

**T.C.**  
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**KOMPLEKS DÜZLEMDE POLİNOMLARLA MAKSİMAL  
YAKLAŞIMLAR**

**SEDA TOPRAKÇI AKTEKİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Jüri Üyeleri:**    **Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE (Tez Danışmanı)**  
                         **Prof. Dr. Ali GÜVEN**  
                         **Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2025**

## ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Kompleks Düzlemde Polinomlarla Maksimal Yaklaşımlar**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Seda TOPRAKÇI AKTEKİN**

## ÖZET

**KOMPLEKS DÜZLEMDE POLİNOMLARLA MAKSİMAL YAKLAŞIMLAR  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
SEDA TOPRAKÇI AKTEKİN  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL M. İSRAFİLZADE)**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2025**

Bu yüksek lisans tezi giriş, ön bilgiler kısmı ve üç ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde tez konusu yönünde yapılan araştırmalar ve elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Ön bilgiler kısmında tezde kullanılan semboller, tanımlar ve yardımcı sonuçlar bulunmaktadır. Üçüncü bölümde kvazikonform sınırlı bölgelerde tanımlı ağırlıklı Bergman uzaylarında var olan bir integral gösteriminden hareketle fonksiyonların Faber seri açılımları elde edilmiş ve serilerin kısmi toplamları yardımı ile kontinyumlarda maksimal yakınsaklık problemi incelenmiştir. Dördüncü bölümde analitik fonksiyonların Smirnov-Orlicz sınıflarında maksimal yakınsaklık problemleri araştırılmış, bu sınıflarda düzgünlük modülleri tanımlanmış ve maksimal yakınsaklık hatasına en iyi yaklaşım ifade eden sayı ve düzgünlük modülü ile üstten değerlendirilmesi elde edilmiştir. Beşinci bölümde Kompleks düzlemde tanımlı bölgelerde, değişken üstlü Smirnov sınıfları tanımlanmış; bu sınıflarda Faber seri açılımlarının gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, serilerin kısmi toplamlarının ilgili fonksiyona göre maksimal yakınsaklık hatası, en iyi yaklaşım hatası cinsinden üstten sınırlandırılmıştır. Devamında, yaklaşım teorisinin düz teoremleri kullanılarak bu hata, düzgünlük modülü yardımıyla da üstten değerlendirilebilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Bergman uzayları, Faber polinomları, Kvazikonform eğriler, maksimal yakınsaklık, Smirnov sınıfları, yaklaşım hatası

Bilim Kod / Kodları: 20404

Sayfa Sayısı: 49

## ABSTRACT

### MAXIMAL APPROXIMATION'S WITH POLYNOMIALS IN THE COMPLEX PLANE

MSC THESIS

SEDA TOPRAKÇI AKTEKIN

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. DANİYAL M. İSRAFİLZADE )

BALIKESİR, JUNE - 2025

This master's thesis consists of an introduction, preliminary information section, and three main chapters. In the introduction, research conducted on the thesis topic and the results obtained in this area are presented. The preliminary information section contains the symbols, some definitions, and auxiliary results used in the thesis. In the third chapter, starting from an integral representation that exists in weighted Bergman spaces defined on quasiconformal regions bounded by quasiconformal curves the Faber series expansions of functions are obtained, and the problem of maximal convergence in continua is investigated using partial sums of the series. In the fourth chapter, the problem of maximal convergence in the Smirnov-Orcliz classes of analytic functions is studied, the smoothness moduli in these classes are defined and the maximal convergence error in terms of the smoothness moduli and best approximation number are estimated. In the fifth chapter, variable exponent Smirnov Classes in complex plane regions are defined, the possibility of Faber series expansions in these classes is shown, the maximal convergence error of the partial sums of Faber series expansions of given function in terms of the best approximation number is estimated and later using the direct theorems of approximation theory this error by the smoothness modulus are evaluated.

**KEYWORDS:** Bergman spaces, Faber polynomials, Quasiconformal curves, maximal convergence, Smirnov classes, approximation error

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOL LİSTESİ .....	iv
ÖNSÖZ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER .....	3
2.1 Temel Tanımlar.....	3
3. KVAZİKONFORM SINIRLI SONLU BÖLGELERDE TANIMLI AĞIRLIKLI BERGMAN UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER SERİLERİ İLE YAKLAŞIM .....	8
3.1 Giriş .....	8
3.2 Yardımcı Sonuçlar .....	11
3.3 Ana Sonuçlar.....	14
3.3.1 Ağırlıklı durum .....	14
3.3.2 Ağırlıksız durum .....	17
4. SMİRNOV-ORLİCZ SINIFLARINDA YAKLAŞIM .....	20
4.1 Giriş ve Ana Sonuçlar.....	20
4.2 Yardımcı Sonuçlar .....	26
4.3 Ana Sonuçların Kanıtı .....	28
5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMİRNOV SINIFLARDA FABER SERİLERİ KISMİ TOPLAMLARININ MAKSİMAL YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ.....	35
5.1 Giriş ve Ana Sonuçlar.....	35
5.2 Yardımcı Sonuçlar .....	39
5.3 Ana Sonucun Kanıtı.....	40
6. SONUÇ .....	43
7. KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ .....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

## SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ ,	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{D}$	: Kompleks düzlemde birim disk
$L^p, 0 < p < \infty$	: Lebesgue anlamında p. dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\omega$	: Ağırlık fonksiyonu
$L^p_\omega, 0 < p < \infty$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$E_p(G), 1 \leq p < \infty$	: G bölgesinde tanımlı Smirnov fonksiyon sınıfı
$E_n(f)$	: Verilen bir fonksiyona, derecesi en fazla n olan polinomlar sınıfı içerisinde en iyi yaklaşım sayısı
$L_M(\Gamma)$	: $\Gamma$ eğrisi üzerinde tanımlı Orlicz uzayları
$E_M(G)$	: G bölgesinde tanımlı Smirnov-Orlicz sınıfı
$\omega_M(\delta, f)$	: $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayında tanımlı süreklilik modülü
$E_n^M(f, G)$	: Smirnov-Orlicz sınıfında derecesi en fazla n olan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşım sayısı
$L^{p(\cdot)}(\Gamma)$	: $\Gamma$ eğrisi üzerinde tanımlı değişken üslü Lebesgue uzayı
$\rho_{p(\cdot)}(f)$	: f fonksiyonuna göre modüler fonksiyon
$\Omega(f, \delta)$	: Lebesgue Uzayında düzgünlük modülü
$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$	: Değişken üslü Lebesgue uzayında düzgünlük modülü
$E_n(f, E_R)$	: $E_R$ kanonik bölgesinde tanımlı Bergman uzayında derecesi en fazla n olan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşım sayısı
$\sigma_h f$	: f fonksiyonuna göre tanımlanan Steklov fonksiyonu
$K$	: Kontinyum
$D(z_0, \varepsilon), \varepsilon > 0$	: $z_0 \in \mathbb{C}$ merkezli, $\varepsilon$ yarıçaplı açık daire

## **ÖNSÖZ**

Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, sabırla desteğini esirgemeyen ve her zaman motive edici yaklaşımıyla yanımda olan değerli danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE'ye en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Kendisinden öğrendiklerim, akademik hayatımın yanı sıra kişisel gelişimime de önemli katkılar sağlamıştır.

Yüksek lisans eğitimim süresince bilgi ve birikimlerini paylaşan, düşünmeye ve sorgulamaya teşvik eden Prof. Dr. Ali GÜVEN'e minnettarım. Ayrıca, bu süreçte manevi desteğini her zaman hissettiren eşim EMRAH'a, özellikle sabırları ve anlayışlarıyla bana güç veren kızım TUANA'ya, oğlum KAYRA'ya, tüm öğrenim yaşantım sürecince, maddi ve manevi destekleriyle günlere gelmemde büyük katkıları olan ANNEM, BABAM ve ABLAMA; tezin yazım sürecinde gösterdiği özenli destek ve düzenlemeleriyle çalışmama katkı sağlayan, tez sürecinde birlikte çalışmaktan büyük keyif aldığım Hanife YAKUPOĞLU'na gönülden teşekkür ederim.

Bilimin ışığında ilerlemeyi, merakı kaybetmeden üretmeyi ve paylaşmayı bir ilke olarak benimsediğim bu yolculukta, bu çalışmanın küçük de olsa bir katkı sağlaması en büyük dileğimdir.

Son olarak, bu tez çalışmasının bundan sonraki akademik çalışmalar için bir basamak olması temennisiyle, emeği geçen herkese tekrar teşekkür ederim.

**Balıkesir, 2025**

**Seda Toprakçı Aktekin**

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, genellikle incelenmesi zor ve belirli düzgünlük özellikleri taşıyan fonksiyonlara, daha basit ve daha düzgün fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Başlangıçta ele alınan fonksiyon uzay ise, incelenen probleme göre değişiklik göstermektedir.

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri, verilen bir fonksiyona belirli bir fonksiyon sınıfı içerisinde yaklaşımın mümkün olup olmadığını araştırılmasıdır. Diğer temel problem ise bu yaklaşımın ne kadar hızlı gerçekleştiğinin, yani yaklaşım hızının değerlendirilmesidir. Başka bir deyişle yaklaşım teorisinin ana problemleri nitelik ve nicelik problemleridir. Nitelik probleminin çözümü, Weierstrass tarafından Weierstrass teoremleri olarak bilinen teoremlerden başlamaktadır. Daha sonra bu teorem Walsh, Gartogs, Rosenthal, Lavrentiyev, Keldysh tarafından kompleks düzlem bölgelerine de genişletilmiştir. En genel teorem S.N. Mergelyan tarafından ispatlanmıştır. Bu teoreme göre kompleks düzlemde verilmiş bir kümenin iç noktalarında analitik ve kapanışında sürekli olan fonksiyonlara cebirsel polinomlarla yaklaşımın mümkünlüğü için gerek ve yeter koşul kümenin sınırlı, kapalı olması ve düzlemi bölmemesidir. Bununla birlikte yaklaşım teorisi alanında yapılan incelemelerde, yaklaşım gerçekleştirildiği kümenin sınırından uzak olan noktalarda yaklaşımın daha hızlı bir şekilde gerçekleştirilebileceği görülmüştür. Bu yönde elde edilen teoremlere maksimal yakınsaklık teoremleri, araştırılan problemlere ise maksimal yakınsak problemleri denir. Matematik literatüründe maksimal yakınsaklık problemleri ile ilgili çok sayıda bilimsel çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların bir kısmı, Walsh [1], Smirnov ve Lebedev [2] ile Suetin [3] tarafından kaleme alınan monografilerde ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Daha sonra maksimal yakınsaklık problemlerinin bir dizi bilimsel çalışmalarda da araştırıldığı görülmüştür [4-7]. Bu tezde maksimal yakınsaklık problemlerinin incelendiği üç farklı uzay ele alınmış ve bu uzaylarda elde edilen maksimal yakınsaklık teoremleri ifade edilmiş ve ispatlanmıştır. Birinci uzay Bergman uzayı olarak bilinmektedir. Bu uzayda maksimal yakınsaklık problemleri incelendiğinde, önce fonksiyonların Faber serisine açılabilirliği gösterilmiş, Faber polinomları yardımı ile ifade edilen bir serinin değerlendirilmesi yapılmış ve bu değerlendirme kullanılarak maksimal yakınsaklık hatası Bergman Uzayı normuna göre değerlendirilmiştir.

İkinci uzay olarak alınan Smirnov-Orlicz uzayında maksimal yakınsaklık problemleri incelenirken Faber polinomları ve serilerinin yaklaşım özellikleri kullanılmış, maksimal yakınsaklık hatası en iyi yaklaşımı karakterize eden sayı yardımı ile değerlendirmesi yapılmış, daha sonra bu hata Smirnov- Orlicz sınıflarında düz teoremler kullanılarak düzgünlük modülü yardımı ile de üstten değerlendirilmesinin mümkünlüğü gösterilmiştir. üçüncü uzay olarak düşünülen Klasik Smirnov Sınıflarının bir genellemesi olarak bilinen değişken üslü Smirnov Sınıflarında maksimal yakınsaklık problemleri değişken üssün belli koşulları sağladığı taktirde incelenmiş ve maksimal yakınsaklık hatasının verilen kontinyumda düzgün norma göre değerlendirilebilenliği gösterilmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER

### 2.1 Temel Tanımlar

**Tanım 2.1.1:**  $\mathbb{C}$ ,  $R := (-\infty, \infty)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  olduğunda bir  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 'ye sürekli fonksiyonun görüntüsüne  $\mathbb{C}$  de bir eğri denir [8].

**Tanım 2.1.2:**  $\mathbb{C}$  kompleks düzleminin bir  $S$  alt kümesi verilsin. Eğer kompleks düzlemin,  $S_1 = S \cap A_1 \neq \emptyset$ ,  $S_2 = S \cap A_2 \neq \emptyset$  ve  $S = S_1 \cup S_2$  koşullarını sağlayan ayrık ve açık bir çift  $A_1$  ve  $A_2$  alt kümeleri bulunamıyorsa  $S$  kümesine  $\mathbb{C}$  bağlantılı küme denir [8].

**Tanım 2.1.3:** Bir  $S \subset \mathbb{C}$  kümesi verilmiş olsun. Bu kümenin  $CS$  ile gösterilen tümleyeni,  $CS := \{z \in \mathbb{C}: z \notin S\}$  olarak tanımlanır. Bir  $S \subset C$  kümesi ve  $S$ 'de bulunması gerekmeyen bir  $z_0 \in C$  noktası alalım. Eğer her  $D(z_0, \varepsilon)$  komşuluğunda  $S$ 'nin  $z_0$ 'dan farklı bir  $z$  noktası varsa  $z_0$ ,  $S$ 'nin bir yığılma noktasıdır denir. Bir  $z \in S$  noktası için  $D(z, \varepsilon) \subset S$  olacak şekilde bir  $\varepsilon$  varsa  $z$ ,  $S$ 'nin bir iç noktasıdır denir [8].

