T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜZEYLER ÜZERİNDE BAZI ÖZEL EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DERYA BAYRIL AYKUT

BALIKESİR, MAYIS - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜZEYLER ÜZERİNDE BAZI ÖZEL EĞRİLER

YÜKSEK LISANS TEZI

DERYA BAYRIL AYKUT

BALIKESİR, MAYIS - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Derya BAYRIL AYKUT tarafından hazırlanan **"YÜZEYLER ÜZERİNDE BAZI ÖZEL EĞRİLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 21.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR	....
Üye Doç. Dr. İlhan KARAKILIÇ	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

YÜZEYLER ÜZERİNDE BAZI ÖZEL EĞRİLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
DERYA BAYRIL AYKUT
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, MAYIS - 2015

Bu çalışmada reel uzay formunda tanjant ve normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip eğriler incelenmiştir. Daha sonra yüzey üzerinde bir eğrinin biharmonik olması için gerek ve yeter koşullar ifade ve ispat edilerek, dönel yüzeyler üzerinde biharmonik eğriler incelenmiştir. Son olarak dönel yüzeyler üzerinde biminimal eğriler çalışılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde gerekli bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde reel uzay formunda tanjant ve normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip eğriler karakterizasyonu verilmiştir.

Dördüncü bölümde dönel yüzeyler üzerinde biharmonik eğriler incelenerek bu tür eğrilere örnekler verilmiştir.

Son bölümde ise dönel yüzey üzerinde biminimal eğriler incelenerek sınıflandırılması yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Harmonik ortalama eğrilik vektör alanı, has ortalama eğrilik vektör alanı, dönel yüzey, biharmonik eğri, biminimal eğri.

ABSTRACT

SOME SPECIAL CURVES ON SURFACES
MSC THESIS
DERYA BAYRIL AYKUT
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF.DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, MAY 2015

In this thesis, we study curves in reel space form with proper mean curvature vector field and harmonic mean curvature vector field in the tangent and normal bundle. We also study biharmonic and biminimal curves on a surface, especially surface of revolution.

This thesis consist of five chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, we give some basic definitions and notions.

In the third chapter, the classification of curves in reel space form with proper mean curvature vector field in the tangent and normal bundle is given.

In the fourth chapter, we investigate biharmonic curves on a surface of revolution and we give some examples about this kind of curves.

In the last chapter, we study biminimal curves on a surface of revolution and we classify biminimal curves in a surface of revolution.

KEYWORDS: Harmonic mean curvature vector field, proper mean curvature vector field, surface of revolution, biharmonic curve, biminimal curve.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER iii
ŞEKİL LİSTESİ iv
SEMBOL LİSTESİ v
ÖNSÖZ vi
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. REAL UAY FORMLARINDA HELİSLER VE CORNU SPIRALLERİN BİR KARAKTERİZASYONU 10
3.1 Has Ortalama Eğrilik Vektörüne Sahip Eğriler…………………………..11
3.2 Normal Demette Has Ortalama Eğrilik Vektörüne Sahip Eğriler…………….14
4. YÜZEY ÜZERİNDE BİHARMONİK EĞRİLER 19
4.1 Dönel Yüzeylerde Biharmonik Eğriler…………………………………21
4.1.1 Gauss Eğriliği Sabit Olmayan Dönel Yüzeylerde Biharmonik Eğri Örnekleri……………………………………………………………..23
4.1.2 Sabit (Pozitif) Gauss Eğrilikli Dönel Yüzeylerde Biharmonik Eğriler…….25
5. RIEMANN MANİFOLDLARINDA BİMİNİMAL EĞRİLER 32
5.1 Dönel Yüzeylerde Biminimal Eğriler……………………………………..35
5.1.1 Gauss Eğriliği Sabit Olmayan Dönel Yüzeylerde Biminimal Eğri Örnekleri……………………………………………………………..42
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 50
7. KAYNAKLAR 51

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1: Yukarıdaki f ve g fonksiyonlarına karşılık gelen dönel yüzey.........23
Şekil 4.2: $a=3$ ve $r=1$ için elde edilen tor yüzeyi üzerindeki geodezik olmayan biharmonik eğri. 24
Şekil 4.3: Birim küre üzerindeki biharmonik eğriler......................................31
Şekil 5.1: $a=3$ ve $r=1$ için elde edilen tor yüzeyi üzerindeki $\lambda=1/4$ için bulunan biminimal eğri. 43
Şekil 5.2: $c=2$ için elde edilen *Katenoid* yüzeyi üzerindeki $\lambda=-1/8$ için bulunan biminimal eğriler. 45
Şekil 5.3: $a=1$ için elde edilen dönel yüzey üzerindeki $\lambda=-3$ için bulunan biminimal eğri……………………………………………………49

SEMBOL LİSTESİ

M	:	Manifold
∇	:	Riemann koneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	:	Normal demette Riemann koneksiyonu
$K(\prod)$	:	Kesitsel eğrilik
T_pM	:	Tanjant vektör uzayı
$N^m(c)$	:	m boyutlu, c sabit kesitsel eğrilikli reel uzay formu
Δ	:	Laplas opertörü
$\Delta^{\perp}$	:	Normal demette Laplas opertörü
H	:	Ortalama eğrilik vektör alanı
$E(f)$	:	f nin enerji fonksiyoneli
$E_2(f)$	:	f nin bienerji fonksiyoneli
$\tau(f)$	:	f nin gerilim alanı
$\tau_2(f)$	:	f nin bigerilim alanı
k_1, k_g	:	geodezik eğrilik
k_n	:	normal eğrilik
τ_g	:	geodezik torsiyon

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında bilimsel anlamda ilgi ve sabrının yanında tecrübelerinden de faydalandığım kıymetli danışmanım Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR'e çok teşekkür ederim.

Akademik hayata başlangıç sürecimde özel zamanlarından fedakârlık ederek çalışmalarımı sürekli kontrol edip beni motive eden sevgili hocam Yrd.Doç.Dr. Sedef Erim KARAKILIÇ'a, hiçbir konuda desteklerini esirgemeyen aileme, abim Dr.Durmuş UÇAR'a, sevgili eşim Arş. Gör. Muhammet AYKUT'a ve oda arkadaşım Arş. Gör. Nihal TAŞ'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmalarım için maddi desteğinden dolayı TUBİTAK BİDEB'e teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Harmonik dönüşümler üzerine ilk çalışma J.Eells ve J.H.Sampson tarafından 1964 yılında yapılmıştır [1]. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve $f:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere, f dönüşümü enerji fonksiyoneli $E(f)=\frac{1}{2}\int_M |df|^2 v_g$ nin bir kritik noktasıysa dönüşüm harmonik olarak adlandırılır. Enerji fonksiyoneline karşılık gelen Euler-Lagrange denkleminde gerilim alanı yok olmaktadır. Dönüşüm bienerji fonksiyoneli $E_2(f)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(f)|^2 v_g$ nin bir kritik noktasıysa biharmonik olarak tanımlanmaktadır. Biharmonik dönüşüm denklemi G.Y.Jiang tarafından 1986 yılında bienerji fonksiyonu $E_2(f)$ nin Euler-Lagrange denklemi $\tau_2(f)=0$ hesaplanarak elde edilmiştir [2]. Buradan harmonik olan bütün dönüşümlerin biharmonik olduğu açıktır. Harmonik olmayan biharmonik dönüşümler has biharmonik olarak adlandırılır.

Birçok geometrici yıllardır harmonik ve biharmonik altmanifoldlar üzerine çalışma yapmaktadırlar. Örnegin [3-8]. Reel uzay formu $N^m(c)$ de bir eğri α nın ortalama eğrilik vektör alanı H, $\Delta H=\lambda H$ $\lambda\in\mathbb{R}$ denklemini sağlıyorsa has ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir denir [9]. Özel olarak $\Delta H=0$ ise eğri harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir denir. $N^m(c)=E^n$ olmak üzere $\Delta H=0$ ise eğri Chen anlamında biharmoniktir [10].

Biminimal immersiyonlar E.Laubeau ve S.Montaldo tarafından 2008 yılında tanımlanmıştır. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve $f:(M,g)\to(N,h)$ bir isometrik immersiyon olmak üzere eğer $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ için $[\tau_2,\lambda]^{\perp}=[\tau_2]^{\perp}-\lambda[\tau]^{\perp}=0$ ise f immersiyonuna biminimaldir denir [11]. $\lambda=0$ olma durumunda immersiyon serbest biminimal olarak adlandırılır. İsometrik bir immersiyon için biminimal olma durumu biharmonik olma durumundan daha zayıf bir özelliktir.

Bu çalışmada ilk olarak tanjant ve normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip eğriler [9], yüzeyler ve özel olarak dönel yüzeyler üzerinde biharmonik eğriler [3] incelenecektir. Daha sonra Riemann manifoldunda bir eğrinin biminimal olması için gerek ve yeter koşullar ifade edilecektir [11]. Bu çalışmalardan yola çıkılarak dönel yüzeyler üzerinde sabit geodezik eğrilikli fakat geodezik olmayan $(k_1 = sabit \neq 0)$ biminimal eğriler incelenecek ve bir dönel yüzeyin bütün paralellerinin biminimal eğriler olması için gerek ve yeter koşullar ifade ve ispat edilecektir. Son olarak Gauss eğriliği sabit olmayan dönel yüzeylerde biminimal eğri örnekleri verilecektir. Çalışmadaki şekillerin çiziminde Matematica programından faydalanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 $[12]$. (M,g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere $\nabla:\chi(M)\times\chi(M)\xrightarrow{2-lineer}\chi(M)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise ∇'ya M üzerinde *Riemann koneksiyonu* denir. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$, $\forall f,g\in C^{\infty}(M,R)$ için,

$i)$ $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$,

$ii)$ $\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$,

$iii)$ $\nabla_X(fY)=X[f]Y+f\nabla_X Y$,

$iv)$ $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$,

$v)$ $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$.

Tanım 2.2 $[12]$. (M,g) bir Riemann manifoldu, ∇ M üzerindeki Riemann koneksiyonunu göstermek üzere

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1,3)-tensör alanına M nin Riemann eğrilik tensör alanı adı verilir. $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ olarak tanımlanan tensör alanına M nin *Riemann - Christoffel eğrilik tensörü* alanı adı verilir.

Tanım 2.3 [12]. (M,g) bir Riemann manifoldu, ve boy $(M) \geq 2$ olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı $\prod$ olmak üzere $v,w \in \prod$ tanjant vektörleri için Al alan fonksiyonu

$$Al(v,w) = g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2$$

biçiminde tanımlansın. Böylece $Al(v,w) \neq 0$ ise

$$K(v,w) = \frac{g(R(v,w)w,v)}{Al(v,w)^2}$$

ile tanımlanan K ya $\prod$ nin *kesitsel eğriliği* denir ve $K(\prod)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 [12]. (M,g) bir Riemann manifoldu, ve boy$(M) \geq 2$ olsun. Eğer M nin kesitsel eğriliği K bütün $\prod \subset T_pM$ altdüzlemleri için $\forall p \in M$ noktasında sabit ise *M ye sabit kesitsel eğrilikli uzay* denir.

