

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI**



**GAMALARIN ÇEŞİTLİ ORTAMLARDAN GERİ
SAÇILMALARININ
MONTE CARLO YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUSUF RECEP İÇİN

BALIKESİR, OCAK - 2016

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI**



**GAMALARIN ÇEŞİTLİ ORTAMLARDAN GERİ
SAÇILMALARININ
MONTE CARLO YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUSUF RECEP İÇİN

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Asuman AYDIN (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Orhan GÜRLER

Doç. Dr. Tayfun UZUNOĞLU

BALIKESİR, OCAK - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

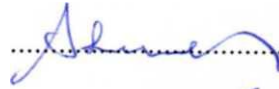
YUSUF RECEP İÇİN tarafından hazırlanan “**GAMALARIN ÇEŞİTLİ ORTAMLARDAN GERİ SAÇILMALARININ MONTE CARLO YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.01.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Prof. Dr. Asuman AYDIN



Üye

Prof. Dr. Orhan GÜRLER



Üye

Doç. Dr. Tayfun UZUNOĞLU



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

ÖZET

**GAMALARIN ÇEŞİTLİ ORTAMLARDAN GERİ SAÇILMALARININ
MONTE CARLO YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YUSUF RECEP İÇİN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ASUMAN AYDIN)**

BALIKESİR, OCAK - 2016

Gama ışınlarının bir ortamdan geri saçılması; radyasyondan korunma, endüstriyel ve medikal uygulamalar, radyasyon dozimetri ve tahribatsız test gibi konularda temel öneme sahiptir. Compton saçılması nedeniyle fotonlar dışarı çıkmadan önce materyal (hedef) içinde bir dizi saçılmaya uğrar. Hedefin kalınlığı arttıkça saçılmalar, enerji zayıflayarak devam eder, tekli ve çoklu Compton saçılma olaylarıyla sonuçlanır. Bu çalışmada 279, 662, 1250 ve 2100 keV enerjili gama ışınları, dilim geometrili metalik, biyolojik ve koruyucu materyallerde Monte Carlo yöntemiyle izlenerek, çeşitli kalınlıklardaki bu materyallerden geri saçılma şiddet ve enerji olasılıklarıyla enerji dağılımları hesaplanmıştır. Ayrıca çoklu saçılan gamaların enerji dağılımları, sonsuz geometrili ortamlarda da incelenmiştir. Monte Carlo hesapları, deneysel sonuçlar ve diğer Monte Carlo hesapları ile karşılaştırılmış, ayrıntılı sonuçlar ve tartışmalar çalışmada sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Gama ışını, geri saçılma, enerji dağılımı, Monte Carlo benzetimi.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF GAMMA BACKSCATTERING IN VARIOUS MEDIA USING MONTE CARLO METHOD

MSC THESIS

YUSUF RECEP İÇİN

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

PHYSICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ASUMAN AYDIN)

BALIKESİR, JANUARY 2016

The backscattering of gamma rays from a target is of fundamental importance in radiation shielding, industrial and medical applications, radiation dosimetry and non-destructive testing. In Compton scattering, incident photons undergo a number of scatterings within the material (target) before exiting it. The gamma rays continue to soften in energy as the number of scatterings increases in thick target, and results in the generation of singly and multiply scattered events. In this study, the energy distribution of backscattered gamma rays with the backscattering intensity and energy probabilities were calculated by using the Monte Carlo method for metallic, biological and shielding materials having various thicknesses of slab geometry targeted with gamma rays of 279, 662, 1250 and 2100 keV energy. In addition, the energy distributions of multiply scattered gamma rays were also studied for the infinite geometry materials. The results were presented and discussed in detail by comparing with experimental results and other Monte Carlo calculations.

KEYWORDS: Gamma ray, backscattering, energy distribution, Monte Carlo simulation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GAMA IŞINLARININ MADDE İLE ETKİLEŞİMLERİ.....	4
2.1 Fotoelektrik Etkileşme	5
2.2 Compton Saçılması	7
2.3 Çift Oluşum	8
2.4 Tesir Kesitleri	9
2.5 Diferansiyel Tesir Kesiti	12
3. MONTE CARLO YÖNTEMİ.....	14
3.1 Monte Carlo Tekniği.....	14
3.2 Rastgele Sayılar	15
3.3 Temel Örneklemeye Yöntemi	16
3.4 Reddetme Yöntemi	18
4. TESİR KESİTİ HESAPLAMALARI VE OLAYLARIN ÖRNEKLENMESİ.....	21
4.1 Soğurucu Ortamların Compton Saçılması ve Fotoelektrik Etkileşme Tesir Kesiti Hesabı	21
4.2 Serbest Yolun Örneklenmesi.....	26
4.3 Etkileşme Türünün Örneklenmesi	28
4.4 Compton Saçılma Açısının Örneklenmesi	29
4.5 Gama Işını Doğrultusunun Örneklenmesi.....	31
4.6 Monte Carlo Yöntemi ile Gama Işını Takibi	33
5. BULGULAR.....	36
5.1 Çalışma Koşulları	36
5.2 Sonsuz Ortamlarda Art Arda Saçılma Yapmış Gamaların Enerji Dağılımları	37
5.3 Dilim Ortamlardan Geri Saçılan Gamaların Enerji Dağılımları.....	40
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	50
7. KAYNAKLAR	52
8. EKLER	58

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Fotoelektrik etkileşme şematik gösterimi.	6
Şekil 2.2: Compton saçılması şematik gösterimi.	7
Şekil 2.3: Θ açısında $d\Theta$ aralığına diferansiyel saçılma.	13
Şekil 3.1: Olasılık dağılım fonksiyonu.	17
Şekil 3.2: Toplam olasılık dağılım fonksiyonu.	17
Şekil 3.3: Reddetme yöntemi için olasılık dağılım fonksiyonu.	20
Şekil 3.4: Bölünmüş olasılık dağılım fonksiyonu.	20
Şekil 4.1: Gümüş ortam için tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimi.	25
Şekil 4.2: Altın ortam için tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimi.	25
Şekil 4.3: Kemik ortam için tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimi.	26
Şekil 4.4: Rastgele sayı eksenine etkileşme sonuç bölgelerinin yerleştirilmesi.	29
Şekil 5.1: Sonsuz ortamda ardışık saçılmalar ve koordinat sistemi.	37
Şekil 5.2: 0.662 MeV enerjili gamaların sonsuz ortamlarda enerji dağılımları.	38
Şekil 5.3: 2.1 MeV enerjili gamaların sonsuz ortamlarda enerji dağılımları.	38
Şekil 5.4: Su ve kemik ortamda art arda saçılan gamaların enerji dağılımı.	39
Şekil 5.5: Kurşun ve beton ortamda art arda saçılan gamaların enerji dağılımı.	39
Şekil 5.6: Sonsuz dilim ortamda saçılmalar.	40
Şekil 5.7: 1.25 MeV enerjili gamaların çeşitli metalik ortamlardan geri saçılma enerji dağılımları.	41
Şekil 5.8: 2.1 MeV enerjili gamaların çeşitli metalik ortamlardan geri saçılma enerji dağılımları.	42
Şekil 5.9: Su ve kemik ortamlardan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.	43
Şekil 5.10: Beton ve kurşun ortamlardan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.	43
Şekil 5.11: Farklı kalınlıklardaki beton ortamdan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.	44
Şekil 5.12: Farklı kalınlıklardaki kurşun ortamdan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.	45
Şekil 5.13: Farklı enerjilerdeki gamaların beton ortamdan geri saçılma enerji dağılımları.	46
Şekil 5.14: Farklı enerjilerdeki gamaların kemik ortamdan geri saçılma enerji dağılımları.	46
Şekil 5.15: Compton saçılma açısının reddetme ve Özmütlu & Aydın yöntemleriyle belirlenerek karşılaştırılması.	47
Şekil 5.16: Akar Tarım ve diğerlerinin [34] çalışmasından alınan enerji dağılımları.	48
Şekil 5.17: Geri saçılan gamaların enerji dağılımları.	48
Şekil A.1: Koordinat dönüşümleri.	58

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1: Etkileşme türleri ve sonuçları.	4
Tablo 4.1: Su, kemik ve beton ortamlarının yoğunlukları ve kimyasal bileşimi.	22
Tablo 4.2: Kemik ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	22
Tablo 4.3: Su ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	23
Tablo 4.4: Beton ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	23
Tablo 4.5: Çinko ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	23
Tablo 4.6: Gümüş ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	23
Tablo 4.7: Kalay ortamına etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	24
Tablo 4.8: Altın ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	24
Tablo 4.9: Kurşun ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.	24
Tablo 5.1: Çeşitli metalik ortamlardan enerjiye bağlı geri saçılma olasılıkları.	49
Tablo 5.2: Çeşitli kalınlıklardaki beton ve kemik ortamlardan geri saçılma olasılıkları.	49

SEMBOL LİSTESİ

c	: Işık hızı
e	: Elektronun yükü
E	: Gamma ışını enerjisi
E_e	: Elektron enerjisi
E_b	: Bağlanma enerjisi
φ	: Azimut açısı
θ	: Kutup açısı
θ_s	: Saçılma açısı
h	: Planck sabiti
v	: Frekans
l	: Serbest yol
m_e	: Elektronun durgun kütlesi
μ	: Makroskobik tesir kesiti
q	: Düzgün dağılımlı gelişigüzel sayı
r_e	: Klasik elektron yarıçapı
Z	: Atom numarası
P	: Yoğunluk (g/cm ³)
Ω	: Katı açısı
μ_{fe}	: Fotoelektrik etkileşme için lineer zayıflama katsayısı
μ_{cs}	: Compton saçılması için lineer zayıflama katsayısı
σ	: Mikroskobik tesir kesiti
σ_ç	: Çift oluşum için mikroskobik tesir kesiti
σ_f	: Fotoelektrik etkileşme için mikroskobik tesir kesiti
σ_c	: Compton saçılması için mikroskobik tesir kesiti
N	: Parçacık sayısı
n	: Birim hacim başına düşen parçacık sayısı
p	: Olasılık
F	: Toplam olasılık
I	: Şiddet
T	: Dönüşüm matrisi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, bana her konuda rehberlik eden, desteğini esirgemeyen ve beni çalışmalarımda her daim motive eden danışman hocam Sayın Prof. Dr. Asuman AYDIN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Çalışmam boyunca, maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan ve her türlü desteklerini gördüğüm ailem ve eşime çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Gama ışınları çekirdeklerin yayınladığı elektromanyetik dalgalardır. Radyoaktif elementlerin yayınladıkları gamaların enerjileri 100 keV–10 MeV, dalga boyları ise 100-10⁴ fm arasında değişir. Gama ışınları elektrik ve manyetik alandan etkilenmezler. Elektromanyetik dalga ya da parçacık olarak evrende yayınlanan enerji olarak tanımladığımız radyasyonun, çeşitli türleri maddeye giricilik veya iyonize etme gibi durumlarla birbirinden ayrılırlar. Alfa ve beta parçacıkları gama ışımına göre daha düşük giriciliğe sahiptirler. Bu parçacıklar oldukça düşük kalınlıklarda kolayca durdurulabilirler. Ancak gama ışınlarının maddeye nüfuz etmesi çok daha kolaydır, yüksek giriciliğe sahip oldukları bilinmektedir. Gama ışınlarının düşük enerjili olanları 0.5 cm'lik bir kurşun plaka tarafından durdurulabilirken yüksek enerjili olanlar 35 cm'lik kurşun plakadan bile ileri geçebilirler [1].

Radyasyonu önleyici bir koruma tasarımı yapılmak istendiğinde, radyasyon kaynağının türünün ve karakteristik özelliklerinin bilinmesi gereklidir. Ayrıca koruma malzemesinin özellikleri de göz önünde bulundurulmalıdır. Bu özelliklere bakıldığında genellikle kurşun ve beton yaygın olarak koruma amaçlı kullanılır. Atom numarası büyük olan elementlerin gelen parçacıkları veya ışınları daha kolay bir şekilde soğurabildiği görülmektedir [1].

Madde ile radyasyonun etkileşme çalışmaları nükleer ve radyasyon fiziği, sanayi, tıp, mühendislik, çevre, enerji üretimi, radyasyon dozimetri, biyoloji, tarım gibi çeşitli alanlarda hızla artmaktadır. Nükleer fiziğin uygulamalarında büyük bir öneme sahip gama ışınlarının deteksiyonunun ve yavaşlatılmasının anlaşılabilmesi için gamaların madde ile etkileşimlerinin bilinmesi gerekir ki bu konuda birçok teorik ve deneysel çalışma vardır [2-13].

Gama ışınlarının madde ile etkileşmesinde, Compton olayı ile gerçekleşen geri saçılma üzerine çalışmalar, 1900 yılında Villard'ın radyumdan yayınlanan gama ışınlarını keşfetmesiyle başlamıştır [14]. Compton saçılmasına uğramış ışınlar atom, molekül ve katı ortamın elektronik yapısı hakkında bilgiler vermekte [15] Compton

saçılması tesir kesitinin bilinmesi, radyasyonu azaltmada, reaktör kaplamada, medikal fizikte ve diğer alanlardaki değişimlerin incelenmesinde fayda sağlamaktadır [16].

Nükleer spektroskopinin amacı, belirli proseslerde gama ışınlarının enerji ve şiddet dağılımlarını ölçmektir. Compton saçılma çalışmalarında, bir hedeften tekli ya da çoklu saçılan fotonların şiddet ve enerji dağılımları hassas bir şekilde belirlenmeye çalışılmaktadır. Hedef kalınlığının artmasıyla çoklu saçılma olaylarının sayısı artar fakat belirli bir hedef kalınlığından sonra saçılmadaki artış durur ve buna doyum (saturation depth) derinliği ya da kalınlığı denir. Bu parametre gama geri saçılma deneylerinde önemli bir faktördür; geliş enerjisine, geri saçılma açısına ve numunenin yoğunluğuna büyük ölçüde bağlıdır. Radyasyondan korunma için materyallerin seçiminde, *materyalin doyum kalınlığı* çok önemli bir parametredir.

Gama ışınlarının bir ortamdan geçişinin incelenmesinde deneysel yöntemlerin yanı sıra, kullanılan teorik yöntemlerden biri, radyasyonun maddeyle etkileşmesinin rastgele doğası nedeniyle Monte Carlo tekniğidir. Her bir etkileşme mekanizması, buna karşılık gelen diferansiyel tesir kesitleri ile karakterize edilir ki bu etkileşmeyle ilgili çeşitli büyüklüklerin olasılık dağılımlarını belirler. Günümüzde bilgisayarlar yardımıyla radyasyon-madde etkileşmelerinin benzetişimi oldukça kolaydır [17].

Bu çalışmanın amacı mono-enerjik gama ışınlarının çeşitli sonsuz dilim geometrili maddesel ortamlardan geri saçılma etkileşmelerinin Monte Carlo yöntemiyle incelenerek enerji dağılımlarının elde edilmesidir. Bir başka deyişle girdiği ortamda tekli, ikili veya çoklu Compton saçılması yaparak geri saçılma piki ya da piklerini oluşturan gamaların enerji dağılım hesabı amaçlanmaktadır. Gama ışınlarının geri saçılmasının radyasyondan korunma (shielding), dozimetri ve numunelerin tahribatsız testleri gibi konularda önemi nedeniyle bu çalışmada biyolojik örnekler olarak su, kemik, koruyucu materyaller olarak beton, kurşun ve bunların dışında da çeşitli elemental ortamlar (çinko, gümüş, kalay ve altın) seçilmiştir. Gama kaynaklarından (Ba^{133} , Cs^{137} , Na^{22} , Sb^{124}) 279, 662, 1250 ve 2100 keV enerjilerle yayınlanan gamalar seçilip, sonsuz dilim geometrili soğurucu ortamlara gönderilerek, geri saçılan gamaların enerji dağılımları ve geri saçılma şiddet ve enerji olasılıkları elde edilmiştir.

