $Y^3 = Y^2 = I$  bulunur. Böylece  $Y = I$  elde edilir. Buradan bölüm grubu

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}' = \langle X, R \mid X^2 = R^2 = (XR)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2 \text{ olarak bulunur. Yani indeks 4 olur.}$$

Şimdi Reidemeister-Schreier metodunu kullanmak için bir transversel olarak

$\mathcal{E} = \{I, X, R, XR, \}$  kümesi seçilirse olası tüm işlemler;

$$I \cdot X \cdot (X)^{-1} = I,$$

$$X \cdot X \cdot (I)^{-1} = I,$$

$$R \cdot X \cdot (XR)^{-1} = RXRX,$$

$$XR \cdot X \cdot (R)^{-1} = XRXR,$$

$$I \cdot Y \cdot (I)^{-1} = Y,$$

$$X \cdot Y \cdot (X)^{-1} = XYX,$$

$$R \cdot Y \cdot (R)^{-1} = RYR,,$$

$$XR \cdot Y \cdot (XR)^{-1} = XRYXR,$$

$$I \cdot R \cdot (R)^{-1} = I,$$

$$X \cdot R \cdot (XR)^{-1} = I,$$

$$R \cdot R \cdot (I)^{-1} = I,,$$

$$XR \cdot R \cdot (X)^{-1} = I,,$$

biçimindedir. Burada  $RXR = XRX = I$ ,  $RYR = Y^{-1}$  ve  $XYXR = XY^{-1}X$  olduğundan,  $\bar{\Gamma}'$  kamutator alt grubunun üreteçleri  $Y$  ve  $XYX$  olarak bulunur. Böylece  $\bar{\Gamma}'$  kamutator alt grubu

$$\bar{\Gamma}' = \langle Y, XYX \mid Y^3 = (XYX)^3 = I \rangle \cong C_3 * C_3 \text{ grup gösterimine sahiptir. [4]}$$

Şimdi aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**4.1.2 Sonuç : i)**  $\bar{\Gamma}$  grubunun  $\bar{\Gamma}'$  alt grubu, modüler grubun  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubuna eşittir. Yani  $\bar{\Gamma} = \Gamma^2$ .

**ii)**  $\bar{\Gamma}$  grubunun  $\bar{\Gamma}''$  alt grubu, modüler grubun  $(\Gamma^2)'$  alt grubuna eşittir. Yani  $\bar{\Gamma}'' = (\Gamma^2)'$  [1].

**4.1.3 Teorem :**  $\bar{\Gamma}$  grubunun indeksi 2 olan normal alt grupları 3 tanedir (bu alt gruplara  $N_1$ ,  $N_2$  ve  $N_3$ , diyelim). Bu alt gruplar şunlardır.

**i)**  $N_1 = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = I \rangle \cong C_2 * C_3$  (modüler grup)

**ii)**  $N_2 = \langle Y, XYX, R \mid Y^3 = (XYX)^3 = R^2 = (XYXR)^2 = (YR)^2 = I \rangle \cong D_3 *_{Z_2} D_3$

**iii)**  $N_3 = \langle XR, Y \mid (XR)^2 = Y^3 = I \rangle \cong C_2 * C_3$ .

**İspat :**  $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}'$  bölüm grubuna  $G$  diyelim. Böylece

$$G = \langle X, R \mid X^2 = R^2 = (XR)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2$$

olur.  $G$  grubu Klein-V grubuna izomorf olduğundan, bu grubun 3 tane 2 indeksli alt grubu vardır.  $G/N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bölüm gruplarını oluşturmak için, sırayla  $X = I$ ,  $R = I$  ve  $XR = I$  bağıntıları bölüm grubunun bağıntılarına eklenir.