Tanımdan görülüyor ki iç nokta bir yığılma noktasıdır. Bir  $S \subset C$  kümesi verilmiş olsun. Eğer her  $z \in S$  noktası  $S$ 'nin bir iç noktası ise  $S$  açık kümedir denir.

**Tanım 2.1.4:** Bağlantılı açık kümeye bölge denir [8].

**Tanım 2.1.5: a)** Bir  $f$  karmaşık fonksiyonu bir  $z_0$  noktasının belli bir  $D(z_0, \delta)$  komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa  $f$ ,  $z_0$ 'da analitiktir denir.

**b)** Eğer bir  $f$  karmaşık fonksiyonu bir  $S$  kümesinin bütün noktalarında analitikse  $f$ ,  $S$  üzerinde analitiktir denir.

**c)** Bir  $f$  fonksiyonu  $\mathbb{C}$ 'nin tüm noktalarında analitikse,  $f$ 'ye tam (entire) fonksiyon denir [8].

**Teorem 2.1.6: (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi):**  $G \subset \mathbb{C}$  sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve  $z_0 \in G$  olsun. Bu durumda,  $G$  bölgesini  $\mathbb{D}$ 'ye,  $f(z_0) = 0$  ve  $f'(z_0) > 0$  koşulları altında resmeden bir tek  $f$  konform dönüşümü vardır [8].

**Tanım 2.1.7:**  $G$ , basit bağlantılı sınırlı bir bölge,  $CG := \mathbb{C} \setminus \bar{G}$  tümleyeninin de basit bağlantılı bir bölge olduğunu varsayalım. Riemann konform dönüşüm teoremine göre  $CG$

tümleyeninin birim diskin dışına  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\varphi'(\infty) > 0$ , koşullarını sağlayan birebir konform dönüşümü vardır. Bu durumda

$$\varphi(z) = \alpha z + \alpha_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots +$$

yazılabilir.

$$[\phi(z)]^n = \alpha^n z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^k} = F_n(z) - E_n(z)$$

Burada  $F_n(z) = \alpha^n z^n + \alpha_{n-1} z + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$   $n$  dereceli bir polinomdur, buna  $G$  bölgesine göre  $n$  dereceli Faber polinomu denir. Görüldüğü gibi [9],

$$E_n(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^k}$$

**Tanım 2.1.8:** Kapalı ve bağlantılı kümeye kontinyum denir [10].

**Tanım 2.1.9:**  $\{c_n\}$ , kompleks sayıların bir dizisi ve  $K \subset \mathbb{C}$  bir kontinyum olsun. Bunun Faber polinoları dizisini  $\{F_n(z)\}$  ile gösterelim. Bu durumda

$$\sum_n c_n F_n(z)$$

dizisine  $K$  kontinyumu için Faber serisi denir [11].

$\Gamma$  bir Jordan eğrisi kendi kendini kesmeyen eğri,  $z_1, z_2 \in \Gamma$  ve  $\Gamma(z_1, z_2)$   $z_1$  ve  $z_2$  noktalarını birleştiren yaylardan çapı küçük olan yay olsun. Bu yayın çapı

$$\text{diam } \Gamma(z_1, z_2) := \max_{z_1, z_2 \in \Gamma} |z_1 - z_2|$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.10 :**  $\forall z_1, z_2 \in \Gamma$  için

$$\text{diam } \Gamma(z_1, z_2) \leq c |z_1 - z_2|$$

olacak şekilde bir  $c$  sabiti bulunabiliyorsa  $\Gamma$  eğrisine  $\mathbb{C}$ 'de kvazikonform eğri denir. Kvazikonform eğrinin bir diğer tanımı da aşağıdaki şekilde verilir [5].

**Tanım 2.1.11:**  $\varphi$ , kompleks düzlemin kendi üzerine birebir ve sürekli dönüşümü olsun.  $\varphi$  dönüşümünün kordinat eksenlerine paralel hemen her doğru üzerinde mutlak sürekli olduğunu varsayalım.

$$D_{\varphi}(z) := \frac{|\varphi_z| + \left| \frac{\varphi_z}{z} \right|}{|\varphi_z| - \left| \frac{\varphi_z}{z} \right|} \text{ olsun.}$$

$K_{\varphi} := \sup_z D_{\varphi}(z)$  sonlu ise  $\varphi$  dönüşümüne kvazikonform dönüşüm  $K_{\varphi}$  sayısına ise onun kvazikonformluk katsayısı denir.

Kompleks düzlemde bir çemberin kvazikonform bir dönüşüm altındaki görüntüsüne kvazikonform eğri denir [10].

**Tanım 2.1.12:**  $h$  ile  $[0, 2\pi]$  aralığında sürekli bir fonksiyonu gösterelim.  $h$  fonksiyonunu  $[0, 2\pi]$  aralığındaki **süreklilik modülü**;

$$\omega(t, h) := \sup \{ |h(t_1) - h(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, 2\pi], |t_1 - t_2| \leq t \}, t \geq 0$$

olarak tanımlanır [11].

$\int_0^{2\pi} t^{-1} \omega(t, h) dt < \infty$  koşulu sağlandığı takdirde,  $h$  fonksiyonuna Dini-sürekli fonksiyon denir [12].

**Tanım 2.1.13:**  $\Gamma : \varphi(t), a \leq t \leq b$ , ile kompleks düzlemin bir eğrisini gösterelim.

$\Gamma$  eğrisinin uzunluğu

$$V(\Gamma) := \sup \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})|, n \in \mathbb{N}$$

biçimde tanımlanabilir. Yukarıdaki tanımlamada supremum  $a = a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  koşullarını sağlayan tüm ayrıntılar üzerinden alınmaktadır.

Eğer  $V(\Gamma) < \infty$  koşulu sağlanıyorsa  $\Gamma$  eğrisi **sonlu uzunluklu bir eğridir denir**. [12].

**Teorem 2.1.14 (Maksimum Kuralı):**  $B$  sınırlı bir bölge olsun.  $f, B$ 'de analitik ve  $\bar{B}$ 'da sürekli ise  $|f|$   $\partial B$ 'deki bir noktada maksimum değer alır [8].

**Tanım 2.1.15:**  $\gamma$  karmaşık düzlemde bir Jordan eğrisi olsun. Eğer bir çemberin bir komşuluğunda konform olup bu çemberi  $\gamma$ 'ya resmeden bir konform dönüşüm bulunabiliyorsa  $\gamma$  eğrisi bir analitik eğri denir. [13].

**Tanım 2.1.16:**  $\Gamma$  kompleks düzlemde sonlu uzunluğa sahip bir Jordan eğri olsun. Verilmiş bir  $z \in \Gamma$  noktası için  $\Gamma(z, \varepsilon) := \{ t \in \Gamma : |t - z| < \varepsilon \}$  alt kümesini tanımlayalım.

$\Gamma(z, \varepsilon)$  alt kümesinin uzunluğu  $|\Gamma(z, \varepsilon)|$  olsun.

$$\sup_{z \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} |\Gamma(z, \varepsilon)| < \infty$$

koşulu sağlandığı takdirde

$\Gamma$  eğrisine *Carleson eğrisi* denir. [14]

**Tanım 2.1.17:** Terimleri  $f_k: A \rightarrow \mathbb{C}$  biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonların bir  $(f_k)$  dizisi ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $k \geq k_0$  için bütün  $z \in A$  noktalarında  $|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$  olacak biçimde bir  $k_0$  doğal sayısı bulunabilirse,  $(f_n)$  dizisi  $A$  kümesinde  $f$  fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir [8].

**Teorem 2.1.18 (Weierstrass M-Testi):**  $A \subset \mathbb{C}$  ve  $(g_k)$ ,  $A$  üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Gerçek sayıların

i)  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  yakınsak

ii) Her  $z \in A$  için,  $|g_k| \leq M_k$ ,  $k=1,2,\dots$

özelliklerini sağlayan bir  $M_k$  dizisi var ise  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ,  $A$  üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır [8].

**Teorem 2.1.19:**  $A$  kompleks düzlemde bir bölge ve  $(f_n)$ , bu bölgede tanımlı analitik  $f_n$  fonksiyonlarının oluşturduğu dizi olsun. Eğer  $A$  bölgesinde yerleşen her kapalı disk üzerinde  $f_n \rightarrow f$  yakınsaması düzgün ise  $f$  limit fonksiyonu  $A$  bölgesinde analitiktir [8].

**Teorem 2.1.20 (Cauchy İntegral Teoremi):**  $G$ , kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge ve  $f$  bu bölgede analitik bir fonksiyon olup  $G$  bölgesinin kapanışında sürekli ise,

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0$$

olur [8].

**Teorem 2.1.21 (Cauchy İntegral Formülü):**  $G$ , kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge ve  $\gamma$  eğrisinin bu bölge içinde bir kapalı eğri olduğunu

varsayalım. Eğer  $f$ ,  $G$  bölgesinde analitik bir fonksiyon ise bu durumda  $\gamma$  ile sınırlı bölgede yerleşen her  $\alpha$  noktası için

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

integral formülü sağlanır [8].

**Teorem 2.1.22 (Sınırsız Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü):**  $G$ , kompleks düzlemde sonlu uzunluklu  $\Gamma$  Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge olsun.  $\Gamma$  eğrisinin pozitif yönlendirilmiş olduğunu varsayalım. Eğer  $f$  fonksiyonu,  $G$  bölgesinin  $CG$  tümleyeninde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z); & z \in CG \\ f(\infty) & ; z \in G \end{cases}$$

integral formülü geçerlidir [15].

### 3. KVAZİKONFORM SINIRLI SONLU BÖLGELERDE TANIMLI AĞIRLIKLI BERGMAN UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER SERİLERİ İLE YAKLAŞIM

$\omega$ ,  $G$  bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu, yani  $\omega$ ,  $G$ , de h.h. yerde pozitif olup  $G$  bölgesi üzerinden integrallenebilir bir fonksiyon olsun.  $A^2(G, \omega) := \{f: f, G \text{ bölgesinde analitiktir ve } \iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z < +\infty\}$  olarak tanımlanan  $f$  denklem kümesine  $G$  bölgesinde tanımlı  $\omega$  ağırlıklı Bergman uzayı denir.

$A^2(G) := A^2(G, 1)$  uzayına Bergman uzayı denir.

$G \subset \mathbb{C}$ , kvazikonform  $\Gamma$  eğrisi ile sınırlı bir bölge ve  $A^2(G, \omega)$   $G$ 'deki analitik fonksiyonların  $\omega$  ağırlıklı Bergman uzayı olsun. Bu bölümde,  $A^2(G, \omega)$  uzayından olan fonksiyonlar için genelleştirilmiş Faber serileri tanımlanır ve onların yaklaşım özellikleri araştırılır.

#### 3.1 Giriş

$E \subset \mathbb{C}$  en az iki nokta içeren, tümleyeni bağlantılı olan bir kontinyum ve  $D$  açık birim disk olsun.  $w = \varphi(z)$  ile  $CE := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ 'nin,  $C\overline{D} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ 'ye  $\varphi(\infty) = \infty$  ve  $\varphi'(\infty) > 0$  koşullarını sağlayan konform dönüşümünü gösterelim.  $\varphi$ 'nin tersini  $\psi := \varphi^{-1}$  ile gösterelim. Rastgele sabit  $R > 1$  sayısı verildiğinde  $E$  kümesinin  $R$ . Seviye çizgisi

$$\Gamma_R := \{z : |\varphi(z)| = R\}, \quad E_R := \{z : z \in CE, |\varphi(z)| < R\} \cup E$$

biçiminde tanımlanmış olsun.

$g$ ,  $CE$  de analitik bir fonksiyon ve  $g(\infty) > 0$  olsun. Bilindiği gibi [11],  $E$  ile ilişkili genelleştirilmiş Faber polinomları  $F_n(z, g), n = 1, 2, \dots$

$$\frac{wg[\psi(w)]\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z, g)}{w^n}, \quad z \in E, |w| > 1, \quad (3.1)$$

açılımı ile tanımlanır. Bu açılım  $\{C\overline{D}, CE\}$  kümesinin kompakt alt kümelerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

(3.1)'in  $z$ 'ye göre türevini aldığımızda

$$\frac{wg[\psi(w)]\psi'(w)}{[\psi(w) - z]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z, g)}{w^n} \quad (3.2)$$

elde edilir.

Her  $n$  doğal sayısı için  $F_n(z, g)$ 'nin  $n$  dereceli bir polinom olduğunu doğrulamak kolaydır. Faber polinomları ve genelleştirilmiş Faber polinomları hakkında daha fazla bilgi [2, 11, 16]'de bulunabilir.

$G$ ,  $\Gamma$  kvazikonform eğrisi ile sınırlandırılmış bir düzlem bölgesi,  $0 \in G$  ve  $\omega$ ,  $G$  bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun.

Ayrıca,  $G$ 'deki analitik  $f$  fonksiyonlar için

$$A(G) := \left\{ f : \int_G |f(z)| d\sigma_z < \infty \right\}$$

uzayını tanımlayalım.

$A^2(G, \omega)$  uzayında normu

$$\|f\|_{A^2(G, \omega)} := \left( \int_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z \right)^{1/2}$$

olarak tanımlarsak normlu bir uzay elde edilir.

$G$ 'de analitik ve sınırlı  $f$  fonksiyonları için Belyi [17] tarafından

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{G}} \frac{(f \circ y)(\zeta)}{(\zeta - z)^2} y'_\zeta(\zeta) d\sigma_\zeta, \quad z \in G, \quad (3.3)$$

integral gösterimi elde edilmiştir.

