

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI VE BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİ**

DOKTORA TEZİ

SÜMEYRA UÇAR

BALIKESİR, MAYIS - 2015

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI VE BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİ**

DOKTORA TEZİ

SÜMEYRA UÇAR

BALIKESİR, MAYIS - 2015

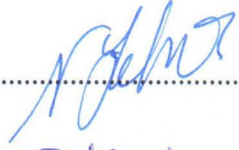
KABUL VE ONAY SAYFASI

Sümevra UÇAR tarafından hazırlanan "SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.


Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

.....


Üye
Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

.....


Üye
Prof. Dr. Ali GÜVEN

.....


Üye
Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

.....


Üye
Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR

.....


Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

ÖZET

**SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ
DOKTORA TEZİ
SÜMEYRA UÇAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESİR, MAYIS - 2015

Özel formdaki Möbius dönüşümlerinin sonlu çarpımları olarak tanımlanan sonlu Blaschke çarpımlarının ilginç geometrik özellikleri vardır. Bu çalışmanın amacı altın oran ve altın çokgenler ile birim diskte tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri arasında bağlantı kurmak ve üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının bazı geometrik özelliklerini incelemektir.

Bu tezde, ilk olarak birim diskteki ve üst yarı düzlemdeki Blaschke çarpımlarının tanımı ve bu Blaschke çarpımlarının bilinen bazı geometrik özellikleri verildi.

İkinci bölümde Möbius dönüşümlerinin tanımı, bu dönüşümlerin temel özellikleri, altın oran ve altın çokgen kavramları, sonlu Blaschke çarpımlarının Poncelet özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde birim diskte tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının Poncelet eğrilerinin altın eğrilerle ve Poncelet eğrisini çevreleyen çokgenlerin altın çokgenlerle bağlantısı incelendi.

Dördüncü bölümde birim diskte tanımlı 2. 3. ve 4. dereceden Blaschke çarpımlarının kendisinden daha düşük dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabilmesi ele alındı.

Son bölümde ise üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri ele alındı.

ANAHTAR KELİMELER: Sonlu Blaschke çarpımları, birim disk, üst yarı düzlem, altın oran, altın çokgenler

ABSTRACT

**FINITE BLASCHKE PRODUCTS AND SOME GEOMETRIC
PROPERTIES
PH.D THESIS
SÜMEYRA UÇAR
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESİR, MAY 2015

There are interesting geometric properties of finite Blaschke products defined as finite products of special Möbius transformations. The aims of this study is to establish a connection between golden ratio, golden polygons and geometric properties of finite Blaschke products for the unit disc, and investigate some geometric properties of finite Blaschke products for the upper half plane.

In this thesis, initially the definitions of Blaschke products for the unit disc and upper half plane are given, then some known geometric properties of these Blaschke products are considered.

In the second chapter, the definition of Möbius transformations, basic properties of these transformations, the notions of golden ratio and golden polygons, and Poncelet properties of finite Blaschke products are given.

In the third chapter, the relationships between Poncelet curves of finite Blaschke products and golden polygons; the polygons circumscribing the Poncelet curve and golden polygons are investigated.

In the fourth chapter, Blaschke products of order 2, 3 and 4 for the unit disc are considered and studied the problem when such Blaschke product can be written as a composition of two nontrivial Blaschke products of lower order.

Finally, some geometric properties of finite Blaschke products for the upper half plane are investigated.

KEYWORDS: Finite Blaschke products, unit disc, upper half plane, golden ratio, golden polygons

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1 Möbius Dönüşümleri	4
2.2 Altın Oran ve Çokgenler	7
2.3 Sonlu Blaschke Çarpımları ve Poncelet Özellikleri.....	8
3. BİRİM DİSKTE TANIMLI SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI VE ALTIN ORAN.....	10
3.1 İkinci Dereceden Blaschke Çarpımları	10
3.2 Üçüncü Dereceden Blaschke Çarpımları	13
3.3 Dördüncü Dereceden Blaschke Çarpımları	23
4. SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARININ AYRIŞIMI.....	35
5. ÜST YARI DÜZLEMDE TANIMLI SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI.....	43
5.1 Üst Yarı Düzlemde Tanımlı İkinci Dereceden Blaschke Çarpımları	45
5.2 Üst Yarı Düzlemde Tanımlı Üçüncü Dereceden Blaschke Çarpımları	47
5.3 Üst Yarı Düzlemde Tanımlı Dördüncü Dereceden Blaschke Çarpımları	50
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	54
7. KAYNAKLAR.....	55

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ için 2. dereceden Blaschke çarpımı.....	13
Şekil 3.2: $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ için 3. dereceden Blaschke çarpımı.....	15
Şekil 3.3: Altın üçgen (kesik çizgili olan) tarafından çevrelenen Poncelet eğrisi.....	18
Şekil 3.4: Altın üçgenler (kesik çizgili olanlar) tarafından çevrelenen Poncelet eğrisi.....	20
Şekil 3.5: E_1 altın Blaschke elipsi.....	22
Şekil 3.6: $f(E_1)$ altın Blaschke elipsi.....	23
Şekil 3.7: Altın dikdörtgen (kesik çizgili olan) tarafından çevrelenen Poncelet eğrisi.....	29
Şekil 3.8: Poncelet eğrisi çember olan 4. dereceden Blaschke çarpımı.....	31
Şekil 3.9: $a_1 = \frac{12}{17}, a_2 = \frac{2}{3} - i\frac{2}{3}, a_3 = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$ için 4. dereceden Blaschke çarpımı.....	34
Şekil 5.1: $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \alpha = i\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ için 2. dereceden $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımı.....	47
Şekil 5.2: $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = i\frac{1}{2}, \alpha = i\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ için 3. dereceden $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımı.....	50
Şekil 5.3: $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = i\frac{1}{3}, \alpha = i\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ için 4. dereceden $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımı.....	52

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
\mathbb{D}	Birim disk
$\partial\mathbb{D}$	Birim çember
\mathbb{H}	Üst yarı düzlem
$[z_1, z_2]$	z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası
$\Delta(z_1, z_2, z_3)$	Köşeleri z_1, z_2, z_3 olan üçgen
φ	Altın oran

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, altın oran ile bağlantı kurularak birim diskte ve üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri incelenmiştir.

Tez çalışmam boyunca ilminden faydalandığım danışman hocam sayın Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e, önerilerini benden hiçbir zaman esirgemeyen değerli arkadaşım Öznur ÖZTUNÇ'a ve bu süreçte bana her zaman anlayış gösteren aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora eğitimim boyunca maddi desteğinden dolayı "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı (2011-3)"na kayıtlı bursiyeri olduğum TÜBİTAK-BİDEB'e saygılarımla teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Birim çemberi birim çembere, birim çemberin içini içine resmeden Möbius dönüşümlerinin sonlu yada sonsuz sayıda çarpımı biçiminde tanımlanan Blaschke çarpımları ilk kez W. Blaschke tarafından 1915 'de yayınlanan bir makalede ortaya çıkmıştır [1].

Birim çemberi birim çembere, birim çemberin içini içine resmeden Möbius dönüşümleri

$$M(z) = \beta \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad |\beta| = 1$$

biçiminde olduğu için, bu dönüşümlerin sonlu sayıda çarpımları olan sonlu bir Blaschke çarpımı

$$B(z) = \beta \prod_{j=1}^n \frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z}, \quad |\beta| = 1, \quad a_j \in \mathbb{D}$$

biçiminde tanımlanır [2].

n . dereceden herhangi bir $B(z)$ Blaschke çarpımı verildiğinde birim çember $\partial\mathbb{D}$ üzerindeki bir λ noktası için $j=1, 2, \dots, n$ olmak üzere $B(z_j) = \lambda$ olacak şekilde birim çember üzerinde birbirinden farklı n tane nokta olduğu bilinmektedir. Bu noktaların da yardımıyla Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri pek çok kişi tarafından çalışılan ilgi çeken bir konu olmuştur [3-7]. Örneğin, [4] numaralı kaynakta bu $z_j, (|z_j| < 1, 1 \leq j \leq n)$ noktaları orijinden geçen çemberler yardımı ile belirlenmeye çalışılmıştır. [8] numaralı kaynakta köşeleri birim çember üzerinde olan ve bir üçgen içine çizilebilen elipslerin Blaschke elipsi olduğu gösterilmiştir. Bir $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgeni verildiğinde, kenarlarının orta noktalarında teğet olacak şekilde

bu üçgenin içine çizilebilen bir tek elips vardır. Bu elipse $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgeninin Steiner elipsi denir. [3] numaralı kaynakta ise 3. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin Steiner elipsi olma durumu incelenmiştir.

n . dereceden $B(0) = 0$ biçimindeki her B Blaschke çarpımının, λ birim çember üzerinde bir nokta olmak üzere $B(z_j) = \lambda, (j = 1, 2, \dots, n)$ eşitliğini sağlayan birbirinden farklı z_j noktaları kullanılarak oluşturulan n -gen'in köşelerini B 'nin belirlediği bir tek n -Poncelet eğrisine sahip olduğu bilinmektedir [7, 9]. Bu çalışmada altın oran ve altın çokgenler yardımı ile birim diskte tanımlı Blaschke çarpımlarının Poncelet eğrilerinin geometrik özellikleri ve üst yarı düzlemde tanımlı Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri incelenecektir.

2. dereceden bir B Blaschke çarpımı için, birim çember üzerinde bir λ noktası verildiğinde $B(z_1) = B(z_2) = \lambda$ biçiminde birim çember üzerinde birbirinden farklı iki tane z_1 ve z_2 noktalarının olduğu ve bu noktaları birleştiren doğru parçasının B 'nin sıfırdan farklı sıfır yerinden geçtiği bilinmektedir [2]. 3. bölümde bir B Blaschke çarpımının bu sıfırdan farklı sıfır yerinin z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasını altın oranda bölüp bölmediği, eğer altın oranda bölerse bunun her doğru parçası için doğru olup olmadığı araştırılacaktır.

z_1, z_2, z_3 noktaları, bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ için $B(z_1) = B(z_2) = B(z_3) = \lambda$ denklemini sağlayan noktalar olmak üzere 3. dereceden bir B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin her zaman elips olduğu ve bu elipsin, köşeleri birim çember üzerinde olan $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgeni tarafından çevrelendiği bilinmektedir [2]. 3. bölümde altın çokgenler yardımı ile Blaschke çarpımlarının bazı geometrik özellikleri incelenecektir. Örneğin, köşeleri birim çember üzerinde olan bir altın üçgen olup olmadığı, 3. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin altın elips olup olmadığı gibi sorular cevaplanmaya çalışılacaktır.

4. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin bazı şartlar altında elips olduğu ve bu elipsin, köşeleri birim çember üzerinde olan dörtgenler tarafından çevrelendiği bilinmektedir [6]. Burada köşeleri birim çember üzerinde olan bir altın dikdörtgenin olup olmadığı, 4. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi elips olduğu zaman bu elipsin bir altın elips olup olamayacağı problemleri ele alınacaktır.

4. bölümde birim diskte tanımlı 2., 3. ve 4. dereceden bir Blaschke çarpımının ayrıştırılması, yani daha düşük dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabilmesi incelenecektir.

Bir sonraki bölümde ise üst yarı düzlemde tanımlı Blaschke çarpımları ele alınacaktır. $1 \leq k \leq n$ için z_k kompleks sayıları üst yarı düzlemde noktalar olmak üzere

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \right)^{m_k}$$

çarpımına üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımı denir [10]. Üst yarı düzlemde tanımlı Blaschke çarpımlarının, birim çemberde tanımlı Blaschke çarpımlarından faydalanarak bazı geometrik özellikleri incelenecektir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel kavramlar ele alınacaktır.

İlk olarak Möbius dönüşümleri ve bu dönüşümlerin bazı temel özellikleri [11-15] numaralı kaynaklardan faydalanılarak verilecektir.

2.1 Möbius Dönüşümleri

2.1.1 Tanım: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ ve $M : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindeki bir dönüşüme Möbius dönüşümü (doğrusal dönüşüm, kesirli doğrusal dönüşüm) denir. $\Delta = ad - bc$ ifadesine de M Möbius dönüşümünün determinanti denir. $ad - bc = 0$ olursa bire-birlik bozulacağından $ad - bc \neq 0$ alınarak Möbius dönüşümlerinin bire-bir dönüşüm olması sağlanmış olur.

2.1.2 Tanım: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ şeklinde bir Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda $c \neq 0$ ise $M(\infty) = \frac{a}{c}$ ve $M(-\frac{d}{c}) = \infty$; $c = 0$ ise $M(\infty) = \infty$ olur. Böylece, her bir Möbius dönüşümünün $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'dan $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'a bire-bir ve örten dönüşüm olduğu görülür.

$a = d \neq 0$ ve $b = c = 0$ olsun. Buradan

$$M(z) = \frac{az + 0}{0z + d} = z$$

biçimindeki birim dönüşüm elde edilir. Bu dönüşüm için

$$ad - bc = ad - 0.0 = ad \neq 0$$

olduğundan $M(z) = z$ biçimindeki birim dönüşüm de Möbius dönüşümüdür.