Tanım 2.5 [12]. Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara *reel uzay form* adı verilir ve m-boyutlu bir N uzay formu $N^m(c)$ ile gösterilir.

Eğer;

$c = 0$ ise $N_m(c) \cong E^m$ Öklid uzayı,

$c = \dfrac{1}{r^2}$ ise $N_m(c) \cong S^m(r)$ küresi,

$c = -\dfrac{1}{r^2}$ ise $N_m(c) \cong H^m(r)$ Hiperbolik uzaydır.

Tanım 2.6 $[13]$. M^n ve N^m $m \geq n$ diferansiyellenebilir iki manifold ve bir $f : M^n \xrightarrow{C^\infty} N^m$ dönüşümü alalım. f nin türev dönüşümü f_* ın birebir, yani $rank(J(f))) = n$, olduğunu kabul edelim. Bu durumda f ye bir *immersiyon* adı verilir. Eğer f birebir ise f ye *imbedding* denir.

Tanım 2.7 $[13]$. M^n ve N^m $m \geq n$ diferansiyellenebilir iki manifold ve bir $f : M^n \xrightarrow{C^\infty} N^m$ dönüşümü alalım. f nin türev dönüşümü f_* tanjant vektörlerde iç çarpım yapısını koruyorsa f *isometrik immersiyon* adını alır. Eğer f birebir ise f ye *isometrik imbedding* denir.

Tanım 2.8 $[13]$. (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları olmak üzere $M \subseteq N$ olsun. Eğer $f : M \to N$ bir immersiyon ise M ye N nin bir *immersed altmanifoldu* adı verilir. Eğer f bir imbedding ise M ye N nin bir *imbedded altmanifoldu* adı verilir.

Tanım 2.9 $[14]$. M ve $\tilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\tilde{M}$ nın altmanifoldu ve ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M ve $\tilde{M}$ da kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y) \tag{2.1}$$

biçiminde *Gauss eşitliği* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2.1) ile tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Eğer $h=0$ ise M ye *total geodezik altmanifold* adı verilir.

Tanım 2.10 [9]. [15]. [16]. E^m m boyutlu öklid uzayı olmak üzere $x: M^n \to E^m$ bir isometrik immersiyon ve (M^n, x) 'in Laplas operatörü Δ olsun. O zaman Beltrami formülü aşağıdaki gibidir:

$$\Delta x = -nH.$$

Burada H, (M^n, x) in ortalama eğrilik vektörüdür. Chen aşağıdaki eşitliği [15] nolu kaynakta ispatlamştır .

$$\Delta H = -\sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} H - \bar{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_i} H) \tag{2.2}$$

burada $\bar{\nabla}$, E^m üzerindeki koneksiyon, ∇, (M^n, x) 'in Riemannian koneksiyonu ve $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ de (M^n, x) 'e teğet olan orthonormal bazdır. Herhangi bir Riemannian manifoldunda isometrik immersiyon $x: M^n \to \bar{M}^m$ için ortalama eğrilik vektörünün Laplas operatörü yukarıdaki gibi tanımlanır [16]. Burada $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerindeki Riemann koneksiyonudur. Aynı zamanda normal demetteki ortalama eğrilik vektörünün Laplas operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$\Delta^{\perp} H = -\sum_{i=1}^{n} (\nabla^{\perp}{}_{E_i} \nabla^{\perp}{}_{E_i} H - \nabla^{\perp}{}_{\nabla_{E_i} E_i} H) . \tag{2.3}$$

Burada $\nabla^{\perp}$, normal demetteki koneksiyondur.

3-boyutlu bir Riemann manifoldu M üzerinde $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı eğrisinin H ortalama eğrilik vektör alanının *(tanjant demette) Laplas'ı* hesaplanırsa

$$\Delta H = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T$$

ve *normal demette Laplas'ı*

$$\Delta^{\perp} H = -\nabla^{\perp}{}_T \nabla^{\perp}{}_T \nabla^{\perp}{}_T T$$

olarak elde edilir [9].

Tanım 2.11 $[9]$. Sabit eğrilikli reel uzay formu $N^m(c)$ de birim hızlı bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ eğrisinin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\Delta H = \lambda H, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

denklemini sağlıyorsa α ya *has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir. Özel olarak, $\Delta H = 0$ ise α ya *harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir.

M n boyutlu bir Riemann manifoldu ve $N^m(c)$ m boyutlu sabit kesitsel eğrilikli reel uzay formu olmak üzere $f : M \to N^m(c)$ bir isometrik immersiyon olsun. O halde

$$\tau(f) = mH$$

ve

$$\tau_2(f) = -m\Delta H + cm^2 H$$

dir. Böylece f nin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta H = cmH$$

olur. Chen 1991 yılında biharmonik altmanifoldlar için farklı bir tanım vermiştir. Öklid uzayında bir altmanifoldun Chen anlamında biharmonik olması $\Delta H = 0$ olması olarak tanımlanmıştır [10]. $c = 0$ olması durumunda her iki tanım birbirine denktir.

Tanım 2.12 $[9]$. Sabit eğrilikli reel uzay formu $N^m(c)$ de birim hızlı bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ eğrisinin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\Delta^{\perp} H = \lambda H, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

denklemini sağlıyorsa α ya *normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir. Özel olarak, $\Delta^{\perp} H = 0$ ise α ya *normal demette harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir.

Tanım 2.13 [1]. (M,g) ve (N,h) Riemannian manifoldları ve $f:(M,g)\to(N,h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. f nin enerji fonksiyoneli aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M |df|^2 v_g .$$

Eğer f enerji fonksiyoneli $E(f)$ nin bir kritik noktasıysa f *harmonik* olarak adlandırılır.

Eğer f bienerji fonksiyoneli $E_2(f)$ nin bir kritik noktasıysa f *biharmonik dönüşüm* olarak adlandırılır.

$$E_2(f)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(f)|^2 v_g$$

Burada $\tau(f)$, f nin gerilim alanıdır ve $\tau(f)=tr\nabla df$ olarak tanımlanır. Bienerji fonksiyoneli $E_2(f)$ nin Euler-Lagrange denklemi biharmonik dönüşüm denklemini verir. Bienerji fonksiyoneli $E_2(f)$ 'ye karşılık gelen Euler-Lagrange denklemi Jiang tarafından $[2]$ nolu kaynakta aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\tau_2(f)=-(\Delta^f\tau(f)-trR^N(df,\tau(f))df)=0 .$$

Tanım 2.14 $[17]$. $M\subset\mathbb{R}^n$ yönlendirilmiş regüler bir yüzey ve $\alpha:(a,b)\longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. α nın *geodezik eğriliği* k_g

$$\alpha''(s)^T=k_g(s)U\times\alpha'(s),\ a<s<b$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha''(s)^T$ eğrinin ikinci türevinin tanjant kısmını ve U birim normal vektörü göstermektedir.

Tanım 2.15 $[17]$. $M \subset \mathbb{R}^3$ yönlendirilmiş regüler bir yüzey, U yüzey birim normal vektörü, u_p yüzey üzerinde p noktasında bir tanjant vektör olmak üzere birim hızlı $\alpha:(a,b)\longrightarrow M$ eğrisinin $\alpha(s)=p$ noktasındaki *normal eğriliği* k_n

$$k_n[\alpha](s)=k(u_p)$$

olarak tanımlanır. Burada $k(u_p)$ M nin u_p yönündeki normal eğriliğini göstermektedir.

Tanım 2.16 $[17]$. $M \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve $\alpha:(a,b)\to M$ bir eğri olsun. α eğrisi üzerine kurulmuş Darboux çatısından elde edilen Darboux denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$T' = k_g t + k_n u$$

$$t' = -k_g T + \tau_g u$$

$$u' = -k_n T - \tau_g t$$

Burada k_n normal eğrilik, k_g geodezik eğriliği göstermektedir ve bu denklemleri sağlayan τ_g *geodezik torsiyon* olarak adlandırılır.

Tanım 2.17 $[11]$. $f:(M^m,g)\to(N^n,h)$, $m\le n$ immersiyonu verilsin. Eğer $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ için

$$\left[\tau_2,\lambda\right]^{\perp}=\left[\tau_2\right]^{\perp}-\lambda\left[\tau\right]^{\perp}=0 \tag{2.4}$$

ise f immersiyonuna *biminimal*dir denir. Burada $[\ ]^{\perp}$, $[\ ]$ 'nın dik tümleyenini göstermektedir. Eğer $\lambda=0$ ise f immersiyonuna *serbest biminimal* denir.

3. REAL UZAY FORMLARINDA HELİSLER VE CORNU SPIRALLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde reel uzay formu $N^m(c)$ de tanjant ve normal demette has ortalama eğrilik vektörüne sahip eğriler incelenecektir.

Sabit kesitsel eğriliği c ve boyutu m olan $N^m(c)$ reel uzay formunda bir birim hızlı $\alpha = \alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ eğrisi düşünülsün. α 'nın birim teğet vektör alanı $T = T(s) = E_1$ ile gösterilir ve $k_1(s) = \left\|\bar{\nabla}_T T\right\|$ dir. $k_1(s) = 0$ ise o zaman α bir geodeziktir. $k_1(s) \neq 0$ ise

$$\bar{\nabla}_T T(s) = k_1(s) E_2(s) \tag{3.1}$$

olacak şekilde $T = E_1$ 'e dik olan bir birim vektör E_2 tanımlanabilir. Burada $\bar{\nabla}$ $N^m(c)$ üzerindeki Levi –Civita koneksiyonunu gösterir. Şimdi $\delta \in$ Span $\{E_1, E_2\}^{\perp}$ olmak üzere $E_2' = -k_1 T + \delta$ şeklinde yazılabilen $E_2' = \bar{\nabla}_T E_2$ 'i düşünülsün. Eğer δ tamamen sıfırsa $[18]$ nolu kaynağı kullanarak boyutlar farkını düşürebiliriz ve α bir düzlem eğrisi olur. Yani α , $N^m(c)$ 'nin total geodezik yüzeyi olan $N^2(c)$ 'nin içinde bulunur. Eğer δ sıfırdan farklı ise

$$\bar{\nabla}_T E_2(s) = -k_1(s) T(s) + k_2(s) E_3(s) \tag{3.2}$$

olacak şekilde $E_1 = T(s)$ ve E_2 'ye dik olan bir birim vektör E_3 ve pozitif tanımlı $k_2(s)$ fonksiyonu bulunabilir.