Burada  $y = y(\zeta)$ ,  $\Gamma$  eğrisine göre bir kvazikonform yansımadır. Ahlfors teoreminden [18],  $y = y(\zeta)$  yansımasının bir kanonik yansıma olarak seçilebileceği (bkz. [19, s. 26 sonuç 1.39]) yani  $y$ 'nin  $C$ 'de ( $\Gamma$  eğrisi hariç) h.h.y diferansiyellenebilir bir yansıma olarak tanımlanabileceği ve yeterince küçük  $\delta > 0$  sabiti için

$$\begin{aligned} |y_\zeta| + |y'_\zeta| &\leq c_1, & \delta < |\zeta| < \frac{1}{\delta} & \text{ için } \zeta \notin \Gamma, \\ |y_\zeta| + |y'_\zeta| &\leq c_2 |\zeta|^{-2}, & |\zeta| \geq \frac{1}{\delta} & \text{ için } |\zeta| \leq \delta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

koşullarını sağlayabilecek şekilde bulunabileceği görülmektedir.

Sadece kanonik yansımaları dikkate alarak Batchaev [20], Belyi'nin [17] sonucunu iyileştirerek (3.3) eşitliğinin ancak ve ancak  $f \in A(G)$  durumunda sağlandığını göstermiştir. Batchaev'in bu sonucunun kanıtı [19]'de verilmiştir [bkz. 19, s. 110, Th.4.4).

Burada ve bundan sonra  $y$  kanonik yansıma olarak ele alınacaktır.  $f \in A(G)$  olsun.  $\zeta = \psi(w)$  dönüşümünü (3.3)'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} f(y(\psi(w))) y_{\zeta} [\psi(w)] \frac{\overline{\psi'(w)} \psi'(w)}{[\psi(w)-z]^2} d\sigma_w \quad (3.5) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{f(y(\psi(w))) y_{\zeta} [\psi(w)] \overline{\psi'(w)}}{g[\psi(w)]} \frac{g[\psi(w)] \psi'(w)}{[\psi(w)-z]^2} d\sigma_w \end{aligned}$$

elde ederiz.

(3.2) ve (3.5)'ten aşağıdaki sonuç çıkıyor:

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f, g) F'_n(z, g), \quad z \in G \quad (3.6)$$

burada

$$a_m(f, g) = -\frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{f(y(\psi(w))) \overline{\psi'(w)}}{g[\psi(w)] w^{m+1}} y_{\zeta} [\psi(w)] d\sigma_w, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

(3.6) serisi genelleştirilmiş bir Faber serisinin türev serisi olduğundan, sadelik için bu seriye de genelleştirilmiş Faber serisi ve  $a_m(f, g), m = 1, 2, \dots$  katsayılarına  $f$  nin genelleştirilmiş Faber katsayıları denir.

Bu bölümde  $f \in A^2(G, \omega)$  fonksiyonuna göre yazılmış (3.6) serisinin  $G$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğu kanıtlanıyor. Dikkate alınan  $\omega$  ağırlık fonksiyonların sınıfını  $g$  fonksiyonları ve  $\Gamma$ 'ye göre tanımlanan kvazikonform yansımalar yardımı ile karakterize edilir.

Biz genelleştirilmiş Faber serileri için teklik problemini araştırıyoruz ve  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m F'_m(z, w)$  serisinin  $f \in A^2(G, \omega)$  fonksiyonuna  $\|\cdot\|_{A^2(G, \omega)}$  normuna göre yakınsak olduğu ve  $\omega$  ağırlık fonksiyonunun bazı kısıtlamaları sağlandığında  $\{b_m\}$ 'nin  $f$  nin genelleştirilmiş Faber katsayıları olduğunu kanıtlanıyor. Son olarak, eğer  $\omega \equiv 1$  ve  $S_n(f, z) := \sum_{m=1}^{n+1} a_m(f) F'_m(z)$ ,  $f \in A^2(E_R)$ 'nin  $n$ 'ci kısmı toplamı olduğu durumda  $\|f - S_n(f, \cdot)\|_{A^2(E)}$  hatasını  $E_n(f, E_R)$  ile değerlendiriliyor.

Burada:

$$E_n(f, E_R) := \inf \left\{ \|f - P_n\|_{A^2(E_R)} : P_n \text{ derecesi en fazla } n \text{ olan } \forall \text{ polinom} \right\}$$

$f$ 'ye derecesi en fazla  $n$  olan polinomların yaklaşımındaki minimum hatayı belirtir.

$\omega = 1$  durumunda burada sunulan sonuçların bazıları sırasıyla [21] ve [22] çalışmalarında vurgulanmış ve ispat edilmiştir.

Vurgulayalım ki, kompleks düzlemin bir  $G$  bölgesinde analitik olup,  $\bar{G}$  kapanışında sürekli fonksiyonların  $A(\bar{G})$  sınıfında benzer problem [23] çalışmasında araştırılmıştır. Sonuçlar açısından önemli olmayan parametrelere bağlı sabitleri belirtmek için  $c, c_1, c_2, \dots$  kullanacağız.

### 3.2 Yardımcı Sonuçlar

$R > 1$  için  $G_R := \left\{ z : z \in C\bar{G}, |\varphi(z)| < R \right\} \cup \bar{G}$  olsun.

**Önerme 3.2.1:**  $g, C\bar{G}$  üzerinde  $g(\infty) > 0$  koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon olsun.

Sabit bir  $R_0 \in (1, \infty)$  için

$$\iint_{G_{R_0} \setminus G} |g(z)|^2 d\sigma_z < \infty$$

olsun.

O halde  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|}{m+1}$  fonksiyonel seri  $G$  bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak bir seridir.

**İspat:**  $z, G$  bölgesinde yerleşen sabit bir nokta olsun. Bu durumda,  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|}{m+1} w^{m+1}$

serisi  $D$  diskinde bir analitik fonksiyon olur.

$$A(z, w) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F'_m(z, g)}{m+1} w^{m+1}. \quad (3.8)$$

(3.2) ve (3.8) kullanarak

$$A'_w(z, w) := \sum_{m=1}^{\infty} F'_m(z, g) w^m = \frac{g[\psi(1/w)]\psi'(1/w)}{[\psi(1/w) - z]^2 w} \quad (3.9)$$

elde edilir.

$0 < r < 1$  olsun.  $\sum_{m=1}^{\infty} F'_m(z, g) w^m$  serisi  $\bar{D}(0, r)$  kapalı diskte düzgün ve mutlak yakınsak olduğundan

$$S_r(z) := \int \int_{D(0, r)} |A'_w(z, w)|^2 d\sigma_w = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2}{m+1} r^{2m+2}. \quad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10) denkleminde görülüyor.

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2 r^{2m+2}}{m+1} = \int \int_{D(0, r)} \left| \frac{g[\psi(1/w)] \psi'(1/w)}{[\psi(1/w) - z]^2 w} \right|^2 d\sigma_w. \quad (3.11)$$

Öte yandan,  $R_0 \in (1, \infty)$  sabiti için,

$$\begin{aligned} S(z) &:= \iint_D \left| \frac{g[\psi(1/w)] \psi'(1/w)}{[\psi(1/w) - z]^2 w} \right|^2 d\sigma_w \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{g[\psi(e^{-i\varphi}/\rho)] \psi'(e^{-i\varphi}/\rho)}{[\psi(e^{-i\varphi}/\rho) - z]^2 \omega} \right|^2 d\rho d\varphi \\ &= \int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g[\psi(R e^{-i\varphi})] \psi'(R e^{-i\varphi})}{[\psi(R e^{-i\varphi}) - z]^2 w} \right|^2 \frac{dR d\varphi}{R} \\ &= \left( \int_1^{R_0} \int_0^{2\pi} + \int_{R_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \right) \dots =: J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

$M, G'$  de kompakt bir alt küme ve  $z \in M$  olsun  $\delta := \text{dist}(M, \Gamma)$  işaretlendiğinde

$$J_1 \leq \frac{1}{\delta^4} \int_1^{R_0} \int_0^{2\pi} |g[\psi(R e^{-i\varphi})] \psi'(R e^{-i\varphi})|^2 dR d\varphi = \frac{1}{\delta^4} \int_{G_{R_0}} \int_G |g(z)|^2 d\sigma_z \leq \frac{c_3}{\delta^4}$$

elde edilir.

Benzer şekilde tüm  $z \in M$  için  $J_2$  integralinin düzgün sınırlılığı gösterilebilir. Sonuç olarak

(3.12)'den sabit bir  $c_4$  sayısı ve tüm  $z \in M$  için

$$S(z) \leq c_4 / \delta^4 \quad (3.13)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.11)'de  $r \rightarrow 1$  kabul edersek

$$S(z) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2}{m+1} \quad (3.14)$$

elde edilir.

$S(z)$  toplamı  $G$ 'de sürekli olduğundan, Dini teoremine göre (3.13) ve (3.14)'ten

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2}{m+1}$$

serisinin  $G$ 'nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak olduğu görülür.

**Önerme 3.2.2:**  $y$ ,  $\Gamma$  sınırına göre  $K$ -kvazikonform bir yansıma ve  $f \in A^2(G, \omega)$  olsun.

O halde;

$$\int \int_{C\bar{G}} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left| y_{\zeta}^{-}(\zeta) \right|^2 d\sigma_{\zeta} \leq \frac{\|f\|_{A^2(G, \omega)}^2}{1-k^2}, \quad k = \frac{K-1}{K+1}.$$

**İspat:**  $y^{-}$ ,  $C\bar{G}$ 'nin kendi üzerine  $K$ -kvazikonform yansıması olduğundan

$$\frac{|y_{\zeta}|}{|y_{\zeta}^{-}|} = \frac{|y_{\zeta}^{-}|}{|y_{\zeta}|} \leq k \quad \text{ve} \quad |y_{\zeta}|^2 - |y_{\zeta}^{-}|^2 > 0. \quad J = |y_{\zeta}|^2 - |y_{\zeta}^{-}|^2 \quad y\text{'nin Jacobian ise}$$

$$\begin{aligned} \int \int_{C\bar{G}} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left| y_{\zeta}^{-}(\zeta) \right|^2 d\sigma_{\zeta} &= \int \int_{C\bar{G}} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left( 1 - \left( \frac{|y_{\zeta}|}{|y_{\zeta}^{-}|} \right)^2 \right)^{-1} (-J(\zeta)) d\sigma_{\zeta} \\ &\leq \frac{1}{1-k^2} \int \int_{C\bar{G}} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) (-J(\zeta)) d\sigma_{\zeta} = \frac{\|f\|_{A^2(G, \omega)}^2}{1-k^2} \end{aligned}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.  $f \equiv 1$  ve  $\omega \equiv 1$  durumunda bu sonuç [17] çalışmasında ispatlanmıştır.

**Önerme 3.2.3:**  $g$ , sınırlı,  $C\bar{G}$ 'de sıfır değeri almayan bir analitik fonksiyon olsun.

O halde;

$$a_n(F'_m, g) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

**İspat:** Önce Green formülünü ve daha sonra analitik fonksiyonlar için Cauchy integral teoremini kullanarak

$$\begin{aligned}
a_n(F'_m, g) &= -\frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{F'_m(y(\psi(w)), g) y'_\psi[\psi(w)] \psi'(\bar{w})}{g[\psi(w)] w^{m+1}} d\sigma_w, \\
&= -\frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left[ \frac{F_m(y(\psi(w)), g)}{g[\psi(w)]} \frac{1}{w^{m+1}} \right] d\sigma_w, \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{F_m(\psi(w), g)}{g[\psi(w)]} \frac{1}{w^{n+1}} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{F_m(\psi(w), g)}{g[\psi(w)]} \frac{1}{w^{n+1}} dw
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir.

[11]'e göre

$$F_m(z, g) = g(z)\varphi^m(z) + E_m(z, g),$$

burada,  $E_m(z, g)$ ,  $\bar{C}\bar{G}$ 'de analitik ve  $E_m(\infty, g) = 0$  olduğundan (3.15)'den

$$\begin{aligned}
a_n(F'_m, g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} w^{m-n-1} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{E_m(\psi(w), g)}{g[\psi(w)] w^{n+1}} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} w^{m-n-1} dw = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

elde ederiz ve önerme 3.2.3'ün ispatı tamamlanır.

### 3.3 Ana Sonuçlar

#### 3.3.1 Ağırlıklı durum

$g$ ,  $\bar{C}\bar{G}$  üzerinde bir analitik fonksiyon ve  $g(\infty) > 0$  ve olsun. Bir  $R_0 \in (1, \infty)$  sabiti için

$$\iint_{\bar{G}_{R_0|G}} |g(z)|^2 d\sigma_z < \infty \tag{3.16}$$

olsun.

Bu şekildeki her  $g$  için bir  $\omega$  ağırlıklı fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\omega(z) := 1/|(g \circ y)(z)|^2, z \in G,$$

burada  $y$ ,  $\Gamma$  sınırına göre kanonik bir yansımadır.

**Tanım 3.3.1.1:** Yukarıda tanımlanan  $\omega$  ağırlık fonksiyonların sınıfını  $W^2(G)$  ile gösterilsin.

**Teorem 3.3.1.2:**  $f \in A^2(G, \omega), \omega \in W^2(G)$  olsun. Bu durumda  $f$ 'nin genelleştirilmiş (3.6) Faber serisi,  $G$ 'nin her kompakt alt kümesinde  $f$ 'ye düzgün yakınsar.