Bir M Möbius dönüşümünün tersi;

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

biçimindedir ve bu dönüşüm de bir Möbius dönüşümüdür.

2.1.3 Teorem:

$$M = \left\{ T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

kümesi fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir gruptur [15].

2.1.4 Tanım: B, \mathbb{C} 'de bir bölge olmak üzere $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında \mathcal{G} açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 'da aralarında yön ve büyüklük bakımından \mathcal{G} açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 'da bir konform dönüşüm denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f, B 'de konformdur denir [15].

2.1.5 Teorem: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $M(-\frac{d}{c}) = \infty, M(\infty) = \frac{a}{c}$ tanımı ile, her $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümü \mathbb{C}_∞ 'dan \mathbb{C}_∞ 'a bire-bir, örten ve konform bir dönüşümdür [15].

Şimdi birim diski birim diske ve üst yarı düzlemi birim diske resmeden Möbius dönüşümleri verilecektir.

2.1.6 Teorem: Birim çemberi birim çembere ve içini içine resmeden en genel Möbius dönüşümü, z_0 üst yarı düzlemde bir nokta olmak üzere

$$M(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \quad (2.1)$$

biçimindedir [15].

2.1.7 Teorem: $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ üst yarı düzlemini birim diske resmeden en genel Möbius dönüşümü, α üst yarı düzlemde bir nokta olmak üzere

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}} \quad (2.2)$$

biçimindedir [16].

θ ve α sabit noktaları için

$$f^{-1}(z) = \frac{\overline{z\alpha} - e^{i\theta}\alpha}{z - e^{i\theta}} \quad (2.3)$$

dönüşümünün birim disk \mathbb{D} 'yi üst yarı düzlem \mathbb{H} 'ye resmettiği açıktır.

2.2 Altın Oran ve Çokgenler

Altın oranın, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü olan $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sayısı olduğu bilinmektedir [17]. Buradan

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

olduğu görülür.

2.2.1 Tanım: AB bir doğru parçası olsun ve AC , AB 'nin uzun parçası olacak biçimde C noktası AB doğru parçasını bölsün. $\frac{AC}{AB} = \varphi$ ise C noktası AB doğru parçasını altın oranda böler denir [17].

2.2.2 Tanım: Kenarlarının tabanına oranı altın oran olan bir ikizkenar üçgene altın üçgen denir [17].

2.2.3 Tanım: Uzun kenarının kısa kenarına oranı altın oran olan bir dikdörtgene altın dikdörtgen denir [17].

2.2.4 Tanım: Asal ekseninin sanal eksenine oranı altın oran olan bir elipse altın elips denir [17].

Çokgenler arasında düzgün beşgen ve düzgün ongen bazı altın oran özelliklerini sağlar. Örneğin, $ABCDE$ bir düzgün beşgen olsun. $[A, C]$ ve $[B, E]$ köşegenlerinin kesiştiği F noktası her iki köşegeni de altın oranda böler. Bir düzgün

ongende ise ongenin çevrel çemberinin yarıçapı R 'nin, ongenin bir kenar uzunluğu l 'ye oranı $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dir [17].

2.3 Sonlu Blaschke Çarpımları ve Poncelet Özellikleri

2.3.1 Tanım: Birim çember üzerindeki noktalardan oluşan $\{z_1, \dots, z_n\}$ ve $\{w_1, \dots, w_n\}$ kümeleri için $0 \leq \arg(z_1) < \arg(w_1) < \dots < \arg(z_n) < \arg(w_n) < 2\pi$ oluyorsa bu kümelere düzgün dağılmış kümeler denir [9].

2.3.2 Tanım: E_1 ve E_2 elipsleri E_1, E_2 elipsinin içinde olacak şekilde verilsin. Kenarlarının uç noktaları E_2 üzerinde olacak şekilde ve her bir kenarı bir tek noktada E_1 'e teğet olacak biçimde bir n -gen çizilebiliyorsa bu n -gen E_1 elipsini çevreler denir [9].

2.3.3 Teorem (Poncelet Kapanış Teoremi): E_1, E_2 elipsinin içinde olacak şekilde E_1 ve E_2 elipsleri verilsin. Eğer E_2 'nin içine E_1 'i çevreleyecek şekilde bir tane n -gen çizilebilirse, E_2 üzerindeki her λ noktası için köşelerinden biri λ olan ve E_1 'i çevreleyen E_2 'de bir n -gen vardır [9].

Yukarıdaki teoremde E_2 elipsini birim çember alalım. Birim çember içinde E eğrisi verilsin. Birim çember üzerindeki her λ noktası için bir köşesi λ , diğer tüm köşeleri birim çember üzerinde olan ve bu E eğrisini çevreleyen bir n -gen varsa bu E eğrisine n -Poncelet eğrisi veya kısaca Poncelet eğrisi denir [9].

2.3.4 Teorem: B birbirinden farklı sıfırlara sahip olan n . dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Birim çember üzerindeki her λ noktası için $B(z_j) = \lambda$ olacak biçimde birim çember üzerinde birbirinden farklı n tane z_1, z_2, \dots, z_n noktaları vardır [2].

2.3.5 Tanım: Teorem 2.3.4'deki z_j ($j=1, 2, \dots, n$) noktalarına B tarafından özdeşlenir denir.

2.3.6 Teorem: $n \geq 3$ olmak üzere sıfırları $a_1 = 0, a_2, \dots, a_n$ olan bir B Blaschke çarpımı verildiğinde, bu B Blaschke çarpımının birim çember üzerindeki bir λ noktası için $B(z_j) = \lambda$ denklemini sağlayan z_1, z_2, \dots, z_n noktalarını köşe kabul eden n -gen tarafından çevrelenen bir Poncelet eğrisi vardır [18].

[18] numaralı kaynaktan, Teorem 2.3.6'nın tersinin her zaman doğru olmadığı yani her Poncelet eğrisinin bir Blaschke çarpımı ile bağlantılı olmadığı bilinmektedir. Ayrıca her Blaschke-Poncelet eğrisinin bir tek Blaschke çarpımı ile bağlantılı olduğu ve her Blaschke çarpımının da bir tek Blaschke-Poncelet eğrisi ile bağlantılı olduğu bilinmektedir [18].

Sonlu Blaschke çarpımlarının ilginç geometrik özellikleri vardır. Bu çalışmanın bazı bölümlerinde temel (canonical) tipte Blaschke çarpımı olarak isimlendirilen

$$B(z) = z \prod_{j=1}^{n-1} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}, \quad |a_j| < 1, \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad (2.4)$$

biçimindeki Blaschke çarpımları ele alınacaktır ve bu Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri incelenecektir.

3. BİRİM DİSKTE TANIMLI SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI VE ALTIN ORAN

Bu bölümde 2. 3. ve 4. dereceden Blaschke çarpımlarının Poncelet eğrilerinin bazı geometrik özellikleri ele alınıp, bu geometrik özelliklerin altın oran ve altın çokgenler ile bağlantıları verilecektir.

3.1 İkinci Dereceden Blaschke Çarpımları

Bu bölümde

$$B(z) = z \frac{z-a}{1-az}, \quad a \neq 0, |a| < 1$$

biçimindeki 2. dereceden Blaschke çarpımları ele alınacaktır.

3.1.1 Teorem: $B(z) = z \frac{z-a}{1-az}, \quad a \neq 0$

biçiminde bir Blaschke çarpımı olsun. Bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ için z_1 ve z_2 ; $B(z_1) = B(z_2) = \lambda$ biçiminde iki nokta olsun. Bu durumda z_1 ile z_2 'yi birleştiren doğru parçası a 'dan geçer. Tersine, a 'dan geçen herhangi bir L doğrusunun $\partial\mathbb{D}$ 'yi kestiği z_1 ve z_2 noktaları için $B(z_1) = B(z_2)$ olur [2].

Bu bölümde aşağıdaki soruların cevapları aranacaktır.

- 1) a noktası, z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasını altın oranda böler mi?
- 2) Bu, a noktasından geçen her doğru parçası için doğru olabilir mi?

3.1.2 Teorem: $a \neq 0$ ve $|a| < 1$ olmak üzere $B(z) = z \frac{z-a}{1-az}$ biçiminde bir

Blaschke çarpımı olsun. Uç noktaları birim çember üzerinde bulunan, a 'dan geçen ve a tarafından altın oranda bölünen bir doğru parçası var olacak şekilde sonsuz sayıda a değeri vardır. Üstelik sabit bir a değeri için bu doğruların sayısı en fazla ikidir.

İspat: a tarafından bölünen $[z_1, z_2]$ doğru parçasının uzun parçasının kısa parçasına oranı $[0, a]$ ve $[z_1, z_2]$ doğru parçaları arasındaki θ açısının sürekli bir fonksiyonunu verir. $\theta = 0$ için bu oran $\frac{1+|a|}{1-|a|}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ içinse bu oran 1 olur.

$\frac{1+|a|}{1-|a|} \geq \varphi$ olduğu sürece a tarafından altın oranda bölünen bir doğru parçası vardır.

Şimdi bu özellikteki doğru parçalarının sayısı bulunsun.

$\frac{1+|a|}{1-|a|} \geq \varphi$ olacak şekilde a noktası ve $[z_1, z_2]$ doğru parçası a tarafından altın

oranda bölünecek şekilde z_1 noktası seçilsin. Tanımdan

$$\frac{|z_2 - a|}{|z_1 - a|} = \varphi \quad (3.1)$$

olur. Ayrıca $B(z_1) = B(z_2)$ olduğu biliniyor. Birim çember üzerindeki z noktaları için $|z| = 1$ olduğundan

$$B(z) = \frac{z-a}{z-a}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{z_1 - a}{z_1 - a} = \frac{z_2 - a}{z_2 - a} \quad (3.2)$$

bulunur. (3.1) eşitliğinden

$$\frac{(z_2 - a)(\overline{z_2 - a})}{(z_1 - a)(\overline{z_1 - a})} = \varphi^2 \quad (3.3)$$

ve (3.2) eşitliğinden

$$\frac{z_2 - a}{z_1 - a} = \frac{(z_2 - a)(\overline{z_1 - a})}{(z_1 - a)} \quad (3.4)$$

bulunur. (3.4), (3.3)'de yerine yazılırsa

$$-z_2^2 + 2az_2 + \varphi a^2 - 2a\varphi^2 z_1 + \varphi^2 z_1^2 = 0 \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.5) denkleminin z_2 'ye göre en fazla iki tane kökü vardır. Böylece a 'dan geçen ve a tarafından altın oranda bölünen $[z_1, z_2]$ biçiminde en fazla iki tane doğru parçası vardır. \square

3.1.3 Örnek: $B(z) = z \frac{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right)z}$ Blaschke çarpımı dikkate alınsın.

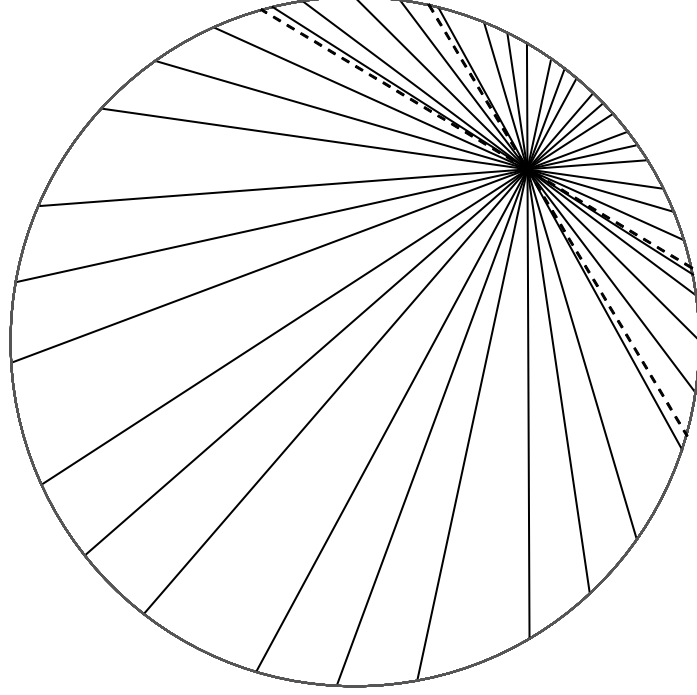
z_1 ve z_2 , $B(z_1) = B(z_2)$ özelliğinde birbirinden farklı iki nokta olsun. $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ noktası $[z_1, z_2]$ doğru parçasını altın oranda bölerse, (3.2) ve (3.3) denklemleri kullanılarak

$$2\text{Im}(\overline{z_1 z_2}) - \text{Im}(z_1) + \text{Re}(z_1) + \text{Im}(z_2) - \text{Re}(z_2) = 0$$

$$\varphi^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(z_1 + \overline{z_1}) + \frac{i}{2}(z_1 - \overline{z_1}) \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(z_2 + \overline{z_2}) + \frac{i}{2}(z_2 - \overline{z_2})$$

denklemleri bulunur. Bu iki denklemin ortak çözümünden aşağıdaki şekil elde edilir.