Benzer şekilde devam edilirse α 'nın total geodezik d boyutlu altmanifold $N^d(c)$ 'nin içinde olduğu elde edilir, $d \leq m$, ve

$$\bar{\nabla}_T T(s) = k_1(s) E_2(s)$$

$$\bar{\nabla}_T E_i(s) = -k_{i-1}(s) E_{i-1}(s) + k_i(s) E_{i+1}(s), \quad 2 \leq i \leq d$$

$$\bar{\nabla}_T E_d(s) = -k_{d-1}(s) E_{d-1}(s) \tag{3.3}$$

eşitliklerini sağlayan $d-1$ tane pozitif tanımlı $k_1, k_2, ..., k_{d-1} : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Burada $k_i > 0$ fonksiyonları α 'nın i. Frenet eğrilikleri olarak adlandırılır.

Birim hızlı bir eğrinin Frenet eğrilikleri sabitse eğri helistir. Bir helisin k_1 eğriliği sıfırdan farklı bir sabit ve $k_2 = 0$ ise çember olarak adlandırılır. Basit bağlantılı reel uzay formu $N^m(c)$ 'de birim hızlı bir eğri $\alpha : I \to N^m(c)$ 'nın α boyunca sabit uzunluklu bir killing vektör alanı $V(s)$ varsa eğri *genel helis* olarak tanımlanır. Genel helislerde α' ve V arasındaki açı α boyunca sıfırdan farklı bir sabittir. V vektörü genel helisin eksenidir [13].

α , $N^m(c)$ 'nin bir yüzeyi olan S 'in içinde birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha = \alpha(s) : I \to S \subset N^m(c)$ 'nın S içindeki eğrilikleri s parametresinin sabit olmayan lineer fonksiyonu, yani $\varphi(s) = \mu s + \varepsilon$ $(\mu \neq 0)$ ise α eğrisine *Cornu Spiral* denir [17].

3.1 Has Ortalama Eğrilik Vektörün Alanına Sahip Eğriler

Bu bölümdeki amacımız ortalama eğrilik vektör alanı

$$\Delta H = \lambda H \tag{3.4}$$

eşitliğini sağlayan, sabit kesitsel eğriliği c, boyutu m olan reel uzay formu $N^m(c)$ 'de birim hızlı bir $\alpha = \alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ eğrisini incelemektir. α 'nın ortalama eğrilik vektörü aşağıdaki gibidir:

$$H(s) = k_1(s) E_2(s). \tag{3.5}$$

$k_1(s) = 0$ ise α geodeziktir.

$k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise α , $N^m(c)$ 'nin bir total geodezik yüzeyi olan $N^2(c)$ 'nin içinde bulunur. Ayrıca (3.3), (2.2), (3.5) nolu denklemleri kullanırsak α nın (3.4) denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart $k_1^2 = \lambda$ olmasıdır. Böylece α bir çemberdir.

k_1 , $k_2 \neq 0$ olsun, bu durumda $m > 2$ olacağından $N^m(c)$ 'deki α 'nın normal demeti(Λ)nin 2 boyutlu bir alt demeti($v(s)$)ni aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$v(s) = Span\{E_2, E_3\}(s) . \tag{3.6}$$

Burada E_2 ve E_3 α 'nın (3.3) denklemlerinde tanımlanan birim normal vektör alanlarıdır. v 'nin Λ 'daki dik tümleyeni v' ile gösterilsin. v' 'nün boyutu $m-3$ olur. (3.3) denklemi kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_T E_3(s) = -k_2(s)E_2(s) + \delta \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir. Burada her zaman $\delta(s) \in v'(s)$ dır. (3.3) ve (2.2) denklemlerini kullanarak ΔH 'ı hesaplayalım. (2.2)'de ΔH eğriler için hesaplanırsa

$$\Delta H = -\bar{\nabla}_T \bar{\nabla}_T H$$

olarak bulunur [9]. (3.5) denkleminden $H(s) = k_1(s)E_2(s)$ olduğundan

$$\bar{\nabla}_T H = \bar{\nabla}_T (k_1(s)E_2(s))$$

$$= k_1'(s)E_2(s) + k_1(s)(-k_1(s)E_1(s) + k_2(s)E_3(s))$$

$$= -k_1^2(s)E_1 + k_1'(s)E_2 + k_1(s)k_2(s)E_3(s)$$

olarak elde edilir. İşlem kolaylığı açısından $k_i(s) = k_i$, $E_i(s) = E_i$ olarak yazılırsa

$$\bar{\nabla}_T (\bar{\nabla}_T H) = \bar{\nabla}_T (-k_1^2 E_1 + k_1' E_2 + k_1 k_2 E_3)$$

$$= -2k_1 k_1' E_1 - k_1^2 \bar{\nabla}_T E_1 + k_1'' E_2 + k_1' \bar{\nabla}_T E_2 + (k_1 k_2)' E_3 + k_1 k_2 \bar{\nabla}_T E_3$$

$$= -2k_1 k_1' E_1 - k_1^2 (k_1 E_2) + k_1'' E_2 + k_1' (-k_1 E_1 + k_2 E_3)$$

$$+(k_1k_2)'E_3 + k_1k_2k_3E_4 - k_1k_2^2E_2$$

$$= -3k_1k_1'E_1 + (k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2)E_2 + (2k_1'k_2 + k_1k_2')E_3 + k_1k_2k_3E_4,$$

bulunur. Böylece

$$\Delta H = -(\bar{\nabla}_T\bar{\nabla}_T H)$$

$$= 3k_1k_1'E_1 + (-k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2)E_2 - (2k_1'k_2 + k_1k_2')E_3 - k_1k_2k_3E_4$$

$$= \frac{3}{2}(k_1^2)'E_1 + (-k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2)E_2 - (2k_1'k_2 + k_1k_2')E_3 - k_1k_2\delta \tag{3.8}$$

olarak elde edilir [9].

Buradan $\Delta H = \lambda H$ olması için gerek ve yeter şart

$$(k_1^2)' = 0, \tag{3.9}$$

$$-k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2 = 0, \tag{3.10}$$

ve

$$2k_1'k_2 + k_1k_2' = 0, \tag{3.11}$$

$$k_1k_2\delta = 0 \tag{3.12}$$

dir [9]. (3.9) denkleminden k_1'in sıfırdan farklı bir sabit olduğu görülür ve (3.10) denkleminden k_2'de sıfırdan farklı bir sabittir. Böylece (3.12)'de δ sıfırdır. Bu da gösterir ki v ve v' Λ'da bir paralel alt demettir [9]. Böylece aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edebiliriz:

Yardımcı Teorem 3.1.1 [9]. $\alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ birim hızlı bir immersiyon olsun. α has ortalama eğrilik vektör alanına sahipse $m \leq 3$ dür.

Önerme 3.1.2 [9]. $\alpha=\alpha(s): I\subset\mathbb{R}\to N^m(c)$ bir birim hızlı bir eğri olsun ve H ortalama eğrilik vektörünü göstersin. O zaman $\Delta H=\lambda H$ olması için gerek ve yeter koşul α 'nın $N^m(c)$ 'nin total geodezik alt manifoldu $N^2(c)$ veya $N^3(c)$ 'de bir helis olmasıdır.

İspat: (3.11) denkleminden k_1 sabit bulunur. Eğer $k_2=0$ ise α , $N^2(c)$ bir çemberdir. $k_2\neq 0$ ise k_2 sabittir. Bu durumda α , $k_1^2+k_2^2=\lambda$ şartını sağlayan $N^3(c)$ bir helistir. □

Sonuç 3.1.3 $\alpha=\alpha(s): I\subset\mathbb{R}\to N^m(c)$ bir birim hızlı bir eğri olsun ve H ortalama eğrilik vektörünü göstersin. α nın Chen anlamında biharmonik olması için gerek ve yeter koşul α nın geodezik olmasıdır.

3.2 Normal Demette Has Ortalama Eğrilik Vektörü Alanına Sahip Eğriler

Bu bölümde normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip, reel uzay formunda ki

$$\Delta^{\perp}H=\lambda H \tag{3.13}$$

eşitliğini sağlayan eğriler incelenecektir. Burada $\alpha=\alpha(s): I\subset\mathbb{R}\to N^m(c)$ birim hızlı bir eğri olsun.

$k_1(s)=0$ ise α geodeziktir.

$k_1(s)\neq 0$ ve $k_2(s)=0$ ise α , $N^m(c)$ 'nin total geodezik yüzeyi olan $N^2(c)$ de bulunur. Şimdi (3.3), (2.3), (3.5) denklemlerini kullanarak $\Delta^{\perp}H$ 'yı hesaplayalım.

$$\Delta^{\perp}H=-(\overline{\nabla}_T^{\perp}\overline{\nabla}_T^{\perp}H)$$

olduğundan hesaplanırsa (3.5) denkleminden

$$\bar{\nabla}_T H = \bar{\nabla}_T (k_1 E_2)$$

$$= k_1' E_2 + k_1(-k_1 E_1 + k_2 E_3)$$

$$= -k_1^2 E_1 + k_1' E_2 + k_1 k_2 E_3$$

olduğundan,

$$\bar{\nabla}_T^{\perp} H = k_1' E_2 + k_1 k_2 E_3$$

olarak elde edilir [9]. Burada $k_2 = 0$ olduğundan $\bar{\nabla}_T^{\perp} H = k_1' E_2$ olur. Böylece

$$\bar{\nabla}_T^{\perp}(\bar{\nabla}_T^{\perp} H) = \bar{\nabla}_T^{\perp}(k_1' E_2)\ ,$$

$$\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T^{\perp} H) = \bar{\nabla}_T(k_1' E_2)$$

$$= k_1'' E_2 + k_1' \bar{\nabla}_T E_2$$

$$= k_1'' E_2 + k_1'(-k_1 E_1 + k_2 E_3)$$

$$= -k_1 k_1' E_1 + k_1'' E_2 + k_1'' k_2 E_3$$

olacağından,

$$\bar{\nabla}_T^{\perp}(\bar{\nabla}_T^{\perp} H) = k_1'' E_2 + k_1' k_2 E_3$$

dır [9].

$k_2 = 0$ olduğundan,

$$\Delta^{\perp} H = -(\bar{\nabla}_T^{\perp} \bar{\nabla}_T^{\perp} H)$$

$$= -k_1'' E_2$$

dir [9]. α 'nın (3.13). denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşul $-k_1'' = \lambda k_1$ olmasıdır. λ 'nın değerlerine göre bu diferansiyel denklemi çözelim.

$$m^2 = -\lambda$$

diyelim. $\lambda=0$ ise $k_1(s)=c_1 s+c_2$ şeklinde lineer bir fonksiyondur. Yani α , $N^2(c)$ 'de bir Cornu spiraldir.

$\lambda<0$ ise $m^2>0$ olacağından

$$k_1(s)=c_1\exp(\sqrt{-\lambda}s)+c_2\exp(\sqrt{-\lambda}s) \tag{3.14}$$

$\lambda>0$ ise $m^2<0$ olacağından

$$k_1(s)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}s)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}s)\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R} \tag{3.15}$$

olur. (3.14) eğriliğine sahip eğriye genelleştirilmiş Nielsen spirali, (3.15) eğriliğine sahip eğriye ise curl eğrisi adı verilir $[9]$.