**i)**  $X = I$  olsun. Bu durumda  $G/N_1 = \langle R \mid R^2 = I \rangle \cong C_2$  olur. Yani indeks 2 olur. Şimdi

Reidemeister-Schreier metodunu kullanmak için bir transversel olarak  $\Sigma = \{I, R\}$

kümesini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar;

$$I.X.(I)^{-1} = X,$$

$$R.X.(R)^{-1} = RXR,$$

$$I.Y.(I)^{-1} = Y,$$

$$R.Y.(R)^{-1} = RYR,$$

$$I.R.(R)^{-1} = I,$$

$$R.R.(I)^{-1} = I,$$

biçimindedir. Burada  $RXR = X$  ve  $RYR = Y^{-1}$  olduğundan,  $N_1$  alt grubunun üreteçleri  $X$  ve  $Y$  olarak bulunur. Böylece  $N_1$  alt grubu

$$N_1 = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = I \rangle \cong C_2 * C_3$$

grup gösterimine sahiptir.  $N_1$  alt grubu modüler gruptur.

ii)  $R = I$  olsun. Bu durumda  $G/N_2 = \langle X \mid X^2 = I \rangle \cong C_2$  olur. Yani indeks 2 olur. Şimdi

Reidemeister-Schreier metodunu kullanmak için bir transversel olarak  $\Sigma = \{I, X\}$

kümesini seçerirse olası tüm işlemler;

$$I.X.(X)^{-1} = I,$$

$$X.X.(I)^{-1} = I,$$

$$I.Y.(I)^{-1} = Y,$$

$$X.Y.(X)^{-1} = XYX,$$

$$I.R.(I)^{-1} = R,$$

$$X.R.(X)^{-1} = XRX,$$

biçimindedir. Burada  $RXR = X$  olduğundan,  $N_2$  alt grubu için üreteçler  $Y$ ,  $XYX$  ve  $R$  olarak bulunur. Böylece  $N_2$  alt grubu

$$N_2 = \langle Y, XYX, R \mid Y^3 = (XYX)^3 = R^2 = (XYXR)^2 = (YR)^2 = I \rangle \cong D_3 *_{Z_2} D_3$$

grup gösterimine sahiptir.

iii)  $XR = I$  ( $X = R$ ) olsun. Bu durumda  $G/N_1 = \langle R \mid R^2 = I \rangle \cong C_2$  olur. Yani indeks 2

olur. Şimdi Reidemeister-Schreier metodunu kullanmak için bir transversel olarak  $\Sigma =$

$\{I, R\}$  kümesini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar;

$$I.X.(R)^{-1} = XR,$$

$$R.X.(I)^{-1} = RX,$$

$$I.Y.(I)^{-1} = Y,$$

$$R.Y.(R)^{-1} = RYR,$$

$$I.R.(R)^{-1} = I,$$

$$R.R.(I)^{-1} = I,$$

biçimindedir. Burada  $RX = XR$  ve  $RYR = Y^{-1}$  olduğundan  $N_3$  alt grubunun üreteçleri  $XR$  ve  $Y$  olarak bulunur. Böylece  $N_3$  alt grubu  $N_3 = \langle XR, Y | (XR)^2 = Y^3 = I \rangle \cong C_2 * C_3$  grup gösterimine sahiptir [17].

## 4.2 Genişletilmiş Modüler Grubun Kuvvet Altgrupları

Bu kısımda önce  $m = 2$  ve  $m = 3$  durumlarını inceleyelim.

**4.2.1 Teorem :**  $\bar{\Gamma}$  grubunda  $\bar{\Gamma}^2$  kuvvet alt grubu 4 indeksli ve 2 üreteçli bir normal alt gruptur.  $\bar{\Gamma}^2$  kuvvet alt grubunun üreteçleri  $Y$  ile  $XYX$  dir.