Bu şekilde kesik çizgilerle belirtilen doğruları $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ noktası altın oranda bölmüştür (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ için 2. dereceden Blaschke çarpımı.

3.2 Üçüncü Dereceden Blaschke Çarpımları

Bu bölümde birbirinden farklı $0, a_1, a_2$ noktalarında sifira sahip olan 3. dereceden

$$B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}$$

biçimindeki temel (canonical) tipte Blaschke çarpımları ele alınacaktır. $\partial\mathbb{D}$ 'deki her λ noktası için $B(z_j) = \lambda$ olacak biçimde $\partial\mathbb{D}$ 'de birbirinden farklı üç tane z_1, z_2, z_3 noktaları vardır.

3.2.1 Teorem: B , birbirinden farklı $0, a_1, a_2$ noktalarında sıfıra sahip 3. dereceden bir Blaschke çarpımı ve birim çember üzerindeki bir λ noktası için $B(z_j) = \lambda$ olsun. Bu durumda $j \neq k$ için z_j ile z_k 'yi birleştiren doğrular

$$|z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|$$

denklemleri ile verilen E elipsine teğettir. Tersine E' 'deki her nokta, birim çemberin $B(z_1) = B(z_2)$ özelliğindeki birbirinden farklı z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasının teğet değme noktasıdır [2].

Teorem 3.2.1'deki E elipsine 3. dereceden $B(z)$ Blaschke çarpımı ile bağlantılı Blaschke elipsi denir. Son zamanlarda $\partial\mathbb{D}$ 'deki bir λ noktası için B dönüşümü ile λ 'ya resmedilen z_1, z_2 ve z_3 noktalarının oluşturduğu her $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgeni tarafından içerilen E elipsi ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır [2-5, 8, 9].

Teorem 3.2.1'den birbirinden farklı sıfırlara sahip olan 3. dereceden $B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}$ biçimindeki bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin her zaman $|z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|$ elipsi olduğu bilinmektedir. Burada $a_1 = a_2$ alınırsa 3. dereceden $B(z) = z \left(\frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \right)^2$ biçimindeki Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi

$$|z - a_1| = \frac{1}{2} |1 - \overline{a_1}a_1|$$

çemberi olur. Bu çemberin yarıçapı sıfır alınırsa çemberin nokta olacağı aşikardır. Buradan

$$|1 - |a_1|^2| = 0$$

buradan da

$$|a_1|=1$$

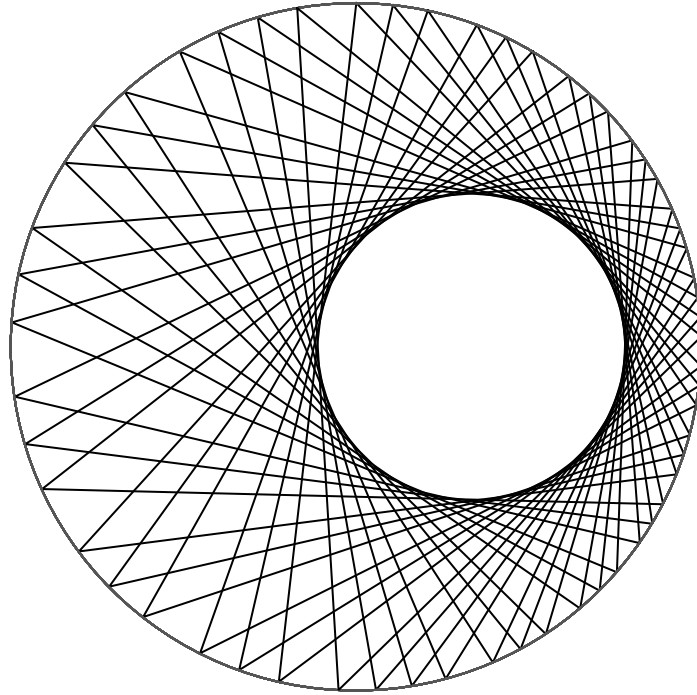
bulunur ki bu olamaz. Çünkü $|a_1| < 1$ olmalıdır.

3.2.2 Örnek: $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ için B , 3. dereceden $B(z) = z \left(\frac{z - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z} \right)^2$

biçimindeki Blaschke çarpımı olsun. Bu B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi

$$\left| z - \frac{1}{3} \right| = \frac{4}{9}$$

çemberidir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2: $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ için 3. dereceden Blaschke çarpımı.

Bu bölümde aşağıdaki soruların cevapları aranacaktır.

- 1) Köşeleri birim çember üzerinde olan bir altın üçgen var mıdır?
- 2) En az bir altın üçgen tarafından çevrelenen herhangi bir Blaschke elipsi var mıdır?
- 3) Bir Blaschke elipsi altın elips olabilir mi? Olursa, bu altın elipslerin sayısı kaç tanedir?

İlk olarak birinci sorunun cevabı verilsin.

3.2.3 Teorem: Köşeleri birim çember üzerinde olan sonsuz sayıda altın üçgen vardır.

İspat: Genelliği bozmaksızın, birim çember üzerinde köşeleri $1, -x+iy, -x-iy$ olan üçgeni oluşturacak şekilde $x, y > 0$ noktalarını alalım. Böylece $x^2 + y^2 = 1$ olur. Bu üçgenin altın üçgen olduğunu göstermek için

$$2\varphi y = \sqrt{y^2 + (x+1)^2} \quad (3.6)$$

eşitliğini sağlayan x ve y noktaları bulunmalıdır. (3.6) eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır ve $x^2 + y^2 = 1$ olduğu kullanılırsa $2y^2\varphi^2 = x+1$ elde edilir. Böylece

$$2(1-x^2)\varphi^2 - x - 1 = 0$$

ve buradan da

$$2x^2\varphi^2 + x + (1-2\varphi^2) = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. $y = \sqrt{1-x^2}$ olmak üzere, (3.7) denklemi çözülerek $x = 0.809017$ ve $y = 0.587785$ bulunur. Böylece köşeleri birim çember üzerinde olan en az bir tane altın üçgen vardır. Dönme dönüşümü altında bu üçgen hala altın üçgen olacağından, birim çember üzerinde sonsuz sayıda altın üçgen elde edilmiş olur. \square

Şimdi 3. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin altın üçgen tarafından çevrelendiği örnekler verilecektir. İlk olarak, aşağıdaki lemma ve teorem verilsin.

3.2.4 Lemma: $\{z_1, \dots, z_n\}$ ve $\{w_1, \dots, w_n\}$ birim çember üzerinde düzgün dağılmış iki küme olsun. Her j, k için $B(z_j) = B(z_k)$, $B(w_j) = B(w_k)$ ve 0 noktasını kendisine resmeden n . dereceden bir B Blaschke çarpımı vardır [9].

3.2.5 Teorem: Bir $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgeni verilsin. Bu üçgenin içine, üçgenin kenarlarının orta noktalarında teğet olacak biçimde bir tek elips çizilebilir. Bu elipsin odakları

$$\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)\right)^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)} \quad (3.8)$$

biçimindedir [3].

Ayrıca [8] numaralı kaynaktan, köşeleri birim çember üzerinde olan bir üçgen içine çizilen elipslerin Blaschke elipsi olduğu bilinmektedir.

3.2.6 Örnek: $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ birim çember üzerinde bir altın üçgen olsun. Teorem 3.2.5'den bu üçgen içine çizilen E Steiner elipsinin odakları olan a_1 ve a_2 noktaları, (3.8) kullanılarak bulunur. Bu durumda E Steiner elipsi $B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1} z} \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2} z}$ biçimindeki Blaschke çarpımının Poncelet eğrisidir. Örneğin,

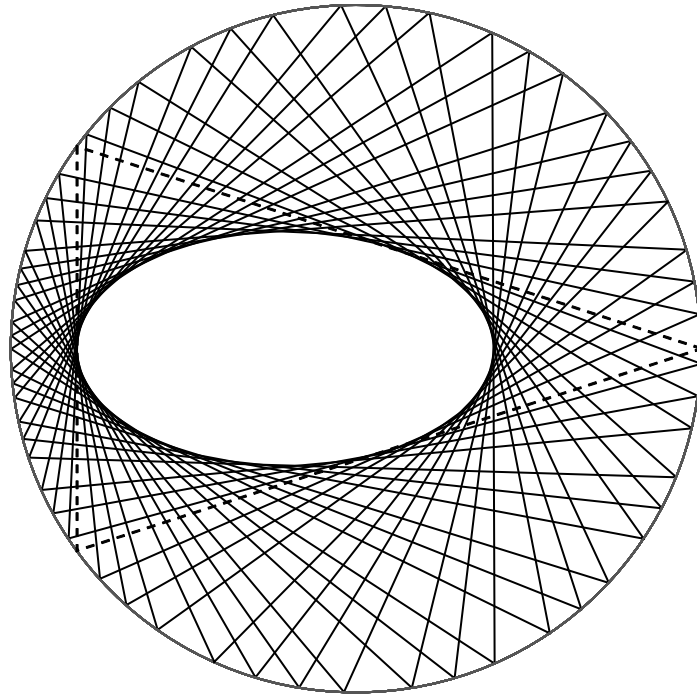
Teorem 3.2.3'ün ispatından $x = 0.809017$ ve $y = 0.587785$ olmak üzere $z_1 = 1, z_2 = -x + iy, z_3 = -x - iy$ noktalarını köşe kabul eden $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ altın üçgenini

ele alalım. (3.8)'den $a_1 = 0.292438$ ve $a_2 = -0.704461$ bulunur. Böylece

$$B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}$$
 biçimindeki Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi

$$|z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|$$

denklemini ile verilen Steiner elipsidir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3: Altın üçgen (kesik çizgili olan) tarafından çevrelenen Poncelet eğrisi.

3.2.7 Örnek: $\{z_1, z_2, z_3\}$ ve $\{w_1, w_2, w_3\}$ kümeleri düzgün dağılmış olacak şekilde z_1, z_2, z_3 ve w_1, w_2, w_3 noktaları birim çember üzerinde $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ ve $\Delta(w_1, w_2, w_3)$ altın üçgenlerini oluşturursun. Lemma 3.2.4'den $1 \leq j, k \leq 3$ şartını sağlayan her j ve k için $B(z_j) = B(z_k)$, $B(w_j) = B(w_k)$ ve 0 noktasını kendisine resmeden en az bir B Blaschke çarpımı olduğu bilinmektedir.

Böylece Poncelet eğrisinin, köşeleri birim çember üzerinde olan en az iki tane altın üçgen tarafından çevrelendiği sonsuz sayıda Blaschke çarpımı vardır. Örneğin,

$$\{1, -0.809017 + i0.587785, -0.809017 - i0.587785\}$$

ve

$$\{0.5 + i0.866025, -0.913545 - i0.406737, 0.104528 - i0.994522\}$$

birim çember üzerindeki düzgün dağılmış kümeleri verilsin.

$$B(z_1) = B(z_2), B(z_2) = B(z_3), B(w_1) = B(w_2), B(w_2) = B(w_3)$$

denklemleri ortak çözümlürse

$$a_1 = -0.766062 - i0.442286$$

ve

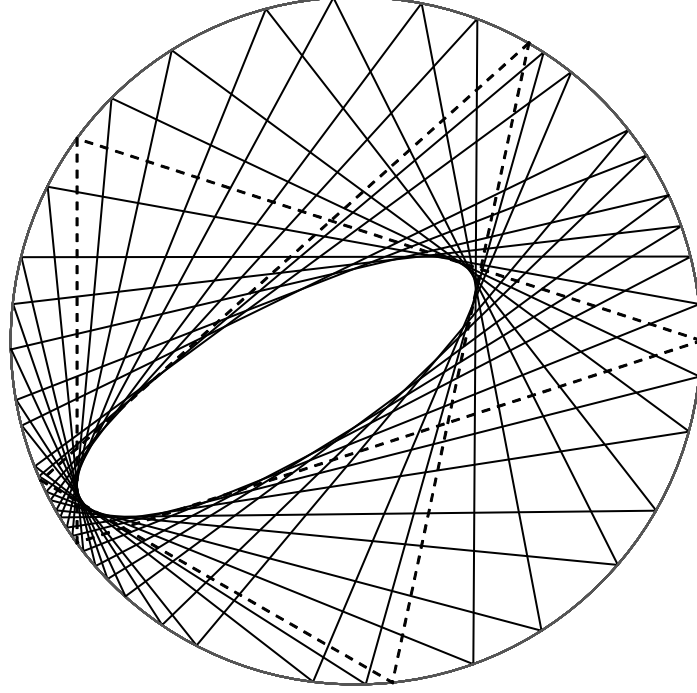
$$a_2 = 0.302537 + i0.174670$$

bulunur. Buradan

$$B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}$$

biçiminde bir B Blaschke çarpımı vardır (Şekil 3.4).

Böylece Poncelet eğrisinin en az bir veya iki tane altın üçgen tarafından çevrelendiği 3. dereceden Blaschke çarpımı örnekleri verilmiş oldu.