Deneyisel nükleer fizik ve radyoizotop uygulama çalışmalarında gama ışınlarının sık kullanılması nedeniyle gama enerji dağılımlarının sonlu ve sonsuz ortamlarda bilinmesi önemlidir. Radyasyon enerji transferine yönelik çalışmalarda ortamda birden çok saçılma yapmış gamaların enerjiye ve ortama bağlı dağılımları incelenmektedir. Bu çalışmada ayrıca çeşitli enerjilerle sonsuz geometrili ortamlara gelen gamaların çoklu saçılma enerji dağılımları da elde edilmiştir.

2. GAMA IŞINLARININ MADDE İLE ETKİLEŞİMLERİ

Bu bölümde gama ışınlarının madde ile etkileşmelerinde önemli olan olaylar incelenerek bunların enerji spektrumlarına katkıları ele alınmıştır.

Gama ışınlarının madde ile etkileşmelerinde gelen gama ışınının enerjisi ve ortamın atom numarası, etkileşmelerin gerçekleşme olasılıklarında oldukça etkilidir [18].

Gama ışınlarının saçılma veya soğurulma olayına neden olabilecek etkileşme türleri Tablo 2.1’de sıralanmıştır.

Tablo 2.1: Etkileşme türleri ve sonuçları.

Etkileşme Türü	Etkileşme Sonucu
Atomik Elektronlar ile Etkileşme	Soğurulma
Nükleonlar ile Etkileşme	Elastik Saçılma
Çekirdek veya Elektronları Çevreleyen Elektrik Alan ile Etkileşme	İnelastik Saçılma
Nükleonları Çevreleyen Mezon Alanı ile Etkileşme	

Bu etkileşme süreçlerinde on iki farklı sonuç ortaya çıkmaktadır. Nükleer geçişlerde 0.01-10 MeV enerji aralığında bu etkileşmelerden üç tanesinin diğerlerine göre daha baskın olduğu görülmüştür. Bunlar Compton saçılması, fotoelektrik olay ve çift oluşumdur. Ayrıca bazı durumlarda ortaya çıkan diğer etkileşmeler de aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Rayleigh saçılması: 0.1 MeV üzerindeki enerjilerde bağ yapısı güçlü elektronlardan elastik koherent saçılma olabilir. İzinli Rayleigh saçılması küçük açılarda gerçekleşir. Enerjisi yüksek ve atom numarası küçük olan Rayleigh saçılması Compton saçılmasının yanında ihmal edilebilir. Enerjisi düşük ve atom

numarası büyük olan Rayleigh saçılması tesir kesitleri G. K. White (1952) tarafından hesaplanmıştır.

Çekirdekten Thomson Saçılması: Thomson saçılması, gelen fotonla çekirdek arasında olur. Rayleigh saçılması ile hemen hemen tutarlı sonuçlar vermektedir. Çekirdeğin kütlesi büyük olduğundan etkisi küçüktür [19].

Delbrück Saçılması: Delbrück saçılmaya elastik nükleer saçılma da denebilir ve bu saçılma fotonun, atomun meydana getirdiği elektrik alan ile etkileşmesiyle ortaya çıkar.

Delbrück saçılması diferansiyel tesir kesiti ifadesi [20]

$$\frac{d\sigma}{d\pi} = |a_1(h\nu) + ia_2(h\nu)|^2 = a_1^2(h\nu) + a_2^2(h\nu) \quad (2.1)$$

ile verilir. Burada $a_1(h\nu)$; saçılma genliği reel kısım, $a_2(h\nu)$; saçılma genliği imajiner kısımdır.

Nükleer rezonans saçılma: Bu saçılma, gelen gama ışını tarafından atomun çekirdeği ile etkileşmesi sonucunda nükleer uyarı sağlar, uyarılma enerjisinin tekrardan yayınlanmasını sağlar. Nükleer rezonans saçılmanın tesir kesiti Z^2 ile orantılıdır [21].

Mezon oluşumu: Gelen ışının enerjisinin 150 MeV'den daha büyük olduğu durumlarda meydana gelir. Bu enerjide bile diğer etkileşme süreçleri ile karşılaştırıldığında tesir kesitleri ($\sim 10^{-3}$ barn/atom) kadardır. Bu nedenle ihmal edilebilir [21].

2.1 Fotoelektrik Etkileşme

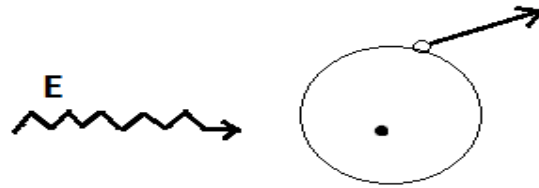
Düşük enerjili ($\sim 0.1\text{MeV}$) gama ışınlarının içerisinde geçtikleri ortamların atomları tarafından soğurulması olayı **fotoelektrik etkileşimdir** [21].

Gelen gama ışını içinden geçtiği ortamın bağlı elektronuyla etkileşerek enerjisinin tamamını elektrona verir ve elektronun ortamdaki uzaklaşmasını sağlar. Uzaklaşan elektrona “ **fotoelektron**” bu olaya da **fotoelektrik etkileşme** denir. Bu etkileşme sonucunda elektronun kinetik enerjisi ortaya çıkar ve bu enerji, gelen gama ışını enerjisiyle elektronun bağlanma enerjisinin farkına eşit olur.

$$E_e = E_\gamma - E_b \quad (2.2)$$

Bu ifadede E_e ; uzaklaşan elektronun kinetik enerjisini, E_γ ; gelen gama ışınının enerjisini, E_b ise elektronun atomun yörüngesine bağlanma enerjisini göstermektedir.

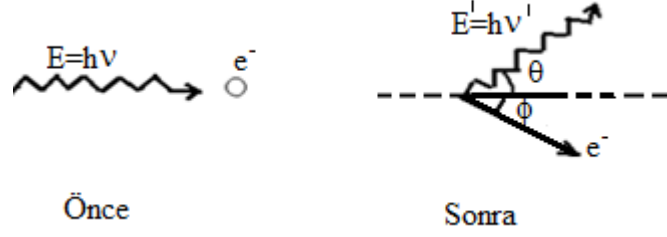
Fotoelektrik etkileşme gerçekleştiğinden sonra atomun yörüngesinde bir boşluk oluşur. Atomun dış yörüngesindeki başka bir elektron bu boşluğu doldurur. Bunun sonucunda x-ışını yayılabilir. Bu ışınlar karakteristik x- ışınıdır. Ayrıca atom bu x-ışınlarını da soğurabilir. Bu olaya Auger olayı denir. Yayınlanan x-ışını dış yörüngeden elektron kopmasına neden olur. Kopan bu elektrona Auger elektronu denir. Bu tip etkileşmeler teorik ve deneysel olarak %80 ihtimalle atomun K kabuğunda meydana gelir [18].



Şekil 2.1: Fotoelektrik etkileşme şematik gösterimi.

2.2 Compton Saçılması

Compton saçılmasında gelen gama ışını atomun elektronu ile etkileşir. Bu etkileşimde gelen gama ışını enerjisinin bir kısmını elektrona kinetik enerji olarak aktarır ve elektron ϕ açısıyla saçılır. Gelen gama ışını da geliş doğrultusuyla θ açısı yapacak şekilde saçılmaya uğrar. Bu saçılma işlemini enerjisini tüketinceye kadar gerçekleştirir.



Şekil 2.2: Compton saçılması şematik gösterimi.

Saçılmaya uğrayan gama ışınının enerjisi E' ise,

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)} \quad (2.3)$$

olarak verilir [18]. Bu ifadede E ; gelen gama ışınının enerjisi, $\cos\theta$; gelen gama ışınının saçılma açısı, $m_e c^2$; durgun kütle enerjisi değeri 0.511 MeV dir.

Diferansiyel ve toplam tesir kesiti ifadeleri serbest elektron modeli kapsamında Klein-Nishina tarafından Eşitlik (2.4)'teki ifade ile verilmiştir [11].

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 r_e^2 P(E, \theta)^2 [P(E, \theta) + P(E, \theta)^{-1} - 1 + \cos^2(\theta)]/2 \quad (2.4)$$

Burada ($d\sigma/d\Omega$) diferansiyel tesir kesiti, $d\Omega$; katı açısı, α ; ince yapı sabiti ($\sim 1/137.04$), $r_c = \hbar/m_e c$ elektronun indirgenmiş Compton dalga boyu ve $P(E, \theta)$ çarpışmadan önce ve sonra foton enerji oranıdır.

2.3 Çift Oluşum

Çift oluşumun gerçekleşebilmesi için gelen gama ışınının enerjisi 1.02 MeV ve üzerinde olmalıdır. Çünkü bir elektron-pozitron çiftinin meydana gelmesi için enerjinin iki durgun kütle enerjisi kadar olması gerekir. Çift oluşum olayı soğurucu ortamın çekirdeğindeki protonların elektrik alanında meydana gelir. Ortama gelen gama ışınının tamamen yok olduğu anda bir elektron-pozitron çifti oluşur. Eğer enerjisi 1.02 MeV'in üzerindeyse fazla enerji elektron-pozitron çiftine kinetik enerji olarak aktarılır [18].

$$E_+ + E_- = E_\gamma - 2m_e c^2 \quad (2.5)$$

Çift oluşumun meydana gelmesindeki toplam tesir kesiti

$$\sigma_\zeta = \sigma_0 Z^2 \left[\frac{28}{9} \ln(183 Z)^{-1/3} - \frac{2}{27} \right] \quad (2.6)$$

ifadesiyle verilir [20]. Burada Z atom numarasıdır ve çift oluşum tesir kesiti Z^2 ile orantılıdır. σ_0 'ın değeri ise

$$\sigma_0 = \frac{1}{137} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 = 5.796 \times 10^{-28} \text{ cm}^2 \quad (2.7)$$

dir.

2.4 Tesir Kesitleri

Fiziksel olaylar çeşitli matematik kavramlarla açıklandığından, tesir kesiti gibi bazı fiziksel olaylar için olasılık kavramlarından yararlanılabilir. Nükleer fizikte çalışmalar radyasyonun madde ile etkileşme esasına dayandığından, gelen radyasyonun, hedef parçacıkla belli bir biçimde etkileşme olasılığını ifade etmenin en kullanışlı yolu tesir kesiti kavramıdır. Bir olayın meydana gelme ihtimalinin ölçüsüne **tesir kesiti** denilebilir [16].

A yüzeyine ve dt kalınlığına sahip bir hedef üzerine, akısı N (parçacık/ $cm^2 \cdot s$) olan bir ışın demeti gönderildiğinde parçacıklar farklı doğrultularda saçılabilirler. Θ ve ϕ açıları ile belirlenen $d\Omega$ katı açılarından birim zamanda geçen parçacık sayısına dN dersek, dN ile katı açı ve başlangıç akısının orantılı olduğu söylenebilir [23].

$$dN = \sigma(\Theta, \phi) \cdot N \cdot d\Omega \quad (2.8)$$

Bu eşitliğe göre $\sigma(\Theta, \phi)$ orantı katsayısı yüzey alanı cinsindedir ve tesir kesiti olarak adlandırılır. Tesir kesitlerinin değeri çok küçük olduğundan birimi barn (b) cinsinden verilebilir.

$$1 b = 10^{-28} m^2$$

dir.

Ortamda saçılan parçacıkların toplam akısını bulmak için Eşitlik (2.8)'in bütün katı açı üzerinden integrali alınır, toplam saçılma tesir kesitini (σ_s) elde etmiş oluruz.

$$N_s = dN = \sigma(\Theta, \phi) \cdot N \cdot d\Omega$$

$$= N.\sigma(\Theta, \phi).d\Omega$$

$$= N.\sigma_s$$

Gama ışınlarının madde ile etkileşmesinde sık görülen olaylar; Compton saçılması(σ_c), fotoelektrik olay (σ_f) ve çift oluşum (σ_γ) olduğundan bu üç olayın tesir kesitlerinin toplamı $\sigma_t = \sigma_f + \sigma_c + \sigma_\gamma$ dir.

Bir gama ışınının dx kalınlığındaki bir yüzeyde etkileşme yapma olasılığına, p dersek; n: birim hacim başına düşen parçacık sayısı olmak üzere

$$p = n.\sigma_t.dx$$

dir.

Yüzeye tek foton yerine I (foton/cm².s) şiddetindeki ışın demeti gönderildiğinde, ışın demetinin dx kalınlığından geçerken gerçekleşen etkileşmeler şöyledir:

$$\frac{dI}{I} = -n.\sigma_t dx \quad (2.9)$$

İşaretin negatif olması kalınlık arttıkça şiddetin azaldığı anlamına gelmektedir.

$$x = 0 \text{ için, } I = I_0$$

olur. Eşitlik (2.9)'un integrali alınırsa,

$$I = I_0 \cdot e^{-n\sigma_t x} \quad (2.10)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem x kalınlığında bir ortama I_0 şiddetinde bir ışın demeti geldiğinde, şiddetinin üstel olarak zayıfladığını göstermektedir. Bu üstel zayıflama parametresi $n\sigma_t$ 'dir. Bu parametre, lineer zayıflama katsayısı olarak adlandırılır ve μ sembolü ile gösterilir.

$$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)} = n \cdot \sigma_t = \frac{N_A \rho}{M} \sigma_t \quad (2.11)$$

Burada N_A ; Avagadro sayısı, ρ ; Ortamın yoğunluğu, M ; Atom ya da Molekül ağırlığıdır.

Eşitlik (2.10)'da yerine yazılarak,

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x} \quad (2.12)$$

ifadesi elde edilir.

Eşitlik (2.12)'deki ifadede x yerine (cm^2/g) biriminde yüzey kalınlığını yazarsak, μ , birim kütle başına alan biriminde olmalıdır. Bu birimde gösterilen katsayıya kütle zayıflama katsayısı denir ve μ_m olarak ifade edilir.

$$\mu_m = \mu / \rho \quad (2.13)$$

Atom başına tesir kesiti ifadesi,

$$\mu_m = m \cdot \sigma / \rho = N_A \cdot \sigma / M \quad (2.14)$$

olarak verilir [24]. Bileşikler için kütle zayıflama katsayısı, o bileşikteki maddeyi oluşturan elementlerin ayrı ayrı kütle zayıflama katsayılarının toplamı ile elde edilir.

$$\mu_m = a_1 \cdot \mu_{m_1} + a_2 \cdot \mu_{m_2} + \dots = \sum_i a_i \cdot \mu_{m_i} \quad (2.15)$$

Burada,

a_1 : i. elementin kütle oranı, μ_{m_i} : i. elementin kütle zayıflama katsayısıdır.

2.5 Diferansiyel Tesir Kesiti

Diferansiyel tesir kesitleri değişik açılarda hedeften saçılma veya yayınlanmayı temsil eder. Ölçülebilir bir büyüklük olup gelen demet eksenine belirli bir (θ, ϕ) açısıyla yayınlanan ve belli enerjiye sahip parçacıkların gözlenmesiyle elde edilir.

Dedektörler yalnızca küçük bir $d\Omega$ katı açısı işgal ederler ve bu nedenle çıkan parçacıkların tümünü algılayamazlar. Bu bakımdan parçacıkların küçük bir kesri sayılır ve tesir kesitinin küçük bir $d\sigma$ kesri elde edilir.