**İspat:**  $\bar{\Gamma}^2$  kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulmak için  $\bar{\Gamma}$  genişletilmiş modüler grubun bağıntılarına tüm elemanların 2. kuvvetlerinin birim elemana eşit olduğu bağıntıları ekleyelim. Böylece bölüm grubu;

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}^2 = \langle X, Y, R | X^2 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I, X^2 = Y^2 = R^2 = \dots = I \rangle,$$

olarak bulunur. Burada  $Y^3 = Y^2 = I$  olduğundan  $Y = I$  olur. Böylece bölüm grubunun

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}^2 = \langle X, R | X^2 = R^2 = (XR)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2$$

olduğu görülür. 4.1.1 Teoremin ispatına benzer olarak,  $\bar{\Gamma}^2$  kuvvet alt grubunun

$$\bar{\Gamma}^2 = \langle Y, XYX | Y^3 = (XYX)^3 = I \rangle \cong C_3 * C_3$$

**4.2.2 Teorem :**  $\bar{\Gamma}$  grubunda  $\bar{\Gamma}^3$  kuvvet alt grubu,  $\bar{\Gamma}$  genişletilmiş modüler grubuna eşittir. Yani  $\bar{\Gamma}^3 = \bar{\Gamma}$ .

**İspat:**  $\bar{\Gamma}^3$  kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulmak için  $\bar{\Gamma}$  genişletilmiş modüler grubun bağıntılarına tüm elemanların 3. kuvvetlerinin birim elemana eşit olduğu bağıntıları ekleyelim. Böylece bölüm grubu;

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}^3 = \langle X, Y, R | X^2 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I, X^3 = Y^3 = R^3 = \dots = I \rangle,$$

olarak bulunur. Burada  $X^2 = X^3 = I$ ,  $R^2 = R^3 = I$  ve  $(YR)^2 = (YR)^3 = I$  olduğundan  $X = Y = R = I$  bulunur. Böylece bölüm grubunun

$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_3 = \langle I \rangle$  olduğu görülür. Buradan  $\bar{\Gamma}^3 = \bar{\Gamma}$  olarak bulunur [3].

Şimdi her  $t \in \mathbb{Z}^+$  için  $\bar{\Gamma}^t$  kuvvet alt gruplarını belirlemeye çalışalım.

#### 4.2.3 Teorem :

- i) Eğer  $2 \nmid t$  ise  $\bar{\Gamma}^t = \bar{\Gamma}$  olur.
- ii) Eğer  $2 \mid t$  ama  $6 \nmid t$  ise  $\bar{\Gamma}^t = \bar{\Gamma}^2$  olur.

**İspat:**  $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_t$  bölüm grubunu oluştururken bütün elemanların  $t$ . kuvvetlerinin birim elemana eşit olduğu bağıntılar grubun var olan bağıntılarına eklenir. Böylece bölüm grubu;

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_t = \langle X, Y, R \mid X^2 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I, X^t = Y^t = R^t = \dots = I \rangle$$

olarak bulunur.

- i) Eğer  $2 \nmid t$  ise  $X^2 = X^t = I, R^2 = R^t = I$  ve  $(YR)^2 = (YR)^t = I$  bağıntılarından  $X = Y = R = I$  bulunur. Böylece bölüm grubunun  $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_t = \{I\}$  olduğu görülür. Buradan  $\bar{\Gamma}^t = \bar{\Gamma}$  olarak bulunur.

- ii) Eğer  $2 \mid t$  ama  $6 \nmid t$  ise  $Y^3 = Y^t = I$  ve  $t$  çift olduğundan  $Y = I$  bulunur. Böylece bölüm grubu

$$\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_t = \langle X, R \mid X^2 = R^2 = (XR)^2 = I \rangle \text{ olacağından } \bar{\Gamma}^t = \bar{\Gamma}^2 \text{ eşitliği bulunur [3].}$$

**4.2.4 Uyarı :** Eğer  $6 \mid t$  ise  $\bar{\Gamma}^{6k}$  kuvvet alt grupları hakkında bir şey söyleyemeyiz [3].

### 4.3 Modüler Grubun Temel Denklik Altgrupları

**4.3.1 Tanım :**  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $\bar{\Gamma}$  genişletilmiş modüler grubunun  $n$  seviyeli temel denklik altgrubu

$$\bar{\Gamma}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \mp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{n}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \mp 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Temel denklik altgrupları normal altgruplardır.