Şekil 3.4: Altın üçgenler (kesik çizgili olanlar) tarafından çevrelenen Poncelet eğrisi.

3.2.8 Teorem: Birim çemberin içinde, Blaschke elipsi olan sonsuz sayıda altın elips vardır.

İspat Birim çemberde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denkleminde sahip olan bir altın elips olsun. Altın elips tanımından $\frac{a}{b} = \varphi$ dir. c elipsin pozitif odak noktası olmak üzere elips tanımından $a^2 = b^2 + c^2$ olduğunu biliyoruz. Böylece bu elipsin odakları $-c$ ve c 'dir. $\varphi^2 = \varphi + 1$ olduğu da kullanılarak $a = \pm c\sqrt{\varphi}$ elde edilir. Şimdi bu elips ile bağlantılı Blaschke çarpımı ele alınsın. Eğer bu elips Blaschke elipsi ise, Blaschke elipsinin tanımından $2a = 1 + c^2$ olmalıdır. Buradan $c^2 \pm 2\sqrt{\varphi}c + 1 = 0$ denklemini bulunur. Bu denklemin bir tane pozitif kökü vardır ve bu kök $c = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2(-1+\sqrt{5})} + \sqrt{2(1+\sqrt{5})} \right)$ 'dir. Böylece Blaschke elipsi olan en az bir tane altın elips vardır. $f(z) = e^{i\theta}z$ biçimindeki bir dönme dönüşümü altında bu elips hala

altın elips olacağından, birim çember içinde sonsuz sayıda altın Blaschke elipsi vardır. \square

3.2.9 Tanım: B , n . dereceden sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. Eğer B 'nin Poncelet eğrisi bir altın elips ise B 'ye altın Blaschke çarpımı denir.

3.2.10 Örnek: $a_1 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2(-1+\sqrt{5})} + \sqrt{2(1+\sqrt{5})} \right)$ ve $a_2 = -a_1$ olmak üzere

$$B_1(z) = z \frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(1-\bar{a}_1 z)(1-\bar{a}_2 z)}$$

Blaschke çarpımı dikkate alınsın.

Teorem 3.2.8'in ispatından B_1 Blaschke çarpımının Blaschke elipsi

$$E_1 : |z-a_1| + |z-a_2| = |1-\bar{a}_1 a_2|$$

denklemleri ile verilen altın elipstir. Böylece B_1 bir altın Blaschke çarpımı olur (Şekil

3.5). Bu E_1 altın Blaschke elipsinin $f(z) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$ biçimindeki dönme

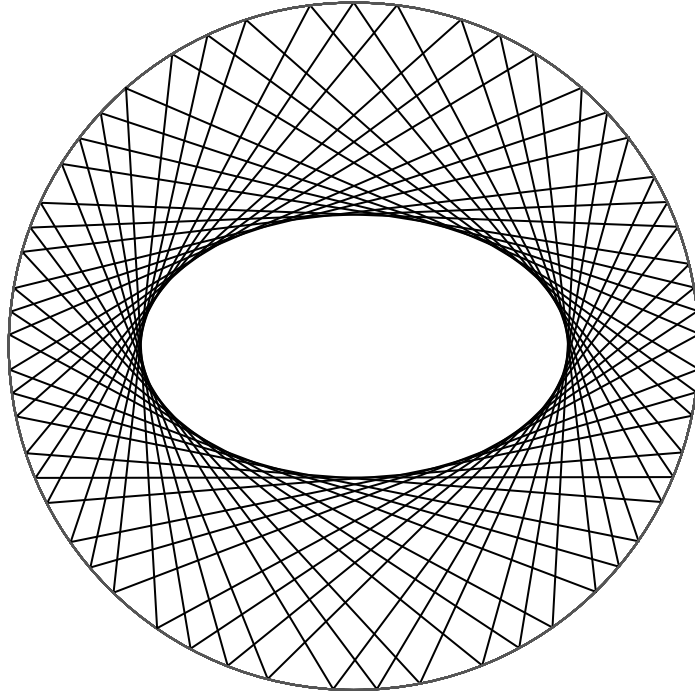
dönüşümü altındaki resmi de yine bir altın Blaschke elipsidir. $f(E_1)$ resim elipsinin denklemleri

$$\left| z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a_1 \right| + \left| z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a_2 \right| = |1-\bar{a}_1 a_2|$$

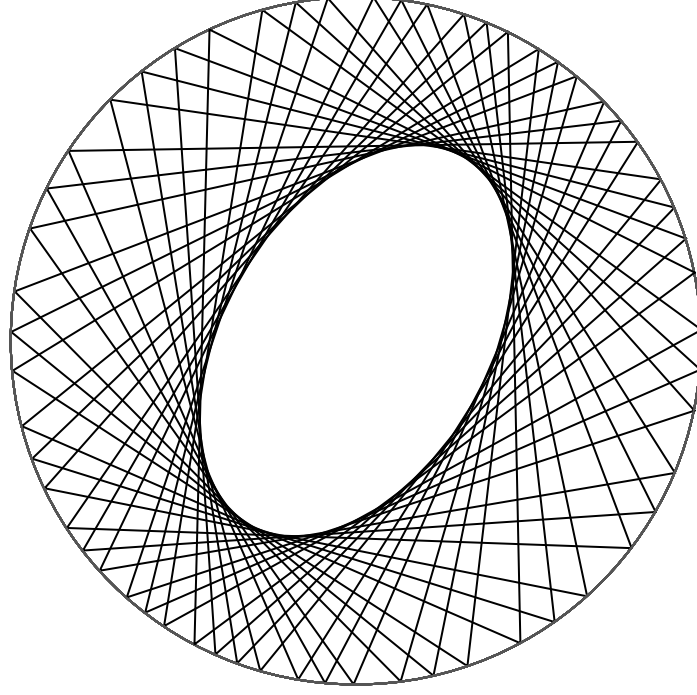
biçimindedir. Bu resim elipsi ise

$$B_2(z) = z \frac{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a_1}{1 - \bar{z} a_1 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \frac{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a_2}{1 - \bar{z} a_2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

biçimindeki B_2 Blaschke çarpımının Poncelet eğrisidir (Şekil 3.6).



Şekil 3.5: E_1 altın Blaschke elipsi.



Şekil 3.6: $f(E_1)$ altın Blaschke elipsi.

3.3 Dördüncü Dereceden Blaschke Çarpımları

Şimdi, ikinci dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabilen 4. dereceden Blaschke çarpımları ele alınacaktır. İlk olarak aşağıdaki teorem verilsin.

3.3.1 Teorem: Köşeleri birim çember üzerinde olan sonsuz sayıda altın dikdörtgen vardır.

İspat: Genelliği bozmaksızın, $x, y > 0$ olmak üzere x ve y köşeleri birim çember üzerinde $x + iy, x - iy, -x - iy, -x + iy$ noktaları olan dörtgeni oluşturacak şekilde iki nokta olsun. Böylece $x^2 + y^2 = 1$ olur. Bu dörtgenin altın dikdörtgen olduğunu göstermek için

$$2x = 2\varphi y$$

eşitliğini sağlayan x ve y noktaları bulunmalıdır. Buradan $x = \varphi y$ bulunur.

$x^2 + y^2 = 1$ ve $\varphi^2 = \varphi + 1$ olduğu kullanılarak $y^2(\varphi^2 + 1) = 1$ ve buradan da

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varphi + 2}} = 0.525731 \text{ ve } x = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi + 2}} = 0.850651$$

bulunur. Böylece köşeleri birim çember üzerinde olan en az bir tane altın dikdörtgen vardır. Dönme dönüşümü altında bu dikdörtgen hala altın dikdörtgen olacağından, köşeleri birim çember üzerinde olan sonsuz sayıda altın dikdörtgen elde edilmiş olur.

□

Şimdi 4. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin elips olduğu durum incelenecektir. Bunun için ilk olarak [6] numaralı kaynaktan aşağıdaki iki lemma ve teorem verilsin.

3.3.2 Lemma: ψ, β birim çember içinde noktalar olmak üzere, 2. dereceden

$$f = z \frac{z - \psi}{1 - \psi z} \text{ ve } g(z) = z \frac{z - \beta}{1 - \beta z}$$

biçimindeki iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi $B = f \circ g$ olsun. λ birim çember üzerinde bir nokta olmak üzere B tarafından λ 'ya resmedilen iki noktayı birleştiren doğru parçası

$$E : |z - \beta|(|z - a_1| + |z - a_2| - r) = 0$$

kümesine teğettir. Burada a_1 ve a_2 , $t^2 - (\beta - \psi \bar{\beta})t - \psi = 0$ denkleminin kökleridir ve r aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$r = |\bar{a}_1 a_2 - 1| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}} \quad [6].$$

3.3.3 Lemma: Köşeleri birim çember üzerinde olan herhangi bir dörtgenin içine bir elips çizilebilir ancak ve ancak bu elips 2. dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabilen bir Blaschke çarpımı ile bağlantılıdır [6].

3.3.4 Teorem: Bir E elipsi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) Elipsin içine çizildiği köşeleri birim çember üzerinde olan bir dörtgen vardır.

ii) Birim çember içindeki a ve b noktaları için E elipsinin denklemi

$$|z - a_1| + |z - a_2| = \left| 1 - \overline{a_1 a_2} \right| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}}$$

biçimindedir [6].

Lemma 3.3.2, Lemma 3.3.3 ve Teorem 3.3.4 kullanılarak aşağıdaki teorem verilecektir.

3.3.5 Teorem: Bir Blaschke çarpımının 2. dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olması için gerek ve yeter şart bu Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi E 'nin elips olmasıdır.

Teorem 3.3.4'den E 'nin denkleminin

$$E : |z - a_1| + |z - a_2| = \left| 1 - \overline{a_1 a_2} \right| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}} \quad (3.9)$$

biçiminde olduğu açıktır.

Böylece altın elipsler için aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.6 Teorem: B , 4. dereceden Poncelet eğrisi elips olan sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. B 'nin E Poncelet eğrisinin altın elips olması için gerekli ve yeterli koşul E 'nin denkleminin

$$E : |z - \varphi a_2| + |z - a_2| = |1 - \overline{\varphi a_2} a_2| \sqrt{\frac{|a_2|^2 (\varphi + 2) - 2}{|a_2|^4 (\varphi + 1) - 1}}$$

biçiminde olmasıdır.

İspat: Elips, altın elips olduğundan, tanımdan $a_1 = \varphi a_2$ olduğu biliniyor. Bu (3.9) eşitliğinde yerine yazılırsa ispat görülür. \square

Poncelet eğrisi E elipsi olan 4. dereceden bir B Blaschke çarpımı için, E elipsini çevreleyen bir altın dikdörtgen var mıdır? Şimdi bu sorunun cevabı aranacaktır.

Aşağıdaki teoremde Poncelet eğrisi elips olan ve bu elipsleri çevreleyen en az bir tane altın dikdörtgenin olduğu 4. dereceden Blaschke çarpımı örnekleri oluşturulacaktır. Bunun için [6] numaralı kaynak kullanılarak aşağıdaki lemmalar verilsin.

3.3.7 Lemma: Birim çember üzerindeki

$$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < 2\pi$$

koşulunu sağlayan birbirinden farklı z_1, z_2, z_3, z_4 noktalarını köşe kabul eden bir dörtgeninin içine çizilebilen bir elips vardır. Üstelik, her bir dörtgen için bu dörtgenin içine çizilen elipsler bir parametrelili reel değişkenli bir aile oluşturur [6].

3.3.8 Lemma: z_1, z_2, z_3, z_4 birim çember üzerinde $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < 2\pi$ koşulunu sağlayan dört nokta ve Q bu dört noktayı köşe kabul eden bir dörtgen olsun. Q 'nun içine çizilen elipsin odakları olan a_1 ve a_2 noktaları aşağıdaki iki denklemi sağlarlar:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left((-z_2 + z_1) z_3 - z_1 z_2 \right) z_4 + z_1 z_2 z_3 \right) \overline{a_1} + z_2 z_4 - z_1 z_3 \right) a_1^2 \\ & - \left(z_1 z_2 z_3 z_4 (z_4 - z_3 + z_2 - z_1) \overline{a_1}^2 - (z_3 + z_1)(z_4 + z_2)(z_2 z_4 - z_1 z_3) \overline{a_1} \right. \\ & \left. + z_2 z_4 (z_2 + z_4) - z_1 z_3 (z_1 + z_3) \right) a_1 + z_1 z_2 z_3 z_4 (z_2 z_4 - z_1 z_3) \overline{a_1}^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$- \left((z_2^2 z_3 + z_1 z_2^2) z_4^2 - z_1^2 z_3^2 z_4 - z_1^2 z_2 z_3^2 \right) \overline{a_1} + (z_2 z_4 - z_1 z_3)(z_2 z_4 + z_1 z_3) = 0, \quad (a_1 \in Q)$$

ve

$$\begin{aligned} & (z_4 - z_3 + z_2 - z_1) a_1 a_2 - (z_2 z_4 - z_1 z_3)(a_1 + a_2) \\ & \left((z_2 - z_1) z_3 + z_1 z_2 \right) z_4 - z_1 z_2 z_3 = 0, \quad (a_1, a_2 \in Q). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tersine (3.10) ve (3.11) denklemlerini sağlayan her a_1 ve a_2 noktaları Q 'nun içine çizilen elipsin odaklarıdır [6].