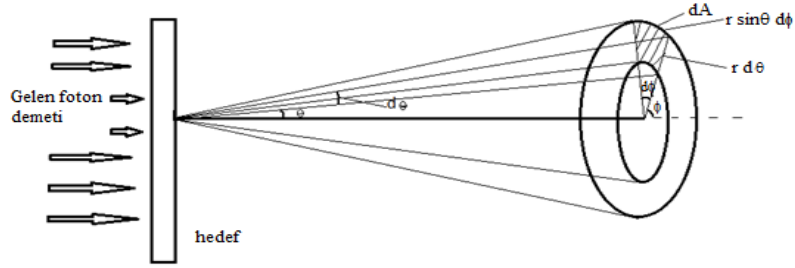
Diferansiyel tesir kesiti, birim katı açı başına tesir kesiti olarak tanımlanır.

$$\sigma(\theta, \phi) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (\text{tesir kesiti/steradyan}) \quad (2.16)$$

ifadesi elde edilir. Buradan toplam saçılma tesir kesiti,

$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (2.17)$$

ifadesi elde edilir. $d\Omega$ katı açısının değerini bulmak için Şekil 2.3'ten faydalanılabilir.



Şekil 2.3: θ açısında $d\theta$ aralığına diferansiyel saçılma.

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(r \cdot d\theta)(r \cdot \sin\theta d\phi)}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.18)$$

Eşitlik (2.17) ve (2.18) ele alındığında

$$\sigma_t = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \sin\theta d\theta d\phi$$

olur. Buradan diferansiyel tesir kesiti ϕ 'ye bağlı değilse,

$$\sigma_t = 2\pi \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \sin\theta d\theta$$

elde edilir.

3. MONTE CARLO YÖNTEMİ

3.1 Monte Carlo Tekniği

Bilimsel uygulamalarda problemler kesin (deterministik) ve tahmini (olası) olmak üzere iki kısımda incelenebilir. *Kesin sistemler*, kuralları kanun hükmünde olan matematiksel yasalarla tanımlanabilen sistemlerdir; örneğin yerçekimi yasası gibi. Burada başlangıç koşulları bilindiğinde sonucun ne olacağı kestirilebilir. Fakat, *tahmini sistemlerin* kuralları muhtemel veya rastlantısal (stochastic) olan istatistiksel yöntemlerle belirlenir; örneğin havaya atılan bir metal paranın, yere düştüğünde yazı veya tura gelmesi gibi. Burada rastlantıdan kasıt, *tahmini sistemlerde*, başlangıç koşulları kesin olarak tayin edilse bile, sonuca dair çözümün tahmin edilmesi anlamındadır.

Bilgisayar ortamında, yazılımsal (veya donanımsal) olarak rastgele sayılar (random numbers) üretmek mümkündür. *Monte Carlo Yöntemleri*, bu rastgele sayıları kullanarak *tahmini sistemleri* modelleyen algoritmalarıdır. Monako'nun kumarhaneleriyle ünlü yerleşim yeri olan Monte Carlo'dan esinlenerek, *tahmini sistemlerin* modellenmesinde kullanılan sayısal analiz yöntemlerine bu isim verilmiştir [25].

Los Alamos Bilimsel Laboratuvar'ından John Von Neumann, Stan Ulam ve Nick Metropolis adlarında üç bilim adamı tarafından ortaya çıkarılmıştır. Metropolis algoritması olarak da bilinir. Algoritma, kesin çözüm yapmanın zor olduğu problemlerde tahmini çözümlere gitmeyi amaçlar. Yani olasılık teorisi üzerine kurulmuştur [25].

1930 yılında İtalyan bir fizikçi olan Enrico Fermi'nin, yeni keşfedilmiş olan *nötronun* özelliklerinin hesaplaması sırasında Monte Carlo yöntemini kullanması ile bu yöntemin adı duyulmuştur [25]. Sınırlı hesaplama kaynaklarına sahip olduğunda sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Örnek olarak Monte Carlo Yöntemi

İkinci Dünya Savaşı sırasında ilk atom bombasının geliştirildiği Manhattan Projesi'nde kullanılmıştır.

Monte Carlo yönteminin temel amacı, büyük elemanlar topluluğunun özelliklerinin rastgele olarak seçilmiş bir alt kümesi aracılığı ile çıkartılmasıdır. Örneğin herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığındaki beklenen değerinin, bu fonksiyonun yine bu aralıkta, rastgele seçilen sonlu sayıdaki noktalarındaki tahmini değerinden çıkartılmasını amaçlar.

Monte Carlo, rastgele sayıları baz alarak tahmini sistemleri modellediği gibi bazı kesin sistemlerde de kullanılabilir; örneğin rastgele sayılarla pi sayısını veya bir fonksiyonun integralini hesaplamak mümkündür. Monte Carlo yöntemleri, Fizik ve Mühendislik alanlarında pek çok uygulama alanı bulmuştur. Bunlardan başlıca olarak Sayısal Analiz, Doğal olayların simülasyonu, Atom ve Molekül Fiziği, Nükleer Fizik ve özellikle Yüksek Enerji Fiziği modellerini test eden simülasyonlar, Deneysel aletlerin (örneğin detektör) simülasyonu, Hücre Simülasyonu, Borsa Modelleri, Dağılım Fonksiyonları sayılabilir.

Tahmini sistemleri modelleyebilmek için, programlama aşamasına geçmeden önce problemi ya da deney sisteminin teorisini çok iyi oluşturmak, ardından bilimsel çalışmalarda sıklıkla kullanılan bilgisayar dilleri yardımıyla Monte Carlo programlarını oluşturmayı iyi derecede öğrenmek gerekmektedir [25].

3.2 Rastgele Sayılar

Monte Carlo kodlarının “gerçek” bir rastgele sayılar kaynağına bir şekilde bağlanması gerekir. Bu rastgele sayılar 0 ile 1 arasında değerler alır ve düzgün dağılımlıdır. Rastgele sayıların elde edilmesinde pek çok yöntem kullanılmıştır. Ancak bu sayılar günümüzde bilgisayar yardımıyla elde edilmektedirler. Rastgele sayıların bilgisayarlarda elde edilmesi için kullanılan yöntemler, genel itibari ile şu gözlemlere dayanmaktadır. Çok rakamlı x ve y sayıları birbiri ile çarpıldığında, çarpım sonucunun ortanca rakamının x ve y 'nin fonksiyonları olduğu önceden tahmin edilememiştir. Bu gözlemlere dayanan “mid-square” tekniği, n . rastgele sayıdan $(n+1)$. rastgele sayıyı belirleyen tekrarlamalardan oluşur. Bu teknikte baştan

verilen ilk sayı ile diğer sayıların geliş sırası belirlenir. Buna rağmen sayılar istatistiksel olarak rastgele bir dağılım gösterirler. Elde edilen bu sayılar sözde rastgele sayılar olarak adlandırılırlar. “mid-square” tekniği Lehmar tarafından geliştirilmiş ve “multiplicative congruential method” olarak adlandırılmıştır [26].

$$x_i = ax_{i-1}(\text{mod } m) \quad (3.1)$$

şeklindedir. x_0 ve a pozitif tam sayılardır. m ise büyük tam sayı olarak belirlenir.

$$q_i = x_i/m \quad (3.2)$$

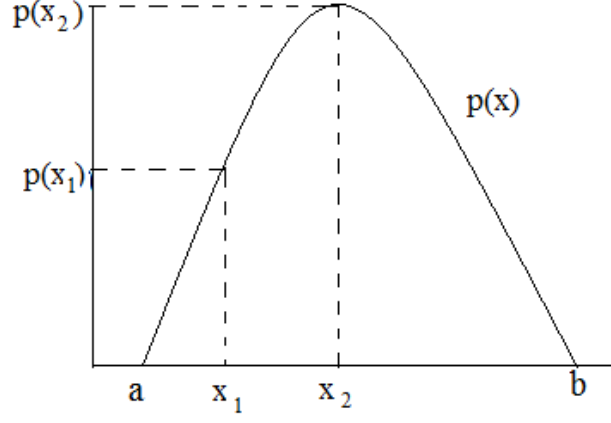
olarak ifade edilir. Lehmer’in yöntemi rastgeleliğe daha yaklaştırılarak “mixed congruential method” adıyla [28]

$$x_i = (ax_{i-1}+c) (\text{mod } m) \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır, burada c seçilmiş uygun bir tam sayıdır.

3.3 Temel Örnekleme Yöntemi

Şekil 3.1 $[a,b]$ aralığında tanımlı karakteristik bir olasılık dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

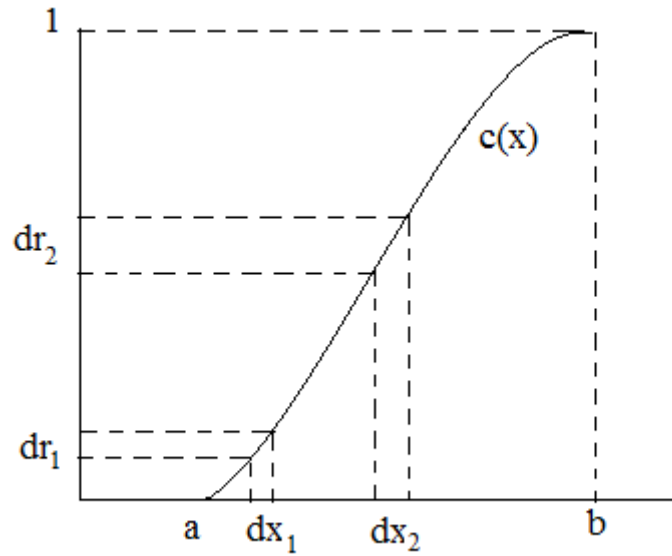


Şekil 3.1: Olasılık dağılım fonksiyonu.

$p(x)$ 'e olasılık dağılım fonksiyonu dersek, toplam olasılık dağılım fonksiyonuna $F(x)$ diyebiliriz.

$$F(x) = \int_0^x dx' p(x') \quad (3.4)$$

olur ve normalize edilirse uygun toplam olasılık dağılım fonksiyonu Şekil 3.2'de verildiği gibi olur.



Şekil 3.2: Toplam olasılık dağılım fonksiyonu.

Toplam olasılık dağılım fonksiyonunun tanımlanmasıyla, bu fonksiyonu rastgele sayılar (q) aralığına eşleyebiliriz. Buradan $q = F(x)$ olarak yazılabilir. Burada q düzgün dağılımlıdır. $0 \leq q \leq 1$ şartını sağlar. Buradan x_1 ve x_2 aralığında x 'in türevini aldığımız iki eşit parçaya bölünmüş iki aralık ele alındığında,

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{(d/dx)F(x)|_{x=x_1}}{(d/dx)F(x)|_{x=x_2}} = \frac{p(x_1)}{p(x_2)} \quad (3.5)$$

olur. Bu ifadede, eğer $[0,1]$ 'da birçok rastgele değişken arasında dq_1 içine düşen sayının dq_2 içine düşen sayıya oranı, x_1 'deki olasılık dağılımının x_2 'deki olasılık dağılımına oranına eşittir. Toplam olasılık dağılım fonksiyonu üzerinde rastgele sayılar eşleştirilerek, x 'i bulmak için fonksiyon tersine çözülebilir.

$$x = F^{-1}(q) \quad (3.6)$$

Düzgün dağılıma sahip rastgele q sayılarından seçilen sayılar ve bu sayıların yukarıdaki denklemde yerine konulmasıyla uygun olasılık dağılım fonksiyonuna göre x değerleri Şekil 3.2'de gösterildiği gibi elde edilir [27].

3.4 Reddetme Yöntemi

Toplam olasılık dağılım fonksiyonunun tersine çözümü, karmaşık matematiksel fonksiyonlarla karşılaşıldığında mümkün olmayabilir, yani $q=F(x)^{-1}$ hesaplanamayabilir. Bu durumda reddetme yöntemi pratik bir sonuç elde etmek için tercih edilir. Yöntemin uygulanış biçimi;

- 1- Olasılık dağılım fonksiyonunun, maksimum olasılık dağılım fonksiyonuna oranlanmasıyla yeni bir dağılım fonksiyonu elde edilir. $x = x_{\max}$ değerinde dağılım fonksiyonu Şekil 3.3 ve 3.4'te görüldüğü gibidir.

$$f(x) = p(x)/p(x_{\max}) \quad (3.7)$$

Bu yöntem, olasılık dağılım fonksiyonunun sonsuz olmadığı durumlarda ve maksimum değer belirlenmesinin kolay olduğu durumlarda kullanılır.

- 2- $[0,1]$ 'da düzgün dağılımlı q_1 gibi gelişigüzel bir sayı seçilir. Bu durumda olasılık dağılım fonksiyonunun $[a,b]$ 'da düzgün dağılımlı bir x elde etmek için kullanılır. Bunun için,

$$x = a+(b-a)q_1 \quad (3.8)$$

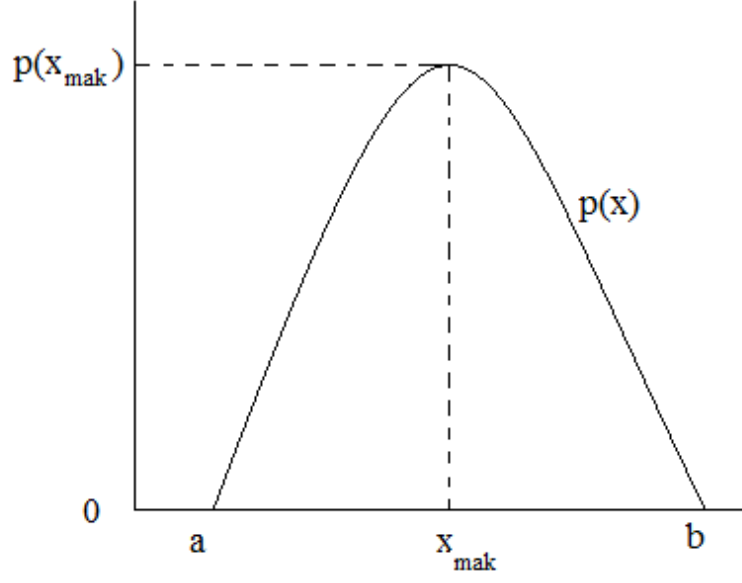
değeri bulunur.

- 3- İkinci bir gelişigüzel q_2 sayısı seçilir. Şayet $q_2 < p(x)/p(x)_{\max}$ ise x değeri kabul edilir, değilse x değeri reddedilir. Buradan tekrar 2. adıma geri dönülür.

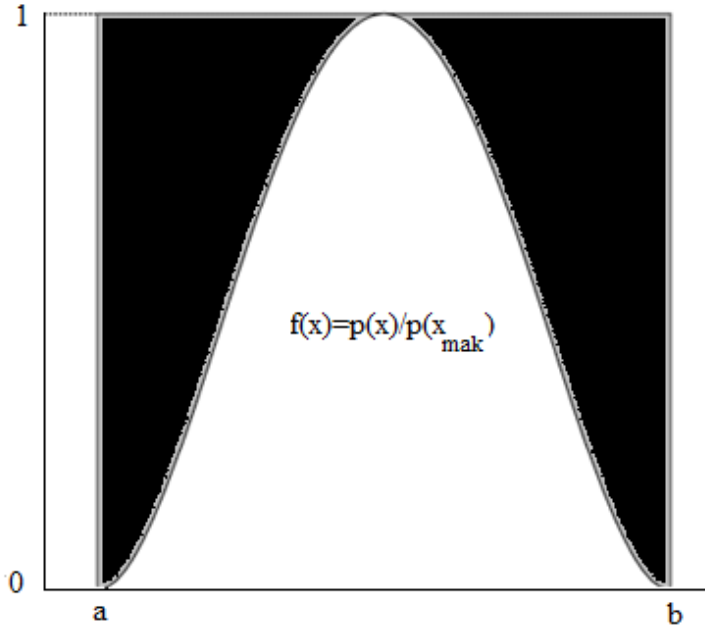
Reddetme yönteminin verimi;

$$\varepsilon = \frac{1}{p(x_{\max})} \int_a^b dx p(x) \quad (3.9)$$

olarak hesaplanabilir. Bu ifade, kabul edilen gelişigüzel sayı çiftlerinin beklenen değerinin, kullanılan çiftlerin toplam değerine oranıdır.