$\Gamma(n) = \bar{\Gamma}(n) \cap \Gamma$  eşitliği açıktır. Eğer  $n > 2$  ise  $ad - bc = \mp 1$  ve  $ad - bc \equiv 1 \pmod{n}$  olduğundan  $\bar{\Gamma}(n) = \Gamma(n)$  ve  $\bar{\Gamma}(2) \geq \Gamma(2) \geq \bar{\Gamma}(4) = \Gamma(2)$  sonuçları bulunur. O yüzden  $\bar{\Gamma}(2)$  temel denklik alt grubunu bulmak önemlidir

#### 4.3.1 Teorem :

$$\bar{\Gamma}(2) = \langle RYXY, RY^2XY^2, XR \mid (RYXY)^2 = (RY^2XY^2)^2 = (XR)^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2.$$

**İspat :**  $ad - bc = \mp 1$  ve  $ad - bc \equiv 1 \pmod{n}$  eşitlik ve denkliklerinden modüler grubun  $\Gamma(2)$  temel denklik altgrubunun, genişletilmiş modüler grubun  $\bar{\Gamma}(2)$  temel denklik altgrubunun 2 indeksli bir alt grubu olduğu görülür. Böylece  $\Gamma(2)$  temel denklik altgrubunun üreteçlerine  $XR$  yansıma dönüşümünün eklenmesiyle  $\bar{\Gamma}(2)$  temel denklik altgrubunun üreteçleri bulunur [18].

**4.3.2 Teorem :**  $\bar{\Gamma}(2)$  temel denklik altgrubunun  $\bar{\Gamma}^2(2)$  kuvvet altgrubu  $\bar{\Gamma}(4)$  temel denklik altgrubuna eşittir. Yani  $\bar{\Gamma}^2(2) = \bar{\Gamma}(4)$ .

**İspat:**  $\bar{\Gamma}(2)$  temel denklik altgrubunun sunuşunun

$$\bar{\Gamma}(2) = \langle RYXY, RY^2XY^2, XR \mid (RYXY)^2 = (RY^2XY^2)^2 = (XR)^2 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Burada sadelik için  $a = RYXY$ ,  $b = RY^2XY^2$  ve  $c = XR$  diyelim.

Böylece  $\bar{\Gamma}(2)/\bar{\Gamma}^2(2)$  bölüm grubu  $\bar{\Gamma}(2)$  grubunun bağıntılarına her  $T \in \bar{\Gamma}(2)$  için  $T^2 = I$

bağıntısının eklenmesiyle bulunur. Buradan

$$\bar{\Gamma}(2)/\bar{\Gamma}^2(2) = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = \dots = I \rangle$$

olur. Böylece  $\bar{\Gamma}(2)/\bar{\Gamma}^2(2) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$  olduğundan indeks  $[\bar{\Gamma}(2):\bar{\Gamma}^2(2)] = 8$  olarak bulunur.

Şimdi Reidemeister-Schreier metodunu uygulamak için bir transversal olarak

$\Sigma = \{ I, a, b, c, ab, ac, bc, abc \}$  kümesini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar;