**İspat:**  $f \in A^2(G, \omega)$  ve  $\omega \in W^2(G)$  olsun. Öncelikle  $f \in A(G)$  olduğunu kanıtlayalım. Yeterince küçük  $\delta > 0$  sayısı için (3.4) ve (3.16) ilişkilerini kullanarak

$$\begin{aligned} \int \int_G |(g \circ y)(z)|^2 d\sigma_z &= \int \int_{C\bar{G}} |g(z)|^2 \left( |y_z^-|^2 - |y_z|^2 \right) d\sigma_z \\ &\leq \int \int_{C\bar{G}} |g(z)|^2 |y_z^-|^2 d\sigma_z = \iint_{G_{R_0} \setminus \bar{G}} |g(z)|^2 |y_z^-|^2 d\sigma_z + \int \int_{C\bar{G}_{R_0}} |g(z)|^2 |y_z^-|^2 d\sigma_z \\ &\leq c_5 \iint_{G_{R_0} \setminus \bar{G}} |g(z)|^2 d\sigma_z = c_6 \iint_{C\bar{G}_R} |y_z^-|^2 d\sigma_z < \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada  $c_6 = \max \{ |g(z)| : z \in C\bar{G}_{R_0} \}$ . Hölder eşitsizliğinden dolayı,

$$\left( \iint_G |f(z)| d\sigma_z \right)^2 \leq \left( \iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z \right) \left( \iint_G |(g \circ y)(z)|^2 d\sigma_z \right) < \infty.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{m=1}^n a_m(f, g) F'_m(z, g) \right|^2 &= \frac{1}{\pi} \int \int_{C\bar{D}} \frac{f(y(\psi(w))) y_z^- [\psi w] \overline{\psi'(w)}}{g[\psi(w)]} \left[ \frac{g[\psi(w)] \psi'(w)}{[\psi(w) - z]^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^n \frac{F'_m(z, g)}{w^{m+1}} \right] d\sigma_w \Big|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int \int_{C\bar{D}} \frac{f(y(\psi(w))) y_z^- [\psi(w)] \overline{\psi'(w)}}{g[\psi(w)]} \Big|^2 d\sigma_w \\ &= \frac{1}{\pi} J_1 \cdot J_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Önerme (3.2.2) sayesinde

$$J_1 = \int \int_{C\bar{G}} \left| \frac{f(y(z))y_z(z)}{g(z)} \right|^2 d\sigma_z \leq c_7 \int \int_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z < \infty. \quad (3.18)$$

Şimdi  $J_2$  integralini değerlendireceğiz.  $1 < r < R < \infty$  olsun. (3.2.2)'yi kullandığımızda

$$\begin{aligned} \int \int_{r<|w|<R} \left| \frac{g[\psi(w)]\psi'(w)}{[\psi(w)-z]^2} - \sum_{m=1}^n \frac{F'_m(z, g)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w &= \int \int_{r<|w|<R} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{F'_m(z, g)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w \\ &= \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{1}{r^{2m}} - \frac{1}{R^{2m}} \right) |F'_m(z, g)|^2 \leq 2\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2}{m+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$r \rightarrow 1$  ve  $R \rightarrow \infty$  kabul edersek

$$J_2 \leq 4\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2}{m+1}. \quad (3.19)$$

elde edilir.

Dolayısıyla (3.17), (3.18) ve (3.19)'a göre aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^n a_m(f, g) F'_m(z, g) \right|^2 \leq c_8 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|F'_m(z, g)|^2}{m+1}$$

ve önerme 3.2.1 sayesinde ispatımız tamamlanır.

**Teorem 3.3.1.3:**  $g, C\bar{G}$ 'de sıfır değeri almayan sınırlı ve analitik bir fonksiyon ve  $\{b_m\}$ ,  $m=1, 2, \dots$ , bir karmaşık sayılar dizisi olduğunu varsayalım. Eğer  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m F'_m(z, g)$  serisi  $\|\cdot\|_{A^2(G, \omega)}$  normunda bir  $f \in^2(G, \omega)$  fonksiyonuna yakınsıyor ise,  $b_m$ ,  $m=1, 2, \dots$ ,  $f$ 'nin genelleştirilmiş Faber katsayılarıdır.

**İspat:**  $S_n(z) := \sum_{m=1}^{n+1} b_m F'_m(z, g)$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m F'_m(z, g)$ 'nin  $n$ 'inci kısmi toplamı olsun.

Önerme 3.2.3'ü kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\pi} \int \int_{C\bar{D}} \frac{(S_n \circ \gamma)(\psi(w))y_z[\psi(w)]\overline{\psi'(w)}}{g[\psi(w)]w^{m+1}} d\sigma_w = b_m, \quad (3.20)$$

$m = 1, 2, \dots$

elde edilir.

Öte yandan Hölder eşitsizliği ve önerme 3.2.2'yi kullanarak her  $n$  doğal sayısı için

$$\begin{aligned}
& |b_m - a_m(f, g)| \\
& \leq \left| \frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{(f \circ y)(\psi(w)) - (S_n \circ y)(\psi(w))}{g[\psi(w)] w^{m+1}} y_{\bar{\zeta}}[\psi(w)] \psi'(w) d\sigma_w \right| \\
& \quad + \left| \frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{(S_n \circ y)(\psi(w))}{g[\psi(w)] w^{m+1}} y_{\bar{\zeta}}[\psi(w)] \overline{\psi'(w)} d\sigma_w - b_m \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \left( \int \int_{\bar{C}\bar{G}} \left| \frac{f - S_n(y(z))}{g(z)} \right|^2 \left| y_{\bar{\zeta}}(z) \right|^2 d\sigma_w \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \left| \frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{(S_n \circ y)(\psi(w))}{g[\psi(w)] w^{m+1}} y_{\bar{\zeta}}[\psi(w)] \overline{\psi'(w)} d\sigma_w - b_m \right| \\
& \leq c_9 \left( \int \int_{\bar{G}} |f(z) - S_n(z)|^2 w(z) d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \left| \frac{1}{\pi} \int \int_{\bar{C}\bar{D}} \frac{(S_n \circ y)(\psi(w))}{g[\psi(w)] w^{m+1}} y_{\bar{\zeta}}[\psi(w)] \overline{\psi'(w)} d\sigma_w + b_m \right|
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir.

$n \rightarrow \infty$  için  $\|f - S_n\|_{A^2(G, \omega)} \rightarrow 0$ , (3.20) ve (3.21) ilişkilerinden  $a_m(f, g) = b_m$  olduğu görülür ve böylece teoremden ispatlanmış olur.

Bu teoremden görüldüğü gibi  $f$  fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber katsayıları kanonik yansımanın seçiminden bağımsızdır.

### 3.3.2 Ağırlıksız durum

Yukarıda bahsedilen teorem ve önermeler  $\omega = 1$  özel durumunda da geçerlidir. Ayrıca, bu durumda  $\|f - S_n(f, \cdot)\|_{A^2(E)}$  hatasını  $E_n(f, E_R)$  minimum hatası yardımı ile değerlendirilir.

**Önerme 3.3.2.1:**  $F_m$ ,  $m=1, 2, \dots, E$  için Faber polinomları olsun.

Bu durumda,

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\|F'_m\|_{A^2(E)}}{mR^{2m}} \leq \frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}.$$

**İspat:**  $E$ 'nin Riemann yüzeyinde  $F_m$  altındaki görüntüsünün alanı  $S_m(E)$  olsun.  $F_m(\psi(w)) = w^m + \sum_{s=1}^{\infty} mb_{ms}w^{-s}$ ,  $|w| > 1$ , olduğundan [16] (burada  $b_{ms}$  Grunsky katsayılarıdır.) Lebedev ve Milin'e bağlı bir teorem aracılığıyla [11].

$$S_m(E) = \pi \left( m - \sum_{s=1}^{\infty} sm^2 |b_{ms}|^2 \right) \leq \pi m \quad (3.22)$$

olduğu elde edilir.

Diğer taraftan,

$$S_m(G) = \iint_E |F'_m(z)|^2 d\sigma_z = \|F'_m\|_{A^2(E)}^2. \quad (3.23)$$

(3.22) ve (3.23)'ten şu sonuç çıkıyor:

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\|F'_m\|_{A^2(E)}}{mR^{2m}} \leq \pi \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{1}{R^{2m}} = \frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}.$$

Vurgulayalım ki yukarıdaki değerlendirme genel olarak kesindir ve bu değerlendirmenin

$\frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}$  üst sınırı genellikle küçültülemez. Özel halde  $D$  birim disk olduğunda

$F_m(z) = z^m$  olur ve bunun sonucunda

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\|F'_m\|_{A^2(E)}}{mR^{2m}} = \frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}.$$

elde edilir.

$y(R, z), \Gamma_R$  sınırına göre bir  $K_R$  kvazikonform yansıma olsun. O zaman aşağıdaki teorem geçerlidir.

**Teorem 3.3.2.2:** Eğer  $f \in A^2(E_R)$ ,  $R > 1$  ve  $S_n(f, z) := \sum_{m=1}^{n+1} a_m(f) F'_m(z)$  olduğunda Bergman uzayında yaklaşım hatası

$$\|f - S_n(f, \cdot)\|_{A^2(E)} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-k_R^2)(R^2-1)}} \frac{E_n(f, E_R)}{R^{n+1}}$$

olarak değerlendirilir,

$$\text{burada } k_R := \frac{K_R - 1}{K_R + 1}.$$

**İspat:**  $P_n^* f \in A^2(E_R)$  fonksiyonuna  $\|\cdot\|_{A^2(E_R)}$  normunda en iyi yaklaşan polinom, yani

$$\|f - P_n^*\|_{A^2(E_R)} = E_n(f, E_R)$$

olsun.

Teorem 3.3.1.2 ve Önerme 3.2.3'e göre her  $z \in E$  için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} |f(z) - S_n(f, z)| &= \left| \sum_{m=n+2}^{\infty} a_m(f) F'_m(z) \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{m=n+2}^{\infty} \int \int_{|w|>R} (f - P_n^*) o y(R, \psi(w)) \psi'(w) y_{\bar{c}}[R, \psi(w)] \frac{F'_m(z)}{w^{m+1}} d\sigma_w \right|. \end{aligned}$$

Daha sonra Hölder eşitsizliği ve Önerme 3.2.2.1'i uygularsak şu elde edilir:

$$|f(z) - S_n(f, z)|^2 \leq \frac{E_n^2(f, E_R)}{\pi(1-k_R^2)} \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{|F'_m(z)|^2}{mR^{2m}}. \quad (3.24)$$

(3.24)'ün her iki tarafının  $E$  üzerinden integralini alırsak, önerme 4'e göre şu elde edilir:

$$\|f - S_n(f, \cdot)\|_{A^2(E)}^2 \leq \frac{1}{(1-k_R^2)(R^2-1)} \frac{E_n^2(f, E_R)}{R^{2(n+1)}}.$$

Buradan

$$\|f - S_n(f, \cdot)\|_{A^2(E)} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-k_R^2)(R^2-1)}} \frac{E_n(f, E_R)}{R^{n+1}}$$

ve kanıtımız tamamlanır.

$E=\bar{G}$  için  $R=1$  durumu [22] çalışmasında araştırılmıştır.

## 4. SMİRNOV-ORLICZ SINIFLARINDA YAKLAŞIM

Bu bölümde Smirnov-Orlicz sınıfları olarak bilinen fonksiyon uzaylarında yaklaşım teorisinin bazı düz teoremlerini elde etmek için Faber polinomlarına göre oluşturulan kısmi toplamların yaklaşım özellikleri kullanılacaktır.

### 4.1 Giriş ve Ana Sonuçlar

$\Gamma$ ,  $C$  karmaşık düzleminde doğrultulabilir bir Jordan eğrisi olsun.  $G := \text{Int}\Gamma$  ile sınırı  $\Gamma$  eğrisi olan sınırlı bölgeyi,  $G^- := \text{Ext}\Gamma$  ile ise  $\Gamma$  ile sınırlı, sınırsız bölgeyi gösterelim. Genelliği kaybetmeden  $0 \in G$  olduğunu varsayabiliriz.  $T$  ile sıfır merkezli bir yarıçaplı çemberi,  $D$  ile bu çemberle sınırlı birim daireyi,  $D^-$  ile bu çemberin dış kısmını,  $w = \varphi(z)$  ile  $G^-$  bölgesinin  $D^-$  bölgesi üzerine:

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0,$$

olarak normlanmış konform dönüşümünü ve  $\psi$  ile  $\varphi$  dönüşümünün ters dönüşümünü gösterelim.

$1 \leq p < \infty$  olduğunda,  $\Gamma$  eğrisi üzerine  $p$ . dereceden Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayını,  $L^p(\Gamma)$  ile  $G$  bölgesinde analitik fonksiyonların Smirnov sınıfını işaretleyelim. Hatırlatalım ki, analitik bir  $f$  fonksiyonu verildiğinde belirli bir  $n$  numarasından sonra  $G$  de yerleşen istenilen kompaktı içeren ve  $n$  sonsuzluğa yaklaştığında  $G$  bölgesinin sınırına yaklaşan  $\gamma_k$ ,  $k=1,2,3,\dots$ , sonlu uzunluklu Jordan eğrilerinden oluşan bir  $(\gamma_k) \subset G$  dizisi bulunabiliyor ve

$$\int_{\gamma_k} |f(z)|^p |dz| \leq M < \infty$$

eşitsizliği  $k$  numarasından bağımsız bir  $M$  sabiti için sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonu  $E^p(G)$  sınıfına aittir denir. Eğer,  $f \in E^p(G)$  ise,  $\Gamma$  eğrisinin hemen her noktasında (h.h.y) teğetsel olmayan yollar üzerinden belirli limit değerleri vardır ve limit değerlerinden oluşan sınır fonksiyonu  $L^p(\Gamma)$  (bakınız, örneğin: [23, s. 438-453] Lebesgue uzayının bir fonksiyonudur.

$\Gamma$  sonlu uzunluklu olduğundan,  $\varphi' \in E_1(G^-)$  ve  $\psi' \in E_1(D^-)$  ve dolayısıyla  $\varphi'$  ve  $\psi'$  fonksiyonları  $\Gamma$  ve  $T$  üzerinde h.h.y. teğetsel olmayan yollar üzerinden sonlu limit

değerlerine sahiptirler. Üstelik, bu limit fonksiyonları sırasıyla  $L_1(\Gamma)$  ve  $L_1(T)$ 'ye aittirler. (bkz. örneğin [24, s. 419]).