Şekil 3.3: Reddetme yöntemi için olasılık dağılım fonksiyonu.



Şekil 3.4: Bölünmüş olasılık dağılım fonksiyonu.

Bu yöntem sayesinde olasılık dağılım fonksiyonuna göre x değeri seçilmiş olur [27].

4. TESİR KESİTİ HESAPLAMALARI VE OLAYLARIN ÖRNEKLENMESİ

4.1 Soğurucu Ortamların Compton Saçılması ve Fotoelektrik Etkileşme Tesir Kesiti Hesabı

Bir etkileşme sürecinin gerçekleşme olasılığının tesir kesiti olarak ifade edildiğini biliyoruz [28]. Bu çalışmada gama ışınlarının fotoelektrik etkileşme ve Compton saçılması tesir kesiti hesapları için Berger ve ark. (2010) tarafından geliştirilmiş XCOM veri tabanı kullanılmıştır [29]. Bu program yardımıyla 1 keV-100 GeV enerji aralığında element, bileşik veya karışımlar için tesir kesitlerinin hesaplanması mümkündür.

Soğurucu ortamlarda fotoelektrik etkileşme ve Compton saçılması tesir kesitlerinin hesaplanabilmesi için öncelikle XCOM veri tabanından 10-5000 keV enerji aralığında tesir kesitleri (cm^2/g) cinsinden alınmış ve ortamların yoğunluk değerleriyle çarpılarak lineer zayıflama katsayısına (cm^{-1}) dönüştürülmüştür. Her bir etkileşme için sürekli tesir kesiti ifadelerine ihtiyaç olduğundan çalışılan enerji aralığında bu değerlere

$$\mu = e^{(p_1 + p_2x + p_3x^2 + p_4x^3 + p_5x^4)} \quad (4.1)$$

polinomial ifade kullanılarak fit yapılmış bunun için KaleidaGraph ve Prof. Dr. Emin N. Özmutlu tarafından geliştirilmiş Quasi-Newton Minimizer programlarının her ikisi de kullanılarak parametreler (p_i) belirlenmiş ve karşılaştırılmıştır. Sonuçlar birbirine çok yakın olduğundan, KaleidaGraph programıyla elde edilen parametreler tercih edilmiştir, burada $x = \ln E$ (MeV)'dir.

Çalışılan bazı ortam atomlarında enerji değerleri atomun K, L gibi enerji seviyelerine karşılık geldiğinden bu enerjilerde fotoelektrik etkileşme tesir kesitleri iki farklı değer almaktadır. Bu durum dikkate alınarak bu enerji seviyelerindeki kesikliklere bağlı enerji bölgelerine ayrılarak fitler yapılmıştır.

Gama ışınlarının takibinin yapıldığı ortamlardan, su, beton ve kemik için kimyasal bileşimler Tablo 4.1’de [30] ve çalışılan her bir ortam için elde edilen parametreler Tablo 4.2 - 4.9’da verilmiştir.

Ayrıca fotoelektrik etkileşme ve Compton saçılması tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimlerine örnekler çalışılan ortamlardan gümüş, altın ve kemik için sırası ile Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’de verilmiştir.

Tablo 4.1: Su, kemik ve beton ortamlarının yoğunlukları ve kimyasal bileşimi.

Element	Kemik $\rho = 1.92 \text{ g/cm}^3$	Su $\rho = 1.00 \text{ g/cm}^3$	Beton $\rho = 2.30 \text{ g/cm}^3$
H	3.4	11.19	0.56
C	15.5	-	-
N	4.2	-	-
O	43.5	88.81	49.83
Na	0.1	-	1.71
Mg	0.2	-	0.24
P	10.3	-	-
S	0.3	-	0.12
Cl	-	-	-
Al	-	-	4.56
Si	-	-	31.58
K	-	-	1.92
Fe	-	-	1.22
Ca	22.5	-	8.26

Tablo 4.2: Kemik ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

Etkileşme Türü	Parametreler				
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-2.074	-0.49286	-0.052507	0.8003×10^{-3}	-0.8944×10^{-3}
Fotoelektrik etkileşme (0.01-5 MeV)	-9.4813	-2.154	0.34717	0.026491	-0.0028551

Tablo 4.3: Su ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-2.6506	-0.49306	-0.052294	0.00045806	-0.00074609
Fotoelektrik etkileşme (0.01-5 MeV)	-12.499	-2.1605	0.37315	0.02582	-0.002887

Tablo 4.4: Beton ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-1.9221	-0.49212	-0.052237	0.0005729	-0.001066
Fotoelektrik etkileşme (0.01-5 MeV)	-9.4588	-2.1544	0.35001	0.026314	-0.002844

Tablo 4.5: Çinko ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-0.87837	-0.489	-0.054588	0.0017132	-0.0014694
Fotoelektrik etkileşme (0.01-5 MeV)	-5.4594	-2.1454	0.32368	0.026467	-0.0029758

Tablo 4.6: Gümüş ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-0.5446	-0.49255	-0.058321	0.005596	-0.000772
Fotoelektrik etkileşme (0.01-0.02551MeV)	-6.1104	-2.8236	0.05278	0.009237	
Fotoelektrik etkileşme (0.02551-5 MeV)	-3.5128	-2.088	0.30248	0.007786	-0.008337

Tablo 4.7: Kalay ortamına etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

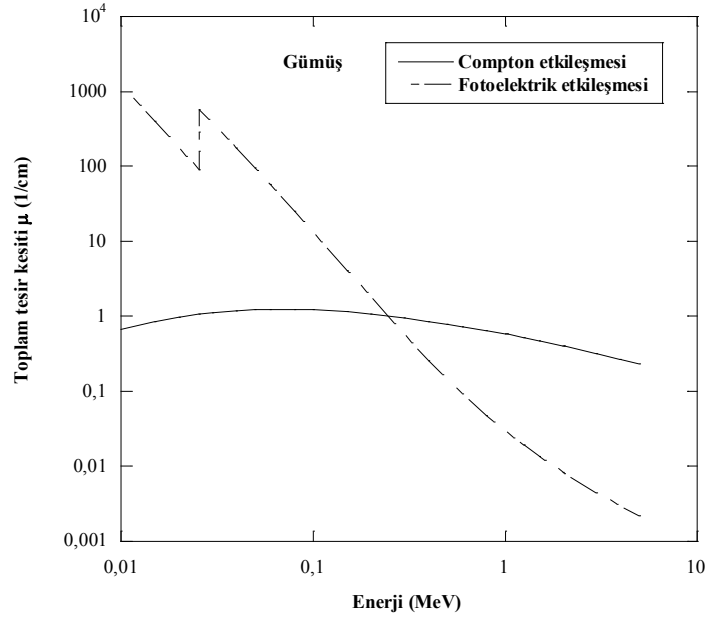
Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-0.94096	-0.49173	-0.058982	0.0056669	-0.00075171
Fotoelektrik etkileşme (0.01-0.0292MeV)	-5.7639	-2.4441	0.14381	0.016812	
Fotoelektrik etkileşme (0.0292-5 MeV)	-3.6904	-2.0818	0.29922	0.006304	-0.0089115

Tablo 4.8: Altın ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

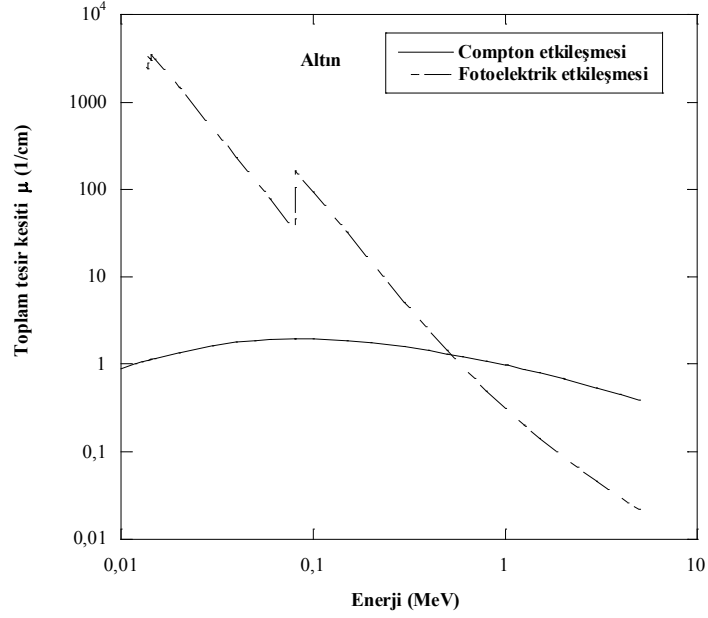
Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-0.021963	-0.49109	-0.062281	0.0086722	-0.000444
Fotoelektrik etkileşme (0.01192-0.01373MeV)	-0.84082	-1.3368	0.15746		
Fotoelektrik etkileşme (0.01373-0.01435MeV)	-20.45	-10.95	-1.0002		
Fotoelektrik etkileşme (0.01435-0.08072MeV)	-4.2889	-3.7938	-0.47919	-0.10477	-0.009364
Fotoelektrik etkileşme (0.08072-5 MeV)	-1.1701	-2.0247	0.26809	-0.001259	-0.01356

Tablo 4.9: Kurşun ortamına ait etkileşme tesir kesitleri için parametreler.

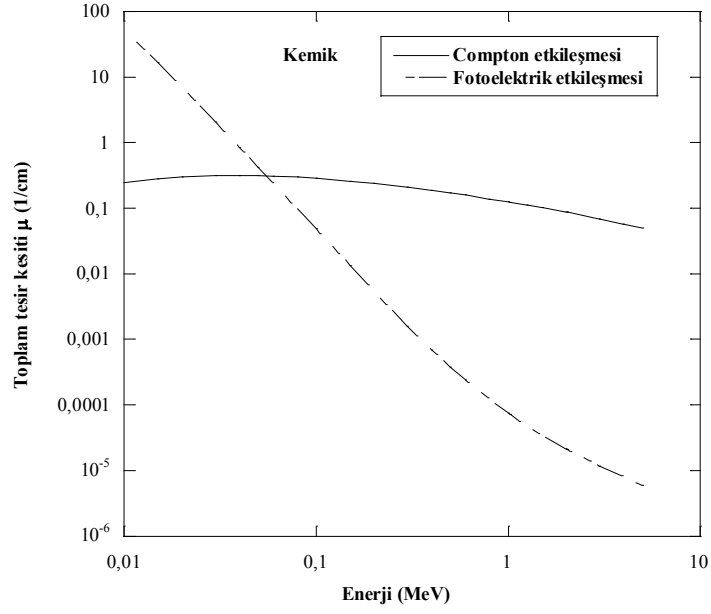
Etkileşme Türü	Parametreler				
	p₁	p₂	p₃	p₄	p₅
Compton saçılması (0.01-5 MeV)	-0.56742	-0.49136	-0.06290	0.0091303	-0.000336
Fotoelektrik etkileşme (0.01304-0.0152 MeV)	5.9353	2.0734	0.56049		
Fotoelektrik etkileşme (0.0152-0.01586 MeV)	-16.976	-9.2985	-0.82987		
Fotoelektrik etkileşme (0.01586-0.088 MeV)	-5.1016	-4.3681	-0.7741	-0.16957	-0.014658
Fotoelektrik etkileşme (0.088-5 MeV)	-1.585	-2.0203	0.26254	-0.0004892	-0.01334



Şekil 4.1: Gümüş ortam için tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimi.



Şekil 4.2: Altın ortam için tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimi.



Şekil 4.3: Kemik ortam için tesir kesitlerinin enerjiye bağlı değişimi.

4.2 Serbest Yolun Örneklenmesi

Herhangi bir ortam içine giren I_0 şiddetindeki gama ışınlarının şiddetindeki azalma Eşitlik (4.2) ile verilir.

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (4.2)$$

Bu eşitlikteki x , gama ışınının etkileşme yapmadan önce aldığı yolu ifade eder. Buradan yola çıkarak serbest yol örneklenmesinde dağılım fonksiyonuna $g(x)$ dersek,

$$g(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (4.3)$$

olarak yazılır. Buradan olasılık dağılım fonksiyonu, $p(x)$;

$$p(x) = \frac{g(x)}{\int_0^{\infty} g(x) dx} = \frac{I_0 e^{-\mu x}}{\int_0^{\infty} I_0 e^{-\mu x} dx} = \mu e^{-\mu x}$$

elde edilir. Buradan da toplam olasılık dağılım fonksiyonu $F(x)$, aşağıdaki gibi olur.

$$F(x) = \int_0^{\ell} p(x') dx' = \int_0^{\ell} \mu e^{-\mu x'} dx' = - \left| e^{-\mu x'} \right|_0^{\ell} = 1 - e^{-\mu \ell}$$

Toplam olasılık dağılım fonksiyonu üzerinde rastgele sayılar Eşitlik (4.4)'te verildiği gibi eşleştirilir ve x 'i bulmak için denklemin tersine çözümü yapılırsa,

$$F(x) = 1 - e^{-\mu \ell} = q$$

$$e^{-\mu \ell} = 1 - q \quad (4.4)$$

olur. q rastgele sayıları düzgün dağılımlı olduğundan $1 - q = q$ alınabilir ve Eşitlik (4.4) düzenlenirse

$$e^{-\mu \ell} = q$$

olarak daha basit bir ifadeye indirgenir, ℓ çekildiğinde

$$\ell = -\frac{\ln q}{\mu} \quad (4.5)$$

olur. Burada ℓ ; gama ışınının etkileşme yapmadan önce aldığı serbest yol (cm), μ ise fotoelektrik etkileşme ve Compton saçılması tesir kesitleri (cm^{-1}) toplamıdır.

4.3 Etkileşme Türünün Örneklenmesi

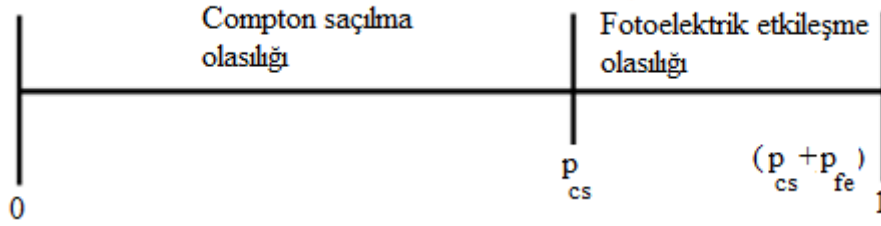
Gama ışınının soğurucu ortamda bir miktar serbest yol aldıktan sonra, ortamı terk edip etmediği kontrol edilir ve gama ışınının ortam içinde kaldığı tespit edilirse serbest yolun sonunda gerçekleştirdiği etkileşme türü örneklenir. Bu çalışmada kullanılan gama ışını enerjisi üst sınırı 5 MeV seçildiğinden, çift oluşum etkileşmesinin gerçekleşme ihtimalinin düşük olması nedeniyle ihmal edilmiş, sadece Compton saçılması ve fotoelektrik etkileşmeleri ele alınmıştır.

Gama ışınlarının takibinin yapıldığı ortamın Compton saçılması tesir kesiti μ_{cs} , fotoelektrik etkileşme tesir kesiti μ_{fe} ile gösterilirse toplam tesir kesiti $\mu_t = \mu_{cs} + \mu_{fe}$ olur. Bu iki etkileşmenin meydana gelme olasılıkları, Compton saçılması için p_{cs} ve fotoelektrik etkileşme için p_{fe} aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$p_{cs} = \mu_{cs} / \mu$$

$$p_{fe} = \mu_{fe} / \mu$$

Hesaplanan olasılıklar 0 ile 1 arasında değer aldıklarından, 0 ile 1 arasında düzgün dağılımlı bir rastgele sayı eksenini ele alınır. Bu eksen Compton saçılması ve fotoelektrik etkileşme süreçleri için iki bölgeye ayrılır. Bu bölgelerin büyüklükleri elde edilen olasılık değerlerinin büyüklüğü kadardır. Rastgele sayı ekseninin sonuç bölgelerine ayrılması Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4: Rastgele sayı eksenine etkileşme sonuç bölgelerinin yerleştirilmesi.