$$I.a.(a)^{-1} = I,$$

$$a.a.(I)^{-1} = I,$$

$$b.a.(ab)^{-1} = baba,$$

$$c.a.(ac)^{-1} = caca,$$

$$ab.a.(b)^{-1} = abab,$$

$$ac.a.(c)^{-1} = acac,$$

$$bc.a.(abc)^{-1} = bcacba,$$

$$abc.a.(bc)^{-1} = abcacb,$$

$$I.b.(b)^{-1} = I,$$

$$a.b.(ab)^{-1} = I,$$

$$b.b.(I)^{-1} = I,$$

$$c.b.(bc)^{-1} = cbc,$$

$$ab.b.(a)^{-1} = I,$$

$$ac.b.(abc)^{-1} = acbca,$$

$$bc.b.(c)^{-1} = bcb,$$

$$abc.b.(ac)^{-1} = abcba,$$

$$I.c.(c)^{-1} = I,$$

$$a.c.(ac)^{-1} = I,$$

$$b.c.(bc)^{-1} = I,$$

$$c.c.(I)^{-1} = I,$$

$$ab.c.(abc)^{-1} = I,$$

$$ac.c.(a)^{-1} = I,$$

$$bc.c.(b)^{-1} = I,$$

$$abc.c.(ab)^{-1} = I,$$

şeklindedir. Burada gerekli hesaplamalar yapılırsa üreteçler;

$[a, b]$ ,  $[a, c]$ ,  $[b, c]$ ,  $[a, bc]$ ,  $[ab, c]$  şeklinde bulunur [18].

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Burada tezde elde edilen sonuçlar ve ileriye yönelik öneriler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölüm birinci kısmında, önce modüler grubun  $\Gamma^2$  ve  $\Gamma^3$  kuvvet alt grupları için üreteçler, grup sunuşları ve simgeler bulunmuştur. Burada her  $m \in \mathbb{Z}^+$  için  $\Gamma^m$  kuvvet alt grupları elde edilmiştir. Sonra  $\Gamma$  grubunun  $\Gamma'$  alt grubunun üreteçleri, grup sunuşu ve simgesi verilmiştir. Ayrıca  $\Gamma'$  komütatör alt grubu ile  $\Gamma^2$  ve  $\Gamma^3$  kuvvet alt grupları arasındaki ilişki bulunmuştur. Böylece  $\Gamma^{6k}$  kuvvet alt gruplarının serbest olduğu gösterilmiştir.

Tezin üçüncü bölüm ikinci kısmında, modüler grubun  $\Gamma^2$  ve  $\Gamma^3$  kuvvet alt gruplarının  $(\Gamma^2)'$  ve  $(\Gamma^3)'$  komütatör altgruplarının üreteçleri ve simgeleri bulunmuştur. Ayrıca  $(\Gamma^2)'$  ve  $(\Gamma^3)'$  altgrupları ile  $\Gamma'$  komütatör alt grubu arasındaki ilişki verilmiştir.

Tezin üçüncü bölüm üçüncü kısmında, önce  $n = 2, 3$  ve  $4$  için modüler grubun  $\Gamma(n)$  temel denklik altgruplarının üreteçleri, grup sunuşları, simgeleri ve cinsleri bulunmuştur. Sonra modüler grubun  $\Gamma(n)$  temel denklik altgruplarının indeks formülü verilmiştir. Ayrıca modüler grubun  $\Gamma(2)$  temel denklik alt grubunun  $\Gamma^2(2)$  kuvvet alt grubunun  $\Gamma(4)$  temel denklik alt grubuna eşit olduğu gösterilmiştir. Son olarak  $\Gamma(6)$  temel denklik alt grubu ile modüler grubun  $\Gamma^2$  ve  $\Gamma^3$  kuvvet alt gruplarının  $(\Gamma^2)'$  ve  $(\Gamma^3)'$  komütatör altgrupları arasındaki ilişki verilmiştir.