$h$  ile  $[0, 2\pi]$  aralığında sürekli bir fonksiyonu gösterelim.  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ ,  $|t_1 - t_2| \leq t$  koşulları altında  $h$  fonksiyonunun süreklilik modülünün şu şekilde tanımlandığını varsayalım:

$$\omega(t, h) := \text{Sup}\{|h(t_1) - h(t_2)| : |t_1 - t_2| \leq t\}.$$

$h$  fonksiyonu verildiğinde, eğer

$$\int_0^\pi \omega(t, h) / t dt < \infty$$

ise  $h$  fonksiyonuna Dini sürekli fonksiyon denir.

**Tanım 4.1.1** [25, s. 48].  $\Gamma$  eğrisi

$$\Gamma : \varphi_0(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi$$

öyle ki  $\varphi_0'(\tau)$  türevi Dini sürekli olup  $\varphi_0'(\tau) \neq 0$ , biçiminde bir parametrizasyona sahipse  $\Gamma$  eğrisine Dini düzgün eğri denir.

Eğer  $\Gamma$  Dini-düzgün ise o zaman [26]

$$0 < c_1 \leq |\varphi'(z)| \leq c_2 < \infty, \quad z \in \Gamma \quad (4.1)$$

olacak şekilde  $z$ 'den bağımsız bazı  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri vardır.

$R := (-\infty, \infty)$  ve  $R^+ := (0, \infty)$  olsun. Eğer  $M(u) : R \rightarrow R^+$  fonksiyonu

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt,$$

biçiminde gösterilebiliyorsa, burada  $p(t)$  fonksiyonu sağ süreklidir ve değişkenin negatif olmayan  $t$  değerleri için azalmayan ve pozitif  $t$  ler için için pozitif olup,  $p(0) = 0$ ,  $p(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty$  koşullarını sağlıyor ise,  $M(u)$  fonksiyonuna  $N$ - fonksiyon denir.

Bu

$$N(v) := \int_0^{|v|} q(s) ds,$$

olarak tanımlanan fonksiyona,

$$q(s) := \sup_{p(t) \leq s} t, \quad (s \geq 0)$$

$M(u)$ 'nin tamamlayıcı fonksiyonu denir [27, s. 11].

$N$  - fonksiyonu olarak verilmiş bir  $M$  fonksiyonunu ve bunun tamamlayıcı  $N$  fonksiyonunu alalım. Lebesgue anlamında ölçülebilir  $f : \Gamma \rightarrow C$  fonksiyonlarının oluşturduğu  $L_M(\Gamma)$  uzayı belli bir  $\alpha > 0$  için  $\int_{\Gamma} M[\alpha|f(z)]|dz| < \infty$ , koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu lineer uzay olarak tanımlansın.

$$L_M(\Gamma) \text{ uzayı } \|f\|_{L_M(\Gamma)} := \sup \left\{ \int_{\Gamma} |f(z)g(z)||dz| : g \in L_N(\Gamma), \mu(g; N) \leq 1 \right\}, \text{ normuna göre bir}$$

Banach uzayı olur,

Burada

$$\mu(g; N) := \int_{\Gamma} N[|g(z)|]|dz|.$$

$\|\cdot\|_{L_M(\Gamma)}$  normuna Orlicz normu,  $L_M(\Gamma)$  uzayına ise Orlicz fonksiyon uzayı denir.  $L_M(\Gamma)$

uzayının her fonksiyonu  $\Gamma$  üzerinde integrallenebilirdir [28, s. 50], yani

$$L_M(\Gamma) \subset L_I(\Gamma). \quad (4.2)$$

Bir  $M$  fonksiyonu  $N$  - fonksiyonu olup

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty \text{ koşulunu sağladığında } M \text{ fonksiyonu } \Delta_2 \text{ koşulunu sağlar denir.}$$

$L_M(\Gamma)$  Orlicz uzayı, ancak ve ancak verilen  $M$  fonksiyonu ve onun tamamlayıcı  $N$  fonksiyonu  $\Delta_2$  koşulunu sağladığında refleksiv olur [28, s. 113].

$0 < r < 1$  olduğunda  $\Gamma_r$ ,  $r$  yarıçaplı  $|w| = r$  çemberinin  $D$ 'nin  $G$  üzerine bir konform dönüşümü altında görüntüsü ve  $M$ , bir  $N$  - fonksiyonu olsun.

**Tanım 4.1.2:**  $G$ 'de analitik bir  $f$  fonksiyonu  $r$ 'ye göre düzgün olarak

$$\int_{\Gamma_r} M[|f(z)|]|dz| < \infty \text{ koşulu}$$

sağlıyor ise  $f$ ,  $E_M(G)$  Smirnov-Orlicz sınıfına aittir denir.

Eğer  $M(x) := M(x, p) := x^p$ ,  $p \in (1, \infty)$ , ise,  $E_M(G)$  Smirnov-Orlicz sınıfı bilinen  $E_p(G)$  Smirnov sınıfı ile çakışır.

$E_M(G)$  sınıfındaki her fonksiyon  $\Gamma$  eğrisinin h.h. noktasında teğetsel olmayan yollar üzerinden sınır değerlerine sahiptir ve bu değerlerinin oluşturduğu sınır fonksiyonu  $L_M(\Gamma)$  uzayına aittir [14] ve sonuç olarak  $f \in E_M(G)$  fonksiyonunun  $E_M(G)$  normu tanımlanabilir:

$$\|f\|_{E_M(G)} := \|f\|_{L_M(\Gamma)}$$

olarak tanımlanabilir.

$\zeta \in \Gamma$  için  $\zeta_h \in \Gamma$  noktası aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\zeta_h := \psi(\varphi(\zeta)e^{ih}), \quad h \in [0, 2\pi].$$

Ayrıca  $f \in L_M(\Gamma)$  için  $T_h f$  ötelemesi

$$T_h f(\zeta) := f(\zeta_h), \quad \zeta \in \Gamma \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlansın. Eğer  $\Gamma$  Dini-düzgün eğri ise ilişki (4.1) kullanılarak,  $L_M(\Gamma)$ 'nin  $T_h f$  ötelemesi altında invaryant olduğu görülebilir.

$f \in L_M(\Gamma)$  için süreklilik modülü şu şekilde tanımlansın:

$$\omega_M(\delta, f) := \sup_{|h| \leq \delta} \|f - T_h f\|_{L_M(\Gamma)}, \quad \delta \geq 0. \quad (4.4)$$

Görüldüğü gibi

$$\omega_M(0, f) = 0,$$

$$\omega_M(\delta, f) \geq 0 \text{ için } \delta > 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_M(\delta, f) = 0,$$

$$\text{ve } f, g \in E_M(G) \text{ için } \omega_M(\delta, f + g) \leq \omega_M(\delta, f) + \omega_M(\delta, g).$$

$f \in E_M(G)$  için

$$\begin{aligned} E_n^M(f, G) &:= \inf \|f - p_n\|_{L_M(\Gamma)} \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \int_{\Gamma} |(f(\zeta) - p_n(\zeta))g(\zeta)| |d\zeta|; \rho(g; N) \leq 1 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olsun, burada  $\inf$ , derecesi en fazla  $n$  olan  $p_n$  polinomları üzerinden alınır.

Bu çalışmada Smirnov-Orlicz sınıfı  $E_M(G)$ 'de polinomlarla yaklaşımın bazı problemlerini ele aldık. Yeni sonuçlar aşağıdaki gibidir:

**Teorem 4.1.3:** Sınırı Dini düzgün  $\Gamma$  eğrisi olan  $G$  basit bağlantılı, sınırlı bölgesi bu bölgede tanımlı  $E_M(G)$ , refleksif Smirnov-Orlicz uzayı verilmiş olsun. Bu durumda  $f \in E_M(G)$  ve herhangi bir doğal  $n$  sayısı için

$$\|f - p_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

olacak şekilde derecesi en fazla  $n$  olan bir  $p_n(\cdot, f)$  polinomu mevcuttur, burada  $c$ ,  $n$ 'den bağımsız bir sabittir.

Daha genel durumda, yani  $\Gamma$  bir Carleson eğrisi olduğunda, aynı toplanabilme yöntemini uygulayarak, daha farklı süreklilik modülü yardımı ile Smirnov Orlicz sınıfı  $E_M(G)$ 'de polinomlarla bir düz yaklaşım teoremi [29]'de verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan süreklilik modülü  $\omega_M$ , [29]'de ele alınan süreklilik modülünden daha basittir.

$L_p(\Gamma)$  ve  $E_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , uzayları için benzer problemler [24, 30-36]'te incelenmiştir. Tüm bu sonuçlar  $\Gamma = \partial G$  üzerine farklı kısıtlayıcı koşullar konularak elde edilmiştir.

Smirnov-Orlicz sınıflarında yaklaşım teorisinin bazı ters problemleri Kokilashvili [37] tarafından  $\Gamma$ 'nin Dini-düzgün eğri olması durumunda araştırılmıştır.

Şimdi  $K$  bağlantılı tümleyeni olan sınırlı bir kontinyum olsun.

$D := \bar{C} \setminus K$  ve  $f(z)$   $K$  üzerinde analitik bir fonksiyon olsun. İyi bilinmektedir ki [3, s. 199] bu durumda

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z), \quad z \in K \quad (4.6)$$

açılımı geçerlidir.

Burada

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Faber katsayılarıdır.

(4.6) açılımı verilen kontinyum üzerinde mutlak ve düzgün yakınsar; burada  $F_k(z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$  kontinyumunun Faber polinomları olup

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}, \quad z \in K, |w| > 1 \quad (4.7)$$

seri açılımını sağlar.

Faber polinomları ve bunların yaklaşım özellikleri hakkında detaylı bilgi [3, 29, 38] monografilerinde bulunabilir.

Şimdi

$$R_n(z, f) := f(z) - \sum_{k=0}^n a_k F_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z), \quad z \in K, \quad (4.8)$$

olsun ve

$$\Gamma_R := \{z \in D : |\varphi(z)| = R\} \text{ ve } G_R := \text{Int } \Gamma_R, R > 1$$

işaretlensin.

Aşağıdaki teorem, (4.6) Faber serisinin  $E_M(G_R)$  Smirnov-Orlicz uzayının maksimal yakınsaklık özelliğini karakterize eder.

**Teorem 4.1.4:** Verilen bir  $R > 1$  sayısı için  $f \in E_M(G_R)$  ise

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c E_n^M(f, G_R)}{R^{n+1}(R-1)} \sqrt{n \ln n}, \quad z \in K, n = 2, 3, \dots$$

eşitsizliğini sağlayan,  $n$  numarası ve  $z$  değişkeninden bağımsız bir  $c > 0$  sabiti vardır.

Teorem 4.1.3 ve 4.1.4'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.5:**  $R > 1$ ,  $K$ , bağlantılı tümleyene sahip bir kontinyum ve  $E_M(G_R)$ ,  $G_R$  kanonik bölgesinde tanımlı refleksiv bir Smirnov-Orlicz sınıfı olsun. Eğer  $f \in E_M(G_R)$  ise

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c \sqrt{n \ln n}}{R^{n+1}(R-1)} \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad z \in K,$$

olacak şekilde bir  $c > 0$  sabiti vardır.

Teorem 4.1.4  $E_p(G)$ ,  $p > 1$ , Smirnov uzaylarında [3 s. 207]'de kanıtlanmıştır.

Biz  $c, c_1, c_2, \dots$ , ile genellikle bir birinden farklı olup araştırdığımız problemlerde önemli olmayan sabitleri göstereceğiz.

## 4.2 Yardımcı Sonuçlar

$\Gamma$  doğrultulabilir bir Jordan eğrisi ve  $f \in L_1(\Gamma)$  olsun.  $f^+$  ve  $f^-$  fonksiyonlarını şu şekilde tanımlayalım:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G, \quad (4.9)$$

ve

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^-,$$

Bu fonksiyonlar, sırasıyla  $G$  ve  $G^-$ 'de analiktirler ve  $f^-(\infty) = 0$  olur.

$$S_{\Gamma} f(z_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \cap \{\zeta : |\zeta - z_0| \geq \varepsilon\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad z_0 \in \Gamma$$

$f \in L_1(\Gamma)$ 'in Cauchy singüler integrali olsun.

$\Gamma$  üzerinde h.h.y.  $f^+$  veya  $f^-$  fonksiyonlarından birinin teğet olmayan limitleri varsa,  $\Gamma$  üzerinde h.h.y.  $S_{\Gamma} f(z)$ 'de mevcuttur ve ayrıca diğerinin de  $\Gamma$  üzerinde h.h.y. teğetsel olmayan limiti vardır. Tersine,  $\Gamma$  üzerinde h.h.y.  $S_{\Gamma} f(z)$  mevcutsa, hem  $f^+$  hem de  $f^-$  fonksiyonlarının  $\Gamma$  üzerinde h.h.y. teğet olmayan limitleri vardır. Ayrıca:

$$2f^+(z) = 2S_{\Gamma} f(z) + f(z) \quad (4.10)$$

$$2f^-(z) = 2S_{\Gamma} f(z) - f(z)$$

formülleri geçerlidir ve dolayısıyla [23, s. 431]  $\Gamma$  üzerinde h.h.y.

$$f = f^+ - f^-$$

bağıntısı geçerlidir.

Doğrusal  $S_{\Gamma} : f \rightarrow S_{\Gamma} f$  operatörüne Cauchy singüler operatörü denir.

$\Gamma(z, \varepsilon)$  ile  $z \in \Gamma$  için  $\varepsilon > 0$  olduğunda  $\Gamma$ 'nin  $\varepsilon$  yarıçapı  $z$  merkezli açık disk içindeki kısmını gösterelim:

$$\Gamma(z, \varepsilon) := \{t \in \Gamma : |t - z| < \varepsilon\}.$$

$|\Gamma(z, \varepsilon)|$  ile  $\Gamma(z, \varepsilon)$  kümesinin Lebesgue uzunluğu gösterilsin.