Kullanılan kodun rastgele sayı üreten fonksiyonundan gelen bir rastgele sayı, fotoelektrik etkileşme olasılığından küçükse ($q < \mu_{fe}/\mu$) etkileşme türünün, fotoelektrik etkileşme olduğu sonucuna varılır. ($q \geq \mu_{fe}/\mu$) ise Compton saçılmasının gerçekleştiği sonucuna varılır.

4.4 Compton Saçılma Açısının Örneklenmesi

Serbest bir elektronla, gama fotonu arasında gerçekleşen Compton saçılması sonrasında, E enerjisiyle gelen fotonun θ saçılma açısının ne değer alacağını saptamak gerekir. Korunum yasaları yardımı ile saçılan fotonun E' enerjisi hesaplanabilir. Compton saçılmasının makroskobik incelemesinde θ açısı gelişigüzel bir değişkendir ve bu değişkenin sıklık fonksiyonu, diferansiyel tesir kesitidir. Bu tesir kesiti Klein-Nishina tarafından kuantum mekaniği yardımıyla hesaplanarak Denklem (4.6)'da verilmiştir [22].

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1 + \cos^2\theta \frac{k^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + k(1 - \cos\theta)}}{(1 + k(1 - \cos\theta))^2} \quad (4.6)$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = -2\pi d(\cos\theta)$$

$$r_e^2 = 7.94 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \text{ ya da } 0.0794 \text{ barn, } k = \frac{E(\text{MeV})}{0.511}$$

Compton saçılmasında fotonun saçılma açısı θ örneklenmek istendiğinde karşılaşılan ilk sorun Denklem (4.6)'nın integrali alınabilirken bulunan ifadenin tersine çözülemesidir. İkinci sorun ise sıklık fonksiyonunun gelen gama ışınının enerjisine bağlı olmasıdır. Bu problemi birçok araştırmacı farklı yöntemlerle çözmeye çalışmıştır [31].

Bu çalışmada saçılma sonrası kutup açısının kosinüsünün reddetme yöntemiyle örneklenmesinde Özmutlu (1992) tarafından Klein-Nishina diferansiyel tesir kesiti ifadesi temel alınarak geliştirilen algoritma kullanılmıştır [32]. Özmutlu Klein-Nishina açısal dağılımının örneklenmesinde $r(t) = a(k)/b(k)-t$ şeklinde bir örten reddetme fonksiyonu önermiştir.

Ayrıca saçılma açısının kosinüsünün örneklenmesi için Denklem (4.6)'da $\cos\theta = x$, dersek ve $d(\cos\theta) = dx$

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \pi r_e^2 \int_{-1}^1 \frac{1 + x^2 + \frac{k^2(1-x)^2}{1+k(1-x)}}{(1 + k(1-x))^2} dx \\ &= \pi r_e^2 \int_{-1}^1 A(k, x) dx\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada integral alınarak

$$\frac{\pi r_e^2 \int_{-1}^x A(k, x') dx'}{\pi r_e^2 \int_{-1}^1 A(k, x') dx'} = P(k, x)$$

fonksiyonu yardımıyla çeşitli k (0.01, 0.1, 1,10) değerleri için

$$P(k, x) = q, x = P^{-1}(k, q)$$

sayısal değerler bulunabilir. Farklı k değerlerinin tümünü birden verecek analitik ifade Özmutlu ve Aydın (1989) tarafından

$$\cos\theta = P^{-1}(q, k) = 2q - 1 + (q - q^2)(A_1(k) + A_2(k)q + A_3(k)q^2 + A_4(k)q^3) \quad (4.7)$$

$$A_1 = 5.6613(1.5233 - \exp(-0.043334k)) - 3.5376 \cdot \exp(-0.39113k)$$

$$A_2 = -37.047(1 + 0.0011739k) + [96.969(k + 0.35469)] / (1 + 1.5216k + 0.59381k^{1.3773})$$

$$A_3 = 40.238(1 + 0.0031476k) - [104.51(k + 0.28547)] / (1 + 1.2273k + 0.59744k^{1.3436})$$

$$A_4 = -20.9 + [54.28(k + 0.226)^{0.924}] / (1 + 1.79k + 0.0252k^2)$$

şeklinde önerilmiştir. $A_i(k)$ katsayıları için Aydın (1989) çalışmasından alınan değerler kullanılarak Compton saçılma açısının reddetme yönteminden farklı bir yöntemle de örneklenmesi mümkün olmuştur. Geri saçılan gamaların enerji dağılımlarına saçılma açısı örneklemelerinin etkisi ise, Bölüm 5.3'te tartışılmıştır.

4.5 Gama Işını Doğrultusunun Örneklenmesi

Radyoaktif bir kaynaktan izotropik olarak yayınlanan gama ışınlarının hareket doğrultuları, kutup açısı (θ) ve azimut açısı (ϕ) kullanılarak bulunur. Burada kutup açısı ve azimut açısının örneklenmesi gerekir. Kutup açısının örneklenmesinde dağılım fonksiyonu olarak Eşitlik (4.8)'de verilen $d\Omega$ gibi bir katı açısı alınarak, bu fonksiyona temel Monte Carlo yöntemi uygulanırsa, olasılık dağılım fonksiyonu $p(\theta, \phi)$ Eşitlik (4.9)'daki gibi olur.

$$g(\theta, \phi) = d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (4.8)$$

$$p(\theta, \phi) = \frac{g(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \phi)} = \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi} = \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi} \quad (4.9)$$

Burada toplam olasılık dağılım fonksiyonu, $F(\theta)$

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\theta', \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' d\phi = \frac{1}{4\pi} 2\pi \int_0^\theta \sin\theta' d\theta' \\ &= \frac{1}{2} [-\cos\theta'] = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Tersine çözüm yapılırsa kutup açısının kosinüsü

$$F(\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) = q$$

$$\cos\theta = 1 - 2q \quad (4.10)$$

örneklenmiş olur.

Sonsuz dilim geometride çalışıldığında, 90° den büyük açılarla saçılan gamaların ileri geçme olasılıkları olmadığından

$$\cos\theta = q \quad (4.11)$$

ifadesiyle örneklenmelidir.

Hareket doğrultusu belirlenmesinde bir diğer bileşen olarak azimut açısının örneklenmesi, gama ışınları azimut açısı olan ϕ 'ye göre düzgün dağılımlıdır. Buradan

$$\phi = 2\pi q \quad (4.12)$$

olarak örneklenir.

4.6 Monte Carlo Yöntemi ile Gama Işını Takibi

Ortama giren gama fotonu yapacağı ilk etkileşmeye kadar belli bir mesafe ilerler, bilindiği üzere bu mesafeye ortalama serbest yol ℓ denir. Fotonun geliş enerjisi için tesir kesiti hesaplanarak, ilk serbest yolu örneklenir. Foton aldığı ortalama serbest yoldan sonra hedef ortamın atomları ile etkileşme yapar. Bu çalışmada seçilen enerji üst sınırı düşük olduğu için sadece fotoelektrik olay ve Compton saçılması ele alınmıştır. O halde foton ilk serbest yolunun sonunda fotoelektrik olay ve Compton saçılmasından birisini gerçekleştirecektir. Program içinde gelişigüzel sayı yardımıyla etkileşmenin türü örneklenir.

Eğer etkileşme fotoelektrik olay ise, foton tüm enerjisini ortamdaki bir atomik elektrona aktarmıştır, yani tamamen soğurulduğu kabul edilerek takibine son verilir. Etkileşme türü Compton saçılması ise, etkileşmeden önce ve sonraki yönleri arasında kalan saçılma açısı ve enerjisinin bulunması gerekir. Fotonun doğrultusu küresel koordinatlarda kutup açısı θ ve azimut açısı ϕ ile belirlenir ve Bölüm 4.5'te temel örnekleme ilkesinden yararlanılarak nasıl örnekleneceği anlatılmıştır.

Foton ortama ilk girdiğinde z eksenine doğrultusunda daha önce örneklenen ortalama serbest yolu ℓ 'yi aldıktan sonra $(0,0,\ell)$ noktasında hedef atomla etkileşir. Etkileşme türüne bağlı olarak inceleme yapılır. Etkileşme Compton saçılması ise

fotonun saçıldıktan sonraki hareket doğrultusunu bulmak için doğrultman kosinüslerinden,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin \theta \cos \phi \\ \beta &= \sin \theta \sin \phi \\ \gamma &= \cos \theta\end{aligned}\tag{4.13}$$

yararlanılır.

Doğrultusu belirlenen foton, yeni bir ℓ' serbest yolu alır ve yolun sonunda tekrar hedef ortam atomlarıyla yaptığı etkileşmenin türü örneklenir ve fotonun yeni hareket doğrultusu belirlenir. Bu belirlemeyi yapabilmek için yeni bir $x' y' z'$ koordinat sistemi seçilir ve bu sistemde fotonun hareket doğrultusu z' dür. Yeni seçilen bu koordinat sisteminde fotonun saçılma açıları θ' ve ϕ' olur ve doğrultman kosinüsleri ise,

$$\begin{aligned}\alpha' &= \sin \theta' \cos \phi' \\ \beta' &= \sin \theta' \sin \phi' \\ \gamma' &= \cos \theta'\end{aligned}\tag{4.14}$$

dir. Bu ifadeler yardımı ile fotonun yeni koordinat sistemindeki hareket doğrultusu bulunur. Koordinat dönüşümlerinin ayrıntıları Ek A'da verilmiştir.

Fotonun ilk etkileşme yaptığı noktanın koordinatlarına x_1, y_1, z_1 dersek, ikinci etkileşmeyi yaptığı noktanın koordinatları

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l' \alpha \\y_2 &= y_1 + l' \beta \\z_2 &= z_1 + l' \gamma\end{aligned}\tag{4.15}$$

ifadeleri yardımıyla hesaplanır. Anlatılan bu işlem basamakları bundan sonraki etkileşmeler için de tekrarlanır.

Bu çalışmada fotonların belli kalınlıklardan geri saçılma olasılıklarının hesaplanması ve enerji dağılımlarının elde edilmesi amaçlandığından z düzlemi d mesafesinde kesilerek fotonların o kalınlıkta yapacağı etkileşmeler takip edilmiştir. Foton d kalınlığına eşit ya da daha büyük bir koordinatta ise ortamı ileri yönde terk etmiş demektir ve takip durdurularak, yeni bir foton izlenmeye başlanır. Eğer etkileşme noktası z koordinatı d den büyük ya da eşit değilse foton ortam içerisinde etkileşme yapıyor demektir bu nedenle ardı ardına etkileşmelerin izlenmesi gerekir. Ortam içerisine gelen foton geri saçılana ya da belli bir kesilme enerjisinin altına düşene kadar izlenir. Bu çalışmada kesilme enerjisi 10 keV alınmıştır.

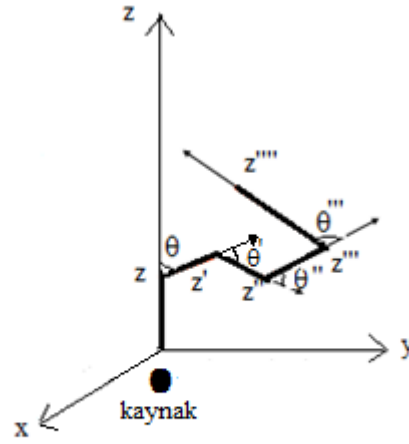
5. BULGULAR

5.1 Çalışma Koşulları

Çalışmalar homojen demet şeklinde 0.279, 0.662, 1.25 ve 2.1 MeV enerjili gama ışınlarının kullanıldığı sonsuz ve sonsuz dilim olmak üzere iki farklı geometrili su, kemik, beton, çinko (Zn), gümüş (Ag), kalay (Sn), altın (Au), ve kurşun (Pb) ortamlarda yapılmıştır. Bu enerji değerlerinin en büyüğü olan 2.1 MeV enerji değerinde bile çift oluşum olma olasılığı çok küçük olduğundan bu olay ihmal edilerek gama ışınlarının ortamda ya fotoelektrik etkileşme yaparak soğurulduğu ya da Compton saçılması yaparak enerjisinin bir kısmını ortama bıraktığı kabul edilmiştir.

Ortama yönelmiş bir gama ışınının ortam içinde ilk serbest yolu aldıktan sonra, ortamda olup olmadığına bakılmıştır. Gama ışınlarının enerji dağılımlarını elde etmek için, ortamdaki ayrılmış ise mevcut enerjisiyle ait olduğu enerji bölmesine yerleştirilmiştir. Eğer gama ışını ortamdaysa etkileşme türü örneklenmelidir. Gama ışını fotoelektrik etkileşme yapmışsa ortamda soğurulur ve takip bırakılıp yeni bir gama ışını takibi yapılmıştır. Gama ışını serbest yol aldıktan sonra Compton saçılması yapmışsa, saçılma açısı ve enerjisi belirlenmeli ve saçılma sonunda ortamda kalıp kalmadığına bakılmalıdır. Gama ışını ortamdaki ayrılmışsa mevcut enerjisiyle ait olduğu enerji bölmesine yerleştirilmiştir. Aynı gama ışını birinci saçılmadan sonra ortamdaki ayrılmamış ise tekrar etkileşme türü belirlenmelidir. Etkileşme türü fotoelektrik ise ortamda soğurulduğundan, yeni bir gama ışını takibine geçilmelidir. Etkileşme fotoelektrik değilse gama ışını enerjisi 0.01 MeV'in altına düşene kadar benzer şekilde takibe devam edilmelidir. Bu işlemler 20.000 ile 100.000 gama ışını üzerinde yapılmış ve bunlardan ortamı geri yönde terk edenler, terk ettikleri enerji değerleri ile spektruma yerleştirilmiştir. Bir başka deyişle ortamı geri yönde terk eden gama ışını sayıları sahip oldukları enerji aralıklarında toplanarak, enerjiye bağlı değişimleri belirlenmiştir.

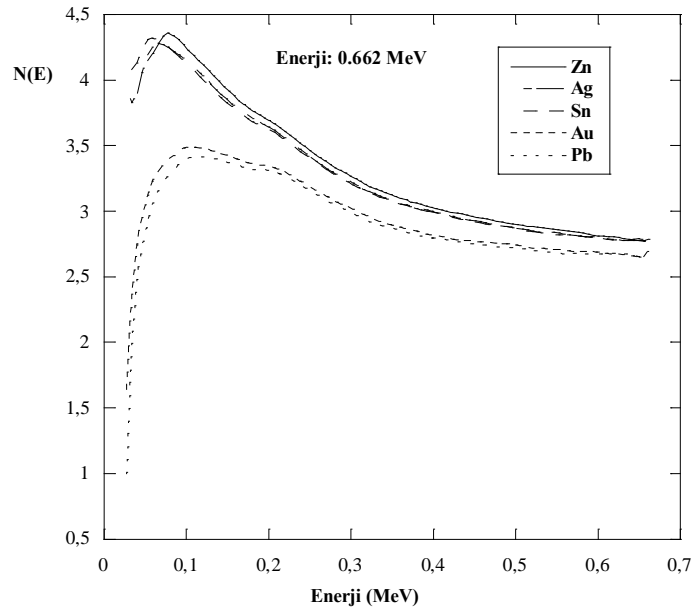
5.2 Sonsuz Ortamlarda Art Arda Saçılma Yapmış Gamaların Enerji Dağılımları



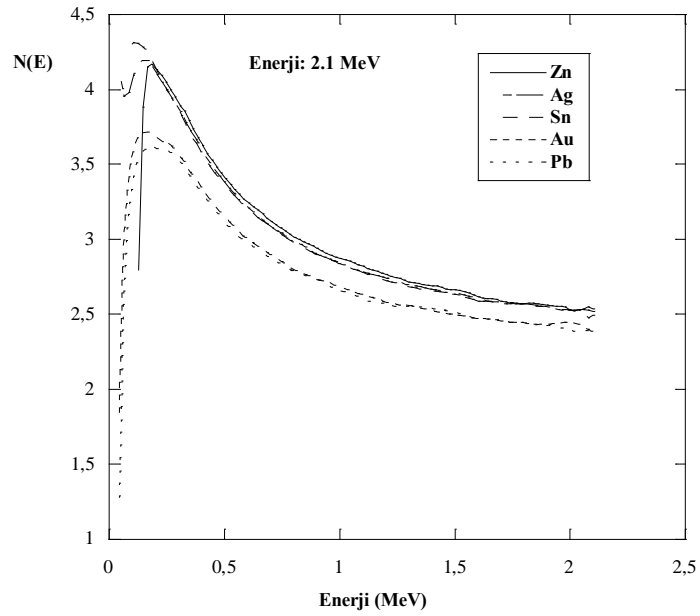
Sonsuz ortama gelen monoenerjik gama ışınları

Şekil 5.1: Sonsuz ortamda ardışık saçılmalar ve koordinat sistemi.