Tezin dördüncü bölüm, birinci kısmında  $\bar{\Gamma}$  grubunun  $\bar{\Gamma}'$  alt grubu çalışılmış, üreteçleri ve grup sunuşu verilmiştir. Ayrıca genişletilmiş modüler grubun  $\bar{\Gamma}'$  komütatör alt grubunun, modüler grubun  $\Gamma^2$  kuvvet alt grubuna eşit olduğu gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölüm, ikinci kısmında, önce genişletilmiş modüler grubun  $\bar{\Gamma}^2$  ve  $\bar{\Gamma}^3$  kuvvet alt grupları çalışılmıştır. Sonra her  $m \in \mathbb{Z}^+$  için  $\bar{\Gamma}^m$  kuvvet altgruplarının hangi alt gruba eşit olduğu gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölüm, üçüncü kısmında,  $\bar{\Gamma}(n)$  temel denklik altgrupları tanıtılmış, bu alt grupların  $n > 2$  tamsayıları için  $\Gamma(n)$  temel denklik altgruplarına eşit olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca  $\bar{\Gamma}(2)$  temel denklik alt grubunun  $\bar{\Gamma}^2(2)$  kuvvet alt grubunun  $\bar{\Gamma}(4)$  temel denklik alt grubuna eşit olduğu gösterilmiştir.

Bu sonuçlar modüler ve genişletilmiş modüler grubun genellemesi olan Hecke ve genişletilmiş Hecke gruplarına taşınabilir.

Ayrıca modüler ve genişletilmiş modüler grubun denklik alt grupları da çalışılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] **Sahin, R.** (2011). On the some normal subgroups of the extended modular group. *Appl. Math. Comput.*, 218 (3), 1025-1029.
- [2] **Newman, M.** (1962). The structure of some subgroups of the modular group, *Illinois J. Math.* 6 480-487.
- [3] **Şahin, R.; İkikardeş, S.; and Koroğlu, Ö.** (2004). On the power subgroups of the extended modular group  $\bar{\Gamma}$ , *Turkish J. Math.*, 28 (2), 143-151.
- [4] **Jones, G.A. and Thornton, J. S.** (1986). Automorphisms and congruence subgroups of the extended modular group. *J. London Math. Soc.* 34 (1), 26-40.
- [5] **Newman, M., and Smart, J. R.** (1963). Note on a subgroup of the modular group. *Proc. Amer. Math. Soc.* 14, 102-104.
- [6] **Newman, M.** (1975). Congruence subgroups of the modular group. *Math. Comp.*, 29, 207-213.
- [7] **Lang, M. L., Lim, C.H. and Tan, S.P.** (1995). An algorithm for determining if a subgroup of the modular group is congruence. *J. London Math. Soc.* 51 (3), 491-502.
- [8] **Sarıgedik, Z.** (2014). Genişletilmiş Hecke gruplarının bazı altgrupları ve Pell-Lucas sayıları ile ilişkileri”, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- [9] **Duman, C.** (2023). Genelleştirilmiş ve genişletilmiş hecke grupları ile ilgili bazı sonuçlar, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- [10] **Sarıca, Ş.** (2019). Genişletilmiş modüler grup ve sürekli kesirler”, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- [11] **Yılmaz, V.** (2012).  $H(\lambda_5)$  genişletilmiş Hecke grubu ve Alt grupları, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- [12] **Doğrayıcı, G.** (2021). Genelleştirilmiş ve genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- [13] **Babadağlı, C.** (2019). Genelleştirilmiş Hecke Grupları", Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- [14] **Cangül, I. N.** (1993). Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, Southampton.
- [15] **Kiming, I;, Schütt, M., and Verrill, H. A.** (2011), Lifts of projective congruence groups. *J. Lond. Math. Soc.* 83(1), 96-120.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

- [16] **Ivrissimtzis, I., and Singerman, D.** (2005). Regular maps and principal congruence subgroups of Hecke groups. *European J. Combin.*26 (3-4), 437-456.
- [17] **Kulkarni, R. S.** (1990). Hyperbolic geometry and the subgroups of the modular group. *Group theory from a geometrical viewpoint*,, 645-686.
- [18] **Sahin, R.; and İkikardes, S.** (2013). Squares of congruence subgroups of the extended modular group., *Miskolc Math. Notes*, 14(3), 1031—1035.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Merve GÜMÜŞ

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

### Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2025
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2012
Lise	Biga Atatürk Anadolu Lisesi	2008