**Teorem 4.2.1:** [39] Sonlu uzunluklu bir  $\Gamma$  Jordan eğrisi ve bu eğri üzerinde tanımlı bir  $L_M(\Gamma)$  reflektiv Orlicz uzayı olsun. Bu durumda  $S_\Gamma$  tekil operatörün  $L_M(\Gamma)$  üzerinde sınırlı olabilmesi yani,

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_3 \|f\|_{L_M(\Gamma)} \quad f \in L_M(\Gamma) \quad (4.11)$$

eşitsizliğinin bir  $c_3 > 0$  sabiti ile sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul  $\Gamma$  eğrisinin bir Carleson eğrisi olmasıdır.

**Teorem 4.2.2:** [27, s. 67] Bir çift  $u(z) \in L_M(\Gamma)$ , ve  $v(z) \in L_N(\Gamma)$  gerçel değerli fonksiyonları verildiğinde

$$\int_\Gamma u(z)v(z) dz \leq \rho(u; M) + \rho(v; N) \quad (4.12)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Teorem 4.2.3:** [27, s. 74] Bir çift  $u(z) \in L_M(\Gamma)$ , ve  $v(z) \in L_N(\Gamma)$  gerçel değerli fonksiyonları verildiğinde

$$\left| \int_\Gamma u(z)v(z) dz \right| \leq \|u\|_{L_M(\Gamma)} \|v\|_{L_M(\Gamma)} \quad (4.13)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Görüldüğü gibi (4.6) serisinin katsayıları aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\phi'(\zeta)}{\phi^{k+1}(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

ve dolayısıyla (4.8) bağıntısından

$$2\pi i R_n(z, f) = \int_T \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right] f(\psi(t)) dt$$

elde edilir.

Derecesi en fazla  $n$  olan  $p_n(z)$  polinomu için

$$R_n 2\pi i(z, f) = \int_T \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right] \{f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\} dt. \quad (4.14)$$

Ayrıca,

$$E_k(z) + [\phi(z)]^k = F_k(z), \quad z \in K \quad (4.15)$$

olduğundan, burada  $E_k(z)$ ,  $D'$ de analitiktik ve  $E_k(\infty) = 0$ ,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(z)}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)]^k}{t^{k+1}}, \quad (4.16)$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla (4.15)'ten (4.16)'yı hesaba katarak şunu elde ederiz:

$$2\pi |R_n(z, f)| \leq \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\psi(w)) \frac{1}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt|. \quad (4.17)$$

Ayrıca [3, s. 63-205] de verilen

$$E_k(\psi(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tau^k F(\tau, w) d\tau, \quad |w| \geq r > 1, \quad (4.18)$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} |F(\tau, w)| |d\tau| \leq \sqrt{\frac{r^2}{r^4 - 1} \ln \frac{r^2}{r^2 - 1}}, \quad r > 1, |w| \geq r > 1, \quad (4.19)$$

bağıntıları da kullanılacaktır, burada:

$$F(\tau, w) = \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi'(w)} - \frac{1}{\tau - w}, \quad |\tau| > 1, |w| > 1,$$

### 4.3 Ana Sonuçların Kanıtı

**Teorem 4.3.1- 4.1.3'ün kanıtı:**  $f \in L_M(\Gamma)$  olsun. O halde (4.2) yardımı ile  $f \in L_I(\Gamma)$  elde edilir.  $\Gamma$  Dini-düzgün olduğundan,  $f \circ \psi \in L_I(T)$  olur ve  $f \circ \psi$  ile

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{w^k}$$

formal serisi ilişkilendirebilir:

$$f(\psi(w)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{w^k}. \quad (4.20)$$

Şimdi

$$K_n(\theta) = \sum_{m=-n}^n \lambda_m^{(n)} e^{im\theta}$$

çift, negatif olmayan bir trigonometrik polinom olup  $\forall n \in \mathbb{N}$  için bir  $c_4 > 0$  sabiti ile

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = 1 \quad (4.21)$$

$$\int_0^{\pi} \theta K_n(\theta) d\theta \leq \frac{c_4}{n} \quad (4.22)$$

koşullarını sağlasın.

Örneğin,  $J_n(\theta) := \frac{3\left(\sin \frac{n\theta}{2}\right)^4}{n(2n^2 + 1)\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^4}$  Jackson çekirdeği bu koşulları sağlar.

$$I(\theta, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta_{-\theta})}{\zeta - z} d\zeta \quad z \in G \quad (4.23)$$

olsun.

$\zeta = \psi(e^{it})$  değişken dönüşümünü kullanarak şu elde edilir:

$$I(\theta, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(e^{i(t-\theta)})) \frac{\psi'(e^{it}) e^{it}}{\psi(e^{it}) - z} dt,$$

(4.20) ve (4.7) ilişkilerini dikkate alarak şu yazılabilir:

$$I(\theta, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) e^{-ik\theta}.$$

$I(\theta, z) \in L_1([-\pi, \pi])$  ve  $K_n(\theta)$  sınırlı varyasyona sahip olduklarından, genelleştirilmiş Parseval özdeşliği [40, s. 225-228] yardımı ile

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) I(\theta, z) d\theta = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} a_k F_k(z),$$

elde edilir.

Bu özdeşlik (4.23) ile birlikte

$$\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta_{-\theta})}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} a_k F_k(z), \quad z \in G$$

olduğunu gösterir.

Dolayısıyla şunu görüyoruz:

$$P_n(z, f) := \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta_{-\theta})}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G$$

integrali derecesi  $n$  olan bir cebirsel polinomdur.

Çekirdek  $K_n(\theta)$  çift bir fonksiyon olduğundan,

$$P_n(z, f) := \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^\pi K_n(\theta) d\theta \int_\Gamma [f(\zeta_\theta) + f(\zeta_{(-\theta)})] \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ve (4.3) ve (4.9)'dan şu sonuca varılır:

$$\begin{aligned} P_n(z, f) &:= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi K_n(\theta) d\theta \int_\Gamma [T_\theta f(\zeta) + T_{(-\theta)} f(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(\theta) [(T_\theta f)^+(z) + (T_{(-\theta)} f)^+(z)] d\theta, \quad z \in G. \end{aligned}$$

Şimdi  $f \in E_M(G)$  ve  $z' \in G$  olsun.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi K_n(\theta) d\theta = 1$

eşitliğinin her iki tarafı  $f^+(z')$  ile çarpıldığında

$$f(z') = f^+(z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f^+(z') K_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2f^+(z') K_n(\theta) d\theta,$$

ve böylece

$$f(z') - P_n(z', f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 2f^+(z') - [(T_\theta f)^+(z') + (T_{(-\theta)} f)^+(z')] \right\} K_n(\theta) d\theta.$$

$\Gamma$  üzerindeki tüm teğetsel olmayan yollar üzerinden  $z' \rightarrow z \in \Gamma$  limiti alındığında ve (4.10) kullanıldığında h.h.y.  $z \in \Gamma$  noktası için

$$\begin{aligned} f(z) - P_n(z, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(\theta) \left[ 2S_\Gamma f(z) + f(z) - S_\Gamma(T_\theta f)(z) - \frac{1}{2} T_\theta f(z) \right] \\ &\quad \left[ -S_\Gamma(T_{(-\theta)} f)(z) - \frac{1}{2}(T_{(-\theta)} f)(z) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(\theta) [S_\Gamma(f - T_\theta f)(z) + S_\Gamma(f - T_{(-\theta)} f)(z)] d\theta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi K_n(\theta) [(f - T_\theta f)(z) + (f - T_{(-\theta)} f)(z)] d\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

Son ilişkide  $\rho(g;N) \leq 1$  koşulunu sağlayan tüm  $g \in L_N(\Gamma)$  fonksiyonları üzerinden supremum alındığında, şu elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} = \sup_{\Gamma} \int |f(z) - P_n(z, f)| |g(z)| |dz| \\
& \leq \sup_{\Gamma} \int \left| \frac{1}{2} \int_0^{\pi} K_n(\theta) [S_{\Gamma}(f - T_{\theta}f)(z) + S_{\Gamma}(f - T_{(-\theta)}f)(z)] d\theta \right| |g(z)| |dz| \\
& + \sup_{\Gamma} \int \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) [(f - T_{\theta}f)(z) + (f - T_{(-\theta)}f)(z)] d\theta \right| |g(z)| |dz| \\
& \leq \sup_{\Gamma} \int \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) (|S_{\Gamma}(f - T_{\theta}f)(z)| + |S_{\Gamma}(f - T_{(-\theta)}f)(z)|) d\theta \right\} |g(z)| |dz| \\
& + \sup_{\Gamma} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) [|f - T_{\theta}f)(z)| + |(f - T_{(-\theta)}f)(z)|] d\theta \right\} |g(z)| |dz|
\end{aligned}$$

ve Fubini's teoremine göre

$$\begin{aligned}
& \|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \sup_{\Gamma} \int [|S_{\Gamma}(f - T_{\theta}f)(z)| + |S_{\Gamma}(f - T_{(-\theta)}f)(z)|] |g(z)| |dz| \right\} d\theta \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \sup_{\Gamma} \int [(f - T_{\theta}f)(z) + |f - T_{(-\theta)}f)(z)|] |g(z)| |dz| \right\} d\theta \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \|S_{\Gamma}(f - T_{\theta}f)\|_{L_M(\Gamma)} + \|S_{\Gamma}(f - T_{(-\theta)}f)\|_{L_M(\Gamma)} d\theta \\
& + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} K_n(\theta) [\|f - T_{\theta}f\|_{L_M(\Gamma)} + \|f - T_{(-\theta)}f\|_{L_M(\Gamma)}] d\theta
\end{aligned}$$

Şimdi (4.11)'i uygulayarak şu elde edilir:

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_5 \int_0^{\pi} K_n(\theta) [\|f - T_{\theta}f\|_{L_M(\Gamma)} + \|f - T_{(-\theta)}f\|_{L_M(\Gamma)}] d\theta,$$

ve  $\omega_M(\delta, f)$ 'nin (4.4) tanımı kullanıldığında

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_6 \int_0^{\pi} K_n(\theta) \omega_M(\theta, f) d\theta \leq c_7 \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right) \int_0^{\pi} K_n(\theta) (n\theta + 1) d\theta.$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak (4.21) ve (4.22)'den

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_8 \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

elde edilir ki bu da Teorem 4.1.3'ü kanıtlıyor.

$r \in \Gamma r$ ,

**Teorem 4.3.2- 4.1.4'ün kanıtı:**  $r \in (1, R)$ ,  $z \in \Gamma_r$  ve  $p_n(z), f \in E_M(G_R)$  fonksiyonuna derecesi  $n$  sayısını aşmayan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olsun.

$$I_1 := \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| / (2\pi),$$

$$I_2 := \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\psi(w)) \frac{1}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| / (2\pi)$$

işaretlemleri dikkate alınarak (4.17) yardımı ile:

$$|R_n(z, f)| \leq I_1 + I_2 \quad (4.24)$$

olduğu görülür.

(4.1) ve (4.13) ile birlikte

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)]^k}{[\phi(\zeta)]^{k+1}} \right| |f(\zeta) - p_n(\zeta)| |\phi'(\zeta)| |d\zeta| / (2\pi) \\ &\leq \frac{c_9}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)]^k}{[\phi(\zeta)]^{k+1}} \right| |f(\zeta) - p_n(\zeta)| |d\zeta| \\ &\leq \frac{c_9}{2\pi} \left\{ \sup_{\Gamma_R} \int \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)]^k}{[\phi(\zeta)]^{k+1}} |h(\zeta)| |d\zeta| \right\} \left\{ \sup_{\Gamma_R} \int |f(\zeta) - p_n(\zeta)| |g(\zeta)| |d\zeta| \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada supremunun  $\rho(g; N) \leq 1$  koşulunu sağlayan tüm  $g \in L_N(\Gamma)$  ve  $\rho(h; M) \leq 1$  koşulunu sağlayan  $h \in L_M(\Gamma)$  fonksiyonları üzerinden alınmıştır. (4.5) yardımı ile

$$I_1 \leq \frac{c_{10}}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)]^k}{[\phi(\zeta)]^{k+1}} \right| |h(\zeta)| |d\zeta|; \rho(h; M) \leq 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c_{10}}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} \frac{|\phi(z)|^{n+1}}{|\phi(\zeta)|^{n+1} |\phi(\zeta) - \phi(z)|} |h(\zeta)| |d\zeta|; \rho(h; M) \leq 1 \right\} \\ &\leq \frac{c_{11} E_n^M(f, G_R)}{2\pi} \cdot \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \cdot \sup \left\{ \int_{\Gamma_R} |h(\zeta)| |d\zeta|; \rho(h; M) \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

ve (4.12)'den

$$\sup \left\{ \int_{\Gamma_R} |h(\zeta)| |d\zeta|; \rho(h; M) \leq 1 \right\} \leq 1 + N(1) \text{mes} \Gamma_R \leq c_{12}, \quad (4.25)$$

ve bu nedenle

$$I_1 \leq \frac{c_{13} E_n^M(f, G_R) r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} \quad (4.26)$$

Şimdi  $I_2$  integrali değerlendirilir. (4.18)'e göre

$$\begin{aligned} I_2 &:= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} F(\tau, w) d\tau \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} \right| |F(\tau, w) d\tau| \right\} |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \left| \frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)} \right| |F(\tau, w) d\tau| \right\} |dt|. \end{aligned}$$

Fubini teoremi uygulandığında

$$I_2 \leq \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| \frac{|dt|}{|t-\tau|} \right\} |F(\tau, w)| |d\tau|$$

ve son integralde değişken dönüşümü yaparak (4.13)'ü kullanarak, şu elde edilir:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - p_n(\zeta)| \frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|} |d\zeta| \right\} |d\tau| \\ &\leq \frac{r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ \|f(\zeta) - p_n(\zeta)\|_{L_M(\Gamma_R)} \left\| \frac{\varphi'(\cdot)}{\varphi(\cdot) - \varphi(z)} \right\|_{L_N(\Gamma_R)} \right\} |d\tau| \\ &\leq \frac{c_{14} r^{n+1} E_n^M(f, G_R)}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \end{aligned}$$

$$\sup \left\{ \int_{\tilde{I}_R} |H(\zeta)| |d\zeta|; \rho(H; N) \leq I \right\} |d\tau|.$$

Burdan, (4.25)'te verilen argümanları tekrarlayarak ve (4.19)'u kullanarak, şu sonuca varırız:

$$I_2 \leq \frac{c_{15} r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} E_n^M(f, G_R) \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1} \ln \frac{r^2}{r^2-1}}$$

Şimdi, (4.26), (4.27) ve (4.24) eşitsizliklerinden

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c_{16} r^{n+1} E_n^M(f, G_R)}{2\pi R^{n+1}(R-r)} \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1} \ln \frac{r^2}{r^2-1}}$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak,  $z \in K$  ve  $r := I + \frac{I}{n}$  alacak olursak bir  $c_{17} > 0$  sabiti için

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c_{17}}{R^{n+1}(R-r)} E_n^M(f, G_R) \sqrt{n \ln n}$$

elde edilir.