$k_1(s)$, $k_2(s)\neq 0$ ise $m>2$ olur. Böylece α 'nın normal demeti(Λ)nde v, v' (3.6) deki gibi tanımlanabilir. $-k_2=\tau$ denilirse

$$\nabla_T^{\perp}E_2=k_2E_3=-\tau E_3 \tag{3.16}$$

$$\nabla_T^{\perp}E_3=\tau E_2+\delta\,,\quad \delta\in v' \tag{3.17}$$

olur.

$$\bar{\nabla}_T^{\perp}H=k_1'E_2+k_1k_2E_3$$

$$\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T^{\perp}H)=\nabla_T(k_1'E_2+k_1k_2E_3)$$

$$=k_1''E_2+k_1'\bar{\nabla}_TE_2+(k_1k_2)'E_3+k_1k_2\bar{\nabla}_TE_3$$

$$=k_1''E_2+k_1'(-k_1E_1+k_2E_3)$$

$$+(k_1k_2)'E_3+k_1k_2k_3E_4-k_1k_2^2E_2$$

$$=-k_1k_1'E_1+(k_1''-k_1k_2^2)E_2+(2k_1'k_2+k_1k_2')E_3+k_1k_2k_3E_4$$

elde edilir. Böylece

$$\Delta^{\perp}H=-\bar{\nabla}_T^{\perp}(\bar{\nabla}_T^{\perp}H)$$

$$= (-k_1'' + k_1k_2^2)E_2 - (2k_1'k_2 + k_1k_2')E_3 - k_1k_2k_3E_4$$

$$= (-k_1'' + k_1\tau^2)E_2 + (2k_1'\tau + k_1\tau')E_3 + k_1\tau\delta \qquad (3.18)$$

olarak elde edilir $[9]$.

Şimdi α , Λ 'da has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri, yani $\Delta^{\perp}H = \lambda H$ olsun. O halde

$$-k_1'' + k_1\tau^2 = -\lambda k_1 \qquad (3.19)$$

$$k_1^2\tau = a\,,\ a \in \mathbb{R} \qquad (3.20)$$

$$\delta = 0 \qquad (3.21)$$

olur. Böylece Yardımcı Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayabiliriz.

Yardımcı Teorem 3.2.1 $[9]$. $\alpha = \alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ birim hızlı bir immersiyon olsun. α normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahipse $m \leq 3$ dür.

Şimdi $\lambda \neq 0$ olsun. (3.19), (3.20) denklemlerinin integrali alınırsa,

$i)$ $\lambda < 0$ ise

$$k_1^2(s) = \frac{b}{2\lambda} + c_1 \exp(2\sqrt{-\lambda}s) + c_2 \exp(2\sqrt{-\lambda}s) \qquad (3.22)$$

dir.

$ii)$ $\lambda > 0$ ise

$$k_1^2(s) = \frac{b}{2\lambda} + c_1 \cos(2\sqrt{\lambda}s) + c_2 \sin(2\sqrt{\lambda}s) \quad b, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad (3.23)$$

olarak elde edilir. Böylece eğrilerin temel teoreminden de faydalanılarak aşağıdaki önerme ifade edilebilir $[9]$.

Önerme 3.2.2 $[9]$. $\alpha = \alpha(s): I \subset \mathbb{R} \to N^m(c)$ bir birim hızlı eğri olsun ve H ortalama eğrilik vektörünü göstersin. $\Delta^{\perp} H = \lambda H$ ve $\lambda \neq 0$ ise bu durumda ya

1) $m = 2$ ve α curl eğrisi yada $N^2(c)$ 'de genelleştirilmiş Nielsen spiraldir,

yada

2) $m = 3$ ve α eğriliği ve torsiyonu ya (3.20), (3.22) de yada (3.20), (3.23) tanımlanan eğridir.

4. YÜZEY ÜZERİNDE BİHARMONİK EĞRİLER

(M^2, g) bir Riemannian yüzeyi ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to (M^2, g)$ birim hızlı türevlenebilir bir eğri olsun. $\{E_1 = T, E_2 = N\}$, α boyunca M^2'ye teğet ortonormal çatı alanı olsun. Burada $E_1 = T = \alpha'$, α'ya teğet birim vektör alanıdır. O halde Frenet formülleri kullanılırsa ;

$$\nabla_T T = k_1 N\,, \quad \nabla_T N = -k_1 T$$

olarak bulunur. Burada $k_1 = |\tau(\alpha)| = |\nabla_T T|$, α'nın geodezik eğriliğidir [13]. Frenet formülleri kullanılarak Bienerji fonksiyonunun Euler-Lagrange denklemi hesaplanırsa;

$$-\tau_2(\alpha) = -\nabla_T^3 T - R(T, k_1 N)T$$

olarak elde edilir [3]. α'nın biharmonik olması $\tau_2(\alpha) = 0$ olması demektir. Böylece

$$\begin{aligned} \nabla_T^3 T = \nabla_T(\nabla_T(\nabla_T T)) &= \nabla_T(\nabla_T(k_1 N)) \\ &= \nabla_T(-k_1^2 T + k_1' N) \\ &= -3k_1 k_1' T + (k_1'' - k_1^3) N \end{aligned}$$

olacağından ,

$$\begin{aligned} -\tau_2(\alpha) &= -\nabla_T^3 T - R(T, k_1 N)T \\ &= 3k_1 k_1' T - (k_1'' - k_1^3) N - k_1 R(T, N)T \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

dır [3]. (4.1) denkleminin T ile iç çarpım yapılırsa ;

$$k_1 k_1' = 0\,,$$

N ile iç çarpım yapılırsa ;

$$k_1'' - k_1^3 + k_1 g(R(T,N)T,N) = 0$$

elde edilir. Burada $g(R(T,N)T,N) = G$ yüzeyin Gauss eğriliğidir.

O halde α biharmonik bir eğridir ancak ve ancak

$$k_1 k_1' = 0$$

ve

$$k_1'' - k_1^3 + k_1 g(R(T,N)T,N) = 0$$

dır. Buradan geodezik olmayan biharmonik eğriler için

$$k_1 \neq 0 = \text{sabittir}$$

ve

$$k_1^2 = G \tag{4.2}$$

dır.

Önerme 4.1 [3]. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to (M^2, g)$, M^2 yüzeyinde türevlenebilir bir eğri olsun. Eğer α geodezik olmayan bir biharmonik eğri ise , Gauss eğriliği α boyunca sabittir, pozitiftir ve geodezik eğrilik(k_1)'in karesine eşittir. Böylece eğer M^2 'nin herhangi bir biharmonik eğri boyunca Gauss eğriliği pozitif değilse eğri M^2 'nin bir geodeziğidir.

İspat : Gauss eğriliği $G = k_1^2$ dir. Bu durumda $G \geq 0$ olur. Önermedeki kabul gereği G pozitif olmadığı için $G = 0 = k_1^2$ olur. Böylece $k_1 = 0$ olup α geodeziktir. □

4.1 Dönel Yüzeylerde Biharmonik Eğriler

$\alpha(u)=(f(u),0,g(u))$, xz düzleminde bir eğri olsun. Bu eğrinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin standart parametrik denklemi

$$X(u,v)=(f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

olur. Burada v, z-ekseni etrafında dönme açısıdır. Eğer α birim hızlı bir eğri ise $f'^2+g'^2=1$ olur ve dönel yüzeyin Gauss eğriliği ;

$$G(u,v)=\frac{-f''(u)}{f(u)}$$

olur [17]. Gauss eğriliği u 'ya bağlıdır. Yani Gauss eğriliği herhangi bir paralel boyunca sabittir. Eğer Gauss eğriliği bir eğri boyunca sabitse eğri ya paraleldir ya da sabit Gauss eğrilikli bir yüzey parçası içinde bulunur. Özel olarak, geodezik olmayan biharmonik eğriler ya paraleldir ya da sabit Gauss eğrilikli bir yüzey içinde bulunurlar [3].

Bu bölümde dönel yüzeylerin biharmonik olan bütün paralelleri incelenecektir.

Teorem 4.1.1 [3]. $M^2\subset\mathbb{R}^3$, birim hızlı xz düzlemindeki $\alpha(u)=(f(u),0,g(u))$ eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey olsun. O halde M 'nin bütün paralellerinin biharmonik eğriler olması için gerek ve yeter şart ya

$i)$ f 'nin sabit ve M 'nin dik dairesel silindir olması, yada

$ii)$ $f(u)=\pm c\sqrt{u}$ ve $g(u)=u\sqrt{\dfrac{4u-c^2}{4u}}-\dfrac{c^2}{8}\log\left[8u+8u\sqrt{\dfrac{4u-c^2}{4u}}-c^2\right]+c_1$, $c,c_1\in\mathbb{R}^+$

olmasıdır.

İspat : $\gamma_u(t) = (f(\bar{u})\cos(\frac{v(t)}{f(\bar{u})}), f(\bar{u})\sin(\frac{v(t)}{f(\bar{u})}), g(\bar{u}))$, $u = \bar{u} =$ sabit, M 'nin birim hızlı bir paraleli olsun. O halde paralelin geodezik eğriliği $k_1 = \frac{f'(u)}{f(u)}$ dir. $G(u,v) = \frac{-f''(u)}{f(u)}$ olduğundan (4.2) denklemi kullanılarak

$$G = \frac{-f''(u)}{f(u)} = \frac{f'^2(u)}{f^2(u)} = k_1^2$$

elde edilir. Buradan M 'nin bütün paralellerinin biharmonik eğriler olması için gerek ve yeter şart f 'nin

$$f''f + f'^2 = 0 \tag{4.3}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemin bir çözümü olmasıdır.

Eğer f sabitse $k_1 = \frac{f'(u)}{f(u)} = 0$ olacağından M 'nin bütün paralelleri geodeziktir. Bu durumda yüzey

$$X(u,v) = (r\cos(v), r\sin(v), \pm u + c)$$

şeklinde olacağından dik dairesel silindir belirtir.

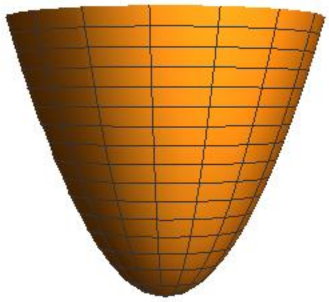
Eğer f sabit değilse (4.3) diferansiyel denkleminin çözümleri $f(u) = \pm c\sqrt{u+b}$ $c, b \in \mathbb{R}^+$ şeklindedir. Genelliği bozmadan özel olarak $b = 0$ seçilirse $f(u) = \pm c\sqrt{u}$ olur. $f'^2 + g'^2 = 1$ denklemi kullanılarak

$$g' = \pm\sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}}$$

elde edilir. g' 'nin integrali alınırsa

$$g(u) = u\sqrt{\frac{4u-c^2}{4u}} - \frac{c^2}{8}\log\left[8u + 8u\sqrt{\frac{4u-c^2}{4u}} - c^2\right] + c_1, \; c, c_1 \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir. □



Şekil 4.1: Yukarıdaki f ve g fonksiyonlarına karşılık gelen dönel yüzey.