Şekil 5.1’de görülen sonsuz ortam geometrisinde, art arda saçılmalar yapan gamaların enerji dağılımları hesaplanmış, çeşitli enerji değerleri ve ortamlar için elde edilen dağılımların birbirine çok benzediği görülmüştür. Dağılımlar düşük enerji bölgesinde anlık bir artışla maksimum bir değere ulaştıktan sonra hızlı bir şekilde azalmaktadır. Bu maksimuma karşılık gelen enerji değeri en olası enerji değeri (E_0) olarak yorumlanmıştır. Enerji dağılımları küçük bir enerji bölgesinde meydana geldiğinden dolayı yarı logaritmik olarak çizilmiş ve dağılımlara tipik örnekler Şekil 5.2, 5.3, 5.4 ve 5.5’te verilmiştir. Dağılımlarda; $N(E)$; ortamda E enerjisine sahip olan gama ışını sayısını, E; kaynağın enerjisini, Z; ortamın atom numarasını göstermektedir.

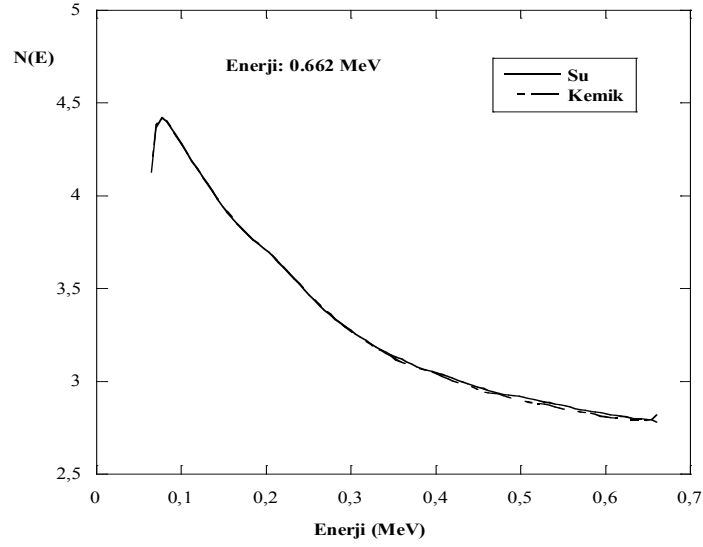


Şekil 5.2: 0.662 MeV enerjili gamaların sonsuz ortamlarda enerji dağılımları.

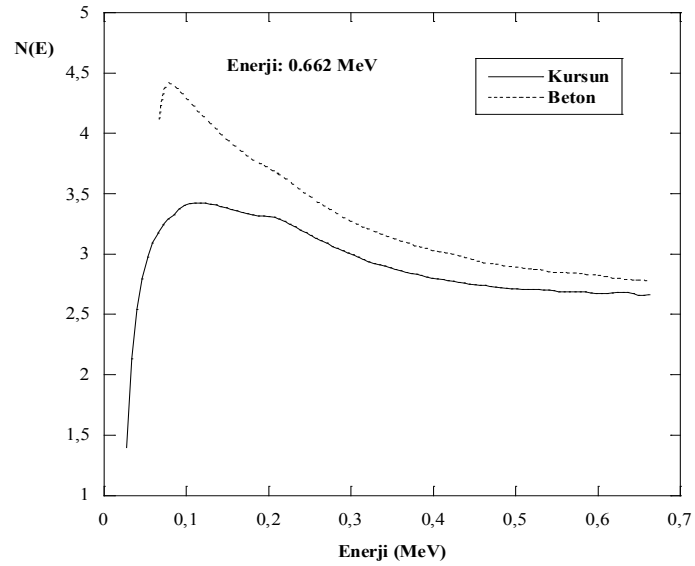


Şekil 5.3: 2.1 MeV enerjili gamaların sonsuz ortamlarda enerji dağılımları.

Şekil 5.2 ve 5.3'te sırasıyla 0.662 ve 2.1 MeV enerjide metalik ortamlara gelerek ardışık saçılmalar yapan gamaların elde edilen enerji spektrumları çizilmiştir.



Şekil 5.4: Su ve kemik ortamda art arda saçılan gamaların enerji dağılımı.



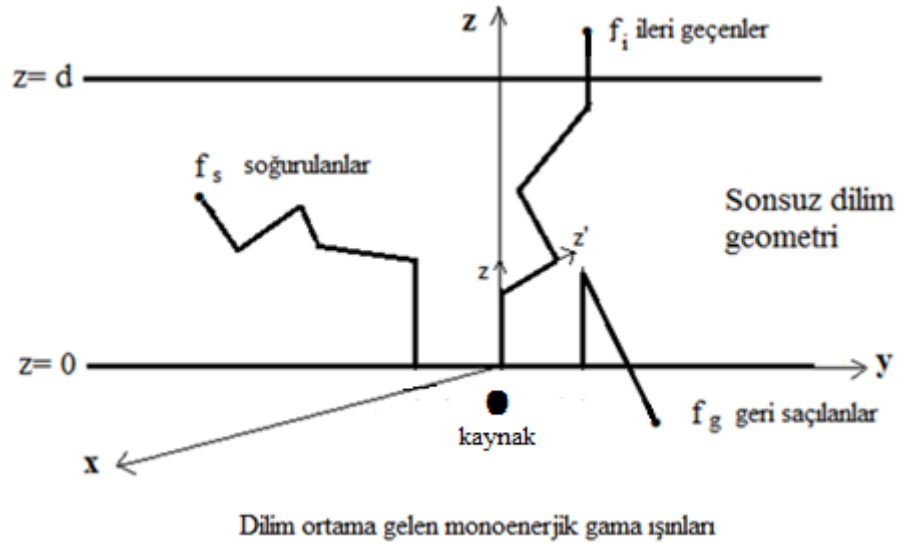
Şekil 5.5: Kurşun ve beton ortamda art arda saçılan gamaların enerji dağılımı.

Şekil 5.4'te su ve kemik, Şekil 5.5'te ise kurşun ve beton ortamlardaki 0.662 MeV enerjili gamaların ardışık saçılmalar sonucu oluşan enerji dağılımları karşılaştırılmıştır. Gama ışınlarının en olası enerji değeri (E_0) ve ortamın atom numarası arasında bir ilişki kurulabileceği konusunda teorik ve Monte Carlo yöntemiyle yapılan İde'nin [33] çalışmasında sunulan enerji dağılımlarıyla uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. İde'nin [33] çalışmasına dayanarak, en olası enerji değerinin ortamın atom numarasına bağımlılığı için genel bir ifade a ve b sabitler olmak üzere

$$E_0 = a.Z^b \quad (5.1)$$

formunda yazılabilir, burada $a = 9.09 \times 10^{-3}$, $b = 0.889$ dir.

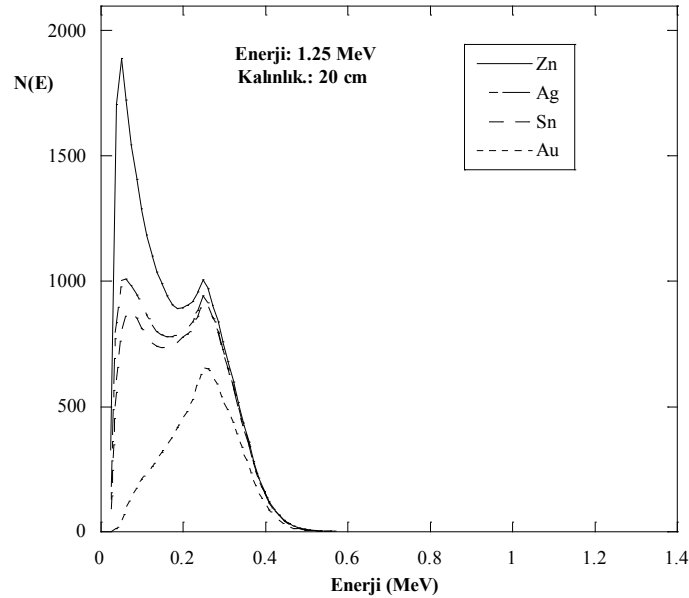
5.3 Dilim Ortamlardan Geri Saçılan Gamaların Enerji Dağılımları



Şekil 5.6: Sonsuz dilim ortamda saçılmalar.

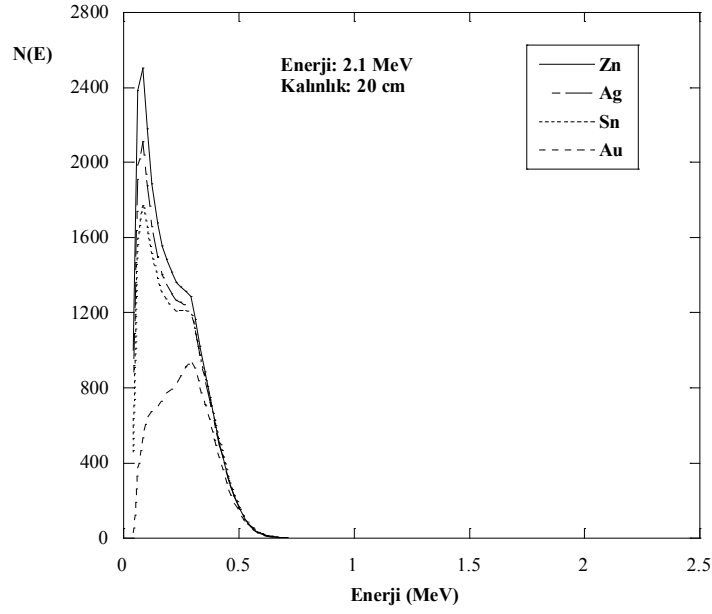
Gama ışınlarının temel karakteristiği olabilecek enerji dağılımları; metalik, biyolojik ve koruyucu ortamlardan geri saçılmalar için Şekil 5.6'da görülen geometride hesaplanmış, elde edilen sonuçlara çeşitli örnekler verilmiştir.

Etkileşme mekanizması parçacığın çeşidine ve enerjisine bağlı olduğu gibi girdiği ortamın atomunun proton sayısına ve yoğunluğuna bağlı olarak değiştiğinden öncelikle geri saçılma enerji dağılımlarının ortama bağlılığı incelenmiştir. Bunun için aynı enerjili gama ışınları keyfi olarak seçilen aynı kalınlıklardaki çinko, gümüş, kalay, altın ve kurşun ortamlara gönderilmiş ve her biri için ayrı ayrı enerji dağılımları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara bir örnek 1.25 MeV enerjili gama ışınları ve 20 cm kalınlıktaki yukarıda sıralanan metalik ortamlar için Şekil 5.7’de verilmiştir. Compton etkileşmeleri nedeniyle ortamın atom numarası arttıkça geri yöndeki saçılmaların zayıflamakta olduğu görülmüştür.



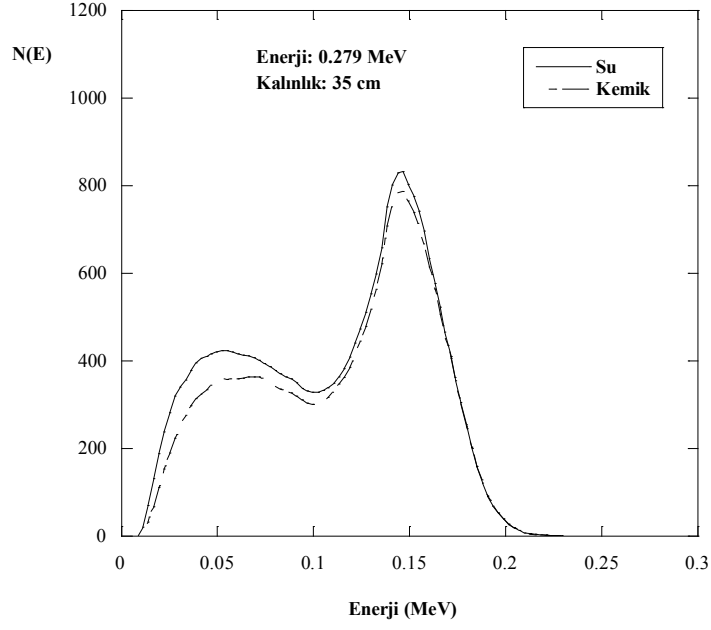
Şekil 5.7: 1.25 MeV enerjili gamaların çeşitli metalik ortamlardan geri saçılma enerji dağılımları.

Gama ışınlarının aynı kalınlıktaki metalik ortamlara geliş enerjisinin geri saçılmalar üzerindeki etkilerini anlamak için ise; ortam kalınlığı sabit tutulup, enerji yaklaşık 2 katına çıkarılarak dağılımlar tekrar hesaplanmıştır. Şekil 5.8’de gama ışınlarının 2.1 MeV geliş enerjisi için elde edilen dağılımlar görülmektedir.

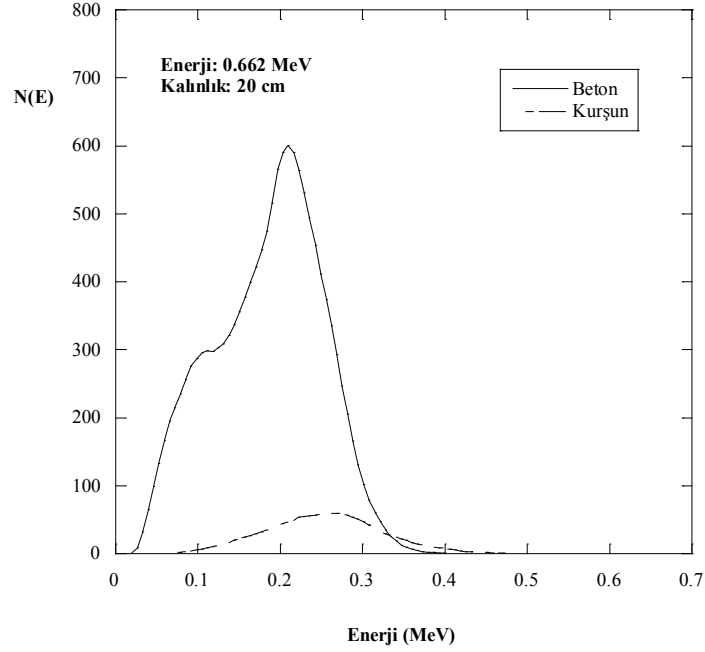


Şekil 5.8: 2.1 MeV enerjili gamaların çeşitli metalik ortamlardan geri saçılma enerji dağılımları.