3.3.9 Teorem: Q köşeleri birim çember üzerinde olan herhangi bir altın dikdörtgen olsun. 4. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi olacak şekilde Q 'nun içine çizilen en az bir tane elips vardır.

İspat: Q birim çember üzerindeki z_1, z_2, z_3, z_4 noktalarını köşe kabul eden herhangi bir altın dikdörtgen olsun. Lemma 3.3.7'den Q dörtgeninin içine çizilebilen bir E elipsi vardır. Köşeleri z_1, z_2, z_3, z_4 olan herhangi bir dörtgenin içine çizilen elipsin odakları olan a_1 ve a_2 'nin (3.10) ve (3.11) denklemlerini sağladığı bilinmektedir. Buradan E elipsinin odakları (3.10) ve (3.11) denklemlerini sağlamalıdır ve E 'nin denklemi

$$E: |z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \bar{a}_1 a_2| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}}$$

biçimindedir.

Lemma 3.3.3'den, $\psi = -a_1 a_2$ ve $\beta = \frac{a_1 + a_2 - a_1 a_2 (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)}{1 - |a_1 a_2|^2}$ olmak üzere

$$B(z) = z \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta} z} \frac{z^2 + (\bar{\beta} \psi - \beta) z - \psi}{1 - (-\bar{\psi} \beta + \beta) z - \bar{\psi} z^2}$$

biçimindeki B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin E elipsi olduğu görülür. \square

3.3.10 Örnek: (z_1, z_2, z_3, z_4) , $x = 0.850651$ ve $y = 0.525731$ olmak üzere

$z_1 = x + iy$, $z_2 = x - iy$, $z_3 = -x - iy$, $z_4 = -x + iy$ noktalarını köşe kabul eden altın dikdörtgen olsun. (3.10) ve (3.11) denklemleri kullanılarak, Q dikdörtgeninin içine çizilebilecek elipsin odakları

$$a_1 = -0.813818 - i0.463774 \text{ ve } a_2 = 0.813818 + i0.463774$$

olarak bulunur. Böylece

$$\psi = -a_1 a_2, \beta = \frac{a_1 + a_2 - a_1 a_2 (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)}{1 - |a_1 a_2|^2}$$

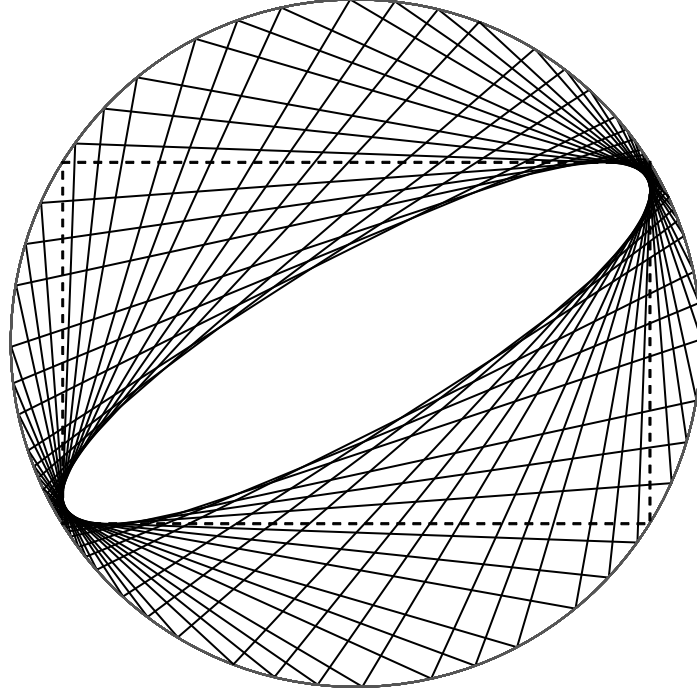
ve

$$f(z) = z \frac{z - \psi}{1 - \bar{\psi} z}, g(z) = z \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta} z}$$

olmak üzere Lemma 3.3.3'den $B(z) = (f \circ g)(z)$ biçimindeki Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi

$$|z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}}$$

elipsidir (Şekil 3.7).



Şekil 3.7: Altın dikdörtgen (kesik çizgili olan) tarafından çevrelenen Poncelet eğrisi.

3.3.11 Örnek: $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ve $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ kümeleri düzgün dağılmış olacak şekilde z_1, z_2, z_3, z_4 ve w_1, w_2, w_3, w_4 noktaları birim çember üzerinde (z_1, z_2, z_3, z_4) ve (w_1, w_2, w_3, w_4) altın dikdörtgenlerini oluştursun. Lemma 3.2.4'den $1 \leq j, k \leq 4$ şartını sağlayan her j ve k için $B(z_j) = B(z_k)$, $B(w_j) = B(w_k)$ ve 0 noktasını kendisine resmeden en az bir B Blaschke çarpımı olduğu bilinmektedir. Böylece Poncelet eğrisinin, köşeleri birim çember üzerinde olan en az iki tane altın dikdörtgen tarafından çevrelendiği sonsuz sayıda Blaschke çarpımı vardır.

Çokgenler arasında düzgün beşgen ve düzgün ongenin altın oranın benzer özelliklerine sahip olduğu biliniyor [17]. Örnek 3.2.7 ve Örnek 3.3.11'deki yöntemler kullanılarak Poncelet eğrileri en az iki tane düzgün beşgen ve düzgün ongen tarafından çevrelenen 5. ve 10. dereceden Blaschke çarpımları elde edilebilir.

Teorem 3.3.5'den 4. dereceden bir Blaschke çarpımının Poncelet eğrisinin bazı şartlar altında elips olduğu bilinmektedir. Burada $a_1 = a_2$ alınırsa 4. dereceden bir B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi

$$|z - a_1| = \frac{1}{2} |1 - a_1 \bar{a}_1| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_1|^2 - 2}{|a_1|^4 - 1}}$$

çemberi olarak bulunur. Bu çemberin yarıçapı sıfır alınırsa çemberin nokta olacağı aşikardır. Buradan

$$\frac{1}{2} |1 - a_1 \bar{a}_1| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_1|^2 - 2}{|a_1|^4 - 1}} = 0$$

buradan da

$$|1 - a_1 \bar{a}_1| = 0 \text{ veya } \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_1|^2 - 2}{|a_1|^4 - 1}} = 0$$

olmalıdır. Yukarıdaki her iki durumda da

$$|a_1| = 1$$

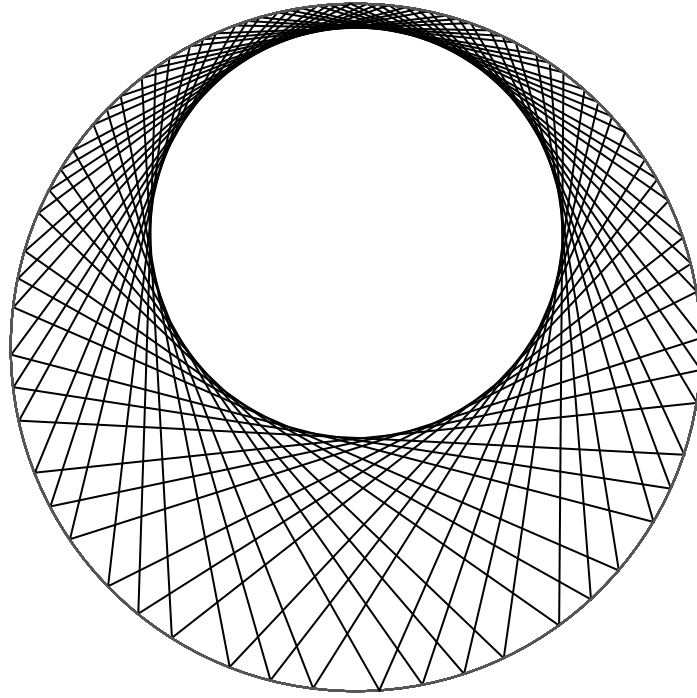
bulunur ki bu olamaz. Çünkü $|a_1| < 1$ olmalıdır.

3.3.12 Örnek: $B(z) = z \frac{z - 0.6i}{1 + 0.6iz} \frac{z - 0.3333i}{1 + 0.3333iz} \frac{z - 0.3333i}{1 + 0.3333iz}$ biçimindeki 4.

dereceden B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi

$$\left| z - \frac{i}{3} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{\left| \frac{i}{3} \right|^2 + \left| \frac{i}{3} \right|^2 - 2}{\left| \frac{i}{3} \right|^4 - 1}} \right|$$

çemberidir (Şekil 3.8).



Şekil 3.8: Poncelet eğrisi çember olan 4. dereceden Blaschke çarpımı.

Diğer yandan [4] numaralı kaynakta aşağıdaki teorem verilmiştir.

3.3.13 Teorem: a_1, a_2, a_3 birbirinden ve sıfırdan farklı birim çember içinde üç

nokta ve $B(z) = z \prod_{j=1}^3 \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$ biçiminde sıfırdan farklı sıfırları aşağıdaki eşitliği

sağlayan 4. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun:

$$a_1 + \overline{a_1}a_2a_3 = a_2 + a_3.$$

i) L , a_1 noktasından geçen herhangi bir doğru ise L doğrusunun birim çemberi kestiği z_1 ve z_2 noktalarında $B(z_1) = B(z_2)$ 'dir.

ii) 0 ve $\frac{1}{a_1}$ noktalarından geçen herhangi bir çember ile birim çember birbirinden farklı iki tane z_1 ve z_2 kesişim noktalarına sahiptirler. Bu durumda bu kesişim noktaları için $B(z_1) = B(z_2)$ olur [4].

Bu teoremden faydalanarak, aşağıdaki teorem elde edilir.

3.3.14 Teorem: a_1, a_2, a_3 birbirinden ve sıfırdan farklı birim çember içinde üç

nokta ve $B(z) = z \prod_{j=1}^3 \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}$ sıfırdan farklı sıfırları aşağıdaki koşulu sağlayan 4.

dereceden bir Blaschke çarpımı olsun:

$$a_1 + \overline{a_1}a_2a_3 = a_2 + a_3.$$

Bu takdirde, B 'nin Poncelet eğrisi

$$E: |z - a_2| + |z - a_3| = \left| 1 - \overline{a_2}a_3 \right| \sqrt{\frac{|a_2|^2 + |a_3|^2 - 2}{|a_2|^2 |a_3|^2 - 1}}$$

denkleminde sahip E elipsidir.

İspat: Teorem 3.3.13'ün ispatında, $a_1 + \overline{a_1}a_2a_3 = a_2 + a_3$ eşitliği kullanılarak

$$B_1(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \text{ ve } B_2(z) = z \frac{z + a_2a_3}{1 + a_2a_3z}$$

olmak üzere B 'nin

$$B(z) = (B_2 \circ B_1)(z)$$

biçiminde 2. dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabileceği gösterilmiştir. Lemma 3.3.2'den E elipsinin odaklarının aşağıdaki denklemin kökleri olduğu bilinmektedir:

$$t^2 - (a_1 + \overline{a_1}a_2a_3)t + a_2a_3 = 0. \quad (3.12)$$

Hipotezden, $a_1 + \overline{a_1}a_2a_3 = a_2 + a_3$ olduğundan

$$t^2 - (a_2 + a_3)t + a_2a_3 = 0$$

denklemini elde edilir. Böylece (3.12) denkleminin kökleri a_2 ve a_3 olur. Buradan E elipsinin denklemi

$$|z - a_2| + |z - a_3| = |1 - \overline{a_2}a_3| \sqrt{\frac{|a_2|^2 + |a_3|^2 - 2}{|a_2|^2 |a_3|^2 - 1}}$$

olur. \square

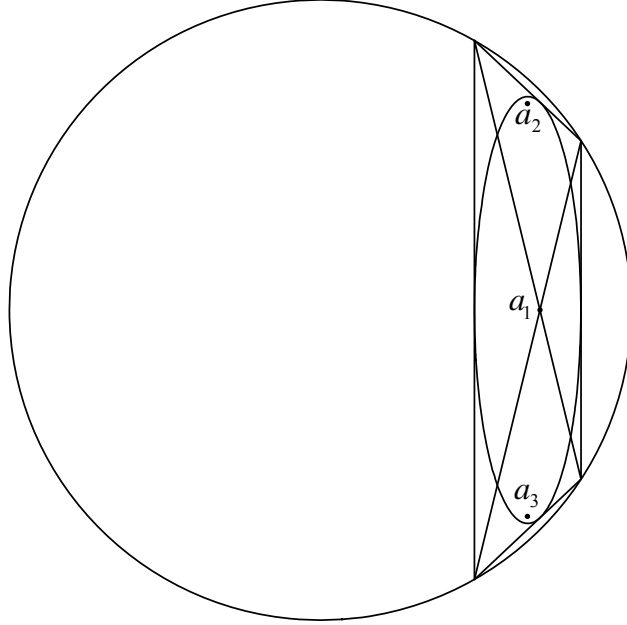
Bu teoremin güzel bir geometrik yorumu vardır: Teorem 3.3.14'deki gibi bir $B(z)$ Blaschke çarpımı verilsin. Bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ noktası için z_1, z_2, z_3, z_4 birbirinden farklı $B(z_1) = B(z_2) = B(z_3) = B(z_4)$ eşitliğini sağlayan 4 nokta olsun. Bu durumda B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi, odakları a_2 ve a_3 olan E elipsidir ve Teorem 3.3.13'ün ispatından z_1, z_3 ve z_2, z_4 noktalarını birleştiren doğruların a_1 noktasından geçtiği görülür.

$$\mathbf{3.3.15 \ Örne\ek:} \quad a_1 = \frac{12}{17}, a_2 = \frac{2}{3} - i\frac{2}{3}, a_3 = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3} \quad \text{ve} \quad B(z) = z \prod_{j=1}^3 \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}$$

olsun. B 'nin Poncelet eğrisi odakları a_2 ve a_3 olan

$$|z - a_2| + |z - a_3| = 1.37674$$

elipsidir (Şekil 3.9).