4.1.1 Gauss Eğriliği Sabit Olmayan Dönel Yüzeylerde Biharmonik Eğri Örnekleri

Örnek 4.1.1.1 [3]. Tor dönel yüzeyinin birim hızlı standart parametrik denklemi

$$X(u,v) = ((a + r\cos(\frac{u}{r}))\cos(v), (a + r\cos(\frac{u}{r}))\sin(v), r\sin(\frac{u}{r})) \ , a > r$$

şeklindedir. Burada,

$$f(u) = a + r\cos(\frac{u}{r})$$

$$g(u) = r\sin(\frac{u}{r})$$

olduğundan tor yüzeyinin Gauss eğriliği ;

$$G = \frac{-f''(u)}{f(u)} = \frac{\cos(u/r)}{r(a + r\cos(u/r))},$$

paralelin geodezik eğriliği ;

$$k_1 = \frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{-\sin(u/r)}{a + r\cos(u/r)}$$

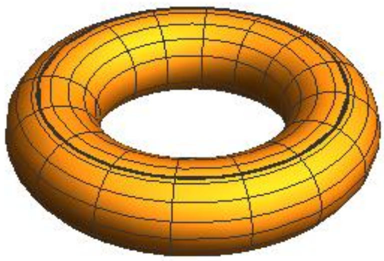
olarak elde edilir. Böylece Önerme 4.1 gereği

$$\frac{\cos(u/r)}{r(a+r\cos(u/r))}=\frac{\sin^2(u/r)}{(a+r\cos(u/r))^2} \tag{4.4}$$

ise tor yüzeyi üzerindeki bir paralel biharmonik eğridir. (4.4) denkleminden u çözülürse

$$u=\bar{u}=r\arccos(\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8r^2}}{4r})$$

olarak bulunur. Ancak $a>r$ olduğundan $u=\bar{u}=r\arccos(\frac{-a-\sqrt{a^2+8r^2}}{4r})$ tanımsız olmaktadır. O halde sabit $u=\bar{u}=r\arccos(\frac{-a+\sqrt{a^2+8r^2}}{4r})$ değeri için bulunan paralel tor yüzeyi üzerinde biharmonik bir eğridir.



Şekil 4.2: $a=3$ ve $r=1$ için elde edilen tor yüzeyi ve üzerindeki geodezik olmayan biharmonik eğri.

4.1.2 Sabit (Pozitif) Gauss Eğrilikli Dönel Yüzeylerde Biharmonik Eğriler

$M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sabit pozitif Gauss eğrilikli($G = 1/a^2$) bir dönel yüzey olsun. $f(u) = b\cos(\frac{u}{a})$ ve $g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2(\frac{s}{a})}ds$ $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$X(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

M^2 dönel yüzeyini düşünelim.

$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, M^2 yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi boyunca Darboux bazı hesaplanırsa; $v'^2 f^2 + u'^2 = 1$ olacak şekilde

$$X_u = (f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v), g'(u)),$$

$$X_v = (-f(u)\sin(v), f(u)\cos(v), 0),$$

$\{X_u, X_v\}$ koordinat çatısına göre teğet vektör alanı:

$$\alpha'(t) = T = u'X_u + v'X_v$$

yüzey normalinin eğriye kısıtlanışı:

$$u = N = \pm\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \pm(-f(u)g'(u)\cos(v), -f(u)g'(u)\sin(v), f(u)f'(u))\frac{1}{f(u)}$$

olur.

$$u = N = (g'(u)\cos(v), g'(u)\sin(v), -f'(u))$$

seçilirse

$$t = u \times T = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ g'(u)\cos(v) & g'(u)\sin(v) & -f'(u) \\ u'f'(u)\cos(v) - v'f(u)\sin(v) & u'f'(u)\sin(v) + v'f(u)\cos(v) & u'g'(u) \end{vmatrix}$$

$$= (u'\sin(v) + v'f(u)f'(u)\cos(v), -u'\cos(v) + v'f(u)f'(u)\sin(v), v'f'(u)g'(u))$$

$$= v' f X_u - \frac{u'}{f} X_v \tag{4.5}$$

olarak elde edilir.

Darboux denklemleri yardımıyla

$$k_g = < T', t > \tag{4.6}$$

olduğu görülmektedir. (4.5), (4.6) nolu denklemler ve $v'^2 f^2 + u'^2 = 1$ denklemi kullanılırsa,

$$T' = \alpha'' = (u' X_u + v' X_v)'$$

$$= u'' X_u + u'(X_{uu} u' + X_{uv} v') + v'' X_v + v'(X_{vu} u' + X_{vv} v')$$

$$= u'' X_u + u'^2 X_{uu} + u'v' X_{uv} + v'' X_v + u'v' X_{vu} + v'^2 X_{vv} \tag{4.7}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$X_{uu} = (f''(u)\cos(v), f''(u)\sin(v), g''(u))$$

$$X_{uv} = (-f'(u)\sin(v), f'(u)cos(v), 0)$$

$$X_{vv} = (-f(u)\cos(v), -f(u)\sin(v), 0)$$

$$X_{vu} = (-f'(u)\sin(v), f'(u)\cos(v), 0)$$

olup (4.7) nolu denklemde yukarıda bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$T' = ((u'' f'(u)\cos(v) + u'^2 f(u)'' \cos(v) - 2v'u' f'(u)\sin(v) - v'' f(u)\sin(v) - v'^2 f(u)\cos(v)),$$

$$(u'' f'(u)\sin(v) + u'^2 f(u)'' \sin(v) + 2v'u' f'(u)\cos(v) + v'' f(u)\cos(v) - v'^2 f(u)\sin(v)),$$

$$(u'' g'(u) + u'^2 g''(u)))$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$< T', t > = -u'v' f' - u'v'' f - v' f'(u'^2 + v'^2 f^2) + u'' v' f (f'^2 + g'^2) + v' u'^2 (f f'' + g' g'')$$

ve $f'^2 + g'^2 = 1$, $u'^2 + v'^2 f^2 = 1$, $f f'' + g' g'' = 0$ olduğundan

$$k_g = -v''u'f + u''v'f - u'^2 v' \frac{df}{du} - v' \frac{df}{du} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $v'^2 f^2 + u'^2 = 1$ denkleminin t 'ye göre türevi alınırsa

$$2v'v''f^2 + 2u'v'^2 f \frac{df}{du} + 2u'u'' = 0$$

olacaktır. Burada α eğrisi bir paralel olmadığı için $u' \neq 0$. O halde

$$u'' = -\frac{v'v''f^2 + u'v'^2 f \frac{df}{du}}{u'}$$

dir. (4.8) nolu denklemde u'' yerine yazılırsa

$$k_g = -v''u'f + u''v'f - u'^2 v' \frac{df}{du} - v' \frac{df}{du}$$

$$= (-v''f - 2v'u' \frac{df}{du}) / u'$$

olarak elde edilir. Biharmonik eğriler için $k_g{}^2 = G$ olduğundan

$$\frac{-v''f - 2v'u' \frac{df}{du}}{u'} = \frac{1}{a}$$

olur. Denklemin her iki tarafı f ile çarpılırsa

$$-(v''f^2 + 2v'u'f \frac{df}{du}) = -\frac{d}{dt}(v'f^2) = u'f \frac{1}{a}$$

bulunur. $f(u) = b\cos(\frac{u}{a})$ yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}(v'b^2 \cos^2(\frac{u}{a})) = -\frac{1}{a} u'b\cos(\frac{u}{a}) = \frac{d}{dt}(-b\sin(\frac{u}{a}))$$

olacaktır. O halde birim hızlı $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$ eğrisi biharmonik ise aşağıdaki denklem sistemini sağlamalıdır.

$$v'b^2\cos^2(\frac{u}{a})=-b\sin(\frac{u}{a}),$$

$$v'^2b^2\cos^2(\frac{u}{a})+u'^2=1 \tag{4.9}$$

Denklem sistemi u''ne göre çözülürse,

$$v'=\frac{-b\sin(\frac{u}{a})}{b^2\cos^2(\frac{u}{a})}$$

$$u'^2=1-v'^2b^2\cos^2(\frac{u}{a})=\frac{b^2(\cos^2(\frac{u}{a})-\sin^2(\frac{u}{a}))+2bc\sin(\frac{u}{a})-c^2}{b^2\cos^2(\frac{u}{a})}$$

$$=\frac{b^2(1-2\sin^2(\frac{u}{a}))+2bc\sin(\frac{u}{a})-c^2}{b^2\cos^2(\frac{u}{a})}$$

$$\frac{du}{dt}=u'=\pm\frac{1}{b\cos(\frac{u}{a})}\sqrt{b^2-c^2+2bc\sin(\frac{u}{a})-2b^2\sin^2(\frac{u}{a})}$$

olarak elde edilir. Denklem değişkenlerine ayrılıp integral alınırsa,

$$t+A=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{c-2b\sin(\frac{u}{a})}{\sqrt{2b^2-c^2}}\right),\ 2b^2-c^2>0,\ A\in\mathbb{R}$$

elde edilir. Son olarak buradan $u(t)$ çekilirse,

$$u(t)=-a\arcsin\left(\frac{c\pm\sqrt{2b^2-c^2}\sin(A+\frac{\sqrt{2}}{a}t)}{2b}\right)$$

olarak hesaplanır. (4.9) nolu denklemden $v(t)$ çekilirse,

$$v(t)=\int_0^t \left(\frac{-\sin(\frac{u(s)}{a})}{b\cos^2(\frac{u(s)}{a})} + \frac{c}{b^2\cos^2(\frac{u(s)}{a})} \right) ds$$

olur. Böylece sabit pozitif Gauss eğrilikli dönel yüzeylerde paralel olmayan biharmonik eğrilerin genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek 4.1.2.1 $[3]$. α , $\mathbb{R}^3$ de r yarıçaplı küre üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. τ ve k α 'nın torsiyonu ve eğriliği olmak üzere Frenet formulleri yardımıyla aşağıdaki determinant hesaplanırsa,

$$\det\left[T,T',T''\right]=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & k' & k\tau \end{pmatrix}\det\left[T,N,B\right]=k^2\tau \tag{4.10}$$

olarak elde edilir. Küresel bir eğri için Darboux bazına göre T' ve T'' yazılırsa,

$$T'=k_g t+k_n u$$

$$T''=k_g{}'t+k_g t'+k_n{}'u+k_n u'$$

$$=(-k_g{}^2-k_n{}^2)T+(k_g{}'-k_n\tau_g)t+(k_n\tau_g+k_n{}')u$$

olarak bulunur. Küre yüzeyi üzerinde $k_n=-1/r$ ve $\tau_g=0$ olduğundan

$$T'=k_g t-\frac{1}{r}u$$

ve

$$T''=-\left(\frac{1}{r^2}+k_g{}^2\right)T+k_g{}'t$$

dir. T' ve T'' (4.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\tau k^2 = \frac{1}{r} k_g{}'$$

olacaktır. Biharmonik eğriler için k_g sabit olduğundan $\tau k^2 = 0$ dır. $k^2 = k_g{}^2 + k_n{}^2$ [2] olduğundan $k^2 = 1/r^2 + 1/r^2 = 2/r^2 \neq 0$ olur. O halde $\tau = 0$ olacaktır.