## 5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMIRNOV SINIFLARDA FABER SERİLERİ KISMİ TOPLAMLARININ MAKSİMAL YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

### 5.1 Giriş ve Ana Sonuçlar

$G$ , karmaşık düzlem  $\mathbb{C}$ 'de sonlu bir bölge olup sonlu uzunluklu bir  $\Gamma$  Jordan eğrisi ile sınırlansın.  $G^- := \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ . Ek olarak

$D := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ ,  $T := \partial D$  ve  $D^- := \mathbb{C} \setminus \bar{D}$  işaretlemelerinin de geçerli olduğunu kabul edelim.

**Tanım 5.1.1:**  $\Gamma$  sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve  $p(\cdot) : \Gamma \rightarrow [1, \infty)$  Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\mu_{p(\cdot)}(f) := \int_{\Gamma} |f(z)|^{p(z)} |dz|,$$

$\Gamma$  üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir  $f$  fonksiyonları kümesinde modüler fonksiyon olsun.

$L^{p(\cdot)}(\Gamma)$  ile bir  $\lambda = \lambda(f) > 0$  sabiti için

$$\mu_{p(\cdot)}(f / \lambda) < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesini gösteriyoruz.

$F$ ,  $[0, 2\pi]$  aralığı veya  $\mathbb{C}$ 'de sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve  $p(\cdot) : F \rightarrow [0, \infty)$ , aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun:

$$1 < p_- := \operatorname{ess\,inf}_{z \in F} p(z) \leq \operatorname{ess\,sup}_{z \in F} p(z) := p_+ < \infty. \quad (5.1)$$

Aşağıda belirtilen

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} := \inf \{ \lambda > 0 : \mu_{p(\cdot)}(f / \lambda) \leq 1 \},$$

normu ile donatıldığında  $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$  bir Banach uzayı oluşturur.  $\Gamma := T$  durumunda ise değişken üslü Lebesgue uzayı  $L^{p(\cdot)}(T)$  ile çakışır ve

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(T)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^{2\pi} |f(e^{it}) / \lambda|^{p(e^{it})} dt \leq 1 \right\}$$

olur.

**Tanım 5.1.2:**  $p(\cdot) : \Gamma \rightarrow [1, \infty)$  Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$E^{p(\cdot)}(G) := \{f \in E^1(G) : f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)\}$$

olarak tanımlanan küme  $G$ 'deki analitik fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfı adlandırılır.

$f \in E^{p(\cdot)}(G)$  normunu  $\|f\|_{E^{p(\cdot)}(G)} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$  olarak tanımladığımızda  $E^{p(\cdot)}(G)$ 'in bir Banach uzayı olduğunu görürüz.

$|F|$ ,  $F$  kümesinin Lebesgue ölçüsü olsun.

**Tanım 5.1.3:**  $p(\cdot)$  fonksiyonu (1) koşullarına ek olarak bir pozitif  $c_0$  sabiti için

$$|p(z_1) - p(z_2)| \leq \frac{c_0}{\log(|F|/|z_1 - z_2|)}, \forall z_1, z_2 \in F \text{ ve } z_1 \neq z_2 \text{ koşulunu da sağlıyorsa bunu } p(\cdot) \in$$

$\mathcal{P}_0(F)$  olarak yazacağız.

$L^{p(\cdot)}(T)$  olağan  $f(\cdot + h)$  kaymasına göre invaryant olmadığından [41, s.146],  $L^{p(\cdot)}(T)$  uzaylarında düzgünlük modülünün inşası için  $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(T)$  olduğunda  $L^{p(\cdot)}(T)$  uzayında sınırlı olan [42] ve aşağıdaki şekilde tanımlanan ortalama değer operatörünü dikkate alalım:

$$\sigma_h f(w) := \frac{1}{h} \int_0^h f(w e^{it}) dt, w \in T, 0 < h < \pi.$$

Bu sebeple aşağıdaki tanım doğrudur.

**Tanım 5.1.4:**  $f \in L^{p(\cdot)}(t), p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(T)$  olsun.  $\Omega(f, \cdot)_{p(\cdot)} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} := \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - \sigma_h f\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

olarak tanımlandığında buna  $f$ 'in  $L^{p(\cdot)}(T)$  uzayında düzgünlük modülü denir.

$\varphi, G^{-1}$ 'nin  $D^-$  üzerine

$$\varphi(\infty) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) / z > 0$$

koşulları ile normalize edilmiş konform dönüşümü olsun, ve  $\psi, \varphi$ 'nın ters fonksiyonu olsun.  $\varphi$  ve  $\psi$  dönüşümlerinin sırasıyla  $\Gamma$  ve  $T$ 'ye sürekli genişlemeleri bulunmaktadır. Türevleri  $\varphi'$  ve  $\psi'$ ;  $\Gamma$  ve  $T$  üzerinde h.h.y. tanımlı teğetsel olmayan yollar üzerinden limit

değerlere sahiptir ve limit fonksiyonları sırasıyla  $\Gamma$  ve  $T$  üzerinde Lebesgue ölçümüne göre integrallenebilir [43, s. 419-438].

Şimdi  $K$  bağlantılı,  $G^- : K^- : C/K$  tümleyenine sahip bir küme ve

$\Gamma_R := \{z \in \Gamma : |\varphi(z)| = R\}$ ,  $K_R := \text{Int } \Gamma_R, R > 1$  olsun. Eğer  $f \in E^{p(\cdot)}(K_R)$  ise bunun

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z), z \in K \quad (5.2)$$

biçiminde Faber seri açılımına sahip olduğu bilinmektedir [44, s. 199] ve bu fonksiyonel seri,  $K$  üzerinde mutlak ve düzgün yakınsar. Burada  $F_k, k=0,1,2,\dots$ , Faber polinomları olup aşağıdaki seri gösterimiyle tanımlanabilen polinomlardır:

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}, z \in K, |w| > 1.$$

Ayrıca Faber katsayısı  $a_k, k=0,1,2,\dots$ , aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt, k=0,1,2,\dots \quad (5.3)$$

Faber polinomları ve Faber serileri hakkında ayrıntılı bilgi ve bunların yaklaşım özellikleri [2, 44, 45] monografilerinde bulunabilir. (5.2)'yi dikkate alırsak

$$f(z) - \sum_{k=0}^n a_k F_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z), z \in K \quad (5.4)$$

ve böylece  $R_n = R_n(z, f) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z), z \in K$  elde ediyoruz.

$f \in E^{p(\cdot)}(G)$  için en iyi yaklaşım sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$E_n(f, G)_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \|f - p_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} : P_n \in \Pi_n \right\}.$$

Burada,  $\Pi_n$ , derecesi  $n$ 'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfıdır. Bu çalışmada biz

$\sum_{k=0}^n a_k F_k(z), n=1,2,\dots$ , kısmi toplamlarının  $K$ 'da düzgün norma göre maksimal yaklaşım özelliklerini en iyi yaklaşım sayısı ve  $R$  parametresi yardımı ile araştıracağız. Yani,  $R_n(z, f)$  fonksiyonunun sifra yaklaşım hızını  $E_n(f, K_R)_{p(\cdot)}$  en iyi yaklaşım sayısı ve  $R$  parametresi yardımı ile değerlendireceğiz.

Elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

**Teorem 5.1.5:**  $p(\cdot) \in P_0(\Gamma_R)$  olsun. Eğer bir  $R > 1$  sayısı için ise,  $f \in E^{p(\cdot)}(K_R)$   $n$ 'den bağımsız bir  $c_{p(\cdot)}$  sabiti için

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c_{p(\cdot)} \sqrt{n \ln n}}{R^{n+1} (R-1)} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)}, \quad z \in K.$$

Bu teorem, değişken üslü  $E^{p(\cdot)}(K_R)$  Smirnov sınıfında inşa edilen Faber serilerinin kısmi toplamlarının maksimal yakınsama özelliğini karakterize etmektedir. Teorem 5.1.5'de verilen değerlendirme  $p(\cdot) = p > 1$  bir sabit olduğunda Suetin'in elde ettiği elde ettiği sonuçla eşleşmektedir [44, s. 203]. Smirnov-Orlicz sınıflarında maksimal yakınsama problemleri Israfilov ve diğerleri (2005) [4] tarafından incelenmiştir.

Faber serisi kısmi toplamlarının düzgün normda maksimal yakınsamasına ilişkin öncü sonuçlar [46] bulunabilir. Daha sonra bu problem analitik fonksiyonların Smirnov sınıflarında incelenmiştir [2, Ch.2; 44, s. 54-60; 45, s. 26-29]. Matematik literatürde, değişken üslü uzaylarda yaklaşım teorisinin farklı problemlerinin araştırıldığı birçok çalışma vardır [bkz. Örneği 47-57]. Özellikle, Israfilov ve Testici (2016) [54] tarafından elde edilen

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p) \Omega(f_0, 1/n)_{p_0(\cdot)},$$

burada

$$f_0(w) := f(\psi(Rw)) \text{ ve } p_0(w) := p(\Psi(Rw)),$$

değerlendirmesi dikkate alındığında  $R_n(z, f)$  hatası  $\Omega(f_0, 1/n)_{p_0(\cdot)}$  düzgünlük modülü yardımıyla değerlendirildiği görülür.

**Sonuç 5.1.6:**  $f \in E^{p(\cdot)}(K_R)$ ,  $R > 1$ , ve  $p(\cdot) \in P_0(\Gamma_R)$  olduğunda

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c_{p(\cdot)}}{R^{n+1} (R-1)} \Omega(f_0, 1/n)_{p_0(\cdot)} \sqrt{n \ln n}, \quad z \in K$$

## 5.2 Yardımcı Sonuçlar

(5.3) ve (5.4) bağıntıları kullanıldığında

$$R_n(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_T f(\psi(t)) \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right] dt.$$

elde edilir.

Eğer  $p_n$ , derecesi en fazla  $n$  olan bir cebirsel polinom ise

$$2\pi i R_n(z, f) = \int_T \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right] \{f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))\} dt \quad (5.5)$$

olur.

$$F_k(z) = [\varphi(z)]^k + E_k(z), z \in K^-,$$

olduğundan,  $E_k$ 'nin  $K^-$  de analitik fonksiyon olduğu dikkate alındığında

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(z)}{t^{k+1}}$$

elde edilir.

Böylece sonuç olarak (5.5)'i kullanarak

$$\begin{aligned} |2\pi R_n(z, f)| &\leq \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| \\ &+ \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\psi(w)) \frac{1}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$E_k(\psi(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \tau^k F(\tau, w) d\tau, |w| \geq r > 1 \quad (5.7)$$

$$\text{bağıntısını ve } F(\tau, w) := \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(w)} - \frac{1}{\tau - w}, |\tau| > 1, |w| > 1$$

fonksiyonu için Lebedev'in bilinen [44]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| |d\tau| \leq \sqrt{\frac{r^2}{r^4 - 1} \ln \frac{r^2}{r^2 - 1}}, r > 1, |w| \geq r > 1 \quad (5.8)$$

eşitsizliği kullanılabilir.

$$F(\tau, w) := \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(w)} - \frac{1}{\tau - w}, |\tau| > 1, |w| > 1.$$

Teknik değerlendirmelerde reel eksen aralıklarında tanımlı değişken üssü Lebesgue uzaylarında [58 s. 27] ve [41, s. 24] tarafından elde edilmiş aşığıdaki Hölder eşitsizliğini kullanılır.

**Teorem 5.2.1:**  $p: \Gamma \rightarrow [1, \infty]$  Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ,  $g \in L^{q(\cdot)}(\Gamma)$ , ise ve  $1/p(\cdot) + 1/q = 1$ , ise  $fg \in L^1(\Gamma)$  olur ve:

$$\int_{\Gamma} |f(z)g(z)| dz \leq c(p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \|g\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma)}. \quad (5.9)$$

### 5.3 Ana Sonucun Kanıtı

Teorem 5.1.5'in kanıtı  $z \in \Gamma_r$ ,  $r \in (1, R)$  ve  $p_n, f \in E^{p(\cdot)}(K_R)$  fonksiyonuna derecesi en fazla  $n$  olan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olsun.  $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\Gamma_R)$  durumunda bu polinom mevcut olup bir tektir [bkz. 41, s. 130; teoremler 3.2.1 ve 3.2.2 ve 59, s. 59].

$$I_1 := \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| / (2\pi)$$

ve

$$I_2 := \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| / (2\pi)$$

olarak işaretlendiğinde (5.6)'dan

$$|R_n(z, f)| \leq I_1 + I_2 \quad (5.10)$$

elde edilir.