Şekil 3.9: $a_1 = \frac{12}{17}$, $a_2 = \frac{2}{3} - i\frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$ için 4. dereceden Blaschke çarpımı.

4. SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARININ AYRIŞIMI

Bu bölümde birim diskte tanımlı 2., 3. ve 4. dereceden bir Blaschke çarpımının ayrıştırılması ele alınacaktır. Sonlu bir B Blaschke çarpımının ayrıştırılması yani daha düşük dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabilmesi için gerekli olan bir koşul [19] numaralı kaynakta aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

4.1 Teorem: B , n . dereceden sonlu bir Blaschke çarpımı ve h , I özdeşlik dönüşümünden farklı, birim diskten birim diske tanımlı analitik bir fonksiyon olmak üzere $B \circ h = B$ olsun. Bu durumda

i) h bir Möbius dönüşümüdür.

ii) $h, \dots, h^{[k-1]}$ birbirinden farklı fakat $h^{[k]} = I$ olacak biçimde bir $k \geq 2$ pozitif tamsayısı vardır.

iii) k , n 'yi böler.

iv) $h(\gamma) = \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in \partial\mathbb{D}$ noktası vardır.

v) k . dereceden B_1 ve n/k . dereceden B_2 sonlu Blaschke çarpımları için B Blaschke çarpımı $B = B_2 \circ B_1$ biçiminde yazılabilir. B_1 Blaschke çarpımı

$$B_1(z) = \left(\frac{z - \gamma}{1 - \overline{\gamma}z} \right)^k$$

biçiminde de düşünülebilir [19].

$B \circ h = B$ koşulu ayrıştırılabilirlik için yeterli değildir. Yani $B \circ h = B$ biçiminde birimden farklı birim diskten birim diske bir h analitik fonksiyonu yokken de $B = B_2 \circ B_1$ biçiminde yazılabilen B Blaschke çarpımları vardır.

4.2 Örnek: $B_1(z) = z^2 \frac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}z}$, $B_2(z) = z^2$ olmak üzere $B = B_2 \circ B_1$ biçiminde

bir B Blaschke çarpımı ele alınsın. Bu B Blaschke çarpımı 2. ve 3. dereceden iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olduğundan derecesi 6'dır. $B \circ h = B$ olsun. Buradan

$$B_1(h(z)) = B_1(z) \text{ veya } B_1(h(z)) = -B_1(z)$$

olmalıdır.

İlk olarak $B_1(h(z)) = B_1(z)$ durumu incelenecektir. $B_1(h(z)) = B_1(z)$ olduğundan $B_1(h(\frac{i}{2})) = B_1(\frac{i}{2})$ olur ki buradan da

$$h(\frac{i}{2}) = 0 \text{ veya } h(\frac{i}{2}) = \frac{i}{2}$$

olmalıdır.

$h(\frac{i}{2}) = 0$ olsun. $B_1(h(\frac{i}{2})) = B_1(\frac{i}{2})$ eşitliğinde her iki yanın türevi alınarak

$$B_1'(h(\frac{i}{2}))h'(\frac{i}{2}) = B_1'(\frac{i}{2}) \quad (4.1)$$

bulunur. (4.1) eşitliğinde sağ taraf sıfırdan farklı iken sol taraf sıfırdır. Bu ise çelişkidir.

$h(\frac{i}{2}) = \frac{i}{2}$ olsun. $B_1'(h(\frac{i}{2}))h'(\frac{i}{2}) = B_1'(\frac{i}{2})$ olduğundan

$$h'(\frac{i}{2}) = 1$$

olmalıdır. $0 < |a| < 1$ olmak üzere $h(z) = \frac{z-a}{1-az}$ Möbiüs dönüşümü için

$$h\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2} \text{ ve } h'\left(\frac{i}{2}\right) = 1 \quad (4.2)$$

olsun. (4.2) eşitliği çözümlerse $a = \frac{i}{2}$ bulunur, buradan da $h(z) = \frac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}z}$ elde edilir.

Buradan $h\left(\frac{i}{2}\right) = 0$ bulunur bu ise $h\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2}$ kabulü ile çelişir.

$B_1(h(z)) = -B_1(z)$ durumunda da benzer işlemler yardımı ile böyle bir h Möbiüs dönüşümünün olamayacağı görülür.

Sonuç olarak, 6. dereceden bir B Blaschke çarpımı 2. dereceden B_2 ve 3. dereceden B_1 Blaschke çarpımlarının bileşkesi olarak $B = B_2 \circ B_1$ biçiminde yazılabilesine rağmen $B \circ h = B$ eşitliğini sağlayacak şekilde birim diskden birim diske tanımlı birimden farklı bir h Möbiüs dönüşümü yoktur.

Şimdi $B \circ h = B$ eşitliğini sağlayan 2. dereceden bir B Blaschke çarpımının olup olmadığı incelenecektir. Bunun için aşağıdaki teorem verilsin.

4.3 Teorem: B , 2. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda $B \circ h = B$ olacak şekilde birim diskden birim diske tanımlı birimden farklı bir h Möbiüs dönüşümü yoktur.

İspat: $B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - a_1 z}$ biçiminde 2. dereceden bir Blaschke çarpımı ve

$h(z) = \frac{z - a}{1 - az}$ biçiminde birim diskden birim diske tanımlı bir Möbiüs dönüşümü olsun.

$$(B \circ h)(z) = B\left(\frac{z - a}{1 - az}\right) = \frac{z^2(1 + a_1 \bar{a}) + z(-2a - a_1 - a \bar{a} a_1) + a(a + a_1)}{z^2 \bar{a}(\bar{a} + \bar{a}_1) + z(-2\bar{a} - \bar{a}_1 - a \bar{a} \bar{a}_1) + (1 + a \bar{a}_1)}$$

biçiminde olur. $B \circ h = B$ olacağından

$$\frac{z^2(1+a_1\bar{a})+z(-2a-a_1-a\bar{a}a_1)+a(a+a_1)}{z^2\bar{a}(\bar{a}+\bar{a}_1)+z(-2\bar{a}-\bar{a}_1-\bar{a}a\bar{a}_1)+(1+a\bar{a}_1)} = \frac{z^2-za_1}{1-\bar{a}_1z}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan

$$1+a_1\bar{a}=1$$

ve buradan da

$$a_1=0 \text{ veya } a=0$$

bulunur ki bu olamaz. Çünkü $0 < |a_1| < 1$ ve $0 < |a| < 1$ olmalıdır. Böylece $B \circ h = B$ olacak şekilde birim diskten birim diske tanımlı bir h Möbiüs dönüşümü yoktur. \square

$\phi \in [0, 2\pi)$ ve $0 < |a| < 1$ olmak üzere birim çemberi birim çembere ve içini içine resmeden bir dönüşüm

$$M_a^\phi(z) = e^{i\phi} \frac{z-a}{az-1}$$

biçiminde de ifade edilebilir. [8] numaralı kaynakta aşağıdaki teorem ve lemma verilip bunlardan faydalanarak 3. dereceden Blaschke çarpımlarının $B \circ h = B$ biçiminde yazılabilmesi için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir.

4.4 Teorem: $\{[z, M_a^\phi(z)] : z \in \partial\mathbb{D}\}$ doğru parçalarının kümesi, dış merkezliği

$|a|$, odakları a ve $ae^{i\phi}$, asal eksen uzunluğu $2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ olan C_a^ϕ koniğine teğettir.

Konik dejenere olduğunda (örneğin $\phi=0$ olması durumunda), $[z, M_a^\phi(z)]$ doğru parçaları a noktasında kesişirler [8].

İlk olarak Teorem 4.4'ün bir uygulaması olan aşağıdaki lemma verilsin.

4.5 Lemma (Birim disk ve C_a^ϕ elipsi için Poncelet Özelliği):
 $\phi \in (0, 2\pi)$, $|a| < 1$ ve C_a^ϕ elipsi birim diskin içinde olsun. Eğer köşeleri birim çember üzerinde olan herhangi bir n kenarlı Poncelet çokgeni C_a^ϕ elipsini çevreler ise C_a^ϕ elipsi köşeleri birim çember üzerinde olan her n -gen tarafından çevrelenir [8].

Lemma 4.5'den, $(M_a^\phi)^n$ dönüşümünün birim olduğu sonucu çıkar. Köşeleri birim çember üzerinde ve kenarları $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n]$ olan bir n kenarlı Poncelet çokgeni C_a^ϕ elipsini çevrelesin. Bu n -genin kenarları C_a^ϕ 'ye teğet olduğundan Teorem 4.4'den $M_a^\phi(z_0) = z_1$ veya $M_a^\phi(z_1) = z_0$ olmalıdır. $M_a^\phi(z_0) = z_1$ olsun. Benzer olarak $M_a^\phi(z_1) = z_2$ veya $M_a^\phi(z_2) = z_1$ olur. Möbius dönüşümleri bire-bir olduğundan $M_a^\phi(z_2) = z_1$ olamaz. Böylece $(M_a^\phi)^2(z_0) = M_a^\phi(z_1) = z_2$ elde edilir. Benzer adımlarla $j = 1, 2, \dots, n$ için $(M_a^\phi)^j(z_0) = z_j$ olur. $z_n = z_0$ olduğundan $(M_a^\phi)^n$ birim dönüşümdür.

C_a^ϕ koniği elips olarak düşünülürse, denkleminin

$$|z - a| + |z - ae^{i\phi}| = r$$

biçiminde olacağı aşikardır.

4.6 Lemma: B , birbirinden farklı $0, a_1, a_2$ noktalarında sıfırı olan 3. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda birimden farklı bir M Möbiüs dönüşümü vardır öyle ki $B \circ M = B$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\phi = \arg(a_2 / a_1)$ için $|a_1| = |a_2| = \sqrt{2 \cos \phi - 1}$ olmasıdır [8].

Teorem 4.4'den faydalanarak Poncelet eğrisi elips olan 4. dereceden Blaschke çarpımları için aşağıdaki teorem verilecektir.

4.7 Teorem: E odakları $a_1 = a$ ve $a_2 = ae^{i\phi}$ olan elips ve B , Poncelet eğrisi bu E elipsi olan 4. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda C_a^ϕ 'nin, 4. dereceden bu B Blaschke çarpımının elipsi olması için gerekli ve yeterli koşul $\phi = \arg(a_2 / a_1)$ ve $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ olmak üzere $|a| = \sqrt{\cos \phi}$ olmasıdır.

İspat: E , 4. dereceden bir B Blaschke çarpımının Poncelet eğrisi olduğundan Teorem 3.3.5'den E 'nin denklemi

$$E: |z - a_1| + |z - a_2| = \left|1 - \overline{a_1}a_2\right| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}}$$

biçimindedir. $0 < r < 1$ olmak üzere C_a^ϕ koniğinin odakları $a_1 = a = re^{i\alpha}$ ve $a_2 = ae^{i\phi} = re^{i(\alpha+\phi)}$ olsun. Teorem 4.4'den odakları a ve $ae^{i\phi}$ olan C_a^ϕ koniğinin asal eksen uzunluğu $2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ olduğundan

$$\left(2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 = \left(\left|1 - \overline{a_1}a_2\right| \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2}{|a_1|^2 |a_2|^2 - 1}}\right)^2$$

olmalıdır. Buradan

$$\left(2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 = \left(\left|1 - \overline{a}ae^{i\phi}\right| \sqrt{\frac{2|a|^2 - 2}{|a|^4 - 1}}\right)^2$$

ve buradan da

$$\left(2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 = \left(\left|1 - r^2 e^{i\phi}\right| \sqrt{\frac{2r^2 - 2}{r^4 - 1}}\right)^2$$

$$(1 - 2r^2 \cos \phi + r^4) \left(\frac{2r^2 - 2}{r^4 - 1} \right) - 2 + 2 \cos \phi = 0 \quad (4.3)$$

bulunur. (4.3) denklemini çözümlerse $\phi = \arg(a_2 / a_1)$ ve $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$|a| = \sqrt{\cos \phi}$$

bulunur.