Böylece r yarıçaplı bir küre üzerindeki biharmonik eğri, küre ile düzlemin kesişiminden elde edilen $r/\sqrt{2}$ yarıçaplı bir çemberdir.

Şimdi küre yüzeyi üzerindeki biharmonik paralelleri inceleyelim. xz düzlemindeki $\alpha(u) = (f(u), g(u)) = (r\cos(u/r), r\sin(u/r))$, $f(u) > 0$ eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen r yarıçaplı kürenin standart parametrik denklemi

$$X(u,v) = (r\cos(u/r)\cos(v), r\cos(u/r)\sin(v), r\sin(u/r))$$

şeklindedir. Küre yüzeyinin profil eğrisi $\alpha(u)$ birim hızlı olduğundan direkt olarak kürenin Gauss eğriliği G ve paralelin eğriliği k_1 hesaplanıp,

$$k_1 = \frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-\sin(u/r)}{r\cos(u/r)} \text{ ve } G = \frac{-f''(s)}{f(s)} = \frac{\cos(u/r)}{r^2\cos(u/r)} = \frac{1}{r^2}$$

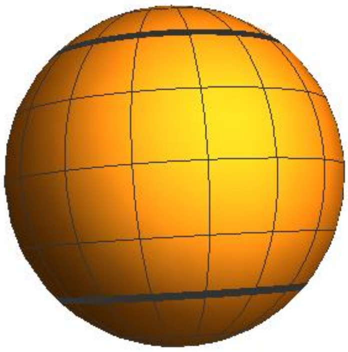
$G = k_1^2$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$G = \frac{1}{r^2} = k_1^2 = \frac{1}{r^2}\tan^2(u/r)$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümünden elde edilen sabit u değeri

$$u = r\arctan(\pm 1) = \pm r\frac{\pi}{4}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.3: Birim küre üzerindeki biharmonik eğriler.

5. RIEMANN MANİFOLDLARINDA BİMİNİMAL EĞRİLER

Bu bölümde Riemann manifoldu üzerinde bir eğrinin biminimal olması için gerek ve yeter koşullar incelenecektir.

Önerme 5.1 $[11]$. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \to (M^m, g)$, $m \geq 2$ isometrik bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1 g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) - \lambda k_1 = 0 \tag{5.1}$$

$$(k_1^2 k_2)' + k_1^2 g(R(E_1, E_2)E_1, E_3) = 0 \tag{5.2}$$

$$k_1 k_2 k_3 + k_1 g(R(E_1, E_2)E_1, E_4) = 0 \tag{5.3}$$

$$k_1 g(R(E_1, E_2)E_1, E_j) = 0, \quad j = 5, ..., m, \tag{5.4}$$

olacak şekilde bir λ reel sayısının varolmasıdır. Burada R , (M^m, g) 'nin eğrilik tensörü ve $\{E_i\}_{i=1,..,m}$, α 'nın Frenet çatısıdır.

İspat : Frenet çatısına göre ;

α 'nın gerilim alanı,

$$\tau(\alpha) = tr\nabla d\alpha = \nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}(d\alpha(\frac{\partial}{\partial t})) - d\alpha(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}) = \nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_1 = k_1 E_2 ,$$

bigerilim alanı,

$$-\tau_2(\alpha) = -\nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\tau(\alpha)) + \nabla_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}}(\tau(\alpha)) - R(d\alpha(\frac{\partial}{\partial t}), \tau(\alpha))d\alpha(\frac{\partial}{\partial t})$$

$$= -\nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}(k_1 E_2) - R(E_1, k_1 E_2)E_1$$

$$= -\nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}(k_1' E_2 + k_1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} E_2) - R(E_1, k_1 E_2)E_1$$

$$= -k_1''E_2 - k_1'\nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}E_2 + 2k_1k_1'E_1 + k_1^2\nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}E_1$$

$$+(k_1k_2)'E_3 - k_1k_2\nabla^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial t}}E_3 - k_1R(E_1,E_2)E_1$$

$$= 3k_1k_1'E_1 + (-k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2)E_2 - (2k_1'k_2 + k_1k_2')E_3$$

$$-k_1k_2k_3E_4 - k_1R(E_1,E_2)E_1$$

olarak elde edilir.

(2.4) denklemi kullanılarak α 'nın biminimal olması için gerek ve yeter koşul

$$\left[\tau_2\right]^{\perp} - \lambda\left[\tau\right]^{\perp} = -(-k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2 + \lambda k_1)E_2 + (2k_1'k_2 + k_1k_2')E_3$$

$$+k_1k_2k_3E_4 + k_1R(E_1,E_2)E_1 = 0 \tag{5.5}$$

olarak elde edilir. (5.5) denkleminin sırasıyla E_2, E_3, E_4 ve $E_i,\ 5 \leq i \leq m$ ile iç çarpım yapılırsa

$$k_1'' - k_1^3 - k_1k_2^2 + k_1g(R(E_1,E_2)E_1,E_2) - \lambda k_1 = 0\,,$$

$$(k_1^2k_2)' + k_1^2g(R(E_1,E_2)E_1,E_3) = 0\,,$$

$$k_1k_2k_3 + k_1g(R(E_1,E_2)E_1,E_4) = 0\,.$$

$$k_1g(R(E_1,E_2)E_1,E_j) = 0,\ 5 \leq j \leq m$$

denklemleri elde edilir. □

Sonuç 5.2 [11].

$i)$ M bir yüzey $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ bir eğri olsun. α 'nın biminimal olması için gerek ve yeter şart $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$k_1'' - k_1^3 + k_1 G - \lambda k_1 = 0 \tag{5.6}$$

diferansiyel denkleminin sağlanmasıdır.

$ii)$ $M^3(c)$ sabit kesitsel eğriliği c olan 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M^3(c)$ bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın biminimal olması için gerek ve yeter şart $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1 c - \lambda k_1 = 0$$

$$k_1^2 k_2 = sabit$$

denklem sisteminin sağlanmasıdır.

İspat : $i)$ α 'nın iki boyutta Frenet çatısı sadece E_1 ve E_2 'den oluşur. Bu takdirde Önerme 5.1 gereği eğrinin biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$k_1'' - k_1^3 + k_1 g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) - \lambda k_1 = 0,$$

olmasıdır. Fakat burada $g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) = G$ olduğundan (5.6) denklemi elde edilir.

$ii)$ 3 boyutta Frenet çatısı E_1, E_2 ve E_3 'den oluşur. Sabit kesitsel eğriliğin c olması $g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) = c$ ve $g(R(E_1, E_2)E_1, E_3) = 0$ olması demektir. Bu değerleri Önerme 5.1'de elde edilen (5.1) ve (5.2) denklemlerde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur. □

5.1 Dönel Yüzeylerde Biminimal Eğriler

Bu bölümde dönel yüzeyler üzerindeki paralellerin biminimal olma durumu incelenecektir. Sonuç 5.3 de yüzey üzerinde bulunan bir eğrinin biminimal olması için gerek ve yeter koşul eğrinin geodezik eğriliği k_1'in

$$k_1'' - k_1^3 + k_1 G - \lambda k_1 = 0$$

diferansiyel denklemi sağlaması olarak bulunmuştu. Burada G yüzeyin Gauss eğriliği ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir. Bir dönel yüzeyin geodezik eğrilerin biminimal olduğu aşikardır. Bu bölümde sabit geodezik eğrilikli fakat geodezik olmayan ($k_1 \neq 0$) biminimal eğriler incelenecektir.

$k_1 =$ sabit olduğundan yukarıdaki diferansiyel denklem

$$-k_1(k_1^2 - G + \lambda) = 0$$

şekildedir. Aynı zamanda $k_1 \neq 0$ olduğundan

$$G = k_1^2 + \lambda$$

olarak elde edilir.

Dönel yüzeyler için Gauss eğriliğinin $G(u,v) = \dfrac{-f''(u)}{f(u)}$ ve yüzey üzerindeki paralellerin eğriliğinin $k_1 = \dfrac{f'(u)}{f(u)}$ olduğu bilindiğine göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz [10].

Teorem 5.1.1 $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, yay parametresiyle parametrelendirilmiş xz düzlemindeki $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey olsun. O halde M 'nin bütün paralellerinin biminimal eğriler olması için gerek ve yeter koşul $f(u)$ 'nun

$i)\ f(u) = \pm c\sqrt{u}$

veya

$ii)\ f(u) = \pm c\sqrt{\cosh(\sqrt{2a}(c_1 + u))}$

veya

$iii)\ f(u) = \pm c\sqrt{\cos(\sqrt{2a}(c_1 + u))} \quad c, c_1 \in \mathbb{R}$

olmasıdır.

İspat : $\gamma_u(t) = (f(\bar{u})\cos(\frac{v(t)}{f(\bar{u})}), f(\bar{u})\sin(\frac{v(t)}{f(\bar{u})}), g(\bar{u}))$, $u = \bar{u} =$ sabit, M 'nin birim hızlı bir paraleli olsun. O halde paralelin geodezik eğriliği $k_1 = \dfrac{f'(u)}{f(u)}$ dir. Gauss eğriliği $G = k_1^2 + \lambda$ olarak bulunmuştu. Aynı zamanda $G(u,v) = \dfrac{-f''(u)}{f(u)}$ olduğu bilindiğine göre

$$G = \frac{-f''(u)}{f(u)} = \frac{f'^2(u)}{f^2(u)} + \lambda = k_1^2 + \lambda$$

olur. Buradan görülüyor ki M 'nin bütün paralellerinin biminimal eğriler olması için gerek ve yeter koşul f 'nin

$$ff'' + f'^2 + \lambda f^2 = 0 \tag{5.3}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemi sağlamasıdır. Şimdi bu diferansiyel denklemi çözelim.

f sabitse $\lambda = 0$ olacağından diferansiyel denklem bir önceki bölümde incelenen paralel eğrilerin biharmonik olma durumuna dönüşecektir ve diferansiyel denklemin çözümü dik dairesel silindir belirtecektir.

f sabit değilse diferansiyel denklemin çözümleri ;

$i)$ $\lambda = 0$ için $f(u) = \pm c_1 \sqrt{u}$ $c_1 \in \mathbb{R}$,

$\lambda \neq 0$ ise,

$$\lambda f^2 + f''f + f'^2 = 0$$

dır. Şimdi (5.3) diferansiyel denklemini adım adım çözelim.

f 'yi bağımsız değişken olarak alalım ve $v(f) = \dfrac{df(u)}{du}$ olsun.

$$\frac{d^2(f(u))}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{df(u)}{du}\right) = \frac{dv(f)}{du} = \frac{df}{du}\frac{dv(f)}{df} = v(f)\frac{dv(f)}{df}$$

olacağından diferansiyel denklem

$$\lambda f^2 + v(f)^2 + fv(f)\frac{dv(f)}{df} = 0$$

Bernoulli diferansiyel denklemi haline dönüşür. Şimdi bu diferansiyel denklemi çözelim.