Metalik ortamların yanında biyolojik malzemelerden su ve kemik, koruyucu materyal olarak kullanılan beton ve kurşun ortamlar için de geri saçılan gamaların enerji dağılımları hesaplanmış ve elde edilen sonuçlara örnekler verilmiştir. Şekil 5.9’da 0.279 MeV enerjili gama ışınlarının 35 cm kalınlıktaki biyolojik örnekler olarak seçilen su ve kemik ortamlar için karşılaştırmalı enerji dağılımları çizilmiştir. Şekil 5.10’da ise koruyucu malzemelere örnek 20 cm kalınlıktaki beton ve kurşun ortamlar için 0.662 MeV enerjili gamaların dağılımları verilmiştir.

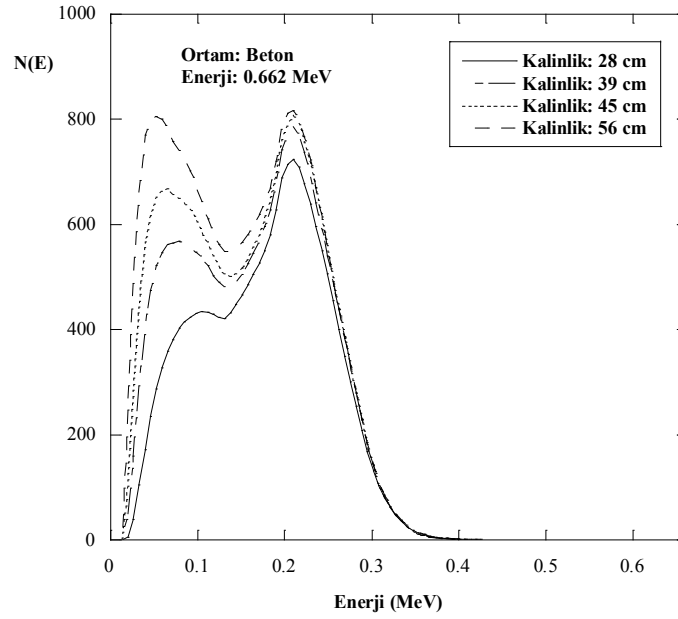


Şekil 5.9: Su ve kemik ortamlardan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.



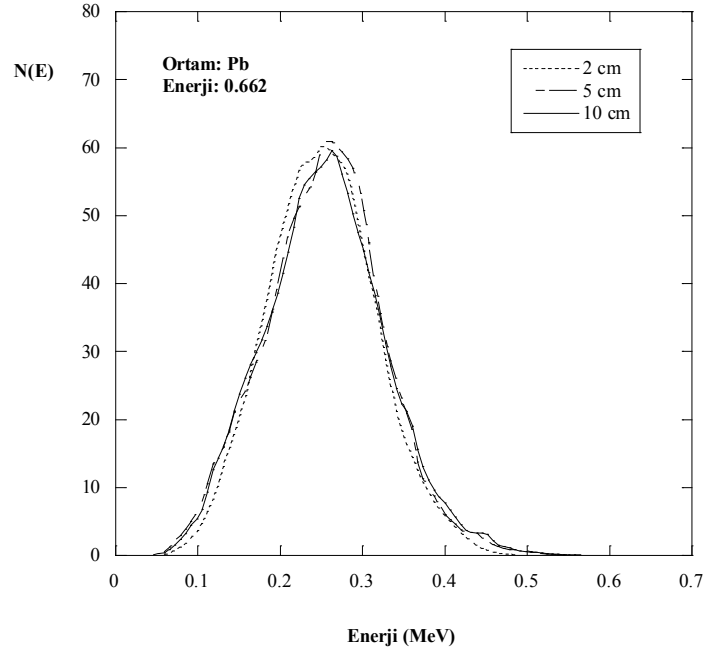
Şekil 5.10: Beton ve kurşun ortamlardan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.

Ayrıca ortam kalınlıklarının geri saçılmaları nasıl etkilediği de incelenmiş elde edilen sonuçlardan 0.662 MeV enerjide beton ortamın çeşitli kalınlıklarına, gönderilen gamaların enerji spektrumları Şekil 5.11’de verilmiştir.



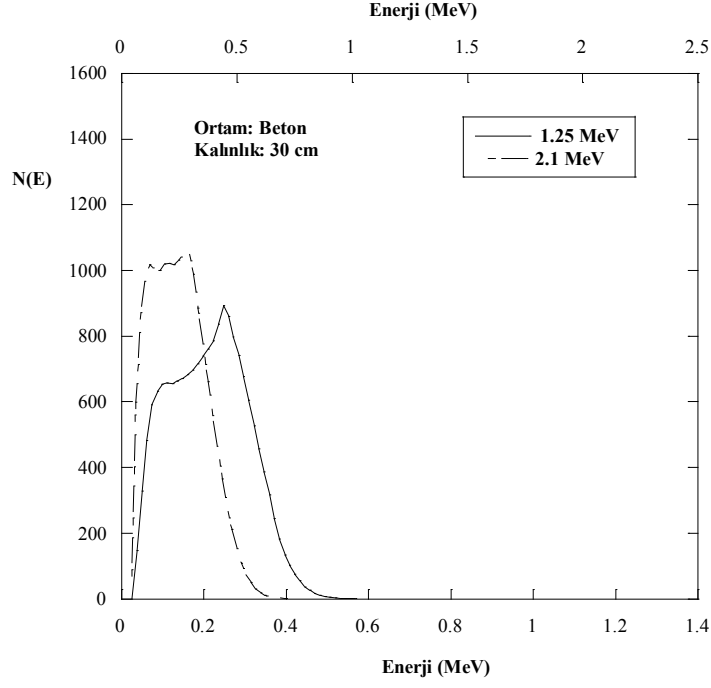
Şekil 5.11: Farklı kalınlıklardaki beton ortamdan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.

Gamaların geliş enerjisi sabit tutularak, farklı kalınlıklardaki beton ortam için yapılan hesaplar diğer ortamlar için de tekrarlanmış ancak hepsini vermek mümkün olmadığından bir diğer örnek kurşun ortam için Şekil 5.12’de görülmektedir.

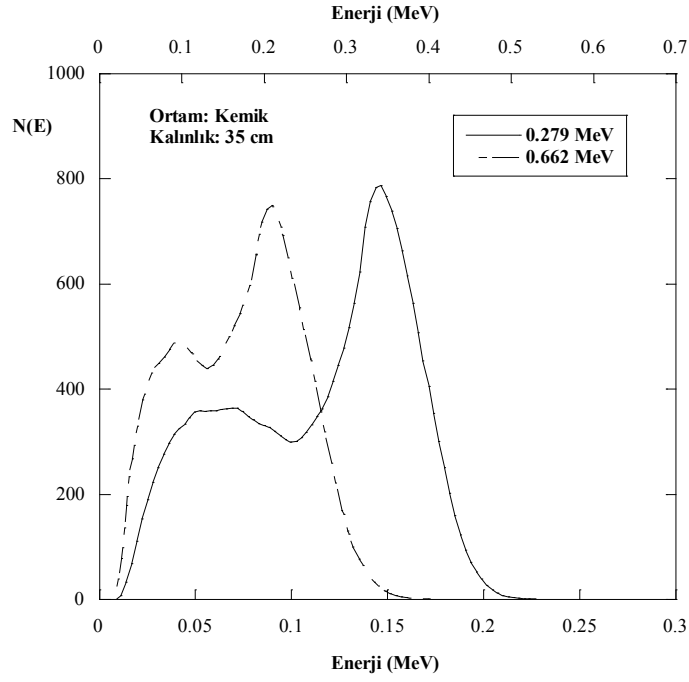


Şekil 5.12: Farklı kalınlıklardaki kurşun ortamdan geri saçılan gamaların enerji dağılımları.

İki farklı enerjili gama ışınlarının aynı kalınlıktaki ortamdan geri saçılma enerji dağılımlarını daha iyi görmek amacıyla, enerji eksenini iki ölçekli kullanılarak dağılım grafikleri tekrar çizilmiş elde edilen sonuçlara örnekler beton için Şekil 5.13 ve kemik için ise Şekil 5.14'te verilmiştir. Gama ışınlarının geliş enerjisine bağlı olarak aynı kalınlıktaki ortamda enerji dağılımlarının farkı daha iyi görülmektedir.

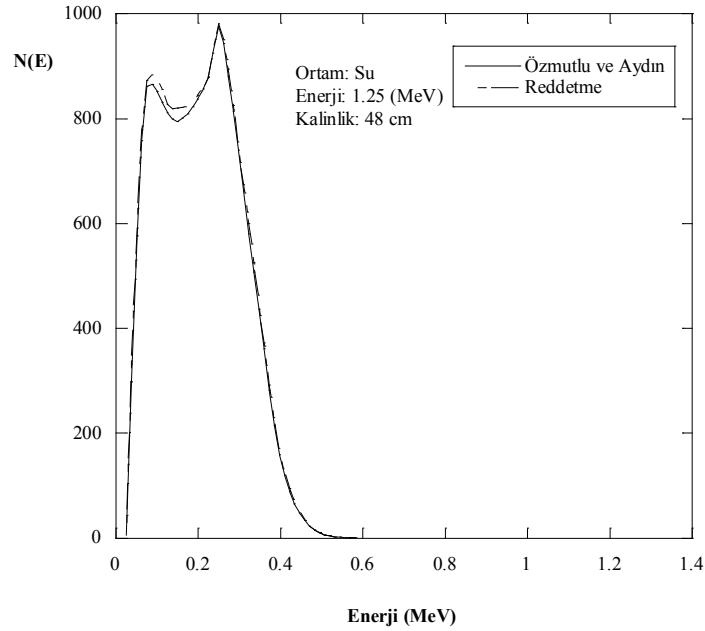


Şekil 5.13: Farklı enerjilerdeki gamaların beton ortamdan geri saçılma enerji dağılımları.



Şekil 5.14: Farklı enerjilerdeki gamaların kemik ortamdan geri saçılma enerji dağılımları.

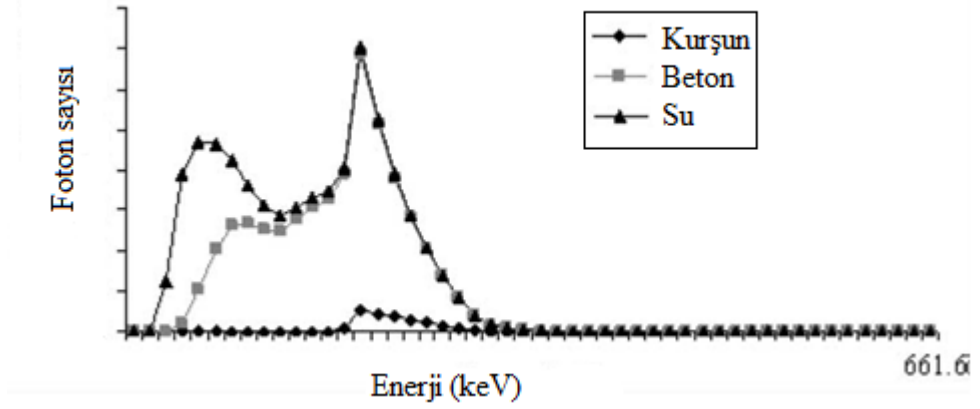
Bölüm 4.4'te anlatıldığı gibi Compton saçılma açısının iki farklı örneklemesinin enerji dağılımlarının üzerindeki etkisini görmek amacıyla 1.25 MeV enerjili gamalar su ortamında izlenmiş ve elde edilen enerji dağılımları Şekil 5.15'te verilmiştir. Şekil 5.15'te görüldüğü gibi her iki yöntemle örneklemeden elde edilen dağılımlar oldukça benzer olduğundan, çalışmada saçılma açısının reddetme yöntemiyle örneklemesi tercih edilmiştir.



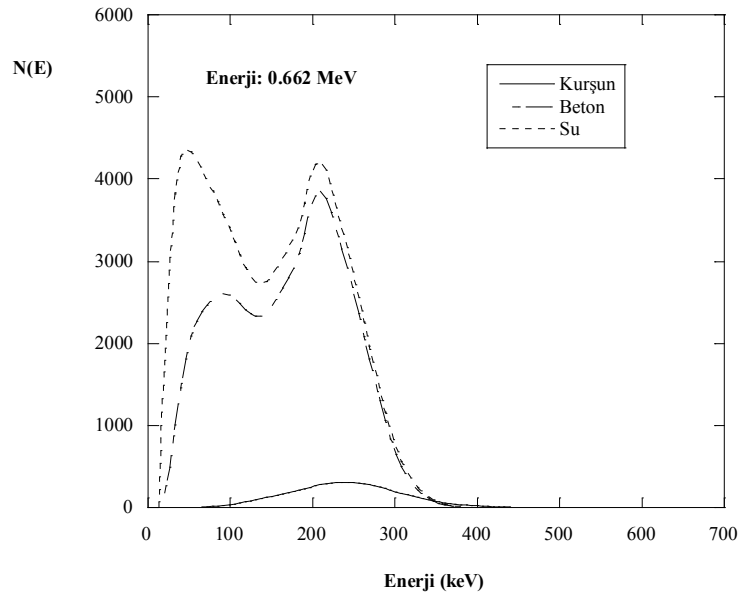
Şekil 5.15: Compton saçılma açısının reddetme ve Özmutlu & Aydın yöntemleriyle belirlenerek karşılaştırılması.

Literatürde bu çalışmadaki geometriyle aynı geometride olan Akar Tarım ve diğerleri [34] ile Kara'nın [35] çalışmasıdır. Akar Tarım ve diğerleri [34] 0.662 MeV enerjili gamaları, ortalama serbest yolların beş katı kalınlıktaki biyolojik örnekler ve koruyucu metallerde, Kara [35] ise sadece su ortamında Co^{60} 'tan yayınlanan gamaları Monte Carlo yöntemiyle izlemişlerdir. Akar Tarım ve diğerleri [34] ile Kara'nın [35] enerji dağılımlarının bu çalışmada elde edilen dağılımlarla benzer olduğu görülmüştür.

Akar Tarım ve diğerlerinin [34] çalışmasından alınan örnek bir enerji dağılımı Şekil 5.16’da, bu çalışmada aynı ortam ve kalınlıkta 100.000 foton izlenerek elde edilen dağılımlar ise Şekil 5.17’de verilmiştir.



Şekil 5.16: Akar Tarım ve diğerlerinin [34] çalışmasından alınan enerji dağılımları.



Şekil 5.17: Geri saçılan gamaların enerji dağılımları.

Gama ışınlarının ortam içinde çok sayıda ardışık Compton saçılmalarından sonra dedektör sistemine ulaşanlarının enerji dağılımları üzerine literatürde yer alan

deneysel ve teorik çalışmalardaki [5,36-38] enerji spektrumlarında benzer dağılımlar görülmüştür.

Gamaların çeşitli enerji, kalınlık ve ortamlardaki enerji dağılımlarıyla birlikte geri saçılma şiddet ve enerji olasılıkları da hesaplanmış, elde edilen sonuçlara metalik, biyolojik ve koruyucu ortamlardan örnekler sırasıyla Tablo 5.1 ve Tablo 5.2’de verilmiştir.

Tablo 5.1: Çeşitli metalik ortamlardan enerjiye bağlı geri saçılma olasılıkları.

Kalınlık: 20 cm		Ortamlar			
		Zn	Ag	Sn	Au
Enerji 1.25 MeV	Geri saçılma olasılığı	0.708	0.556	0.533	0.270
	Geri saçılanların enerji oranı	0.041	0.036	0.036	0.023
Enerji 2.1MeV	Geri saçılma olasılığı	0.680	0.618	0.579	0.360
	Geri saçılanların enerji oranı	0.025	0.024	0.023	0.018

Tablo 5.2: Çeşitli kalınlıklardaki beton ve kemik ortamlardan geri saçılma olasılıkları.