Tersinin ispatı da benzer şekilde yapılır. \square

4. dereceden herhangi bir B Blaschke çarpımı verildiğinde, birim çember üzerindeki bir λ noktası için $B(z_j) = \lambda$ eşitliğini sağlayan birbirinden farklı dört tane nokta olduğu bilinmektedir [2]. Lemma 4.5'den bu z_j noktaları için $M_a^\phi(z_j) = z_{j+1}$ ve $(M_a^\phi)^4$ 'ün birim dönüşüm olduğu görülür. Teorem 4.4'den $[z, M_a^\phi(z)]$ doğru parçalarının C_a^ϕ koniğine teğet olduğu biliniyor. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

4.8 Sonuç: E odakları a_1 ve a_2 olan elips ve B , Poncelet eğrisi bu E elipsi olan 4. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda $B \circ M = B$ olacak biçimde birimden farklı bir M Möbiüs dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul $\phi = \arg(a_2 / a_1)$ ve $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ olmak üzere $|a_1| = |a_2| = \sqrt{\cos \phi}$ olmasıdır.

Böylece Teorem 3.3.5 ve Sonuç 4.8'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.9 Sonuç: B Poncelet eğrisi, odakları a ve $ae^{i\phi}$ elipsi olan 4. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda $B = B_2 \circ B_1$ biçiminde kendisinden daha düşük

dereceli iki tane Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $B \circ M = B$ olacak şekilde birimden farklı bir M Möbiüs dönüşümünün var olmasıdır.

5. ÜST YARI DÜZLEMDE TANIMLI SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI

Bu bölümde, f (2.2) eşitliğindeki gibi bir dönüşüm ve B , (2.4) eşitliğindeki gibi n . dereceden sonlu bir Blaschke çarpımı olmak üzere

$$\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z) \quad (5.1)$$

biçiminde üst yarı düzlemde tanımlı 2. 3. ve 4. dereceden Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri ele alınacaktır.

İlk olarak üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımları için aşağıdaki teorem verilsin.

5.1 Teorem: $z_k, (1 \leq k \leq n)$ noktaları üst yarı düzlemde birbirinden farklı noktalar ve \tilde{B} üst yarı düzlemde

$$\tilde{B}(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - \bar{z}_k}{z - z_k}$$

biçiminde tanımlı sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda birim çemberin her bir λ noktası için

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = \dots = \tilde{B}(x_n) = \lambda$$

olacak biçimde birbirinden farklı n tane $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ noktaları vardır.

İspat: λ birim çember üzerinde sabit bir nokta ve $\tilde{B}(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - \bar{z}_k}{z - z_k}$

birbirinden farklı n tane sıfırı olan üst yarı düzlemde sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. \tilde{B} , n . dereceden bir rasyonel fonksiyon olduğundan $\tilde{B}(x_j) = \lambda$ denkleminin

katlılıkları da sayılarak n tane kökü vardır. $j, k = 1, 2, \dots, n$ için $\tilde{B}(x_j) = \tilde{B}(x_k)$ olduğunda $x_j \neq x_k$ ve $x_j, x_k \in \mathbb{R}$ olduğu gösterilmelidir. $|\tilde{B}(z_j)| = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $z_j \in \mathbb{R}$ olduğundan, $x_j \neq x_k$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\tilde{B}(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k}$ olduğundan,

$$\ln \tilde{B}(z) = \ln \left(e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \right)$$

elde edilir.

$$\ln \tilde{B}(z) = \ln(e^{i\theta}) + \ln(z - z_1) + \dots + \ln(z - z_n) - \ln(z - \bar{z}_1) - \dots - \ln(z - \bar{z}_n)$$

bulunur. Her iki yanın türevi alınırsa

$$\frac{\tilde{B}'(z)}{\tilde{B}(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} - \frac{1}{z - \bar{z}_1} - \dots - \frac{1}{z - \bar{z}_n}$$

ve böylece

$$\frac{\tilde{B}'(z)}{\tilde{B}(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{z_j - \bar{z}_j}{(z - z_j)(z - \bar{z}_j)}$$

elde edilir. Her $x \in \mathbb{R}$ noktası için $\frac{\tilde{B}'(x)}{\tilde{B}(x)} \neq 0$ 'dır ve buradan da $\tilde{B}'(x) \neq 0$ olduğu

açıktır. Sonuç olarak, λ birbirinden farklı n tane reel öngörüntüye sahiptir. \square

B , n . dereceden (2.4) eşitliğindeki gibi sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. Birim çember üzerindeki bir λ noktası için $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $B(z_j) = \lambda$ olacak şekilde birbirinden farklı birim çember üzerinde n tane nokta olduğu bilinmektedir. Bu z_j noktalarının belirlenmesi ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır [4-9]. İlerleyen alt bölümlerde, birim çember üzerinde bir λ noktası verildiğinde (5.1) biçimindeki n . dereceden herhangi bir \tilde{B} Blaschke çarpımı için

$\tilde{B}(x_k) = \tilde{B}(x_l) = \lambda$ eşitliğini sağlayan reel eksen üzerindeki x_k ve x_l noktaları belirlenecektir.

5.1 Üst Yarı Düzlemde Tanımlı İkinci Dereceden Blaschke Çarpımları

Bu bölümde üst yarı düzlemde tanımlı bazı Blaschke çarpımlarının geometrik özelliklerini içeren aşağıdaki teorem verilsin.

5.1.1 Teorem: α ve θ sabit noktalar ve f , (2.2) eşitliğindeki gibi bir dönüşüm olsun. $Im(a) > 0$ ve $B(z) = z \frac{z - f(a)}{1 - f(a)z}$ olmak üzere

$$\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \frac{e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} - f(a)}{1 - f(a) e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}} \quad (5.2)$$

biçiminde tanımlı olsun. Bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ için x_1 ve x_2

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = \lambda$$

eşitliğini sağlayan birbirinden farklı iki nokta olsun. Bu durumda x_1, x_2, a ve $\bar{\alpha}$ noktaları aynı çember üzerinde bulunur. Tersine C, a ve $\bar{\alpha}$ noktalarından geçen herhangi bir çember ise C çemberinin reel eksenini kestiği x_1 ve x_2 noktaları için $\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2)$ 'dir.

İspat: Herhangi bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ için x_1 ve x_2

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = \lambda$$

eşitliğini sağlayan birbirinden farklı iki nokta olsun. \tilde{B} 'nın tanımından

$$B(f(x_1)) = B(f(x_2)) = \lambda$$

olduğu biliniyor. Teorem 3.1.1'den $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarını birleştiren L doğrusu $f(a)$ noktasından geçer. Buradan L doğrusunun f^{-1} dönüşümü altındaki görüntüsü x_1, x_2 ve a noktalarından geçen çemberdir. $f(x_1), f(x_2)$ ve $f(a)$ noktalarından geçen doğru ∞ noktasından geçtiğinden x_1, x_2 ve a noktalarından geçen C çemberi $\bar{\alpha}$ noktasını da içermelidir.

Tersine C , a ve $\bar{\alpha}$ noktalarından geçen herhangi bir çember olsun. $\text{Im}(a) > 0$ ve $\text{Im}(\bar{\alpha}) < 0$ olduğundan C reel eksenini x_1 ve x_2 gibi iki noktada keser. $z_1 = f(x_1)$ ve $z_2 = f(x_2)$ olsun (burada $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ 'nin $e^{i\theta}$ 'ya eşit olamayacağına dikkat ediniz). $\bar{\alpha} \in C$ olduğundan $f(C)$ 'nin görüntüsü $f(a)$ noktasından geçen doğrudur. Teorem 3.1.1'den $B(z_1) = B(z_2)$ ve böylece

$$B(f(x_1)) = B(f(x_2))$$

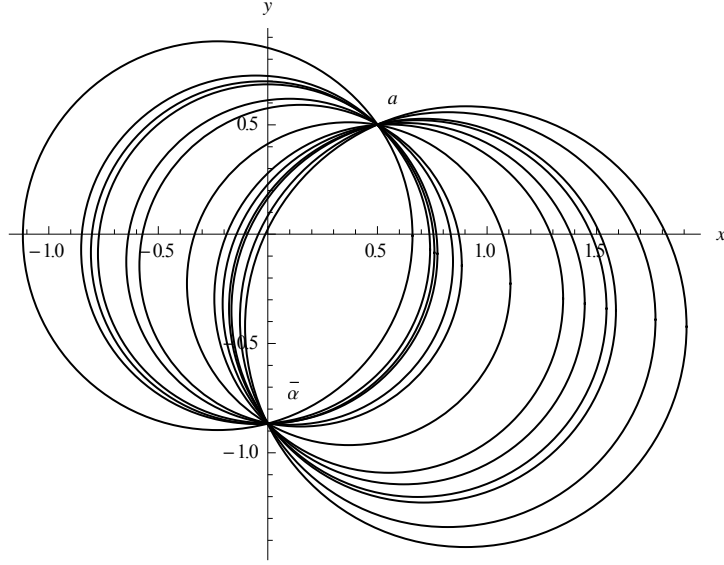
olur. Sonuç olarak,

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2)$$

elde edilir. \square

5.1.2 Örnek: $\alpha = \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ve $\tilde{B}(z)$, (5.2) eşitliğindeki gibi

üst yarı düzlemde tanımlı sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda Teorem 5.1.1'den bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ için a ve $\bar{\alpha}$ noktalarından geçen çemberin reel eksenini kestiği x_1 ve x_2 noktalarında $\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2)$ olur (Şekil 5.1).



Şekil 5.1: $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$, $\alpha = i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ için 2. dereceden $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımı.

5.2 Üst Yarı Düzlemde Tanımlı Üçüncü Dereceden Blaschke Çarpımları

Şimdi üst yarı düzlemde tanımlı 3. dereceden Blaschke çarpımları için aşağıdaki teorem verilecektir.

5.2.1 Teorem: f , (2.2) eşitliğindeki gibi bir dönüşüm ve

$$B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z}, |a_1|, |a_2| < 1 \text{ olmak üzere } \tilde{B}(z) = (B \circ f)(z) \text{ olsun. Bir } \lambda \in \partial\mathbb{D}$$

noktası için x_1 ve x_2

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = \lambda$$

eşitliğini sağlayan birbirinden farklı iki reel nokta olsun. Bu durumda x_1, x_2 ve $\overline{\alpha}$ noktalarından geçen C çemberi

$$F : \left| w(e^{i\theta} - a_1) + a_1 \bar{\alpha} - e^{i\theta} \alpha \right| + \left| w(e^{i\theta} - a_2) + a_2 \bar{\alpha} - e^{i\theta} \alpha \right| - \left| w(1 - \bar{a}_1 a_2) + \bar{a}_1 a_2 \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \right| = 0 \quad (5.3)$$

eğrisine teğettir. Tersine F eğrisinin her noktası, $\bar{\alpha}$ ve reel eksen üzerindeki x_1, x_2 noktalarından geçen çemberin teğet değme noktasıdır. Ayrıca bu x_1 ve x_2 noktalarında $\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2)$ 'dir.

İspat: Herhangi bir $\lambda \in \partial \mathbb{D}$ noktası için x_1 ve x_2

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = \lambda$$

eşitliğini sağlayan birbirinden farklı iki nokta olsun. \tilde{B} 'nin tanımından

$$B(f(x_1)) = B(f(x_2))$$

olur. Teorem 3.2.1'den $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarını birleştiren L doğrusu

$$E : |z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \bar{a}_1 a_2|$$

elipsine teğettir. Buradan L doğrusunun f^{-1} dönüşümü altındaki resmi x_1, x_2 ve $\bar{\alpha}$ noktalarından geçen çemberdir. Bu çember $f^{-1}(E)$ eğrisine teğettir. $f^{-1}(E) = F$ denirse F 'nin denkleminin (5.3) eşitliğindeki gibi olduğu kolayca görülür.

Tersine C , $\bar{\alpha}$ noktasından geçen ve F eğrisine teğet olan herhangi bir çember olsun. Bu durumda C 'nin reel eksenini x_1 ve x_2 gibi iki noktada kestiği açıktır. $z_1 = f(x_1)$ ve $z_2 = f(x_2)$ olsun (burada $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ 'nin $e^{i\theta}$ 'ya eşit olamayacağına dikkat ediniz). $\bar{\alpha} \in C$ olduğundan $f(C)$, $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarından geçen ve $f(F)$ eğrisine teğet olan bir doğrudur. Teorem 3.2.1'den $B(z_1) = B(z_2)$ yani $B(f(x_1)) = B(f(x_2))$ olur. Buradan da

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2)$$

elde edilir. \square

[20] ve [21] numaralı kaynaklardan, $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ ve $c \neq 0$ olmak üzere

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

dönüşümü altında elipslerin görüntüsünün elips olamayacağı biliniyor. Buradan,

$$f^{-1}(z) = \frac{z\bar{\alpha} - e^{i\theta}\alpha}{z - e^{i\theta}}$$
 dönüşümü altında $|z - a_1| + |z - a_2| = |1 - \bar{a}_1 a_2|$ elipsinin

görüntüsünün elips olamayacağı açıktır.