Denklemin her iki tarafından λf^2 çıkartalım.

$$v(f)^2 + fv(f)\frac{dv(f)}{df} = -\lambda f^2$$

Şimdi de her iki tarafı $\dfrac{f}{2}$ 'ye bölelim. Böylece,

$$2v(f)\frac{dv(f)}{df} + \frac{2v(f)^2}{f} = -2\lambda f$$

olacaktır. Şimdi $z(f) = v(f)^2$ dönüşümü yapılırsa $\dfrac{dz(f)}{df} = 2v(f)\dfrac{dv(f)}{df}$ olduğundan diferensiyel denklem

$$\frac{dz(f)}{df} + 2\frac{z(f)}{f} = -2\lambda f$$

lineer diferensiyel denklemi haline dönüşür.

Şimdi denklemin her iki tarafını integral çarpanı

$$\mu(f) = e^{\int \frac{2}{f} df} = f^2$$

ile çarpalım.

$$f^2 \frac{dz(f)}{df} + 2fz(f) = -2\lambda f^3$$

Sol taraftan çarpım kuralı $\left(g\frac{df}{dy} + f\frac{dg}{dy} = \frac{d}{dy}(fg) \right)$ tersden uygulanır ise

$$\frac{d}{df}(f^2 z(f)) = -2\lambda f^3$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın f 'ye göre integrali alınırsa

$$\int \frac{d}{df}(f^2 z(f))df = \int -2\lambda f^3 df$$

$$f^2 z(f) = -\frac{1}{2}\lambda f^4 + c_1$$

olarak elde edilir. Burada c_1 herhangi bir sabittir.

Şimdi denklemin her iki tarafı integral çarpanı $\mu(f) = f^2$ 'ye bölünürse,

$$z(f) = \frac{-\frac{1}{2}\lambda f^4 + c_1}{f^2}$$

olacaktır. $z(f) = v(f)^2$ olduğundan buradan $v(f)$ çözülürse,

$$v(f) = -\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4 + c_1}}{f}$$

yada

$$v(f)=\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4+c_1}}{f}$$

olarak bulunur. $v(f)=\frac{df(u)}{du}$ olduğundan $v(f)$ yerine $\frac{df(u)}{du}$ yazılırsa,

$$\frac{df(u)}{du}=-\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}{f(u)}$$

yada

$$\frac{df(u)}{du}=\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}{f(u)}$$

olacaktır. Şimdi sırasıyla

$$\frac{df(u)}{du}=-\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}{f(u)}$$

ve

$$\frac{df(u)}{du}=\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}{f(u)}$$

denklemlerinin her iki tarafını $\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}{f(u)}$ 'ye bölelim. Böylece

$$\frac{\frac{df(u)}{du}f(u)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}=-1$$

ve

$$\frac{\frac{df(u)}{du}f(u)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}=1$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int\frac{\frac{df(u)}{du}f(u)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}du=\int -1du$$

ve

$$\int\frac{\frac{df(u)}{du}f(u)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}du=\int du$$

olacaktır.

$$\int\frac{\frac{df(u)}{du}f(u)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}du=\int -1du \text{ için}$$

$\lambda>0$ ise integralin çözümü

$$\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda}f^2(u)}{\sqrt{2c_1-\lambda f^4(u)}}\right)}{\sqrt{2\lambda}}=-u+c_2$$

olarak elde edilir. Burada c_2 herhangi bir sabittir. Denklemden $f(u)$ çekilirse reel çözüm olarak

$$f(u)=\pm\frac{\sqrt[4]{2c_1}\sqrt{-\tan(\sqrt{2\lambda}u-\sqrt{2\lambda}c_2)}}{\sqrt[4]{\lambda+\lambda\sqrt{-\tan^2(\sqrt{2\lambda}u-\sqrt{2\lambda}c_2)}}},$$

elde edilir.

$\lambda<0$ ise integralin çözümü

$$\frac{\log\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{2c_1+\lambda f^4(u)}+\lambda f^2(u)\right)}{\sqrt{2\lambda}}=-u+c_2$$

olarak elde edilir. Burada c_2 herhangi bir sabittir. Denklemden $f(u)$ çekilirse

$$f(u)=\pm\frac{\sqrt{e^{-(\sqrt{2\lambda}u)+\sqrt{2\lambda}c_2}-2\lambda c_1 e^{\sqrt{2\lambda}u-\sqrt{2\lambda}c_2}}}{\sqrt{2\lambda}}$$

olarak bulunur.

$$\int\frac{\frac{df(u)}{du}f(u)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\lambda f^4(u)+c_1}}du=\int du \text{ için}$$

$\lambda>0$ ise integralin çözümü

$$\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda}f^2(u)}{\sqrt{2c_1-\lambda f^4(u)}}\right)}{\sqrt{2\lambda}}=u+c_2$$

olarak elde edilir. Burada c_2 herhangi bir sabittir. Denklemden $f(u)$ çekilirse

$$f(u)=\pm\frac{\sqrt[4]{2c_1}\sqrt{\tan(\sqrt{2\lambda}u+\sqrt{2\lambda}c_2)}}{\sqrt[4]{\lambda+\lambda\sqrt{\tan^2(\sqrt{2\lambda}u+\sqrt{2\lambda}c_2)}}}$$

olarak bulunur.

$\lambda<0$ ise integralin çözümü

$$\frac{\log\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{2c_1+\lambda f^4(u)}+\lambda f^2(u)\right)}{\sqrt{2\lambda}}=u+c_2$$

olarak elde edilir. Burada c_2 herhangi bir sabittir. Denklemden $f(u)$ çekilirse

$$f(u)=\pm\frac{e^{\frac{1}{2}(-(\sqrt{2\lambda}u)-\sqrt{2\lambda}c_2)}\sqrt{e^{2\sqrt{2\lambda}(u+c_2)}-2\lambda c_1}}{\sqrt{2\lambda}}$$

olarak elde edilir.

Diferansiyel denklemin çözümleri genelleştirilerek yazılırsa,

$ii)$ $\lambda < 0$ için $f(u) = \pm c\sqrt{\cosh(\sqrt{2\lambda}(c_2 + u))}$,

$iii)$ $\lambda > 0$ için $f(u) = \pm c\sqrt{\cos(\sqrt{2\lambda}(c_2 + u))}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

elde edilir. □

5.1.1 Gauss Eğriliği Sabit Olmayan Dönel Yüzeylerde Biminimal Eğri Örnekleri

Örnek 5.1.1.1 $\mathbb{R}^3$' deki Tor yüzeyinin birim hızlı standart parametrik denklemi

$$X(u,v) = ((a + r\cos(\frac{u}{r}))\cos(v), (a + r\cos(\frac{u}{r}))\sin(v), r\sin(\frac{u}{r})) \ , a > r$$

şeklindedir. Burada,

$$f(u) = a + r\cos(\frac{u}{r})$$

$$g(u) = r\sin(\frac{u}{r})$$

olduğundan tor yüzeyinin Gauss eğriliği ;

$$G = \frac{-f''(u)}{f(u)} = \frac{\cos(u/r)}{r(a + r\cos(u/r))},$$

paralelin geodezik eğriliği ;

$$k_1 = \frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{-\sin(u/r)}{a + r\cos(u/r)}$$

olarak elde edilir. $G = k_1^2 + \lambda$ olduğundan

$$\frac{\cos(u/r)}{r(a+r\cos(u/r))}=\frac{\sin^2(u/r)}{(a+r\cos(u/r))^2}+\lambda \tag{5.4}$$

denkleminden elde edilen sabit bir u değeri için bulunan paralel tor yüzeyi üzerinde biminimal bir eğridir.

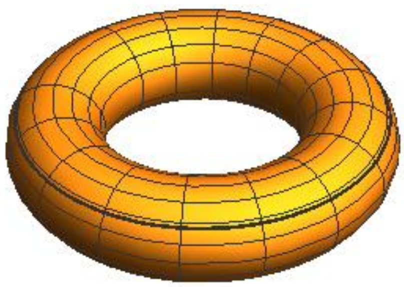
(5.4) denklemi çözülürse

$$\cos(u/r)=\frac{-a(2r^2\lambda-1)\pm\sqrt{a^2(4r^2\lambda+1)}}{2r(\lambda r^2-2)}$$

u sabiti ;

$$u=\bar{u}=r\arccos\left(\frac{-a(2r^2\lambda-1)\pm\sqrt{a^2(4r^2\lambda+1)}}{2r(\lambda r^2-2)}\right)$$

olarak bulunur.



Şekil 5.1: $a=3$ ve $r=1$ için elde edilen tor yüzeyi üzerindeki $\lambda=1/4$ için bulunan biminimal eğri.

Örnek 5.1.1.2 xz düzlemindeki $\alpha(u)=(f(u),g(u))=(c\cosh(\frac{u}{c}),u)$, $f(u)>0$ eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen *Katenoid* dönel yüzeyinin standart parametrik denklemi

$$X(u,v)=(c\cosh(\frac{u}{c})\cos(v),c\cosh(\frac{u}{c})\sin(v),u)$$

şeklindedir. Yüzeyin profil eğrisi $\alpha(u)=(c\cosh(\frac{u}{c}),u)$ birim hızlı hale getirilirse

$$\|\alpha'(u)\|=\|(\sinh(u/c),1)\|=\sqrt{\sinh^2(u/c)+1}=\sqrt{\cosh^2(u/c)}=\cosh(u/c)$$

olduğundan,

$$s=\int_0^u\|\alpha'(u)\|du=\int_0^u\cosh(u/c)du$$

$$=c\sinh(u/c)\Big|_0^u=c\sinh(u/c)$$

$s=c\sinh(u/c)$ ve $u=c\mathrm{arc}\sinh(s/c)$ olarak elde edilir. $\cosh^2(u/c)-\sinh^2(u/c)=1$ olduğundan $\cosh^2(u/c)-\frac{s^2}{c^2}=1$ olacaktır. Böylece

$$\cosh(u/c)=\sqrt{1+\frac{s^2}{c^2}}$$

olarak elde edilir. O halde *Katenoid* yüzeyinin birim hızlı profil eğrisi

$$\beta(s)=(c\sqrt{1+\frac{s^2}{c^2}},c\arcsin h(s/c))=(\sqrt{s^2+c^2},c\arcsin h(s/c))$$

olacaktır. Böylece $\beta(s)$ eğrisi profil eğrisi olacak şekilde *Katenoid* dönel yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(s,v)=(\sqrt{s^2+c^2}\cos(v),\sqrt{s^2+c^2}\sin(v),c\arcsin h(s/c))$$

şekline gelir. Burada $f(s)=\sqrt{s^2+c^2}$ ve $g(s)=c\arcsin h(s/c)$ olduğundan yüzeyin Gauss eğriliği G ve paralelin k_1 eğriliği hesaplanıp $G=k_1^2+\lambda$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$G=\frac{-f''(s)}{f(s)}=\frac{-c^2}{(s^2+c^2)^2}=\frac{s^2}{(s^2+c^2)^2}+\lambda=\frac{f'^2(s)}{f^2(s)}+\lambda=k_1^2+\lambda$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden elde edilen sabit s değeri için bulunan paralel *Katenoid* yüzeyinin biminimal eğrisidir.