$\Gamma_R, R > 1$ , analitik bir eğri olduğundan [60]  $|w| = R$  çemberi üzerinde

$$0 < c_1 \leq |\psi'(w)| \leq c_2 < \infty, \quad 0 < c_3 |\varphi'(w)| \leq c_4 < \infty, \quad (5.11)$$

olacak şekilde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  sabitleri vardır. Bu durumda (5.11) ve (5.9) ile

$$I_1 = \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| / (2\pi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)^k]}{[\phi(\zeta)^{k+1}]} \right| |f(\zeta) - \rho_n(\zeta)| |\phi'(\zeta)| |d\zeta| \\
&\leq \frac{c_1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)^k]}{[\phi(\zeta)^{k+1}]} \right| |f(\zeta) - \rho_n(\zeta)| |d\zeta| \\
&\leq \frac{c_2(p)}{2\pi} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\phi(z)^k]}{[\phi(\cdot)^{k+1}]} \right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)} \|f(\cdot) - \rho_n(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \\
&= \frac{c_2(p)}{2\pi} \|f(\cdot) - \rho_n(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \left\| \frac{|\varphi(z)^{n+1}|}{|\varphi(\cdot)^{n+1} (|\varphi(\cdot)| - |\varphi(z)|)} \right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)} \\
&= \frac{c_2(p) E_n(f, K_R)_{p(\cdot)}}{2\pi} \left\| \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)} \\
&\leq \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$I_1 \leq \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \quad (5.12)$$

elde edilir.

Şimdi (5.7) bağıntısından hareketle  $I_2$  intergali değerlendirilir.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}} \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| / (2\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} F(\tau, w) d\tau \right| |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt| \\
&\leq \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} F(\tau, w) d\tau \right| \right\} |dt| / (2\pi) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \left| \frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)} \right| |F(\tau, w) d\tau| \right\} |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| |dt|
\end{aligned}$$

ve böylece Fubini teoremine göre

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |\tau|^{n+1} |F(\tau, w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - p_n(\psi(t))| \frac{1}{|t|^{n+1} |t-\tau|} |dt| \right\} |d\tau|$$

$$\leq \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - p_n(\psi)(t)| \frac{1}{|t-\tau|} |dt| \right\} |d\tau|.$$

Son integraldeki değişkenleri değiştirip (5.11), (5.9) ve (5.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{r^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - p_n(\zeta)| \frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|} |d\zeta| \right\} |d\tau| \\ &\leq \frac{c_4(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| \|f(\zeta) - p_n(\zeta)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \left\| \frac{\varphi'(\cdot)}{\varphi(\cdot) - \varphi(z)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} |d\tau| \\ &\leq \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \frac{1}{R-r} |d\tau| \\ &= \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1} (R-r)} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \int_{|\tau|=r} |F(\tau, w)| |d\tau| \\ &\leq \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1} (R-r)} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1} \ln \frac{r^2}{r^2-1}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Şimdi (5.10), (5.12) ve (5.13)'ü birleştirek şu elde edilir:

$$\begin{aligned} |R_n(z, f)| &\leq \frac{c_3(p)E_n(f, K_R)_{p(\cdot)}}{2\pi} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \\ &+ \frac{c_5(p)r^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-r)} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \sqrt{\frac{r^2}{r^4-1} \ln \frac{r^2}{r^2-1}} \end{aligned}$$

$z \in K$  ve  $r := 1 + \frac{1}{n}$  alacak olursak

aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c_6(p)}{R^{n+1}(R-1)} E_n(f, K_R)_{p(\cdot)} \sqrt{n \ln n}.$$

## 6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında kompleks düzlemin değişik bölgelerinde cebirsel polinomlarla maksimal yakınsaklık problemleri ile ilgili yapılan araştırmaların bir derlemesi verilmiştir. Yaklaşan polinomlar Faber serileri ve genelleştirilmiş Faber serilerinin kısmi toplamları olarak inşa edilmektedir.

Kompleks düzlem bölgelerinde analitik fonksiyonların Bergman uzayları tanımlanmış ve bu uzaylarda maksimal yakınsaklık problemleri incelenmiş ve maksimal yakınsaklık teoremleri ispat edilmiştir. Bu amaçla kvazikonform sınırlı bölgelerde geçerli olan bir integral gösterimi kullanılmış ve daha sonra bu gösterim yardımı ile fonksiyonların Faber serilerine açılabilirliği görülmüş ve maksimal yaklaşım hatası en iyi yaklaşım sayısı yardımı ile üstten değerlendirilmiştir.

Basit bağlantılı sınırlı bölgelerde analitik fonksiyonların Smirnov-Orlicz sınıfları tanımlanmış, yaklaşım hatası, en iyi yaklaşım sayısı ve kanonik bölge parametreleri yardımı ile üstten değerlendirilmiştir.

Değişken üslü Smirnov sınıflarında Faber serilerinin kısmi toplamlarının yaklaşım özellikleri incelenmiş ve bu kısmi toplamların maksimal yakınsaklık hatası en iyi yaklaşım sayısı ve uygun süreklilik modülleri yardımı ile değerlendirilmiştir.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] **J. L. Walsh**, *Approximation by Polynomials in the Complex Domain*, Paris, 1935.
- [2] **V. I. Smirnov and N. A. Lebedev**, *Functions of Complex Variable: Constructive Theory*, Cambridge, MA: MIT Press, 1968.
- [3] **P. K. Suetin**, *Series of Faber Polynomials*, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.
- [4] **D. M. Israfilov, B. Oktay and R. Akgün**, “Approximation in Smirnov–Orlicz classes”, *Glas. Mat.*, vol. 40(60), pp. 87–102, 2005.
- [5] **D. M. Israfilov**, “Approximation by generalized Faber series in weighted Bergman spaces on finite domains with quasi-conformal boundary,” *East J. Approx.*, vol. 4, 1, pp. 1–13, 1998.
- [6] **D. M. Israfilov, Gursel, E., and Aydin, E.** “Maximal convergence of Faber Series in Smirnov Classes with Variable Exponent”, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 49, 955-963, New Series (2018).
- [7] **D.M. Israfilov**, “Faber Series in Weighted Bergman Spaces”, *Complex Variables*, 45, 167–181, 2001.
- [8] **T. Başkan**, *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Bursa: Vipaş A.Ş., 2000.
- [9] **A. I. Markushevich**, *Theory of Functions of a Complex Variable III*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1967.
- [10] **U. K. Dzyadyk**, *Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*, Kiev: Nauka, 1977. (in Russian)
- [11] **P. K. Suetin**, *Series of Faber Polynomials*, Moscow: Nauka, 1984. (in Russian)
- [12] **Ch. Pommerenke**, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [13] **O. Lehto and K. Virtanen**, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Berlin: Springer-Verlag, 1973.
- [14] **A. Böttcher and Y. I. Karlovich**, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*, Basel: Birkhäuser, 1997.
- [15] **G. M. Goluzin**, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. 26, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1969.
- [16] **D. Gaier**, “Faber series in domains with quasi-conformal boundary,” *Izv. Acad. Nauk Az. SSR, ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk*, vol. 5, pp. 10–158, 1981. (in Russian)

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [17] **V. I. Belyi**, “Conformal mappings and approximation of analytic functions in domains with quasi-conformal boundary,” *Math. USSR-Sb.*, vol. 31, pp. 289–317, 1977.
- [18] **L. Ahlfors**, *Lectures on Quasiconformal Mapping*, Belmont, CA: Wadsworth, 1987.
- [19] **V.V. Andrievskii, V.I. Belyi and V.K. Dzyadyk**, *Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable*, Atlanta: World Federation Publishers, 1995.
- [20] **I. M. Batchaev**, *Integral representations in a region with quasiconformal boundary, and some applications*, Doctoral dissertation, Baku, 1980.
- [21] **D. M. Israfilov**, “Approximate properties of the generalized Faber series in an integral metric,” *Izv. Akad. Nauk Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk*, no. 2, pp. 10–14, 1987.
- [22] **A. Çavuş**, “Approximation by generalized Faber series in Bergman spaces on finite regions with a quasi-conformal boundary,” *J. Approx. Theory*, vol. 87, no. 1, pp. 25–35, 1996.
- [23] **G. M. Goluzin**, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. 26, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968.
- [24] **I. I. Ibragimov and D. I. Mamedhanov**, “Constructive characterization of a certain class of functions,” *Sov. Math. Dokl.*, vol. 16, pp. 820–823, 1975.
- [25] **Ch. Pommerenke**, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [26] **S. E. Warschawski**, “Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung,” *Math. Z.*, vol. 35, pp. 321–456, 1932.
- [27] **M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii**, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Groningen: P. Noordhoff, 1961.
- [28] **M. M. Rao and Z. D. Ren**, *Theory of Orlicz Spaces*, New York: Marcel Dekker, 1991.
- [29] **A. Guven and D. M. Israfilov**, “Polynomial approximation in Smirnov-Orlicz classes,” *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 2, pp. 509–517, 2002.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [30] **S. Ya. Al'per**, “Approximation in the mean of analytic functions of class  $E_p(G)$ ,” Moscow: Gosudarstv. Izdat. Fiz-Mat. Lit., pp. 273–286, 1960. (in Russian)
- [31] **J. E. Andersson**, “On the degree of polynomial approximation in  $E_p(D)$ ,” *J. Approx. Theory*, vol. 19, pp. 61–68, 1977.
- [32] **A. Çavuş and D. M. Israfilov**, “Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of class  $L_p(\cdot)$ ,” *Approx. Theory Appl.*, vol. 11, no. 1, pp. 105–118, 1995.
- [33] **E. M. Dyn'kin**, The rate of polynomial approximation in the complex domain, in *Complex Analysis and Spectral Theory*, Semin. Leningrad, 1979/80, *Lect. Notes Math.*, vol. 864, Berlin: Springer, pp. 90–142, 1981.
- [34] **D. M. Israfilov**, Approximate properties of generalized Faber series in an integral metric, *Izv. Akad. Nauk Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk*, 1987, pp. 10–14. (in Russian)
- [35] **D. M. Israfilov**, “Approximation by  $p$ -Faber polynomials in the weighted Smirnov class  $E_p(G, \omega)$  and the Bieberbach polynomials”, *Constr. Approx.*, vol. 17, pp. 335–351, 2001.
- [36] **V. Kokilashvili**, “A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials”, *Sov. Math. Dokl.*, vol. 10, pp. 411–414, 1969.
- [37] **V. Kokilashvili**, “On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes”, *Studia Math.*, vol. 31, pp. 43–59, 1968.
- [38] **V. I. Smirnov and N. A. Lebedev**, *Functions of Complex Variable: Constructive Theory*, Cambridge, MA: MIT Press, 1968.
- [39] **A. Yu. Karlovich**, “Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces”, *Math. Nachr.*, vol. 179, pp. 187–222, 1996.
- [40] **N. K. Bary**, *A Treatise on Trigonometric Series*, vol. I, Oxford: Pergamon Press, 1964.
- [41] **I. I. Sharapudinov**, Some questions in approximation theory for Lebesgue spaces with variable exponent, *Itogi Nauki. Yug Rossii. Mat. Monograf.*, vol. 5, Vladikavkaz: Southern Mathematical Institute, 2012, pp. 267.
- [42] **L. Diening**, “Maximal function on generalized Lebesgue spaces  $L_p(x)$ ”, *Math. Inequal. Appl.*, vol. 7, pp. 245–253, 2004.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [43] **G. M. Goluzin**, “Geometric Theory of Functions of a Complex Variable”, vol. 26, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1969.
- [44] **P. K. Suetin**, “Series of Faber Polynomials”, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.
- [45] **D. Gaier**, “Lectures on Complex Approximation”, Boston: Birkhäuser, 1987.
- [46] **J. L. Walsh**, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Boston: American Mathematical Society, 1960.
- [47] **I. I. Sharapudinov**, Approximation of functions in  $L_p(x)$   $2\pi$  by trigonometric polynomials, *Izv. RAN Ser. Mat.*, vol. 77, no. 2, pp. 197–224, 2013; *English transl. in Izv. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 407–434, 2013.
- [48] **I. I. Sharapudinov**, “On direct and inverse theorems of approximation theory in variable Lebesgue space and Sobolev spaces”, *Azerbaijan J. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 55–72, 2014.
- [49] **I. I. Sharapudinov**, “Approximation of functions by De Vallée Poussin means in the Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent”, *Sb. Math.*, vol. 207, no. 7, pp. 1010–1036, 2016.
- [50] **A. Guven and D. M. Israfilov**, “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces  $L_p(x)$ ”, *J. Math. Inequal.*, vol. 4, no. 2, pp. 285–299, 2010.
- [51] **R. Akgün**, “Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent”, *Ukrainian Math. J.*, vol. 63, no. 1, pp. 3–23, 2011.
- [52] **R. Akgün and V. Kokilashvili**, “The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue space”, *Georgian Math. J.*, vol. 18, no. 3, pp. 399–423, 2011.
- [53] **D. M. Israfilov and A. Testici**, “Approximation in Smirnov classes with variable exponent, Complex Var”. *Elliptic Equ.*, vol. 60, no. 9, pp. 1243–1253, 2015.
- [54] **D. M. Israfilov and A. Testici**, “Approximation by Faber–Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent”, *Indag. Math.*, vol. 27, pp. 914–922, 2016.
- [55] **S. Z. Jafarov**, “Linear methods for summing Fourier series and approximation in weighted Lebesgue spaces with variable exponents”, *Ukrainian Math. J.*, vol. 66, no. 10, pp. 1509–1518, 2015. (Reprint of *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 66, no. 10, pp. 1348–1356, 2014.)
- [56] **S. Z. Jafarov**, “Approximation by trigonometric polynomials in subspace of variable exponent Grand Lebesgue spaces”, *Glob. J. Math.*, vol. 8, no. 2, pp. 836–843, 2016.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [57] **S. S. Volosivets**, “Approximation of functions and their conjugates in variable Lebesgue spaces”, *Sb. Math.*, vol. 208, no. 1, pp. 48–64, 2017.
- [58] **D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza**, *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Basel: Birkhäuser, 2013.
- [59] **R. A. DeVore and G. G. Lorentz**, *Constructive Approximation: Polynomials and Spline Approximation*, New York: Springer, 1993.
- [60] **S. Warschawski**, “Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung”, *Math. Z.*, vol. 35, no. 1, pp. 321–456, 1932.