5.2.2 Örnek: $\alpha = \frac{i\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{i}{2}, f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$ ve

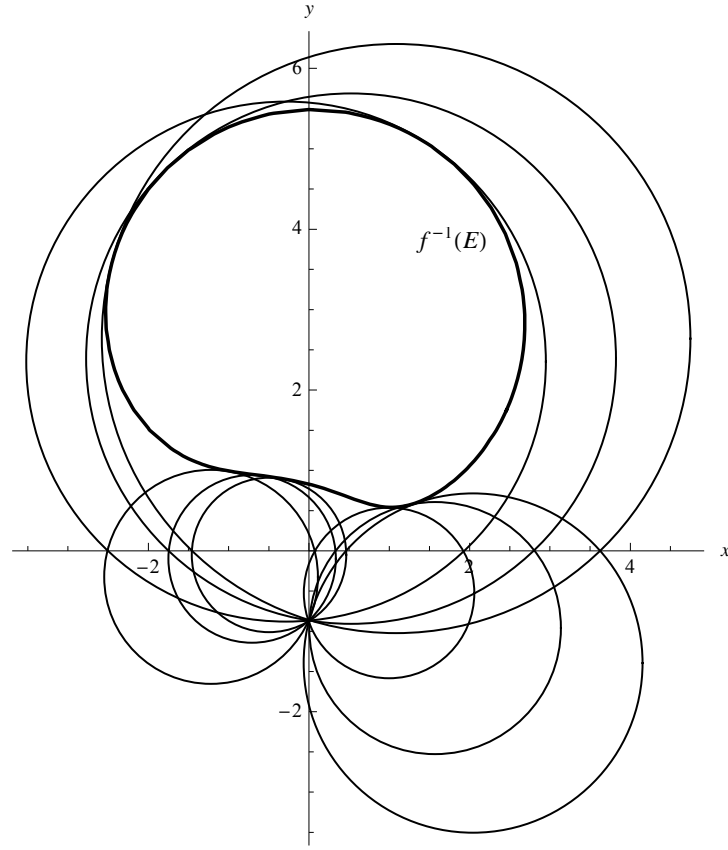
$$B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$$
 olmak üzere $\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z)$ olsun. Bir $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ noktası için

$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = \tilde{B}(x_3) = \lambda$ eşitliğini sağlayan birbirinden farklı üç tane x_1, x_2, x_3 reel noktalarının olduğu açıktır. Bu durumda x_1, x_2 ve $\bar{\alpha}$ noktalarından geçen çember

$$F : \left| w \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{i\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \frac{i\sqrt{3}}{2} \right| + \left| w \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \frac{i\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$- \left| w \left(1 - \frac{i}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right| = 0$$

eğrisine teğettir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2: $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = i\frac{1}{2}, \alpha = i\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ için 3.dereceden $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımı.

5.3 Üst Yarı Düzlemde Tanımlı Dördüncü Dereceden Blaschke Çarpımları

Bu bölümde üst yarı düzlemde tanımlı 4. dereceden bazı Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri ele alınacaktır.

B , 4. dereceden Poncelet eğrisi elips olan bir Blaschke çarpımı ve f (2.2) eşitliğindeki gibi bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z)$ biçimindeki $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımının üst yarı düzlemde tanımlı 4. dereceden bir Blaschke çarpımı olduğu açıktır. $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{i}{3}, \alpha = \frac{i\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ için $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$ ve

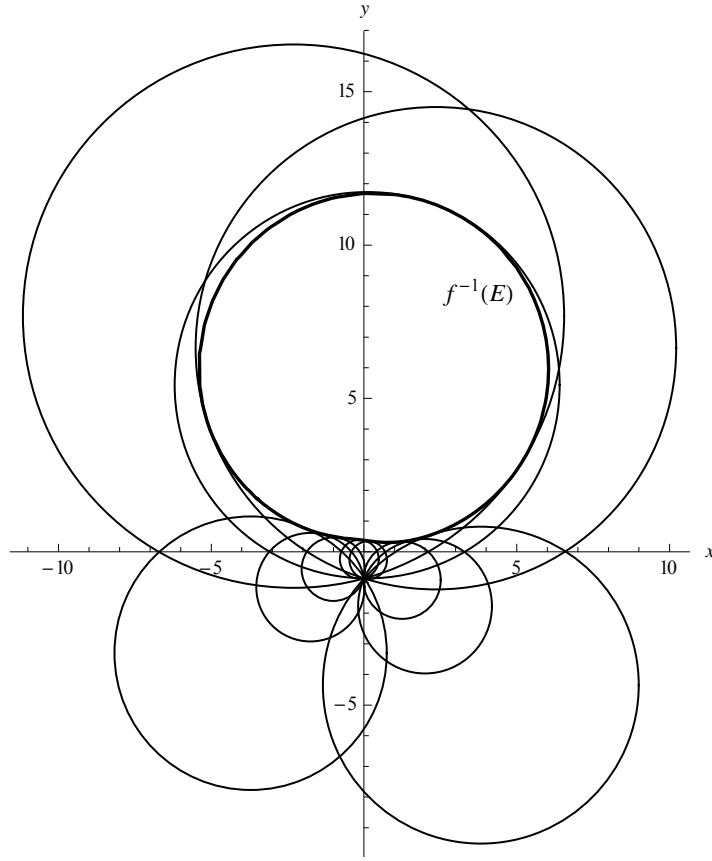
$$B(z) = \frac{z(-3i + (5 + 5i)z)(1 - (3 - 3i)z - 9iz^2)}{(-3 + z)(-3i + z)(-5 - 5i + 3z)}$$
 olmak üzere $\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z)$ olsun.

Bölüm 5.2'de uygulanan benzer adımlar $\tilde{B}(z)$ 'ye uygulanırsa aşağıdaki şekil elde edilir. Burada $f^{-1}(E)$ eğrisinin denklemi

$$\left| w \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \right) - i \frac{\sqrt{3}}{6} - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| w \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) i \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$- \left| \left(w + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \left(1 - \frac{i}{6} \right) \sqrt{\frac{59}{35}} \right| = 0$$

biçimindedir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3: $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = i\frac{1}{3}, \alpha = i\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ için 4. dereceden $\tilde{B}(z)$ Blaschke çarpımı.

Şimdi Teorem 3.3.13 kullanılarak üst yarı düzlemde tanımlı 4. dereceden Blaschke çarpımları için geçerli olan aşağıdaki teorem verilsin.

5.3.1 Teorem: a_1, a_2, a_3 birbirinden ve sıfırdan farklı birim çember içinde üç

nokta ve $B(z) = z \prod_{j=1}^3 \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}$ biçiminde sıfırdan farklı sıfırları aşağıdaki eşitliği

sağlayan 4. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun.

$$a_1 + \overline{a_1}a_2a_3 = a_2 + a_3.$$

f , (2.2) eşitliğindeki gibi bir dönüşüm olmak üzere $\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z)$ olsun. Eğer K , $f^{-1}(a_1)$ ve $\bar{\alpha}$ noktalarından geçen herhangi bir çember ise K 'nin reel eksenini kestiği x_1 ve x_2 noktalarında $\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2)$ 'dir.

İspat: Teorem 3.3.13'ün ispatından $B(z)$ 'nin $B_1(z) = z \frac{z - a_1}{1 - a_1 z}$ ve $B_2(z) = z \frac{z + a_2 a_3}{1 + a_2 a_3 z}$ olmak üzere

$$B(z) = (B_2 \circ B_1)(z)$$

biçiminde iki tane 2. dereceden Blaschke çarpımının bileşkesi olarak yazılabileceği bilinmektedir. $f^{-1}(a_1)$, $\bar{\alpha}$ ve x_1, x_2 noktalarından geçen herhangi bir K çemberi için x_1, x_2 noktalarında K çemberi reel eksenini keser ve $z_1 = f(x_1)$, $z_2 = f(x_2)$ olsun. $\bar{\alpha} \in K$ olduğundan, $f(K)$ a_1 noktasından geçen bir doğrudur ve Teorem 3.1.1'den $B_1(z_1) = B_1(z_2)$ buradan da $B_1(f(x_1)) = B_1(f(x_2))$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\tilde{B}(x_1) = B_2(B_1(f(x_1))) = B_2(B_1(f(x_2))) = \tilde{B}(x_2)$$

bulunur. \square

5.3.2 Örnek: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3} - i\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{3}{65} + i\frac{24}{65}$, $\alpha = i\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ve $f^{-1}(z)$

(2.3) eşitliğindeki gibi bir dönüşüm olmak üzere $B(z) = z \prod_{j=1}^3 \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$ ve

$\tilde{B}(z) = (B \circ f)(z)$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(a_1) = 0.371154 + i0.571429$ ve $\bar{\alpha} = -i\frac{1}{2}$ noktalarından geçen $0.185577 + i0.035714$ merkezli 0.566947 yarıçaplı çember reel eksenini $x_1 = -0.380244$ ve $x_2 = 0.751398$ noktalarında keser. Bu x_1 ve x_2 noktaları için

$$\tilde{B}(x_1) = \tilde{B}(x_2) = 0.855077 - i0.465445$$

dir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Blaschke çarpımları ilk kez W. Blaschke tarafından 1915’de yayınlanan bir makalede ortaya çıkmıştır.

Bu tezin ilk iki bölümünde konu ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Sonraki üç bölümünde ise birim diskte tanımlı sonlu Blaschke çarpımları ile altın oran ve altın çokgenler arasındaki bağlantı, birim diskte tanımlı 2. 3. ve 4. dereceden Blaschke çarpımlarının ayrışımı ve üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının geometrik özellikleri ele alınmıştır.

7. KAYNAKLAR

- [1] Blaschke, W., *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen* *Berichte Math.-Phys.Kl.*, Sachs. Gesell. der Wiss. Leipzig, 194-200, (1915).
- [2] Daepf, U., Gorkin P. and Mortini R., “Ellipses and finite Blaschke products”, *Amer. Math. Monthly* 109 (9), 785-795 (2002).
- [3] Gorkin, P. and Skubak, E., “Polynomials, ellipses, and matrices: two questions, one answer”, *Amer. Math. Monthly* 118 (6), 522-533, (2011).
- [4] Özgür, N. Y., “Finite Blaschke products and circles that pass through the origin”, *Bull. Math. Anal. Appl.*, 3 (3), 64-72, (2011).
- [5] Özgür, N. Y., “Some geometric properties of finite Blaschke products”, *Proceedings of the Conference RIGA 2011*, Ed. Univ. București, Bucharest, 239-246, (2011).
- [6] Fujimura, M., “Inscribed ellipses and Blaschke products”, *Comput. Methods Funct. Theory*, 13 (4), 557-573, (2013).
- [7] Gau, H. L. and Wu, P. Y., “Numerical range and Poncelet property”, *Taiwanese J. Math.* 7 (2), 173-193, (2003).
- [8] Frantz, M., “How conics govern Möbius transformations”, *Amer. Math. Monthly*, 111 (9), 779-790, (2004).
- [9] Daepf, U., Gorkin P. and Voss K., “Poncelet's theorem, Sendov's conjecture, and Blaschke products”, *J. Math. Anal. Appl.*, 365 (1), 93-102, (2010).
- [10] Mashreghi, J., “Expanding a finite Blaschke product”, *Complex Var. Theory Appl.*, 47 (3), 255-258, (2002).
- [11] Ford, L. R., *Automorphic Functions*, New York: Chelsea Publishing Company, (1951).

- [12] Blair, D., *Inversion Theory and Conformal Mapping*, Providence, RI: American Mathematical Society, (2010).
- [13] Jones, G. A. and Singerman, D., *Complex Functions an Algebraic and Geometric Viewpoint*, New York: Cambridge University Press, (1987).
- [14] Needham, T., *Visual Complex Analysis*, New York: Oxford University Press, (1997).
- [15] Başkan, T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, (2005).
- [16] De U. C., *Complex Analysis*, Kolkata: U. N. Dhur & Sons Private Ltd., (2009).
- [17] Koshy T., *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience, New York, (2001).
- [18] Daepp, U., Gorkin P., Shaffer A., Sokolowsky B. and Voss, K., “Decomposing finite Blaschke products”, *J. Math. Anal. Appl.*, 426 (2), 1201-1216, (2015).
- [19] Craighead, R. L. And Carroll, F., W., “A Decomposition of finite Blaschke products” *Complex Variables Theory Appl.*, 26 (4), 333-341, (1995).
- [20] Coffman A. and Frantz M., “Ellipses in the inversive plane”, *MAA Indiana Section Meeting*, Butler University, (2003).
- [21] Coffman A. and Frantz M., “Möbius transformations and ellipses”, *The Pi Mu Epsilon Journal*, 6 (12), 339-345, (2007).
- [22] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Mathematica Online Standard (Academic) Monthly Subscription, Champaign, IL, (2015).