Yukarıdaki denklem çözülürse,

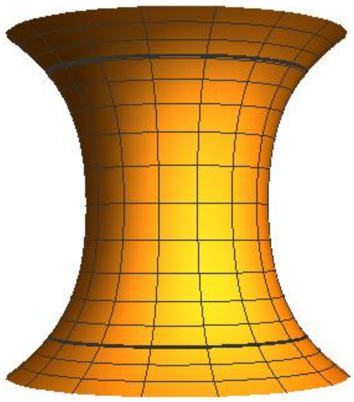
$$s^2 + \lambda(s^2 + c^2)^2 = -c^2$$

$$(s^2 + c^2)(1 + \lambda(s^2 + c^2)) = 0$$

$s^2 + c^2 \neq 0$ olduğundan $1 + \lambda(s^2 + c^2) = 0$. O halde $s^2 = -\dfrac{(1 + \lambda c^2)}{\lambda}$ dır. Dolayısıyla sabit s değeri

$$s = \pm\sqrt{-\frac{(1 + \lambda c^2)}{\lambda}}, \quad \lambda > -\frac{1}{c^2}$$

olarak bulunur.



Şekil 5.2: $c = 2$ için elde edilen *Katenoid* yüzeyi üzerindeki $\lambda = -1/8$ için bulunan biminimal eğriler.

Örnek 5.1.1.3 xz düzlemindeki $\alpha(u) = (f(u), g(u)) = (a\cos^3(u), a\sin^3(u))$, $a > 0$, $f(u) > 0$ eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyinin standart parametrik denklemi

$$X(u,v) = (a\cos^3(u)\cos(v), a\sin^3(u)\sin(v), u)$$

şeklindedir. Yüzeyin profil eğrisi $\alpha(u)=(a\cos^3(u),a\sin^3(u))$ birim hızlı hale getirilirse

$$\|\alpha'(u)\|=\|-3a\cos^2(u)\sin(u),3a\sin^2(u)\cos(u)\|$$

$$=\sqrt{9a^2\cos^2(u)\sin^2(u)(\cos^2(u)+\sin^2(u))}$$

$$=3a\cos(u)\sin(u)$$

olduğundan,

$$s=\int_0^u\|\alpha'(u)\|du=\int_0^u 3a\cos(u)\sin(u)du$$

$$=\frac{3}{2}a\int_0^u\sin(2u)du$$

$$=-\frac{3}{4}a\ \cos(2u)\Big|_0^u=\frac{3}{4}a(1-\cos(2u))$$

olacaktır. Böylece $s=\frac{3}{4}a(1-\cos(2u))$ olduğundan,

$$u=\frac{1}{2}\arccos(1-\frac{4s}{3a})$$

olarak elde edilir. Şimdi $f(u)$ ve $g(u)$ s parametresi cinsinden yazılırsa

$$f(u)=a\cos^3(\frac{1}{2}\arccos(1-\frac{4s}{3a}))$$

olup buradan

$$\arccos(1-\frac{4s}{3a})=2u$$

ve böylece

$$\cos(2u)=1-\frac{4s}{3a}=2\cos^2(u)-1$$

bulunur. O halde

$$\cos(u) = \pm\sqrt{1-\frac{2s}{3a}}$$

olacağından

$$u = \arccos(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3a}})$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\tilde{f}(s) = f(u) = a\cos^3(\arccos(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3a}})) = a\left(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3a}}\right)^3$$

olarak elde edilir. Özel olarak $a=1$ seçilirse $\tilde{f}(s) = \left(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3}}\right)^3$ olur.

Benzer işlem $g(u)$ için yapılırsa,

$$s = \frac{3}{4}a(1-\cos(2u)) = \frac{3}{2}a\sin^2(u)$$

olup buradan

$$\sin(u) = \pm\sqrt{\frac{2s}{3a}}$$

ve böylece de

$$u = \arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{g}(s) = g(u) = a\sin^3(u) = a\sin^3(\arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)) = a\left(\pm\sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)^3$$

olarak elde edilir. Özel olarak $a=1$ seçilirse $\tilde{g}(s)=\left(\pm\sqrt{\frac{2s}{3}}\right)^3$ olur.

$a=1$ için

$$\beta(s)=(\tilde{f}(s),\tilde{g}(s))=(\left(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3}}\right)^3,\left(\pm\sqrt{\frac{2s}{3}}\right)^3)$$

birim hızlı profil eğrisi z -ekseni etrafında döndürülerek dönel yüzey oluşturulursa, dönel yüzeyin standart parametrik denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$X(s,v)=(\left(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3}}\right)^3\cos(v),\left(\pm\sqrt{1-\frac{2s}{3}}\right)^3\sin(v),\left(\pm\sqrt{\frac{2s}{3}}\right)^3).$$

Şimdi dönel yüzeyin Gauss eğriliği G ve paralelin k_1 eğriliği hesaplanırsa

$$G=\frac{-f''(s)}{f(s)}=\frac{-(\pm\frac{1}{3}(1-2s/3)^{-1/2})}{\pm(1-2s/3)^{3/2}}=-\frac{1}{3}(1-2s/3)^{-2}$$

ve

$$k_1=\frac{f'(s)}{f(s)}=\frac{\mp(1-2s/3)^{1/2}}{\pm(1-2s/3)^{3/2}}=-(1-2s/3)^{-1}$$

bulunur. Bu ifadeler $G=k_1^2+\lambda$ denkleminde yerine yazılırsa,

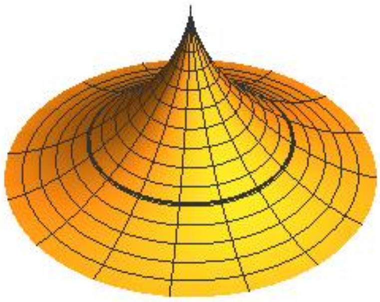
$$G=\frac{-f''(s)}{f(s)}=-\frac{1}{3}(1-2s/3)^{-2}=(1-2s/3)^{-2}+\lambda=\frac{f'^2(s)}{f^2(s)}+\lambda=k_1^2+\lambda$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden elde edilen sabit s değeri için bulunan paralel dönel yüzeyin biminimal eğrisidir.

Yukarıdaki denklem çözülürse sabit s değeri,

$$s=\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{3}{\lambda}}\ ,\ \lambda<0$$

olarak elde edilir.



Şekil 5.3: $a=1$ için elde edilen dönel yüzey üzerindeki $\lambda=-3$ için bulunan biminimal eğri.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Gauss eğriliği sabit olmayan dönel yüzeyler üzerinde biminimal eğriler incelenmiştir. Bir dönel yüzeyin bütün parallelerinin biminimal eğriler olması için gerek ve yeter koşullar Teorem 5.1.1 de ifade ve ispat edilerek örnek birkaç dönel yüzey üzerinde biminimal eğriler gösterilmiştir.

7. KAYNAKLAR

[1] Eells, J. Jr., Sampson, J. H., “ Harmonic mappings of Rieamannian manifolds ”, *Amer. J. Math.,* 86, 109-160, (1964).

[2] Jiang, G. Y., “ 2-Harmonic maps and their first and second variational formulas ”, *Chinese Ann. Math.,* Ser. A 7, 389-402, (1986).

[3] Caddeo, R., Montaldo, S. and Pıu, P., “ Biharmonic curves on a surface ”, *Rendiconti di Matematica, Ser.VII,* 21, 143-157, (2001).

[4] Özgür, C. and Güvenç, Ş., “ On biharmonic Legendre curves in S-space forms ”, *Turk. J. Math.,* 38, 454-461, (2014).

[5] Balmuş, A., Montaldo, S. and Oniciuc, C., “ Classification results for biharmonic submanifolds in spheres ”, *Israel J. Math.,* 168, 201-220, (2008).

[6] Caddeo, R., Montaldo, S. and Oniciuc, C., “ Biharmonic submanifolds of S^3 ”, *Internat. J. Math.,* 12, 867-876, (2001).

[7] Fetcu, D., “ Biharmonic Legendre curves in Sasakian space forms”, *J. Korean Math. Soc.,* 45, 393-404, (2008).

[8] Fetcu, D.,Caddeo, Loubeau, E., Montaldo, S. and Oniciuc, C., “Biharmonic submanifolds of CP^n ”, *Math. Z.,* 266, 505-531, (2010).

[9] Arroyo, J., Barros, M. and Garay, O. J., “ A Characterisation of helices and cornu spirals ın real space forms ”, *Bull. Austral. Math. Soc.,*Vol. 56, 37-49, (1997).

[10] Chen, B. Y., “ Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type ”, *Soochow J. Math. Soc.,* 17, 169-188, (1991).

[11] Loubeau, E. and Montaldo, S., “ Biminamal immersions ”, *Edinburgh Math. Soc.,* 51, 421-437, (2008).

[12] Hacısalihoğlu, H.H. ve Ekmekçi, N., *Tensör geometri,* Ankara: Hacisalihoğlu Yayınları, (2003).

[13] O'neill, B., *Elementary differential geometry,* New York-San Francisco-London: Academic Press, (1966).

[14] Blair, D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds,* Boston: Birkhauser, (2010).

[15] Chen, B. Y., *Total mean curvature and submanifolds of Finite Type,* Singapore : World Scientific, (1966).

[16] Simons, J., " Minimal varieties in Rieamannian manifolds ", *Ann. Math.,* 88, 62-105, (1968).

[17] Gray, A., *Modern differential geometry of curves and surfaces* , Boca Raton MA: CRC Press, (1993).

[18] Erbacher, J., " Reduction of codimension of a isometric immersion ", *J. Differential Geom.,* 5, 333-340, (1971).