Enerji: 0.662 MeV		Kalınlıklar (cm)			
		28	39	45	56
Beton	Geri saçılma olasılığı	0.467	0.580	0.620	0.672
	Geri saçılanların enerji oranı	0.057	0.065	0.067	0.069
Kemik	Geri saçılma olasılığı	0.430	0.544	0.588	0.653
	Geri saçılanların enerji oranı	0.053	0.062	0.065	0.069

Tablo 5.1 incelendiğinde ortamın atom numarası arttıkça geri saçılma olasılıklarının ve enerji oranlarının azaldığı görülmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada mono enerjik gama ışınlarının metalik, biyolojik ve koruyucu malzemelerden yapılmış sonsuz dilim ortamlarda geri saçılma şiddet ve enerji olasılıklarıyla, enerji dağılımları, hazırlanan Monte Carlo programı yardımıyla 20.000 ya da 100.000 gama fotonu izlenerek hesaplanmıştır. Hesaplamalarının temel girdileri gamaların ortamda yapacakları fotoelektrik ve Compton etkileşmeleri için toplam ve diferansiyel tesir kesitleridir. Bu çalışmada ortaya çıkan sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1. Sonsuz ortamlarda çeşitli enerji değerleri için elde edilen dağılımların birbirine çok benzediği görülmüştür. Dağılımlar düşük enerji bölgesinde ani bir artışla maksimum değere ulaştıktan sonra hızlı bir şekilde azalmaktadır.
2. Sonsuz dilim geometrili ortama giren gama ışınlarının enerji dağılımları incelendiğinde, çalışılan enerji aralığında yaklaşık 0.5 MeV'den büyük enerjilerde geri saçılan foton görülmemektedir. Bu olay küçük enerjilerde büyük açılara saçılma ihtimalinin daha fazla olduğunu göstermektedir.
3. Aynı kalınlıklardaki farklı metalik ortamlara, aynı enerjili gama ışınları gönderildiğinde ortamın atom numarasının artmasıyla Compton saçılma tesir kesitlerinin azalmasına bağlı olarak, enerji dağılımlarının zayıfladığı görülmektedir. Bu durum ortamın atom numarası arttıkça aynı enerji değerinde, fotoelektrik etkileşme tesir kesitlerinin artmasından dolayı geri saçılan foton sayısının azalması nedeniyledir. Örneğin 1 MeV enerjili gamaların fotoelektrik etkileşme tesir kesiti Ag ortam için 0.0028070 (cm^2/g) iken, Pb ortam için 0.018100 (cm^2/g), Compton saçılma tesir kesiti ise Ag için 0.055240 (cm^2/g), Pb için 0.049930 (cm^2/g) dir.
4. Başlangıç enerjisi aynı olan gama ışınları farklı kalınlardaki dilim geometrili ortamlara gönderildiğinde, elde edilen enerji dağılımlarının belli bir ortam kalınlığına kadar değiştiği, daha sonra kalınlıktan bağımsız kalarak değişmediği gözlenmektedir. Burada ince kalınlıktaki ortamlarda gama ışınlarının ileriye geçme olasılıkları fazla olduğundan geriye doğru saçılmalar az olmakta ancak ortam kalınlığının belli bir değerinden sonra

geri saçılan gamaların enerji dağılımları aynı kalmaktadır. Başka bir deyişle, her bir ortamın belli bir kalınlık değerinden sonra geri saçılan gamaların enerji dağılımları, kalınlık artmasıyla ileriye geçiş olasılıklarının azalmasına bağlı olarak üst üste binmeye başlamaktadır.

5. Biyolojik ve koruyucu ortamların her ikisinden de geri saçılan gamaların enerji dağılımında dikkate değer nokta yaklaşık 0.2 MeV civarında görülen ani bir sıçramadır. Bu ani sıçramanın nedeni, tekli saçılma yani, ortamda sadece tek bir geri yönde Compton saçılması yapan gamalar olarak açıklanabilir.
6. Bütün dağılımlarda, ortam yoğunluğunun artmasıyla, düşük enerjilerde geri saçılan fotonların sayısı azalır. Aynı zamanda düşük enerji bölgesinde, foton etkileşme sürecinde fotoelektrik etkinin baskın olduğu sonucuna varılabilir. Ayrıca fotoelektrik etkileşme tesir kesiti, ortamın fiziksel özelliklerine bağlıdır.

Çalışmada ortama gönderilen gama sayısının yeterli olup olmadığını anlamak için 20.000 foton yerine 100.000 foton belli bir enerji ve kalınlıkta izlenmiş ve elde edilen sonucun birbirine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Ayrıca yapılan hesaplardaki hatanın belirlenmesi amacıyla, 0.662 MeV enerjiyle 28 cm kalınlıktaki beton ortama gelen gamaların geri saçılma olasılıkları 20 defa hesaplanmış ve standart sapma %0.25 bulunmuştur.

Bu çalışmada Compton etkileşmeleri nedeniyle ileri ve geri yönde olan saçılmalar, sadece geri yönde olanlar dilim ortam geometrisinde izlenmiş, ileri yönde olan saçılmalar ise M. Güven'in tez çalışmasında yer alacaktır. Elde edilen geri saçılma enerji dağılımlarının radyasyondan korunma konusuna katkı sağlaması umulmaktadır.

Radyasyonun madde ile etkileşmesi bilgileri; radyasyonun dedeksiyonu, nükleer dedektörlerin geliştirilmesi ve dizaynı, radyasyondan korunma ilkelerinin belirlenmesi, yaşayan organizmalarda radyasyonun biyolojik etkilerinin incelenmesi gibi alanlarda kullanılmasına temel oluşturduğundan teoriyi geliştirme çalışmaları sürecektir.

7. KAYNAKLAR

[1] Anonim, “A guide to the use of lead for radiation shielding. Lead Industries Association Inc. New York [online]”, (19 Kasım 2015), <http://www.canadametal.com/pdf/radiation-shielding.pdf>, (1984).

[2] Nelson, G. and Reilly, D., “Gamma-ray interactions with matter”, *Passive Nondestructive Analysis of Nuclear Materials*, NUREG/CR-5550, LA-UR-90-732, 27-42, (1991).

[3] Singh, M., Singh, G., Sandhu, B. S. and Singh, B., “Effect of detector collimator and sample thickness on 0.662MeV multiply Compton-scattered gamma rays”, *Applied Radiation and Isotopes*, 64, 373–378, (2006).

[4] Kiran, K. U., Ravindraswami, K., Eshwarappa, K. M. and Somashekarappa, H. M., “An investigation of energy dependence on saturation thickness for 59.54, 123, 279, 360, 511, 662, 1115 and 1250 keV gamma photons in carbon and aluminium”, *Radiation Physics and Chemistry*, 97, 107-112, (2014)

[5] Swami, R. K., Kiran, K. U., Eshwarappa, K. M. and Somashekarappa, H.M, “Experimental investigation of multiply backscattered gamma photons in metals, glass and granites and their saturation thickness”, *International Journal of Science Research*, 1 (4), 255-261, (2013).

[6] Sabharwal, A. D., Singh, M., Singh, B. and Sandhu, B. S., “Experimental evaluation of multiple Compton backscattering of gamma rays in copper”, *Indian J. Phys.*, 83 (8), 1141-1146, (2009).

[7] Singh, M., Singh, G., Sandhu, B. S. and Singh, B., “Energy and intensitydistributions of 0.279MeV multiply Compton-scattered photons in soldering material”, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 580, 54–57, (2007).

[8] Sabharwal, A. D., Singh, B. and Sandhu, B. S., “Investigations of multiple backscattering and albedos of 1.12 MeV gammaphotons in elements and alloys”, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*, 267, 151–156, (2009)

[9] Sabharwal, A. D., Singh, B. and Sandhu, B. S., “Investigations of energy dependence of saturation thickness of multiply backscattered gamma photons in elements and alloys - an inverse matrix approach”, *International Nuclear Physics Conference 312*, doi:10.1088/1742-6596/312/5/052021, (2010),

[10] Kadhim, A. B. and Mohammad, A. N., “Monte Carlo Simulation of the Backscattering Gamma Ray System”, *Iraqi Journal of Science*, 54 (1), 121-129, (2013).

[11] Mohammad, A. N. and Kadhim, A. B., “Monte Carlo Observations of Atomic Number Dependence Of Saturation Thickness For Multiple Back-Scattering Photons From Thick Samples”, *Al- Mustansiriyah J. Sci.*, 24 (3), 117-124, (2013).

[12] Gonçalves, O. D., Cardoso, S. C., Schechter, H. and Eichler, J., “Multiple scattering of 59.54 keV g-rays by large water samples: measurements and simulation”, *Radiation Physics and Chemistry*, 71, 977–978, (2004).

[13] Sabharwal, A. D., Singh, B. and Sandhu, B. S., “Multiple backscattering on monoelemental materials and albedo factors of 279, 320, 511 and 662 keV gamma photons”, *Phys. Scr.*, 83, doi:10.1088/0031-8949/83/02/025303, (2011).

[14] William, B., *Compton Scattering: The Investigation of Electron Momentum Distributions*, vol 10, Newyork: Mc. Graw-Hill, (1977)

[15] Jain, M. And Tzoar, N., “X-ray absorption in atoms in the presence of an intense laser field”, *Physical Review (A)*, 15 (1), 148-153, (1977).

[16] Ghumman, B. S., Acharya, V. B. And Singh, B., “Compton scattering of 145 keV photons from bound electrons of tin and molybdenum”, *J.Phys. B: At. Mol. Phys.*, 14 (20), 3905-3909, (1981).

[17] Andreo, P., “Monte Carlo techniques in medical radiation physics”, *Phys. Med. Biol.*, 36, 861-920, (1991).

[18] Knoll, G.F., *Radiation Detection and Measurement*, New York :John Wiley&Sons Inc., (1999).

[19] Eisberg, R. And Resnick, R., *Quantum Physics*, Singapore: John Willey and Sons, (1974).

[20] Sieghban, K., *Alpha-Beta and Gamma Ray Spektroskopy*, Amsterdam: Amsterdam North-Holland Pub. Co, (1968)

[21] Evans, R.D., *The Atomic Nucleus. McGraw-Hill Book Company Inc.*, New York, Toronto, London: Tata McGraw Hill Publishing Company Limited., (1955).

[22] Klein, O. Nishina, Y., “Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac”, *Z. Phys.* 52(11-12), 853 and 869, (1929).

[23] Wittke, J. P., Dicke, R. H., *Introduction to Quantum Mechanics*, U.S.A and London: Addison-Wesley Publishing Company Inc., (1960).

[24] Roesh, W.C. and Attix, F.H., *Radiation Dosimetry*, vol 1, New York: Accademic Press, (1968)

[25] Bingül, A., “Monte Carlo Yöntemleri [online]”, (20 Kasım 2015) <http://www1.gantep.edu.tr/~bingul/c/?ders=24>, (2011).

[26] Cashwell, E. D. and Everett C. J., *A Practical Manual on The Monte Carlo Method For Random walk problems*, Los Alamos, N.M.: Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Pergamon Press, 379-380, (1959).

[27] Bielajew, A. F., *Fundamentals of the Monte Carlo method for neutral and charged particle transport*, USA: The University of Michigan, (2001).

[28] Burcham, W. E., *Nuclear Physics*, London: Longman Group Limited, (1973).

[29] Berger, M. J., Hubbell, J.H., Seltzer, S.M., Chang, J., Coursey, J.S., Sukumar, R., Zucker, D. S. and Olsen, K., “XCOM: photon cross sections database [online]”, (17 Mart 2015), <http://www.nist.gov/pml/data/xcom/index.cfm/>, (2010).

[30] Hubbell, J. H., *Photon Cross Sections, Attenuation Coefficients from 10 keV to 100 GeV*, Washington: Superintendent of Documents; U.S. Government Printing Office, 7-8, (1969).

[31] Aydın, A., “Hacimli Gamma Kaynağı İçin Dedektör Duyarlığı ve Cevap Fonksiyonunun İncelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Bursa, (1989).

[32] Özmutlu, E.N., “Sampling of Angular Distribution in Compton Scattering” *App. Radiat. Isot.*, 43 (6), 713-715, (1992).

[33] İde S., “Sonsuz Ortamlarda Art Arda Saçılma Yapmış Gamaların En Muhtemel Enerji Değerlerinin Belirlenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Bursa, (1988).

[34] Akar Tarım, U., Gurler, O., Ozmutlu, E.N. and Yalcin, S., “Monte Carlo calculations of the energy deposited in biological samples and shielding materials”, *Radiation Effects and Defects in Solids*, 169 (3), 232-238, (2014).

[35] Kara N., “Sonsuz Dilim Geometrilili Ortamlardan Geçen Gammaların Enerji Spektrumlarının Monte-Carlo Yöntemi İle İncelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Bursa, (1990).

[36] Akar Tarım, U.,Gurler, O., Ozmutlu, E.N. and Yalcin, S., “Monte Carlo analyses of multiple back scattering of gamma rays”, *J Radioanal Nucl Chem*, 295, 901–905, (2013).

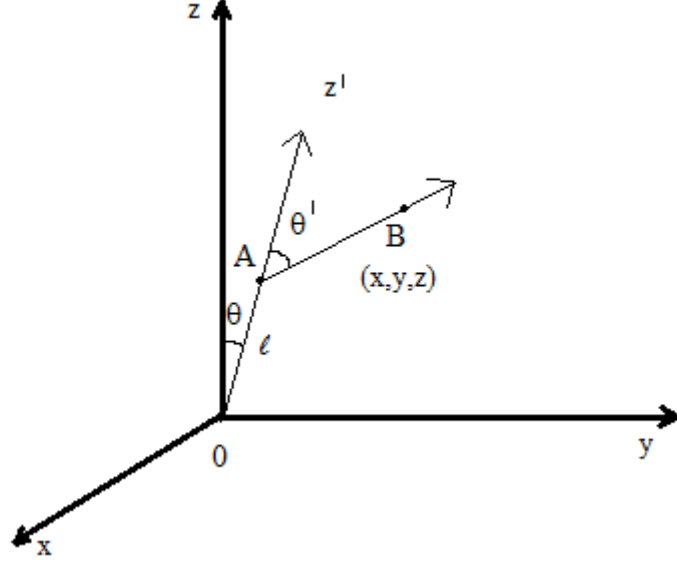
[37] Kane P.P., “Inelastic scattering of X-rays and gamma rays”, *Radiation Physics and Chemistry*, 75, 2195–2205, (2006).

[38] Chatterjee B.K., La John L.A., Roy S.C.,” Investigations on compton scattering: New directions” , *Radiation Physics and Chemistry*, 75, 2165–2173, (2006).

EKLER

8. EKLER

EK A Koordinat Dönüşümleri



Şekil A.1: Koordinat dönüşümleri.

Gama ışınının geliş doğrultusu z' eksenini ve y' eksenini xOy düzlemine paralel olsun;

x', y', z' koordinat sisteminde birim vektörler;

$$\vec{i}' = +\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\vec{i} + \frac{\beta\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\vec{j} - \sqrt{(1-\gamma^2)}\vec{k}$$

$$\vec{j}' = -\frac{\beta}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\vec{i} + \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\vec{j} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{k}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

dir.

$$T = \begin{pmatrix} \alpha\gamma/\sqrt{(1-\gamma^2)} & -\beta/\sqrt{(1-\gamma^2)} & \alpha \\ \beta\gamma/\sqrt{(1-\gamma^2)} & \alpha/\sqrt{(1-\gamma^2)} & \beta \\ -\sqrt{(1-\gamma^2)} & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Üslü sistemdeki doğrultman kosinüsleri,

$$\begin{aligned}\alpha' &= \sin\theta' \cos\phi' \\ \beta' &= \sin\theta' \sin\phi' \\ \gamma' &= \cos\theta'\end{aligned}\tag{A.3}$$

dir. Saçılan gamanın, başlangıç koordinat sistemindeki doğrultman kosinüslerini elde etmek için

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}\tag{A.4}$$

dönüşüm matrisi kullanılabilir.